

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

”Cálculo de Funções de Correlação em Teorias Conformes e a Dualidade Nível-Rank”

Jojomar Lucena da Silva

Banca Examinadora

Prof. Dr. Valerio Kurak (IFUSP) - Orientador

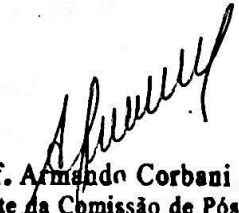
Prof. Dr. Elcio Abdalla, IFUSP, USP

Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira, IFT, UNESP



Dissertação apresentada ao
IFUSP para a obtenção do
grau de mestre em ciências.

Março de 2002



Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: _____

3649

ex.2

02.18/03/02

530.14

S586 cov

M

2002

Exr. 2

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Silva, Jojomar Lucena da

Cálculo de Funções de Correlação em Teorias de
Campos Conformes e a Dualidade Nível-Rank.
São Paulo 2002.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física – Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Valério Kurak
Área de Concentração: Teoria de Campos

Unitermos: 1. Teoria de Campos Conforme;
2. Álgebra de Virasoro;
3. Álgebras de Kac-Moody;
4. Dualidade Nível-Rank.

USP/IF/SBI-014/2002

Resumo

Teorias conformes descrevem notavelmente o comportamento crítico de modelos da Mecânica Estatística formulados em redes bidimensionais (modelos de vértices, de Ising, de Potts, de hexágonos duros, na verdade, uma infinidade de modelos). Por outro lado, estas teorias podem ser obtidas como quocientes de certas álgebras de Kac-Moody caracterizadas pelo rank de sua sub-álgebra de Lie e por seu nível.

Nessa dissertação examinamos uma simetria especial conhecida como dualidade 'nível-rank'. Resumidamente, ao combinarmos uma dada álgebra de Kac-Moody de rank N e nível k com a mesma álgebra mas de rank k e nível N , obtemos uma álgebra de Kac-Moody de rank kN e nível 1. A verificação desta simetria para as funções de correlação de uma representação arbitrária é uma tarefa formidável. Por esta razão, nos limitamos neste trabalho às representações elementares. Mostramos ainda algumas consequências desta simetria na construção dos quocientes citados no parágrafo anterior. Por exemplo, o modelo minimal $vir(N+3, N+2)$ da álgebra de Virasoro resulta da decomposição da álgebra de Kac-Moody $\widehat{su}(N+1)$ na álgebra $\widehat{su}(N)$ ambas em nível 2.

Abstract

Conformal theory describe notably the critical behaviour of Statistical Mechanics Models formulated in two-dimensional lattices (vertex models, Ising model, Potts model, hard hexagon model, indeed an infinity of models). On the other hand, this theories can be built like quotient (coset) Kac-Moody algebras characterized by the rank of a Lie subalgebra and by their level.

In this report we consider a special symmetry known as 'level-rank' duality. In short, by combining a given Kac-Moody algebra of rank N and level k with the one obtained by inverting N and k , we obtain another Kac-Moody algebra of rank kN at level one. The checking of this assertion for the correlation functions of an arbitrary representation is a formidable task. For this reason we limit ourselves to the case of elementary representations. We show also some consequences of the 'level-rank' duality to the coset construction of Virasoro representations. For instance, the $vir(N + 3, N + 2)$ Virasoro minimal model appears in the decomposition of the $\widehat{su}(N + 1)$ Kac-Moody algebra into $\widehat{su}(N)$ both at level two.

Agradecimentos

A Deus por tudo.

Aos meus pais e irmãos por toda a paciência e apoio à distância nestes dois anos.

Ao meu orientador professor Dr. Valerio Kurak; aos professores Elcio Abdalla e Luiz Agostinho por terem aceitado participar da banca examinadora deste trabalho e a todos os professores do Instituto de Física da USP que contribuíram para a minha formação.

A todos os meus amigos do departamento de Física Matemática que de uma maneira ou outra contribuíram para o enriquecimento deste trabalho; ao Marcelo P., Leonardo S., Alejandro C., José C., Francisco D., Fabio P., João Luis, Alex G., Alessandro M., Rodrigo F., Takeshi O., Arnaldo, Carlúcio, Wilson, Alberto e Fernando T. por toda a experiência que me passaram e pela sincera amizade que demonstraram.

Ao professor Guy Grebot por tudo o que me ensinou sobre física, matemática e responsabilidades.

Aos inúmeros amigos que fiz no IFUSP.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Teoria Quântica de Campos	3
2.1	Simetrias e Leis de Conservação	4
2.2	O Grupo Conforme	7
2.3	Invariância Conforme em Duas Dimensões	9
2.4	Bósons e Férmions Livres	12
3	Álgebra de Virasoro	16
3.1	Álgebra de Virasoro	17
3.2	Estados Nulos	19
3.3	Equações Diferenciais para Modelos Minimais	23
4	Álgebra de Kac-Moody	28
4.1	Modelos de WZW	29
4.2	Construção de Sugawara	31
4.3	Operador de Casimir	34
4.4	Equação de Knizhnik-Zamolodchikov	37
4.5	Equação de Knizhnik-Zamolodchikov de $\widehat{su}(N)_k$	39
5	Quocientes de Álgebras de Kac-Moody	43
5.1	Carga Central	44

5.2	Dimensão dos Campos Primários	45
5.3	Férmions Livres Complexos	46
6	Simetria Nível-Rank	50
6.1	Simetria Nível-Rank	50
6.2	Função de Quatro Pontos para $\hat{g} = \hat{g}(N)_k + \hat{g}(k)_N$	55
6.3	Decomposição de $\widehat{su}(2)_2$	58
7	Conclusão	62
A	Campos Nulos nas Representações da Álgebra de Kac-Moody	65

Capítulo 1

Introdução

No esforço da Física em descrever a natureza em toda a sua complexidade através de leis que são ao mesmo tempo simples e possuem uma validade geral, as simetrias surgem como um elemento imprescindível para a realização desse intuito. Em termos matemáticos, as simetrias são usualmente representadas por grupos de transformações, ou, para grupos contínuos, por álgebras. Grupos contínuos, aparecem na mecânica quântica e na teoria de campos. O exemplo padrão de aplicação desse tipo de simetria na mecânica quântica é a descrição do momento angular através da álgebra de Lie do grupo de Lie $SU(2)$, que é localmente isomórfico ao grupo de rotações em três dimensões. A generalização da teoria do momento angular possibilitou a descoberta das álgebras de Kac-Moody que são álgebras de Lie dimensionalmente infinitas. Elas aparecem em sistemas da mecânica estatística com pontos críticos, isto é, com várias fases e seu estudo é feito através do comportamento desse sistema por transformações de escala (dilatações).

Para um sistema quântico com invariância sob translações e rotações (i. é, homogêneo e isotrópico), a invariância por dilatações implica, em geral, invariância sob o grupo de transformações conformes. Portanto, seu comportamento crítico é descrito por uma teoria quântica de campos invariante sob todo o grupo conforme. Esta observação, originalmente devida a Polyakov, produz dramáticas consequências se a dimensão do sistema é dois: neste caso, o grupo conforme é dimensionalmente infinito. A teoria de campos com

essa simetria, teoria de campos conformes, apresentada em 1984 por Belavin, Polyakov e Zamolodchikov abriu enormes expectativas de pesquisa sobretudo em teoria de strings e em fenômenos críticos e entre eles estão: modelo de Ising, de Potts, de Ising Tricrítico e muitos outros que são teorias de campos conformes, na verdade, as menores dentre elas, chamadas também, modelos minimais. Em seguida, descobriu-se a relação desses modelos minimais com os de WZW que possuem a simetria da álgebra de Kac-Moody: esses modelos minimais podem ser obtidos em relação a seus números quânticos e às funções de correlação, por quocientes de álgebras de Kac-Moody.

Para situar o leitor, no capítulo 2 apresentamos os conceitos físicos relevantes da teoria quântica de campos para essa dissertação. Introduzimos a invariância conforme e obtemos a identidade de Ward decorrente desse fato. Como consequência da simetria conforme, emerge a álgebra de Virasoro, capítulo 3, e do esforço por se obter as representações irredutíveis e unitárias para esta, surgem os modelos minimais. Como dissemos no primeiro parágrafo, quocientes de modelos de WZW representam modelos minimais e este é o assunto dos capítulos 4 e 5. Encerramos a parte algébrica de nosso trabalho, no capítulo 6, dando um passo a mais, relacionando os quocientes (cosets) com uma simetria da álgebra de Kac-Moody denominada 'nível-rank' e encontrando as funções de quatro pontos para o caso mais simples. No capítulo 7, concluímos este trabalho com uma breve consideração dos temas estudados, dos cálculos realizados e algumas perspectivas sobre outras possíveis pesquisas nesta mesma linha.

Capítulo 2

Teoria Quântica de Campos

Neste capítulo, introduziremos os conceitos básicos da teoria quântica de campos de maneira simples, não exaustiva, visando situar o leitor, que conhece os princípios da mecânica quântica mas que ainda não tomou contato com os da teoria quântica de campos, para a leitura dos demais capítulos desse trabalho. Todos os conceitos físicos utilizados nesta dissertação serão expostos aqui. Nos outros capítulos, abordaremos esses mesmos assuntos, sob outros prismas, ou por meio de técnicas que tornam menos complicada a resolução de alguns problemas. Na secção (2.1) destacaremos o papel das simetrias na teoria quântica de campos, dando ênfase ao teorema de Noether, apresentando a corrente conservada para as translações que é o tensor energia momento, e as identidades de Ward. Na secção (2.2), veremos as consequências da simetria conforme para a teoria quântica de campos, particularmente para a função de dois pontos (propagador). Já na secção (2.3), verificaremos o que acontece com as identidade de Ward da secção anterior para uma teoria de campos em duas dimensões e como isso acarreta na expansão do produto de operadores e na relação deste produto com as dimensões conformes dos campos da teoria. Finalmente, encerramos este primeiro capítulo na secção (2.4) onde apresentaremos o conceito de carga central de uma teoria física através dos exemplos de bósons e férmions livres.

2.1 Simetrias e Leis de Conservação

A teoria quântica de campos pode ser vista como o estudo de um sistema físico determinado por uma ação que geralmente, depende do campo e de sua primeira derivada:

$$S = \int d^d x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \quad (2.1)$$

onde $\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$ é a lagrangiana do sistema, d é a dimensão do espaço e x é um vetor neste espaço. Como a ação descreve o sistema físico, é natural esperarmos que ela permaneça invariante sob algumas transformações, como por exemplo, rotações, translações e dilatações nas coordenadas, ou então, sob outras mais gerais que afetam tanto as coordenadas quanto os campos. Essas transformações mais gerais possuem a forma $\Phi'(\mathbf{x}') = \mathcal{F}(\Phi(\mathbf{x}))$ e a maneira mais simples de se estudar seu efeito sob a ação S é através de transformações infinitesimais sobre as coordenadas e os campos

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \\ \Phi'(\mathbf{x}') &= \Phi(\mathbf{x}) + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde ω_a é um parâmetro infinitesimal. Definimos o gerador \mathcal{G}_a , responsável pela variação do campo decorrente da transformação sofrida pela ação, por $\delta_w \Phi(x) \equiv \Phi'(x) - \Phi(x) \equiv -i\omega_a \mathcal{G}_a \Phi(x)$. Sua expressão é obtida a partir da expansão de $\Phi'(x')$ até primeira ordem

$$\begin{aligned} \Phi'(\mathbf{x}') &= \Phi(\mathbf{x}) + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}(\mathbf{x}) \\ &= \Phi(\mathbf{x}') - \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \partial_\mu \Phi(\mathbf{x}') + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (2.3)$$

e com isso obtemos a forma explícita do gerador \mathcal{G}_a

$$i\mathcal{G}_a \Phi = \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \partial_\mu \Phi - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}. \quad (2.4)$$

Vamos considerar alguns exemplos. Primeiro, uma translação infinitesimal por um vetor ω^μ , de tal sorte que $\delta x^\mu / \delta \omega^\nu = \delta^\mu_\nu$ e $\delta \mathcal{F} / \delta \omega^\nu = 0$, que significa que os campos também só são transladados. O gerador das translações, a partir de (2.4), é simplesmente $P_\nu =$

$-i\partial_\nu$ que é exatamente o operador momento linear da mecânica quântica. Já para uma transformação de Lorentz infinitesimal (rotação mais translação infinitesimais), que possui a forma $x'^\mu = x^\mu + \omega_{\rho\nu}\eta^{\rho\mu}x^\nu$, o gerador é $L^{\rho\nu} = i(x^\rho\partial^\nu - x^\nu\partial^\rho) + S^{\rho\nu}$. Existem ainda mais duas transformações de grande importância que são: transformações de escala e conforme. Iremos apresentá-las posteriormente em momentos mais adequados. Após essa breve introdução sobre simetrias, podemos enunciar o teorema (Teorema de Noether) que desse ponto de vista, tem um papel fundamental. O Teorema de Noether diz que se uma ação possui uma simetria contínua, esta está associada a uma corrente conservada, ou seja, se uma ação é invariante sob uma determinada transformação então existe uma corrente conservada. No caso de uma transformação infinitesimal geral nas coordenadas e nos campos, como em (2.2), a variação da ação é

$$\delta S = \int d^d x \partial_\mu j_a^\mu \omega_a \quad (2.5)$$

onde

$$j_a^\mu = \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right\} \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}. \quad (2.6)$$

Para que a ação seja invariante, isto é, $\delta S = 0$, como discutimos anteriormente, é necessário que a corrente seja conservada, ou seja

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0. \quad (2.7)$$

Uma aplicação muito interessante do teorema de Noether é às translações, porque a sua corrente associada é o tensor energia momento. Uma translação infinitesimal local $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ com ϵ^μ dependendo também da posição, induz às relações

$$\frac{\delta x^\mu}{\delta \epsilon^\nu} = \delta_\nu^\mu \quad \frac{\delta \Phi}{\delta \epsilon^\nu} = 0$$

que levam à seguinte corrente conservada

$$T^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial^\nu \Phi \quad (2.8)$$

e portanto $\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Outra característica importante desse tensor quando consideramos uma teoria com invariância de escala global ($x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$) a corrente conservada é $j_\mu = x^\nu T_{\nu\mu}$, implicando na condição $T^\mu{}_\mu = 0$, ou seja, que o traço do tensor energia momento é zero.

No caso quântico, interessam-nos as funções de correlação que são um modo de relacionar campos em diferentes pontos. Neste caso, o teorema de Noether permite encontrar relações entre as funções de correlação, conhecidas como identidades de Ward. Para determinar a expressão geral dessa identidade, precisamos, antes de tudo, saber como é o valor esperado no vácuo do produto de n campos em diferentes pontos. Usando o formalismo das integrais funcionais, o produto esperado no vácuo desses campos é

$$\langle \phi(\mathbf{x}_1) \cdots \phi(\mathbf{x}_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\phi] \phi(\mathbf{x}_1) \cdots \phi(\mathbf{x}_n) \exp -S[\phi] \quad (2.9)$$

onde chamaremos de X o produto dos campos $\phi(\mathbf{x}_1) \cdots \phi(\mathbf{x}_n)$ e Z é um fator de normalização. A maneira deste valor esperado transformar-se sob uma determinada transformação das coordenadas é, pela fórmula (2.9), $\langle \phi(\mathbf{x}'_1) \cdots \phi(\mathbf{x}'_n) \rangle = \langle \mathcal{F}(\phi(\mathbf{x}_1)) \cdots \mathcal{F}(\phi(\mathbf{x}_n)) \rangle$. A partir das equações (2.2) e (2.4) para variações num mesmo ponto, a transformação infinitesimal em função dos geradores para os campos, é dada pela fórmula

$$\phi'(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) - i\omega_a \mathcal{G}_a \phi(\mathbf{x}) \quad (2.10)$$

e portanto a variação $\langle \delta X \rangle$ é dada explicitamente por

$$\begin{aligned} \langle \delta X \rangle &= -i \sum_{i=1}^n (\phi(\mathbf{x}_1) \cdots \mathcal{G}_a \phi(\mathbf{x}_i) \cdots \phi(\mathbf{x}_n)) \omega_a(\mathbf{x}_i) \\ &= -i \int d\mathbf{x} \omega_a(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^n \{(\phi(\mathbf{x}_1) \cdots \mathcal{G}_a \phi(\mathbf{x}_i) \cdots \phi(\mathbf{x}_n))\} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por outro lado, com a equação (2.5), obtemos o diferencial $\langle \delta X \rangle$ fazendo uma expansão até primeira ordem em $\omega_a(\mathbf{x})$ de (2.9) que é

$$\langle \delta X \rangle = \int dx \partial_\mu \langle j_a^\mu(\mathbf{x}) X \rangle \omega_a(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

e combinando estas duas últimas equações, encontramos a fórmula genérica

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle j_a^\mu(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}_1) \cdots \phi(\mathbf{x}_n) \rangle = -i \sum_{i=1}^n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \langle \phi(\mathbf{x}_1) \cdots \mathcal{G}_a \phi(\mathbf{x}_i) \cdots \phi(\mathbf{x}_n) \rangle \quad (2.13)$$

sendo que para cada gerador \mathcal{G}_a temos uma identidade de Ward. Usando esta expressão geral nos casos das transformações que citamos anteriormente, encontramos a expressão da identidade associada. Primeiro, a identidade associada com a invariância por translações é

$$\partial_\mu \langle T^\mu{}_\nu X \rangle = - \sum_i \delta(x - x_i) \frac{\partial}{\partial x_i^\nu} \langle X \rangle. \quad (2.14)$$

Já a identidade relacionada à invariância por transformações de Lorentz é dada por

$$\langle (T^{\rho\nu} - T^{\nu\rho}) X \rangle = -i \sum_i \delta(x - x_i) S_i^{\nu\rho} \langle X \rangle. \quad (2.15)$$

E finalmente, no caso das dilatações ou transformações de escala, o gerador é $D = -ix^\nu \partial_\nu - i\Delta$ para um campo de dimensão escalar Δ . E com isso, a identidade de Ward fica sendo

$$\langle T^\mu{}_\mu X \rangle = - \sum_i \delta(x - x_i) \Delta_i \langle X \rangle \quad (2.16)$$

Como vimos, o tensor energia momento num modelo com simetria por escala tem traço zero, e em duas dimensões, isso faz com que essas três expressões das identidades de Ward reduzam-se a uma única descrita em coordenadas complexas, como veremos a seguir.

2.2 O Grupo Conforme

Outra simetria muito importante na teoria quântica de campos é a simetria conforme. Ela tem tão grande relevância que existe um estudo separado e especial para os modelos em teoria quântica de campos que apresentam essa simetria, chamados CFT (conformal field theory). Por definição, uma transformação conforme é uma transformação inversível de $x \rightarrow x'$ e que mantém o tensor métrico invariante a não ser por um fator de escala.

