Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Pseudo-tensor de momento e energia em teoria de perturbação de buracos negros

Ivan Yasuda

Orientador: Prof. Dr. Luís Raul Weber Abramo

Trabalho apresentado ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luís Raul Weber Abramo (IF-USP)

Prof. Dr. Élcio Abdalla (IF-USP)

Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas (IFT-UNESP)

São Paulo

2006

Resumo

Estudamos a possibilidade de efetuar cálculos de observáveis físicos no calibre de Regge-Wheeler. Apesar das perturbações da métrica de Schwarzschild serem divergentes nesse calibre tanto no infinito nulo $\mathcal{I}^+$ como no horizonte de eventos, veremos que o fluxo de energia, representado pela componente $0-1$ do tensor de momento e energia efetivo, é finito nesses limites e idêntico aos resultados obtidos em calibres de radiação, ilustrando a irrelevância da escolha do calibre para o cálculo de quantidades físicas. Expressando a variação de massa do buraco negro perturbado como uma perturbação de segunda ordem esfericamente simétrica, obtemos a contribuição de monopolo para a energia irradiada por ondas gravitacionais

Abstract

We study the possibility of performing calculations of physical observables in the Regge-Wheeler gauge. Although the Schwarzschild's metric perturbations written in that gauge are divergent both at $\mathcal{I}^+$ null infinity and on the horizon, we will see that the $0-1$ component of the effective energy momentum tensor, which represents an energy flux, is finite in those regions. Moreover, these results are identical to those obtained in radiation gauges, illustrating the fact that the gauge choice for the perturbations is irrelevant for calculations of physical quantities. We also obtain the so called monopole contribution to the energy carried by gravity waves by expressing the mass variation of the perturbed black hole as a spherically symmetric second order perturbation.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Luís Raul Weber Abramo pela orientação paciente, objetiva e clarividente.

Ao João Luís Assirati, ao Carlos Molina e ao Thiago Pereira pela leitura e esclarecimentos ao longo da redação.

Aos meus colegas e amigos que ainda contribuem para a minha formação.

Aos meus pais, Noboru Yasuda e Maria Yasuda, que me demonstraram há muito tempo que o pensamento criterioso e independente só pode ser conseqüência de um estudo sério e dedicado; aos meus irmãos Alexandre e Camila e à Bárbara Machado, cujos talentos sempre me motivam.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A existência de ondas gravitacionais é uma conseqüência natural da Teoria da Relatividade Geral. De fato, visto que a velocidade de propagação das interações é finita, ela deve admitir, por analogia com o Eletromagnetismo, a existência de um campo gravitacional livre não ligado à presença de um corpo [1]. Por outro lado, suas equações fundamentais são não-lineares, o que indica que esses campos afetam sua própria propagação e contribuem para a curvatura do espaço. Em outras palavras, ondas gravitacionais também podem ser caracterizadas por um *tensor de momento e energia efetivo,* ou *pseudo-tensor de momento e energia* [1, 2].

O cálculo do pseudo-tensor remete ao problema da escolha do sistema de coordenadas. Visto que as equações linearizadas são invariantes por transformações de calibre, temos a liberdade de optar por algum sistema de coordenadas onde as equações de campo assumem sua forma mais simples. Em espaços-tempos assintoticamente planos, uma escolha possível é o *calibre de radiação*, onde as componentes radiativas da métrica são dadas por suas partes transversais e são proporcionais a $1/r$ [3, 4, 5, 6]. Para espaços-tempos esfericamente simétricos, uma escolha conveniente é o chamado *calibre de Regge-Wheeler* [7].

Conforme demonstraram T. Regge e J. A. Wheeler em 1957 [7], perturbações arbitrárias de um espaço-tempo esfericamente simétrico podem ser decompostas como uma soma de harmônicos esféricos escalares, vetoriais e tensoriais. O calibre de Regge-Wheeler, além de simplificar tremendamente a estrutura tensorial das equações, determina de maneira unívoca o sistema de coordenadas [4, 5] - o que significa que toda perturbação da métrica definida em um calibre arbitrário pode ser expressa univocamente no calibre de Regge-Wheeler. É por sua simplicidade que o calibre de Regge-Wheeler tem sido usado também em teoria de perturbação "de ordens superiores [4, 5, 8]. Por outro lado, as perturbações de Regge-Wheeler são divergentes tanto no horizonte de eventos como no infinito nulo $\mathcal{I}^+$ [9], indicando, à primeira vista, que esse calibre, a despeito de sua simplicidade, é inadequado para o cálculo de quantidades físicas naquelas regiões, além de comprometer sua extensão para ordens mais altas em teoria de perturbação.

Um objeto de interesse é o fluxo de energia, representado pela componente $0-1$ do pseudo-tensor em coordenadas esféricas. Em geral, o pseudo-tensor não é um objeto independente de calibre. Somente em um limite especial, chamado de *limite de altas freqüências*, é que podemos atribuir-lhe um significado invariante [2]. No entanto, como a variação de massa de um buraco negro também depende da emissão e/ou absorção de ondas gravitacionais, deveríamos poder extrair observáveis físicos invariantes desse fluxo em qualquer regime.

É um dos propósitos desta dissertação verificar que, independentemente de seu comportamento assintótico e sem aplicar o limite de altas freqüências, as perturbações da métrica expressas no calibre de Regge-Wheeler levam a resultados para o fluxo de energia que são finitos tanto em $\mathcal{I}^+$ [10, 11] como no horizonte de eventos, além de serem idênticos aos resultados conhecidos na literatura [3, 4, 5, 6, 12], ilustrando a irrelevância da escolha de calibre para as perturbações de primeira ordem no cálculo de quantidades físicas e dando fundamentos para o seu uso em teoria de perturbação de ordens superiores.

Notação e sistema de unidades [1]

Vetores cartesianos são escritos em negrito.

Índices latinos $i, j, k, l, ...$ assumem os três valores $1, 2, 3$ das coordenadas espaciais.

Índices gregos $\alpha, \beta, \gamma, \delta, ...$ assumem os quatro valores $0, 1, 2, 3$ das coordenadas do espaço-tempo, $(t, \mathbf{x})$

O tensor métrico de Minkowski é $\eta_{\alpha\beta} = diag(-1, 1, 1, 1)$.

Índices repetidos são somados.

A velocidade da luz é $c = 1$.

[1] As mesmas usadas em [13]

Capítulo 2

Espaço-tempo de Schwarzschild

Testes clássicos da Teoria da Relatividade Geral como o deslocamento para o vermelho gravitacional, o desvio da luz pelo Sol e a precessão do perihélio de Mercúrio são realizados no vácuo e sob a ação de um campo gravitacional aproximadamente estático e isotrópico. Por estático e isotrópico, entendemos que seja possível definir um sistema de coordenadas *quase-minkowskiano* x^1 , x^2 , x^3 , $x^0 \equiv t$ tal que o invariante de tempo próprio $d\tau^2 \equiv -g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ é independente de t com a dependência espacial dada pelos invariantes de rotação $d\mathbf{x}^2$, $\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}^2$ [13].

Uma solução exata das equações de Einstein no vácuo com tais simetrias (conservação da energia e conservação do momento angular de uma partícula que obedece à equação da geodésica) foi encontrada em 1916 por K. Schwarzschild.

2.1 Solução de Schwarzschild

A forma geral de um intervalo de tempo próprio estático e isotrópico é [13]:

$$d\tau^2 = F(r)dt^2 - 2E(r)dt\,\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} - D(r)(\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x})^2 - C(r)d\mathbf{x}^2 \ , \tag{2.1}$$

onde F, E, D e C são funções desconhecidas de $r \equiv (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{1/2}$ a serem determinadas pelas equações de campo. Em coordenadas esféricas, (2.1) escreve-se como:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= F(r)dt^2 - 2rE(r)dtdr - r^2D(r)dr^2 \\ &\quad -C(r)\left(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2\right) \ . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Termos cruzados em (2.2) podem ser eliminados redefinindo a coordenada t como:

$$\begin{aligned} t' &\equiv t + \Phi(r) \ , \\ \frac{d\Phi(r)}{dr} &= -\frac{rE(r)}{F(r)} \ , \end{aligned}$$

de tal modo que

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= F(r)dt'^2 - G(r)dr^2 - C(r)\left(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2\right) \ , \\ G(r) &\equiv r^2\left(D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)}\right) \ . \end{aligned} \tag{2.3}$$

Com a redefinição

$$r'^2 \equiv C(r) r^2 \quad ,$$

o intervalo de tempo próprio assume sua chamada *forma padrão*:

$$\begin{aligned}
d\tau^2 &= B(r')dt'^2 - A(r')dr'^2 - r'^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \quad , \\
B(r') &\equiv F(r) \quad , \\
A(r') &\equiv \left(1 + \frac{G(r)}{C(r)}\right)\left(1 + \frac{r}{2C(r)}\frac{dC(r)}{dr}\right)^{-2} \quad .
\end{aligned} \tag{2.4}$$

As conexões afins não-nulas de (2.4) são:

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2A(r)}\frac{dA(r)}{dr} &\qquad \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{A(r)} \\
\Gamma^1_{33} = -\frac{r\sin^2\theta}{A(r)} &\qquad \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2A(r)}\frac{dB(r)}{dr} \\
\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} &\qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} &\qquad \Gamma^3_{32} = \cot\theta \\
\Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2B(r)}\frac{dB(r)}{dr} \quad ,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

onde as linhas em t e r foram suprimidas. Substituindo as conexões acima na fórmula do tensor de Ricci, dada por

$$R_{\mu\kappa} = \Gamma^\lambda_{\mu\lambda\,,\,\kappa} - \Gamma^\lambda_{\mu\kappa\,,\,\lambda} + \Gamma^\eta_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa}\Gamma^\lambda_{\lambda\eta} \quad , \tag{2.6}$$

obtemos:

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4}\left(\frac{B'(r)}{B(r)}\right)\left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{A'(r)}{A(r)}\right) \\
R_{22} &= -1 + \frac{r}{2A(r)}\left(-\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) + \frac{1}{A(r)} \\
R_{33} &= \sin^2\theta R_{22} \\
R_{00} &= -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{1}{4}\left(\frac{B'(r)}{A(r)}\right)\left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{B'(r)}{A(r)}\right) \\
R_{\mu\nu} &= 0 \quad para \quad \mu \neq \nu
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

onde a linha denota derivada com relação a r .

As funções $A(r)$ e $B(r)$ são determinadas substituindo (2.7) nas equações de Einstein. No vácuo, essas equações escrevem-se como:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{2.8}$$

De (2.7), temos:

$$\frac{R_{11}}{A} + \frac{R_{00}}{B} = -\frac{1}{rA}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) \quad .$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
\frac{B'}{B} &= -\frac{A'}{A} \\
A(r)B(r) &= constante \quad .
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Como o tensor métrico deve se aproximar do tensor métrico de Minkowski em coordenadas esféricas no limite $r \to \infty$, então

$$\lim_{r\to\infty} A(r) = \lim_{r\to\infty} B(r) = 1 \ . \tag{2.10}$$

Segue de (2.9) e (2.10) que

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} \ . \tag{2.11}$$

Substituindo (2.11) em $R_{22} = 0$ obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}[rB(r)] &= rB'(r) + B(r) = 1 \\ rB(r) &= r + b \ , \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde b é uma constante a ser determinada pela correspondência com a gravitação newtoniana. Nesse limite, os campos são fracos e independentes do tempo, de tal modo que a geodésica de uma partícula que se move a uma velocidade suficientemente pequena é dada por [13]

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \ .$$

Como os campos são fracos, podemos descrever o tensor métrico como sendo quase-minkowskiano:

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \ , \\ |h_{\mu\nu}| &\ll 1\end{aligned}$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski definida por $\eta_{\mu\nu} = diag(-1,1,1,1)$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}_{00} &= \frac{1}{2}\gamma^{\mu\lambda}\left(\gamma_{\lambda 0\,,\,0} + \gamma_{\lambda 0\,,\,0} - \gamma_{00\,,\,\lambda}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda} + O(h^2)\right) h_{00\,,\,\lambda} \\ &= -\frac{1}{2}\eta^{\mu j} h_{00\,,\,j} \ ,\end{aligned}$$

pois os campos também são estáticos. Substituindo as conexões acima nas equações de movimento obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 t}{d\tau^2} &= 0 \ , \\ \frac{dt}{d\tau} &= \text{constante} \\ & e \\ \frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \nabla h_{00} \ .\end{aligned}$$

Dividindo a equação para $d^2\mathbf{x}/d\tau^2$ pela constante $(dt/d\tau)^2$ encontramos

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{1}{2}\nabla h_{00}$$

que, quando comparada com a equação de movimento newtoniana, resulta em

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla h_{00} &= -\nabla\Phi \\ h_{00} &= -2\Phi \ , \end{aligned}$$

onde $\Phi = -GM/r$. Portanto,

$$\gamma_{00} = -1 - 2\Phi \ . \tag{2.13}$$

Em regiões distantes da fonte, a métrica (2.4) escrita em coordenadas cartesianas é dada por:

$$d\tau^2 = Bdt^2 - \frac{1}{B}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \ . \tag{2.14}$$

Comparando (2.13) com (2.14), concluímos que a constante b em (2.12) é igual a $-2GM$, de tal modo que

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2 \ , \tag{2.15}$$

conhecida como *Solução de Schwarzschild*.

