

Universidade de São Paulo

Instituto de Física



Manipulação de Coeficientes de Transporte

Kleto Michel Zan

A handwritten signature in black ink, which appears to read "Celso Grebogi".

Orientador: Prof. Dr. Celso Grebogi.

Dissertação apresentada ao Instituto de Física para
obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Celso Grebogi (USP)

Prof. Dr. Alessandro Paulo Sérvio de Moura (USP)

Prof. Dr. Elbert Einstein Neher Macau (INPE)



São Paulo

2004

A handwritten signature in black ink, which appears to read "Armando Corbani Ferraz".

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

Z Z7m

M

Ex.2

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Zan, Kleto Michel

Manipulação de Coeficientes de Transporte.
São Paulo, 2004.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física - Depto. de Física Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Celso Grebogi
Área de Concentração: Física

Unitermos

1. Caos (Sistemas Dinâmicos);
2. Fenômeno de Transporte;
3. Física da Matéria Condensada.

USP/IF/SBI-049/2004

Ao seu Cido e à dona Bene.

Agradecimentos

Quero agradecer aos colegas Reginaldo Farias, paraense pai-d'égua, Gisele Oda, a experiente da sala, Thiago Pereira, Juliano Bonacin e João Belther, conterrâneos, e Henrique Hamaguchi. Ao Huang Yann, pelo Linux, e à Maria Mavilia. Também ao Suso Kraut, pelas lições sobre ciência e português, e obrigadíssimo por tudo ao Rafael Ribeiro Dias Vilela de Oliveira. Agradeço ao professor Celso Grebogi, pela confiança e pelos exemplos de dedicação ao trabalho e, sobretudo, de cientista. À minha família, pelo apoio nos momentos difíceis, e à Sabrina, por estar comigo em todos os momentos, lendo, relendo e sugerindo.

O CNPq financiou a dissertação.

Quantas observações pacientes, mas não tranqüilas, é necessário recolher sobre os movimentos aparentemente irregulares desses mundos desconhecidos antes que possamos estar seguros que não nos deixamos levar por coincidências, que nossas previsões não serão traídas, antes de deduzirmos as leis corretas, adquiridas ao custo de cruéis experiências, dessa astronomia apaixonada!

À Sombra das Moças em Flor, Marcel Proust

Resumo

Estudamos a relação entre as propriedades macroscópicas e microscópicas dos processos difusivos de sistemas dinâmicos caóticos sob aplicação de técnicas de controle. Utilizamos o mapa padrão para mostrar que com o uso dessas técnicas é possível manipular os coeficientes de transporte em sistemas Hamiltonianos caóticos. Concluimos que o coeficiente de difusão, a quantidade macroscópica estudada nesse trabalho, é alterado quando aplicamos métodos de controle em cada uma das partículas microscópicas que compõem o sistema.

Abstract

We study the relationship between macroscopic and microscopic properties of diffusion processes in chaotic dynamical systems under control. We show that control allows the manipulation of the transport coefficients in chaotic Hamiltonian systems. We illustrate our ideas in the case of the standard map. We conclude that the diffusion coefficient, the coefficient studied in this work, is modified when control methods are applied to the particles of the system.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
1 Introdução	1
2 Controle de Caos	3
2.1 Sensibilidade às Condições Iniciais	3
2.2 Técnicas de Controle	4
2.3 Mapa Logístico	6
2.4 Controle do Mapa Logístico	9
3 Sistemas Hamiltonianos	14
3.1 Mapa Padrão	14
3.2 Controle de Sistemas Hamiltonianos	21
3.2.1 Perturbação Não-linear	21
3.2.2 Ejeção	27
4 Coeficientes de Transporte	35
4.1 Teoria Cinética	35
4.2 Difusão	37
4.3 Difusão em Sistemas Hamiltonianos	40

4.3.1	Difusão no Mapa Padrão	42
4.4	Difusão Anômala	47
5	Manipulação da Difusão	52
5.1	Parâmetro de Ejeção	52
5.2	Manipulação da Difusão com Ejeção	54
6	Discussões	59
	Referências Bibliográficas	60

1

Introdução

Entender os processos de transporte analisando as equações não-lineares do movimento microscópico de um sistema de muitas partículas é um dos problemas fundamentais na mecânica estatística de não-equilíbrio. Apesar da dinâmica microscópica ser determinística, muitos fenômenos macroscópicos apresentam um caráter errático ou randômico na evolução temporal [1]. Temos de um lado a teoria de transporte que analisa as quantidades macroscópicas calculadas através da mecânica estatística e de outro, as equações determinísticas que governam o movimento de cada partícula e obedecem às leis da mecânica clássica. A união entre a teoria de transporte e a teoria de sistemas dinâmicos determinísticos conduz a uma teoria de transporte determinístico [2].

Com essa ligação, as propriedades de transporte da dinâmica determinística não-linear podem exibir uma grande variedade de fenômenos, dependendo das modificações na dinâmica das partículas [3]. Em muitas situações onde a presença de comportamento caótico é forte, o transporte através do espaço de fase tende a ser uniforme e pode imitar um processo randômico do tipo Browniano. Entretanto, em situações mais genéricas, onde coexistem movimento caótico e regular, o espaço de fase tem uma estrutura fractal que pode induzir importantes variações no processo de transporte [4,5].

A modificação da dinâmica das partículas pode ser feita aplicando a teoria de controle de sistemas dinâmicos, usada quando é necessário que um sistema caótico se comporte de uma maneira desejada [6,7]. A aplicação desse controle baseia-se numa característica básica dos sistemas caóticos: a sensibilidade às pequenas variações. O controle é feito aplicando pequenas perturbações que conduzam e mantenham a órbita num comportamento desejado.

Aplicações de pequenas perturbações na dinâmica do sistema microscópico podem produzir mudanças no coeficiente de difusão, uma das quantidades macroscópicas da teoria de transporte. Recentemente, foi mostrado que o coeficiente de difusão é alterado quando perturbações randômicas são incluídas nos parâmetros ou nas variáveis de estado de um sistema caótico com muitas partículas [8].

No nosso trabalho usaremos técnicas de controle de sistemas Hamiltonianos caóticos para aplicar pequenas perturbações que alterem o comportamento da dinâmica do mapa padrão e, como consequência, manipularemos o coeficiente de difusão.

No Cap. 2 apresentamos as idéias da teoria de controle de caos e uma aplicação para um sistema dissipativo unidimensional.

No Cap. 3 apresentamos a extensão dos métodos de controle para sistemas Hamiltonianos. Descrevemos duas técnicas recentes, uma com perturbação não-linear e outra com o mergulho do sistema em dimensão maior, chamada de ejeção. Mostramos como o controle modifica o espaço de fase do mapa padrão, um dos sistemas mais usados no estudo de caos e coeficientes transporte.

No Cap. 4 revisamos uma parte da teoria de transporte aplicada a sistemas Hamiltonianos, mostrando como as estruturas criadas no espaço de fases induzem mudanças na difusão.

Finalmente, no Cap. 5 apresentamos os resultados obtidos para o coeficiente de difusão com a aplicação da ejeção no mapa padrão. Mostramos que, variando o parâmetro de controle, podemos mudar a difusão.

2

Controle de Caos

A teoria de controle de caos estuda como um sistema dinâmico deve ser alterado para que realize um comportamento particular desejado. Devido à natureza do caos, muitos comportamentos diferentes estão simultaneamente presentes num mesmo sistema. Além disso, a ergodicidade de sistemas caóticos garante que durante a evolução temporal a vizinhança de todos pontos de cada órbita periódica instável é visitada. A ligação da sensibilidade do caos às pequenas modificações com a presença simultânea de vários comportamentos permite que a dinâmica caótica seja controlada. A teoria de controle de caos foi enunciada inicialmente por Ott, Grebogi e Yorke (OGY) [9]. Recentemente, foi publicado um trabalho descrevendo a evolução dessa teoria e alguns resultados de suas aplicações em circuitos eletrônicos, reações químicas, *lasers*, fluidos e sistemas biológicos [10]. Seguindo esse trabalho, nesse capítulo introduzimos as idéias do controle e um exemplo da aplicação do método OGY ao mapa logístico.

2.1 Sensibilidade às Condições Iniciais

Uma das principais conseqüências das propriedades do caos é que um sistema dinâmico caótico visita desordenadamente vizinhanças de órbitas periódicas

instáveis imersas no atrator. A idéia para controlar o caos é estabilizar uma órbita mergulhada no atrator através da aplicação de pequenas perturbações quando o sistema estiver próximo da trajetória desejada. O fato de um sistema caótico ser sensível às mudanças nas condições iniciais pode ser muito útil em situações experimentais práticas. Se uma pequena perturbação pode originar uma modificação do comportamento ao longo do tempo, então a escolha adequada de tal perturbação pode direcionar a trajetória para qualquer parte do atrator e produzir uma série de estados dinâmicos desejados.

Podemos, então, produzir um número infinito de comportamentos dinâmicos desejáveis (periódicos ou aperiódicos) usando o mesmo sistema caótico somente com a ajuda de perturbações muito pequenas escolhidas apropriadamente. É importante enfatizar que numa dinâmica não-caótica isso não acontece, pois as perturbações que devem ser aplicadas para produzir um novo comportamento devem ser, em geral, da mesma ordem de grandeza que as variáveis dinâmicas não perturbadas.

A idéia principal do controle de caos consiste em esperar por uma passagem natural da órbita caótica próxima ao comportamento periódico desejado e, então, aplicar uma pequena perturbação escolhida adequadamente para estabilizar a dinâmica periódica, a qual deve ser instável no sistema sem perturbação. Através desse mecanismo, pode-se usar um dado sistema no laboratório para produzir um número infinito de comportamentos periódicos diferentes, correspondentes às órbitas periódicas instáveis, com uma grande flexibilidade na troca de um comportamento para outro.

2.2 Técnicas de Controle

A melhor forma de trabalhar com sistemas dinâmicos é utilizar o espaço das soluções, já que geralmente o sistema não é conhecido completamente, pois, além de ser tipicamente complicado, pode apresentar imperfeições experimentais. As equações do sistema, mesmo que estejam disponíveis, são de pouca utilidade devido à sensibilidade às pequenas perturbações. As soluções podem ser conseguidas obtendo uma série temporal de uma variável dinâmica relevante. A melhor perturbação a ser aplicada ao sistema é selecionada depois de um tempo de aprendizagem, enquanto a dependência da dinâmica com algum controle externo é testada experimentalmente. Tal perturbação pode afetar um parâmetro de controle do sistema ou uma variável de estado.

Como um exemplo do primeiro caso, é escolhida uma dinâmica caótica que se desenvolve dentro de um atrator num espaço de fase de d dimensões. Pode-se construir uma seção da dinâmica que seja perpendicular ao fluxo caótico, chamada de seção de Poincaré. Essa seção de $d - 1$ dimensões contém todas as informações relevantes da dinâmica, que agora é um mapeamento de uma interseção do fluxo na seção de Poincaré com a próxima interseção. Todo comportamento periódico é visto como sendo um ciclo periódico formado de um número discreto de pontos. O número desses pontos determina a periodicidade da órbita periódica.

Como todas as órbitas periódicas na dinâmica caótica sem perturbação são instáveis, o ciclo periódico no mapa também é instável. Além disso, como o fluxo caótico visita a vizinhança de todas as órbitas periódicas instáveis, pois é ergódico, isso implica que o mapeamento na seção também visita todas as possíveis seqüências de pontos correspondentes aos comportamentos periódicos do sistema. Um ciclo periódico de período 1 para o fluxo corresponde a um ponto na seção de Poincaré, visitado indefinidamente. A órbita correspondente é instável e neste caso possui uma variedade estável e uma variedade instável. A variedade estável é a coleção de direções no espaço de fase através das quais a trajetória se aproxima do ponto e a variedade instável são as direções que se aproximam do ponto para tempos negativos.

O controle é feito através da perturbação de um parâmetro quando a trajetória natural estiver numa vizinhança muito próxima do ponto desejado. A perturbação é aplicada de tal forma que a próxima interseção com a seção de Poincaré coloque a trajetória na variedade estável. A evolução natural subsequente da dinâmica, exceto por não-linearidades e ruído, converge para o ponto desejado, isto é, o comportamento periódico desejado é estabilizado. A escolha da perturbação é feita por meio de uma reconstrução de dados experimentais das propriedades lineares locais da dinâmica em torno do ponto desejado. Um dos maiores problemas no processo acima é que o controle só pode ser aplicado quando o sistema estiver suficientemente próximo do comportamento desejado, onde valham as aproximações lineares da dinâmica local. Essa proximidade é garantida pela ergodicidade do caos, que é indiferente à escolha da condição inicial para a evolução temporal, a menos de um conjunto de condições iniciais de medida nula. Mas, em alguns casos, a vizinhança de um dado ponto do atrator caótico, que pode ser justamente o alvo do controle, é raramente visitado, pois a distribuição de probabilidade é pequena nesse ponto. Nesses casos, a dinâmica sem perturbação levará um tempo muito longo para se aproximar do alvo e isso acarretará um tempo de espera inaceitável

no processo de controle. Métodos eficientes de direcionamento podem reduzir o tempo de espera em algumas ordens de grandeza. Por isso, esses métodos algumas vezes são vistos como uma tarefa preliminar para o controle de caos [11, 12].

2.3 Mapa Logístico

O mapa logístico é um dos sistemas caóticos mais estudados na literatura de dinâmica caóticos e aqui é usado como exemplo do método de controle com pequenas perturbações baseado na existência de infinitas órbitas periódicas instáveis. Algumas características desse mapa são destacadas a seguir.

O crescimento ou declínio da população de uma dada espécie pode ser modelado através da equação

$$\frac{dN}{dt} = \mu N(1 - N), \quad (2.1)$$

onde $N = N(t)$ é a população num dado instante e μ é a taxa de crescimento na ausência de quaisquer fatores limitantes, como predadores, pragas ou epidemias. Esse modelo leva em conta a diminuição da reprodução quando a população é muito grande, pois quando isso acontece o alimento torna-se escasso e o crescimento proporcional ao número de indivíduos é pequeno. A Eq. (2.1) é conhecida como equação logística e foi introduzida por P. F. Verhulst, em 1838, como um modelo de crescimento da população humana. R. Pearl, em 1930, mostrou a concordância razoável da equação com os dados experimentais das populações de *Drosophila melanogaster* (mosca de frutas) e G. F. Gause, em 1935, fez o mesmo para populações de *Paramecium* e de *Tribolium* (caruncho de cereais) [13].

A Eq. (2.1) dá origem ao mapa logístico, tomando-se $N_n \equiv \frac{\mu}{1+\mu} x_n$ e $a = 1 + \mu$ [14],

$$x_{n+1} = f(x_n, a) = ax_n(1 - x_n), \quad (2.2)$$

onde o número de indivíduos da geração $n + 1$ é determinado univocamente pela geração anterior n , através da lei $x_{n+1} = f(x_n, a)$. O intervalo de tempo entre uma medida e outra da população é a geração e pode ser, por exemplo, de 10 anos, 3 meses ou 2 segundos. Essa é uma forma de discretizar a medida de tempo para que o sistema seja tratado como um mapa.

Fazendo

$$x_* = ax_*(1 - x_*)$$

encontram-se os pontos fixos $x_* = 0$ e $x_* = 1 - \frac{1}{a}$. Com $0 < a < 1$, o mapa tem

um atrator em $x_* = 0$, para onde o sistema tende assintoticamente para qualquer condição inicial. Para $1 < a < 3$, o mapa tem um atrator no ponto fixo $x_* = 1 - \frac{1}{a}$, pois $|f'(x, a)| = |2 - a| < 1$. Para $3 < a < 1 + \sqrt{6}$, os dois pontos fixos são instáveis e o atrator é uma órbita periódica de período 2. Para valores de a maiores do que $1 + \sqrt{6} \approx 3,45$, a órbita periódica de período 2 torna-se instável e ocorre uma cascata de duplicação de período que se acumula em $a \approx 3,57$, onde aparece caos pela rota de bifurcação de duplicação de período.

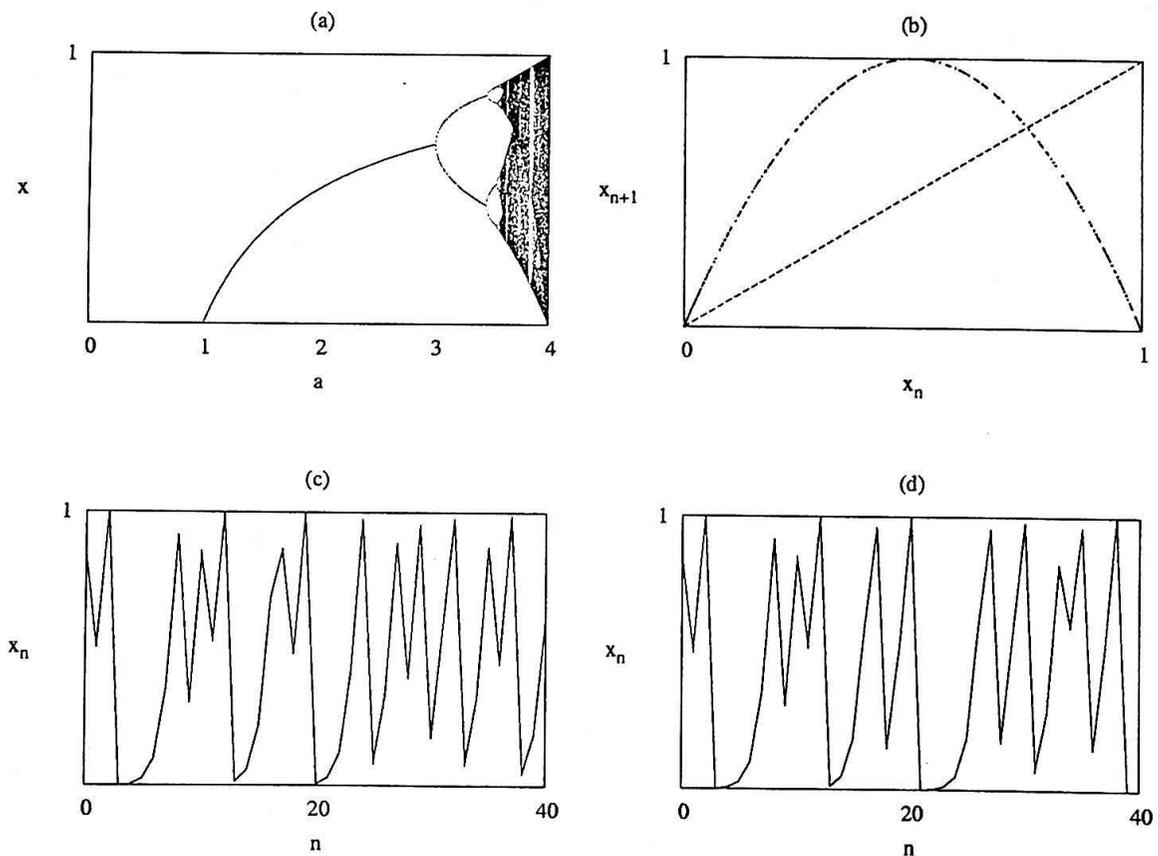


Figura 2.1: Mapa logístico. (a) Diagrama de bifurcação. (b) Mapa para $a = 4$ e a linha diagonal $x_{n+1} = x_n$. Nas interseções das duas curvas estão os pontos fixos $x_* = 0$ e $x_* = 1 - \frac{1}{a} = 0,75$. (c) Trajetória com condição inicial $x_0 = 0,85$. (d) Trajetória com condição inicial levemente diferente, $x_0 = 0,850001$.

A Fig. 2.1(a) mostra o diagrama de bifurcação do comportamento de x com a variação do parâmetro a . A Fig. 2.1(b) mostra o mapa logístico com $a = 4$ e a bissetriz $x_{n+1} = x_n$. Os pontos fixos, ou órbitas de período 1, são os pontos $x_* = 0$ e $x_* = 1 - \frac{1}{a}$, para os quais ocorrem as interseções entre as duas curvas. A trajetória, ou órbita, do sistema pode ser vista graficamente ligando os pontos que a variável x assume em cada instante de tempo. As Figs. 2.1(c) e (d) mostram o comportamento caótico da trajetória para os 40 primeiros instantes de tempo, com o parâmetro $a = 4$, para o qual existe caos. Na Fig. 2.1(c) a condição inicial é $x_0 = 0,85$ e na Fig. 2.1(d) a condição é levemente diferente, $x_0 = 0,850001$. Mesmo com as duas condições iniciais sendo muito próximas, notamos que depois de poucas iterações as órbitas apresentam comportamentos diferentes, revelando a sensibilidade às condições iniciais. Na verdade, as trajetórias divergem exponencialmente quando o número de iterações aumenta. Apesar disso, a densidade de estados continua igual. Isto é, mesmo que cada trajetória siga um caminho diferente, depois de um tempo longo as duas trajetórias terão visitado o mesmo número de vezes a vizinhança de cada ponto no intervalo $[0,1]$.