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) \quad (2.17)$$

Quando consideramos uma transformação infinitesimal $x'^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \epsilon^{\mu}$, então

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - (\partial_{\mu}\epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\epsilon_{\mu})$$

e por ser conforme, $\partial_{\mu}\epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\epsilon_{\mu}$ é proporcional ao próprio tensor métrico, e de maneira geral, o fator de proporcionalidade é uma função da posição, ou seja

$$\partial_{\mu}\epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\epsilon_{\mu} = f(x)g_{\mu\nu}$$

Multiplicando esta última equação por $g_{\mu\nu}$ e lembrando que ϵ^{ρ} também é função da posição, conseguimos explicitar $f(x)$

$$f(x) = \frac{2}{d}\partial_{\rho}\epsilon^{\rho} \quad (2.18)$$

com isso, por simples operações algébricas, encontramos as equações

$$\begin{aligned} 2\partial^2\epsilon_{\mu} &= (2-d)\partial_{\mu}f \\ (2-d)\partial_{\mu}\partial_{\nu}f &= \eta_{\mu\nu}\partial^2f \\ (d-1)\partial^2f &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

que determinam a forma de $f(x)$ e $\epsilon_{\mu}(x)$ em função do número de dimensões d do espaço. Para $d > 2$, $\epsilon(\mathbf{x})$ tem a forma geral de um polinômio de segunda ordem e substituindo esse polinômio em (2.19), observamos explicitamente que as transformações conformes englobam as translações ($\epsilon^{\mu} = a^{\mu}$), rotações ($\epsilon^{\mu} = w^{\mu}_{\nu}x^{\nu}$, com $w_{\mu\nu}$ anti-simétrico), transformações de escala ($\epsilon^{\mu} = \lambda x^{\mu}$) e transformações conformes especiais ($\epsilon^{\mu} = b^{\mu}\mathbf{x}^2 - 2x^{\mu}\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}$) como casos especiais. Antes de estudarmos as consequências destas equações quando $d = 2$, que será feito no próximo capítulo, vamos ver como um campo em duas dimensões é afetado por uma transformação conforme. Dado um campo $\phi(\mathbf{x})$ ou $\phi(z, \bar{z})$ ¹ com dimensão de escala Δ e spin planar s , definimos a sua dimensão conforme holomórfica h e antiholomórfica \bar{h} por

$$h = \frac{1}{2}(\Delta + s) \quad e \quad \bar{h} = \frac{1}{2}(\Delta - s)$$

¹As relações entre as coordenadas de \mathbf{x} e as coordenadas complexas z e \bar{z} são mostradas no início da próxima seção.

e esse campo, sujeito a uma transformação conforme $z \rightarrow w(z)$ e $\bar{z} \rightarrow \bar{w}(\bar{z})$ nas proximidades da identidade, ou seja, $w = z + \epsilon(z)$ com $\epsilon(z)$ pequeno, e o mesmo para a parte antiholomórfica, torna-se

$$\phi'(w, \bar{w}) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-h} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{-\bar{h}} \phi(z, \bar{z}) \quad (2.20)$$

onde (dw/dz) é o Jacobiano da transformação das coordenadas que aqui, já são complexas. Um campo que se transforma desta forma é chamada de primário. Os campos obtidos a partir do primário através de derivadas são denominados campos secundários e são de grande importância no estudo das representações das álgebras que surgem como decorrência da simetria conforme. Além disso, esses campos com lei de transformação (2.20), por causa da simetria por rotação, por translação e por uma transformação conforme especial, possuem uma fórmula muito simples para a função de dois pontos [9], que é

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \begin{cases} \frac{C_{12}}{(z_1 - z_2)^{2h} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\bar{h}}} & \text{se } h_1 = h_2 = h \text{ e } \bar{h}_1 = \bar{h}_2 = \bar{h} \\ 0 & \text{se } h_1 \neq h_2 \text{ ou } \bar{h}_1 \neq \bar{h}_2 \end{cases}$$

onde C_{12} é uma constante de normalização. Este resultado torna muito fácil determinar o propagador de um modelo com simetria conforme, conhecendo apenas as dimensões dos seus campos e estas retiramos por simples análise dimensional da ação do modelo em voga.

2.3 Invariância Conforme em Duas Dimensões

Em duas dimensões, como dissemos na apresentação desse trabalho, a simetria conforme é realizada por um número infinito de transformações $z \rightarrow w(z)$ e $\bar{z} \rightarrow \bar{w}(\bar{z})$ e o grupo formado por essas transformações possui infinitos geradores que analisaremos com mais detalhes no próximo capítulo. Agora, especificaremos os resultados anteriores para duas dimensões, começando por fazer uma mudança das coordenadas reais para complexas, z e \bar{z} , do seguinte modo $z = x^1 + ix^2$, $\bar{z} = x^1 - ix^2$, $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2)$ e

$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$ e mais as suas inversas. Essas mudanças levam as componentes do tensor métrico para $g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = 1/2$ e $g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ e as do tensor energia momento para $T_{zz} = (T_{11} + 2iT_{12} - T_{22})/4$, $T_{\bar{z}\bar{z}} = (T_{11} - 2iT_{12} - T_{22})/4$ e $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = (T_{11} + T_{22})/4 = T_{\mu}^{\mu}/4$ e como vimos anteriormente, por causa da invariância por escala, $T_{\mu}^{\mu} = 0$. Assim, o tensor energia momento pode ser escrito em uma parte holomórfica e outra antiholomórfica, $T_{zz} = T(z)$ e $T_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{T}(\bar{z})$ [1], e com isso, podemos reduzir as identidades de Ward (2.14) a (2.16) relacionadas com as suas respectivas invariâncias a uma única identidade

$$\langle T(z)X \rangle = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{z - \omega_i} \partial_{\omega_i} \langle X \rangle + \frac{h_i}{(z - \omega_i)^2} \langle X \rangle \right\} + reg \quad (2.21)$$

onde 'reg' representam os termos regulares desse produto. Quando, na equação anterior, o ponto z está muito próximo de um determinado ponto w e distante dos demais, os termos singulares das outras contribuições são desprezíveis diante deste, e assim, podemos inferir uma expansão para o produto dos operadores do tensor energia momento com o campo primário

$$\begin{aligned} T(z)\phi(\omega, \bar{\omega}) &\sim \frac{h}{(z - \omega)^2} \phi(\omega, \bar{\omega}) + \frac{1}{z - \omega} \partial_{\omega} \phi(\omega, \bar{\omega}) \\ \bar{T}(\bar{z})\phi(\omega, \bar{\omega}) &\sim \frac{\bar{h}}{(\bar{z} - \bar{\omega})^2} \phi(\omega, \bar{\omega}) + \frac{1}{\bar{z} - \bar{\omega}} \partial_{\bar{\omega}} \phi(\omega, \bar{\omega}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

O símbolo \sim quer dizer que não estão incluídos os termos regulares dessa expansão. A expansão do produto de operadores (operator product expansion - OPE) não é demonstrada, mas como dissemos acima, inferida, e para alguns casos livres, como por exemplo, o bóson livre sem massa, é possível obtê-la algebricamente. Antes de verificarmos este fato para bósons e férmions livres, usaremos as equações (2.21) e (2.22) para justificar uma maneira de comutar os modos normais de $T(z)$ com os campos $\phi(z)$. Iniciamos, decompondo o tensor energia momento como

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}} \quad (2.23)$$

e o análogo para a parte antiholomórfica. Este tensor, sobretudo para efeitos do ordenamento de Wick, pode ser dividido em uma parte de frequência positiva e outra de

frequência negativa, assim, $T(z) = T_{in}(z) + T_{out}(z)$. Escrevendo as partes 'in' e 'out' do tensor energia momento também em termos dos operadores L_n , temos

$$T_{in}(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}} \quad e \quad T_{out}(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{L_n}{z^{n+2}}. \quad (2.24)$$

Como no formalismo da segunda quantização em que o operador da parte de frequência positiva aniquila o vácuo $|0\rangle$, enquanto $\langle 0|$ é aniquilado pelo operador de frequência negativa [9], aqui também acontece algo semelhante: $T_{in}(z)|0\rangle = 0$ e $\langle 0|T_{out}(z) = 0$. E com isso é possível mostrar que $\langle T(z)\phi(\omega) \rangle = \langle T_{in}(z)\phi(\omega) \rangle = \langle [T_{in}(z), \phi(\omega)] \rangle$.

Apesar de apenas no próximo capítulo definirmos o que é um campo primário, aqui, para seguir no nosso intuito, precisamos introduzi-lo através da regra de comutação entre os operadores L_n e o próprio campo primário $\phi(z)$

$$[L_n, \phi(\omega)] = h(n+1)\omega^n\phi(\omega) + \omega^{n+1}\partial\phi(\omega) \quad (2.25)$$

Por meio de identidades que são demonstradas a partir da expressão em série de Laurent da função $1/(1-x)$ para $|x| < 1$:

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+1) \frac{\omega^n}{z^{n+2}} = \frac{1}{(z-\omega)^2} \quad e \quad \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{\omega^{n+1}}{z^{n+2}} = \frac{1}{(z-\omega)} \quad (2.26)$$

chegamos à regra de comutação

$$[T_{in}(z), \phi(\omega)] = h \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1) \frac{\omega^n}{z^{n+2}} \phi(\omega) + \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{\omega^{n+1}}{z^{n+2}} \partial\phi(\omega)$$

de onde concluímos imediatamente que

$$[T_{in}(z), \phi(\omega)] = \frac{h}{(z-\omega)^2} \phi(\omega) + \frac{1}{(z-\omega)} \partial\phi(\omega) \quad (2.27)$$

O produto esperado no vácuo do tensor energia momento com dois campos primários $\langle T(z)\phi(\omega_1)\phi(\omega_2) \rangle$, usando a regra de comutação (2.27) para fazer chegar $T_{in}(z)$ até $|0\rangle$, é

$$\begin{aligned} \langle T(z)\phi(\omega_1)\phi(\omega_2) \rangle &= \langle T_{in}(z)\phi(\omega_1)\phi(\omega_2) \rangle \\ &= \langle \phi(\omega_1)T_{in}(z)\phi(\omega_2) \rangle + \langle [T_{in}(z), \phi(\omega_1)]\phi(\omega_2) \rangle \\ &= \langle \phi(\omega_1)\phi(\omega_2)T_{in}(z) \rangle + \langle [T_{in}(z), \phi(\omega_1)]\phi(\omega_2) \rangle \\ &\quad + \langle \phi(\omega_1)[T_{in}(z), \phi(\omega_2)] \rangle. \end{aligned}$$

Substituindo os valores dos comutadores $[T_{in}(z), \phi(w)]$, encontramos

$$\langle T(z)\phi(\omega_1)\phi(\omega_2) \rangle = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{h_i}{(z-\omega_i)^2} + \frac{1}{z-\omega_i} \partial_{\omega_i} \right\} \langle \phi(\omega_1)\phi(\omega_2) \rangle$$

Este resultado pode ser generalizado para n campos, dando origem a identidade de Ward

$$\langle T(z)X \rangle = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{z-\omega_i} \partial_{\omega_i} \langle X \rangle + \frac{h_i}{(z-\omega_i)^2} \langle X \rangle \right\} \quad (2.28)$$

onde $X = \phi(\omega_1)\dots\phi(\omega_n)$. O próprio produto de operadores apresentado em (2.22) pode ser visto de outro modo através da mesma regra de comutação (2.25)

$$\begin{aligned} T(z)\phi(w) &= \{T_{in}(z) + T_{out}(z)\}\phi(w) \\ &= T_{in}(z)\phi(w) - \phi(w)T_{in}(z) + T_{out}(z)\phi(w) + \phi(w)T_{in}(z) \\ &= [T_{in}(z), \phi(w)]_+ : T(z)\phi(w) : \end{aligned}$$

substituindo o comutador da equação acima por (2.27), vemos que

$$T(z)\phi(w) = \frac{h}{(z-w)^2} \phi(w) + \frac{1}{z-w} \partial \phi(w) + : T(z)\phi(w) : \quad (2.29)$$

Dessa forma, justificamos a relação de comutação (2.25). É obvio que, se partindo dessa equação chegamos à identidade de Ward, poderíamos fazer exatamente o contrário, mas preferimos fazer os cálculos nesse sentido porque este será o usado posteriormente. Existe outro modo de se justificar a equação (2.25) que, na verdade, é uma demonstração dessa relação de comutação [1][9], mas pelo seu formalismo, foge um pouco daquele que usaremos neste trabalho e por isso preferimos não apresentá-lo aqui. Esta identidade diz-nos ainda que o campo primário $\phi(w)$ tem dimensão conforme h e vice-versa, ou seja, dizer que o campo $\phi(w)$ tem dimensão conforme h é dizer que ele satisfaz à identidade acima.

2.4 Bósons e Férmions Livres

Em duas dimensões, o bóson livre tem a seguinte ação

$$S = \frac{1}{2}g \int d^2x \left\{ \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi^2 \right\}$$

onde g é um parâmetro de normalização que posteriormente, no capítulo cinco, escolheremos. Iniciamos o cálculo do propagador $K(x, y) = \langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle$ (função de dois pontos) escrevendo esta mesma ação em coordenadas cartesianas

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x d^2y \varphi(x) A(x, y) \varphi(y)$$

de onde retiramos a equação diferencial para $K(x, y)$, $g(-\partial_x^2 + m^2)K(x, y) = \delta(x - y)$. Em consequência da invariância por rotação e por translação, o propagador tem que ser uma função de dependa somente da separação $r = |x - y|$ das coordenadas. Integrando a equação diferencial acima sobre x em torno de um disco de raio r centrado em y , nós encontramos

$$\begin{aligned} 1 &= 2\pi g \int_0^r d\rho \rho \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho K'(\rho)) + m^2 K(\rho) \right) \\ &= 2\pi g \left\{ -r K'(r) + m^2 \int_0^r d\rho \rho K(\rho) \right\}. \end{aligned}$$

Quando o bóson não tem massa, que é o caso que nos interessa aqui, a solução é simplesmente dada por $K(r) = -\frac{1}{2\pi g} \ln r$ que é o mesmo que $\langle (\varphi(x)\varphi(y)) \rangle = -\frac{1}{4\pi g} \ln(x - y)^2$. Em coordenadas complexas, o propagador toma a seguinte fórmula

$$\langle (\varphi(z, \bar{z})\varphi(w, \bar{w})) \rangle = -\frac{1}{4\pi g} \{ \ln(z - w) + \ln(\bar{z} - \bar{w}) \}. \quad (2.30)$$

Usando a notação $\partial\varphi \equiv \partial_z\varphi$, escrevemos o tensor energia momento para o bóson livre sem massa na versão quântica, já em coordenadas complexas, como $T(z) = -2\pi g : \partial\varphi\partial\varphi :$. A OPE de $T(z)$ com $\partial\varphi$ com o auxílio do produto de Wick é

$$\begin{aligned} T(z)\partial\varphi(w) &= -2\pi g : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z) : \partial\varphi(w) \\ &\sim \frac{\partial\varphi(z)}{(z - w)^2} \end{aligned}$$

Expandindo $\partial\varphi(z)$ em torno de w , chegamos a seguinte OPE

$$T(z)\partial\varphi(w) \sim \frac{\partial\varphi(w)}{(z - w)^2} + \frac{\partial_w^2\varphi(w)}{(z - w)}. \quad (2.31)$$

Este resultado mostra que $\partial\varphi$ é um campo primário com dimensão conforme $h = 1$, conferindo com (2.29). Além disso, através do Teorema de Wick, podemos encontrar a OPE do tensor energia momento com ele mesmo com a ajuda de (2.31)

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= 4\pi^2 g^2 : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z) :: \partial\varphi(w)\partial\varphi(w) : \\ &\sim \frac{1/2}{(z-w)^4} - \frac{4\pi g : \partial\varphi(z)\partial\varphi(w) :}{(z-w)^2} \\ &\sim \frac{1/2}{(z-w)^4} - \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)}. \end{aligned}$$

Isto significa, por sua vez, que o tensor energia momento é quase um campo primário com dimensão conforme dois, o que já podia ser visto através de uma simples análise dimensional da expressão $T(z) = -2\pi g : \partial\varphi\partial\varphi :$. Este fato é violado pela presença do termo anômalo proporcional a $(z-w)^{-4}$ e que tem o coeficiente $1/2$. Este coeficiente está relacionado à carga central que especifica a teoria física em estudo ou, como veremos no próximo capítulo, a álgebra de Virasoro na qual os campos primários estão associados aos pesos mais altos (highest weights) das representações.

Também em duas dimensões, a ação para férmions livres de Majorana é

$$S = \frac{1}{2}g \int d^2x \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi \quad (2.32)$$

onde γ^μ são as matrizes de Dirac que satisfazem sua própria álgebra, $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$. Para $\eta^{\mu\nu}$ diagonal, uma possível representação para as matrizes de Dirac em duas dimensões é

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto, o produto matricial que aparece na ação dos férmions livres (2.32), explicitamente é

$$\gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 (\gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1) = 2 \begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}} & 0 \\ 0 & \partial_z \end{pmatrix}$$

escrevendo o spinor Ψ como $(\psi, \bar{\psi})$, a ação torna-se $S = g \int d^2x (\bar{\psi} \partial \bar{\psi} + \psi \bar{\partial} \psi)$. Para calcular o propagador, primeiro reescrevemos a ação em coordenadas cartesianas $S = \frac{1}{2} \int d^2x d^2y \Psi_i(x) A_{ij}(x, y) \Psi_j(y)$, sendo $A_{ij}(x, y)$ o inverso do propagador, como no exemplo dos bósons livres, e sua expressão é $A_{ij}(x, y) = g \delta(x - y) (\gamma^0 \gamma^\mu)_{ij} \partial_\mu$, de onde retiramos a equação diferencial para o propagador dos férmions

$$g \delta(x - y) (\gamma^0 \gamma^\mu)_{ik} \frac{\partial}{\partial x^\mu} K_{kj}(x, y) = \delta(x - y) \delta_{ij}$$

que pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$2g \begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}} & 0 \\ 0 & \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \psi(z, \bar{z}) \psi(w, \bar{w}) \rangle & \langle \psi(z, \bar{z}) \bar{\psi}(w, \bar{w}) \rangle \\ \langle \bar{\psi}(z, \bar{z}) \psi(w, \bar{w}) \rangle & \langle \bar{\psi}(z, \bar{z}) \bar{\psi}(w, \bar{w}) \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}} \frac{1}{z-w} & 0 \\ 0 & \partial_z \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}} \end{pmatrix}$$

e finalmente, por comparação, retiramos daí as funções de dois pontos

$$\begin{aligned} \langle \psi(z, \bar{z}) \psi(w, \bar{w}) \rangle &= \frac{1}{2\pi g} \frac{1}{z-w} \\ \langle \bar{\psi}(z, \bar{z}) \bar{\psi}(w, \bar{w}) \rangle &= \frac{1}{2\pi g} \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}} \\ \langle \psi(z, \bar{z}) \bar{\psi}(w, \bar{w}) \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Para férmions livres e para ghosts podemos também obter a OPE do tensor energia momento com o campo primário e do tensor energia momento com ele mesmo. E com estes casos, podemos generalizar uma expressão para a OPE do tensor energia momento com ele mesmo, que vai depender da carga central c .

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} - \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)} \tag{2.34}$$

O valor de c determina, como dissemos a pouco, o sistema físico em estudo e para cada valor de c podem existir vários campos com dimensões conformes h diferentes, em outras palavras, podem existir campos com diferentes valores de dimensões conformes que pertencem ao mesmo sistema físico e que portanto descrevem grandezas físicas diferentes desse modelo.

Capítulo 3

Álgebra de Virasoro

Vimos no capítulo anterior a decomposição do tensor energia momento em seus modos normais L_n e a expansão do produto de operadores de $T(z)$ com ele mesmo. Partindo desses dados, podemos encontrar uma relação de comutação dos L_n , chamada álgebra de Virasoro que é o assunto da secção (3.1). Fisicamente, interessam-nos as representações dessa álgebra que são irredutíveis e unitárias e isso é feito através do estudo dos estados nulos que apresentaremos na secção (3.2). Ainda nesta secção, depois de vermos os estados secundários do estado primário $|h\rangle$ e a matriz $K_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(l)}$, que é o produto de dois desses estados secundários, veremos que as representações irredutíveis são aquelas em que o $\det K_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(l)}$ ou determinante de Kac anula-se, o que equivale a retirar do espectro dos estados da teoria aqueles que possuem norma zero e tornar, assim, a representação da álgebra irredutível. Analisando, por outro lado, a unitariedade dessas representações, vemo-nos obrigados a impor algumas condições sobre os parâmetros da carga central e das dimensões conformes dos campos. Os modelos que surgem daí são os modelos minimais que servem para descrever modelos estatísticos com pontos críticos. Por último, na secção (3.3), determinaremos as funções de quatro pontos para os campos primários de modelo de Ising, que é um exemplo de modelo minimal.