2.2 Singularidades

Escrita em *coordenadas padrão*, o tempo próprio (2.15) é singular em $r = 2GM$, no *raio de Schwarzschild*. Entretanto, visto que (2.15) é solução das equações de Einstein no vácuo, tal singularidade torna-se irrelevante se $2GM$ estiver no interior do corpo massivo. Para o Sol, $2GM_\odot = 2,95\ km$, bem no interior solar, e para um próton, o raio de Schwarzschild é da ordem de 10^{-50} cm, bem abaixo de seu raio típico, que é da ordem de 10^{-13} cm [13].

No entanto, é uma previsão da Teoria da Relatividade Geral que corpos suficientemente massivos e não-rotativos podem sofrer colapsos gravitacionais esféricos para um raio inferior a $2GM$ [14, 15]. Nesses casos, é possível verificar que a singularidade em $r = 2GM$ nada mais é que uma peculiaridade da métrica de Schwarzschild escrita em coordenadas padrão, pois todos os invariantes de curvatura não-nulos, dados por

$$\begin{aligned} C^{\lambda\mu\nu\kappa}C_{\lambda\mu\nu\kappa} &= \frac{48G^2M^2}{r^6} \\ C_{\lambda\mu\nu\kappa}C^{\nu\kappa\rho\sigma}C_{\rho\sigma}{}^{\lambda\mu} &= -\frac{96G^3M^3}{r^9} \end{aligned}$$

onde $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ é o tensor de Weyl [13], são regulares nessa região. Em outras palavras, a singularidade em $r = 2GM$ é aparente e pode ser removida por uma mudança adequada do sistema de coordenadas, ao contrário do que ocorre em $r = 0$, região em que os invariantes de curvatura são singulares.

Uma das possíveis escolhas de sistema de coordenadas é o sistema de coordenadas de Eddington-Finkelstein [9]. Com a transformação

$$t' = t + 2GM \ln(r - 2GM) \quad , \tag{2.16}$$

(2.15) escreve-se como:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt'^2 - \frac{4GM}{r} dt' dr - \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \quad ,$$

que é regular no intervalo $0 < r < \infty$. Note que $t = -2GM \ln(r - 2GM) +$ constante é o tempo de queda livre de uma partícula com velocidade inicial zero medido por um observador em $r \to \infty$. Em termos da coordenada nula $v \equiv t' + r$, também chamada de *tempo avançado,* o tempo próprio é dado por

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv^2 + 2dvdr - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \quad . \tag{2.17}$$

Ao contrário de (2.15), (2.17) não é simétrico por reversão temporal. Uma solução desse tipo pode ser obtida com a introdução de uma coordenada $t'' = t - 2GM \ln(r - 2GM)$. Em termos do *tempo retardado* $u \equiv t'' - r$, $d\tau^2$ assume a seguinte forma:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) du^2 - 2dudr - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \quad , \tag{2.18}$$

que também é regular em $0 < r < \infty$.

Em um diagrama bidimensional do espaço-tempo de Schwarzschild escrito em coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein com o eixo vertical representando a coordenada temporal t' e o eixo horizontal a coordenada r [9], tanto a borda direita quanto a esquerda dos cones de luz têm uma abertura de $\pm 45^0$ em relação à vertical na região $r \to \infty$. À medida que r se aproxima de $2GM$, a borda direita dos cones vai se inclinando, de tal modo que em $r = 2GM$ ela é paralela em relação à vertical. Isso significa que fótons emitidos radialmente em $r = 2GM$ permanecem em $r = 2GM$. Se, porventura, outros fótons forem emitidos em outras direções, todos irão inexoravelmente à singularidade essencial em $r = 0$. Em $r < 2GM$, todos os fótons, inclusive aqueles que se movem radialmente, são levados para $r = 0$. Por essas razões, a superfície $r = 2GM$ é chamada de *horizonte de eventos*, pois todo evento que ocorre em $r < 2GM$ deixa de ter relação causal com eventos em $r > 2GM$.

Se um observador situado sobre a superfície de uma estrela em colapso enviar sinais luminosos a intervalos regulares, de acordo com o seu próprio relógio, a um observador distante, este último verá que, à medida que a superfície estelar se aproxima de $2GM$, esses sinais o atingirão a intervalos cada vez maiores, até que, sobre o horizonte de eventos, todo sinal enviado por aquele observador permanecerá na esfera de Schwarzschild. Ao observador passivo nada mais será visível além de um *buraco negro* no espaço, pois a intensidade dos sinais luminosos irá rapidamente a zero devido ao desvio para o vermelho infinito em $2GM$.

O intervalo de tempo próprio escrito em *coordenadas de Kruskal* [13, 16] também é regular em $r = 2GM$ e singular em $r = 0$. Nesse sistema de coordenadas, $d\tau^2$é escrito como:

$$d\tau^2 = f^2(dV^2 - dU^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad , \tag{2.19}$$

onde

$$\begin{aligned} f^2 &= \frac{32G^2M^2}{r}\exp(-r/2GM) \\ \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)\exp\left(\frac{r}{2GM}\right) &= U^2 - V^2 \\ \frac{t}{4GM} &= arctanh\left(\frac{V}{U}\right) \quad . \end{aligned}$$

2.3 Evaporação de buracos negros

Em 1975, S. Hawking aplicou a Teoria Quântica de Campos em espaços curvos e mostrou que flutuações de vácuo no campo eletromagnético podem produzir pares de fótons virtuais nas vizinhanças do horizonte de eventos [17, 18]. O fóton com energia negativa cairia sobre o horizonte, enquanto que o fóton com energia positiva escaparia para o infinito. Esse fenômeno é chamado de *Evaporação de buracos negros.*

Podemos estimar a energia do fóton medida por um observador distante considerando tempos mínimos de flutuação em referenciais localmente inerciais, que são iguais a $\Delta\tau = \hbar/\Delta\mathcal{E}$, onde $\Delta\mathcal{E}$ é a energia do fóton nesse referencial [19].

Um referencial que está momentaneamente em repouso em $r = 2GM + \epsilon$ seguirá a trajetória de uma partícula com momento angular $\bar{L} = 0$ e energia constante $\bar{E} = [1 - 2GM/(2GM + \epsilon)]^{1/2} \approx (\epsilon/2GM)^{1/2}$, pois

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= \bar{E}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(1 + \frac{\bar{L}^2}{r^2}\right) \\ \rightarrow\ 0 = &\ \bar{E}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \quad . \end{aligned}$$

Ele atingirá o horizonte em um intervalo de tempo próprio dado por

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= -\int_{2GM+\epsilon}^{2GM} \frac{dr}{\left(\bar{E}^2 - 1 + \frac{2GM}{r}\right)^{1/2}} \\ &= -\int_{2GM+\epsilon}^{2GM} \frac{dr}{\left(\frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{2GM+\epsilon}\right)^{1/2}} \\ &= 2(2GM\epsilon)^{1/2} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \quad . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2}\hbar\,(2GM\epsilon)^{-1/2} \quad .$$

A energia do fóton no infinito é determinada pela igualdade $\Delta\mathcal{E} = -p_\alpha U^\alpha$:

$$\Delta\mathcal{E} = -p_\alpha U^\alpha = -p_\alpha g^{\alpha\beta} U_\beta = -p_0 g^{00} U_0 = E g^{00} U_0 \quad ,$$

onde E é a energia conservada do fóton e $U_0 = -\bar{E}$. Como

$$g^{00}(r = 2GM + \epsilon) = -\frac{2GM}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad ,$$

então

$$E = \frac{h}{8\pi GM} \quad . \tag{2.20}$$

Além do fato da radiação de Hawking ser produzida por flutuações aleatórias, buracos negros podem ser vistos como perfeitos absorvedores. Nesse sentido, o espectro de emissão do buraco negro de Hawking deve ter a forma de um espectro de corpo negro a uma certa temperatura. De fato, o resultado rigoroso é um espectro a uma temperatura

$$T = \frac{\hbar}{8\pi kGM} \quad , \tag{2.21}$$

onde k é a constante de Boltzmann, e uma energia associada

$$E = \frac{\hbar}{8\pi GM} \quad . \tag{2.22}$$

A temperatura de buracos negros é proporcional a M^{-1}, e a taxa de emissão de um corpo negro é proporcional a AT^4, onde A é sua área. Para um buraco negro, $A \sim M^2$, de tal modo que sua luminosidade é proporcional a M^{-2}. Como fótons com energia negativa contribuem apenas para a diminuição de M, toda a luminosidade deve vir da massa do buraco negro:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &\sim M^{-2} \\ M^2 dM &\sim dt \ . \end{aligned}$$

Ou seja, sua vida média é proporcional a M^3.

A conexão entre a dinâmica de buracos negros e a termodinâmica [20, 21] torna-se evidente ao considerarmos o *Teorema da Área* de Hawking [22]:

$$\frac{dA}{dt} \geq 0 \ . \tag{2.23}$$

Para um buraco negro de Schwarzschild,

$$\begin{aligned} A &= 16\pi G^2 M^2 \\ dA &= 32\pi G^2 M dM \\ dM &= \frac{1}{32\pi G^2 M} dA \\ &= \frac{\hbar}{8\pi k G M} d\left(\frac{Ak}{4G\hbar}\right) \ . \end{aligned} \tag{2.24}$$

Dado que dM é a variação da energia total do buraco negro e $\hbar/8\pi kGM$ é sua temperatura, podemos escrever (2.24) como

$$dE = TdS \ , \tag{2.25}$$

onde $S = Ak/4G\hbar$. Como S nunca pode decrescer, temos em (2.25) e (2.23) a primeira e segunda leis da termodinâmica.

Embora corpos suficientemente massivos sejam passíveis de sofrer um colapso esférico para além do horizonte de eventos, não há, *a priori*, nenhuma razão definitiva para acreditarmos que tais corpos continuarão a existir. Esse problema, que será exposto no capítulo 5, é conhecido como o problema da *estabilidade do horizonte de Schwarzschild*, investigado por Regge e Wheeler em 1957 [7] e por Vishveshwara em 1970 [16] no contexto da *aproximação linear* das Equações de Einstein.

Capítulo 3

Aproximação Linear

Como a velocidade de propagação das interações é finita, a Teoria da Relatividade Geral, por analogia com o Eletromagnetismo, deve admitir a existência de campos gravitacionais livres propagando-se no vácuo [1]. Esses campos são denominados *ondas gravitacionais* e estão associados às soluções radiativas das Equações de Einstein. Ora, tais equações são não-lineares, indicando que os campos podem afetar sua própria propagação e contribuir para a curvatura do espaço [2]. Em outras palavras, ondas gravitacionais também podem ser caracterizadas por um tensor de momento e energia, cuja definição será dada no próximo capítulo.

A aproximação linear despreza efeitos de segunda ordem assumindo que a energia dos campos não é intensa o suficiente para alterar as propriedades do espaço, preocupando-se apenas com a propagação isolada e livre de fontes dos campos.

3.1 Aproximação de campo fraco

Nesse regime, assumimos que a métrica pode ser escrita como [13]:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{3.1}$$

onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ implica que, na região em questão, o espaço-tempo é quase-minkowskiano .

Como $g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$, a inversa de (3.1) é:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2) \ , \tag{3.2}$$

onde $h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}h_{\alpha\beta}$.

Note que a condição $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ não define univocamente o sistema de coordenadas em que a métrica (3.1) é válida. De fato, dada a tranformação de calibre

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \ , \tag{3.3}$$

com $|\xi^{\mu}| \ll 1$, temos:

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu}(x') &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}g^{\alpha\beta}(x) \\ &= (\delta^{\mu}_{\ \alpha} + \xi^{\mu}_{\ ,\alpha})(\delta^{\nu}_{\ \beta} + \xi^{\nu}_{\ ,\beta})g^{\alpha\beta}(x) \\ &= g^{\mu\nu}(x) + \xi^{\nu}_{\ ,\beta}\, g^{\beta\mu}(x) + \xi^{\mu}_{\ ,\alpha}\, g^{\alpha\nu}(x) + \mathcal{O}(\xi^2) \ . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Como

$$
\begin{aligned}
g'^{\mu\nu}(x') &= g'^{\mu\nu}(x+\xi) \\
&= g'^{\mu\nu}(x) + \xi^{\lambda}\,\frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}(x) + \mathcal{O}(\xi^2) \\
&= g'^{\mu\nu}(x) + \xi^{\lambda}\left[\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}(x) + \mathcal{O}(\xi)\right] \quad ,
\end{aligned}
$$

então:

$$
g'^{\mu\nu}(x) \approx g^{\mu\nu}(x) - \xi^{\lambda} g^{\mu\nu}_{\ \ ,\lambda}(x) + \xi^{\nu}_{\ ,\beta}\, g^{\beta\mu}(x) + \xi^{\mu}_{\ ,\alpha}\, g^{\alpha\nu}(x)\ , \tag{3.5}
$$

ou

$$
g'^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - (h^{\mu\nu} - \xi^{\mu,\nu} - \xi^{\nu,\mu}) + \mathcal{O}(h\xi) \quad , \tag{3.6}
$$

onde $\xi^{\mu,\nu} \equiv \eta^{\nu\lambda}\xi^{\mu}_{\ ,\lambda}$.