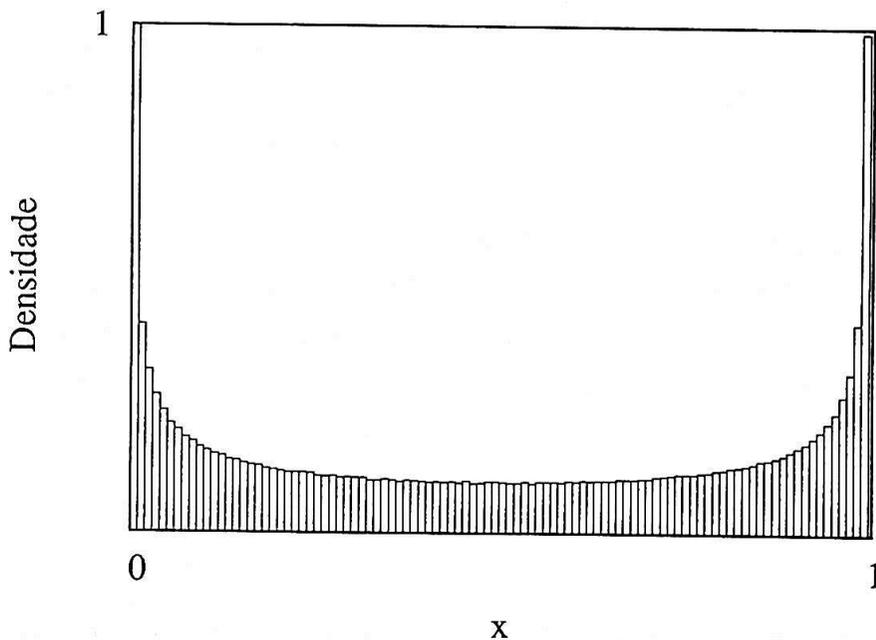


Figura 2.2: Histograma da frequência com que cada região é visitada. Tomamos $x_0 = 0,85$ e iteramos o mapa por 10^5 vezes. A densidade está normalizada à unidade, de forma que a região mais visitada corresponde a 1 e as outras, a frações da unidade. O histograma para $x_0 = 0,850001$ produz o mesmo resultado.

Para que isso seja visto, construímos um histograma que mostre a frequência com que cada região é visitada ao longo do tempo. Por exemplo, se o intervalo $[0,1]$ for dividido em 10 regiões, então as regiões serão $[0, \frac{1}{10}), [\frac{1}{10}, \frac{2}{10}), \dots, [\frac{9}{10}, 1]$. Generalizando, se o intervalo $[0,1]$ for dividido em m regiões que não se interceptam, então a i -ésima região será $[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m})$, com $i = 1, 2, \dots, m$. O histograma do mapa logístico está mostrado na Fig. 2.2. O resultado é o mesmo para quase todas as condições iniciais, com exceção daquelas que estão nas órbitas periódicas instáveis.

2.4 Controle do Mapa Logístico

Suponhamos, agora, que se queira por algum motivo evitar o comportamento caótico de um sistema como, por exemplo, o mapa logístico. O sistema deve, então, ser colocado numa órbita específica onde tenha o melhor desempenho para alguma aplicação desejada. Para isso, aplicamos o método de controle com pequenas perturbações usando órbitas periódicas instáveis presentes no atrator.

No mapa logístico com $a = 4$ existe uma órbita de período 2, com componentes $x_\star^1 \approx 0,3455$ e $x_\star^2 \approx 0,9045$, onde $x_\star^2 = f(x_\star^1)$ e $x_\star^1 = f(x_\star^2)$, e dois pontos fixos, um em $x_\star = 0$ e outro em $x_\star = 0,75$. Uma das características importantes dos atratores caóticos que possibilita o controle de caos é a existência de um número infinito de órbitas periódicas instáveis no atrator. Isto é, as órbitas periódicas são densas no atrator, por isso elas passam em qualquer vizinhança, por menor que seja, de qualquer ponto do atrator. Dessa forma, existe uma relação entre as propriedades ergódicas de um atrator e o seu conjunto denso de órbitas periódicas [15–18].

O método OGY consiste em fazer pequenas perturbações no parâmetro a quando a trajetória visitar uma vizinhança suficientemente pequena da órbita desejada. Na vizinhança de uma órbita periódica, o mapa logístico pode ser aproximado por uma equação linear. Expandindo até primeira ordem a Eq. (2.2) em torno da órbita periódica desejada x_\star^i encontramos

$$x_{n+1} = f(x_\star^i, a) + (x_n - x_\star^i) \frac{\partial f(x_n, a)}{\partial x_n} + \Delta a \frac{\partial f(x_n, a)}{\partial a}.$$

As derivadas são calculadas no ponto $x_n = x_\star^i$, chamado de alvo, então

$$x_{n+1} = f(x_\star^i, a) + (x_n - x_\star^i)(a - 2ax_\star^i) + \Delta a(x_\star^i - (x_\star^i)^2).$$

Para o controle ser efetivado, o sistema deve permanecer na mesma órbita,

$$x_{n+1} - f(x_{\star}^i, a) = 0.$$

O sistema ficará em x_{\star}^i se para a n -ésima iteração a variação do parâmetro for dada por

$$\Delta a_n = a \frac{(2x_{\star}^i - 1)(x_n - x_{\star}^i)}{x_{\star}^i(1 - x_{\star}^i)}. \quad (2.3)$$

Com isso, o parâmetro deve ser mudado a cada iteração para garantir que a trajetória seja mantida na órbita periódica desejada x_{\star}^i . Essa mudança é dada por

$$a_n = a + \Delta a_n,$$

onde a é o parâmetro nominal da equação original.

Escolhendo a vizinhança ε do alvo suficientemente pequena, $|x_n - x_{\star}^i| \ll 1$, a perturbação do parâmetro Δa_n , dada pela Eq. (2.3), será pequena. Mesmo assim, marcamos um valor máximo permitido para a perturbação, chamado δ , de modo que o sistema não seja muito alterado.

Na Fig. 2.3 mostramos algumas aplicações desse método ao mapa logístico com $a = 4$. A Fig. 2.3(a) mostra o resultado da aplicação do controle ao ponto fixo $x_{\star} = 0,75$. A trajetória aproxima-se do alvo depois de 851 iterações, caindo na vizinhança $0,75 \pm 10^{-3}$. Como o parâmetro de controle a está sendo levemente perturbado (não mais do que cinco vezes a vizinhança escolhida), a trajetória estabiliza-se nessa órbita. A Fig. 2.3(b) mostra o mesmo procedimento, mas numa órbita de período 2, com $x_{\star}^1 \approx 0,3455$ e $x_{\star}^2 \approx 0,9045$. Na Fig. 2.2(c) o controle é aplicado à órbita de período 3, com $x_{\star}^1 \approx 0,1170$, $x_{\star}^2 \approx 0,4132$ e $x_{\star}^3 \approx 0,9698$. Em todos os casos, a trajetória começa com a condição inicial $x_0 = 0,29$. A vizinhança escolhida é $\varepsilon = 10^{-3}$ e a perturbação máxima permitida é cinco vezes maior do que a vizinhança, $\delta = 5 \times 10^{-3}$.

A densidade de estados é alterada quando o controle é aplicado. Por isso, as médias feitas sobre o sistema também mudam. Tomemos como exemplo o valor médio de x : no mapa original a média é $\langle x \rangle = 0,5$; com o controle aplicado a média é modificada para $\langle x \rangle = x_{\star}^1$, $\langle x \rangle = \frac{x_{\star}^1 + x_{\star}^2}{2}$ e $\langle x \rangle = \frac{x_{\star}^1 + x_{\star}^2 + x_{\star}^3}{3}$, respectivamente. A Fig. 2.4 mostra a densidade de estados com as órbitas controladas. Comparando com o histograma do mapa original, percebemos que a densidade de estados é alterada. No Cap. 5 usaremos esse tipo de observação para analisar o comportamento macroscópico de um conjunto de condições iniciais.

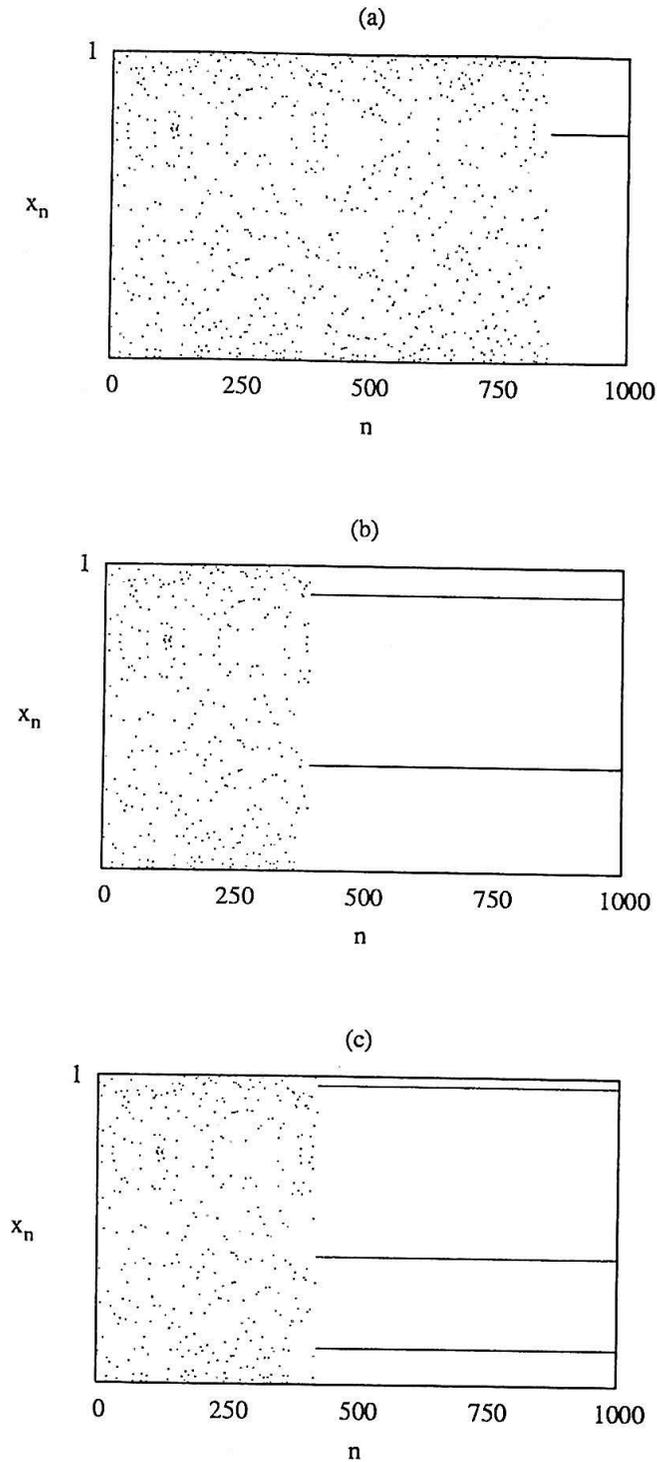


Figura 2.3: Controle do mapa logístico com $a = 4$. Controle aplicado (a) ao ponto fixo $x_{\star} = 0,75$, (b) à órbita de período 2, com $x_{\star}^1 \approx 0,3455$ e $x_{\star}^2 \approx 0,9045$ e (c) à órbita de período 3, com $x_{\star}^1 \approx 0,1170$, $x_{\star}^2 \approx 0,4132$ e $x_{\star}^3 \approx 0,9698$. A vizinhança escolhida para ser iniciado o controle é $\varepsilon = 10^{-3}$ e a condição inicial é $x_0 = 0,29$.

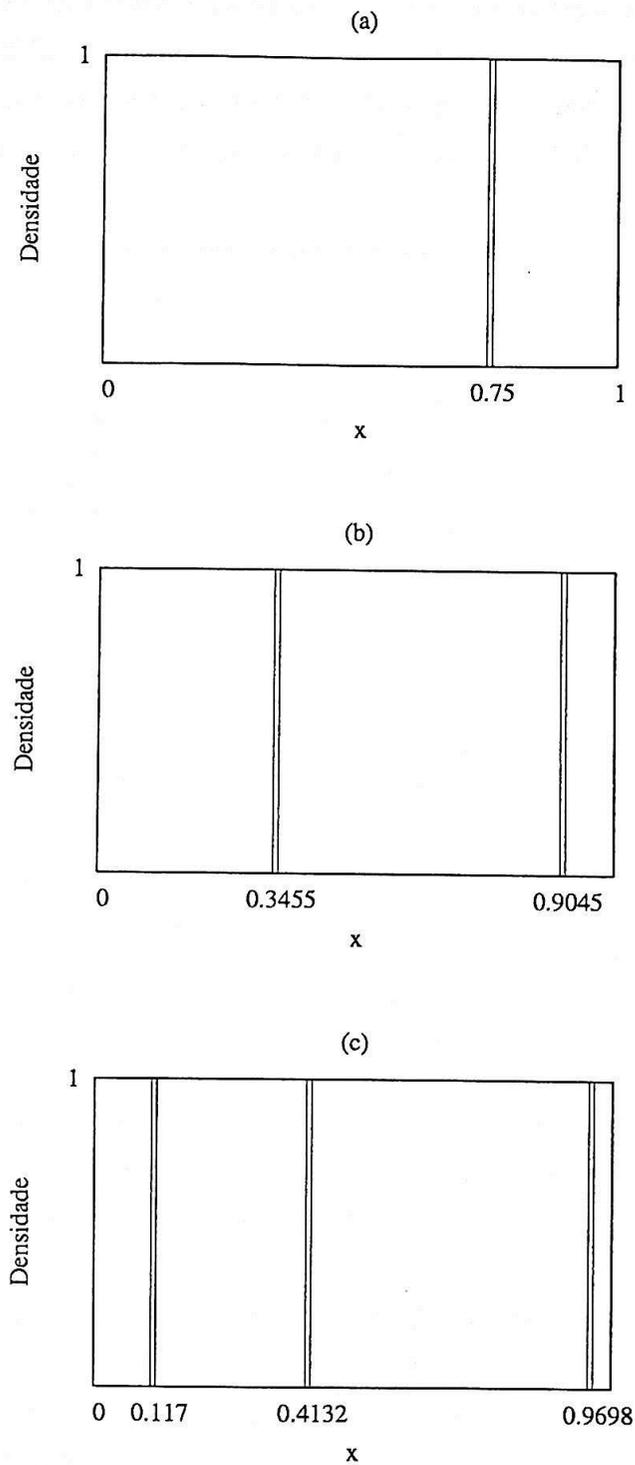


Figura 2.4: Histograma da frequência com que cada região é visitada. Foram feitas 10^6 iterações para as condições aplicadas às trajetórias representadas na Fig. 2.3. As regiões mais ocupadas estão normalizadas à unidade.

É importante saber quantas iterações acontecem antes que a trajetória caia na vizinhança escolhida. Quanto menor a vizinhança escolhida, mais iterações são necessárias para que o controle seja iniciado, pois a probabilidade da trajetória encontrar a vizinhança de uma órbita escolhida depende de ε .

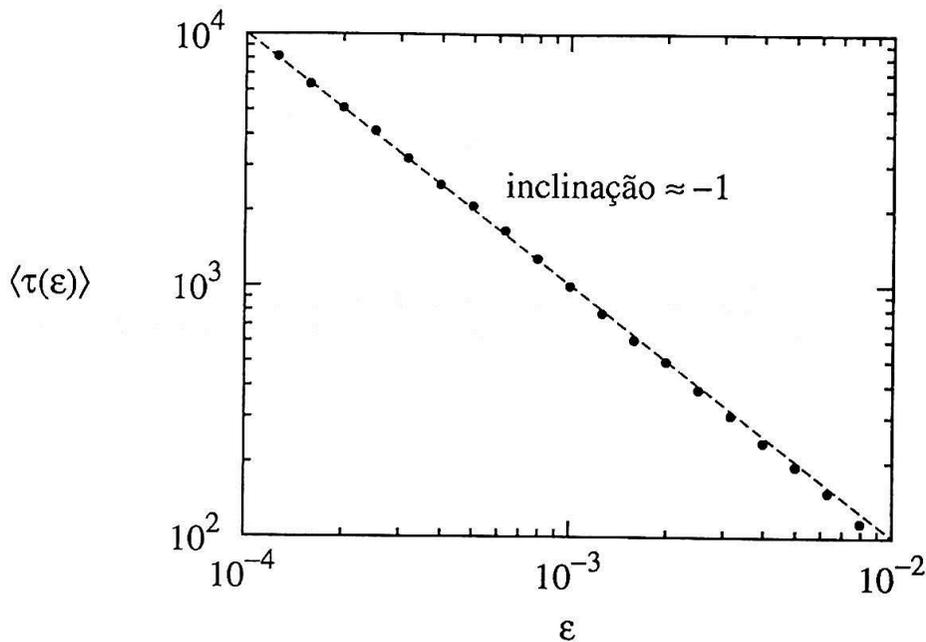


Figura 2.5: Transiente médio de controle pela vizinhança ε . Foram escolhidas 5000 condições iniciais uniformemente distribuídas em $[0,1]$ e iteradas até que entrassem na região de controle. Os resultados estão marcados com pontos. A dependência da média do transiente com a vizinhança é bem ajustada pela relação $\langle \tau(\varepsilon) \rangle \sim \varepsilon^{-1}$.

O transiente de controle τ , que é o número de iterações necessárias para que o controle seja iniciado, deve ser inversamente proporcional ao tamanho da vizinhança do alvo [19, 20]. Essa hipótese é confirmada com um experimento numérico. O controle foi aplicado a 5000 condições iniciais distribuídas uniformemente no intervalo $[0,1]$. Cada condição inicial foi iterada até que estivesse na vizinhança escolhida. Calculamos, então, a média do número dessas iterações sobre todas as condições iniciais. O gráfico da média do transiente de controle $\langle \tau \rangle$ pela vizinhança ε é mostrado na Fig. 2.5.

3

Sistemas Hamiltonianos

A dinâmica de sistemas Hamiltonianos está presente em muitas circunstâncias. Incluem não somente aqueles sistemas mecânicos sem atrito ou dissipação, mas também uma variedade de outros problemas. O controle desse tipo de sistema é muito importante para aplicações práticas. Por exemplo, em um tokamak deve-se estar certo de que as linhas do campo magnético permaneçam confinadas na câmara toroidal para que o plasma fique confinado. Nesse capítulo apresentamos duas técnicas de controle de sistemas Hamiltonianos desenvolvidas recentemente aplicadas ao modelo físico mais utilizado no estudo de caos em sistemas conservativos, o mapa padrão.

3.1 Mapa Padrão

O mapa padrão é o modelo de um sistema real que pode ser idealizado da seguinte forma: toma-se uma massa m , de carga q , presa a uma haste rígida não condutora de comprimento R e massa desprezível, com momento de inércia I , rodando sobre um plano em torno de um pivô. Não há atrito ou força gravitacional. Duas placas condutoras opostas formando um capacitor englobam o sistema. O

capacitor é descarregado em intervalos de tempos iguais, produzindo um campo elétrico uniforme $E(t)$ que provoca um golpe instantâneo na massa, chamada de golpe. O sistema, conhecido como rotor impulsionado, ou *delta-kicked rotor*, está esquematizado na Fig. 3.1.

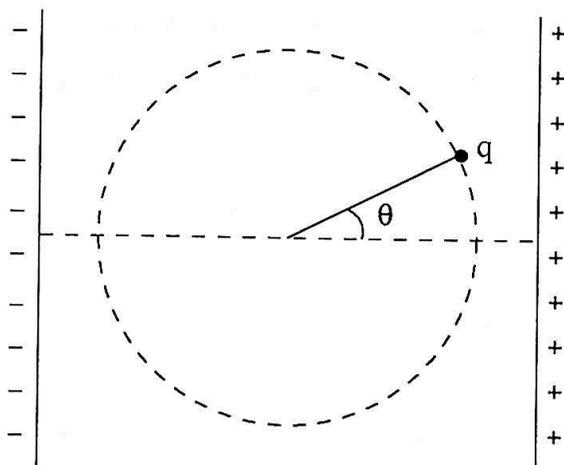


Figura 3.1: Rotor impulsionado formado por um sistema de placas paralelas que descarregam um campo elétrico uniforme $E(t)$, com período constante, atuando numa massa m , de carga q , presa a um pivô por uma haste rígida não condutora, de momento de inércia I .

Enquanto o campo elétrico não for descarregado, a Hamiltoniana do sistema é dada por

$$H_0 = \frac{J^2}{2I}$$

onde J é o momento angular. O termo perturbativo devido ao campo elétrico periódico é escrito como

$$H_1 = -qE_0R \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

onde E_0 é a amplitude do campo elétrico, θ é o ângulo que a haste forma com a reta normal às placas e T é o período entre um golpe e outro. A Hamiltoniana do sistema, $H = H_0 + H_1$, é escrita como

$$H = \frac{J^2}{2I} - qE_0R \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Para o caso sem perturbação, $E_0 = 0$, o sistema é integrável, pois há um grau

de liberdade, o ângulo θ , e uma constante de movimento, o momento angular J . O produto qE_0R depende dos parâmetros acessíveis do sistema e é definido como uma única variável positiva $K \equiv qE_0R > 0$.