3.1 Álgebra de Virasoro

Como acabamos de ver, o tensor energia momento desempenha um papel central na teoria quântica de campos com simetria conforme. Podemos retirar dele mais informações se, expandindo-o em série de Laurent como em (2.23), observarmos que os modos normais, L_n , satisfazem as regras de comutação que dão origem à chamada álgebra de Virasoro

$$\begin{aligned}
 [L_n, L_m] &= (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0} \\
 [L_n, \bar{L}_m] &= 0 \\
 [\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= (n - m)\bar{L}_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0}.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Novamente, podemos constatar o desacoplamento entre as partes holomórfica e antiholomórfica da teoria. Esta álgebra é uma extensão central da álgebra dos geradores das transformações conformes em duas dimensões, mais especificamente, o segundo termo do lado direito da primeira e da última equação de (3.1) é chamado de extensão central em relação à álgebra oriunda do grupo conforme [1]. Para termos uma ideia do papel dessa álgebra, ela contém uma sub-álgebra formada pelos operadores L_{-1} , L_0 e L_{+1} (repare que para $n = 0, \pm 1$, o termo da carga central desaparece das relações (3.1)), sendo que L_{-1} e \bar{L}_{-1} são os geradores das translações, enquanto L_0 e \bar{L}_0 geram as dilatações infinitesimais nas coordenadas z e \bar{z} respectivamente. Com uma mudança de sistema de coordenadas do tipo $z = \exp(\tau + i\sigma)$ e $\bar{z} = \exp(\tau - i\sigma)$, a hamiltoniana pode ser escrita como $H = L_0 + \bar{L}_0$. O estado fundamental dessa hamiltoniana é o vácuo $|0\rangle$ e os operadores L_n quando atuam nesse vácuo fornecem $L_n|0\rangle = 0$ para $n \geq -1$ e de modo similar $\langle 0|L_n = 0$ se $n \leq 0$ onde usamos a seguinte definição de conjugado hermitiano $L_m^\dagger = L_{-m}$. O estado de highest weight $|h\rangle$ é criado atuando no vácuo $|0\rangle$ com o campo primário $\phi(z)$, $|h\rangle = \phi(0)|0\rangle$ e de maneira semelhante para a parte antiholomórfica. Este estado de highest weight tem as propriedades

$$L_n|h\rangle = 0 \quad n > 0 \quad e \quad L_0|h\rangle = h|h\rangle \tag{3.2}$$

sendo o autovalor h a dimensão conforme do campo primário $\phi(z)$ que gerou o estado $|h\rangle$ a partir do vácuo. A representação da álgebra de Virasoro com highest weight $|h\rangle$ consiste de todos os vetores do espaço formados por $|h\rangle$ e por seus vetores secundários que são obtidos atuando com L_{-n} ($n > 0$) sobre o highest weight. Este espaço é chamado módulo de Verma $\mathcal{V}(c, h)$. Os estados secundários $L_{-n}|h\rangle$ do highest weight $|h\rangle$ possuem autovalores $L_0 L_{-n}|h\rangle = (h+n)L_{-n}|h\rangle$ para $n > 0$ que são obtidos com a ajuda da relação (3.1). O inteiro n é chamado nível da álgebra e mede a distância do estado secundário ao estado fundamental $|h\rangle$ do módulo de Verma $\mathcal{V}(c, h)$. O número dos distintos e linearmente independentes estados em cada nível n é o número de partições do inteiro n . Nos primeiros níveis do módulo de Verma com highest weight $|h\rangle$, os estados secundários são

Nível	Partições	Estados
0	1	$ h\rangle$
1	1	$L_{-1} h\rangle$
2	2	$L_{-1}^2 h\rangle, L_{-2} h\rangle$
3	3	$L_{-1}^3 h\rangle, L_{-1}L_{-2} h\rangle, L_{-3} h\rangle$
4	5	$L_{-1}^4 h\rangle, L_{-1}^2L_{-2} h\rangle, L_{-1}L_{-3} h\rangle, L_{-2}^2 h\rangle, L_{-4} h\rangle$

Tabela 1

e assim por diante, sendo que o número de estados aumenta, como vemos na tabela acima, com o nível. Uma análise similar pode ser feita usando o módulo de Verma associado com os geradores antiholomórficos.

O campo primário $\Phi_{h,\bar{h}}(z, \bar{z})$ que gera o estado de highest weight $|h, \bar{h}\rangle$ a partir do vácuo ($|h, \bar{h}\rangle = \Phi_{h,\bar{h}}(0, 0)|0, 0\rangle$) tem a mesma propriedade de transformação de (2.20) que aqui, só para ilustrar a composição da parte holomórfica com a antiholomórfica, é

$$\Phi_{h,\bar{h}}(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^h \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}} \Phi_{h,\bar{h}}(w, \bar{w}) \quad (3.3)$$

e daqui segue a identidade de Ward (2.28) e a OPE (2.29). Portanto concluímos que a uma representação irredutível da álgebra de Virasoro está associada a uma teoria quântica

de campos para campos que se transformam como (3.3) sob a ação de transformações conformes. Seguindo esse raciocínio, cada estado secundário está associado a um campo secundário com a mesma relação do estado de highest weight com seu campo primário. Os campos secundários, como ocorre com os estados, são obtidos do campo primário só que aqui por operações de derivadas. Na próxima secção, veremos que por causa disso podemos determinar as funções de correlação através de equações diferenciais.

3.2 Estados Nulos

Partindo do highest weight $|h\rangle$, como adiantamos acima, construímos seu respectivo módulo de Verma, sendo que este não necessariamente possui um produto escalar $\langle h|L_{k_m} \cdots L_{k_1} L_{-l_1} \cdots L_{-l_n}|h\rangle$ positivamente definido, isto é, em geral eles não formam um espaço de Hilbert. A estrutura do módulo de Verma depende dos valores de c e h e são eles que vão determinar se as representações da álgebra de Virasoro são irredutíveis e unitárias. Essas propriedades são investigadas através dos estados secundários do módulo de Verma. Um estado secundário da forma $|\hat{\chi}\rangle = P(L_{-n})|h\rangle$ com $P(L_{-n}) = \prod_{n>0} L_{-n}^{k_n}$ e $(k_n \in \mathbb{N})$ em nível $l = \sum n k_n$ pertencente ao módulo de Verma $\mathcal{V}(c, h)$ não forma, em geral, uma representação irredutível. No entanto, existirá um sub-módulo de $\mathcal{V}(c, h)$ irredutível se encontrarmos entre os estados secundários de $\mathcal{V}(c, h)$ um de highest weight que é ao mesmo tempo um estado secundário $|\chi\rangle$ de $|h\rangle$ que satisfaz $L_n|\chi\rangle = 0$ ($n > 0$), chamado de vetor singular ou estado nulo, porque a sua norma é zero e, portanto, $\langle \psi|\chi\rangle = 0$ para qualquer estado $\langle \psi|$ de $\mathcal{V}(c, h)$. Como os estados secundários de $|\chi\rangle$ também são vetores singulares, a representação irredutível da álgebra de Virasoro será, essencialmente, subtrair do módulo de Verma original este gerado pelos vetores singulares. Para descobirmos se uma determinada representação da álgebra de Virasoro possui vetores singulares, consideramos um estado secundário geral do highest weight h no nível $l = \sum n k_n$ da forma

$$|\hat{\chi}^{(k_1, k_2, \dots)}\rangle = \prod_{n \geq 1} L_{-n}^{k_n} |h\rangle \quad k_n \in \mathbb{N} \quad k_1 \leq k_2 \leq \dots \quad (3.4)$$

Calculamos, então, para o nível l a matriz dos produtos escalares $K_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(l)} = \langle \chi^{\mathbf{k}} | \chi^{\mathbf{k}'} \rangle$. Claramente, temos tantos estados nulos no nível l quantos autovalores nulos da matriz $K^{(l)}$ e com isso, o determinante dessa matriz é quem nos revela a existência desses estados. Este determinante foi estudado por Kac, e ele descobriu que, se as dimensões conformes h dos campos primários são da forma

$$h_{mn} = h_0 + \frac{1}{4}(\alpha_+ m + \alpha_- n)^2 \quad m, n \in \mathbb{N} - \{0\} \quad (3.5)$$

onde

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{24}(c-1) \\ \alpha_{\pm} &= \frac{\sqrt{1-c} \pm \sqrt{25-c}}{\sqrt{24}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

então, existe um vetor singular em $\mathcal{V}(c, h)$ no nível $l = mn$, que depende apenas da carga central c e esta, por sua vez, determina o número de campos primários que satisfazem essas condições. Aqui m e n são números inteiros. Aproveitando a identidade de Ward (2.28) e a relação inversa de (2.23)

$$L_n = \oint_{C_0} \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z)$$

podemos expressar o produto esperado no vácuo dos campos primários com um secundário em função apenas do produto esperado no vácuo dos campos primários. O campo secundário é do tipo $L_{-k}\phi_{h_1}(z)$ e o cálculo da identidade de Ward para $\langle\langle L_{-k}\phi_{h_1}(z_1) \phi_{h_2}(z_2) \cdots \phi_{h_n}(z_n) \rangle\rangle$ é

$$\begin{aligned} &\langle\langle L_{-k}\phi_{h_1}(z_1) \phi_{h_2}(z_2) \cdots \phi_{h_n}(z_n) \rangle\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{z_1} \frac{dz}{(z-z_1)^{k-1}} \langle T(z) \phi_{h_1}(z_1) \phi_{h_2}(z_2) \cdots \phi_{h_n}(z_n) \rangle \\ &= \mathcal{L}_{-k}(z_1) \langle \phi_{h_1}(z_1) \phi_{h_2}(z_2) \cdots \phi_{h_n}(z_n) \rangle \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde

$$\mathcal{L}_{-k}(z_1) = (-1)^k \sum_{j=2}^n \left\{ \frac{(k-1)h_j}{(z_1-z_j)^k} + \frac{1}{(z_1-z_j)^{k-1}} \partial_{z_j} \right\}.$$

Quando o campo secundário é singular, a identidade (3.7) reduz-se a uma equação diferencial parcial cuja ordem depende do nível do módulo de Verma onde encontramos este campo singular. Em nível um, uma vez que identificamos o estado de highest weight ao vácuo, isso leva a uma representação trivial do módulo de Verma. Já em nível dois, montamos o vetor nulo genérico

$$|\chi\rangle = L_{-2}|h\rangle + tL_{-1}^2|h\rangle = 0 \quad (3.8)$$

onde t é um parâmetro e são as condições sobre ele que dirão se $|\chi\rangle$ é ou não um vetor singular. Aplicando L_1 e L_2 a (3.8) e através da expressão da álgebra de Virasoro fazemos esses operadores chegarem ao estado $|h\rangle$, que como vimos, anula-o, ou seja

$$\begin{aligned} L_1|\chi\rangle &= (3 + 2t + 4ht)L_{-1}|h\rangle = 0 \\ L_2|\chi\rangle &= \left(\frac{c}{2} + 4h + 6ht\right)|h\rangle = 0. \end{aligned}$$

Encontramos, com esse procedimento, as condições sobre t e h de um certo valor de c para que $|\chi\rangle$ seja um vetor singular e assim poderemos construir uma representação irredutível da álgebra de Virasoro. Os valores assumidos por t e h são

$$\begin{aligned} t &= -\frac{3}{2(2h+1)} \\ h &= \frac{1}{16}\{5 - c \pm \sqrt{(c-1)(c-25)}\} \end{aligned}$$

e o vetor singular, reescremos da forma

$$|\chi\rangle = \left(L_{-2} - \frac{3}{2(2h+1)}L_{-1}^2\right)|h\rangle$$

do mesmo modo que ao estado $|h\rangle$ está associado o campo primário $\phi(z)$ que o gera a partir do vácuo absoluto, $|h\rangle = \phi(z)|0\rangle$, ao vetor singular $|\chi\rangle$ está relacionado o campo singular $\chi(z)$, que em nível dois, como acabamos de ver, é

$$\chi(z) = L_{-2}\phi(z) - \frac{3}{2(2h+1)}L_{-1}^2\phi(z) = 0. \quad (3.9)$$

Com este campo singular, construímos uma equação diferencial parcial de segunda ordem para as funções de correlação contendo os campos primários $\phi(z)$, utilizando a propriedade $\langle \chi(z_1)\phi_1(z_1)\cdots\phi_n(z_n) \rangle = 0$ que vem do fato de que $\langle \psi|\chi \rangle = 0$. Substituindo (3.9) em $\langle \chi(z_1)\phi_1(z_1)\cdots\phi_n(z_n) \rangle$ e usando o resultado (3.7), chegamos à equação diferencial parcial

$$\langle \chi(z_1)\phi_2(z_2)\cdots\phi_n(z_n) \rangle = \left[\frac{3}{2(2h+1)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \sum_{j=1}^n \frac{h_j}{(z-z_j)^2} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{z-z_j} \frac{\partial}{\partial z_j} \right] \langle \phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\cdots\phi_n(z_n) \rangle = 0 \quad (3.10)$$

O procedimento de seleção dos vetores singulares pode, é claro, ser repetido aos níveis seguintes do módulo de Verma. Para nosso trabalho, basta até nível dois, como acabamos de fazer.

Agora, restringindo nosso estudo a campos que possuem dimensão conforme real, das equações (3.5) e (3.6), vemos que temos que nos limitar aos modelos com carga central $c \geq 25$ ou $c \leq 1$. Fora disso, h é complexo. O intervalo de maior interesse para nós é o de $c \leq 1$. Ainda por motivos da redutibilidade das representações da álgebra [1][10], temos que escolher $\alpha_+/\alpha_- = p/q$ com p e q inteiros positivos mutuamente primos e $p < q$. Essas escolhas simplificam as expressões da carga e da dimensão para

$$\alpha_-/\alpha_+ = -p/q, \quad c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq} \quad (3.11)$$

$$h_{mn} = \frac{1}{4pq} [(mq - np)^2 - (p - q)^2]$$

onde p e q são os mesmos que introduzimos acima e m e n são limitados por $0 < m < p$ e $0 < n < q$. Essas teorias são chamadas modelos minimais que representaremos por $vir(q, p)$. Eles são denominados minimais porque estão baseados sobre um número finito de campos primários, os campos não possuem multiplicidade no espectro da dimensão conforme já que as suas propriedades físicas dependem exclusivamente desta (não existem outros números quânticos para distinguir os campos a não ser a dimensão conforme), e por último, não contêm outras simetrias a não ser a de Virasoro. O número dos distintos campos da teoria é $(p-1)(q-1)/2$ contando a identidade que é um campo com dimensão conforme zero.

Quando $q = p + 1$, o modelo minimal é unitário: a carga central e a dimensão conforme são reais e positivas e são expressas por

$$c = 1 - \frac{6}{p(p+1)} \quad h_{mn} = \frac{1}{4p(p+1)} [(m(p+1) - np)^2 - 1] \quad (3.12)$$

Veremos posteriormente, no capítulo sobre álgebra de Kac-Moody, que os resultados apresentados acima, modelos minimais unitários, podem ser obtidos a partir de cosets das álgebras $\widehat{su}(2)_k$, o que é uma ferramenta poderosíssima pois a partir de alguns valores de p e q os modelos minimais tornam-se extremamente complicados, e por este outro caminho, temos um modo sistemático de tratar esses problemas.

3.3 Equações Diferenciais para Modelos Minimais

O elemento básico para os cálculos das funções de correlação em teoria de campos são as identidades de Ward. Como vimos na secção sobre estados nulos da álgebra de Virasoro, a partir delas podemos construir equações diferenciais para as funções de correlação. Concretamente, agora calcularemos a função de quatro pontos e para isso usamos os mesmos raciocínios que fizemos para as funções de dois pontos

$$\langle \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \phi_3(z_3) \phi_4(z_4) \rangle = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (z_i - z_j)^{\mu_{ij}} G(z) \quad (3.13)$$

sendo que a definição de z é

$$z = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)} \quad (3.14)$$

e o expoente $\mu_{ij} = \sum_i h_i/3 - h_i - h_j$. Calculando separadamente as derivadas da função de quatro pontos e de z em relação a cada uma das coordenadas z_1, z_2, z_3 e z_4 , a segunda derivada da função de quatro pontos em relação a z_1 e adotando os seguintes limites para as coordenadas complexas

$$z_1 \rightarrow z, z_2 \rightarrow 0, z_3 \rightarrow 1, z_4 \rightarrow \infty \quad (3.15)$$

obtemos da equação diferencial para os modelos minimais de nível dois, reescrita de maneira a depender do parâmetro t (ver equação (3.10))

$$\left\{ \partial_z^2 - t \sum_{l=2,3,4} \left[\frac{h_l}{(z_l - z)^2} - \frac{1}{(z_l - z)} \partial_{z_l} \right] \right\} \prod_{1 \leq i, j \leq 4} (z_i - z_j)^{\mu_{ij}} G(z) = 0. \quad (3.16)$$

Simplificando, obtemos a equação diferencial na variável z

$$\left\{ \frac{1}{t} \partial_z^2 + \left[\frac{2\mu_{12}}{tz} + \frac{2\mu_{13}}{t(z-1)} + \frac{2z-1}{z(z-1)} \right] \partial_z + \frac{\mu_{12}(\mu_{12}-1)}{tz^2} + \frac{\mu_{13}(\mu_{13}-1)}{t(z-1)^2} + \frac{\mu_{12}-h_2}{z^2} + \frac{\mu_{13}-h_3}{(z-1)^2} - \frac{\mu_{23}}{z(z-1)} + \frac{2\mu_{12}\mu_{13}}{tz(z-1)} \right\} \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (z_i - z_j)^{\mu_{ij}} G(z). \quad (3.17)$$

Fazendo uma transformação do tipo $H(z) = z^{\mu_{12}}(1-z)^{\mu_{13}}G(z)$, chegamos à equação diferencial parcial de $H(z)$

$$\left\{ \frac{1}{t} \partial_z^2 + \frac{2z-1}{z(z-1)} \partial_z - \frac{h_2}{z^2} - \frac{h_3}{(z-1)^2} + \frac{h_1+h_2+h_3-h_4}{z(z-1)} \right\} H(z) = 0 \quad (3.18)$$

Esta última equação diferencial pode ser transformada em uma equação hipergeométrica. Para isso, escrevemos $H(z)$ como $H(z) = z^{2\beta_1}(1-z)^{2\beta_2}K(z)$. Dessa transformação, obtemos condições sobre β_1 e β_2 para reduzir a equação diferencial sobre $H(z)$ a uma equação hipergeométrica, sendo esta da seguinte forma

$$z(1-z)\partial_z^2 K(z) + (c - (a+b+1)z)\partial_z K(z) - abK(z) = 0 \quad (3.19)$$

cuja solução é uma função hipergeométrica $K(z) = F(a, b; c; z)$. A função hipergeométrica é uma série cujos coeficientes são obtidos a partir dos parâmetros a , b e c

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n \quad (3.20)$$

onde $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(n)$ e o mesmo para os outros parâmetros. Para certos valores desses parâmetros, ela reduz-se a um polinômio finito expresso em termos de z e $(1-z)$.