$h_{\mu\nu}$ é definido como a diferença entre a métrica de fundo e a métrica total perturbada, de tal modo que

$$
h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \xi^{\mu,\nu} - \xi^{\nu,\mu}\ . \tag{3.7}
$$

Da lei de transformação (3.5) também concluímos que o tensor de Ricci é invariante por transformações de calibre até primeira ordem, pois o seu termo de ordem mais baixa é linear em $h_{\mu\nu}$:

$$
R_{\mu\nu} =^{(1)} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu,\nu} -^{(1)} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} + \mathcal{O}(h^2)\ , \tag{3.8}
$$

onde ${}^{(1)}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$é o símbolo de Christofell de primeira ordem em $h_{\mu\nu}$:

$$ {}^{(1)}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\left(h_{\rho\nu,\mu} + h_{\rho\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\ \rho}\right) + \mathcal{O}(h^2). \tag{3.9} $$

Em termos de $h_{\mu\nu}$, as Equações de Einstein de primeira ordem no vácuo, dadas por

$$ \begin{aligned} {}^{(1)}R_{\mu\nu} &= {}^{(1)}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu,\nu} -{}^{(1)}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} \\ &= 0\ , \end{aligned} \tag{3.10} $$

escrevem-se como:

$$ \Box\, h_{\mu\nu} - h^{\lambda}{}_{\nu,\lambda\mu} - h^{\lambda}{}_{\mu,\lambda\nu} + h^{\lambda}{}_{\lambda,\mu\nu} = 0, \tag{3.11} $$

onde $\Box \equiv -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$.

Visto que o tensor de Ricci é um invariante de calibre, as Eqs.(3.11) podem ser simplificadas adotando-se o sistema de coordenadas harmônico onde valem as seguintes igualdades:

$$ h^{\mu}{}_{\lambda,\mu} = \frac{h^{\mu}{}_{\mu,\lambda}}{2}\ . \tag{3.12} $$

Que tal escolha de calibre é sempre possível pode ser vista da seguinte maneira: seja $h_{\mu\nu}$ tal que, em um dado sistema de coordenadas, as igualdades (3.12) não são válidas. Fazendo uma transformação de coordenadas (3.3), as componentes de $h_{\mu\nu}$ se transformam de acordo com (3.7):

$$
\begin{aligned}
h'^{\mu}{}_{\nu\,,\,\mu}-\frac{1}{2}h'^{\mu}{}_{\mu\,,\,\nu}=(h^{\mu}{}_{\nu}-\xi^{\mu}{}_{,\,\nu}-\xi_{\nu}{}^{,\,\mu})_{,\,\mu}-\frac{1}{2}\left(h^{\mu}{}_{\mu}-\xi^{\mu}{}_{,\,\mu}-\xi_{\mu}{}^{,\,\mu}\right)_{,\,\nu} &= \\
h^{\mu}{}_{\nu\,,\,\mu}-\xi^{\mu}{}_{,\nu\mu}-\xi_{\nu}{}^{,\,\mu}{}_{,\,\mu}-\frac{1}{2}h^{\mu}{}_{\mu\,,\,\nu}+\frac{1}{2}\left(\xi^{\mu}{}_{,\,\mu\nu}+\xi_{\mu}{}^{,\,\mu}{}_{,\,\nu}\right) &= \\
h^{\mu}{}_{\nu\,,\,\mu}-\Box\xi_{\nu}-\frac{1}{2}h^{\mu}{}_{\mu\,,\,\nu} &
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
h'^{\mu}{}_{\nu\,,\,\mu}-\frac{1}{2}h'^{\mu}{}_{\mu\,,\,\nu}=0
$$

desde que

$$
\Box\xi_{\nu}=h^{\mu}{}_{\nu\,,\,\mu}-\frac{1}{2}h^{\mu}{}_{\mu\,,\,\nu} \tag{3.13}
$$

Supondo que $h_{\mu\nu}$ satisfaz (3.12), as equações (3.11) escrevem-se como:

$$
\begin{aligned}
\Box\, h_{\mu\nu}-h^{\lambda}{}_{\nu,\lambda\mu}-h^{\lambda}{}_{\mu,\lambda\nu}+h^{\lambda}{}_{\lambda,\mu\nu} &= \Box\, h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\left(h^{\lambda}{}_{\lambda,\nu\mu}+h^{\lambda}{}_{\lambda,\mu\nu}\right)+h^{\lambda}{}_{\lambda,\mu\nu} \\
&= \Box\, h_{\mu\nu} \\
&= 0\ .
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

3.1.1 Polarização de Ondas Planas

A solução geral de (3.14) é uma superposição linear de soluções da forma [13]

$$
h_{\mu\nu}=e_{\mu\nu}\exp(ik_{\lambda}x^{\lambda})+e^{*}_{\mu\nu}\exp(-ik_{\lambda}x^{\lambda})\ \ . \tag{3.15}
$$

Substituindo (3.15) em (3.14) e (3.12), obtemos as seguintes igualdades:

$$k_\sigma k^\sigma = 0 \tag{3.16}$$

e

$$e^\mu{}_\nu k_\mu = \frac{1}{2} e^\mu{}_\mu k_\nu \ . \tag{3.17}$$

$e_{\mu\nu}$ $(= constante)$ é chamado *tensor de polarização.*

Note que as condições (3.12) não definem univocamente o sistema de coordenadas. De fato, se $h_{\mu\nu}$ satisfaz (3.12), então $h'_{\mu\nu}$, definido por (3.7), também satisfaz (3.12) desde que $\Box\,\xi^\mu = 0$ (ver (3.13)) . Seja

$$\xi^\mu(x) = i\varepsilon^\mu \exp(ik_\lambda x^\lambda) - i\varepsilon^{*\mu} \exp(-ik_\lambda x^\lambda)$$

com $\varepsilon^\mu = constante$. Segue de (3.7) que:

$$h'_{\mu\nu} = e'_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda) + (e'_{\mu\nu})^* \exp(-ik_\lambda x^\lambda) \ \ ,$$

onde

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + \varepsilon_\mu k_\nu + \varepsilon_\nu k_\mu \ . \tag{3.18}$$

Em particular, para uma onda plana que se propaga na direção z ,

$$k^1 = 0 = k^2$$

e

$$k^0 = k = k^3 > 0 \ .$$

De (3.17), temos:

$$e_{31} + e_{01} = e_{32} + e_{02} = 0$$

$$e_{33} + e_{03} = -e_{03} - e_{00} = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22} + e_{33} - e_{00}) \ .$$

Ou

$$e_{01} = -e_{31} \ ; \ e_{02} = -e_{32} \ ; \ e_{03} = \frac{1}{2}(-e_{00} - e_{33}) \ ; \ e_{22} = -e_{11}$$

No novo referencial harmônico, também conhecido como *calibre transverso traço-nulo*,

$$e'_{11} = e_{11} \qquad\qquad e'_{23} = e_{23} + \varepsilon_2 k$$

$$e'_{12} = e_{12} \qquad\qquad e'_{33} = e_{33} + 2\varepsilon_3 k$$

$$e'_{13} = e_{13} + \varepsilon_1 k \qquad\qquad e'_{00} = e_{00} - 2\varepsilon_0 k$$

Portanto, das 6 componentes independentes de $e_{\mu\nu}$, somente as duas componentes transversais, e_{11} e e_{12}, têm significado físico. De fato, as constantes ε^μ podem ser escolhidas de tal forma que todas as componentes de $e'_{\mu\nu}$, com exceção de e'_{11} , e'_{12} e $e'_{22} = -e'_{11}$, se anulam.

3.2 Ondas Gravitacionais em Espaços Curvos

De um modo geral, um espaço-tempo de curvatura não-nula permeado por ondas gravitacionais pode ser descrito pela seguinte métrica [1]:

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \ . \tag{3.19}$$

A métrica (3.19) induz correções de primeira ordem no tensor de Ricci dadas por

$$\begin{aligned} {}^{(1)}R_{\mu\nu} \ = \ & {}^{(1)}\Gamma^{\rho}_{\mu\rho,\,\nu} -{}^{(1)}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\,\rho} +{}^{(0)}\Gamma^{\eta}_{\mu\rho}\,{}^{(1)}\Gamma^{\rho}_{\nu\eta} +{}^{(1)}\Gamma^{\eta}_{\mu\rho}\,{}^{(0)}\Gamma^{\rho}_{\nu\eta} \\ & -{}^{(0)}\Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\,{}^{(1)}\Gamma^{\rho}_{\rho\eta} -{}^{(1)}\Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\,{}^{(0)}\Gamma^{\rho}_{\rho\eta} \ , \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \ = \ & \frac{1}{2} g^{(0)\alpha\lambda}(h_{\lambda\mu,\,\nu} + h_{\lambda\nu,\,\mu} - h_{\mu\nu,\,\lambda}) \\ & -\frac{1}{2} h^{\alpha\lambda}(g^{(0)}_{\lambda\mu,\,\nu} + g^{(0)}_{\lambda\nu,\,\mu} - g^{(0)}_{\mu\nu,\,\lambda}) \end{aligned} \tag{3.21}$$

e $h^{\alpha\beta} \equiv g^{(0)\alpha\mu} g^{(0)\nu\beta} h_{\mu\nu}$.

Podemos escrever (3.20) e (3.21) em termos das derivadas covariantes de $h_{\mu\nu}$ e ${}^{(1)}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ com respeito à métrica não-perturbada $g^{(0)}_{\mu\nu}$:

$${}^{(1)}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu;\rho} ={}^{(1)}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\rho} +{}^{(0)}\Gamma^{\rho}_{\eta\rho}\,{}^{(1)}\Gamma^{\eta}_{\mu\nu} -{}^{(0)}\Gamma^{\eta}_{\mu\rho}\,{}^{(1)}\Gamma^{\rho}_{\eta\nu} -{}^{(0)}\Gamma^{\eta}_{\nu\rho}\,{}^{(1)}\Gamma^{\rho}_{\mu\eta}$$

$${}^{(1)}\Gamma^{\rho}_{\mu\rho;\nu} ={}^{(1)}\Gamma^{\rho}_{\mu\rho,\,\nu} -{}^{(0)}\Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\,{}^{(1)}\Gamma^{\rho}_{\eta\rho}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{(0)\alpha\lambda}(h_{\lambda\mu;\,\nu} + h_{\lambda\nu;\,\mu} - h_{\mu\nu;\,\lambda} + 2\,{}^{(0)}\Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\, h_{\eta\lambda}) \\
&\quad -\frac{1}{2} h^{\alpha\lambda}(2 g^{(0)}_{\lambda\eta}\, {}^{(0)}\Gamma^{\eta}_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2} g^{(0)\alpha\lambda}(h_{\lambda\mu;\,\nu} + h_{\lambda\nu;\,\mu} - h_{\mu\nu;\,\lambda})
\end{aligned}
$$

$$
{}^{(1)}R_{\mu\nu} = {}^{(1)}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha;\,\nu} - {}^{(1)}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu;\,\alpha}\ ; \tag{3.22}
$$

Com a correção do tensor de Ricci escrita na forma (3.22), as Equações de Einstein de primeira ordem no vácuo escrevem-se como:

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{(0)\alpha\sigma}(h_{\sigma\alpha\,;\,\mu\nu} + h_{\mu\nu\,;\,\sigma\alpha} - h_{\sigma\mu\,;\,\nu\alpha} - h_{\sigma\nu\,;\,\mu\alpha}) \\
&= 0\ .
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

Em geral, a correção do tensor de Ricci (3.22) não é invariante por transformações de calibre (3.3). De fato, segue de (3.5) que:

$$
{}^{(1)}R'^{\mu\nu} = {}^{(1)}R^{\mu\nu} - \xi^{\lambda}\, {}^{(0)}R^{\mu\nu}{}_{,\lambda} + \xi^{\nu}{}_{,\beta}\, {}^{(0)}R^{\beta\mu} + \xi^{\mu}{}_{,\alpha}\, {}^{(0)}R^{\alpha\nu}\ , \tag{3.24}
$$

onde ${}^{(0)}R^{\mu\nu} = R^{\mu\nu}(g^{(0)}_{\alpha\beta})$. Entretanto, dado que a métrica não-perturbada satisfaz as Equações de Einstein no vácuo, $R_{\mu\nu}(g^{(0)}_{\alpha\beta}) = 0$, os três últimos termos de (3.24) são identicamente nulos, garantindo a invariância de (3.22).

Ondas gravitacionais que se propagam em espaços planos são descritas pela equação covariante (3.11). Uma escolha conveniente de calibre leva essas equações à forma simplificada (3.14). Para ondas se propagando em espaços curvos, uma simplificação análoga às (3.14) é impossível devido à não-comutatividade de derivadas covariantes. Entretanto, no limite de pequenos comprimentos de onda λ , a diferença

$$h^{\alpha}{}_{\mu\,;\,\nu\alpha} - h^{\alpha}{}_{\mu\,;\,\alpha\nu} \approx h^{\sigma}{}_{\mu}\,{}^{(0)}R^{\alpha}{}_{\sigma\nu\alpha} - h^{\alpha}{}_{\sigma}\,{}^{(0)}R^{\sigma}{}_{\mu\nu\alpha}$$

é da ordem de h/L^2 , onde $L(\gg \lambda)$ é uma distância característica em que a métrica não-perturbada varia significativamente, enquanto que cada termo do lado esquerdo é da ordem de h/λ^2 . Portanto, nesse limite,

$$h^{\alpha}{}_{\mu\,;\,\nu\alpha} = h^{\alpha}{}_{\mu\,;\,\alpha\nu} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda^2}{L^2}\right) \quad . \tag{3.25}$$

Impondo as condições

$$h^{\mu}{}_{\lambda\,;\,\mu} = \frac{h^{\mu}{}_{\mu\,;\,\lambda}}{2} \quad , \tag{3.26}$$

análogas às (3.12) , decorre de (3.23) as seguintes equações:

$$h_{\mu\nu}{}^{;\alpha}{}_{;\alpha} = 0 \quad . \tag{3.27}$$

3.2.1 Solução aproximada para a equação de onda

No limite de espaços planos, as Eqs.(3.27) reduzem-se à forma (3.14) com soluções dadas por (3.15). Na presença de campos gravitacionais lentamente variáveis, ocorre que o tensor de polarização e o vetor de onda definidos em (3.15) não são constantes. Ao contrário, espera-se que, devido à presença desses campos, tais quantidades também sejam lentamente variáveis.