Para o caso com perturbação, $E_0 \neq 0$, o momento angular é constante entre cada golpe e aumenta instantaneamente a cada golpe. O ângulo é tipicamente diferente no instante do golpe, mas varia linearmente com t entre dois golpes consecutivos. Usando as equações de Hamilton, obtemos as equações de movimento do rotor impulsionado, dadas por

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J} = \frac{J}{I}, \\ \dot{J} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -K \operatorname{sen} \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \end{cases} \quad (3.1)$$

Quando o n -ésimo golpe é aplicado, o sistema muda do momento angular J_n para J_{n+1} e entre um golpe e o seguinte o ângulo varia de θ_n para θ_{n+1} . Integrando o momento angular de $t = nT - \varepsilon$ a $t = nT + \varepsilon$, com $\varepsilon \rightarrow 0$ (instante do golpe), e usando a propriedade da função delta de Dirac,

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx = 1,$$

encontramos

$$J_{n+1} = J_n - K \operatorname{sen} \theta_n. \quad (3.2)$$

Durante o intervalo de tempo de nT a $(n+1)T$ o momento angular é constante ($J = J_{n+1}$), como pode ser visto na Fig. 3.2. Integrando o ângulo de $t = nT$ a $t = (n+1)T$, encontramos

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{T}{I} J_{n+1}. \quad (3.3)$$

Sem perder a generalidade escolhemos as unidades de forma que $T/I = 1$ [21]. Também podemos fazer a seguinte transformação nas Eqs. (3.2) e (3.3): $\theta \rightarrow 2\pi q$ e $J \rightarrow 2\pi p$. O ângulo θ está limitado ao intervalo $[0, 2\pi]$, conforme o esquema montado (ver Fig. 3.1), então a variável q assumirá valores no intervalo $[0, 1]$. De acordo com as Eqs. (3.2) e (3.3), com $\theta \in [0, 2\pi]$, o mapa é idêntico para valores de J e $J + 2\pi$. Usando as transformações de coordenadas, podemos considerar p no intervalo $[0, 1]$, assim como q . Então, todas as informações relevantes sobre o mapa estão contidas no intervalo $q \in [0, 1]$ e $p \in [0, 1]$, chamado de domínio fundamental [22].

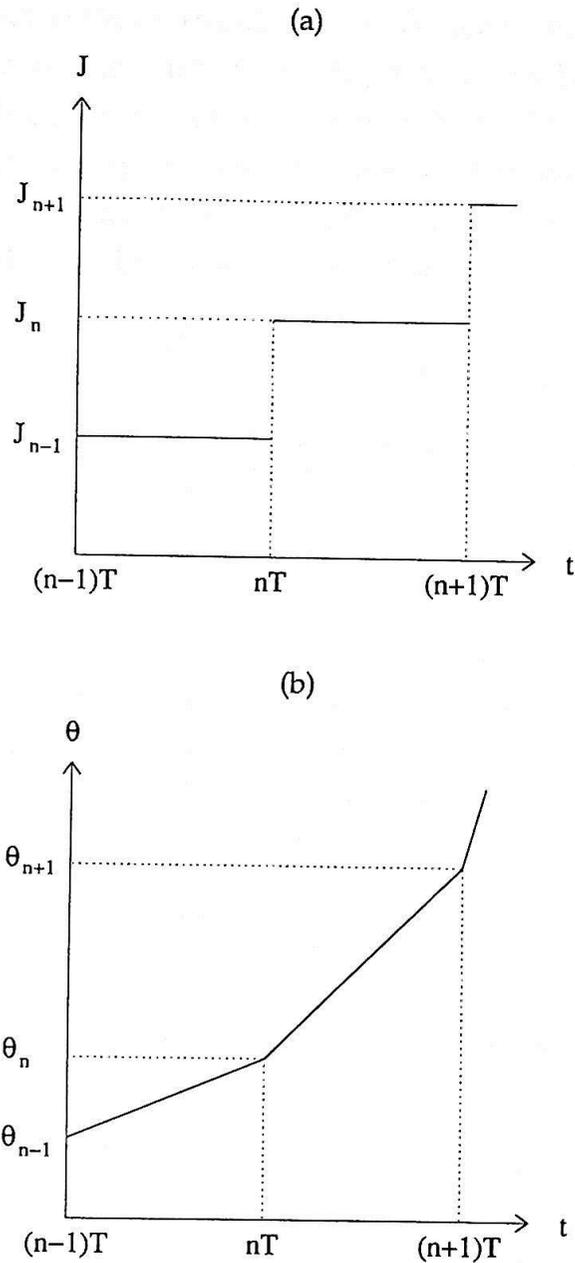


Figura 3.2: Dependência temporal do momento angular e do ângulo para o rotor impulsionado.

Usando a escolha de unidades, a transformação das coordenadas e o domínio fundamental do sistema, podemos escrever, a partir das Eqs. (3.2) e (3.3), o mapa padrão

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n - \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi q_n) \quad \text{mod } 1, \\ q_{n+1} = q_n + p_{n+1} \quad \text{mod } 1, \end{cases} \quad (3.4)$$

onde mod 1 representa o domínio fundamental. O sistema de Eqs. (3.4) foi introduzido por Taylor [23] e tratado extensivamente por Chirikov [24], por isso também é chamado de mapa de Chirikov–Taylor. Esse mapa tem provado ser o modelo mais conveniente para estudar o comportamento caótico típico de sistemas Hamiltonianos que produzam um mapa bidimensional. Para conferir se o mapa é conservativo calculamos o determinante do Jacobiano, dado por

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial p_{n+1}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial q_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial q_{n+1}}{\partial q_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -K \cos(2\pi q_n) \\ 1 & 1 - K \cos(2\pi q_n) \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\det J = 1$ e, então, o sistema é conservativo.

Os pontos fixos do sistema são encontrados fazendo $q_{n+1} = q_n = q_*$ e $p_{n+1} = p_n = p_*$. Como o ângulo é periódico ($\theta = \theta + 2\pi$), então $q = q + m$, com m inteiro. Com essas considerações encontramos os pontos fixos $(q_*, p_*) = (0, m)$ e $(\frac{1}{2}, m)$. Existem, assim, dois pontos fixos para cada valor de m . Expandindo sobre os pontos fixos encontramos a matriz J linearizada, chamada de A ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mp K \\ 1 & 1 \mp K \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

onde o sinal em cima é para o ponto fixo com $q_* = 0$ e o sinal de baixo para $q_* = \frac{1}{2}$.

O estudo da estabilidade dos pontos fixos depende dos autovalores de A . Os autovalores de A são dados por

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (A_{11} - \lambda)(A_{22} - \lambda) - A_{12}A_{21} = 0. \quad (3.6)$$

Na matriz A o traço é $\text{tr} A = A_{11} + A_{22}$ e o determinante, $\det A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$. Substituindo $\text{tr} A$ e $\det A$ e lembrando que $\det A = 1$ a Eq. (3.6) torna-se

$$\lambda^2 - (\text{tr} A)\lambda + 1 = 0,$$

cujas soluções são

$$\lambda = \frac{\text{tr} A}{2} \pm \frac{\sqrt{(\text{tr} A)^2 - 4}}{2}.$$

Então, a estabilidade do sistema fica definida pelo valor do traço de A :

- (a) Se $|\text{tr } A| > 2$, então as raízes são reais. Os autovalores são uma combinação de exponenciais reais positivas e negativas, que representam movimentos nos dois ramos de uma hipérbole. Por isso, diz-se que as órbitas periódicas são hiperbólicas e o movimento é instável.
- (b) Se $|\text{tr } A| < 2$, então as raízes são complexas. Os autovalores são uma combinação de termos com senos e co-senos, que representam um movimento elíptico em torno do ponto fixo. A órbita é estável.

O mapa padrão, o qual tem a expansão sobre os pontos fixos dada pela matriz linearizada da Eq. (3.5), tem o valor do traço dado por $\text{tr } A = 2 \mp K$. Lembrando que $K \equiv qE_0R > 0$ e usando os casos (a) e (b), a estabilidade do mapa fica definida da seguinte forma:

- Para $q_* = 0$, com $\text{tr } A = 2 - K$, o ponto é elíptico se $K < 4$.
- Para $q_* = \frac{1}{2}$, com $\text{tr } A = 2 + K$, o ponto é hiperbólico para qualquer valor de K positivo.

Portanto, para $K > 4$ todos os pontos periódicos são instáveis.

Algumas iterações do mapa padrão estão mostradas na Fig. 3.3, partindo de $K = 0$, onde o sistema é integrável, e aumentando a perturbação até $K = 4,5$, quando o ponto fixo $(q_*, p_*) = (0, 0)$ já não é mais elíptico. Na Fig. 3.3(a) estão destacadas algumas órbitas periódicas. Destacamos o movimento de uma órbita de período 2 com $p = 0,5$; o movimento com $p = 0,2$, que repete o mesmo valor de q depois de cinco iterações; e o movimento de período 4, aparecendo em $p = 0,75$, que na quarta iteração teria o valor de q acrescido de 3 unidades se não fosse usado mod 1. Como estamos restritos ao domínio fundamental, o valor de q é dado pela quantidade fracionária da qual é composto. As linhas mais densas na Fig. 3.3(a) são órbitas com números irracionais de p , correspondendo ao movimento quase-periódico. Existem infinitas órbitas com esse comportamento no intervalo $[0,1]$ do espaço de fase.

Nas Figs. 3.3(b) e (c) podem ser vistos os pontos fixos estável $(0, 0)$ e instável $(\frac{1}{2}, 0)$. A partir da Fig. 3.3(b), com $K = 0,5$, percebemos que algumas órbitas ocupam áreas no espaço de fase, marcando a aparição do caos local, limitado pelas barreiras KAM. A transição do caos local para o caos global, que se estende pelo espaço de fase, acontece com K entre 0,9 e 1. Um estudo detalhado mostra que a transição acontece para $K = 0,971635 \dots$ [25].

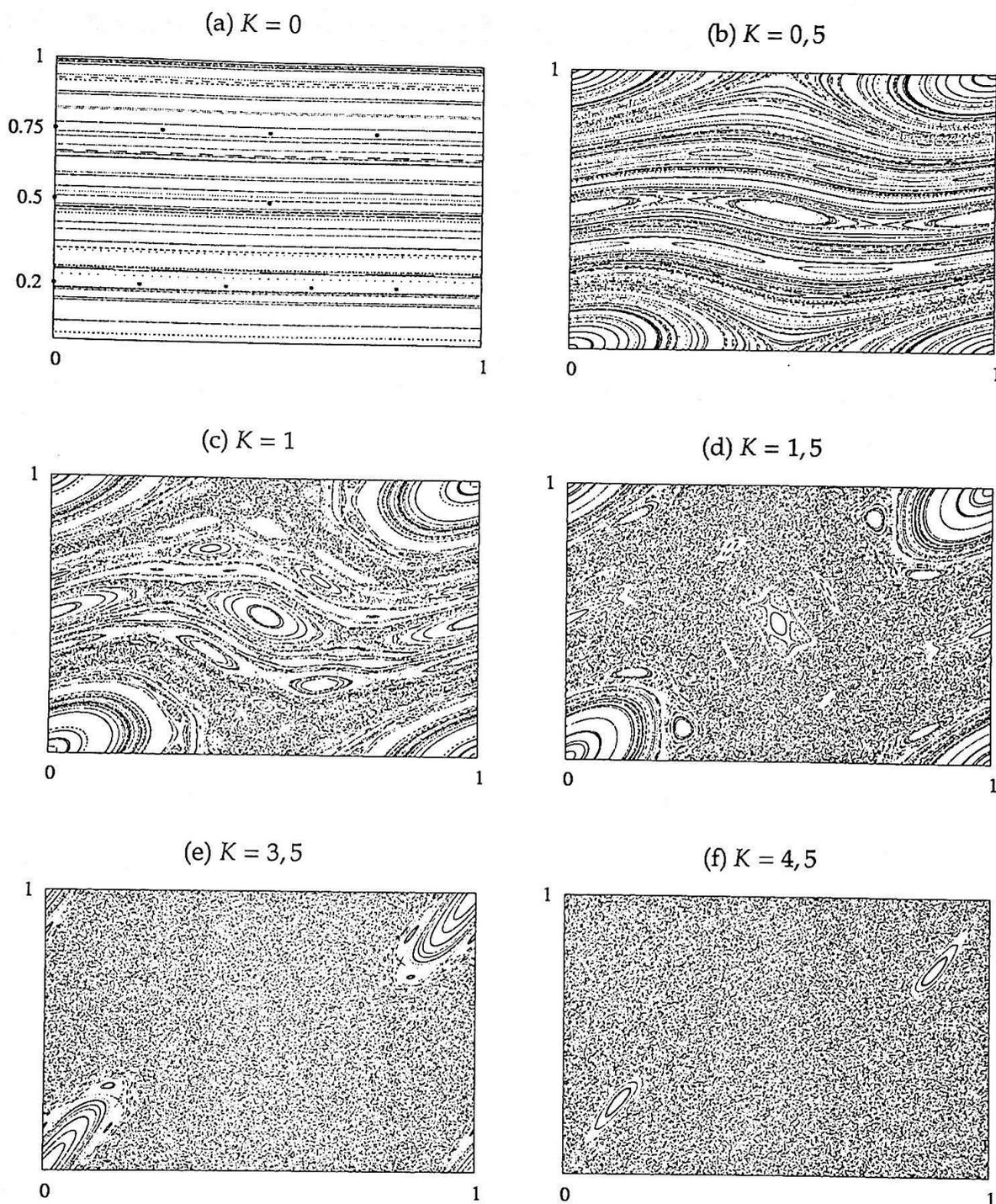


Figura 3.3: Espaço de fase do mapa padrão. Estão plotadas 150 órbitas com valores iniciais escolhidos randomicamente no intervalo $[0,1]$, com exceção dos valores destacados em (a). A abscissa é a variável q , relacionada ao ângulo, e a ordenada é p , relacionada ao momento angular.

3.2 Controle de Sistemas Hamiltonianos

No Cap. 2 apresentamos uma estratégia de controle baseada na estabilização das órbitas periódicas instáveis para sistemas dissipativos. Uma extensão direta desse método para sistemas Hamiltonianos seria provocar modificações nos parâmetros, de forma que uma trajetória caótica fosse estabilizada em torno de alguma órbita periódica instável. Contudo, essa extensão do método OGY não é direta [26], principalmente pela ausência de conjuntos atratores em sistemas Hamiltonianos. Por isso, o desenvolvimento de métodos de controle para sistemas Hamiltonianos ainda é um tema bastante estudado. Algumas propostas são aplicar uma curvatura Gaussiana, mudando a Hamiltoniana para que evite algumas regiões [27]; produzir pequenas "alfinetadas" na variável p para que se aproxime de números racionais [28]; acoplar um modo integrável ao sistema [29]; aplicar uma perturbação não-linear [30]; e mergulhar o sistema numa dimensão maior [31].

Apresentamos nesse trabalho o resultado das duas últimas técnicas citadas [30,31]. A primeira técnica consiste em aplicar um pulso aperiódico e não-linear ao sistema, de forma que o caos global seja controlado e o sistema permaneça nas regiões periódicas. A segunda, um pouco mais sofisticada, aumenta o número de graus de liberdade através de um mergulho numa dimensão maior do espaço de fase, onde as órbitas periódicas do sistema original tornam-se atratoras. Dessa forma, as trajetórias são expulsas das regiões caóticas e se estabilizam nas ilhas periódicas do espaço de fase original.

3.2.1 Perturbação Não-linear

Um dos métodos propostos para controlar sistemas Hamiltonianos é a aplicação de uma perturbação não-linear. Com esse método, o caos é eliminado por uma perturbação muito fraca depois de poucos golpes de adaptação e, então, a conservação da área, uma propriedade fundamental do sistema Hamiltoniano, é mantida e o caos controlado.

O mapa padrão com um mecanismo de controle não-linear [30] é dado por

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n - \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi q_n) - \frac{e}{2\pi} \text{senh}(2\pi q_n), \\ q_{n+1} = q_n + p_{n+1} \quad \widehat{\text{mod}} 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

A inclusão do termo com seno hiperbólico não altera o determinante do Jaco-

biano e o sistema permanece conservativo. Para o mapa padrão com o termo de controle, a notação $\widehat{\text{mod}} 1$ significa que a parte fracionária da variável é tomada no intervalo $[-1,1]$. Isto é, tomamos a variável relacionada ao ângulo como $q = q - [q]$, onde $[q]$ representa a parte inteira de q . A função $\widehat{\text{mod}} 1$ introduz uma descontinuidade do sinal de controle $Z = -\frac{e}{2\pi} \sinh(2\pi q_n)$ em $q = \pm 1$ que se mostra crucial para a eficácia do controle com esse método. As Eqs. (3.7) descrevem um sistema Hamiltoniano num potencial periódico sujeito a uma força descontínua, a qual varia continuamente no intervalo $[-1,1]$. Essa técnica não é facilmente aplicada a outros sistemas, já que o termo perturbativo não é geral. No entanto, para o mapa padrão os resultados são bons, como mostraremos a seguir.

Simulações numéricas indicam que o caos global pode ser efetivamente controlado para movimentos regulares e os estados finais são sempre quase-periódicos. A Fig. 3.4 mostra dois movimentos típicos de p quando $K = 1,5$ e $K = 3,5$. O parâmetro de controle é $e = 0$ para $n < 4000$. Para $n = 4000$ o controle é ativado com $e = 5 \times 10^{-3}$. O tempo de relaxação para estabilizar o sistema é muito pequeno e isso é importante na prática, pois transientes caóticos muito longos causam sérios danos em sistemas experimentais. É interessante observar que todas as órbitas são controladas para movimentos regulares na vizinhança da ilha na origem.

Considere o sinal de controle

$$Z_n = -\frac{e}{2\pi} \sinh(2\pi q_n), \quad (3.8)$$

que está plotado na Fig. 3.5, correspondendo às trajetórias da Fig. 3.4. Em cada caso, Z_n exibe um salto em algumas poucas iterações quando o controle é ativado e essa força descontínua conduz o estado de caos global para a ilha na origem. Depois disso, o sinal de controle permanece com valor aproximadamente menor do que $1,5 \times 10^{-3}$, mostrado em destaque na Fig. 3.5.

A Fig. 3.6 mostra o espaço de fase com 150 condições iniciais randômicas e 100 iterações para cada uma delas. Nas Figs. 3.6(a) e (c) mostramos o sistema original. Nas Figs. 3.6(b) e (d), o sinal de controle é ativado e fixado em $e = 0,006$ para $K = 1,5$ e $e = 0,008$ para $K = 3,5$, respectivamente.

Nas Figs. 3.4 e 3.6 é possível observar que a caoticidade global é desviada para movimentos regulares, com sinais de controle extremamente pequenos. Essa característica é muito importante, pois com pequenas perturbações a natureza do sistema original é mantida.

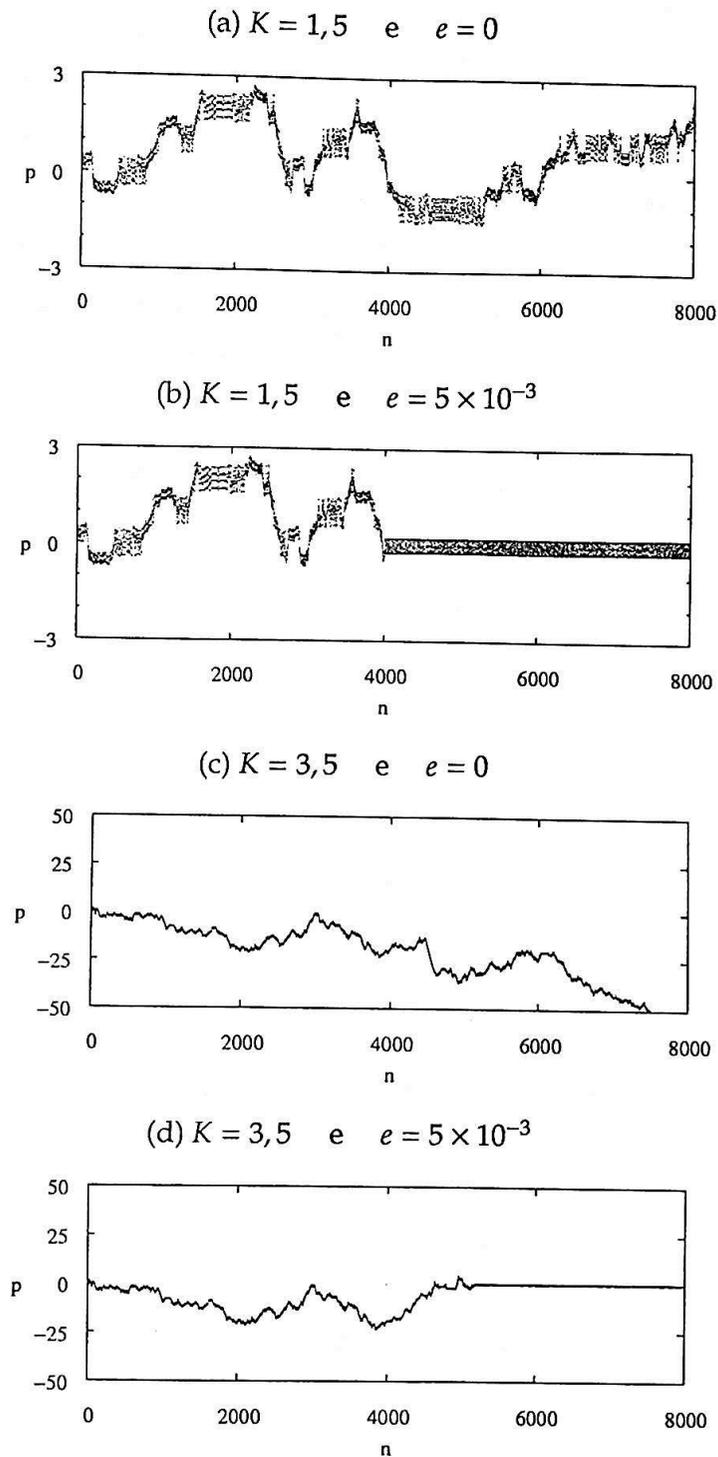


Figura 3.4: Aplicação do controle com perturbação não-linear ao mapa padrão com (a),(b) $K = 1,5$ e (c),(d) $K = 3,5$. (a),(c) Evolução normal do sistema. (b),(d) Sistema com aplicação do sinal de controle.