Procedendo à substituição indicada de $H(z)$ para $K(z)$, encontramos a equação para $K(z)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \partial_z^2 K(z) + \left\{ \frac{1}{t} \left(\frac{4\beta_1}{z} - \frac{4\beta_2}{(1-z)} \right) + \frac{2z-1}{z(1-z)} \right\} \partial_z K(z) \\ + \left\{ \frac{1}{z^2} \left[\frac{2\beta_1(2\beta_1-1)}{t} + 2\beta_1 - h_1 \right] \right. \\ + \frac{1}{z(1-z)} \left[-\frac{8\beta_1\beta_2}{t} - 2\beta_1 - 2\beta_2 + h_1 + h_2 + h_3 - h_4 \right] \\ \left. + \frac{1}{(1-z)^2} \left[\frac{2\beta_2(2\beta_2-1)}{t} + 2\beta_2 - h_2 \right] \right\} K(z) = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Impondo as condições sobre β_1 e β_2

$$\begin{aligned} \frac{2\beta_1(2\beta_1-1)}{t} + 2\beta_1 - h_1 &= 0 \\ \frac{2\beta_2(2\beta_2-1)}{t} + 2\beta_2 - h_2 &= 0 \end{aligned}$$

a equação (3.21) é simplificada para

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \partial_z^2 K(z) + \left\{ \frac{1}{t} \left(\frac{4\beta_1}{z} - \frac{4\beta_2}{(1-z)} \right) - \frac{2z-1}{z(1-z)} \right\} \partial_z K(z) \\ + \left\{ -\frac{8\beta_1\beta_2}{tz(1-z)} - \frac{2\beta_1}{z(1-z)} - \frac{2\beta_2}{z(1-z)} - \frac{h_0 + h_1 + h_2 - h_3}{z(1-z)} \right\} K(z) = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, colocamos esta última equação na forma de uma equação hipergeométrica

$$\begin{aligned} z(1-z) \partial_z^2 + (4\beta_1 + t - (4\beta_1 + 4\beta_2 + 2t)z) \partial_z K(z) \\ - [8\beta_1\beta_2 + 2t\beta_1 + 2t\beta_2 + t(h_0 + h_1 + h_2 - h_3)] K(z) = 0. \end{aligned}$$

No caso do modelo de Ising ($vir(4, 3)$) que significa também que o parâmetro t é $\frac{p'}{p} = \frac{3}{4}$, existem dois campos primários $\phi_{(1,2)}$ e $\phi_{(2,1)}$. A dimensão conforme do campo $\phi_{(1,2)}$ é $h(\phi_{(1,2)}) = 1/16$ que leva ao fato de que $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ e que este pode, por sua vez, assumir dois valores: $3/16$ e $-1/16$. Todas as dimensões h_1, h_2, h_3 e h_4 possuem o mesmo valor, $h(\phi_{(1,2)})$. Para $\beta = -1/16$, a equação hipergeométrica tem a fórmula

$$z(1-z) \partial_z^2 K(z) + \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 \right) z \right) \partial_z K(z) + \frac{1}{16} K(z) = 0 \quad (3.22)$$

Vamos chamar a hipergeométrica, solução desta equação, de $K_1^{(1)}(z)$. Como todos os h_i são iguais, chamaremos os μ_{ij} apenas de μ . Portanto a função de quatro pontos de $\phi_{(1,2)}$

tem a expressão

$$\begin{aligned}
\langle \phi_{(1,2)}(z_1)\phi_{(1,2)}(z_2)\phi_{(1,2)}(z_3)\phi_{(1,2)}(z_4) \rangle &= \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (z_i - z_j)^\mu G(z) \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (z_i - z_j)^\mu z^{-\mu} (1-z)^{-\mu} H(z) \\
&= (z_{14}z_{32})^{-2h(\phi_{(1,2)})} z^{2\beta_1} (1-z)^{2\beta_2} K_1^{(1)}(z) \\
&= (z_{14}z_{32})^{-\frac{1}{8}} z^{-\frac{1}{8}} (1-z)^{-\frac{1}{8}} F\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; z\right)
\end{aligned}$$

Para o outro valor de β , $\beta = 3/16$, ainda com o campo $\phi_{(1,2)}$, obtemos a função de quatro pontos

$$\begin{aligned}
\langle \phi_{(1,2)}(z_1)\phi_{(1,2)}(z_2)\phi_{(1,2)}(z_3)\phi_{(1,2)}(z_4) \rangle &= (z_{14}z_{32})^{-2h(\phi_{(1,2)})} z^{\frac{3}{8}} (1-z)^{\frac{3}{8}} K_1^{(2)}(z) \\
&= (z_{14}z_{32})^{-\frac{1}{8}} z^{\frac{3}{8}} (1-z)^{\frac{3}{8}} F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; z\right)
\end{aligned}$$

Já para o campo $\phi_{(2,1)}$ de dimensão escalar $h_{\phi_{(2,1)}} = 1/2$, novamente, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ e este possui também dois valores: $\beta = -1/2$ e $\beta = 1/3$. Todas as dimensões h_i são iguais à dimensão escalar do campo $\phi_{(2,1)}$ e o parâmetro t é agora $t = \frac{p}{p'} = \frac{4}{3}$. A equação diferencial para $K_1^{(1)}(z)$, isto é, quando $\beta = -1/2$, é

$$z(1-z)\partial_z^2 K_2^{(1)}(z) + \left(-\frac{2}{3} - \left(-2 - \frac{1}{3} + 1\right)z\right)\partial_z K_2^{(1)}(z) - \frac{2}{3}K_2^{(1)}(z) = 0$$

cuja solução é a hipergeométrica

$$K_2^{(1)}(z) = F\left(-2, -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; z\right) = 1 - z + z^2.$$

A função de quatro pontos nestas condições é

$$\begin{aligned}
\langle \phi_{(2,1)}(z_1)\phi_{(2,1)}(z_2)\phi_{(2,1)}(z_3)\phi_{(2,1)}(z_4) \rangle &= \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (z_i - z_j)^\mu G(z) \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (z_i - z_j)^\mu z^{-\mu} (1-z)^{-\mu} H(z) \\
&= (z_{14}z_{32})^{-2h\phi_{(2,1)}} z^{2\beta_1} (1-z)^{2\beta_2} K^{(1)}(z) \\
&= (z_{14}z_{32})^{-1} z^{-1} (1-z)^{-1} F\left(-2, -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; z\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, para $\beta = 1/3$, com t e h_i permanecendo os mesmos, encontramos a seguinte equação diferencial para $K_2^{(2)}(z)$

$$z(1-z)\partial_z^2 K_2^{(2)}(z) + \left(\frac{8}{3} - \left(-\frac{4}{3} + 3 + 1\right)z\right)\partial_z K_2^{(2)}(z) - 4K_2^{(2)}(z) = 0$$

cuja solução é $K_2^{(2)}(z) = F\left(\frac{4}{3}, 3; \frac{8}{3}; z\right)$. E a função de quatro pontos

$$\begin{aligned} \langle \phi_{(2,1)}(z_1)\phi_{(2,1)}(z_2)\phi_{(2,1)}(z_3)\phi_{(2,1)}(z_4) \rangle &= \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (z_i - z_j)^\mu G(z) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (z_i - z_j)^\mu z^{-\mu} (1-z)^{-\mu} H(z) \\ &= (z_{14}z_{32})^{-2h\phi_{(2,1)}} z^{2\beta_1} (1-z)^{2\beta_2} K_2^{(2)}(z) \\ &= (z_{14}z_{32})^{-\frac{2}{3}} z^{\frac{2}{3}} (1-z)^{\frac{2}{3}} F\left(\frac{4}{3}, 3; \frac{8}{3}; z\right) \end{aligned}$$

A partir do nível três do módulo de Verma, as soluções para as funções de correlação de quatro pontos serão hipergeométricas generalizadas [3] o que torna o tratamento desses problemas um pouco mais complicado. O próximo modelo minimal unitário, $vir(5, 4)$, possui seis campos com diferentes dimensões conformes. A carga central para esse modelo é $c = \frac{7}{10}$. Os campos com suas respectivas dimensões, dependendo dos números inteiros m e n , são

$\phi_{(m,n)}$	Dimensão Conforme
$\phi_{(1,1)}$ ou $\phi_{(3,4)}$	0
$\phi_{(1,2)}$ ou $\phi_{(3,3)}$	$\frac{1}{10}$
$\phi_{(1,3)}$ ou $\phi_{(3,2)}$	$\frac{3}{5}$
$\phi_{(1,4)}$ ou $\phi_{(3,1)}$	$\frac{3}{2}$
$\phi_{(2,2)}$ ou $\phi_{(2,3)}$	$\frac{3}{80}$
$\phi_{(2,4)}$ ou $\phi_{(2,1)}$	$\frac{7}{10}$

Tabela 2

Todos os outros campos desse modelo são simples combinações desses e o modelo de rede associado com este modelo minimal é o modelo de Ising Tricrítico. Outros modelos minimais podem ser encontrados em [9].

Capítulo 4

Álgebra de Kac-Moody

No capítulo anterior, aprendemos o que é um modelo minimal, que eles possuem um número finito de operadores da álgebra ou campos primários e que suas funções de correlação podem, a princípio, ser calculadas através de uma equação diferencial. A restrição desses modelos está em que a sua respectiva carga central tem que pertencer ao intervalo $0 < c < 1$. Para estudarmos uma teoria de campos conforme com $c > 1$ precisamos introduzir a esta, uma simetria com a estrutura de um grupo de Lie. A álgebra que introduz essa simetria é a chamada álgebra de Kac-Moody, também denominada álgebra das correntes.

Iniciamos a abordagem desse problema através do modelo de Wess-Zumino-Witten (WZW) cujas correntes holomórficas e antiholomórficas são conservadas separadamente e seus modos normais satisfazem as mesmas regras de comutação de uma álgebra de Kac-Moody (secção (4.1)). Em seguida, na secção (4.2), passamos à construção de Sugawara que é o procedimento de escrever o tensor energia momento em termos das correntes do modelo de WZW que resulta em uma expressão da carga central para este modelo em função do nível k da álgebra de Kac-Moody e de outros parâmetros da álgebra de Lie associada. Introduzindo os campos primários da teoria, chegamos, semelhantemente à carga central, a uma expressão para as dimensões conformes desses campos que depende do quadrado do operador de Casimir da álgebra de Lie e o cálculo deste operador para

$su(N)$ é o assunto da secção (4.3). Com esses ingredientes, construímos na secção (4.4) a equação diferencial para as funções de correlação dos campos primários, equação de Knizhnik-Zamolodchikov, e finalizaremos este capítulo na secção (4.5), especificando a equação de Knizhnik-Zamolodchikov ao caso de funções de quatro pontos com simetria de $su(N)$.

4.1 Modelos de WZW

A ação do modelo de Wess-Zumino-Witten [9]

$$S^{WZW} = \frac{k}{16\pi} \int d^2x \text{Tr}(\partial^\mu g^{-1} \partial_\mu g) - \frac{ik}{24\pi} \int d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \text{Tr}(g^{-1} \partial^\alpha g g^{-1} \partial^\beta g g^{-1} \partial^\gamma g g^{-1})$$

é descrita por campos bosônicos matriciais $g(z)$ que se transformam por um grupo G associado a uma álgebra de Lie (veja [9]). Essa ação leva a uma corrente holomórfica e uma antiholomórfica conservadas separadamente: para uma variação infinitesimal no campo do tipo $g(z) \rightarrow g(z) + \delta_\omega g(z) + \delta_{\bar{\omega}} g(z)$, onde ω e $\bar{\omega}$ são parâmetros infinitesimais da transformação, há a seguinte variação na ação

$$\delta S^{WZW} = \frac{k}{2\pi} \int d^2x \text{Tr}[\omega(z) \partial_{\bar{z}}(\partial_z g g^{-1}) - \bar{\omega}(\bar{z}) \partial_z(g^{-1} \partial_{\bar{z}} g)]$$

e para que esta seja nula, precisamos ter as correntes $J(z) = -k \partial_z g g^{-1}$ e $\bar{J}(\bar{z}) = k g^{-1} \partial_{\bar{z}} g$.

No caso quântico, escrevemos essas correntes em função de seus modos normais J_n^a , como fizemos para o tensor energia momento

$$J^a(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^a}{z^{n+1}} \quad (4.1)$$

sendo que os operadores antiholomórficos têm uma fórmula semelhante. As componentes J_n^a satisfazem a chamada álgebra de Kac-Moody

$$[J_n^a, J_m^b] = if_{abc} J_{n+m}^c + kn \delta_{ab} \delta_{n+m,0}. \quad (4.2)$$

caracterizada pela constante de estrutura f_{abc} de uma álgebra de Lie. O número k , no segundo termo do lado direito da igualdade, é o nível dessa álgebra, que é um parâmetro muito relevante neste modo de abordar a teoria quântica de campos. Representamos uma álgebra de Kac-Moody baseada numa álgebra de Lie $g(N)$ por $\widehat{g}(N)_k$. Usando a regra de comutação (4.2) e mais algumas identidades de funções expandidas em séries de Laurent, podemos obter as expressões dos produtos de operadores, e para isso, é conveniente decompor a corrente $J^a(z)$ em uma parte de frequência negativa e outra de frequência positiva de tal modo que $J^a(z) = J_{in}^a(z) + J_{out}^a(z)$, sendo essas partes

$$J_{in}^a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_n^a}{z^{n+1}} \quad J_{out}^a(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{J_n^a}{z^{n+1}} \quad (4.3)$$

Então, o produto da corrente de WZW com ela mesma

$$\begin{aligned} J^a(z)J^b(w) &= (J_{in}^a(z) + J_{out}^a(z))J^b(w) \\ &= J_{in}^a(z)J^b(w) + J_{out}^a(z)J^b(w) \\ &= J_{in}^a(z)J^b(w) - J^b(w)J_{in}^a(z) + J^b(w)J_{in}^a(z) \\ &\quad + J_{out}^a(z)J^b(w) \\ &= [J_{in}^a(z), J^b(w)] + : J^a(z)J^b(w) : \end{aligned}$$

pode ser simplificado procedendo de maneira semelhante à usada nos cálculos do tensor energia momento. Lembrando especialmente de algumas identidades das expansões em séries de Laurent, podemos mostrar que o comutador $[J_{in}^a(z), J^b(w)]$ vale

$$[J_{in}^a(z), J^b(w)] = \frac{k\delta_{ab}}{(z-w)^2} + \frac{i}{(z-w)} f_{abc} J^c(w) \quad (4.4)$$

e portanto, o produto de duas correntes de WZW é

$$J^a(z)J^b(w) = \frac{k\delta_{ab}}{(z-w)^2} + \frac{i}{(z-w)} f_{abc} J^c(w) + : J^a(z)J^b(w) : \quad (4.5)$$

Esta é a expressão usual que esperamos para o produto de duas correntes na teoria quântica de campos, justificando a álgebra de Kac-Moody (4.2).

4.2 Construção de Sugawara

Como a ação S^{WZW} tem dimensão nula, a dimensão do campo g de WZW é zero e conseqüentemente a da corrente $J^a(z)$ é um. Portanto, se quisermos escrever o tensor energia momento em função das correntes de Kac-Moody, o mais natural é tentarmos um bilinear das correntes, dessa forma

$$T(z) = \gamma : J^a(z)J^a(z) := \gamma(J_{out}^a(z)J^a(z) + J^a(z)J_{in}^a(z)). \quad (4.6)$$

Conforme vimos anteriormente, do produto do tensor energia-momento com um campo, extraímos a dimensão conforme deste. Vamos fazer o produto do tensor energia-momento com a corrente de WZW para relacionar, via os geradores, as álgebras de Virasoro e Kac-Moody. Usando o produto da corrente de WZW com ela mesma, equação (4.5), podemos ir fazendo desaparecer alguns $J^a(z)$ da expressão abaixo.

$$\begin{aligned} T(z)J^b(w) &= \gamma(J_{out}^a(z)J^a(z)J^b(w) + J^a(z)J_{in}^a(z)J^b(w)) \\ &= \gamma \left\{ \frac{2k\delta_{ab}}{(z-w)^2} J^a(z) + \frac{2i}{(z-w)} f_{abc} : J^a(z)J^c(w) : \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(z-w)^2} f_{abc}f_{acd}J^d(w) + : J^a(z)J^a(z)J^c(w) : \right\} \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $: J^a(z)J^a(z)J^b(w) := J_{out}^a(z) : J^a(z)J^b(w) : + : J^a(z)J^b(w) : J_{in}^a(z)$ e que o produto de f_{abc} com δ_{ab} é zero, já que aquele é anti-simétrico e este é simétrico. Vamos expandir $J^a(z)$ nas proximidades de w e usar a identidade $f_{abc}f_{acd} = -2g\delta_{bd}$

$$\begin{aligned} T(z)J^b(w) &= \gamma \left\{ \frac{2(k+g)}{(z-w)^2} J^b(w) + \frac{2k}{(z-w)} \partial J^b(w) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2i}{(z-w)} f_{abc} : J^a(z)J^c(w) : + : J^a(z)J^a(z)J^c(w) : \right\}. \end{aligned}$$

Introduzindo a identidade derivada da álgebra de Kac-Moody cuja demonstração pode ser encontrada no apêndice A

$$if_{abc} : J^a(z)J^c(w) := g\delta_{bd}\partial J^d(w) \quad (4.7)$$

onde g é o número de Coxeter dual da álgebra de Lie, simplificamos o produto dos operadores em questão para

$$\begin{aligned} T(z)J^b(w) &= \gamma \left\{ \frac{2(k+g)}{(z-w)^2} [J^b(w) + (z-w)\partial J^b(w)] + 2if_{abc} : \partial J^a(w)J^c(w) : \right. \\ &\quad \left. + : J^a(z)J^a(z)J^c(w) : \right\} \\ &= \gamma \left\{ \frac{2(k+g)}{(z-w)^2} J^b(z) + 2if_{abc} : \partial J^a(w)J^c(w) : \right. \\ &\quad \left. + : J^a(z)J^a(z)J^c(w) : \right\} \end{aligned}$$

Como sabemos de antemão que a dimensão de $J^b(w)$ é um, então podemos concluir que o fator de normalização γ é

$$\gamma = \frac{1}{2(k+g)}$$

e finalmente, a expansão torna-se, como esperávamos,

$$T(z)J^b(w) = \frac{1}{(z-w)^2} J^b(z) + : T(z)J^b(w) : \quad (4.8)$$

Agora encontraremos a expansão do produto dos operadores $T(z)T(w)$ e como consequência, a carga central, usando o resultado da expansão de $T(z)J^a(w)$

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{T(z)}{2(k+g)} (J_{out}^a(w)J^a(w) + J^a(w)J_{in}^a(w)) \\ &= \frac{1}{2(k+g)} \left\{ \left[J_{out}^a(w)T(z) + \frac{1}{(z-w)^2} J^a(z) \right] J^a(w) \right. \\ &\quad \left. + T(z)J^a(w)J_{in}^a(w) \right\} \\ &= \frac{k\delta_{aa}}{2(k+g)} \frac{1}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T(w) \\ &\quad + \frac{1}{(z-w)} \partial T(w) + : T(z)T(w) : \end{aligned}$$

comparando com a expansão genérica de $T(z)T(w)$, equação (2.34) encontramos a esperada expressão da carga central

$$c = \frac{k\delta_{aa}}{(k+g)} = \frac{kdimg}{(k+g)} \quad (4.9)$$

que depende, além do nível k da álgebra de Kac-Moody, da dimensão e do número de Coxeter dual da álgebra de Lie associada. Para os casos que trataremos neste trabalho, precisamos saber apenas os valores de $\dim g$ e g em três situações

Álgebra	$\dim g$	g
$\text{su}(N)$	$N^2 - 1$	N
$\text{so}(N)$	$\frac{N(N-1)}{2}$	$N - 2$
$\text{sp}(2N)$	$2N^2 + N$	$N + 1$

Tabela 3

Podemos, através de uma técnica chamada coset, expressar a carga central dos modelos minimais por estas de Kac-Moody ou WZW. Essa técnica abrange ainda as dimensões dos campos e as funções de correlação. Para as dimensões conformes, podemos introduzir o campo $\phi(z)$ para representar a parte holomórfica da teoria. Ele é um campo primário de WZW tal como $g(z, \bar{z})$, considerando apenas a parte holomórfica deste último. Os campos primários $\phi(z)$ têm um sentido mais geral do que $g(z, \bar{z})$ (ver [9]), porque eles descrevem teorias quirais onde a parte antiholomórfica pode não ser mais o simples conjugado da parte holomórfica. Este campo transforma-se também de acordo com uma representação t^a da álgebra de Lie que significa que ele satisfaz a seguinte regra de comutação

$$[J_n^a, \phi(w)] = w^n t^a \phi(w)$$

que é idêntica a

$$[J_{in}^a(z), \phi(w)] = \frac{t^a}{(z-w)} \phi(w) \quad (4.10)$$

Estes são os campos primários no mesmo sentido usado no estudo das representações da álgebra de Virasoro. Com estas informações, usando os mesmos procedimentos anteriores dos casos $J^a(z)J^b(w)$ e $T(z)J^b(w)$

$$\begin{aligned} J^a(z)\phi(w) &= J_{in}^a(z)\phi(w) + J_{out}^a(z)\phi(w) \\ &= [J_{in}^a(z), \phi(w)] + : J^a(z)\phi(w) : \\ &= \frac{t^a}{(z-w)} \phi(w) + : J^a(z)\phi(w) : \end{aligned} \quad (4.11)$$

E agora podemos determinar a expansão de $T(z)\phi(w)$ que nos dá a dimensão do campo $\phi(w)$. Sabemos que a forma geral dessa expressão é

$$T(z)\phi(w) = \frac{h(g(N)_k)}{(z-w)^2} \phi(z) + :T(z)\phi(w): \quad (4.12)$$

onde $h(g(N)_k)$ é a dimensão conforme do campo $\phi(z)$ que se transforma de acordo com uma representação de $\hat{g}(N)_k$ de Kac-Moody. Escrevendo $T(z)$ em função de $J^a(z)$ e usando o resultado da expansão de $J^a(z)\phi(w)$, encontramos que para campos que se transformam de acordo com

$$\partial\phi(w) = \frac{1}{(k+g)} t^a : J^a(w)\phi(w) : \quad (4.13)$$

a sua dimensão conforme $h(g(N)_k)$ é

$$h(g(N)_k) = \frac{t^a t^a}{2(k+g)}. \quad (4.14)$$

Essa condição é necessária para que o campo que satisfaz (4.10) também satisfaça (4.12) (ver apêndice A).