Assim, como uma possível solução aproximada de (3.27), podemos ter [23]

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{i\phi} \quad , \tag{3.28}$$

onde $A_{\mu\nu}$ é uma função real lentamente variável em escalas de distância da ordem de L e ϕ também é uma função real mas com primeira e segunda derivadas da ordem de L/λ , correspondendo ao fato de que os campos são de alta freqüência e com vetor de onda $k_\alpha \equiv \phi_{\,,\,\alpha}$ variando lentamente.

A solução (3.28) é conhecida como solução WKB (Wentzel-Kramers-Brioullin).

Substituindo (3.28) em (3.26) obtemos:

$$\left(A^{\mu}{}_{\nu\,;\,\mu} - \frac{1}{2} A^{\mu}{}_{\mu\,;\,\nu} \right) + \left(i k_\mu A^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2} i k_\nu A^{\mu}{}_{\mu} \right) = 0 \quad .$$

Os dois primeiros termos da equação acima podem ser desprezados pois são da ordem de A/L , enquanto que os dois últimos são da ordem de L/λ . Assim,

$$k_\mu A^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2} k_\nu A^{\mu}{}_{\mu} = 0 \quad .$$

Com a definição

$$A'^{\,\alpha}{}_{\beta} \equiv A^{\alpha}{}_{\beta} - \frac{1}{2} g^{(0)\alpha}{}_{\beta}\, g^{(0)\rho\sigma} A_{\sigma\rho} \quad ,$$

temos:

$$k_\mu A'^{\,\mu}{}_{\nu} = 0 \quad . \tag{3.29}$$

Transformações de calibre com $\xi^{\mu\,;\,\nu}{}_{;\,\nu} = 0$ impõem condições adicionais sobre o campo $h'_{\mu\nu} \equiv A'_{\mu\nu} e^{i\phi}$. Em particular, se

$$\xi_{\mu}{}^{;\,\mu} = \frac{1}{2}\, h'^{\,\mu}{}_{\mu} \quad , \tag{3.30}$$

onde ${h'}^{\mu}_{\ \mu} \equiv g^{(0)\mu\nu} h'_{\mu\nu}$, então

$$g^{(0)\mu\nu} h'_{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{3.31}$$

Substituindo (3.28) em (3.27), obtemos:

$$-A_{\mu\nu} k^{\alpha} k_{\alpha} + i(2A_{\mu\nu}{}^{;\alpha} k_{\alpha} + A_{\mu\nu} k^{\alpha}{}_{;\alpha}) + A_{\mu\nu}{}^{;\alpha}{}_{;\alpha} = 0 \quad . \tag{3.32}$$

Em ordem mais baixa em L/λ , (3.32) escreve-se como:

$$k^{\alpha} k_{\alpha} = 0 \quad . \tag{3.33}$$

Derivando (3.33) e lembrando que $k^{\alpha} \equiv \phi^{;\alpha}$, obtemos:

$$k^{\alpha} k_{\beta\,;\,\alpha} = 0 \quad . \tag{3.34}$$

Ou seja, o vetor de onda é definido por transporte paralelo ao longo de geodésicas nulas dadas pela congruência

$$\frac{dx^{\mu}}{dl} = k^{\mu} \quad .$$

Conseqüentemente, ondas gravitacionais de alta freqüência na aproximação WKB também são desviadas para o vermelho e têm suas trajetórias defletidas por campos gravitacionais.

Os termos seguintes de (3.32) são:

$$A_{\mu\nu}{}^{;\alpha}{}_{;\alpha} k_{\alpha} + \frac{1}{2} A_{\mu\nu} k^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0 \quad . \tag{3.35}$$

Podemos escrever $A_{\mu\nu}$ em termos de um vetor de polarização $e_{\mu\nu}$ e de uma amplitude $\mathcal{A}$:

$$A_{\mu\nu} = \mathcal{A} e_{\mu\nu} \quad , \tag{3.36}$$

onde a magnitude arbitrária de $e_{\mu\nu}$ é definida por normalização: $e_{\mu\nu}e^{\mu\nu} = 1$. Substituindo (3.36) em (3.35) obtemos:

$$(\mathcal{A}^{;\alpha} e_{\mu\nu} + \mathcal{A} e_{\mu\nu}{}^{;\alpha}) k_\alpha + \frac{1}{2} k^\alpha{}_{;\alpha} (\mathcal{A} e_{\mu\nu}) = 0 \quad . \tag{3.37}$$

Multiplicando por $e^{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{;\alpha} k^\alpha + \frac{1}{2} \mathcal{A} k^\alpha{}_{;\alpha} &= (\ln \mathcal{A})_{,\alpha} k^\alpha + \frac{1}{2} k^\alpha{}_{;\alpha} \\ &= \frac{d}{dl} \ln \mathcal{A} + \frac{1}{2} k^\alpha{}_{;\alpha} \\ &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Portanto, a amplitude do campo diminui a medida que o seu vetor de onda diverge:

$$\frac{d}{dl} \ln \mathcal{A} = -\frac{1}{2} k^\alpha{}_{;\alpha} \quad . \tag{3.38}$$

De (3.37) e (3.38), vemos que, assim como o vetor de onda, o tensor de polarização também é definido por transporte paralelo ao longo de geodésicas nulas $x^\mu(l)$:

$$e_{\mu\nu;\alpha} k^\alpha = 0 \quad . \tag{3.39}$$

3.2.2 Equação de Regge-Wheeler

Seja

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}$$

tal que, em uma certa região do espaço, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. As Equações de Einstein que determinam as perturbações $h_{\mu\nu}$ são escritas como

$$^{(1)}R_{\mu\nu} = 0 \ \ , \tag{3.40}$$

onde o tensor de Ricci de primeira ordem em $h_{\mu\nu}$ é dado por (3.22).

Supondo que $g_{\mu\nu}^{(0)}$ seja a métrica de Schwarzschild (2.15), podemos escrever as soluções de (3.40) como o produto de duas funções, cada uma dependendo das coordenadas (t, r) e (θ, ϕ). A parte angular de $h_{\mu\nu}$, por sua vez, pode ser decomposta como uma soma de harmônicos esféricos escalares, vetoriais e tensoriais, classificados como sendo *pares* ou *ímpares* dependendo de como se transformam sob rotações do sistema de coordenadas. Há um tipo de harmônico esférico escalar, dois vetoriais e três tensoriais, com suas definições e paridades dadas por [7]:

$$
\begin{aligned}
\Phi_\ell^m &= \mathrm{const} Y_\ell^m(\theta,\phi) \ , \\
& \quad \text{paridade } \ell \ , \\
\Psi_{\ell\,,\,\mu}^m &= \mathrm{const} Y_{\ell\,,\,\mu}^m(\theta,\phi) \ , \\
& \quad \text{paridade } \ell \ , \\
\Phi_{\ell\,,\,\mu}^m &= \mathrm{const} \epsilon^\nu{}_\mu Y_{\ell\,,\,\nu}^m(\theta,\phi) \ , \\
& \quad \text{paridade } \ell+1 \ , \\
\Psi_{\ell\,\mu\nu}^m &= \mathrm{const} Y_{\ell\,;\,\mu\nu}^m(\theta,\phi) \ , \\
& \quad \text{paridade } \ell \ , \\
\Phi_{\ell\,\mu\nu}^m &= \mathrm{const} \gamma_{\mu\nu} Y_\ell^m(\theta,\phi) \ , \\
& \quad \text{paridade } \ell \ , \\
\chi_{\ell\,\mu\nu}^m &= \frac{1}{2}\mathrm{const}\left[\epsilon_\mu{}^\lambda \Psi_{\ell\,,\,\lambda\nu}^m + \epsilon_\nu{}^\lambda \Psi_{\ell\,\lambda\nu}^m\right] \ , \\
& \quad \text{paridade } \ell+1 \ ,
\end{aligned}
$$

onde ${\epsilon_2}^2 = {\epsilon_3}^3 = 0$, ${\epsilon_2}^3 = 1/\sin(\theta)$, ${\epsilon_3}^2 = -\sin(\theta)$ e $\gamma_{22} = 1$, $\gamma_{23} = 0 = \gamma_{32}$, $\gamma_{33} = \sin^2\theta$.

Note que soluções pares e ímpares de (3.40) podem ser tratadas separadamente pois, como $g_{\mu\nu}^{(0)}$ é esfericamente simétrico, as equações de movimento (3.40) não podem misturar termos com ℓ e paridade diferentes. Além disso, visto que ℓ e m estão associados a uma constante do movimento (momento angular), é suficiente determinarmos uma única solução com ℓ e m específicos. A solução geral será uma combinação linear dessas soluções individuais com coeficientes a serem determinados por condições iniciais e de contorno.

Assim, para um dado modo (ℓ, m) ímpar, temos [7]:

$$
\begin{aligned}
h_{02}^{\ell m} &= -h_0^{\ell m}(t,r)(\partial/\sin\theta\partial\phi)Y_\ell^m \\
h_{03}^{\ell m} &= h_0^{\ell m}(t,r)(\sin\theta\partial/\partial\theta)Y_\ell^m \\
h_{12}^{\ell m} &= -h_1^{\ell m}(t,r)(\partial/\sin\theta\partial\phi)Y_\ell^m \\
h_{13}^{\ell m} &= h_1^{\ell m}(t,r)(\sin\theta\partial/\partial\theta)Y_\ell^m \\
h_{22}^{\ell m} &= h_2^{\ell m}(t,r)(\partial^2/\sin\theta\partial\theta\partial\phi - \cos\theta\partial/\sin^2\theta\partial\phi)Y_\ell^m \\
h_{23}^{\ell m} &= \frac{1}{2}h_2^{\ell m}(t,r)(\partial^2/\sin\theta\partial\phi\partial\phi + \cos\theta\partial/\partial\theta - \sin\theta\partial^2/\partial\theta\partial\theta)Y_\ell^m \\
h_{33}^{\ell m} &= -h_2^{\ell m}(t,r)(\sin\theta\partial^2/\partial\theta\partial\phi - \cos\theta\partial/\partial\phi)Y_\ell^m \\
h_{00}^{\ell m} &= 0 = h_{01}^{\ell m} = h_{11}^{\ell m} \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

O *calibre de Regge-Wheeler* [7, 4, 5] consiste em eliminar termos em (3.41) que dependem de derivadas segundas com respeito aos ângulos.

Da Lei de Transformação

$$
h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu\,;\,\nu} - \xi_{\nu\,;\,\mu} \qquad (3.42)
$$

temos:

$$
\begin{aligned}
h'_{22} &\equiv 0 = h_{22} - 2\,\xi_{2\,;\,2} \\
\xi_{2\,;\,2} &= \frac{1}{2}h_{22} \\
&= \frac{1}{2}\frac{h_2(t,r)}{\sin(\theta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)Y_\ell^m \quad . \qquad (3.43)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h'_{33} &\equiv 0 = h_{33} - 2\,\xi_{3\,;\,3} \\
\xi_{3\,;\,3} &= \frac{1}{2} h_{33} \\
&= -\ \frac{h_2(t,r)}{2}\sin(\theta)\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) Y_\ell^m \quad , \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

onde os índices ℓm das perturbações foram omitidos. Podemos reescrever as equações para ξ_2 e ξ_3 como:

$$
\xi_{2\,;\,2} = \xi_{2\,,\,2} - {}^{(0)}\,\Gamma^\lambda_{22}\xi_\lambda = \xi_{2\,,\,2} = \frac{h_2(t,r)}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial Y_\ell^m}{\partial\phi}\right) \quad ,
$$

ou seja,

$$
\xi_2 = \frac{h_2(t,r)}{2}\frac{1}{\sin(\theta)} Y^m_{\ell\,,3} + \Lambda(t,r,\phi) \quad . \qquad (3.45)
$$

$$
\begin{aligned}
\xi_{3\,;\,3} &= \xi_{3\,,\,3} - {}^{(0)}\,\Gamma^\lambda_{33}\xi_\lambda = \xi_{3\,,\,3} + \sin(\theta)\cos(\theta)\xi_2 \\
&= \xi_{3\,,\,3} + \sin(\theta)\cos(\theta)\left[\frac{h_2(t,r)}{2}\frac{1}{\sin(\theta)} Y^m_{\ell\,,3} + \Lambda(t,r,\phi)\right] \\
&= -\frac{\sin(\theta)}{2} h_2(t,r)\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) Y_\ell^m \quad .
\end{aligned}
$$

$$
\xi_{3\,,\,3} = \frac{-\sin(\theta)}{2} h_2(t,r) Y^m_{\ell\,,23} - \sin(\theta)\cos(\theta)\Lambda(t,r,\phi) \quad .
$$

Ou seja,

$$
\xi_3 = -\frac{h_2(t,r)}{2}\sin(\theta) Y^m_{\ell\,,2} + \sigma(t,r,\theta,\phi) \quad . \qquad (3.46)
$$