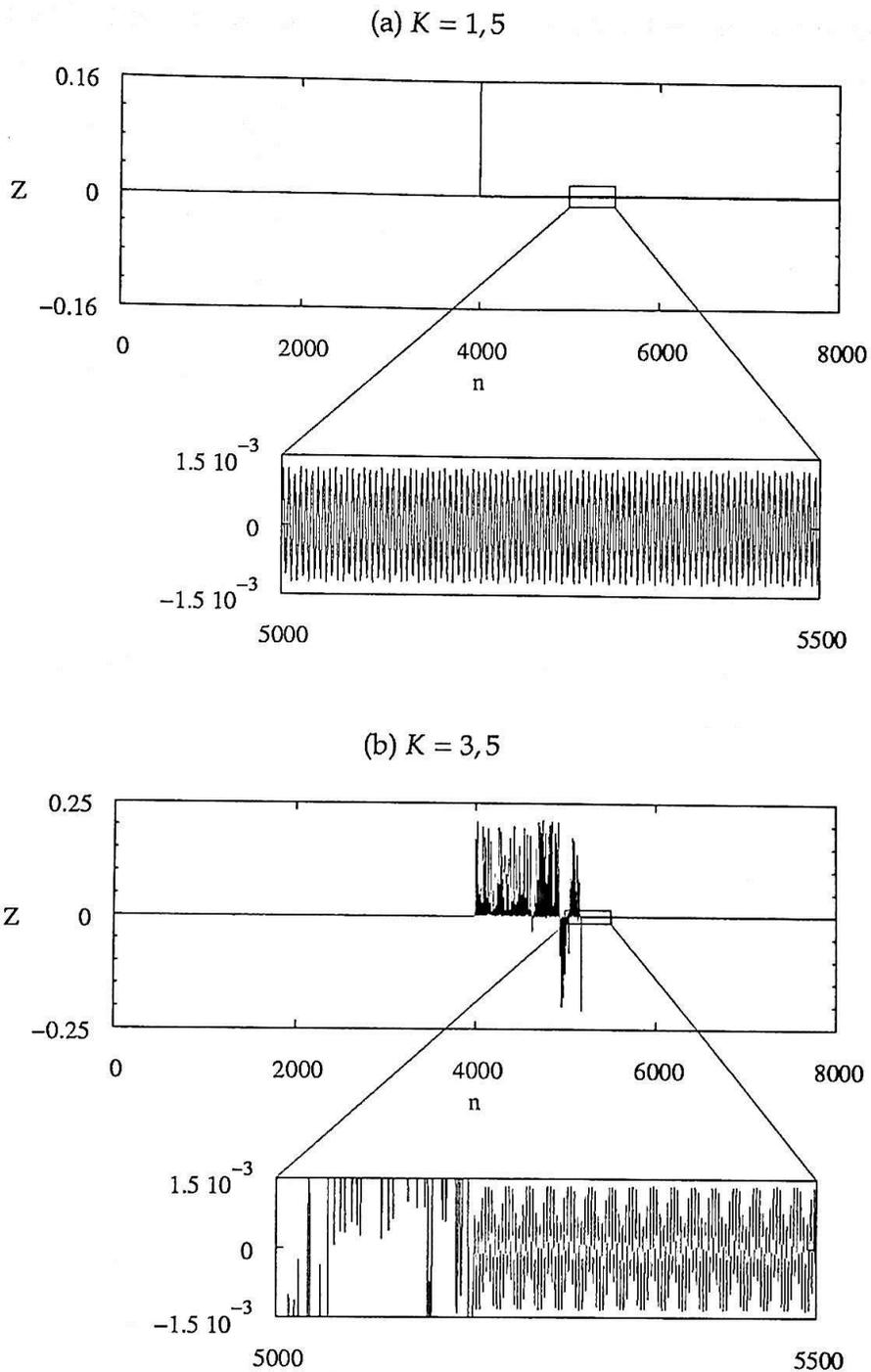


Figura 3.5: Sinal de controle Z para o mapa padrão com (a) $K = 1,5$ e (b) $K = 3,5$. O sistema é iterado por 4000 vezes com $e = 0$. Quando $n = 4000$, o sinal de controle Z é acionado com $e = 5 \times 10^{-3}$. Depois de um tempo de transição o sinal estabiliza-se, ficando da ordem de 10^{-3} , destacado em (a) e (b).

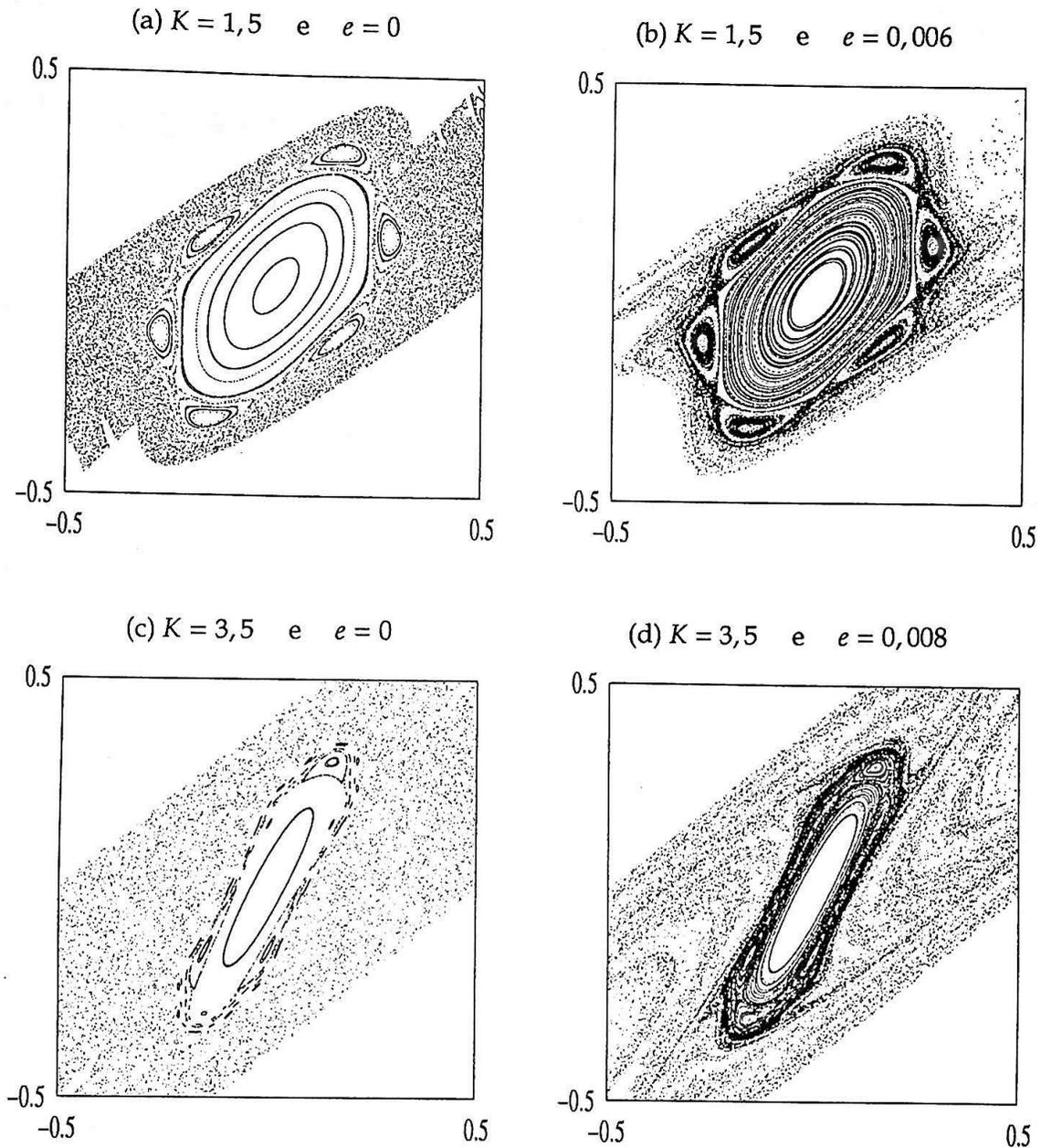


Figura 3.6: Espaço de fase para o mapa padrão com (a),(b) $K = 1,5$ e (c),(d) $K = 3,5$. Aplicação do sinal de controle com (b) $e = 0,006$ e (d) $e = 0,008$.

O estado final, sob controle, deve estar muito próximo das regiões estáveis ou fracamente instáveis do sistema original. Essa afirmação é confirmada pela Fig. 3.6, onde vemos que o sistema é conduzido para a ilha da origem, presente no mapa padrão para $K = 1,5$ e $K = 3,5$ (cf. Figs. 3.3(d) e (e)). Nessa região, pequenas perturbações são suficientes para manter a estabilidade.

A descontinuidade do sinal em $q = \pm 1$ é o ponto chave do mecanismo. Devido a

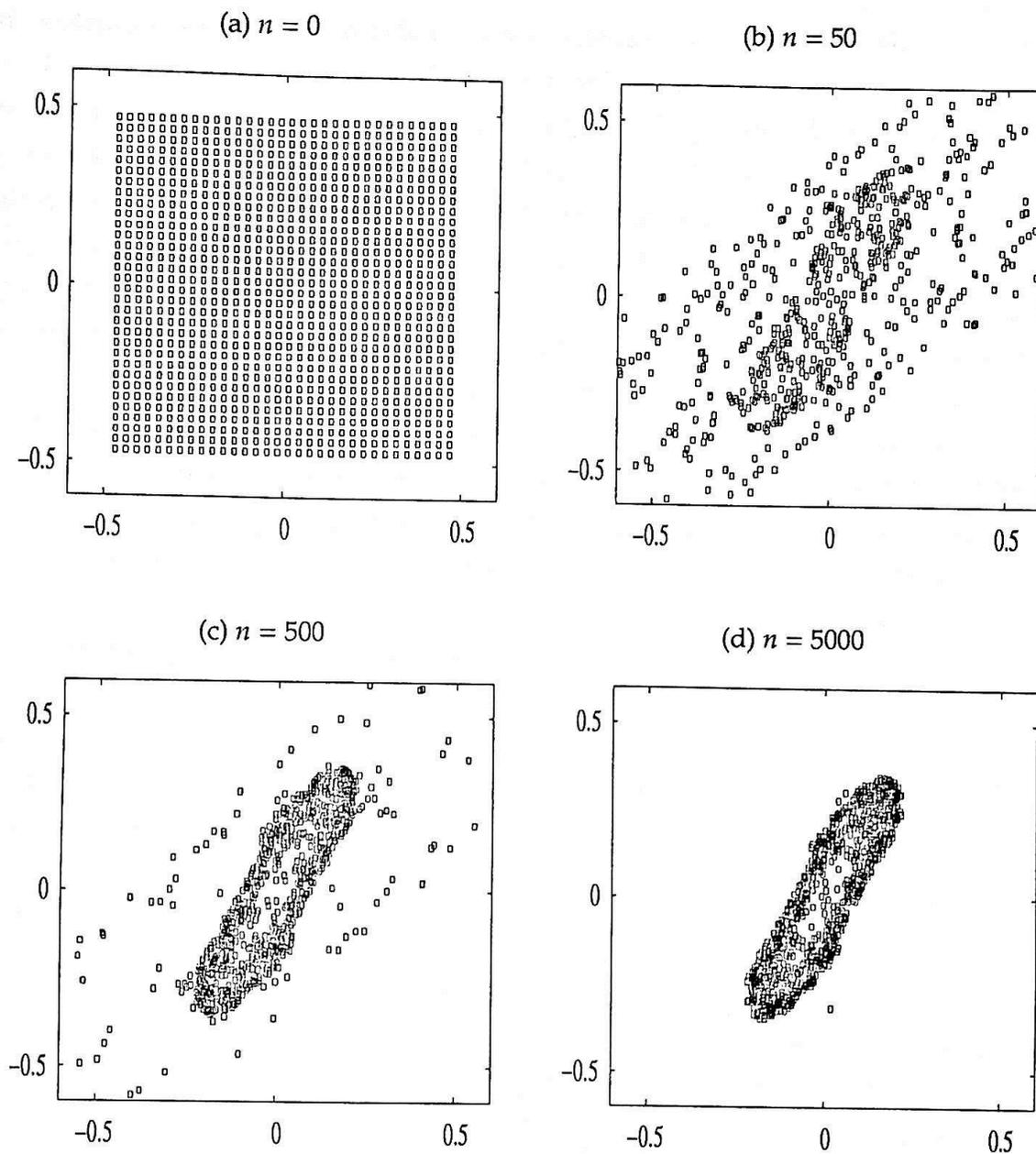


Figura 3.7: Aplicação em várias condições iniciais do controle com perturbação não-linear no mapa padrão. (a) Distribuição uniforme de 1024 condições iniciais no espaço de fase $q \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e $p \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. (b) Aplicação do sinal Z depois de 50 iterações. (c) Resultado depois de 500 iterações. (d) Depois de 5000 iterações quase todas as condições iniciais concentram-se na ilha central. O sinal de controle Z foi aplicado com $\epsilon = 8 \times 10^{-3}$ e $K = 3,5$.

essa descontinuidade o sinal de controle conduz o sistema para as regiões estáveis ou fracamente instáveis. Sem o controle nenhuma região no espaço de fase é atrativa devido à preservação do volume pelo mapa. Por isso, nenhuma migração

do sistema para qualquer região deve ser esperada no mapa original.

Na Fig. 3.7 foram iteradas 1024 condições iniciais distribuídas uniformemente na região $q \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e $p \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Depois de algumas iterações a área inicial se contrai para uma pequena área assintótica centrada em $(0,0)$. A região assintoticamente atrativa está no domínio estável ou fracamente instável do sistema sem controle, então um controle com pequenas perturbações pode ser efetivado com sucesso. A existência da "região atrativa" num mapa conservativo descontínuo mostra um comportamento de alguma forma dissipativo e é chamado de quase-dissipativo [32,33]. Contudo, a natureza conservativa é mantida no sistema controlado.

Concluindo, mostramos que o método de controle de caos em sistemas Hamiltonianos bidimensionais com aplicação de perturbação não-linear é eficiente para o modelo do mapa padrão. Sem o controle, para a maior parte das condições iniciais, o sistema não pode entrar em regiões que admitem movimento estável ou fracamente instável, comuns em muitos sistemas caóticos conservativos, e o movimento é violentamente caótico. A escolha de sinais de controle apropriados pode fazer o sistema migrar para as regiões favoráveis a partir de qualquer condição inicial e eliminar o caos. A aplicação desse método de controle é, sem dúvida, restrita e foi apresentada apenas como um exemplo das características de sistemas Hamiltonianos sob controle.

3.2.2 Ejeção

Uma outra forma de aplicar o controle a sistemas Hamiltonianos é mergulhando o sistema num espaço maior, de maneira que a dimensão do sistema original aumente e, simultaneamente, a nova dinâmica force o sistema original a manter-se distante do comportamento indesejado. Esse processo de aumentar a dimensão de um sistema para efetivar o controle é chamado de *bailout embedding* [31], traduzido no nosso trabalho como ejeção. A ejeção pode ser considerada um processo geral para criar ordem da desordem. Com ela, o caos pode ser controlado e as ilhas regulares encontradas dentro do mar caótico. A técnica é aplicável a sistemas discretos ou contínuos e a dinâmicas dissipativas ou conservativas, embora a melhor aplicação tenha sido feita a um sistema conservativo discreto [31] e a um sistema não-Hamiltoniano discreto [34].

Seguimos a descrição de mergulho dada por Cartwright et al. [35]. Um mergulho, em geral, é a representação de um objeto num espaço de dimensão maior do que ele próprio. Sistemas dinâmicos podem ser mergulhados em sistemas maiores

da seguinte forma: uma equação diferencial ordinária $\dot{x} = f(x)$ é mergulhada numa equação diferencial maior, tomando a derivada $\ddot{x} = f'(x)\dot{x}$ ou, também, $\ddot{x} = f'(x)f(x)$. Esses dois mergulhos não são iguais, apesar de ambos conterem o sistema dinâmico original. Existem muitas maneiras de fazer mergulhos com derivadas que dobram a dimensão do espaço de fase, colocando uma equação diferencial ordinária dentro de outra de segunda ordem, e todas as maneiras podem ser diferentes entre si. O mergulho feito através da derivada $\dot{x} = f(x) \rightarrow \ddot{x} = f'(x)f(x)$ embute a equação diferencial original dentro de um sistema conservativo

$$\ddot{x} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \text{com} \quad H = -\frac{f^2(x)}{2}.$$

Um mergulho muda a estabilidade do sistema, pois a estabilidade refere-se às perturbações e num sistema maior todas as velhas perturbações estão presentes, além de uma série de novas perturbações que podem aparecer devido às novas direções. Então, ainda que todas as soluções do sistema original sejam preservadas, podemos transformar as soluções estáveis de antes em soluções instáveis no conjunto maior adicionando novas direções. Uma forma de mergulhar um sistema $\dot{x} = f(x)$ é suspendê-lo na reta [36], da seguinte forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x, y),$$

$$\dot{y} = \alpha x,$$

onde $g(x, y)$ é arbitrário, exceto por ser exigido que $g(x, 0) = 0$, o que garante que para $y = 0$ o sistema original é recuperado. Se $\alpha < 0$, y sempre se extingue e, então, o objeto original é recuperado. Nesse caso, o mergulho é estável, no sentido que qualquer movimento longe do objeto mergulhado é trazido para perto dele.

O melhor mergulho para um sistema dinâmico é aquele que assegura que a distância entre a trajetória real e a mergulhada diminua exponencialmente com o tempo para qualquer condição inicial [31]. Um mergulho que produz tal aproximação exponencial é dado por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v - f(x)) &= -\kappa(x)(v - f(x)), \\ \frac{dx}{dt} &= v, \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde as órbitas desejadas são obtidas para $\kappa(x) > 0$ e para as outras, $\kappa(x) < 0$.

Assim, as órbitas indesejadas tornam-se instáveis na dinâmica maior, embora sejam estáveis na dinâmica original. Dessa forma, as trajetórias no mergulho separaram-se, ou são ejetadas, do conjunto indesejado do sistema original, saltitando no espaço maior até eventualmente encontrarem uma região estável com $\kappa(x) > 0$. Em outras palavras, com esse mergulho podemos criar uma versão maior da dinâmica, na qual uma família de órbitas é removida do conjunto assintótico, enquanto a dinâmica das órbitas desejadas é preservada como um atrator.

Esse mergulho acontece naturalmente em sistemas com partículas suspensas em fluidos, mas esses modelos apresentam uma equação de movimento muito complicada se for considerada toda a dinâmica e os termos de correções. No entanto, algumas simplificações podem ser feitas se as densidades das partículas e do fluido forem iguais e também se as partículas forem suficientemente pequenas tal que os termos que tenham dependência quadrática dos raios possam ser desconsiderados. Além disso, um dos termos que contribui para o arraste pode ser ignorado para que um modelo mínimo seja obtido e com ele algumas análises sejam feitas [37]. Dessa forma, a dinâmica desses fluidos se reduz à forma das Eqs. (3.9) com $\kappa(x) = -(\gamma + \nabla f)$.

O mergulho dado pelas Eqs. (3.9) pode ser estendido para o estudo de mapas de uma maneira simples [31]. Dado um mapa $x_{n+1} = f(x_n)$, temos

$$x_{n+2} - f(x_{n+1}) = \kappa(x_n)(x_{n+1} - f(x_n)).$$

No mapa temos $|\kappa(x)| > 1$ para as órbitas indesejadas, pois o desvio da dinâmica original é multiplicado por κ a cada iteração. A escolha particular $\kappa(x) = -(\gamma + \nabla f)$ num fluxo, no caso de um mapa é mudada para

$$\kappa(x) = e^{-\gamma} \nabla f. \quad (3.10)$$

Para ilustrar o funcionamento da ejeção usaremos o mapa padrão, definido por

$$\begin{cases} f_p(q_n, p_n) \equiv p_{n+1} = p_n - \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi q_n) \pmod{1}, \\ f_q(q_n, p_n) \equiv q_{n+1} = q_n + p_{n+1} \pmod{1}. \end{cases} \quad (3.11)$$

O parâmetro K controla a integrabilidade do sistema variando de completamente integrável em $K = 0$ até altamente caótico com $K \gg 1$. Os valores intermediários de K representam uma mistura de trajetórias quase-periódicas nas ilhas KAM junto

com trajetórias caóticas, dependendo de onde se inicia o movimento. Quando o valor de K aumenta, as regiões dominadas pelo caos ocupam a maior parte do espaço de fase exceto para pequenas ilhas KAM. O único fator que decide se a trajetória está no mar caótico ou numa dessas ilhas é a condição inicial. Por isso, para localizar uma dessas ilhas é necessário tomar várias condições iniciais cobrindo todo o espaço de fase e acompanhar quais delas vão para as ilhas quase-periódicas na dinâmica resultante. De outro lado, na ejeção as trajetórias KAM do sistema mergulhado podem ser efetivamente transformadas em atratores globais no espaço de fase maior. A procura por essas ilhas torna-se simples, bastando para isso iterar o mapa com a ejeção até suas trajetórias caírem em uma dessas ilhas.