4.3 Operador de Casimir

O operador de Casimir é um operador que comuta com todos os outros operadores da álgebra de Lie. O operador $t^a t^a$ da fórmula (4.14) é um exemplo desse tipo de operador. Para cada tipo de álgebra de Lie, temos uma maneira de determinar $t^a t^a$ em função dos pesos fundamentais da representação da álgebra. Para nós, porque vamos utilizar estes resultados no próximo capítulo, interessa examinar o caso quando a álgebra de Kac-Moody tem a simetria de $su(N)$. Então, para $su(N)$ o operador de Casimir (C_Λ) é definido por, conforme [8]

$$C_\Lambda = g^{\rho\sigma} t_\rho t_\sigma \quad (4.15)$$

onde os t_ρ são as matrizes da representação da álgebra de Lie em questão e $g^{\rho\sigma}$ é o tensor métrico. Escrevendo estes operadores na base de Cartan-Weyl

$$C_\Lambda = g^{ik} H_i H_k + \sum_{\alpha} E_{\alpha} E_{-\alpha}. \quad (4.16)$$

H_i são as matrizes diagonais e $E_{\pm\alpha}$ são operadores de criação e destruição para raízes positivas nesta base. Sendo Λ um highest weight de uma representação irredutível de $su(N)$ e $|u_\Lambda\rangle$ o respectivo vetor deste peso, podemos afirmar que $E_{\alpha}|u_\Lambda\rangle = 0$, e então

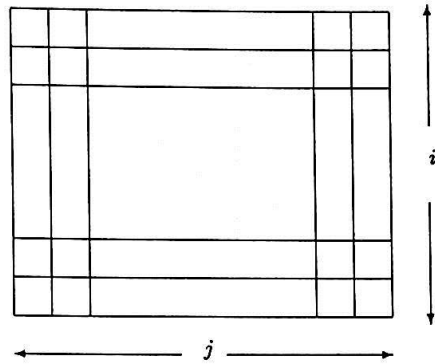
$$\begin{aligned} C_\Lambda |u_\Lambda\rangle &= g^{ik} \Lambda_i \Lambda_k |u_\Lambda\rangle + \sum_{\alpha \in \Sigma^+} [E_{\alpha}, E_{-\alpha}] |u_\Lambda\rangle \\ &= (\Lambda, \Lambda + 2\rho) |u_\Lambda\rangle \end{aligned}$$

onde ρ é a metade da soma das raízes positivas. Determinaremos o autovalor do operador de Casimir, $(\Lambda, \Lambda + 2\rho)$, para certas representações irredutíveis da álgebra de Lie $su(N)$ que são construídas a partir de seus pesos fundamentais. Apresentamos as representações por meio dos tableaux de Young e para algumas configurações desses tableaux as dimensões conformes podem ser determinadas usando a seguinte normalização dos pesos fundamentais da álgebra de $su(N)$

$$(\Lambda_i, \Lambda_j) = \frac{i(N-j)}{2N} \quad i \leq j \quad e \quad (\Lambda_i, 2\rho) = \frac{i(N-i)}{2} \quad (4.17)$$

sendo que os Λ_i são pesos fundamentais da álgebra de Lie $su(N)$. O operador de Casimir, em função dos pesos gerais Λ que posteriormente serão escritos como combinação dos pesos fundamentais Λ_i , é expresso por $C_\Lambda = (\Lambda, \Lambda + 2\rho)$ e a dimensão conforme do correspondente campo associado a esta representação e a este highest weight Λ da álgebra de Lie $su(N)$ é dada, conforme equação (4.14) e a tabela 3, por $h_\Lambda = \frac{C_\Lambda}{2(N+k)}$. Determinaremos a dimensão conforme para três tipos genéricos de representações de $su(N)$ que são suficientes para esclarecer nossos cálculos posteriores quando estivermos estudando a simetria nível-rank. A primeira representação que trataremos é aquela que esta associada ao peso geral Λ

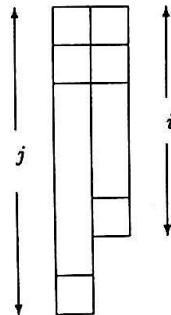
escrito em função dos pesos fundamentais por $\Lambda = j\Lambda_i$. A representação abaixo



é interpretada, genericamente, por tableaux de Young que formam retângulos com i 's tableaux na direção vertical e j 's na direção horizontal e dão origem, usando-se a equação (4.17), a campos com as seguintes dimensões conformes

$$h_{j\Lambda_i} = j(N + j) \frac{i(N - i)}{2N(N + k)} \quad (4.18)$$

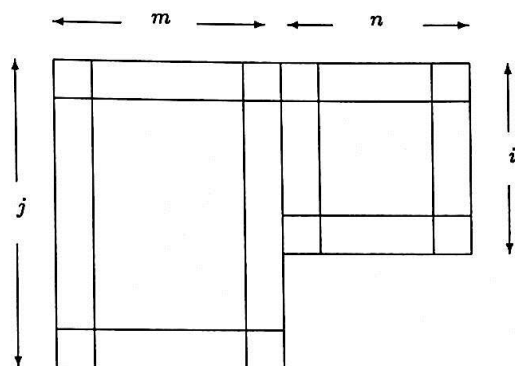
A segunda configuração dos tableaux de Young cujos pesos podem ser escritos como $\Lambda = \Lambda_i + \Lambda_j$ com $i \leq j$, sendo que suas representações irredutíveis são



Chegamos, assim, a uma expressão para as dimensões conformes dos campos

$$h_{\Lambda_i + \Lambda_j} = \frac{(N + 1)[i(N - i) + j(N - j)] + 2i(N - j)}{2N(N + k)} \quad (4.19)$$

O último caso de configuração dos tableaux que iremos tratar aqui é aquele em que os pesos fundamentais são $\Lambda = n\Lambda_i + m\Lambda_j$ com $i \leq j$, de onde nos vem a seguinte representação



e destas representações obtemos campos primários com as seguintes dimensões conformes

$$h_{n\Lambda_i+m\Lambda_j} = \frac{n(N+n)i(N-i) + m(N+m)j(N-j) + 2nmi(N-j)}{2N(N+k)} \quad (4.20)$$

4.4 Equação de Knizhnik-Zamolodchikov

Usando a condição de simetria conforme sobre os campos podemos construir uma equação diferencial para uma função de N -pontos. Esta equação é chamada equação de Knizhnik-Zamolodchikov. Primeiro, encontraremos esta equação para uma função de quatro pontos, e depois, procederemos à generalização. Iniciamos, lembrando a condição de invariância conforme dos campos primários, equação (4.13). Essa condição equivale à condição de vetores singulares do módulo de Verma da álgebra de Virasoro; como veremos, a introdução dessa condição para os campos evita que tenhamos que discutir sobre as propriedades das representações da álgebra de Kac-Moody e abordar, também aqui, os vetores singulares. Uma abordagem nesse estilo pode ser encontrada em [9]. Com quatro campos que satisfazem a condição (4.13), montamos o produto esperado no vácuo destes e derivamos em relação à coordenada complexa do segundo campo (mas poderia

ser em relação à variável de qualquer um dos campos)

$$\begin{aligned}
 \partial_{z_2} \langle \phi(z_1) \phi(z_2) \phi(z_3) \phi(z_4) \rangle &= \langle \phi(z_1) \partial_{z_2} \phi(z_2) \phi(z_3) \phi(z_4) \rangle \\
 &= \langle \phi(z_1) \frac{t^a}{(k+g)} : J^a(z_2) \phi(z_2) : \phi(z_3) \phi(z_4) \rangle \\
 &= \frac{t^a}{(k+g)} \langle \phi(z_1) [J_{out}^a(z_2) \phi(z_2) \\
 &\quad + \phi(z_2) J_{in}^a(z_2)] \phi(z_3) \phi(z_4) \rangle \\
 &= \frac{t^a}{(k+g)} \{ \langle \phi(z_1) J_{out}^a(z_2) \phi(z_2) \phi(z_3) \phi(z_4) \rangle \\
 &\quad + \langle \phi(z_1) \phi(z_2) J_{in}^a(z_2) \phi(z_3) \phi(z_4) \rangle \}
 \end{aligned}$$

Introduzindo as seguintes relações de comutação para simplificar as expressões acima

$$[J_{in}^a(z), \phi(w)] = \frac{t^a}{(z-w)} \phi(w) \quad e \quad [J_{out}^a(w), \phi(z)] = \frac{t^a}{(z-w)} \phi(z)$$

lembrando que elas são válidas para $|z| > |w|$. Então

$$\begin{aligned}
 &\partial_{z_2} \langle \phi(z_1) \phi(z_2) \phi(z_3) \phi(z_4) \rangle \\
 &= -\frac{t^a t^a}{(k+g)} \left\{ \frac{1}{(z_1 - z_2)} + \frac{1}{(z_3 - z_2)} + \frac{1}{(z_4 - z_2)} \right\} \langle \phi(z_1) \phi(z_2) \phi(z_3) \phi(z_4) \rangle
 \end{aligned}$$

Reescrevendo esta última equação na forma

$$\left[\partial_{z_2} + \frac{t^a t^a}{(k+g)} \sum_{i=1, i \neq 2}^4 \frac{1}{(z_i - z_2)} \right] \langle \phi(z_1) \phi(z_2) \phi(z_3) \phi(z_4) \rangle = 0 \quad (4.21)$$

notamos que a generalização é imediata

$$\left[\partial_{z_j} + \frac{t^a t^a}{(k+g)} \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{(z_i - z_j)} \right] \langle \phi(z_1) \cdots \phi(z_N) \rangle = 0 \quad (4.22)$$

Essas equações diferenciais parciais podem ser transformadas em equações diferenciais ordinárias cuja ordem depende da álgebra de Lie e da representação desta escolhida. Na próxima secção, trataremos o problema dessas equações para $\widehat{su}(N)_k$. Em [3] esse mesmo problema é discutido para $\widehat{so}(N)_k$ e $\widehat{sp}(2N)_k$ e em [6], para as representações



e suas conjugadas da álgebra de $\widehat{su}(N)_k$.

4.5 Equação de Knizhnik-Zamolodchikov de $\widehat{su}(N)_k$

A função de quatro pontos dos campos de WZW por causa das propriedades conformes desse modelo, expandida em termos dos invariantes tensoriais $I_A \otimes \bar{I}_{\bar{A}}$ de $SU(N) \times \bar{S}U(N)$ pode ser escrita como [2]

$$\langle g(z_1, \bar{z}_1)g^{-1}(z_2, \bar{z}_2)g^{-1}(z_3, \bar{z}_3)g(z_4, \bar{z}_4) \rangle =$$

$$[(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_4)(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)]^{-2h} \sum_{A, \bar{A}=1}^n \mathcal{G}_{A\bar{A}}(z, \bar{z}) I_A \bar{I}_{\bar{A}} \quad (4.23)$$

onde a coordenada complexa z é

$$z = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)} \quad (4.24)$$

e a sua conjugada \bar{z} tem uma fórmula semelhante a esta só que as coordenadas são os \bar{z}_i . Como é de se esperar, a função de quatro pontos $\mathcal{G}_{A\bar{A}}(z, \bar{z})$ separa-se em uma parte holomórfica e outra antiholomórfica

$$\mathcal{G}_{A\bar{A}}(z, \bar{z}) = \sum_{p,q=1}^n a_{pq} F_A^{(p)}(z) F_{\bar{A}}^{(q)}(\bar{z}) \quad (4.25)$$

sendo n o número dos canais invariantes que são possíveis formar numa certa representação de $su(N)$. Para a representação elementar, podemos formar dois canais invariantes, I_1 e I_2 que são dados por

$$I_1 = \delta_{m_1, m_2} \delta_{m_3, m_4} \quad I_2 = \delta_{m_1, m_3} \delta_{m_2, m_4} \quad (4.26)$$

mais os seus conjugados \bar{I}_1 e \bar{I}_2 . Assim, reescrevemos a parte holomórfica de $\mathcal{G}_{A\bar{A}}(z, \bar{z})$ como

$$\mathcal{G}(z) = I_1 F_1(z) + I_2 F_2(z) \quad (4.27)$$

e a equação de Knizhnik-Zamolodchikov associada a esta parte, torna-se

$$\left(\partial_{z_i} + \frac{1}{N+k} \sum_{j \neq i} \frac{t^a t^a}{z_i - z_j} \right) [z_{14} z_{23}]^{-4h} (I_1 F_1(z) + I_2 F_2(z)) = 0 \quad (4.28)$$

sendo $z_{ij} = (z_i - z_j)$. O próximo passo é transformar esta equação diferencial parcial em uma equação diferencial ordinária na variável z . Encontrando as diferenciais ∂_{z_i} da função de quatro pontos (4.23) em função de z dado em (4.24), a derivada de z em relação a cada componente z_i e a derivada segunda também de (4.23) em relação a z_1 e fazendo os seguintes limites para as coordenadas z_i

$$z_1 \rightarrow z \quad z_2 \rightarrow 0 \quad z_3 \rightarrow 1 \quad z_4 \rightarrow \infty \quad (4.29)$$

reduzimos a equação (4.28) a

$$\left\{ \partial_z + \frac{1}{N+k} \frac{\sum_a t_1^a \otimes t_2^a}{z} + \frac{1}{N+k} \frac{\sum_a t_1^a \otimes t_3^a}{z-1} \right\} (I_1 F_1(z) + I_2 F_2(z)) = 0. \quad (4.30)$$

Pelo fato de I_1 e I_2 definirem dois canais independentes, esta equação diferencial pode ser dividida em duas e substituindo os valores dos produtos dos $\sum_a t_i^a \otimes t_j^a I_k$, encontramos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \partial_z F_1(z) &= -\frac{1}{N+k} \left\{ \frac{(N^2-1) F_1(z)}{N} \frac{1}{z} + \frac{F_2(z)}{z} + \frac{1}{N} \frac{F_1(z)}{1-z} \right\} \\ \partial_z F_2(z) &= \frac{1}{N+k} \left\{ +\frac{(N^2-1) F_2(z)}{N} \frac{1}{1-z} + \frac{F_1(z)}{1-z} + \frac{1}{N} \frac{F_2(z)}{z} \right\}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Isolando F_2 em uma delas e substituindo na outra, obtemos uma equação diferencial de segunda ordem para F_1 . Fazendo uma substituição do tipo $F_1 = z^r (1-z)^s f_1$ e impondo algumas restrições sobre os valores de r e s encontramos finalmente uma equação hipergeométrica, e assim, escrevemos as soluções F_1 e F_2 da forma

$$\begin{aligned} F_1^{(1)} &= z^{-\beta+\alpha/N} (1-z)^{\alpha/N} F(\alpha, -\alpha; -\beta+1; z) \\ F_1^{(2)} &= z^{\alpha/N} (1-z)^{1-\beta+\alpha/N} F(\alpha+1, -\alpha+1; \beta+1; z) \\ F_2^{(1)} &= \frac{1}{k} z^{1-\beta+\alpha/N} (1-z)^{\alpha/N} F(\alpha+1, -\alpha+1; -\beta+2; z) \\ F_2^{(2)} &= -N z^{\alpha/N} (1-z)^{-\beta+\alpha/N} F(\alpha, -\alpha; \beta; z) \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{N+k} \quad e \quad \beta = \frac{N}{N+k} \quad (4.33)$$

Todas essas funções são soluções do sistema de equações (4.31) e as funções de correlação são essas multiplicadas pelo fator $(z_{14}z_{32})^{-2h(\bar{su}(N)_k)}$, permanecendo a independência dos canais. Impondo a invariância por crossing, ou seja, a função de quatro pontos permanece com a mesma forma na transformação de z para $(1-z)$, que é equivalente à mudança $I_1 \leftrightarrow I_2$ dos canais, e que a função de correlação tenha valor singular em todo o plano complexo, conseguimos determinar o valor das constantes a_{pq} de (4.25). Este procedimento, ao mesmo tempo, garante significado físico às nossas soluções. Primeiro, concentrando a atenção na vizinhança de $z = \bar{z} = 0$, a exigência de que as soluções tenham valor único nessa região, leva-nos a, conforme [7]

$$a_{pq} = a_p \delta_{pq} \quad (4.34)$$

e já na vizinhança de $z = \bar{z} = 1$, pelo mesmo motivo anterior

$$\mathcal{G}_{A\bar{A}}(z, \bar{z}) = \sum_{B, \bar{B}=1}^2 \sigma_{AB} \mathcal{G}_{B\bar{B}}(1-z) \sigma_{\bar{B}\bar{A}} \quad (4.35)$$

onde $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ e $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 1$. E por último, a simetria por crossing é investigada através da continuação analítica das funções hipergeométricas

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b; a+b-c+1; 1-z) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z) \quad (4.36)$$

e das condições impostas por (4.34) e (4.35). A condição (4.34) produz em (4.25) a total separação dos blocos conformes entre as soluções (1) e (2) de (4.32) e nosso trabalho reduz-se agora a encontrar apenas duas constantes: $a_{11} = a_1$ e $a_{22} = a_2$, já que as outras anulam-se. Nesse estágio, podemos verificar a simetria por crossing de (4.25) através de (4.34), usando a continuação analítica (4.36), e diretamente por (4.35). O confronto das duas, por um lado, força-nos a impor condições sobre a razão a_2/a_1 para que ambas sejam satisfeitas simultaneamente, e por outro, fixando $a_1 = 1$ por simples motivo de

normalização, encontramos a_2 e assim (4.25) fica totalmente determinada.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{A\bar{A}}(z, \bar{z}) &= F_A^{(1)}(z)F_{\bar{A}}^{(1)}(\bar{z}) \\ &+ \left(\frac{N^2\Gamma^2(\beta)\Gamma^2(-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)} - 1 \right) \frac{\Gamma(\beta - \alpha)\Gamma(\beta + \alpha)}{N^2\Gamma^2(\beta)} F_A^{(2)}(z)F_{\bar{A}}^{(2)}(\bar{z}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Para $k = 1$, o segundo bloco conforme de (4.37) desacopla, permanecendo apenas as soluções (1), ou seja, $N^2\Gamma^2(\beta)\Gamma^2(-\beta)/\Gamma^2(\alpha)\Gamma^2(-\alpha) - 1 = 0$ quando $k = 1$. Esse fato é muito relevante porque é graças a esse desacoplamento que podemos decompor férmions livres de Majorana, como veremos no próximo capítulo, em um campo de WZW vezes um operador de vértice.