Dados ξ_2 e ξ_3 , podemos calcular h'_{23} :

$$
\begin{aligned}
h'_{23} &= h_{23} - \xi_{2,3} - \xi_{3,2} + 2\,{}^{(0)}\Gamma^{\lambda}_{23}\xi_{\lambda} \\
&= h_{23} - \xi_{2,3} - \xi_{3,2} + 2\cot(\theta)\xi_3 \\
&= -\frac{\partial\Lambda(t,r,\phi)}{\partial\phi} - \frac{\partial\sigma(t,r,\theta,\phi)}{\partial\theta} \quad .
\end{aligned}
$$

h'_{23} depende apenas de funções de integração das Eqs. (3.43) e (3.44). Considerando suas soluções mais simples em que tais funções são triviais, obtemos:

$$
\xi_0 = 0\,,\ \ \xi_1 = 0\,,\ \ \xi_\mu = \frac{h_2^{\ell m}(t,r)}{2}\epsilon_\mu{}^\nu Y^m_{\ell\ ,\nu}\ \ ,\ (\mu,\nu = 2,3)\ \ . \tag{3.47}
$$

Transformações de coordenadas com o vetor ξ_μ dado por (3.47) não alteram o número ℓ nem a paridade das componentes da métrica (3.41). Isso implica que uma métrica arbitrária em um calibre arbitrário pode ser escrita no calibre de Regge-Wheeler por um procedimento único e bem definido [4, 5]. Seja

$$
\xi_0 = 0\,,\ \ \xi_1 = 0\,,\ \ \xi_\mu = \Lambda(t,r)\epsilon_\mu{}^\nu Y^m_{\ell\ ,\nu}\ \ ,\ (\mu,\nu = 2,3)\ \ . \tag{3.48}
$$

Os coeficientes da métrica $h_0^{\ell m}$, $h_1^{\ell m}$ e $h_2^{\ell m}$ se transformam como:

$$
\begin{aligned}
h'_{03} &= h_{03} - \xi_{0\,;\,3} - \xi_{3\,;\,0} \\
&= h_{03} - \xi_{3\,;\,0} \\
&= \left(h_0^{\ell m} + \Lambda_{,0}\right)\sin(\theta) Y^m_{\ell\,,\,2} \\
h_0^{\ell m\,\prime} &= h_0^{\ell m} - \Lambda_{,0} \\
h'_{13} &= h_{13} - \xi_{1\,;\,3} - \xi_{3\,;\,1} \\
&= \left(h_1^{\ell m} + \Lambda_{,1} - \frac{\Lambda}{r}\right)\sin(\theta) Y^m_{\ell\,,\,2} \\
h_1^{\ell m\,\prime} &= h_1^{\ell m} + \Lambda_{,1} - \frac{\Lambda}{r} \\
h'_{23} &= h_{23} - \xi_{2\,;\,3} - \xi_{3\,;\,2} \\
&= \left(\frac{h_2^{\ell m}}{2} - \Lambda\right)\left(\csc(\theta) Y^m_{\ell\,,\,33} + \cos(\theta) Y^m_{\ell\,,\,2} - \sin(\theta) Y^m_{\ell\,,\,22}\right) \\
h_2^{\ell m\,\prime} &= \frac{h_2^{\ell m}}{2} - \Lambda
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

O calibre de Regge-Wheeler impõe que $h'_{23} = 0$, determinando univocamente as funções $\Lambda(t,r)$ e $h_2^{\ell m\,\prime}$ e todas as componentes da métrica.

Visto que a parte radial de (3.40) depende apenas do número ℓ , a dependência angular, completamente especificada por (3.41), pode ainda ser simplificada adotando-se o procedimento padrão em que cada modo (ℓ, m) é levado ao estado $(\ell, 0)$ por uma rotação do eixo z . Portanto, a forma final de $h_{\mu\nu}$ no calibre de Regge-Wheeler é:

$$
h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0^\ell(t,r)\sin\theta(\partial/\partial\theta)P_\ell(\cos\theta) \\ 0 & 0 & 0 & h_1^\ell(t,r)\sin\theta(\partial/\partial\theta)P_\ell(\cos\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ sim & sim & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.50}
$$

Substituindo (3.50) em (3.22), vemos que as partes angulares das componentes não triviais do tensor de Ricci, dadas por ${}^{(1)}R_{23}$, ${}^{(1)}R_{13}$ e ${}^{(1)}R_{03}$, se anulam para o modo $\ell = 0$. Para o modo $\ell = 1$, ${}^{(1)}R_{23}$ é identicamente nulo. Para $\ell \geq 2$, as equações de movimento (3.40) implicam as seguintes equações [24]:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial h_0^\ell}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\Gamma h_1^\ell\right) &= 0 \\
\frac{\partial^2 h_1^\ell}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 h_0^\ell}{\partial r \partial t} + (\ell-1)(\ell+2)\Gamma\frac{h_1^\ell}{r^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 h_0^\ell}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 h_1^\ell}{\partial r \partial t} - \frac{2}{r}\frac{\partial h_1^\ell}{\partial t} + \frac{2h_0^\ell}{\Gamma r^2}\left[\frac{R}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{2}\right] &= 0 \ ,
\end{aligned} \tag{3.51}
$$

onde $R \equiv 2GM$ e $\Gamma \equiv 1 - R/r$. Definindo

$$
\chi(t,r) \equiv \frac{\Gamma}{r}h_1^\ell(t,r) \tag{3.52}
$$

e

$$
r^* = r + R\ln\left(\frac{r}{R} - 1\right) \ , \tag{3.53}
$$

também conhecida como *coordenada tartaruga,* e eliminando h_0^ℓ de (3.51), obtemos a seguinte equação para $\chi(t, r^*)$, conhecida como *Equação de Regge-Wheeler* [7, 25, 26]:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + V(r)\right] \chi(t, r^*) = 0 \quad , \tag{3.54}$$

onde

$$V(r) = \Gamma \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{3R}{r^3}\right] \quad . \tag{3.55}$$

Em termos de $\chi(t, r^*)$, as funções $h_0^\ell(t, r)$ e $h_1^\ell(t, r)$ são escritas como [25]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_0^\ell}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r^*}(r\chi) \\ h_1^\ell &= \frac{r}{\Gamma}\chi \quad . \end{aligned} \tag{3.56}$$

Uma equação para as perturbações pares análoga à Equação de Regge-Wheeler, chamada de *Equação de Zerilli*, foi derivada em 1970 por F. J. Zerilli [27].

Note que a Eq.(3.54) pode ser escrita na forma

$$\left(4\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - V(r)\right) \chi(u, v) = 0 \quad , \tag{3.57}$$

onde

$$u = t - r^* \tag{3.58}$$

e

$$v = t + r^* \tag{3.59}$$

são coordenadas nulas - retardadas e avançadas - do espaço-tempo de Schwarzschild que correspondem às geodésicas nulas

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(\frac{r}{r-2GM}\right)^2$$
$$t = \pm r^* + \text{constante} \quad . \tag{3.60}$$

Conforme será discutido no capítulo 5, a Equação de Regge-Wheeler é idêntica à equação de espalhamento em Mecânica Quântica, pois o *potencial de curvatura* (3.55), além de ser positivo em todo o intervalo $-\infty < r^* < +\infty$, vai rapidamente à zero nesses limites [16, 28].

Capítulo 4

Equações de segunda ordem

A não-linearidade das Equações de Einstein indica que a energia e o momento carregados por ondas gravitacionais podem ser vistos como fontes de um campo gravitacional suplementar que afeta a curvatura do espaço e, portanto, a própria propagação dessas ondas.

Nesse capítulo vamos introduzir o conceito de pseudo-tensor de momento e energia [1, 2] e considerar perturbações de segunda ordem esfericamente simétricas na métrica de Schwarzschild correspondentes à chamada *contribuição de monopolo* para a energia irradiada [10].

4.1 Tensor de Momento e Energia Efetivo

A expansão do tensor de Ricci para uma métrica dada por (3.19) é:

$$R_{\mu\nu} = {}^{(0)}R_{\mu\nu} + {}^{(1)}R_{\mu\nu}(h) + {}^{(2)}R_{\mu\nu}(h) + ... \tag{4.1}$$

Em primeira aproximação, as equações de campo no vácuo são escritas como:

$$^{(1)}R_{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{4.2}$$

Em segunda ordem, temos:

$$^{(0)}R_{\mu\nu} = -\,^{(2)}R_{\mu\nu} \quad . \tag{4.3}$$

Podemos escrever as Eqs.(4.3) na forma

$$^{(0)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{(0)}_{\mu\nu}\ ^{(0)}R = -8\pi G T^{ef}_{\mu\nu} \quad , \tag{4.4}$$

onde $T^{ef}_{\mu\nu}$, definido como:

$$T^{ef}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{8\pi G}\left(^{(2)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{(0)}_{\mu\nu}\ ^{(2)}R\right) \quad , \quad ^{(2)}R \equiv g^{(0)\mu\nu}\ ^{(2)}R_{\mu\nu} \quad , \tag{4.5}$$

é o chamado *Tensor de Momento e Energia Efetivo* (TMEE) [2], também conhecido por *pseudo-tensor de momento e energia* [1]. Na seção seguinte veremos que o pseudo-tensor não é, em geral, um invariante de calibre.

Portanto, para campos de forte intensidade, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} ^{(1)}R_{\mu\nu} &= 0 \quad , \\ ^{(0)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{(0)}_{\mu\nu}\, ^{(0)}R &= -8\pi G T^{ef}_{\mu\nu} \quad , \end{aligned} \tag{4.6}$$

introduzido por Brill e Hartle [29] para indicar que ondas gravitacionais se desacoplam de suas fontes e podem ser caracterizadas por um tensor de momento e energia responsável pela curvatura do espaço-tempo por onde se propagam.

4.1.1 Dependência de calibre do TMEE

A forma geral de ${}^{(2)}R_{\mu\nu}$, independente de quaisquer imposições de calibre, é dada por

$$
\begin{aligned}
{}^{(2)}R_{\alpha\beta} = {}^{(2)}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda\,,\,\beta} - {}^{(2)}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta\,,\,\lambda} + {}^{(0)}\Gamma^{\eta}_{\alpha\lambda}\,{}^{(2)}\Gamma^{\lambda}_{\beta\eta} + {}^{(2)}\Gamma^{\eta}_{\alpha\lambda}\,{}^{(0)}\Gamma^{\lambda}_{\beta\eta} \\
+ {}^{(1)}\Gamma^{\eta}_{\alpha\lambda}\,{}^{(1)}\Gamma^{\lambda}_{\beta\eta} - {}^{(0)}\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\,{}^{(2)}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} - {}^{(2)}\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\,{}^{(0)}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} - {}^{(1)}\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\,{}^{(1)}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} \ .
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Visto que a inversa de $g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ é

$$
g^{\mu\nu} = g^{(0)\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu}{}_{\lambda} h^{\lambda\nu} \quad , \tag{4.8}
$$

escrevendo as conexões de segunda ordem como

$$
{}^{(2)}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[-h^{\lambda\eta}(h_{\eta\alpha\,,\,\beta} + h_{\eta\beta\,,\,\alpha} - h_{\alpha\beta\,,\,\eta})
$$

$$
+h^{\lambda}{}_{\rho} h^{\rho\eta}(g^{(0)}_{\eta\alpha\,,\,\beta} + g^{(0)}_{\eta\beta\,,\,\alpha} - g^{(0)}_{\alpha\beta\,,\,\eta})]
$$

$$
= \frac{1}{2}[-h^{\lambda\eta}(h_{\eta\alpha\,;\,\beta} + h_{\eta\beta\,;\,\alpha} - h_{\alpha\beta\,;\,\eta} + 2\,{}^{(0)}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} h_{\gamma\eta})
$$

$$
+h^{\lambda}{}_{\rho} h^{\rho\eta}(2 g^{(0)}_{\eta\gamma}\,{}^{(0)}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta})]
$$

$$= \frac{1}{2}\left[-h^{\lambda\eta}\left(h_{\eta\alpha\,;\,\beta} + h_{\eta\beta\,;\,\alpha} - h_{\alpha\beta\,;\,\eta}\right)\right] \tag{4.9}$$

e substituindo-as em (4.7), obtemos:

$$^{(2)}R_{\alpha\beta} = \,^{(2)}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda\,;\,\beta} -^{(2)} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta\,;\,\lambda} +^{(1)} \Gamma^{\eta}_{\alpha\lambda}\,^{(1)}\Gamma^{\lambda}_{\beta\eta} -^{(1)} \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\,^{(1)}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta}$$

$$= \frac{1}{2}[h^{\lambda\eta}(h_{\eta\alpha\,;\,\beta\lambda} + h_{\eta\beta\,;\,\alpha\lambda} - h_{\alpha\beta\,;\,\eta\lambda} - h_{\eta\lambda\,;\,\alpha\beta})$$

$$+(h^{\lambda\eta}_{\ \ ;\lambda} - \frac{1}{2}h^{\lambda}_{\ \lambda}{}^{;\,\eta})(h_{\eta\alpha\,;\,\beta} + h_{\eta\beta\,;\,\alpha} - h_{\alpha\beta\,;\,\eta})$$

$$-\frac{1}{2}h^{\lambda\eta}_{\ \ ;\,\beta}h_{\eta\lambda\,;\,\alpha} + h_{\eta\alpha}^{\ \ ;\,\lambda}(h_{\lambda\beta}^{\ \ ;\,\eta} - h_{\beta}^{\ \eta}{}_{;\,\lambda})] \tag{4.10}$$

e

$$T^{ef}_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi G}\left(Q_{\mu\nu} - S_{\mu\nu}^{\ \ \ \rho}{}_{;\,\rho}\right) \quad , \tag{4.11}$$

onde

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu} \ \equiv \ & \frac{1}{2}h^{\rho\tau}_{\ \ ;\,\mu}h_{\rho\tau\,;\,\nu} - h_{\nu}^{\ \tau\,;\,\rho}(h_{\tau\mu\,;\,\rho} - h_{\rho\mu\,;\,\tau}) \\ & -\frac{1}{2}h^{\,;\tau}\left(h_{\tau\mu\,;\,\nu} + h_{\tau\nu\,;\,\mu} - h_{\mu\nu\,;\,\tau}\right) + \frac{1}{2}g^{(0)}_{\mu\nu} \times \\ & \left[\frac{1}{2}h^{\rho\tau;\alpha}h_{\rho\tau;\alpha} - h^{\alpha\tau;\rho}h_{\alpha\rho;\tau} + h^{;\tau}\left(h_{\tau\alpha}^{\ \ ;\,\alpha} - \frac{1}{2}h_{\,;\,\tau}\right)\right], \end{aligned} \tag{4.12}$$