Para a escolha particular da Eq. (3.10), o termo $\kappa(x)$ é dado por

$$\kappa(x) = e^{-\gamma} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_p}{\partial p_n} & \frac{\partial f_p}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_q}{\partial p_n} & \frac{\partial f_q}{\partial q_n} \end{pmatrix} = e^{-\gamma} \begin{pmatrix} 1 & -K \cos(2\pi q_n) \\ 1 & 1 - K \cos(2\pi q_n) \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

A ejeção do mapa padrão é escrita suspendendo o sistema bidimensional da seguinte forma

$$p_{n+1} = U_n,$$

$$q_{n+1} = V_n,$$

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} - f_p(V_n, U_n) \\ V_{n+1} - f_q(V_n, U_n) \end{pmatrix} = e^{-\gamma} \begin{pmatrix} 1 & -K \cos(2\pi q_n) \\ 1 & 1 - K \cos(2\pi q_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n - f_p(q_n, p_n) \\ V_n - f_q(q_n, p_n) \end{pmatrix}.$$

Agora, fazendo as mudanças de variáveis

$$u_n = U_n - f_p(q_n, p_n),$$

$$u_{n+1} = U_{n+1} - f_p(q_{n+1}, p_{n+1}) = U_{n+1} - f_p(V_n, U_n),$$

e o mesmo para V_n e V_{n+1} encontramos o sistema iterativo de equações de primeira

ordem que representa o mapa padrão com aplicação da ejeção [38], dado por

$$\begin{cases} p_{n+1} = f_p(q_n, p_n) + u_n, \\ q_{n+1} = f_q(q_n, p_n) + v_n, \\ u_{n+1} = e^{-\gamma}(u_n - v_n K \cos(2\pi q_n)), \\ v_{n+1} = e^{-\gamma}(u_n + v_n(1 - K \cos(2\pi q_n))). \end{cases} \quad (3.13)$$

As trajetórias do mapa original das Eqs. (3.11) que estão em regiões elípticas não são alteradas pelo termo $e^{-\gamma}$, mas as trajetórias caóticas do mapa original estabilizam-se nas ilhas KAM quando visitam alguma região hiperbólica do espaço de fase. Quando o valor de γ diminui, mais condições iniciais são atraídas para as regiões seguras. Essa situação é mostrada na Fig. 3.8.

A eficiência desse método é comprovada em aplicações a sistemas altamente não-lineares. A trajetória caótica do mapa padrão para $K = 6, 9$ visita praticamente todo espaço de fase, exceto algumas pequenas ilhas, sendo a maior de período 2 que ocupa menos de um centésimo do espaço de fase no domínio fundamental. Mesmo assim, as trajetórias encontram a ilha de período 2 quando são expulsas das regiões caóticas. Na Fig. 3.9 mostramos o espaço de fase do mapa padrão com $K = 6, 9$.

A aplicação da ejeção a sistemas Hamiltonianos produz o controle passivo, excluindo do sistema as órbitas instáveis e forçando as condições iniciais a estabilizarem-se nas ilhas seguras.

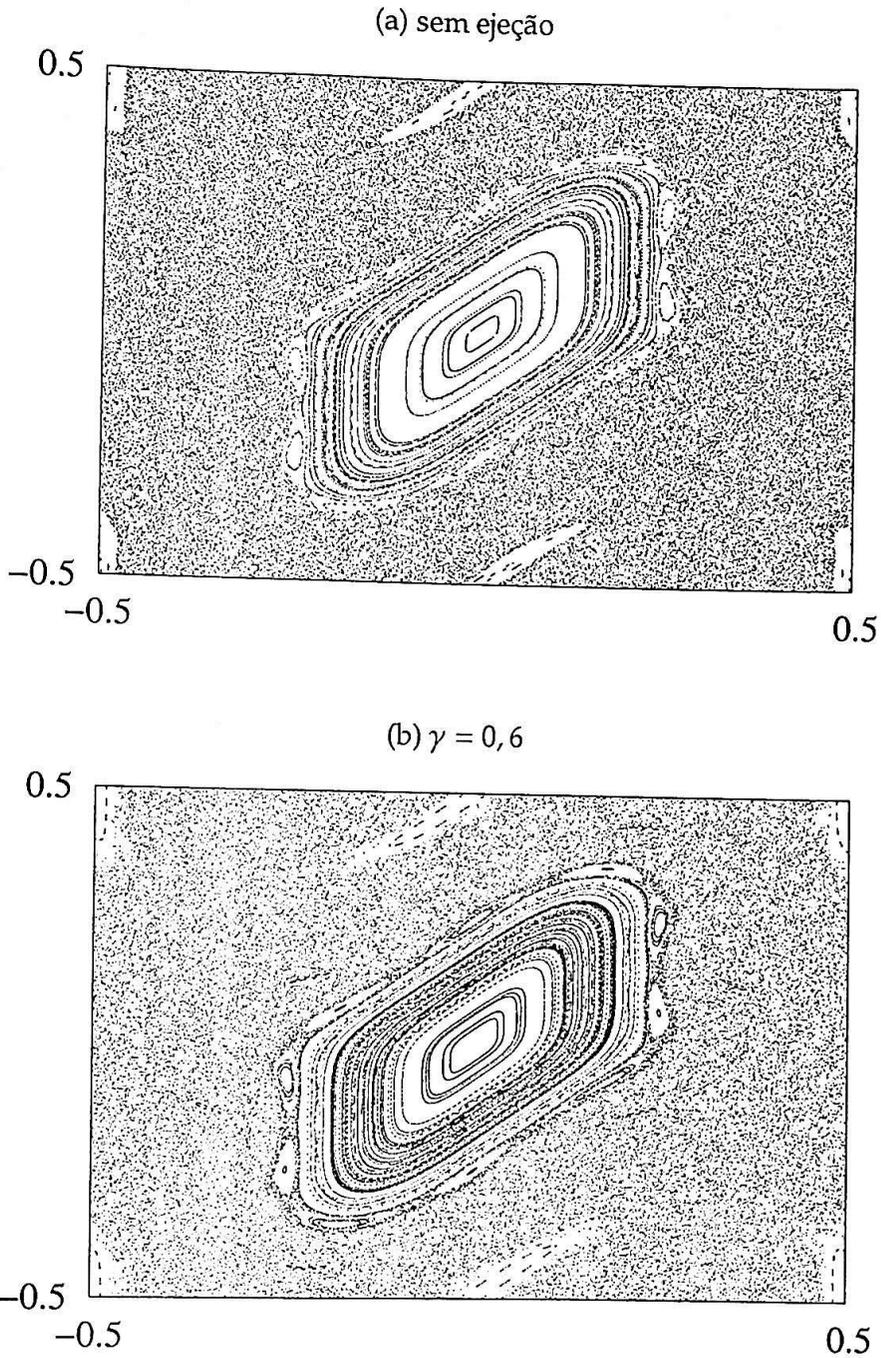
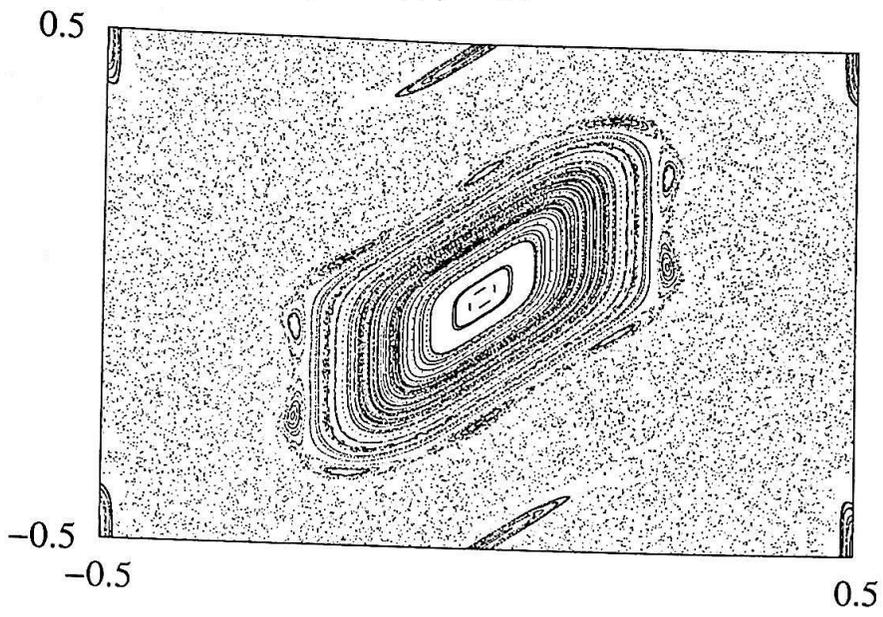
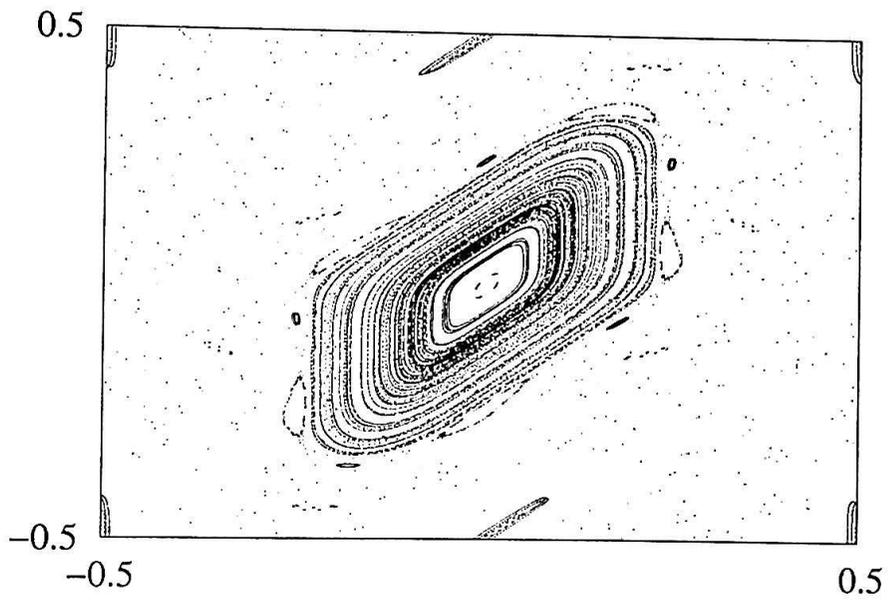


Figura 3.8: Mapa padrão com $K = 2$ e aplicação da ejeção. São mostradas 500 iterações de 150 condições iniciais randômicas depois de um transiente de 10^4 iterações. (a) Mapa original. (b) Ejeção com $\gamma = 0,6$, (c) com $\gamma = 0,5$ e (d) com $\gamma = 0,3$. (c) e (d) na página seguinte.

(c) $\gamma = 0,5$



(d) $\gamma = 0,3$



Continuação da Figura 3.8.

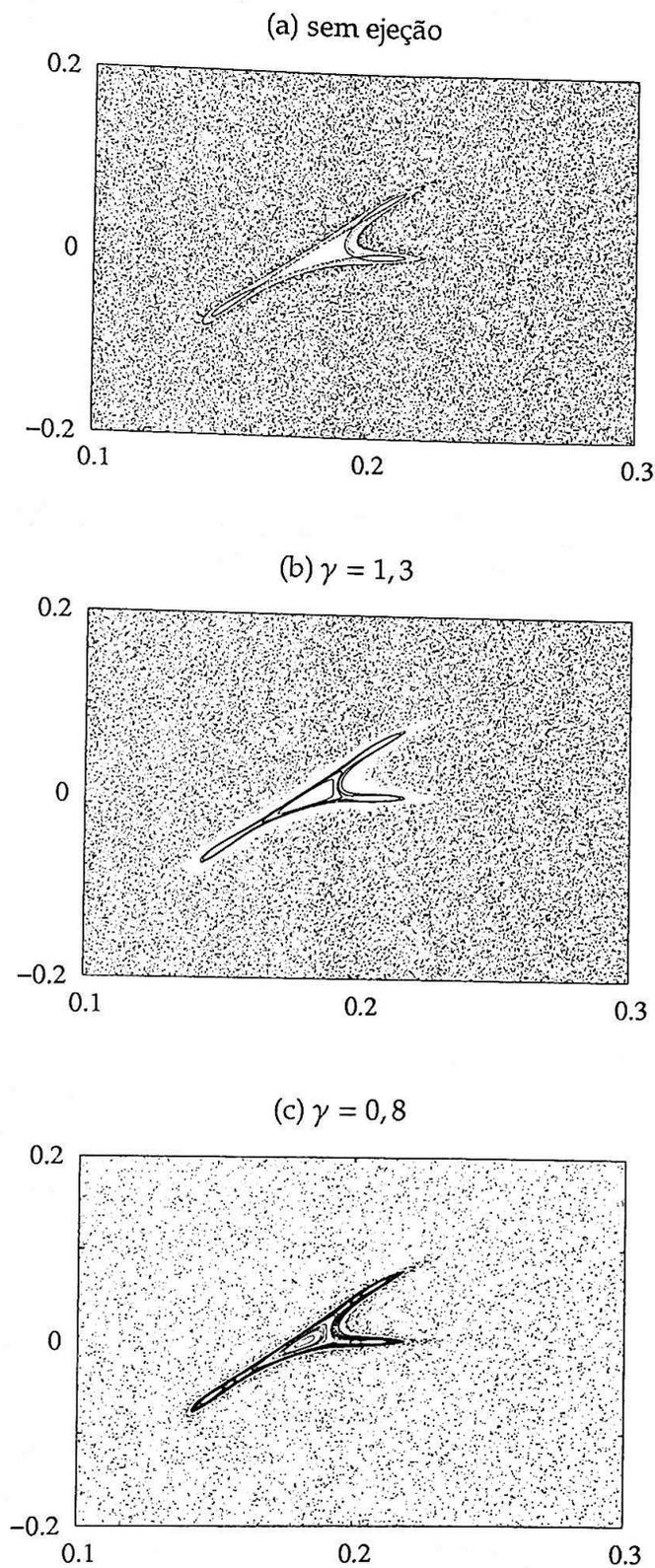


Figura 3.9: Mapa padrão com $K = 6, 9$. São mostradas 10^4 iterações de 50 condições iniciais randômicas depois de 10^4 iterações. (a) Mapa original. (b) Aplicação da ejeção com $\gamma = 1,3$ e (c) com $\gamma = 0,8$.

4

Coeficientes de Transporte

A teoria de transporte é um ramo da mecânica estatística de não-equilíbrio e trabalha basicamente com o cálculo das quantidades que são conhecidas como coeficientes de transporte, como a viscosidade, a condutividade térmica e o coeficiente de difusão. Essas quantidades são empregadas para descrever o comportamento macroscópico de um sistema físico, como líquidos ou gases, com respeito à variação de algum parâmetro, como a temperatura, a densidade ou campos externos aplicados ao sistema. Nesse capítulo estudamos a dependência do coeficiente de difusão com as estruturas do espaço de fase do mapa padrão.

4.1 Teoria Cinética

Para ilustrar a idéia da teoria cinética consideramos um recipiente com temperatura e pressão constantes. Em uma região desse recipiente está isolado um gás similar ao que ocupa o restante do recipiente, mas com alguma característica diferente, por exemplo, a radioatividade dos seus núcleos. Em algum instante, o gás isolado é liberado e as moléculas espalham-se por todo o recipiente. A dinâmica de cada uma dessas moléculas é regida pela mecânica clássica, isto é, se o movimento

individual fosse acompanhado poderíamos determinar a posição e a velocidade da molécula em qualquer instante de tempo. Já o movimento do gás que estava isolado não segue as equações da mecânica clássica quando considerado como um todo. A sua dinâmica é descrita pela teoria cinética, criada por Maxwell e Boltzmann. A teoria cinética trata das propriedades estatísticas do gás, levando em conta médias sobre um *ensemble* de moléculas. As hipóteses básicas da teoria cinética para moléculas idênticas de um gás ideal são as seguintes [39]:

1. O número de moléculas que constitui o *ensemble* é extremamente grande e todas são iguais.
2. O volume de cada uma das moléculas é desprezível quando comparado com o volume total ocupado.
3. As moléculas estão em movimento constante em todas as direções. Como o número de moléculas é muito grande, elas devem freqüentemente se chocar.
4. As moléculas comportam-se como esferas impenetráveis durante os choques. A força de interação entre elas só existe durante o choque e a duração de cada colisão é desprezível em relação ao intervalo de tempo entre duas colisões consecutivas.
5. As colisões são perfeitamente elásticas. A energia cinética total é conservada tanto nas colisões entre duas moléculas, como na colisão das moléculas com as paredes do recipiente.

Uma das objeções mais fortes contra a teoria cinética de Maxwell e Boltzmann ficou conhecida como "difusão lenta". De acordo com a teoria cinética, a velocidade média de um gás em condições normais de temperatura e pressão é da ordem de algumas centenas de metros por segundo. Assim, se um gás for colocado dentro de um recipiente, as moléculas deveriam aparecer do outro lado numa fração de segundos. No entanto, isso não é observado experimentalmente. Para resolver a incoerência dessa observação introduziu-se o conceito de *livre caminho médio*, a média das distâncias percorridas por uma molécula entre duas colisões consecutivas. A distância entre as moléculas num gás é grande comparada com o seu tamanho, mas, por causa da alta velocidade, as moléculas colidem freqüentemente. As moléculas deslocam-se em linha reta entre as colisões, mas mudam de direção a cada colisão, fazendo com que a velocidade de difusão das moléculas de um gás seja muito menor do que a velocidade média das moléculas.

O esclarecimento do conceito de livre caminho médio possibilitou o cálculo de muitas quantidades importantes, chamadas de coeficientes de transporte, tais como o coeficiente de difusão, que está relacionado ao transporte de massa, a viscosidade, relacionada ao transporte de momento das moléculas e a condutividade térmica, que está ligada ao transporte de calor.

4.2 Difusão

Podemos pensar na difusão como um simples processo de *caminho aleatório*. Em um modelo unidimensional, por exemplo, começamos com uma partícula na posição inicial $x_0 = 0$. A dinâmica da partícula é determinada por uma densidade de probabilidade fixa $\tilde{\rho}(s)$, tal que $\tilde{\rho}(s)ds$ dá a probabilidade de transição de uma partícula deslocar-se da antiga posição x_0 até uma nova posição x_1 , percorrendo a distância $s = x_1 - x_0$.

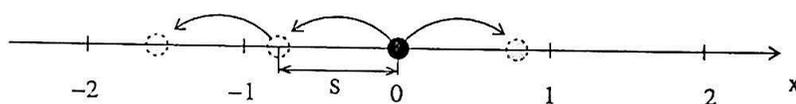


Figura 4.1: Esquema de caminho aleatório unidimensional.

O mesmo processo pode ser aplicado às mudanças posteriores de posição da partícula. Por simplicidade, assumimos que a densidade de probabilidade $\tilde{\rho}(s)$ é simétrica com respeito à $s = 0$, ou seja, a partícula pode ir para a direita ou para a esquerda com a mesma probabilidade. Para entendermos o movimento, usamos a órbita da partícula, a qual é representada por uma coleção de pontos x_0, x_1, \dots, x_n na reta. Nesse modelo assumimos o tempo discretizado, fazendo a partícula "saltar" de uma posição para outra sem sofrer uma transição contínua.

Para caracterizar um caminho aleatório simples consideramos que a densidade de probabilidade $\tilde{\rho}(s)$ é independente da posição x_n da partícula e do tempo discretizado n , dessa forma a densidade de probabilidade $\tilde{\rho}(s)$ é fixa no espaço e no tempo. Em outras palavras, cada passo de iteração é estatisticamente independente dos outros. Esse tipo de movimento é chamado de processo Markoviano em física estatística.

A dinâmica do caminho aleatório pode ser usada como um modelo simples para a difusão da seguinte maneira. Tomamos um conjunto de partículas em $x_0 = 0$ e

aplicamos o processo de iteração descrito acima a cada uma das partículas. Se a reta for dividida num certo número de subintervalos de tamanho δx , o número de partículas num dado intervalo, depois de n iterações, poderá ser contado. Dividindo esse resultado pelo número total de partículas, que deve ser muito maior do que o número de subintervalos de tamanho δx para que a estatística seja válida, teremos a densidade de probabilidade $\rho_n(x)$. Essa quantidade pode ser interpretada como a probabilidade de encontrarmos uma partícula com um deslocamento entre x e $x + \delta x$ depois de n iterações. Na Fig. 4.2 temos um exemplo da evolução da densidade de probabilidade $\rho_n(x)$ depois de algumas iterações.