Capítulo 5

Quocientes de Álgebras de Kac-Moody

Até aqui, consideramos separadamente os modelos minimais da álgebra de Virasoro com $c_{vir} < 1$ e os modelos de WZW com $rankg \leq c_{Kac} \leq dimg$. Por um mecanismo chamado coset, um quociente entre dois modelos de WZW ou álgebras de Kac-Moody, a sua respectiva carga central é a diferença entre as cargas centrais de seus componentes WZW. Isto implica que por este mecanismo podemos representar modelos com cargas centrais menores que um, entre eles, modelos minimais. Por exemplo, a carga central do coset $\widehat{su}(2)_k/\widehat{U}(1)$ é a de $\widehat{su}(2)_k$ menos a de $U(1)$ que é um e para $k = 2$, esse coset corresponde ao modelo de Ising com $c = 1/2$.

Interessa-nos estudar um determinado coset de álgebras de Kac-Moody $\widehat{su}(2)_k$ porque estes representam exatamente todos os modelos minimais de Virasoro e nas secções (5.1) e (5.2), respectivamente, iremos demonstrar essa equivalência para a carga central e para as dimensões conformes dos campos. Encerramos este capítulo, analisando na secção (5.3) a decomposição da função de quatro pontos de $\widehat{su}(N)_1$ no produto das funções de quatro pontos para férmions com condição de contorno de Neveu-Schwarz com a do grupo unitário $U(1)$.

5.1 Carga Central

Para um valor qualquer de N de $su(N)$ a carga central é, conforme (4.9)

$$c(\widehat{su}(N)_k) = \frac{k(N^2 - 1)}{N + k} \quad (5.1)$$

e portanto $c(\widehat{su}(N)_1) = (N - 1)$. Montando o coset para determinar a carga central

$$c\left(\frac{\widehat{su}(N)_1 \times \widehat{su}(N)_k}{\widehat{su}(N)_{k+1}}\right) = c(\widehat{su}(N)_1) + c(\widehat{su}(N)_k) - c(\widehat{su}(N)_{k+1})$$

Substituindo os respectivos valores das cargas centrais de Kac-Moody

$$\begin{aligned} c\left(\frac{\widehat{su}(N)_1 \times \widehat{su}(N)_k}{\widehat{su}(N)_{k+1}}\right) &= (N - 1) + \frac{k(N^2 - 1)}{N + k} - \frac{(k + 1)(N^2 - 1)}{(N + k + 1)} \\ &= (N - 1) - \frac{N(N^2 - 1)}{(N + k)(N + k + 1)} \end{aligned}$$

Para $N = 2$ vemos que reproduzimos os valores das cargas dos modelos minimais de Virasoro, onde $p = k + 1$ quando comparamos com (3.12). Os modelos mais relevantes, ou mais conhecidos, são

k	Carga Central	Modelo
1	1/2	Ising
2	7/10	Tricritical Ising
3	4/5	Three-State Potts

Tabela 4

Este resultado possibilita-nos montar o seguinte coset envolvendo álgebras de Kac-Moody e de Virasoro (de modo simbólico) [11]

$$\widehat{su}(2)_k + \widehat{su}(2)_1 = \widehat{su}(2)_{k+1} + \text{vir}(q, p) \quad (5.2)$$

que é válido também para as dimensões conformes e as funções de correlação dos campos. Estas, estudaremos apenas no próximo capítulo introduzindo uma outra simetria, ou melhor, evidenciando-a porque ela já está inserida na teoria.

5.2 Dimensão dos Campos Primários

Para obter as dimensões dos modelos minimais, precisamos analisar como se compõe a dimensão de $\widehat{su}(2)_1$ a partir das dimensões de $\widehat{su}(2)_k$ para a representação elementar que, como vimos anteriormente na equação (4.19), é $\frac{j(j+2)}{4(k+2)}$. Portanto, o coset (5.2) fornece-nos as dimensões

$$\begin{aligned} h(\widehat{su}(2)_k) + h(\widehat{su}(2)_1) &= h(\widehat{su}(2)_{k+1}) + h_{vir(q,p)} \\ \frac{j(j+2)}{4(k+2)} + h(\widehat{su}(2)_1) &= \frac{l(l+2)}{4(k+3)} + h_{vir(q,p)}. \end{aligned}$$

Isolando do lado esquerdo da igualdade as dimensões dos campos com os quais sabemos trabalhar, vamos desenvolvê-los de tal modo a obter a dimensão dos campos de Virasoro e em consequência, descobriremos a forma da dimensão de $\widehat{su}(2)_1$. Usando o fato de que $(j+1)^2 = j(j+2) + 1$, podemos reescrever a expressão abaixo da forma

$$\frac{j(j+2)}{4(k+2)} - \frac{l(l+2)}{4(k+3)} = \frac{(j+1)^2}{4(k+2)} - \frac{(l+1)^2}{4(k+3)} - \frac{1}{4(k+2)(k+3)}.$$

Somando e subtraindo $\frac{2(j+1)(l+1)}{4}$ e substituindo $j+1$ por m e $l+1$ por n na identidade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{j(j+2)}{4(k+2)} - \frac{l(l+2)}{4(k+3)} &= \frac{m^2}{4(k+2)} - \frac{n^2}{4(k+3)} - \frac{1}{4(k+2)(k+3)} \\ &\quad - \frac{2mn(k+2)(k+3)}{4(k+2)(k+3)} + \frac{2mn}{4} \\ &= \frac{m^2(k+3) - n^2(k+2)}{4(k+2)(k+3)} - \frac{1}{4(k+2)(k+3)} \\ &\quad - \frac{2mn(k+2)(k+3)}{4(k+2)(k+3)} + \frac{2mn}{4} \end{aligned}$$

Fazendo uso da identidade algébrica $m^2(k+3) = m^2(k+3)^2 - m^2(k+2)(k+3)$ e da $n^2(k+2) = n^2(k+2)(k+3) - n^2(k+2)^2$ nesta última expressão das dimensões, chegamos a

$$\frac{j(j+2)}{4(k+2)} - \frac{l(l+2)}{4(k+3)} = \frac{[m(k+3) - n(k+2)]^2}{4(k+2)(k+3)} - \frac{(m-n)^2}{4} \quad (5.3)$$

sendo que o primeiro termo do lado direito da igualdade anterior é a dimensão do campo dos modelos minimais quando se faz uma substituição de $q = k + 3$ e $p = k + 2$ com $1 \leq n \leq q - 1$ e $1 \leq m \leq p - 1$ na expressão

$$h_{mn} = \frac{(mq - np)^2 - (p - q)^2}{4pq} \quad (5.4)$$

e a dimensão de $\widehat{su}(2)_1$ é portanto $\frac{(m - n)^2}{4}$. A expressão do coset fica sendo para os modelos minimais $\widehat{su}(2)_k + \widehat{su}(2)_1 = \widehat{su}(2)_{k+1} + \text{vir}(k + 3, k + 2)$.

5.3 Férmions Livres Complexos

Um exemplo físico de aplicação do que estamos vendo é para o cálculo da função de quatro pontos de férmions complexos ou de Dirac. Para estes, temos a regra de anticomutação abaixo, onde escolhemos as constantes de normalização de (2.30) e (2.33) para o propagador dos bósons e dos férmions, respectivamente, iguais a $1/4\pi$ e $1/2\pi$,

$$\{b_k, b_q\} = \delta_{k+q,0}$$

A expressão do campo dos férmions no plano em função dos operadores b_k é $\psi(z) = \sum_k b_k z^{-k-\frac{1}{2}}$ para $k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ que significa que estamos usando condições de contorno periódicas: $\psi(e^{2\pi i} z) = \psi(z)$, chamadas também de condições de Neveu-Schwarz. Com esta, podemos escrever as funções dos N férmions complexos $\psi^i(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1^i(z) + i\psi_2^i(z))$ e sua conjugada $\psi^{i\dagger}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1^i(z) - i\psi_2^i(z))$. Montando os geradores para os férmions complexos $a_q^j = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{1q}^j + ib_{2q}^j)$ e $a_q^{j\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{1q}^j - ib_{2q}^j)$, calculamos as relações de anticomutação para estes últimos

$$\begin{aligned} \{a_k^i, a_q^{j\dagger}\} &= \delta^{ij} \delta_{k+q,0} \\ \{a_k^i, a_q^j\} &= \delta^{ij} \delta_{k+q,0} \\ \{a_k^{i\dagger}, a_q^j\} &= \delta^{ij} \delta_{k+q,0}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

e podemos, reescrevendo os férmions complexos como $\psi^j(z) = \sum_k a_k^j z^{-k-\frac{1}{2}}$ e $\psi^{j\dagger}(z) = \sum_k a_k^{j\dagger} z^{-k-\frac{1}{2}}$, expressar, a partir das relações (5.5), o anticomutador entre os ψ^i

$$\begin{aligned} \{a_k^i, \sum_q a_q^{j\dagger} w^{-q-\frac{1}{2}}\} &= \delta^{ij} \sum_q \delta_{k+q,0} w^{-q-\frac{1}{2}} \\ \left\{ \sum_{k>0} a_k^i z^{-k-\frac{1}{2}}, \psi^{j\dagger}(w) \right\} &= \delta^{ij} \sum_{k>0} \frac{w^{k-\frac{1}{2}}}{z^{k+\frac{1}{2}}} \\ \{\psi_{in}^i(z), \psi^{j\dagger}(w)\} &= \frac{\delta^{ij}}{z} \sum_{k=I+\frac{1}{2}} \left(\frac{w}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\delta^{ij}}{z-w}. \end{aligned}$$

Procedendo da mesma maneira, encontramos as demais regras de anticomutação

$$\begin{aligned} \{\psi_{in}^{i\dagger}(z), \psi^j(w)\} &= \frac{\delta^{ij}}{z-w} \\ \{\psi_{in}^i(z), \psi^j(w)\} &= 0 \\ \{\psi_{in}^{i\dagger}(z), \psi^{j\dagger}(w)\} &= 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Precisamos ainda das definições $\psi_{in}^i(z)|0\rangle = 0$ e $\langle 0|\psi_{out}^i(z) = 0$. Para o cálculo da função de quatro pontos $\langle \psi^i(z_1) \psi^{j\dagger}(z_2) \psi^{k\dagger}(z_3) \psi^l(z_4) \rangle$ existem dois canais, que são os modos de contrair os ψ^i , lembrando que $\psi^i(z) \psi^j(w)$ e $\psi^{i\dagger}(z) \psi^{j\dagger}(w)$ simplesmente comutam, por isso faz sentido falar de canais aqui tal como dos canais invariantes de $su(N)$ da secção (4.5). O primeiro canal é com a seguinte contração dos campos $\delta^{ik} \delta^{jl}$, e então, neste caso,

$$\langle \psi^i(z_1) \psi^{i\dagger}(z_2) \psi^{j\dagger}(z_3) \psi^j(z_4) \rangle = \frac{1}{z_{12} z_{34}}.$$

Com uma relação simples entre os férmions complexos e os campos de WZW com simetria de $su(N)$ em nível 1, podemos reproduzir este resultado. A relação é a seguinte

$$\psi(z) =: e^{ip\varphi(z)} : g(z)$$

sendo que os campos $\varphi(z)$ são bósons com a função de dois pontos dada pela parte holomórfica de (2.30) e $g(z)$ são os campos do modelo de WZW. Determinamos o valor

da constante p , por exemplo, através da função de dois pontos dos férmions, do seguinte modo

$$\begin{aligned}
 \langle \psi^i(z_1) \psi^{j\dagger}(z_2) \rangle &= \langle : e^{ip\varphi(z_1)} :: e^{-ip\varphi(z_2)} : \rangle \langle g(z_1) g^{-1}(z_2) \rangle \\
 &= \langle : e^{ip(\varphi(z_1) - \varphi(z_2))} : \rangle e^{p^2 \langle \varphi(z_1) \varphi(z_2) \rangle} \langle g(z_1) g^{-1}(z_2) \rangle \\
 &= e^{-p^2 \ln(z_1 - z_2)} \langle g(z_1) g^{-1}(z_2) \rangle \\
 &= \frac{1}{(z_1 - z_2)^{p^2}} \frac{1}{(z_1 - z_2)^{1 - \frac{1}{N}}}
 \end{aligned}$$

Portanto, para $p^2 = \frac{1}{N}$, obtemos o mesmo resultado que para a função de dois pontos dos férmions complexos (ver relações (5.6)). Este dado levado ao cálculo das funções de quatro pontos dos férmions complexos, ajuda-nos a concluir que esta função pode ser obtida através de uma composição de $su(N)$ nível 1 com o grupo unitário: $\widehat{su}(N)_1 \times U(1)$. Para o segundo canal, $\delta^{ij} \delta^{kl}$, a função de quatro pontos dos férmions tem a forma

$$\langle \psi^i(z_1) \psi^{j\dagger}(z_2) \psi^{i\dagger}(z_3) \psi^j(z_4) \rangle = -\frac{1}{z_{13} z_{24}}$$

Neste caso, vamos obter este resultado através do procedimento que explicamos anteriormente. Partindo da relação $\psi(z) =: e^{ip\varphi(z)} : g(z)$, a função de quatro pontos dos férmions, que acabamos de encontrar para o segundo canal, equivale a

$$\langle : e^{ip\varphi(z_1)} :: e^{-ip\varphi(z_2)} :: e^{-ip\varphi(z_3)} :: e^{ip\varphi(z_4)} : \rangle \langle g(z_1) g^{-1}(z_2) g^{-1}(z_3) g(z_4) \rangle \delta^{ij} \delta^{kl}$$

Com o resultado

$$\langle : e^{ip\varphi(z_1)} :: e^{-ip\varphi(z_2)} :: e^{-ip\varphi(z_3)} :: e^{ip\varphi(z_4)} : \rangle = \left\{ \frac{z_{14} z_{32}}{z_{12} z_{13} z_{24} z_{34}} \right\}^{\frac{1}{N}}$$

E para os campos de Wess-Zumino, segundo canal

$$\langle g(z_1) g^{-1}(z_2) g^{-1}(z_3) g(z_4) \rangle = [z_{14} z_{32}]^{-2h(\widehat{su}(N)_1)} z^{1-2h(\widehat{su}(N)_1)} (1-z)^{-2h(\widehat{su}(N)_1)} \quad (5.7)$$

Lembrando que para $k = 1$, a dimensão $h_{\widehat{su}(N)_1}$ das representações fundamentais de $su(N)$ é

$$\begin{aligned}
 h_{\widehat{su}(N)_1} &= \frac{N^2 - 1}{2N(N + 1)} \\
 &= \frac{N - 1}{2N}
 \end{aligned}$$

Substituindo este resultado na equação (5.7) e retornando à notação de z e $(1-z)$ em função das coordenadas z_i , concluímos que, de fato, as funções de quatro pontos são idênticas. Nesta situação, $k=1$, é possível expressar a corrente $J^a(z)$ de WZW como função de campos livres (férmions e bósons) e operadores de vértices, então, com $J^a(z) = i\partial\varphi(z)$ e $J^{\pm a}(z) =: e^{\pm i\alpha\varphi(z)}$: onde $\varphi(z)$ são bósons, encontramos novamente a expansão do produto de operadores (4.5) e conseqüentemente, $i\partial\varphi(z)$ e $:e^{\pm i\alpha\varphi(z)}$: satisfazem as regras de comutação da álgebra de Kac-Moody (4.2).

Para férmions reais ou de Majorana podemos também encontrar a sua função de quatro pontos, para as coordenadas complexas z_i assumindo os mesmos valores de (4.29)

$$\langle \psi^i(z_1)\psi^j(z_2)\psi^k(z_3)\psi^l(z_4) \rangle = -\frac{\delta^{ij}\delta^{kl}}{z} - \frac{\delta^{ik}\delta^{jl}}{1-z} + \delta^{il}\delta^{jk} \quad (5.8)$$

através da função de quatro pontos de $\widehat{so}(N)_1$ e com essa construção, vemos que a relação entre os dois campos em questão é: $\psi(z)\bar{\psi}(\bar{z}) = g(z, \bar{z})$.

Capítulo 6

Simetria Nível-Rank

Teorias de campos bidimensionais com invariância conforme e de Kac-Moody apresentam ainda uma outra simetria: a simetria nível-rank. Ela aparece como uma relação do rank, número de operadores diagonalizáveis simultaneamente, da álgebra de Lie com o nível k no produto (no sentido de funções de correlação) de duas álgebras de Kac-Moody de mesma espécie.

Na secção (6.1) verificaremos essa simetria para a carga central e as dimensões conformes. As funções de correlação de quatro pontos para $\widehat{su}(N)_k$ serão estudadas sob esta simetria na secção (6.2). Uma aplicação dela veremos na secção (6.3) onde calcularemos as funções de quatro pontos de $\widehat{su}(2)_2$ decompondo-as nas respectivas funções de quatro pontos do modelo minimal $vir(4,3)$ e do grupo unitário através da implementação dessa simetria nos cosets que reproduzem os modelo minimais.

6.1 Simetria Nível-Rank

Uma outra simetria de muito interesse para a álgebra de Kac-Moody é a chamada dualidade nível-rank. Sendo $\hat{g}(N)_k$ uma dada álgebra de Kac-Moody e $\hat{g}(k)_N$ a mesma álgebra só que agora, com o nível k trocado pelo rank N , simbolicamente, o resultado da soma destas álgebra é uma álgebra de Kac-Moody cujo nível é um e o rank é kN .

Representamos essa simetria das álgebras pela expressão simbólica

$$\hat{g}(N)_k + \hat{g}(k)_N = \hat{g}(kN)_1$$

Da mesma maneira que no caso dos cosets, a simetria nível-rank pode ser explorada para relacionar a carga central, a dimensão e as funções de correlação de diferentes álgebras de Kac-Moody. É claro que o nosso maior interesse está nas funções de correlação e as outras duas características citadas acima servem mais para justificar a aplicação dessa propriedade nos casos em que a demonstração para as funções de correlação de quatro pontos não é simples. Para iniciar, vamos observar esta simetria aplicada à carga central em três casos gerais de álgebras de Kac-Moody: $\widehat{su}(N)_k$, $\widehat{so}(N)_k$ e $\widehat{sp}(2N)_k$. Para $\widehat{su}(N)_k$, a expressão da simetria nível-rank, também de maneira simbólica, é

$$\widehat{su}(N)_k + \widehat{su}(k)_N = \widehat{su}(kN)_1.$$

A carga central dessa álgebra, $c(\widehat{su}(N)_k) = \frac{k(N^2-1)}{N+k}$, leva-nos à composição

$$\begin{aligned} c(\widehat{su}(N)_k) + c(\widehat{su}(k)_N) &= \frac{k(N^2-1)}{N+k} + \frac{N(k^2-1)}{N+k} = kN - 1 \\ &= c(\widehat{su}(kN)_1). \end{aligned}$$

Já para a álgebra $\widehat{so}(N)_k$, a carga central é $c(\widehat{so}(N)_k) = \frac{kN(N-1)}{2(N+k-2)}$ e a simetria nível-rank

$$\begin{aligned} c(\widehat{so}(N)_k) + c(\widehat{so}(k)_N) &= \frac{kN(N-1)}{2(N+k-2)} + \frac{kN(k-1)}{2(N+k-2)} = \frac{kN}{2} \\ &= c(\widehat{so}(kN)_1). \end{aligned}$$

Finalmente para a álgebra $\widehat{sp}(2N)_k$, temos a carga $c(\widehat{sp}(2N)_k) = \frac{k(2N^2+N)}{k+N+1}$ e portanto

$$\begin{aligned} c(\widehat{sp}(2N)_k) + c(\widehat{sp}(2k)_N) &= \frac{k(2N^2+N)}{k+N+1} + \frac{N(2k^2+k)}{k+N+1} = 2kN \\ &= c(\widehat{sp}(4kN)_1). \end{aligned}$$

Este resultado é de fato muito curioso, sobretudo quando olhamos para as funções de correlação. Esclarecendo brevemente, a função de quatro para $\widehat{sp}(2N)_1$, ao contrário das outras álgebras de citamos anteriormente, não se reduz a uma expressão algébrica simples.