$h \equiv g^{(0)\mu\nu}h_{\mu\nu}$, e

$$
\begin{aligned}
S_{\mu\nu}{}^{\rho} \;\equiv\; & \delta_{\nu}{}^{\rho} h^{\alpha\tau} h_{\alpha\tau\,;\,\mu} + h^{\rho\tau}(h_{\mu\nu\,;\,\tau} - h_{\tau\mu\,;\,\nu} - h_{\tau\nu\,;\,\mu}) \\
& + g^{(0)}_{\mu\nu} \left[h^{\rho\tau} \left(h_{\tau\alpha}{}^{;\,\alpha} - \frac{1}{2} h_{\,;\,\tau} \right) - \frac{1}{2} h_{\alpha\tau} h^{\alpha\tau\,;\,\rho} \right] \quad . \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

De (4.11) vemos imediatamente que o TMEE - assim como a perturbação $h_{\mu\nu}$, cujos índices são levantados com a métrica não-perturbada $g^{(0)\mu\nu}$ - não é um objeto covariante. De fato, sob uma transformação de coordenadas (3.3), $Q_{\mu\nu}$ terá, simbolicamente, termos da forma

$$
Q\,' \approx Q + \partial h \partial^2 \xi + (\partial^2 \xi)(\partial^2 \xi) \quad .
$$

Usando as propriedades (3.25), as equações de movimento (3.27) e escrevendo cada um dos dois últimos termos da expressão acima como um divergente, obtemos:

$$
T\,'^{\,ef}_{\mu\nu} = T^{ef}_{\mu\nu} + U_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{;\rho} \quad . \qquad (4.14)
$$

Veremos a seguir que somente a média do TMEE, calculada em regiões do espaço que contém muitos comprimentos de onda [29], é invariante por transformações de calibre.

4.1.2 Invariância do TMEE no limite de altas freqüências

A expressão (4.11) pode ser simplificada calculando-se sua média sobre regiões do espaço cuja dimensão característica d é tal que $\lambda \ll d \ll L$, ou seja, em regiões onde o espaço é essencialmente plano.

Nesse limite, a média de $T^{ef}_{\mu\nu}$ é definida pela integral [29]

$$\left\langle T^{ef}_{\mu\nu}\right\rangle \equiv \int g_{\mu}{}^{\alpha\,'}(x,x\,')g_{\nu}{}^{\beta\,'}(x,x\,')T^{ef}_{\alpha\,'\beta\,'}(x\,')f(x,x\,')d^4x\,' \quad , \tag{4.15}$$

onde $g_{\mu}{}^{\alpha\,'}(x,x\,') \equiv \left(\delta_{\mu}{}^{\alpha\,'} + \Gamma^{\alpha\,'}_{\mu\beta}dx^{\beta}\right)$ é o chamado *bivetor do transporte paralelo* e $f(x,x\,')$ é uma função peso normalizada ($\int_V f(x,x\,')d^4x\,' = 1$, onde $V \equiv$todo espaço) que vai suavemente à zero quando x e $x\,'$ diferem por uma distância d .

Tomando-se a média de $S_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{;\rho}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \left\langle S_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{;\rho}\right\rangle &= \int g_{\mu}{}^{\alpha\,'}g_{\nu}{}^{\beta\,'}S_{\alpha\,'\beta\,'}{}^{\rho\,'}{}_{;\rho\,'}fd^4x \\ &= \int [(ggSf)_{;\rho\,'} - (g_{;\rho\,'}gSf) - \\ &\quad -(gg_{;\rho\,'}Sf) - (ggSf_{;\rho\,'})]d^4x \quad , \end{aligned} \tag{4.16}$$

onde os índices em $g_{\mu}{}^{\alpha'}$ e $S_{\mu\nu}{}^{\rho}$ foram suprimidos para simplificar a notação.

O primeiro termo da expressão acima pode ser escrito como uma integral de superfície sobre uma região em que $f(x,x\,')$ tende a zero , de tal maneira que sua contribuição para a média final será nula. Por outro lado, $\partial g = \mathcal{O}(1/L)$, $S = \mathcal{O}(1/\lambda)$ e $\partial f = \mathcal{O}(1/d)$ enquanto que $S_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{;\rho} = \mathcal{O}(1/\lambda^2)$. Ou seja, sob integrais da forma (4.15), divergentes são reduzidos por um fator de λ/L e também podem ser desprezados:

$$\left\langle S_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{;\rho}\right\rangle = \mathcal{O}(\lambda/L) \quad . \tag{4.17}$$

Conseqüentemente,

$$
\begin{aligned}
\left\langle P_{\nu\mu}{}^{\tau}{}_{;\tau}\right\rangle &\equiv \left\langle (h_{\nu}{}^{\tau\,;\,\rho}h_{\rho\nu})_{;\tau}\right\rangle \\
&= \left\langle h_{\nu}{}^{\tau\,;\,\rho}h_{\rho\mu\,;\,\tau}\right\rangle + \left\langle h_{\nu}{}^{\tau\,;\,\rho}{}_{;\,\tau}h_{\rho\mu}\right\rangle \\
&\rightarrow 0 \ .
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\left\langle h_{\nu}{}^{\tau\,;\,\rho}h_{\rho\mu\,;\,\tau}\right\rangle = -\left\langle h_{\nu}{}^{\tau\,;\,\rho}{}_{;\,\tau}h_{\rho\mu}\right\rangle \quad . \tag{4.18}
$$

Finalmente, como derivadas covariantes são comutativas no limite de altas freqüências (Eq.(3.25)) e $h \equiv g^{(0)\mu\nu}h_{\mu\nu} = 0$ no calibre transverso traço-nulo, somente a média do primeiro termo de (4.12) é não-trivial, de tal modo que

$$
\left\langle T^{ef}_{\mu\nu}\right\rangle = \frac{1}{32\pi G}\left\langle h^{\rho\tau}{}_{;\,\mu}h_{\rho\tau\,;\,\nu}\right\rangle \quad , \tag{4.19}
$$

conhecida como *fórmula de Isaacson* para o tensor de momento e energia da gravitação.

A Eq.(4.14) estabelece a dependência de calibre do pseudo-tensor de momento e energia. Porém, dado que a média definida em (4.15) reduz a ordem de grandeza de divergentes por um fator de λ/L , temos:

$$
\left\langle T'^{\,ef}_{\mu\nu}\right\rangle = \left\langle T^{ef}_{\mu\nu}\right\rangle \quad . \tag{4.20}
$$

Tomando-se o divergente de (4.19), vemos ainda que, de (4.18) e das equações de movimento (3.27), a média do TMEE também é conservada.

Usando (4.19), podemos calcular a energia transportada por uma onda plana. De (3.15), temos:

$$
\begin{aligned}
h^{\rho\tau}{}_{;\,\mu} &= \left(\eta^{\rho\alpha}\eta^{\tau\beta}h_{\alpha\beta}\right)_{;\,\mu} = \left(\eta^{\rho\alpha}\eta^{\tau\beta}h_{\alpha\beta}\right)_{,\,\mu} \\
&= \eta^{\rho\alpha}\eta^{\tau\beta}h_{\alpha\beta\,,\,\mu} \\
&= ik_\mu\left[e^{\rho\tau}\exp(ik_\sigma x^\sigma) - e^{*\rho\tau}\exp(-ik_\sigma x^\sigma)\right] \quad .
\end{aligned}
$$

$$
h_{\rho\tau\,;\,\nu} = ik_\nu\left[e_{\rho\tau}\exp(ik_\sigma x^\sigma) - e^{*}{}_{\rho\tau}\exp(-ik_\sigma x^\sigma)\right] \quad .
$$

$$
\begin{aligned}
h^{\rho\tau}{}_{;\,\mu}h_{\rho\tau\,;\,\nu} &= k_\mu k_\nu[e^{\rho\tau}e^{*}{}_{\rho\tau} + e^{*\rho\tau}e_{\rho\tau} \\
&- e_{\rho\tau}e^{\rho\tau}\exp(2ik_\sigma x^\sigma) - e^{\rho\tau}e^{*}{}_{\rho\tau}\exp(-2ik_\sigma x^\sigma)] \quad .
\end{aligned}
$$

O cálculo da média de $h^{\rho\tau}{}_{;\,\mu}h_{\rho\tau\,;\,\nu}$ anula todos os termos proporcionais a $\exp(\pm 2ik_\sigma x^\sigma)$. Portanto, para uma onda que se propaga na direção z ,

$$
\begin{aligned}
\left\langle T^{ef}_{\mu\nu}\right\rangle &= \frac{1}{16\pi G}\left(k_\mu k_\nu e^{\rho\tau}e^{*}_{\rho\tau}\right) \\
&= \frac{k_\mu k_\nu}{16\pi G}\left(e^{11}e^{*}_{11} + e^{12}e^{*}_{12} + e^{21}e^{*}_{21} + e^{22}e^{*}_{22}\right) \\
&= \frac{k_\mu k_\nu}{8\pi G}\left(|e_{11}|^2 + |e_{12}|^2\right) \quad . \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

No caso em que $h_{\alpha\beta}$ é dado por (3.28), temos [2]:

$$
\begin{aligned}
\left\langle T^{ef\,(WKB)}_{\alpha\beta} \right\rangle &\approx \left\langle \frac{1}{32\pi G}\mathcal{A}^2 k_\alpha k_\beta \sin^2\phi \right\rangle \\
&= q^2 k_\alpha k_\beta \quad , \\
& \quad q^2 \equiv \frac{1}{64\pi G}\mathcal{A}^2 \quad .
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

Com o TMEE escrito na forma (4.22) e lembrando que $k^\tau k_\tau = 0$, as Eqs.(4.4) escrevem-se como:

$$
{}^{(0)}R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{8}\mathcal{A}^2 k_\alpha k_\beta \quad . \tag{4.23}
$$

4.1.3 TMEE no calibre de Regge-Wheeler

Em sua forma geral, o TMEE é dado por

$$
T^{ef}_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G}\,{}^{(2)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{(0)}_{\mu\nu}\,{}^{(2)}R \quad . \tag{4.24}
$$

Em componentes mistas,

$$
\begin{aligned}
T^{ef\,\mu}{}_{\nu} \;=\; & \frac{1}{8\pi G}\Big[g^{(0)\mu\alpha}\,{}^{(2)}R_{\alpha\nu} - h^{\mu\alpha}\,{}^{(1)}R_{\alpha\nu} + h^{\mu}{}_{\beta} h^{\beta\alpha}\,{}^{(0)}R_{\alpha\nu} \\
& -\frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}\left(g^{(0)\sigma\tau}\,{}^{(2)}R_{\sigma\tau} - h^{\sigma\tau}\,{}^{(1)}R_{\sigma\tau} + h^{\sigma}{}_{\alpha} h^{\alpha\tau}\,{}^{(0)}R_{\sigma\tau} \right)\Big]
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

No calibre de Regge-Wheeler, as perturbações ímpares são dadas por (3.50). Substituindo-as em (4.25) e lembrando que a métrica não-perturbada é a métrica de Schwarzschild (2.15), obtemos a seguinte expressão para a componente mista $0-1$:

$$T^{ef\,0}{}_{1} = \frac{1}{8\pi G}\left[g^{(0)00\;(2)}R_{01} - h^{03\;(1)}R_{31}\right] \quad , \tag{4.26}$$

onde ${}^{(2)}R_{\mu\nu}$ e ${}^{(1)}R_{\mu\nu}$ são dados por (4.7) e (3.20), respectivamente.