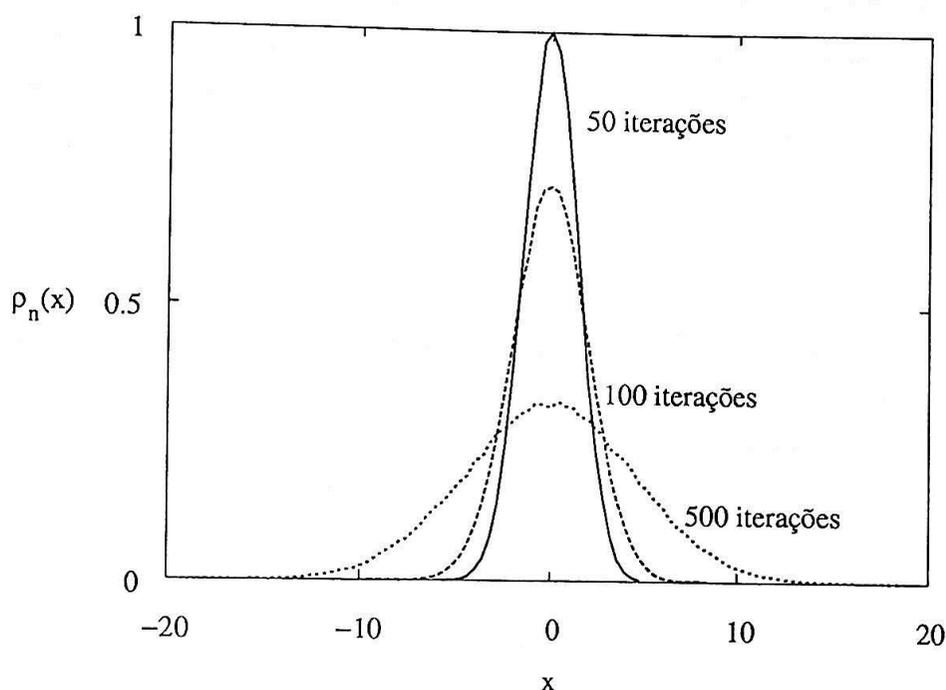


Figura 4.2: Densidade de probabilidade evoluindo segundo o modelo de caminho aleatório. Foram escolhidas 10^8 condições iniciais em $x_0 = 0$. O tamanho do passo escolhido foi $s = 0,2$ e foram tomados 4000 subintervalos de tamanho $\delta x = 0,01$. Estão mostradas as distribuições depois de 50, 100 e 500 iterações.

Há uma diferença entre as densidades de probabilidades $\tilde{\rho}(s)$ e $\rho_n(x)$. Enquanto $\tilde{\rho}(s)$ define o modelo intrinsecamente, $\rho_n(x)$ é uma quantidade dinâmica produzida pelo modelo. Isso quer dizer que $\tilde{\rho}(s)$ determina as regras do movimento microscópico sofrido por cada uma das partículas, enquanto $\rho_n(x)$ fornece informações a respeito da distribuição macroscópica do conjunto de partículas.

Para descrever a evolução da densidade de probabilidade do conjunto de

partículas, $\rho_n(x)$, usamos a equação de difusão

$$\frac{\partial \rho_n(x)}{\partial n} = D \frac{\partial^2 \rho_n(x)}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

onde D é o coeficiente de difusão. A Eq. (4.1) é obtida pela combinação da equação linear de corrente de partículas com a equação de continuidade, dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{J} = -D \nabla \rho \quad \text{e} \quad \frac{\partial \rho}{\partial n} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

onde \mathbf{J} é a densidade de corrente.

A densidade de probabilidade $\rho_n(x)$ depende da posição e do tempo. Para a condição inicial que escolhermos, $x_0 = 0$, a Eq. (4.1) pode ser resolvida por meio de uma transformada de Fourier. A solução, com a condição inicial escrita como delta de Dirac, $\rho_0(x) = \delta(x - x_0)$, é dada por

$$\rho_n(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dn}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{4Dn}\right). \quad (4.2)$$

A equação de difusão Eq. (4.1) é válida se a densidade de probabilidade macroscópica $\rho_n(x)$ for uma média sobre escalas de tempo e espaço bem maiores do que o tempo e o espaço característicos do movimento microscópico.

A variância, segundo momento, ou dispersão, que é o valor médio do desvio quadrático sobre um *ensemble* de partículas, é dada por

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \int (\Delta x)^2 \rho_n(x) dx,$$

onde $\Delta x = x_n - x_0$. Para a distribuição dada pela Eq. (4.2), encontramos $\langle (\Delta x)^2 \rangle = 2Dn$. Esta é a relação de difusão de Einstein, obtida no contexto do movimento Browniano com o intuito de medir o número de Avogadro [40]. Com esse resultado podemos definir o coeficiente de difusão, a grandeza em que estamos interessados nesse trabalho, como

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{2n}, \quad (4.3)$$

onde a média é tomada sobre um *ensemble* muito grande de condições iniciais.

Em contraste com a descrição da difusão como um processo de caminho aleatório descorrelacionado, a teoria moderna de sistemas dinâmicos possibilita considerar a difusão como um processo dinâmico determinístico [2]. O estudo de processos

difusivos é uma das maneiras usadas para tentar entender a conexão entre a teoria de transporte e a teoria de sistemas dinâmicos. Os sistemas dinâmicos caóticos são determinísticos no sentido que, conhecidas as condições iniciais de uma partícula, pode-se prever o futuro do sistema, ou descrever o passado. Um exemplo é dado por

$$x_{n+1} = M(x_n),$$

onde $M(x)$ é um mapa unidimensional que determina como a partícula é mapeada da posição x_n para a posição x_{n+1} . O mapa $M(x)$ desempenha o papel da densidade de probabilidade intrínseca à dinâmica do sistema, que no modelo de caminho aleatório é a densidade $\bar{\rho}(s)$. O fato que há de novo, e é decisivo para diferenciar esse processo dinâmico do processo de um caminho aleatório simples, é que num sistema dinâmico caótico a história da partícula é levada em conta. Quando definimos $M(x)$ e usamos uma equação de iteração do tipo $x_{n+1} = M(x_n)$, o que prevalece são as equações de movimento microscópico do sistema.

Usaremos o coeficiente de difusão dado pela Eq. (4.3), obtido assumindo um movimento do tipo Browniano. O processo macroscópico resultante de um conjunto de partículas governado por uma dinâmica determinística, como a do mapa $M(x)$, que obedeça à Eq. (4.3), é conhecido como **difusão determinística** [2].

4.3 Difusão em Sistemas Hamiltonianos

A teoria de transporte em sistemas Hamiltonianos tem muitas aplicações, incluindo cálculos de perda de partículas em plasmas e aceleradores, taxas de reações químicas e quantidades semelhantes em outras áreas. Propriedades de transporte da dinâmica caótica Hamiltoniana podem exibir uma grande variedade de fenômenos. Em muitas situações onde a presença de comportamento caótico é forte, o transporte através do espaço de fase tende a ser uniforme e pode imitar um processo do tipo Browniano. Nessas situações, o movimento médio é uma difusão normal. Entretanto, em condições mais genéricas, onde coexistem movimento caótico e regular, o espaço de fase tem uma estrutura fractal que pode induzir importantes variações no processo de transporte.

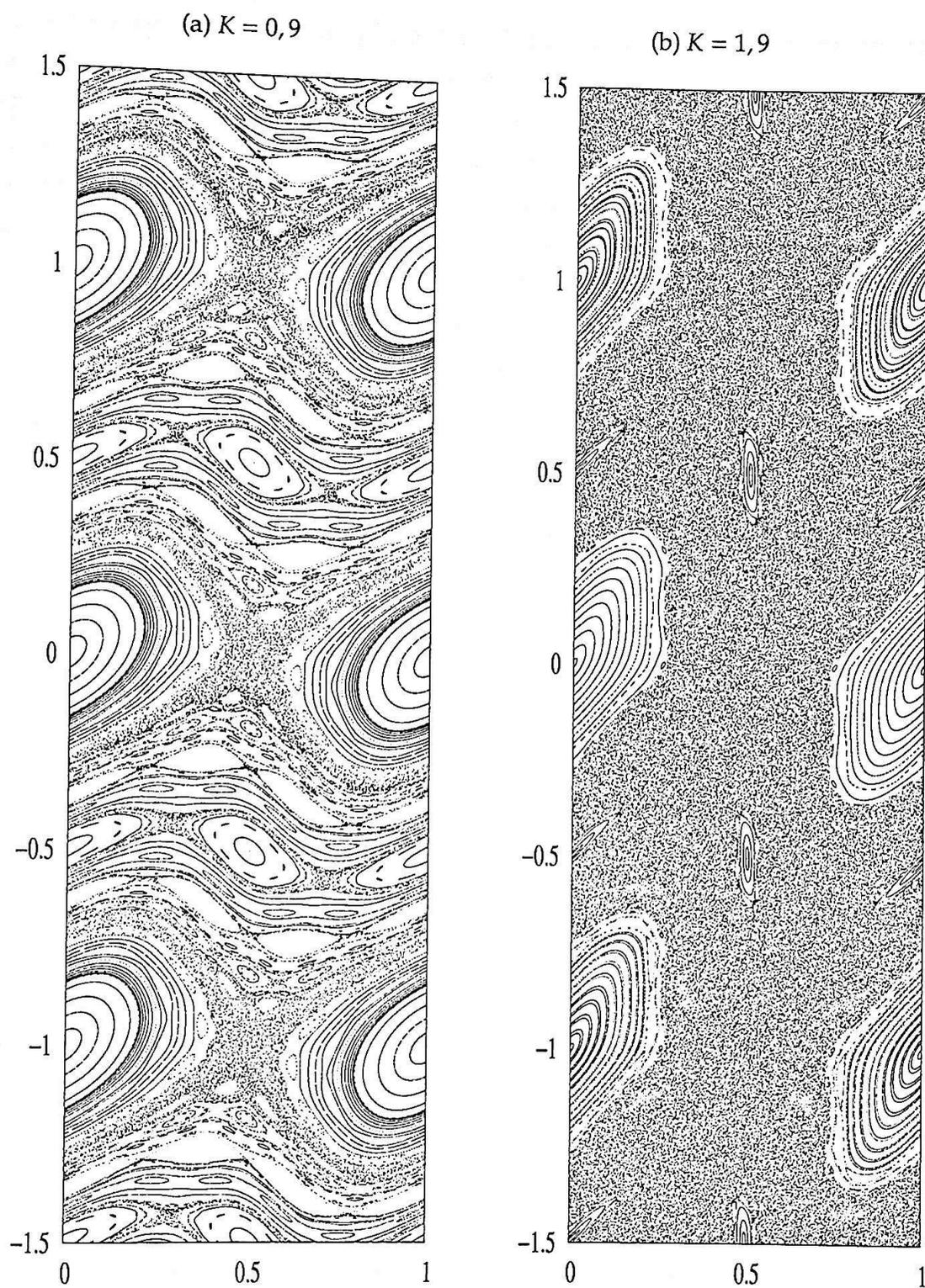


Figura 4.3: Mapa padrão sem limitação no momento angular.

No mapa padrão, por exemplo, a dinâmica pode ser mista ou fortemente caótica. Para valores do parâmetro acima do valor crítico, $K > K_c = 0,971635\dots$, a última separatriz é destruída e forma-se um emaranhado de pontos onde a dinâmica é caótica [41]. Este emaranhado caótico coexiste com regiões do espaço onde o movimento regular acontece. Quando K aumenta, a região caótica cresce e para valores suficientemente grandes de K as trajetórias caóticas cobrem a maior parte do espaço de fase, formando um mar caótico. Se uma condição inicial correspondendo a um movimento caótico for escolhida, a partícula pode sofrer "difusão" para regiões arbitrariamente distantes da posição inicial, pois a região caótica estende-se sobre quase todo o espaço de fase.

Para que esse tipo de fenômeno possa acontecer, retiramos a limitação que foi aplicada ao momento angular. A Fig. 4.3 mostra o espaço de fase do mapa padrão sem a restrição mod 1 em p . Usamos o parâmetro $K = 0,9$, abaixo do valor crítico K_c , e $K = 1,2$, para o qual existe uma região caótica que se estende por uma ampla área do espaço de fase.

Na direção p , a difusão é caracterizada pelo coeficiente

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle (\Delta p)^2 \rangle}{2n}, \quad (4.4)$$

onde $\Delta p = p_n - p_0$ e a média $\langle \cdot \rangle$ é sobre um conjunto de condições iniciais.

4.3.1 Difusão no Mapa Padrão

O mapa padrão apresenta órbitas com comportamentos diferentes dependendo das condições iniciais e do parâmetro K . As órbitas podem ser classificadas da seguinte forma [42].

1. Ciclos

Correspondem às órbitas periódicas de período N . São facilmente identificadas no espaço de fase como um conjunto de pontos discretos. Começando num deles, as iterações subseqüentes passam pelos N pontos periódicos e retornam à posição inicial na N -ésima iteração.

2. Curvas KAM

A seqüência nunca se repete, por isso um ponto não retorna à sua posição inicial e a órbita preenche densamente uma curva. As curvas KAM podem ser subdivididas em duas classes:

(a) **Cadeia de ilhas**

São regiões de tamanho finito, constituídas de curvas fechadas organizadas em volta de cada um dos N pontos periódicos. As sucessivas iterações saltam de um ponto da curva para outro. Uma cadeia de ilhas em volta de um ciclo periódico de período N é constituída de N ilhas individuais. Na margem de uma cadeia de ilhas há uma cadeia de ilhas secundárias. Em torno de cada uma das ilhas secundárias aparece uma terceira cadeia de ilhas e assim por diante, *ad infinitum*. Esse comportamento está mostrado na Fig. 4.4. As cadeias de ilhas secundárias podem ser vistas próximas de estruturas de ilhas maiores. Na Fig. 4.4(b) uma ilha da cadeia primária é ampliada, mostrando que existe uma terceira cadeia de ilhas, a qual, quando ampliada (Fig. 4.4(c)), revela uma nova cadeia de ilhas. Essa hierarquia na estrutura das ilhas é uma característica genérica de um espaço de fase misto no qual existem tanto regiões regulares, como caóticas.

(b) **Barreiras KAM**

São órbitas que cercam o espaço de fase. O fato mais importante sobre as barreiras KAM é que o seu comportamento é determinado pelo parâmetro de não-linearidade. Quando K aumenta, a curva contínua que formava a barreira começa a apresentar buracos, transformando-se numa estrutura fractal, análoga a um conjunto de Cantor. Tal estrutura é chamada de *cantor*. Esses buracos são possíveis rotas de saída para uma órbita caótica antes confinada numa barreira KAM, tornando, assim, os *cantori* permeáveis. Algumas barreiras são mais robustas do que outras, por isso as várias barreiras KAM não desaparecem para o mesmo valor de K . No entanto, como já foi dito, para $K > K_c$ todas são rompidas.

3. **Órbitas caóticas**

A seqüência de pontos não se repete, mas agora, diferentemente das curvas KAM, os pontos preenchem densamente uma região bidimensional, e não uma linha.

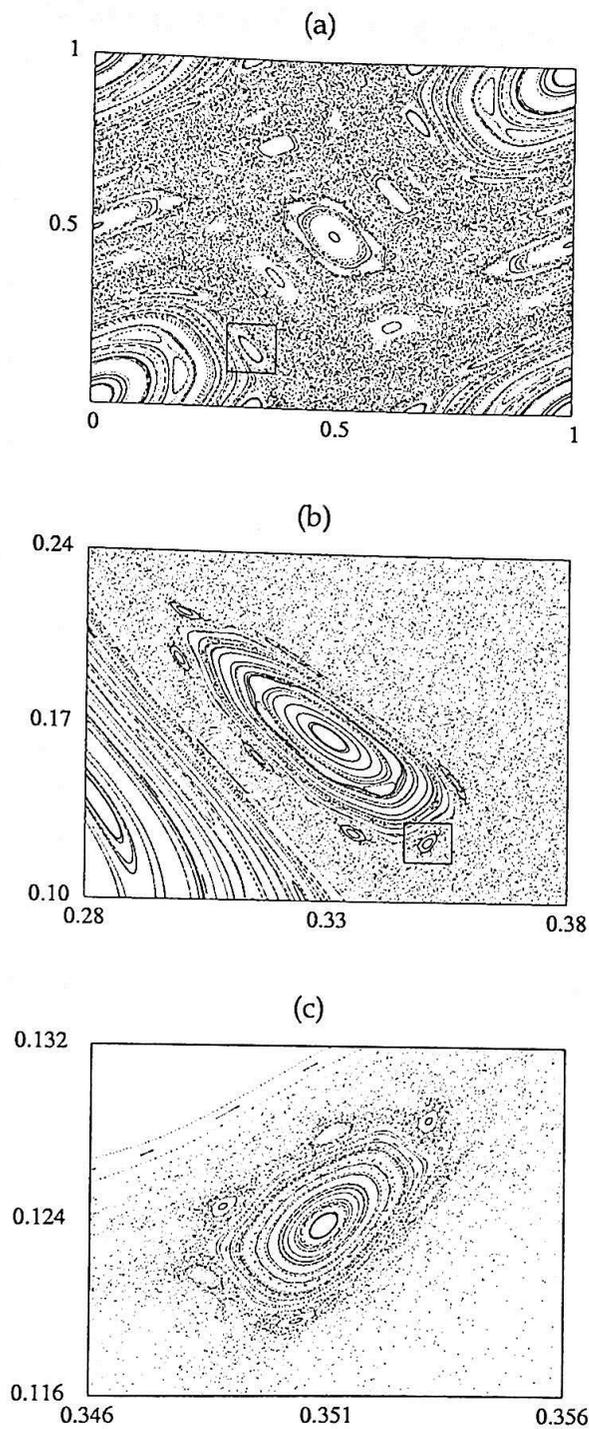


Figura 4.4: Hierarquia no espaço de fase do mapa padrão com $K = 1, 19$ e 150 condições iniciais escolhidas randomicamente no intervalo indicado em cada uma das figuras. (a) 500 iterações no domínio fundamental. (b) Ampliação da região indicada em (a), com 5000 iterações. (c) Ampliação da região indicada em (b), com 10^4 iterações.

Todos esses tipos de órbitas estão ilustrados na Fig. 4.5.

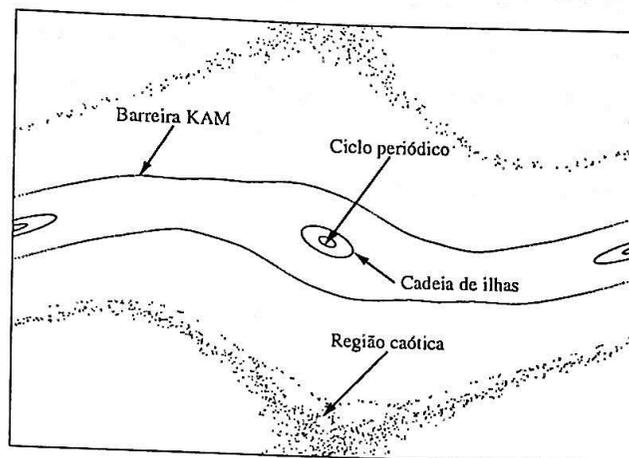


Figura 4.5: Ciclo periódico, cadeia de ilhas, barreira KAM e órbitas caóticas no espaço de fase do mapa padrão.

Nos processos de evolução das condições iniciais com valores de $K < K_c$ a difusão não acontece em todo espaço de fase, já que as órbitas estão presas pelas barreiras KAM e por isso o valor médio do desvio quadrático deve saturar-se assintoticamente quando $n \rightarrow \infty$.

O coeficiente de difusão para valores de $K > K_c$ pode ser definido analiticamente através de técnicas de integral de trajetória de Fourier. A primeira expansão desse tipo foi obtida envolvendo a introdução de estocasticidade nas equações canônicas do mapa padrão [43, 44]. Levando em conta correções de ordem superior e dividindo o espaço de fase em várias regiões para investigação numérica é possível encontrar uma expressão melhor para o coeficiente de difusão [45], dada por

$$\frac{D}{D_{QL}} = \frac{1 - 2J_1^2(K) - J_2^2(K) + 2J_3^2(K)}{(1 + J_2(K))^2}, \quad (4.5)$$

onde $J_i(K)$ é a função de Bessel de i -ésima ordem. O coeficiente de difusão quase-linear D_{QL} é obtido desconsiderando completamente a correlação de uma iteração com outra. Fazendo essa desconsideração para o momento angular no mapa padrão, temos

$$D_{QL} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle (\Delta p)^2 \rangle}{2n} = \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{K}{2\pi} \right)^2 \sin^2(2\pi q) \right\rangle = \frac{1}{4} \left(\frac{K}{2\pi} \right)^2. \quad (4.6)$$

Na Fig. 4.6 mostramos a previsão teórica da Eq. (4.5) junto com um resultado numérico. Notamos que o comportamento do processo difusivo é diferente para alguns valores do parâmetro K , especialmente para $K \approx 2\pi\ell$, com $\ell = 1, 2, 3, \dots$. Para esses valores, devido à periodicidade de p , além da periodicidade de q , surgem no espaço de fase algumas estruturas especiais. Esse não é um comportamento genérico para todo sistema Hamiltoniano, mas acontece no mapa padrão. Existe uma classe especial de ciclos com esse comportamento definidos por

$$p_{n+N} = p_n + \ell = p_n,$$

$$q_{n+N} = q_n + m = q_n,$$

onde ℓ e m são inteiros e N é algum período. Esse tipo de órbita avança na direção de p , por ℓ unidades, a cada n -ésima iteração. Devido a essa característica, esses ciclos são chamados de modos aceleradores.