No entanto, a função de quatro pontos de $\widehat{sp}(2N)_k + \widehat{sp}(2k)_N$ reduz-se, seguindo o mesmo comportamento de $\widehat{so}(N)_k + \widehat{so}(k)_N$.

As dimensões, diferentemente da carga central, iremos estudá-las apenas em casos concretos e somente para $\widehat{su}(N)_k$. Vamos fazer três casos. Iniciamos a análise das dimensões para o primeiro caso não trivial, que é (simbolicamente)

$$\widehat{su}(2)_2 + \widehat{su}(2)_2 = \widehat{su}(4)_1$$

As representações irredutíveis de $\widehat{su}(2)_2$ e seus respectivos highest weight são, fora a identidade que não iremos apresentar aqui,

$$\Lambda_1 \rightarrow \square \quad 2\Lambda_1 \rightarrow \square \square$$

Já para $\widehat{su}(4)_1$, os tableaux de Young são

$$\Lambda_1 \rightarrow \square \quad \Lambda_2 \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \Lambda_3 \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

que dão origem à tabela de dimensões, a partir de (4.19)

$\widehat{su}(2)_2$	$\widehat{su}(2)_2$	$\widehat{su}(4)_1$
$h_{\Lambda_1} = \frac{3}{16}$	$h_{\Lambda_1} = \frac{3}{16}$	$h_{\Lambda_1} = \frac{3}{8}$
$h_{\Lambda_2} = 0$	$h_{2\Lambda_1} = \frac{1}{2}$	$h_{\Lambda_2} = \frac{1}{2}$

Tabela 5

Como observamos por esta tabela, compondo as dimensões de $\widehat{su}(N)_k$ com $\widehat{su}(k)_N$ obtemos todas as dimensões de $\widehat{su}(kN)_1$ (observe que para $\widehat{su}(N)_1$, $h_{\Lambda_1} = h_{\Lambda_{N-1}}$) e isso se verifica em todos os casos que apresentaremos aqui mas que não parece ser fácil generalizar para uma representação irredutível qualquer de $\widehat{su}(N)_k$. O segundo caso é (simbolicamente)

$$\widehat{su}(2)_3 + \widehat{su}(3)_2 = \widehat{su}(6)_1$$

sendo que os tableaux de Young para $\widehat{su}(2)_3$ são

$$\Lambda_1 \rightarrow \square \quad 2\Lambda_1 \rightarrow \square\square \quad 3\Lambda_1 \rightarrow \square\square\square$$

e para $\widehat{su}(3)_2$

$$\Lambda_1 \rightarrow \square \quad \Lambda_2 \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \Lambda_1 + \Lambda_2 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad 2\Lambda_1 \rightarrow \square\square \quad 2\Lambda_2 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

Para $\widehat{su}(6)_1$, as representações são todas fundamentais por termos $k = 1$. Os tableaux de Young, portanto, são do tipo

$$\Lambda_j \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ j \\ \downarrow \end{array}$$

com j indo até $N - 1$, sendo N o rank da álgebra. A expressão das dimensões para as representações fundamentais de $\widehat{su}(N)_1$, são simplesmente

$$h_{\Lambda_j} = \frac{j(N-j)}{2N}$$

Assim, encontramos a tabela das dimensões para a simetria nível-rank de $\widehat{su}(2)_3 + \widehat{su}(3)_2 = \widehat{su}(6)_1$

$\widehat{su}(3)_2$	$\widehat{su}(2)_3$	$\widehat{su}(6)_1$
$h_{\Lambda_1} = \frac{4}{15}$	$h_{\Lambda_1} = \frac{3}{20}$	$h_{\Lambda_1} = \frac{5}{12}$
$h_{\Lambda_2} = \frac{4}{15}$	$h_{2\Lambda_1} = \frac{2}{5}$	$h_{\Lambda_2} = \frac{2}{3}$
$h_{\Lambda_3} = 0$	$h_{3\Lambda_1} = \frac{3}{4}$	$h_{\Lambda_3} = \frac{3}{4}$
$h_{\Lambda_1 + \Lambda_2} = \frac{3}{5}$	$h_{\Lambda_1} = \frac{3}{20}$	$h_{\Lambda_3} = \frac{3}{4}$
$h_{2\Lambda_2} = \frac{2}{3}$	$h_{2\Lambda_2} = 0$	$h_{\Lambda_4} = \frac{2}{3}$

Tabela 6

O último caso que analisaremos com respeito às dimensões, simbolicamente, é

$$\widehat{su}(2)_4 + \widehat{su}(4)_2 = \widehat{su}(8)_1$$

Como nos exemplos anteriores, apresentamos o highest weight e a sua respectiva representação por tableaux de Young. Primeiro para $\widehat{su}(2)_4$

$$\Lambda_1 \rightarrow \square \quad 2\Lambda_1 \rightarrow \square \square \quad 3\Lambda_1 \rightarrow \square \square \square \quad 4\Lambda_1 \rightarrow \square \square \square \square$$

em segundo lugar, para $\widehat{su}(4)_2$

$$\Lambda_1 \rightarrow \square \quad \Lambda_2 \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \Lambda_3 \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad 2\Lambda_1 \rightarrow \square \square \quad 2\Lambda_2 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad \Lambda_1 + \Lambda_3 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad \Lambda_2 + \Lambda_3 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad 2\Lambda_3 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

Para as dimensões de $\widehat{su}(8)_1$ usamos o mesmo cálculo utilizado para $\widehat{su}(6)_1$ e assim construímos a tabela abaixo.

$\widehat{su}(2)_4$	$\widehat{su}(4)_2$	$\widehat{su}(8)_1$
$h_{\Lambda_1} = \frac{2}{16}$	$h_{\Lambda_1} = \frac{5}{16}$	$h_{\Lambda_1} = \frac{7}{16}$
$h_{2\Lambda_1} = \frac{1}{3}$	$h_{\Lambda_2} = \frac{5}{12}$	$h_{\Lambda_2} = \frac{3}{4}$
$h_{3\Lambda_1} = \frac{10}{16}$	$h_{\Lambda_3} = \frac{5}{16}$	$h_{\Lambda_3} = \frac{15}{16}$
$h_{4\Lambda_1} = 1$	$h_{\Lambda_4} = 0$	$h_{\Lambda_4} = 1$

Tabela 7

A representação associada ao highest weight Λ_4 é idêntica à identidade e por isso, $h_{\Lambda_4} = h_{\Lambda_4} = 0$. Aqui verificamos também a simetria das dimensões para $\widehat{su}(8)_1$: $h_{\Lambda_1} = h_{\Lambda_7}$, $h_{\Lambda_2} = h_{\Lambda_6}$ e $h_{\Lambda_3} = h_{\Lambda_5}$.

6.2 Função de Quatro Pontos para $\hat{g} = \hat{g}(N)_k + \hat{g}(k)_N$

A dualidade nível-rank do ponto de vista das funções de quatro pontos apresenta um resultado semelhante aos casos da carga central e da dimensão dos campos. No entanto, neste caso, é muito mais difícil verificá-la. Seguindo a mesma estrutura anterior no estudo dessa simetria, ela apresenta-se agora como um produto das funções de quatro pontos de $\hat{g}(N)_k$ e $\hat{g}(k)_N$ dando uma função de correlação em nível um. Vamos representar as funções de $\hat{g}(k)_N$ acentuando-as com til para diferenciá-las das outras soluções. A função de quatro pontos para a representação elementar de $\widehat{su}(N)_k + \widehat{su}(k)_N$ é

$$\mathcal{G}(z_1, \bar{z}_1; \dots; z_4, \bar{z}_4) = [(z_1 - z_4)(\bar{z}_1 - \bar{z}_4)(z_2 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3)]^{-2h} \cdot \sum_{A, \bar{A}, B, \bar{B}=1}^2 \mathcal{G}_{A\bar{A}, B\bar{B}}(z, \bar{z}) I_A \tilde{I}_B \bar{I}_A \tilde{\bar{I}}_{\bar{B}} \quad (6.1)$$

onde I_A são os canais invariantes de $su(N)$ e \tilde{I}_A de $su(k)$: na verdade, dois canais para cada uma das álgebras como já dissemos anteriormente para o caso da representação elementar. Consideraremos as soluções que possuem a seguinte forma $\mathcal{G}_{A\bar{A}, B\bar{B}}(z, \bar{z}) = \mathcal{G}_{A\bar{A}}(z, \bar{z}) \tilde{\mathcal{G}}_{B\bar{B}}(z, \bar{z})$ que expressa o que dissemos anteriormente sobre as funções de correlação diante dessa simetria e é graças a essa escolha que verificamos a dualidade nesta situação. Vale a pena lembrar que nestas condições, para $\widehat{su}(N)_k$, os parâmetros $\alpha, \beta, \tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ relacionam-se do seguinte modo $\alpha = \tilde{\alpha}$ e $\beta + \tilde{\beta} = 1$, onde em $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$, N e k estão trocados em (4.33). O primeiro passo a dar, é encontrar as funções de correlação de quatro pontos de $\widehat{su}(k)_N$ em função das que nós já conhecemos que são as de $\widehat{su}(N)_k$ apresentadas em (4.32)

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1^{(1)}(z) &= -\frac{1}{N} z^{\beta-1+\frac{\alpha}{k}-\frac{\alpha}{N}} (1-z)^{\beta+\frac{\alpha}{k}-\frac{\alpha}{N}} F_2^{(2)}(z) \\ \tilde{F}_1^{(2)}(z) &= k z^{\beta-1+\frac{\alpha}{k}-\frac{\alpha}{N}} (1-z)^{\beta+\frac{\alpha}{k}-\frac{\alpha}{N}} F_2^{(1)}(z) \\ \tilde{F}_2^{(1)}(z) &= \frac{1}{N} z^{\beta+\frac{\alpha}{k}-\frac{\alpha}{N}} (1-z)^{\beta-1+\frac{\alpha}{k}-\frac{\alpha}{N}} F_1^{(2)}(z) \\ \tilde{F}_2^{(2)}(z) &= -k z^{\beta+\frac{\alpha}{k}-\frac{\alpha}{N}} (1-z)^{\beta-1+\frac{\alpha}{k}-\frac{\alpha}{N}} F_1^{(1)}(z). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Temos então a seguinte decomposição das funções de quatro pontos:

$$\mathcal{G}_{A\bar{A},B\bar{B}}(z,\bar{z}) = \sum_{p=1}^2 \hat{a}_p F_A^{(p)}(z) \tilde{F}_B^{(p)}(z) \cdot \sum_{q=1}^2 \hat{a}_q F_{\bar{A}}^{(q)}(\bar{z}) \tilde{F}_{\bar{B}}^{(q)}(\bar{z}). \quad (6.3)$$

Olhando agora apenas para a parte holomórfica da equação acima $\mathcal{G}_{A,B}(z) = \sum_{p=1}^2 \hat{a}_p F_A^{(p)}(z) \tilde{F}_B^{(p)}(z)$, o mesmo valendo para a parte antiholomórfica, é fácil mostrar que para $\hat{a}_2 = \frac{\hat{a}_1}{kN}$ os produtos em que A e B são diferentes, anulam-se. Portanto, não precisamos nos preocupar com o cálculo de $\sum_{p=1}^2 \hat{a}_p F_1^{(p)}(z) \tilde{F}_2^{(p)}(z)$ e $\sum_{p=1}^2 \hat{a}_p F_2^{(p)}(z) \tilde{F}_1^{(p)}(z)$ em (6.3), que são simplesmente zero. Resta, para determinarmos completamente (6.3), encontrar este somatório para A e B iguais. A imposição da relação entre \hat{a}_1 e \hat{a}_2 simplificou bastante o cálculo de (6.1), mas temos ainda que testar que ela também preserva a simetria por crossing. Para isso, vamos reescrever as fórmulas da equação (4.32) com a ajuda de (4.36). Portanto para $F_1^{(1)}(z)$

$$F_1^{(1)}(z) = b_{11} F_2^{(1)}(1-z) + b_{12} F_2^{(2)}(1-z)$$

com as constantes b_{11} e b_{12} sendo

$$b_{11} = k \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)} \quad b_{12} = -\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta)}{N\Gamma(1-\beta-\alpha)\Gamma(1-\beta+\alpha)}. \quad (6.4)$$

O mesmo procedimento para $F_1^{(2)}(z)$

$$F_1^{(2)}(z) = b_{21} F_2^{(1)}(1-z) + b_{22} F_2^{(2)}(1-z)$$

com

$$b_{21} = k \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\beta+\alpha)} \quad b_{22} = -\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1-\beta)}{N\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha+1)}. \quad (6.5)$$

Podemos reescrever essas identidades de modo sintético usando os mesmos valores das constantes de (6.4) e (6.5)

$$F_1^{(p)}(z) = \sum_{r=1}^2 b_{pr} F_2^{(r)}(1-z) \quad \tilde{F}_1^{(p)}(z) = \sum_{r=1}^2 \tilde{b}_{pr} \tilde{F}_2^{(r)}(1-z). \quad (6.6)$$

Substituindo (6.6) na parte holomórfica de (6.3), para a parte antiholomórfica os resultados sendo semelhantes, encontramos uma expressão para $\mathcal{G}_{1,1}(z)$

$$\mathcal{G}_{1,1}(z) = \sum_{q,r=1}^2 \left\{ \hat{a}_1 b_{1r} \tilde{b}_{1q} F_2^{(r)}(1-z) \tilde{F}_2^{(q)}(1-z) + \hat{a}_2 b_{2r} \tilde{b}_{2q} F_2^{(r)}(1-z) \tilde{F}_2^{(q)}(1-z) \right\}. \quad (6.7)$$

Novamente, os termos desse somatório em que r e q são diferentes, cancelam-se mutuamente. Portanto, na equação, (6.7) permanecem apenas os termos em que $r = q = 1$ e $r = q = 2$. Neste momento, substituindo as constantes b_{ij} de (6.4) e (6.5), teremos quatro termos em $\mathcal{G}_{1,1}(z)$ que podem ser agrupados em dois, que explicitamente são

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{1,1}(z) = & kN\hat{a}_1 \left[\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta-1)\Gamma(\beta)\Gamma(-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)} \right. \\ & + \left. \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta-1)\Gamma(2-\beta)\Gamma(-\beta)}{kN\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\beta+\alpha)\Gamma(1-\beta-\alpha)\Gamma(1-\beta+\alpha)} \right] F_2^{(1)}(1-z) \tilde{F}_2^{(1)}(1-z) \\ & + \hat{a}_2 \left[\frac{\Gamma^2(1-\beta)\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(1-\beta-\alpha)\Gamma(1-\beta+\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\beta+\alpha)} \right. \\ & + \left. \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1-\beta)\Gamma(2-\beta)\Gamma(\beta)}{kN\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma^2(-\alpha+1)} \right] F_2^{(2)}(1-z) \tilde{F}_2^{(2)}(1-z). \end{aligned}$$

Nessa equação, com as propriedades $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$ e $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x}$ da função gamma, podemos simplificar os dois termos entre chaves. O primeiro dá $\frac{1}{kN}$ e o segundo, 1. Substituindo estes resultados na equação acima, observamos que ela simplifica para $\hat{a}_1 F_2^{(1)}(1-z) \tilde{F}_2^{(1)}(1-z) + \hat{a}_2 F_2^{(2)}(1-z) \tilde{F}_2^{(2)}(1-z)$ que é exatamente $\mathcal{G}_{2,2}(1-z)$ e portanto, a escolha da relação \hat{a}_2/\hat{a}_1 preserva, também, a simetria por crossing das funções de correlação. Além disso, depois desses cálculos, torna-se razoavelmente fácil mostrar a seguinte identidade ¹

$$z \cdot \sum_{p=1}^2 \hat{a}_p F_1^{(p)}(z) \tilde{F}_1^{(p)}(z) = (1-z) \cdot \sum_{p=1}^2 \hat{a}_p F_2^{(p)}(z) \tilde{F}_2^{(p)}(z).$$

¹Para a demonstração, basta expandir o somatório e substituir $\tilde{F}_i^{(p)}(z)$ por seu equivalente de (6.2) usando a razão entre \hat{a}_1 e \hat{a}_2 .

Desenvolvendo o lado esquerdo dessa igualdade em termos das hipergeométricas

$$z \cdot \sum_{p=1}^2 \hat{a}_p F_1^{(p)}(z) \tilde{F}_1^{(p)}(z) = \hat{a}_1 (z(1-z))^{\frac{1}{kN}} \{F(\alpha, -\alpha; 1-\beta; z) F(\alpha, -\alpha; \beta; z) + \frac{z(1-z)}{kN} F(\alpha+1, 1-\alpha; 2-\beta; z) F(\alpha+1, 1-\alpha; \beta+1; z)\} \quad (6.8)$$

temos a soma de produtos de hipergeométricas. O termo entre chaves, dá simplesmente um, e assim, verificamos a validade da simetria nível-rank para as funções de quatro pontos de $\widehat{su}(N)_k + \widehat{su}(k)_N$. A maneira que utilizamos para fazer esse cálculo foi expandir as hipergeométricas em série de acordo com (3.20), multiplicá-las e somá-las conforme (6.8), usando o Maple VI. Fizemos a expansão até o quadragésimo termo que foi o que conseguimos realizar sem esgotar a memória do computador. Esse cálculo pode também ser feito analiticamente por meio das propriedades de funções hipergeométricas generalizadas e pode-se encontrar a prova em [3]. Neste artigo, Fuchs demonstra que a álgebra $\widehat{su}(N)_k + \widehat{su}(k)_N$ associada ao grupo unitário $U(1)$ pode ser usada para descrever modelos de férmions livres. No entanto, neste nosso trabalho, esse mesmo procedimento é usado (ver [3]) para demonstrar a validade da dualidade 'nível-rank' para funções de quatro pontos como acabamos de apresentar.