As conexões de primeira ordem não-nulas em (4.26) são:

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}\Gamma^3_{00} &= g^{(0)33}h_{03,0} + \frac{1}{2}h^{13}g^{(0)}_{00\,,\,1} & {}^{(1)}\Gamma^1_{03} &= \frac{1}{2}g^{(0)11}\left(h_{13\,,\,0} - h_{03\,,\,1}\right) \\
{}^{(1)}\Gamma^2_{03} &= -\frac{1}{2}g^{(0)22}\left(h_{03\,,\,2}\right) & {}^{(1)}\Gamma^3_{01} &= \frac{1}{2}g^{(0)33}\left(h_{30\,,\,1} + h_{31\,,\,0}\right) \\
& & &\quad -\frac{1}{2}h^{30}g^{(0)}_{00\,,\,1} \\
{}^{(1)}\Gamma^3_{02} &= \frac{1}{2}g^{(0)33}h_{30\,,\,2} & {}^{(1)}\Gamma^3_{11} &= g^{(0)33}h_{31\,,\,1} - \frac{1}{2}h^{31}g^{(0)}_{11\,,\,1} \\
{}^{(1)}\Gamma^3_{12} &= g^{(0)33}h_{31\,,\,2} & {}^{(1)}\Gamma^0_{13} &= \frac{1}{2}g^{(0)00}\left(h_{03\,,\,1} - h_{13\,,\,0}\right) \\
& & &\quad -\frac{1}{2}h^{03}g^{(0)}_{33\,,\,1} \\
{}^{(1)}\Gamma^1_{13} &= -\frac{1}{2}h^{13}g^{(0)}_{33\,,\,1} & {}^{(1)}\Gamma^2_{13} &= -\frac{1}{2}g^{(0)22}h_{13\,,\,2} \\
{}^{(1)}\Gamma^3_{33} &= \frac{1}{2}h^{31}g^{(0)}_{33\,,\,1}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

E as de segunda ordem são:

$$
\begin{aligned}
{}^{(2)}\Gamma^{0}_{00} &= -h^{03}h_{30\,,\,0} - \frac{1}{2}h^{0}{}_{3}h^{31}g^{(0)}_{00\,,\,1} & {}^{(2)}\Gamma^{1}_{01} &= \frac{1}{2}[-h^{13}(h_{30\,,\,1} + h_{31\,,\,0}) \\
& & &\quad +h^{1}{}_{3}h^{30}g^{(0)}_{00\,,\,1}] \\
{}^{(2)}\Gamma^{3}_{03} &= \frac{1}{2}\left(h^{31}h_{03\,,\,1} - h^{31}h_{13\,,\,0}\right) & {}^{(2)}\Gamma^{0}_{01} &= \frac{1}{2}[-h^{03}(h_{30\,,\,1} + h_{31\,,\,0}) \\
& & &\quad +h^{0}{}_{3}h^{30}g^{(0)}_{00\,,\,1}] \\
{}^{(2)}\Gamma^{0}_{11} &= -h^{03}h_{31\,,\,1} + \frac{1}{2}h^{0}{}_{3}h^{31}g^{(0)}_{11\,,\,1}
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

Substituindo-as em (4.7) e (3.20), obtemos:

$$
\begin{aligned}
{}^{(2)}R_{01} \quad = \quad & \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Bigg\{ r^2 h_{30\,,\,0}\left(\frac{h_{03}}{\Gamma r^2}\right)_{,\,1} + \frac{h_{30\,,\,01}h_{03}}{\Gamma} - \frac{\Gamma_{\,,\,1}}{2}\left(\frac{h_{03}}{\Gamma}\right)_{,\,1} h_{31}\Gamma \\
& + \frac{\Gamma_{\,,\,1}h_{30}}{2\Gamma}\left[-r^2\left(\frac{h_{31}\Gamma}{r^2}\right)_{,\,1} + \frac{2h_{31}\Gamma}{r}\right] + \frac{r^2}{2}\left(\frac{h_{31}\Gamma}{r^2}\right)_{,\,1} h_{03\,,\,1} \\
& + \frac{\Gamma h_{31}}{2}\left[h_{03\,,\,11} - r^2\left(\frac{h_{31}\Gamma}{r^2}\right)_{,\,1} h_{13\,,\,0} - h_{13\,,\,01}\right] \\
& - \frac{1}{2\Gamma}\left[h_{03\,,\,0}\left(h_{30\,,\,1}+h_{31\,,\,0}\right) + h_{03}\left(h_{30\,,\,10}+h_{31\,,\,00}\right)\right] \\
& + \frac{\Gamma_{\,,\,1}}{\Gamma^2}h_{03\,,\,0}h_{30} + \frac{\Gamma\Gamma_{\,,\,1}}{2}\left[\frac{h_{03}h_{31\,,\,1}}{\Gamma} - h_{03}h_{31}\left(\frac{1}{\Gamma}\right)_{,\,1}\right] \\
& + \frac{\Gamma h_{13}}{2r}\left[2h_{03\,,\,1} - \frac{h_{30}\Gamma_{\,,\,1}}{\Gamma}\right] - \frac{\Gamma_{\,,\,1}h_{13}}{4}\left(h_{03\,,\,1}-h_{13\,,\,0}\right) \\
& - \frac{\Gamma h_{13}}{2}\left(\frac{\Gamma_{\,,\,1}}{2\Gamma}+\frac{1}{r}\right)\left[\frac{h_{30}\Gamma_{\,,\,1}}{\Gamma} - \left(h_{30\,,\,1}+h_{31\,,\,0}\right)\right] \\
& + \left(h_{03\,,\,0} - \frac{h_{13}\Gamma\Gamma_{\,,\,1}}{2}\right)\left[-\frac{1}{2\Gamma}\left(h_{03\,,\,1}-h_{13\,,\,0}\right) + \frac{h_{03}}{\Gamma r}\right] \\
& - \frac{h_{30\,,\,2}h_{13\,,\,2}}{2r^2} + \left[\frac{\Gamma}{2}\left(h_{13\,,\,0}-h_{03\,,\,1}\right)\left(h_{31\,,\,1} - \frac{h_{31}\Gamma}{2}\left(\frac{1}{\Gamma}\right)_{,\,1}\right)\right] \\
& - \frac{\Gamma h_{31}}{2r}\left[\left(h_{30\,,\,1}+h_{31\,,\,0}\right) - \frac{h_{30}\Gamma_{\,,\,1}}{\Gamma}\right]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

e

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}R_{31} \quad = \quad & -\frac{h_{03\,,\,0}}{\Gamma r} + \frac{1}{2\Gamma}\left(h_{03\,,\,10}-h_{13\,,\,00}\right) + \frac{h_{13\,,\,22}}{2r^2} \\
& + \left(\frac{h_{31}\Gamma}{r^2}\right)_{,\,1} r + \frac{h_{31}\Gamma}{r^2} - \frac{\Gamma}{r}\left[h_{31\,,\,1} - \frac{h_{31}\Gamma}{2}\left(\frac{1}{\Gamma}\right)_{,\,1}\right] - \frac{\cos\theta h_{31\,,\,2}}{2r^2} \\
& + \frac{\Gamma_{\,,\,1}h_{31}}{2r} + \frac{2h_{13}\Gamma}{r^2}
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

Portanto, em termos das funções $h_0^\ell(t,r)$ e $h_1^\ell(t,r)$,

$$
\begin{aligned}
{}^{(2)}R^0{}_1(g^{(0)},h) \;=\; & \sum_\ell \Bigg\{ h_1^\ell \left(\frac{\partial P_\ell(\cos\theta)}{\partial\theta}\right)^2 \left(\frac{h_0^\ell}{r^4} - \frac{h^\ell_{0\,,\,11}}{2r^2} - \frac{h^\ell_{1\,,\,0}}{r^3} + \frac{h^\ell_{1\,,\,01}}{2r^2}\right) \\
& + \frac{h_1^\ell h_0^\ell}{2r^4\Gamma}\Big[3\cot\theta P_\ell(\cos\theta)_{\,,\,2} P_\ell(\cos\theta)_{\,,\,22} + P_\ell^2(\cos\theta)_{\,,\,22} \\
& + P_\ell(\cos\theta)_{\,,\,2} P_\ell(\cos\theta)_{\,,\,222} - P_\ell^2(\cos\theta)_{\,,\,2}\Big]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

A média angular de ${}^{(2)}R^0{}_1(g^{(0)},h)$, definida por

$$
\left\langle {}^{(2)}R^0{}_1(g^{(0)},h)\right\rangle_\Omega = \frac{1}{2}\int d\theta \sin\theta\, {}^{(2)}R^0{}_1(g^{(0)},h) \quad ,
$$

contém termos da forma

$$
\left\langle f(t,r) P^2_{\ell\,,\,2}\right\rangle_\Omega = \frac{f(t,r)}{2}\int d\theta \sin\theta P^2_{\ell\,,\,2}
$$

- além daqueles relacionados com os termos que dependem de $\frac{1}{\Gamma}$. Multiplicando a Equação de Legendre por $P_{\ell'}(x)$ e integrando-a de -1 a 1 , obtemos:

$$
\int_{-1}^{1} P_{\ell'}\frac{d}{dx}\left[(1-x)^2\frac{dP_\ell(x)}{dx}\right]dx = -\ell(\ell+1)\int_{-1}^{1} P_{\ell'}P_\ell dx
$$

$$
-\int_{-1}^{1} dx(1-x^2)\frac{dP_\ell}{dx}\frac{dP_{\ell'}}{dx}dx = -\ell(\ell+1)\frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\,,\,\ell'}
$$

$$
\left\langle f(t,r) P^2_{\ell\,,\,2}\right\rangle_\Omega = \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1} f(t,r) \tag{4.32}
$$

Por outro lado, os termos entre colchetes que dependem de $\frac{1}{\Gamma}$ podem ser reduzidos a uma derivada total em relação a θ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
3\cot\theta P_\ell(\cos\theta)_{,2}P_\ell(\cos\theta)_{,22} + P_\ell^2(\cos\theta)_{,22} & \\
+P_\ell(\cos\theta)_{,2}P_\ell(\cos\theta)_{,222} - P_\ell^2(\cos\theta)_{,2} &= \\
\cot\theta P_{\ell,2}P_{\ell,22} + P^2_{\ell,22} - P^2_{\ell,2} & \\
+2\cot\theta P_{\ell,2}P_{\ell,22} + P_{\ell,2}P_{\ell,222} &= \qquad (4.33)\\
\frac{P_{\ell,22}}{\sin\theta}\left(\cos\theta P_{\ell,2} + \sin\theta P_{\ell,22}\right) & \\
+\frac{P_{\ell,2}}{\sin\theta}\left(-\sin\theta P_{\ell,2} + \cos\theta P_{\ell,22} + \cos\theta P_{\ell,22} + \sin\theta P_{\ell,222}\right) &= \\
\frac{1}{\sin\theta}\left[P_{\ell,22}\left(\cos\theta P_{\ell,2} + \sin\theta P_{\ell,22}\right) + P_{\ell,2}\left(\cos\theta P_{\ell,2} + \sin\theta P_{\ell,22}\right)_{,2}\right] &= \\
\frac{1}{\sin\theta}\left[P_{\ell,2}\left(\cos\theta P_{\ell,2} + \sin\theta P_{\ell,22}\right)\right]_{,2} &
\end{aligned} \tag{4.34}$$

A média angular de (4.34) é nula, de tal modo que [10]

$$\left\langle {}^{(2)}R^0{}_1(g^{(0)},h)\right\rangle_\Omega = \sum_\ell \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1}h_1^\ell\left[\frac{1}{2r^2}\left(h^\ell_{1,01} - h^\ell_{0,11}\right) + \frac{h_0^\ell}{r^4} - \frac{h^\ell_{1,0}}{r^3}\right] . \tag{4.35}$$

4.2 Equações de Retro-Ação

A solução exata de (4.23) para uma situação particular em que a radiação - emitida por um corpo de massa m que é, em uma média sobre seus vários modos independentes de vibração, esfericamente simétrico - se propaga como uma casca esférica foi encontrada em 1951 por Vaidya [30, 31, 32]:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2m(u)}{r}\right) du^2 + 2dudr - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \quad . \tag{4.36}$$

Para $m(u) = constante$, a métrica (4.36) reduz-se à métrica de Schwarzschild escrita em coordenadas de Eddington-Finkelstein (Eq.(2.18)).

De modo equivalente, podemos tratar o mesmo problema introduzindo na métrica total uma perturbação de segunda ordem - independente da perturbação de primeira ordem - que descreve a distribuição de energia esfericamente simétrica e onde $g^{(0)}_{\alpha\beta}$ é dado por (2.15). Assim [10],

$$g_{\alpha\beta} = g^{(0)}_{\alpha\beta}(r) + h_{\alpha\beta}(x) + h^{(2)}_{\alpha\beta}(t,r) \quad . \tag{4.37}$$

Decompondo o tensor de Einstein até segunda ordem, as equações de campo no vácuo são:

$$\begin{aligned} {}^{(0)}G_{\alpha\beta}\left(g^{(0)}\right) &= 0 \\ {}^{(1)}G_{\alpha\beta}\left(g^{(0)}, h\right) &= 0 \\ {}^{(1)}G_{\alpha\beta}\left(g^{(0)}, h^{(2)}\right) &= -\left\langle {}^{(2)}G_{\alpha\beta}\left(g^{(0)}, h\right)\right\rangle_\Omega \equiv -8\pi G \left\langle T^{ef}_{\alpha\beta}\right\rangle_\Omega \quad , \end{aligned} \tag{4.38}$$

As Eqs.(4.38) são conhecidas pelo nome de "Equações de Retro-Ação" [1].

Devido à emissão de radiação, o buraco negro perturbado deve perder massa (ou ganhar alguma se parte da radiação se propagar na direção do horizonte), de tal modo que as perturbações de segunda ordem podem ser escritas como:

[1] Em inglês, "backreaction".

$$
\begin{aligned}
g_{00} &\rightarrow -\Gamma - \frac{2G\Delta_0 M(t,r)}{r} \quad , \\
g_{11} &\rightarrow \left[\Gamma + \frac{2G\Delta_1 M(t,r)}{r}\right]^{-1} \quad , \\
0 &< \Delta_i M \ll M \quad .
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

$\Delta_0 M$ e $\Delta_1 M$ são as chamadas *perturbações de monopolo* [6, 33].