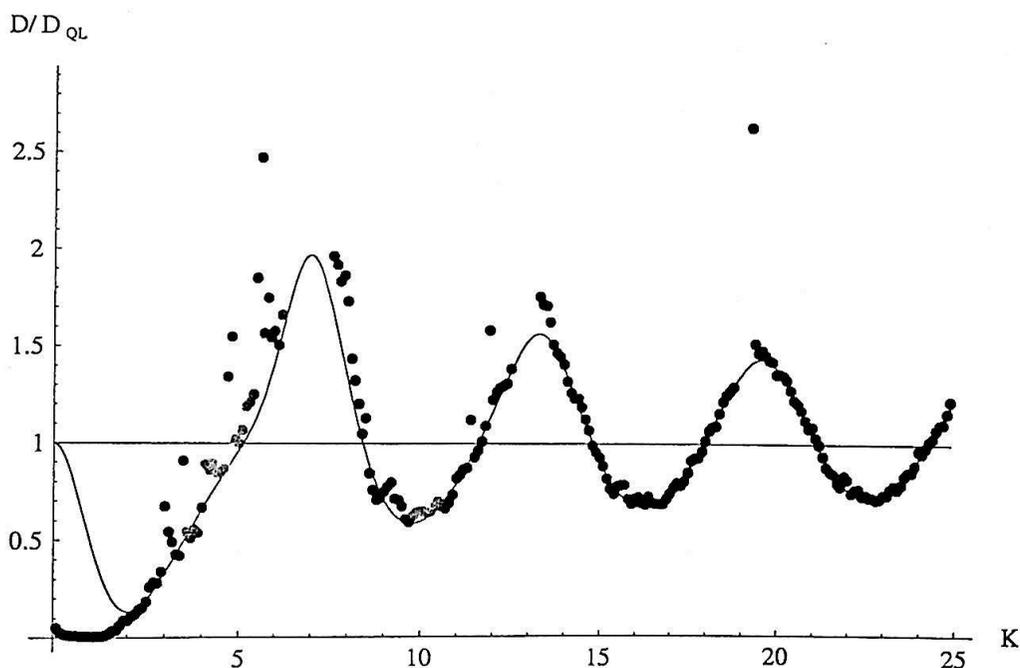


Figura 4.6: Comportamento do coeficiente de difusão para o mapa padrão. A curva cheia é o resultado teórico da Eq. (4.5). Os pontos representam um resultado numérico feito com 10^5 condições iniciais distribuídas uniformemente em $q \in [0, 1]$ e $p = 0$. O coeficiente de difusão D foi calculado pela Eq. (4.4) depois de $n = 300$ iterações. A reta $D = D_{QL}$ é o resultado assintótico, dado pela Eq. (4.4), para K muito grande, onde a correlação é muito pequena.

Podemos determinar os intervalos do parâmetro nos quais os modos aceleradores do ponto periódico de período 1 estão presentes [46]. Para isso, consideramos as variáveis relacionadas com o ângulo e com o momento angular estacionários e com mod 1, como fizemos para q na Sec. 3.1,

$$p = m \quad \text{e} \quad -\frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi q) = \ell, \quad \text{com } \ell, m \text{ inteiros,}$$

e, usando a condição de estabilidade $|\text{tr } A| < 2$, encontramos

$$2\pi\ell < K < 2\pi\ell \left(1 + \left(\frac{2}{\pi\ell} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Portanto, para $\ell = 1$, temos $6,283 \lesssim K \lesssim 7,448$ e, para $\ell = 2$, temos $12,566 \lesssim K \lesssim 13,188$. Essas são as regiões na Fig. 4.6 onde os dados numéricos apresentam as maiores discrepâncias em relação à curva teórica. É possível fazer uma análise dos modos aceleradores para pontos periódicos de período maior do que 1, mas todos têm intervalos de estabilidade menores, conseqüentemente menos importantes para modificar a difusão [46]. Como um exemplo, na Fig. 4.7 mostramos 5000 iterações de uma trajetória na região caótica obtida com $K = 6,9115$, onde existe um modo acelerador de período 3 [47]. A Fig. 4.7(a) destaca o movimento de uma condição inicial que encontra um modo acelerador e desloca-se por um longo percurso numa única direção no espaço de fase ao contrário do movimento típico dessa figura, mais parecido com um movimento Browniano. Na Fig. 4.7(b) mostramos a mesma trajetória, mas agora no intervalo fundamental do espaço de fase.

4.4 Difusão Anômala

As estruturas do espaço de fase apresentadas na seção anterior criam um comportamento diferenciado no coeficiente de difusão. Os modos aceleradores produzem uma divergência do coeficiente de difusão quando a variância $\langle(\Delta p)^2\rangle$ é calculada sobre condições iniciais tomadas em todo o espaço de fase.

Na Fig. 4.8 mostramos o coeficiente de difusão calculado para $n = 300, 500$ e 1000 iterações. Os pontos estão ligados por linhas para facilitar a compreensão. Podemos ver que D/D_{QL} para $n = 1000$ é maior do que para $n = 300$ iterações nos intervalos de K que apresentam modos aceleradores. Na verdade, o resultado do cálculo numérico é sempre maior quanto maior for o número de iterações.

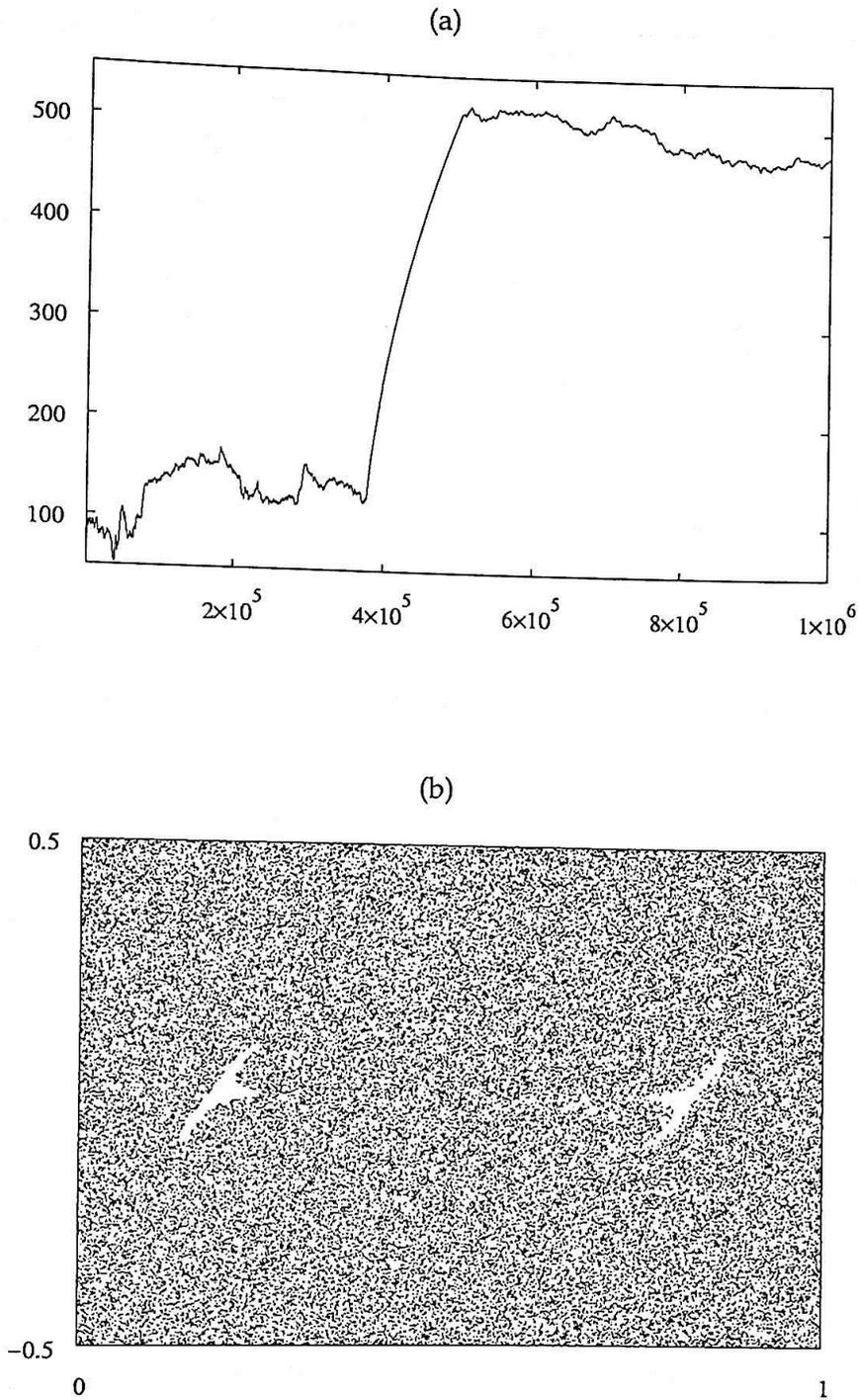


Figura 4.7: Espaço de fase para uma trajetória caótica do mapa padrão com $K = 6,9115$, dentro do intervalo de existência de modos aceleradores. A variável que está na abscissa é q e, na ordenada, p . (a) Espaço de fase completo, sem mod 1. (b) Espaço de fase no domínio fundamental, com mod 1.

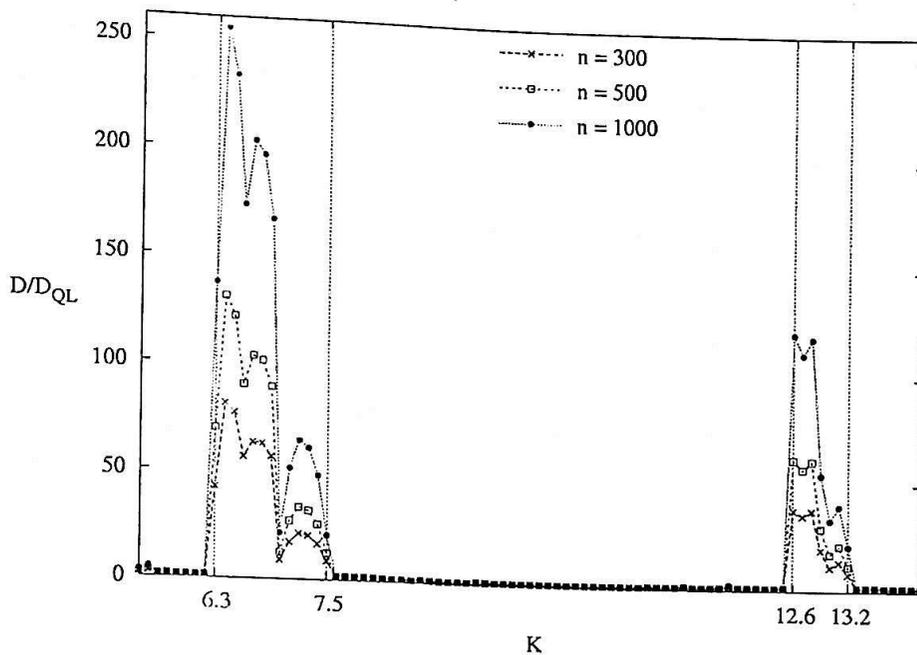


Figura 4.8: Cálculo numérico do coeficiente de difusão pela Eq. (4.4) com 10^5 condições iniciais em $\eta \in [0, 1]$ e $p = 0$.

Devido à presença de modos aceleradores, a média pode ser dividida em duas partes distintas: a primeira parte é sobre todas as regiões estáveis do espaço de fase onde existem os modos aceleradores, chamada S , e a segunda, sobre as regiões caóticas, chamada C ,

$$\langle(\Delta p)^2\rangle = \langle(\Delta p)^2\rangle_S + \langle(\Delta p)^2\rangle_C.$$

Como os modos aceleradores se propagam de uma maneira balística, isto é, sempre em uma mesma direção, temos que

$$\langle(\Delta p)^2\rangle_S \sim n^2,$$

e o coeficiente de difusão associado a esta região diverge com n [22].

A presença de modos aceleradores pode ter mais conseqüências inesperadas nas propriedades de transporte. Sua influência estende-se ao mar caótico e pode produzir efeitos não-locais. De fato, as barreiras parciais induzidas pela presença dos modos aceleradores na região caótica podem modificar a natureza do transporte. Na maior parte do tempo a partícula sofre difusão normal, mas algumas vezes ela fica presa na vizinhança de um modo acelerador e é arrastada violentamente de forma balística. Esses eventos raros podem dominar a dinâmica e produzir uma

difusão anômala do tipo

$$\langle(\Delta p)^2\rangle_C \sim n^\beta, \quad \text{com } 1 < \beta < 2,$$

então,

$$D_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle(\Delta p)^2\rangle_C}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\beta}{2n} \sim n^{\beta-1}.$$

Conseqüentemente, o coeficiente de difusão associado ao componente caótico também apresenta uma lei de potência divergente com expoente $\beta - 1$. Isso porque na presença dos modos aceleradores coexistem dois tipos de dinâmica: o movimento balístico e o movimento caótico. No entanto, a fronteira entre esses dois tipos não é nítida. Uma partícula vagando pelo mar caótico pode ser capturada por um *cantor* na vizinhança de um modo acelerador e ser arrastada balisticamente pelo espaço de fase.

Dependendo do expoente que governa o comportamento do desvio quadrático médio podemos distinguir três regimes característicos de movimento [48]:

$$\langle(\Delta p)^2\rangle \sim \begin{cases} n^2, & \text{balístico;} \\ n^\beta, & 1 < \beta < 2; \\ n, & \text{Browniano.} \end{cases}$$

Num movimento do tipo Browniano a equação de difusão é satisfeita e temos $\langle(\Delta p)^2\rangle = 2Dn$, para n suficientemente grande. Dizemos, assim, que a difusão é normal. Para os outros dois tipos de movimento, quanto maior o número de iterações, maior será o coeficiente de difusão, então $D \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Nesses casos a difusão é considerada anômala.

Para esclarecer a distinção entre esses regimes de movimento, calculamos numericamente o expoente β como função de K no mapa padrão. Isso foi feito iterando 10^5 condições iniciais distribuídas uniformemente na região caótica $0,49 < q < 0,499$ e $0,501 < q < 0,51$ com $p = 0$. Para cada valor de K , iteramos 10^4 vezes cada condição inicial. O valor do expoente β foi calculado com as próximas 1000 iterações através de um ajuste por lei de potência do tipo $\langle(\Delta p)^2\rangle \sim n^\beta$. O resultado obtido está mostrado na Fig. 4.9 para $0 < K < 24$. Pelo gráfico, observamos que para intervalos de K onde os modos aceleradores acontecem o valor de β é maior do que 1, chegando próximo de 2, que caracteriza um movimento balístico.

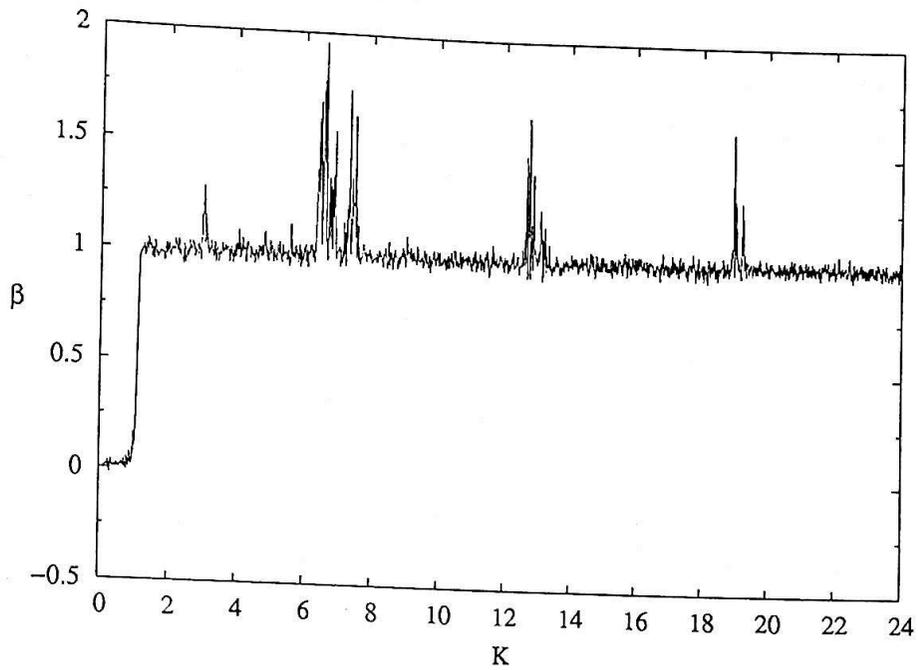


Figura 4.9: Variação do expoente β com o valor de K . Nos intervalos de K onde aparecem modos aceleradores a variância $\langle(\Delta p)^2\rangle$ cresce com expoente de n diferente de 1.

5

Manipulação da Difusão

Nesse capítulo estudamos o comportamento das propriedades macroscópicas dos sistemas, representadas pela difusão, quando o controle é aplicado em várias partículas simultaneamente, analisando a dependência das propriedades de transporte com origem microscópica. Utilizamos como exemplo o mapa padrão sob aplicação da ejeção.

5.1 Parâmetro de Ejeção

A aplicação da ejeção altera as características do sistema, como foi mostrado na Sec. 3.2.2. Naquela seção mostramos alguns valores para o parâmetro de controle, chamado γ , para os quais as trajetórias são atraídas pelas regiões periódicas do sistema original. Encontramos que a aplicação da ejeção produzia o resultado desejado com $K = 2$ se o valor da perturbação fosse $\gamma = 0,3$, concentrando a maior parte das trajetórias nas regiões periódicas. A aplicação da ejeção, como foi dito, mergulha o sistema num espaço de fase de dimensão maior onde as regiões periódicas do sistema original comportam-se como atratores da nova dinâmica.

Para entender melhor o funcionamento da ejeção, considere a escolha particular do gradiente do mapa padrão dado pela matriz da Eq. (3.12). Devido à natureza

conservativa do mapa, os dois autovalores daquela matriz devem ter multiplicidade 1. Caso eles sejam complexos, ambos têm valor absoluto 1; sendo reais, um deles deve ser maior do que 1 e o outro menor, mas o produto deles é 1. Quando uma trajetória cai numa região elíptica, cujos autovalores são complexos, o fator $e^{-\gamma}$ amortece qualquer pequena perturbação e a trajetória permanece nessa região. No entanto, quando uma trajetória caótica visita uma região hiperbólica, com autovalores reais, as perturbações são amplificadas e existe um valor de γ para o qual a trajetória é expulsa dessa região. Conseqüentemente, essas trajetórias são expelidas da região caótica até visitarem uma região elíptica e lá permanecerem.

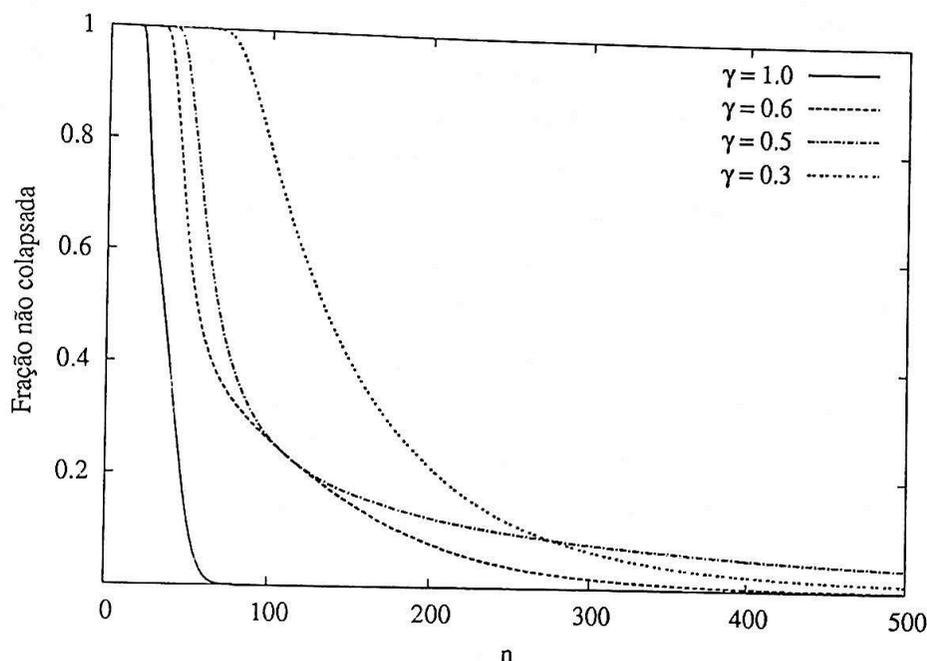


Figura 5.1: Fração das condições iniciais que não colapsam na dinâmica original. Foram escolhidas 10^5 condições iniciais distribuídas uniformemente em duas regiões caóticas: $0,49 < q < 0,499$ e $0,501 < q < 0,51$ com $p = 0$. Para cada iteração está mostrado a fração dessas partículas que têm $|v_n|$ e $|u_n|$ maiores do que 10^{-10} . A aplicação da ejeção foi feita ao mapa padrão com $K = 2$ e $\gamma = 1, 0,6, 0,5$ e $0,3$.

Na Fig. 5.1 mostramos a fração de partículas que não colapsam na dinâmica original. O colapso implica que as trajetórias não sofrem mais a perturbação aplicada pela ejeção, isto é, os valores absolutos de v e u , dados nas Eqs. (3.13), são desprezíveis. Usamos $K = 2$ e tomamos 10^5 condições iniciais distribuídas uniformemente em regiões onde aparentemente não há órbitas periódicas. O significado desse colapso pode ser entendido da seguinte forma: para valores grandes de γ , em poucas iterações a dinâmica original é retomada e as trajetórias que não se

estabilizaram em ilhas periódicas devem permanecer nas regiões caóticas, pois a perturbação não será mais aplicada (o valor de $|v|$ e $|u|$ é muito pequeno e as Eqs. (3.13) são reduzidas às Eqs. (3.4) do sistema original). Para valores menores de γ , são necessárias mais iterações até que o sistema não esteja mais submetido à perturbação, dessa forma a chance de uma partícula cair numa região periódica depois de ser expulsa várias vezes de regiões caóticas é maior (cf. Fig. 3.8).