6.3 Decomposição de $\widehat{su}(2)_2$

Incentivados pelos resultados da simetria nível-rank, iremos agora aplicá-la a um caso simples mas muito educativo. Da relação dos cosets para modelos minimais, trocando k por N (usaremos o símbolo \times em vez de $+$ que apareceu nas relações anteriores dessa simetria para a carga central e a dimensão conforme, porque agora, a identidade que vamos obter será para as funções de correlação dos campos)

$$\widehat{su}(2)_N \times \widehat{su}(2)_1 = \text{vir}(N+3, N+2) \times \widehat{su}(2)_{N+1} \quad (6.9)$$

e usando nível-rank (simbolicamente)

$$\widehat{su}(2)_N \times \widehat{su}(N)_2 = \widehat{su}(2N)_1$$

$$\widehat{su}(2)_{N+1} \times \widehat{su}(N+1)_2 = \widehat{su}(2(N+1))_1.$$

Substituindo na expressão (5.2) dos coset's

$$\frac{\widehat{su}(2N)_1}{\widehat{su}(N)_2} \times \widehat{su}(2)_1 = \text{vir}(N+3, N+2) \times \frac{\widehat{su}(2(N+1))_1}{\widehat{su}(N+1)_2}.$$

Isolando o termo $su(N+1)_2$

$$\widehat{su}(N+1)_2 = \text{vir}(N+3, N+2) \times \widehat{su}(N)_2 \times \frac{\widehat{su}(2(N+1))_1}{\widehat{su}(2N)_1 \times \widehat{su}(2)_1}.$$

Para simplificar esta última expressão, vamos encontrar a carga central do termo

$$\begin{aligned} c\left(\frac{\widehat{su}(2(N+1))_1}{\widehat{su}(2N)_1 \times \widehat{su}(2)_1}\right) &= c(\widehat{su}(2(N+1))_1) - c(\widehat{su}(2N)_1) - c(\widehat{su}(2)_1) \\ &= \frac{[2(N+1)]^2 - 1}{2(N+1) + 1} - \frac{(2N)^2 - 1}{2N + 1} - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

que é a carga central de $U(1)$ e portanto, simplificamos a expressão de $\widehat{su}(N+1)_2$ em função de $\text{vir}(N+3, N+2)$ para (escrevendo simbolicamente)

$$\widehat{su}(N+1)_2 = \text{vir}(N+3, N+2) \times \widehat{su}(N)_2 \times U(1)$$

Este resultado é muito educativo quando $N = 1$

$$\widehat{su}(2)_2 = \text{vir}(4, 3) \times U(1)$$

Para lembrarmos, a função de quatro pontos para o modelo de Ising $\text{vir}(4, 3)$ quando todos os campos envolvidos possuem a mesma dimensão, é

$$\begin{aligned} \langle \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \phi_3(z_3) \phi_4(z_4) \rangle &= \prod_{1 \leq i < j \leq 4} z_{ij}^{\mu_{ij}} G(z) \\ &= (z_{14} z_{32})^{-2h(\text{vir}(4,3))} z^{2\beta_1} (1-z)^{2\beta_2} K(z) \end{aligned}$$

onde $K(z)$ assume os valores de $K_1^{(2)}(z)$, $K_2^{(2)}(z)$, $K_1^{(1)}(z)$ e $K_2^{(1)}(z)$ da secção (2.3). Já para $\widehat{su}(2)_2$ especificando as soluções em (4.32), a função de quatro pontos para os dois canais, e apresentando as soluções (1) e (2) separadamente, é

$$\begin{aligned} \langle g(z_1)g^{-1}(z_2)g^{-1}(z_3)g(z_4) \rangle &= (z_{14}z_{32})^{-2h(\widehat{su}(N)_k)} [I_1 F_1^{(1)}(z) + I_2 F_2^{(1)}(z)] \\ &= (z_{14}z_{32})^{-\frac{3}{8}} \left[I_1 z^{-\frac{3}{8}} (1-z)^{\frac{1}{8}} F\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; z\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_2}{2} z^{\frac{5}{8}} (1-z)^{\frac{1}{8}} F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; z\right) \right] \end{aligned}$$

Se multiplicarmos esta última equação por I_1 , encontramos

$$I_1 \langle g(z_1)g^{-1}(z_2)g^{-1}(z_3)g(z_4) \rangle = (z_{14}z_{32})^{-\frac{3}{8}} z^{-\frac{3}{8}} (1-z)^{\frac{1}{8}} F\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; z\right)$$

Vamos calcular agora o outro lado da fórmula que queremos provar quando $h(vir(4,3)) = 1/16$, $\beta_1 = \beta_2 = -1/16$ e $K(z) = K_1^{(1)}(z)$ do capítulo sobre equações diferenciais para modelos minimais, secção (3.3). Então, a função de quatro pontos do produto das álgebras $vir(4,3) \times U(1)$ (a parte $U(1)$ sendo tratada como na secção (5.3)) é

$$\begin{aligned} &\langle \phi_{(1,2)}(z_1)\phi_{(1,2)}(z_2)\phi_{(1,2)}(z_3)\phi_{(1,2)}(z_4) \rangle \langle : e^{-ip\varphi_1(z_1)} :: e^{ip\varphi_2(z_2)} :: e^{-ip\varphi_3(z_3)} :: e^{ip\varphi_4(z_4)} : \rangle \\ &= (z_{14}z_{32})^{-\frac{1}{8}} z^{-\frac{1}{8}} (1-z)^{-\frac{1}{8}} F\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; z\right) \left(\frac{z_{13}z_{24}}{z_{12}z_{14}z_{23}z_{34}} \right)^{p^2} \\ &= \left(\frac{z_{13}z_{24}}{z_{12}z_{14}z_{23}z_{34}} \right)^{p^2} \left(\frac{z_{12}z_{14}z_{23}z_{34}}{z_{13}z_{24}} \right)^{\frac{1}{4}} (z_{14}z_{32})^{-\frac{3}{8}} F_1^{(1)}(z) \end{aligned}$$

onde φ_i são bósons com a função de dois pontos dada pela parte holomórfica de (2.30). Para $p^2 = 1/4$ reproduzimos o resultado de $\widehat{su}(2)_2$ e assim podemos determinar a função de quatro pontos do Ising através da de $\widehat{su}(2)_2$. Procedendo de maneira semelhante a esta última, vamos determinar a mesma relação agora para as soluções (2).

$$\begin{aligned} \langle g(z_1)g^{-1}(z_2)g^{-1}(z_3)g(z_4) \rangle &= (z_{14}z_{32})^{-2h(\widehat{su}(N)_k)} [I_1 F_1^{(2)}(z) + I_2 F_2^{(2)}(z)] \\ &= (z_{14}z_{32})^{-\frac{3}{8}} \left[I_1 z^{\frac{1}{8}} (1-z)^{\frac{5}{8}} F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; z\right) \right. \\ &\quad \left. - 2I_2 z^{\frac{1}{8}} (1-z)^{-\frac{3}{8}} F\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; z\right) \right] \end{aligned}$$

Multiplicando esta última equação por I_1 , encontramos

$$\begin{aligned} & \text{vir}(4, 3) \times U(1) \\ &= \left(\frac{z_{13}z_{24}}{z_{12}z_{14}z_{23}z_{34}} \right)^{p^2} \left(\frac{z_{12}z_{14}z_{23}z_{34}}{z_{13}z_{24}} \right)^{\frac{1}{4}} (z_{14}z_{32})^{-\frac{3}{8}} F_1^{(2)}(z) \end{aligned}$$

E novamente, sob as mesmas condições de p^2 verificamos a validade da identidade entre $\widehat{su}(2)_2$ e $\text{vir}(4, 3) \times U(1)$. Se fizermos para o segundo canal, vamos também observar a decomposição de $\widehat{su}(2)_2$ em Virasoro e $U(1)$, mas a função de quatro pontos de $U(1)$ tem que ser trocada por

$$\langle : e^{-ip\varphi_1(z_1)} :: e^{-ip\varphi_2(z_2)} :: e^{ip\varphi_3(z_3)} :: e^{ip\varphi_4(z_4)} : \rangle = \left(\frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{14}z_{23}z_{24}} \right)^{p^2}$$

sendo que o valor de p^2 permanece o mesmo. De todo modo, conseguimos reproduzir apenas a função de quatro pontos do campo $\phi_{(1,2)}(z)$. Para a função de quatro pontos do outro campo do modelo de Ising, $\phi_{(2,1)}$, precisamos da representação



de $su(N)$. Esse campo é muito importante na descrição desse modelo já que, por exemplo, a hamiltoniana é expressa em função dele. Por esse e outros motivos é que queremos expandir a prova da simetria nível-rank para as representações



de $su(N)$.

Capítulo 7

Conclusão

Neste trabalho foi analisada as consequências de algumas simetrias aplicadas à teoria quântica de campos. A principal entre elas é a simetria conforme e esta faz com que a sua respectiva teoria de campos em duas dimensões seja invariante por um número infinito de transformações desse tipo sendo que os geradores dessas transformações satisfazem as regras de comutação da álgebra de Virasoro. As teorias de campos associadas às representações irredutíveis e unitárias dessa álgebra são as menores entre essas teorias, chamadas também modelos minimais, e descrevem notavelmente modelos da Física Estatística com pontos críticos. E mais, sob estas condições, as identidades de Ward assumem uma forma simplificada e as funções de correlação podem ser obtidas através de equações diferenciais parciais, e concretamente, para a de quatro pontos, encontramos suas expressões para o modelo minimal $vir(4, 3)$ equivalente ao modelo de Ising.

Esses modelos também são descritos por quocientes de álgebras de Kac-Moody de $\widehat{su}(2)_k$ e mostramos essa correspondência para a carga central e as dimensões conformes dos campos primários da teoria. Além disso, a teoria de campos com simetria da álgebra $\widehat{su}(N)_1$ reproduz o modelo de férmions livres complexos e observamos este fato, comparando as funções de quatro pontos desses férmions com as provenientes dos produtos das álgebras $\widehat{su}(N)_1 \times U(1)$ e isso é um exemplo, apesar de não o termos explorado neste trabalho, de bosonização de sistemas fermiônicos. Este resultado só é possível porque

os blocos conformes das soluções da equação de Knizhnik-Zamolodchikov para $\widehat{su}(N)_k$, quando $k = 1$, desacoplam totalmente, permanecendo apenas aquelas que sob estas condições, tornam-se funções algébricas simples das coordenadas complexas z_i dos campos primários.

Nossos últimos cálculos foram relacionados à dualidade 'nível-rank' das álgebras de Kac-Moody. Observamos o comportamento curioso da carga central de $\widehat{sp}(2N)_k$ e construímos várias tabelas para as dimensões conformes das diferentes representações de $\widehat{su}(N)_k$ diante dessa simetria. Calculamos ainda a função de quatro pontos para $\widehat{su}(N)_k + \widehat{su}(k)_N$ e obtemos o resultado desejado $\widehat{su}(kN)_1$, que possui as mesmas propriedades citadas no parágrafo anterior das soluções da equação de Knizhnik-Zamolodchikov para $k = 1$. Concluímos nosso trabalho, aplicando a dualidade 'nível-rank' aos quocientes dos modelos minimais e observamos que para sua expressão mais simples, decomparamos o modelo de Ising, $vir(4, 3)$, em $\widehat{su}(2)_2/U(1)$ e a fórmula de onde essa expressão derivou, diz-nos ainda que, enquanto nos quocientes dos modelos minimais, as álgebras de Kac-Moody possuem todas o mesmo rank, aqui, todas possuem o mesmo nível.

Sem dúvida alguma, a parte mais interessante do nosso trabalho por ser também a menos conhecida é a relacionada ao parágrafo acima, a simetria 'nível-rank'. Após verificarmos a sua validade para os casos mais simples: carga central e a dimensão conforme, passamos ao cálculo da função de quatro pontos para $\widehat{su}(N)_k + \widehat{su}(k)_N$. O resultado, que obtivemos expandindo o produto de hipergeométricas no maple VI até uma ordem considerável, foi de fato o esperado, levando a uma expressão algébrica simples para a função de quatro pontos. Além disso, combinando essa simetria com os modelos minimais na forma de quocientes das álgebras de Kac-Moody, a identidade que surge daí, na sua versão mais simples, permite-nos relacionar diretamente, o modelo minimal $vir(4, 3)$ com $\widehat{su}(2)_2$ através do grupo unitário $U(1)$: $\widehat{su}(2)_2 = vir(4, 3) \times U(1)$.

Como perspectiva, um cálculo inédito que podemos fazer explorando um pouco mais a

dualidade 'nível-rank' é mostrar a validade dessa simetria também para as representações



de $su(N)$. Vale lembrar que, no caso da Mecânica Estatística, as representações não elementares aparecem naturalmente. Por esta razão, embora este cálculo seja razoavelmente difícil, estamos motivados a realizá-lo num futuro próximo.

Apêndice A

Campos Nulos nas Representações da Álgebra de Kac-Moody

A identidade (4.7) que introduzimos para o cálculo da expansão do produto dos operadores $T(z)T(w)$ na construção de Sugawara iremos prová-la agora. Antes de qualquer coisa, o termo $if_{abc} : J^a(z)J^c(w) :$ pode ser escrito como $\frac{i}{2}f_{abc}\{ : J^a(z)J^c(w) : - : J^c(w)J^a(z) : \}$. Em seguida, expressando o produto de Wick em função de $J_{in}^a(z)$ e $J_{out}^a(z)$, chegamos à identidade

$$if_{abc} : J^a(z)J^c(w) := \frac{i}{2}f_{abc}\{[J_{out}^a(z), J_{out}^c(w)] - [J_{in}^a(z), J_{in}^c(w)]\}. \quad (A.1)$$

A partir da relação da álgebra de Kac-Moody encontramos os comutadores da expressão acima. Iniciamos, os cálculos, multiplicando a álgebra por $\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{1}{w^{m+1}}$

$$[J_n^a, J_{out}^b(w)] = if_{abc} \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{J_{n+m}^c}{w^{m+1}} + k\delta_{ab} \sum_{m=-\infty}^{-1} n \frac{\delta_{n+m,0}}{w^{m+1}} \quad (A.2)$$

Como n e m vão de -1 a menos infinito então, necessariamente, $\delta_{n+m,0} = 0$, que faz desaparecer o segundo termos do comutador acima. Multiplicando este último resultado

por $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{z^{n+1}}$

$$\begin{aligned}
[J_{out}^a(z), J_{out}^c(w)] &= if_{acd} \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{J_{n+m}^d}{z^{n+1} w^{m+1}} = \frac{if_{acd}}{zw} \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{J_{n+m}^d}{z^n w^m} \\
&= \frac{if_{acd}}{zw} \{zw J_{-2}^d + (z^2 w + zw^2) J_{-3}^d \\
&\quad + (z^3 w + z^2 w^2 + zw^3) J_{-4}^d + \dots\} \\
&= \frac{if_{acd}}{zw} \sum_{s=-\infty}^{-2} \sum_{q=s+1}^{-1} \frac{J_s^d}{w^q z^{s-q}} \\
&= \frac{if_{acd}}{zw} \sum_{s=-\infty}^{-2} \frac{1}{z^s} \sum_{q=s+1}^{-1} \left(\frac{z}{w}\right)^q J_s^d = \frac{if_{acd}}{zw} \sum_{s=-\infty}^{-2} \frac{1}{z^s} \sum_{q=1}^{-s-1} \left(\frac{w}{z}\right)^q J_s^d \\
&= \frac{if_{acd}}{zw} \sum_{s=-\infty}^{-2} \frac{1}{z^s} \left(\frac{\frac{w}{z} - \left(\frac{w}{z}\right)^{-s}}{1 - \frac{w}{z}}\right) J_s^d
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que

$$\sum_{q=r}^s x^q = \frac{x^r - x^{s+1}}{1-x}. \quad (\text{A.3})$$

Voltando ao cálculo do comutador $[J_{out}^a(z), J_{out}^b(w)]$

$$\begin{aligned}
[J_{out}^a(z), J_{out}^c(w)] &= \frac{if_{acd}}{zw} \sum_{s=-\infty}^{-2} \frac{\frac{w}{z^{s+1}} - \frac{1}{w^s}}{\frac{z-w}{z}} J_s^d \\
&= \frac{if_{acd}}{(z-w)} \sum_{s=-\infty}^{-2} \left(\frac{J_s^d}{z^{s+1}} - \frac{J_s^d}{w^{s+1}}\right)
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo J_{-1}^c

$$\begin{aligned}
[J_{out}^a(z), J_{out}^c(w)] &= \frac{if_{acd}}{(z-w)} \left\{ J_{-1}^d - J_{-1}^d + \sum_{s=-\infty}^{-2} \left(\frac{J_s^d}{z^{s+1}} - \frac{J_s^d}{w^{s+1}}\right) \right\} \\
&= \frac{if_{acd}}{(z-w)} \left\{ \sum_{s=-\infty}^{-1} \frac{J_s^d}{z^{s+1}} - \sum_{s=-\infty}^{-1} \frac{J_s^d}{w^{s+1}} \right\} \\
&= \frac{if_{acd}}{(z-w)} (J_{out}^d(z) - J_{out}^d(w)) \\
&= if_{acd} \partial_w J_{out}^d(w).
\end{aligned}$$

Seguindo este mesmo procedimento, encontramos uma relação semelhante para o outro comutador

$$[J_{in}^a(z), J_{in}^c(w)] = -if_{acd}\partial_w J_{in}^d(w)$$

e portanto, retornando ao termo $if_{abc} : J^a(z)J^c(w) :$, lembrando que $f_{abc}f_{acd} = -2g\delta_{bd}$, encontramos, a partir de (A.1)

$$\begin{aligned} if_{abc} : J^a(z)J^c(w) : &= \frac{if_{abc}}{2} \{if_{acd}\partial_w J_{out}^d(w) + if_{acd}\partial_w J_{in}^d(w)\} \\ &= -\frac{1}{2}f_{abc}f_{acd}\partial_w J^d(w) \\ &= g\delta_{bd}\partial_w J^d(w) \end{aligned}$$

que é a identidade (4.7) como queríamos demonstrar. Outra demonstração pendente foi a (4.13) que equivale à condição de campos nulos com simetria da álgebra de Kac-Moody. Vimos que um campo primário nestas condições segue às expansões de produtos de operadores (4.11) e (4.12). Como decorrência da construção de Sugawara, o tensor energia momento pode ser expresso por $T(z) = \frac{1}{2(k+g)} : J^a(z)J^a(z) :$. Portanto, a expansão do produto de operadores de $T(z)$ com $\phi(w)$ é

$$\begin{aligned} T(z)\phi(w) &= \frac{1}{2(k+g)} : J^a(z)J^a(z)' : \phi(w) \\ &= \frac{1}{2(k+g)} \{J_{out}^a(z)J^a(z)\phi(w) + J_{in}^a(z)J^a(z)\phi(w)\}. \end{aligned}$$

Usando a definição do produto de Wick e as equações (4.10) e (4.11), chegamos ao resultado para a OPE acima

$$T(z)\phi(w) = \frac{t^a t^a}{2(k+g)} \frac{\phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{t^a}{(k+g)} \frac{: J^a(z)\phi(w) :}{(z-w)} + : T(z)\phi(w) : \quad (A.4)$$

Comparando esta última equação com a (4.12), somos levados a impôr as seguintes condições

$$\partial_w \phi(w) = \frac{t^a}{(k+g)} : J^a(z)\phi(w) : \quad e \quad h(g(N)_k) = \frac{t^a t^a}{2(k+g)} \quad (A.5)$$

e com isso, a OPE (A.4) reduz-se à fórmula esperada de (4.12).

Bibliografia

- [1] S. V. Ketov, *Conformal Field Theory*, World Scientific, New York, 1995.
- [2] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B241 (1984) 333.
- [3] J. Fuchs, Z. Physik C35 (1987) 89.
- [4] V. S. Dotsenko, V. A. Fateev, Nucl. Phys. B240 (1984) 312.
- [5] C. Gomés, M. Ruiz-Altaba, G. Sierra, *Quantum Groups in Two-Dimensional Physics* (Cambridge University Press, 1996).
- [6] J. Fuchs, Nucl. Phys. B290 (1987) 392.
- [7] V. G. Knizhnik, A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B247 (1984) 83.
- [8] B. Wybourne, *Classical Groups for Physicists* (New York Wiley-Interscience, 1974).
- [9] P. Di Francesco, D. Sénéchal, P. Mathieu, *Conformal Field Theory* (Springer-Verlag New York, 1997).
- [10] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker, Commun. Math. Phys. 107 (1986) 535-542.
- [11] P. Goddard, A. Kent, D. Olive, Commun. Math. Phys. 103 (1986) 105-119.