5.2 Manipulação da Difusão com Ejeção

O cálculo do coeficiente de difusão de um *ensemble* de partículas depende da dispersão do *ensemble* e do número de iterações, como foi dito na Sec. 4.2. Para valores do parâmetro de não-linearidade do mapa padrão que não apresentam modos aceleradores vê-se que a difusão depende linearmente do número de iterações. Na Fig. 4.9 percebe-se que a maioria dos valores de K corresponde a valores de β muito próximos de 1, mostrando a dependência linear. Mostramos que os valores que apresentam β diferente de 1 correspondem à difusão anômala, produzida pelos modos aceleradores presentes no espaço de fase.

A Fig. 5.2 mostra o comportamento da dispersão com o número de iterações. Tomamos 10^5 condições iniciais na região aparentemente caótica $0,49 < q < 0,499$ e $0,501 < q < 0,51$ com $p = 0$. A dispersão é calculada em cada iteração i por

$$\langle (\Delta p_i)^2 \rangle = \sum_{j=0}^m \frac{(\Delta p_i^{(j)})^2}{m},$$

onde $\Delta p_i^{(j)}$ é a diferença $p_i^{(j)} - p_0^{(j)}$ da j -ésima partícula do *ensemble* de m partículas na i -ésima iteração. Na Fig. 5.2(a) mostramos esse resultado para $K = 2$ e na Fig. 5.2(b), para $K = 6, 9$.

Já foi visto nesse trabalho que a aplicação da ejeção altera as características do sistema no intervalo fundamental. Agora mostraremos como a aplicação da ejeção pode alterar a difusão do sistema. O movimento difusivo normal, com dependência linear das iterações, acontece com as partículas vagando pelo mar caótico. Quando a ejeção atua no sistema, as partículas são expulsas das regiões caóticas e, assim, a difusão deve sofrer algum tipo de modificação. Para γ grande, o sistema rapidamente retoma o comportamento original e, por isso, a difusão não deve sofrer grandes alterações. Com a diminuição de γ , a perturbação atua por mais tempo no sistema (cf. Fig. 5.1), permitindo que mais partículas encontrem regiões periódicas,

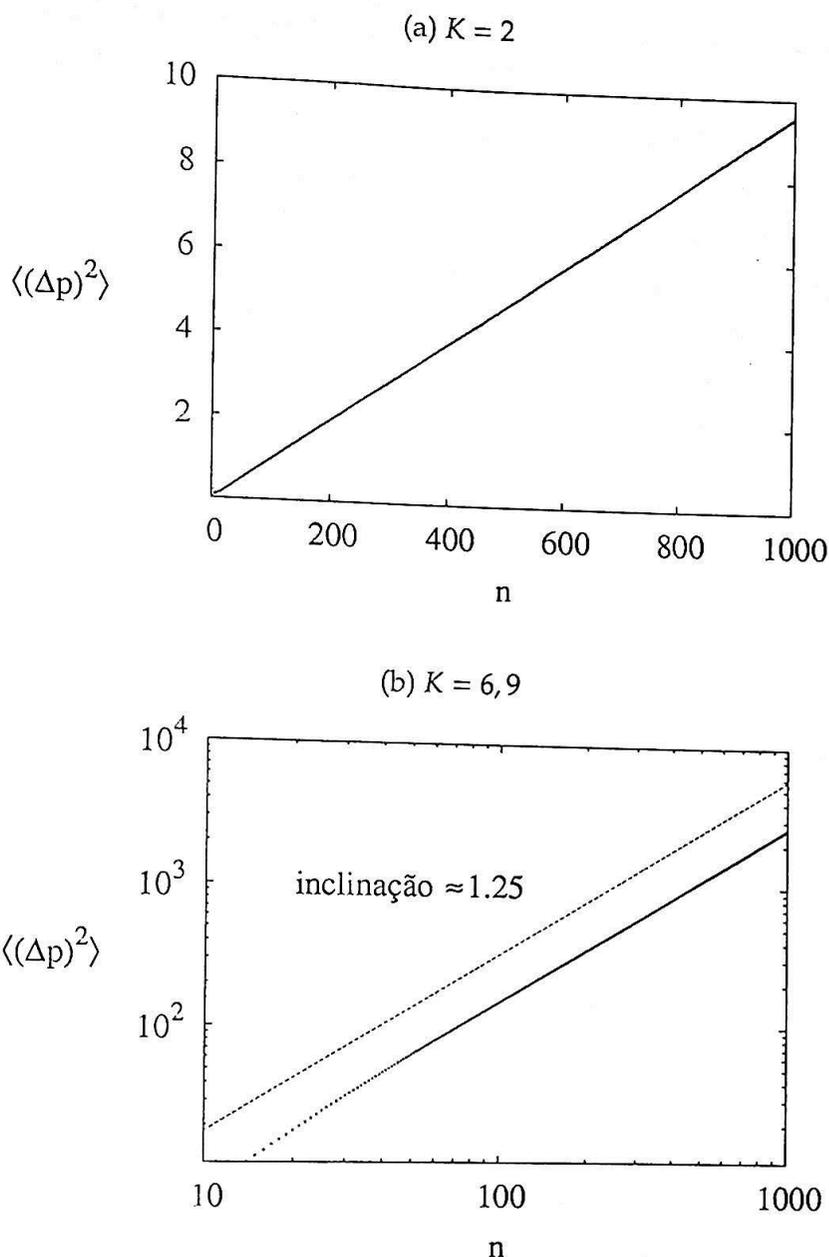


Figura 5.2: Dependência da dispersão de 10^5 condições iniciais numa região caótica com o número de iterações. (a) dependência é linear para $K = 2$. (b) Com $K = 6,9$ existem modos aceleradores no espaço de fase tornando a difusão anômala. Nesse caso, a dependência da variância com as iterações é bem ajustada por $\langle(\Delta p)^2\rangle \sim n^{1.25}$.

acarretando mudanças no comportamento difusivo. De fato, as partículas que encontram regiões periódicas mantêm $\Delta p^{(j)}$ constante e não contribuem para o aumento da dispersão com as iterações.

Para a difusão anômala, a alteração que ocorre no comportamento da dispersão é um pouco diferente. Quando a ejeção é aplicada, as órbitas presentes nas regiões

caóticas também serão expelidas para as regiões periódicas. Porém, junto a essas regiões estão localizados os modos aceleradores. Dessa forma, as trajetórias que acabam caindo nas regiões periódicas sofrem a ação dos modos aceleradores. Como já dissemos, essas estruturas do espaço de fase que aparecem para alguns intervalos de valores do parâmetro K interferem na dispersão das partículas, ocasionando uma difusão anômala. Assim, durante a aplicação da ejeção a difusão sofre um aumento sempre que alguma trajetória se aproxima da região periódica. Começando com γ grande, o comportamento difusivo não sofre muitas alterações, devido à mesma justificativa dada para a difusão normal, isto é, a dinâmica original é retomada em poucas iterações. Conforme diminuimos o valor de γ , a ejeção atua mais fortemente empurrando as órbitas para junto dos modos aceleradores, aumentando o número de trajetórias aceleradas em relação ao sistema original. Esperamos, então, que a difusão aumente.

Com valores de γ pequenos, o sistema sofre uma perturbação maior e por mais tempo. Pelas Eqs. (3.13), percebemos que uma perturbação grande altera diretamente o valor de p . Aplicando essa perturbação durante muito tempo, como acontece para γ pequeno, o valor de p sofre modificações por muitas iterações. Para a difusão normal, essa modificação faz com que a taxa de crescimento da difusão aumente enquanto está sendo aplicada a ejeção. Então, durante algumas iterações a difusão cresce abruptamente e depois, quando as trajetórias estiverem em regiões periódicas, permanece constante. Na difusão anômala, a aplicação da perturbação por mais tempo, quando γ é pequeno, produz uma dispersão menor do que o mapa original nas primeiras iterações. Com o mapa sujeito à ação da perturbação, o efeito dos modos aceleradores é retardado e durante algumas iterações o que se observa é uma dispersão menor. Assim que a perturbação deixa de agir, os modos aceleradores voltam a dominar a dispersão, crescendo com n^β , $1 < \beta < 2$.

Na Fig. 5.3 mostramos o comportamento da dispersão com o número de iterações. As condições iniciais são escolhidas da mesma forma que na Fig. 5.2. Para $K = 2$, com difusão normal, o comportamento da dispersão é modificado quando variamos o parâmetro γ . Na Fig. 5.3(a) mostramos os resultados para $\gamma = 1, 0,4$ e $0,1$. Para $\gamma = 3$, o comportamento da dispersão é muito próximo do mapa original, plotado com linha cheia. Para $\gamma = 0,4$, a dispersão sofre um aumento abrupto nas primeiras iterações, mas logo em seguida passa a ter um valor quase constante. Com o menor valor, também há a estabilização da dispersão, no entanto isso acontece depois de um número maior de iterações. Os resultados para a difusão anômala com $K = 6,9$ e $\gamma = 2, 1,2$ e $0,1$ estão mostrados no gráfico log-log da Fig. 5.3(b) Observamos que

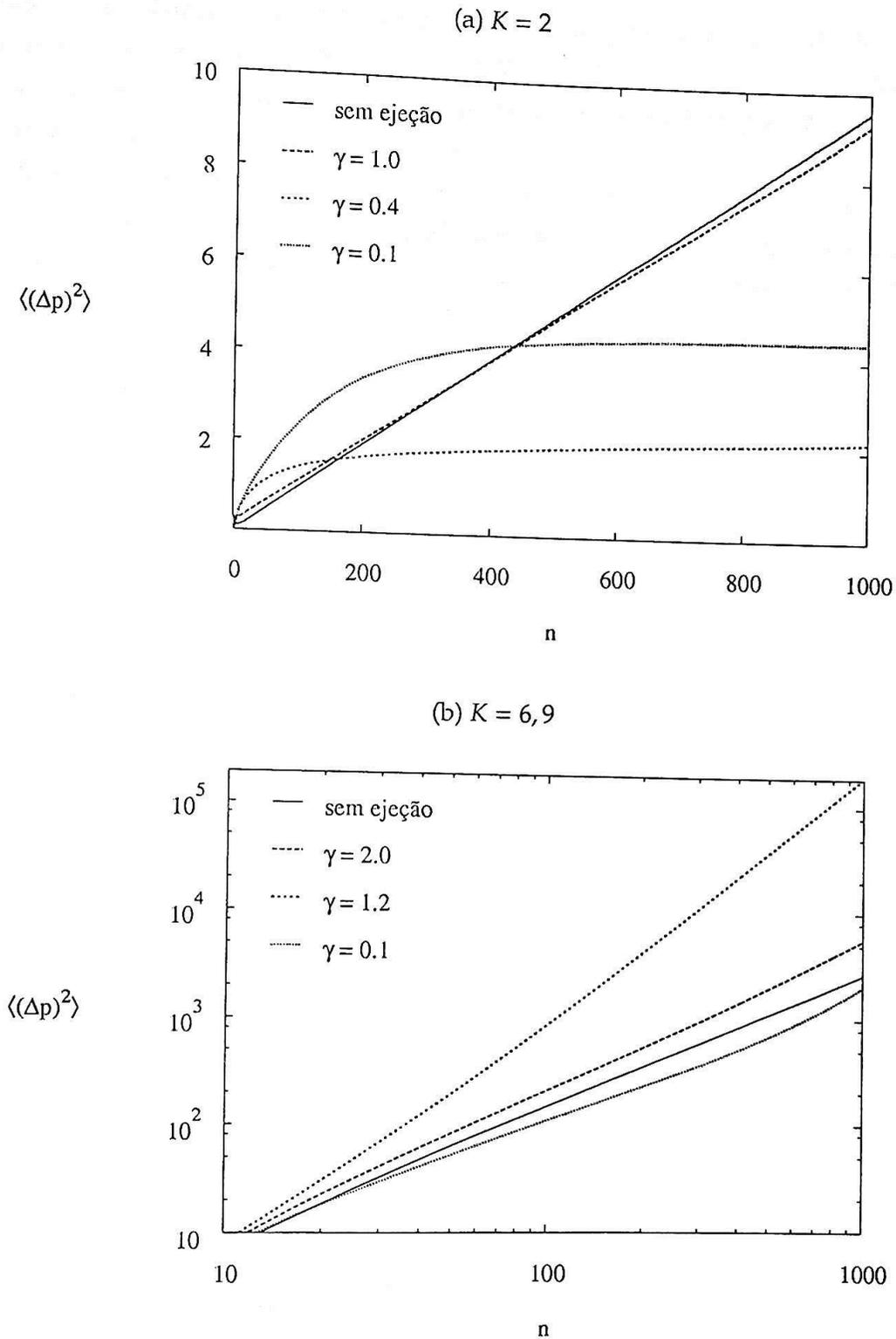


Figura 5.3: Comportamento da dispersão na variável de momento do mapa padrão com aplicação da ejeção.

para $\gamma = 2$ a curva se aproxima do resultado original (linha cheia) e para valores maiores a curva é cada vez mais parecida com o resultado original. Diminuindo γ , a dispersão sofre um aumento até um valor máximo e depois volta a diminuir, ficando menor do que o valor original.

Observamos que a aplicação da ejeção ao mapa padrão produz uma modificação no comportamento da dispersão, alterando, assim, a difusão. Então, podemos manipular o coeficiente de difusão variando o parâmetro de controle aplicado ao sistema dinâmico.

6

Discussões

O controle de órbitas caóticas é uma teoria que está bem fundamentada e tem resultados experimentais comprovados. Nessa dissertação investigamos como essa teoria pode ser aplicada para a manipulação de coeficientes de transporte em sistemas com um número grande de condições iniciais.

Encontramos evidências de que a difusão de várias partículas pode sofrer alterações quando for aplicado controle. Analisamos o caso da ejeção, um método que mergulha o sistema em uma dimensão maior. Uma maneira de se aplicar métodos como esse é acoplar o sistema desejado a um outro que produza uma modificação não muito grande na dinâmica original.

Em trabalhos futuros, pretendemos modificar essa técnica para que o sistema acoplado não dependa de cada variável do sistema original, mas seja calculado pela média de alguma variável.

Referências Bibliográficas

- [1] P. Gaspard, M. E. Briggs, M. K. Francis, J. V. Sengers, R. W. Gammon, J. R. Dorfman, and R. V. Calabrese, "Experimental evidence for microcosmic chaos", *Nature* **394**, 865–868 (1998).
- [2] R. Klages, *Deterministic Diffusion in One-Dimensional Chaotic Dynamical Systems*, Wissenschaft und Technik Verl. Gross, Berlin, 1996.
- [3] J. R. Dorfman, *An Introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [4] Y.-C. Lai, C. Grebogi, R. Blümel, and I. Kan, "Crisis in chaotic scattering", *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2212–2215 (1993).
- [5] R. Klages and J. R. Dorfman, "Simple maps with fractal diffusion coefficients", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 387–390 (1995).
- [6] C. Grebogi and Y.-C. Lai, "Controlling chaotic dynamical systems", *Syst. Control Lett.* **31**, 307–312 (1997).
- [7] Y.-C. Lai, T. Tél, and C. Grebogi, "Stabilizing chaotic-scattering trajectories using control", *Phys. Rev. E* **48**, 709–717 (1993).
- [8] R. Klages, "Transitions from deterministic to stochastic diffusion", *Europhys. Lett.* **57**, 796–802 (2002).

- [9] E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, "Controlling chaos", *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1196–1199 (1990).
- [10] S. Boccaletti, C. Grebogi, Y.-C. Lai, H. Mancini, and D. Maza, "The control of chaos: theory and applications", *Phys. Rep.* **329**, 103–197 (2000).
- [11] E. E. N. Macau and C. Grebogi, "Driving trajectories in complex systems", *Phys. Rev. E* **59**, 4062–4070 (1999).
- [12] E. E. N. Macau and C. Grebogi, "Driving trajectories in chaotic systems", *Int. J. Bifurcation and Chaos* **11**, 1423–1442 (2001).
- [13] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, LTC–Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1998.
- [14] L. H. A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos*, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2002.
- [15] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Unstable periodic orbits and the dimension of chaotic attractor", *Phys. Rev. A* **36**, 3522–3524 (1987).
- [16] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Unstable periodic orbits and the dimensions of multifractal chaotic attractors", *Phys. Rev. A* **37**, 1711–1724 (1988).
- [17] D. Auerbach, P. Cvitanovic, J.-P. Eckmann, G. Gunaratne, and I. Procaccia, "Exploring chaotic motion through periodic orbits", *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2387–2389 (1987).
- [18] T. Morita, H. Hata, H. Mori, T. Horita, and K. Tomita, "On partial dimensions and spectra of singularities of strange attractors", *Prog. Theor. Phys.* **78**, 511–515 (1987).
- [19] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems", *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1284–1287 (1986).
- [20] C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras, and J. A. Yorke, "Critical exponents for crisis-induced intermittency", *Phys. Rev. A* **36**, 5365–5380 (1987).
- [21] L. E. Reichl, *The Transition to Chaos in Conservative Classical Systems: Quantum Manifestations*, Springer-Verlag, New York, 1992.

- [22] P. Leboeuf, "Normal and anomalous diffusion in a deterministic area-preserving map", *Physica D* **116**, 8–20 (1998).
- [23] J. B. Taylor, "", (1968), unpublished, cf. ref. 7 in [25].
- [24] B. V. Chirikov, "A universal instability of many-dimensional oscillator systems", *Phys. Rep.* **52**, 263–379 (1979).
- [25] J. M. Greene, "A method for determining a stochastic transition", *J. Math. Phys.* **20**, 1183–1201 (1979).
- [26] Y.-C. Lai, M. Ding, and C. Grebogi, "Controlling Hamiltonian chaos", *Phys. Rev. E* **47**, 86–92 (1993).
- [27] A. Oloumi and D. Teychenné, "Controlling Hamiltonian chaos via Gaussian curvature", *Phys. Rev. E* **60**, R6279–R6282 (1999).
- [28] Y. Zhang and Y. Yao, "Controlling global stochasticity in the standard map", *Phys. Rev. E* **61**, 7219–7222 (2000).
- [29] Y. Zhang, S. Chen, and Y. Yao, "Controlling Hamiltonian chaos by adaptive integrable mode coupling", *Phys. Rev. E* **62**, 2135–2139 (2000).
- [30] Y. Zhang, G. Hu, S. Chen, and H. A. Cerdeira, "Controlling global stochasticity of Hamiltonian systems by nonlinear perturbation", *Eur. Phys. J. B* **27**, 381–384 (2002).
- [31] J. H. E. Cartwright, M. O. Magnasco, and O. Piro, "Bailout embeddings, targeting of invariant tori, and the control of Hamiltonian chaos", *Phys. Rev. E* **65**, 452031–4520315 (2002).
- [32] J. Wang, X.-L. Ding, B. Hu, B.-H. Wang, J. S. Mao, and D.-R. He, "Characteristics of a piecewise smooth area-preserving map", *Phys. Rev. E* **64**, 262021–262029 (2001).
- [33] J. Wang, X.-L. Ding, B.-H. Wang, and D.-R. He, "Quasi-attractors in a piecewise smooth area-preserving map", *Chinese Phys. Lett.* **18**, 13–15 (2001).
- [34] J. H. E. Cartwright, M. O. Magnasco, and O. Piro, "Noise- and inertia-induced inhomogeneity in the distribution of small particles in fluid flows", *Chaos* **12**, 489–495 (2002).

- [35] J. H. E. Cartwright, M. O. Magnasco, O. Piro, and I. Tuval, "Noise-induced order out of chaos by bailout embedding", *Fluct. Noise Lett.* **2**, 161–174 (2002).
- [36] J. E. Marsden and T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [37] A. Babiano, J. H. E. Cartwright, O. Piro, and A. Provenzale, "Dynamics of a small neutrally buoyant sphere in a fluid and targeting in Hamiltonian systems", *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5764–5767 (2000).
- [38] J. H. E. Cartwright, M. O. Magnasco, O. Piro, and I. Tuval, "Bubbling and on-off intermittency in bailout embeddings", *Phys. Rev. E* **68**, 0162171–0162717 (2003).
- [39] H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, volume 2, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 4^a edition, 2002.
- [40] A. Pais, "*Sutil é o Senhor. . .*": *a Ciência e a Vida de Albert Einstein*, Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 1995, tradução F. Parente e V. Esteves.
- [41] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, "Diffusion in two-dimensional mappings", *Physica D* **33**, 211–239 (1988).
- [42] R. Balescu, *Statistical Dynamics: Matter out of Equilibrium*, Imperial College Press, London, 1997.
- [43] A. B. Rechester and R. B. White, "Calculation of turbulent diffusion for the Chirikov–Taylor model", *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1586–1589 (1980).
- [44] A. B. Rechester and R. B. White, "Fourier-space paths applied to the calculation of diffusion for the Chirikov–Taylor model", *Phys. Rev. Lett.* **23**, 2664–2672 (1981).
- [45] J. D. Meiss, J. R. Cary, C. Grebogi, J. D. Crawford, A. N. Kaufman, and H. D. I. Abarbanel, "Correlations of periodic, area-preserving maps", *Physica D* **6**, 375–384 (1983).
- [46] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [47] Y. H. Ichikawa, T. Kamimura, and T. Hatori, "Stochastic diffusion in the standard map", *Physica D* **29**, 247–255 (1987).

- [48] G. Zumofen and J. Klafter, "Random walks in the standard map", *Europhys. Lett.* 25, 565-570 (1994).