Portanto,

$$
h^{(2)}_{\alpha\beta} = diag\left(-\frac{2G\Delta_0 M(r,t)}{r}, -\frac{2G\Delta_1 M(t,r)}{\Gamma^2 r}, 0, 0\right)
\tag{4.40}
$$

e

$$
h^{(2)\alpha\beta} = diag\left(\frac{2G\Delta_0 M(r,t)}{r\Gamma}, \frac{2G\Delta_1 M(t,r)}{r}, 0, 0\right) \quad .
\tag{4.41}
$$

A Eq.(4.38) relaciona a variação de massa do Buraco Negro perturbado com a energia emitida na forma de radiação gravitacional. Ora, o fluxo de energia é representado pela componente $0-1$ do TMEE. De (4.38), temos:

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}G^{\mu}{}_{\nu}\left(g^{(0)}, h^{(2)}\right) &= {}^{(0)}g^{\mu\alpha\,(1)}R_{\alpha\nu} - h^{(2)\mu\alpha\,(0)}R_{\alpha\nu} \\
&\quad -\frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}\left(g^{(0)\sigma\tau\,(1)}R_{\sigma\tau} - h^{(2)\sigma\tau\,(0)}R_{\sigma\tau}\right) \\
{}^{(1)}G^{0}{}_{1}\left(g^{(0)}, h^{(2)}\right) &= {}^{(0)}g^{0\alpha\,(1)}R_{\alpha 1}\left(g^{(0)}, h^{(2)}\right) \\
&= -\frac{1}{\Gamma}\,{}^{(1)}R_{01}\left(g^{(0)}, h^{(2)}\right) \quad ,
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

onde ${}^{(1)}R_{01}\left(g^{(0)}, h^{(2)}\right)$ é dado por (3.20).

As conexões de primeira ordem não-nulas de (4.42) são:

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2} g^{(0)00} h^{(2)}_{00\,,\,0} & {}^{(1)}\Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2} g^{(0)11} h^{(2)}_{11\,,\,0} \\
{}^{(1)}\Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2}\left(-g^{(0)00} h^{(2)}_{00\,,\,1} - h^{(2)00} g^{(0)}_{00\,,\,1}\right) & {}^{(1)}\Gamma^0_{11} &= -\frac{1}{2} g^{(0)00} h^{(2)}_{11\,,\,0}
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

Substituindo-as em (3.20), obtemos [10]:

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}R_{01}\left(g^{(0)}, h^{(2)}\right) &= {}^{(1)}\Gamma^0_{11}\; {}^{(0)}\Gamma^1_{00} - \\
&\quad {}^{(1)}\Gamma^1_{01}\left({}^{(0)}\Gamma^0_{10} +^{(0)} \Gamma^2_{12} +^{(0)} \Gamma^3_{13}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,(-g^{(0)00}\, h^{(2)}_{11\,,\,0}\, \frac{\Gamma}{2} \frac{d}{dr}\Gamma - g^{(0)11}\, h^{(2)}_{11\,,\,0}\, \frac{1}{2\Gamma}\frac{d}{dr}\Gamma \\
&\quad -g^{(0)11}\, h^{(2)}_{11\,,\,0}\, \frac{2}{r}) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\Gamma \frac{2}{r} h^{(2)}_{11\,,\,0}\right) \\
&= \frac{2G\Delta_1 \dot{M}(t,r)}{r^2 \Gamma}
\end{aligned}
$$

$$
{}^{(1)}R^0{}_1\left(g^{(0)}, h^{(2)}\right) = -\frac{2G\Delta_1 \dot{M}(t,r)}{r^2\Gamma^2} \quad , \tag{4.44}
$$

onde $\Delta_1 \dot{M}(t,r) \equiv \frac{\partial}{\partial t} M(t,r)$.

No calibre de Regge-Wheeler, o TMEE é dado por (4.35). Conseqüentemente,

$$
\frac{2G\Delta_1 \dot{M}(t,r)}{r^2\Gamma^2} = \sum_\ell \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1} h^\ell_1 \left[\frac{1}{2r^2}\left(h^\ell_{1\,,\,01} - h^\ell_{0\,,\,11}\right) + \frac{h^\ell_0}{r^4} - \frac{h^\ell_{1\,,\,0}}{r^3}\right] \quad . \tag{4.45}
$$

Capítulo 5

Soluções assintóticas da Equação de Regge-Wheeler

Para valores de $\ell \geq 2$, o potencial de curvatura $V(r)$, definido em (3.55), comporta-se da mesma maneira, isto é, é positivo em todo o intervalo $-\infty < r^* < \infty$, atinge um máximo global e tem as seguintes formas assintóticas [28]:

$$
\begin{aligned}
V(r) &\rightarrow \frac{1}{r^2} \quad , \quad r^* \rightarrow \infty \\
V(r) &\rightarrow \exp\left(\frac{r^*}{2GM}\right) \quad , \quad r^* \rightarrow -\infty
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Note que a independência temporal do potencial de curvatura - que é uma conseqüência da independência temporal da métrica de Schwarzschild escrita em coordenadas padrão - permite considerarmos perturbações com uma única freqüência, de tal modo que o problema descrito pela Equação de Regge-Wheeler é formalmente idêntico ao problema de espalhamento em Mecânica

Quântica [34].

Assumindo uma dependência harmônica no tempo e escrevendo as perturbações de primeira ordem em coordenadas de Kruskal, Vishveshwara investigou a estabilidade do horizonte de Schwarzschild [16], demonstrando que freqüências puramente imaginárias que implicariam a instabilidade da métrica de Schwarzschild são fisicamente inadmissíveis.

Em coordenadas padrão, a evolução temporal das perturbações também podem ser estudadas admitindo-se como soluções assintóticas uma expansão em termos de $1/r$ quando $r \to \infty$ [10, 11, 4] e uma expansão em termos de Γ quando $r \to 2GM$.

5.1 Estabilidade da métrica de Schwarzschild

5.1.1 Perturbações com freqüência imaginária

Seja

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad ,$$

onde $g^{(0)}_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}$ são dados por (2.15) e (3.50), respectivamente. Nesse caso, a equação que determina as componentes de $h_{\mu\nu}$ é a Equação de Regge-Wheeler (3.54).

Note que, uma vez que $g^{(0)}_{\mu\nu}$ é independente de t , a dependência temporal de $h_{\mu\nu}$ pode ser escrita como $\exp(-ikt)$, de tal modo que (3.54) escreve-se como:

$$\frac{d^2\chi}{dr^{*2}} + [k^2 - V(r)]\chi = 0 \quad . \tag{5.2}$$

Para perturbações com freqüência $k = \alpha i$, onde α é um número real positivo, temos:

$$\frac{d^2\chi}{dr^{*2}} = [\alpha^2 + V(r)]\chi \quad . \tag{5.3}$$

Visto que o potencial de espalhamento vai à zero nas regiões $r = 2GM$ e $r \to \infty$, as soluções de (5.3) são:

$$\chi_\infty \approx \exp(\pm\alpha r)$$

e

$$\chi_{2GM} \approx \exp(\pm\alpha r^*) \quad .$$

Como em $r \to \infty$ o espaço-tempo deve ser plano, então

$$\chi_\infty \approx \exp(-\alpha r) \quad .$$

De (5.3), vemos que, para χ positivo, $d^2\chi/dr^{*2}$não pode ser negativo, de tal modo que soluções que vão à zero em $r \to \infty$ não podem ir suavemente à zero em $2GM$. Portanto, escritas em coordenadas de Schwarzschild, as soluções regulares em $r = 2GM$ devem ser excluídas:

$$\chi_{2GM} = A\exp(-\alpha r^*) \quad ,$$

onde $A = constante$.

O fato de termos soluções divergentes em $2GM$ não significa que a métrica de Schwarzschild é instável - o que impediria a existência na natureza de corpos que sofreram um colapso esférico para além do horizonte de eventos - pois a própria métrica de Schwarzschild apresenta uma singularidade aparente nesse ponto. Devemos, necessariamente, expressá-las em um sistema de coordenadas que seja regular em todos os pontos do espaço - com excessão, naturalmente, do ponto $r = 0$, que é uma singularidade física não-removível - impor que sejam regulares no instante $t = 0$ e analisar sua dependência temporal.

Em coordenadas de Kruskal, o invariante de tempo próprio $d\tau^2$ é dado por (2.19), de onde podem ser deduzidas as seguintes relações:

$$
\begin{aligned}
\exp\left(\frac{r^*}{2GM}\right) &= U^2 - V^2 \ , \\
\exp\left(\frac{t}{2GM}\right) &= \frac{U+V}{U-V} \ .
\end{aligned}
$$

Usando a Lei de Transformação Tensorial, podemos escrever as componentes de $h_{\mu\nu}$ como:

$$
\begin{aligned}
h^k_{00} &= f^2(U^2-V^2)^{-1}[U^2(1-2GM/r)^{-1}h^s_{00} + V^2h^s_{11}(1-2GM/r) - 2UVh^s_{01}] \\
h^k_{11} &= f^2(U^2-V^2)^{-1}[V^2(1-2GM/r)^{-1}h^s_{00} + U^2h^s_{11}(1-2GM/r) - 2UVh^s_{01}] \\
h^k_{01} &= f^2(U^2-V^2)^{-1}\{(U^2+V^2)h^s_{01} - UV[(1-2GM/r)^{-1}h^s_{00} \\
&\quad +(1-2GM/r)h^s_{11}]\} \\
h^k_{03} &= 4m(U^2-V^2)^{-1}[Uh^s_{03} - V(1-2GM/r)h^s_{13}] \\
h^k_{13} &= -4m(U^2-V^2)^{-1}[Vh^s_{03} - U(1-2GM/r)h^s_{13}]
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

onde $h^k_{\mu\nu}$e $h^s_{\mu\nu}$ são as perturbações escritas em coordenadas de Kruskal e Schwarzschild, respectivamente.

Em $r = 2GM$,

$$
\begin{aligned}
h_0^s &= -2GMA\chi_{2GM} \quad , \\
h_0^k &= 8G^2M^2A\left(U^2+V^2\right)^{2Gm\alpha}(U-V)^{-(4GM\alpha+1)} \quad .
\end{aligned}
$$

Em $t = 0$ ($V = 0$),

$$
h_{03}^k(t=0) = 8G^2M^2AU^{-(2GM\alpha+1)} \quad . \tag{5.5}
$$

No limite $U \to 0$, $h_{03}^k(t=0) \to \infty$, enquanto que $g_{\mu\nu}(t=0, r=2GM)$ é regular. Isso contradiz a hipótese básica de que as perturbações devem ser pequenas comparadas com a métrica não-perturbada. Conseqüentemente, perturbações com freqüência puramente imaginária que crescem exponencialmente com o tempo são proibidas e, portanto, a métrica é estável.

Conclusões análogas podem ser obtidas para o caso de perturbações pares [16].

5.1.2 Perturbações com freqüência real

Nesse caso, a solução de (5.2) em $r = 2GM$ é:

$$
\chi_{2GM} = A\exp(\pm ikr^*) \quad ,
$$

onde $A = constante$.

Para uma onda incidente,

$$
\begin{aligned}
\chi_{2GM} &= A\exp(-ikr^*) \\
h_1 &= 2GMA\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}\exp(-ikr^*) \\
h_0 &= 2GMA\exp(-ikr^*) \quad ,
\end{aligned}
$$

de tal modo que

$$
h_{03}^{k} = 8G^2M^2A(U+V)^{-1}(U+V)^{-4ikGM} \quad . \tag{5.6}
$$

Tomando-se a parte real de (5.6), vemos que o termo $(U+V)^{-4ikGM}$ contribui como uma função que oscila rapidamente quando $U=-V$, enquanto que o termo $(U+V)^{-1}$ é divergente. No entanto, para *pacotes de onda* definidos como

$$
f(\xi) = \int A(k)\exp(-ik\xi)dk \tag{5.7}
$$

e que são limitados no plano $U+V<1$ (o que é equivalente a assumir que $f(\xi)=0$ quando $\xi<0$), temos:

$$
\begin{aligned}
h_{03}^{k\,pacote} &= \int dk 8G^2M^2A(k)(U+V)^{-1}\exp[-4ikGM\ln(U+V)] \\
&= \int dk 8G^2M^2A(k)(U+V)^{-1}\exp[-ik\xi] \\
&= 8G^2M^2(U+V)^{-1}f[4m\ln(U+V)] \quad .
\end{aligned}
$$

Portanto, quando $r=2GM$, não há singularidade alguma em $h_{03}^{k\,pacote}$, pois nessa região $f[\xi=4m\ln(U+V)]=0$.

Em $r \to \infty$, as soluções de (5.2) são regulares e terão, tipicamente, partes incidente e refletida. Conseqüentemente, perturbações incidentes nas proximidades de $r = 2GM$ formam um pacote de ondas que são regulares em todos os pontos da geometria de Kruskal, constituindo assim perturbações estáveis e admissíveis fisicamente.

Conclusões análogas também podem ser obtidas para o caso de perturbações pares [16].

5.1.3 Modos quase-normais

Modos normais em sistemas dinâmicos são definidos como sendo movimentos com dependência temporal e^{ikt}, onde k é uma freqüência real. Embora campos gravitacionais perturbativos sobre um fundo de Schwarzschild não possam exibir tais modos (as oscilações devem ser amortecidas pela radiação gravitacional) [3], existem algumas freqüências especiais de interesse, denominadas freqüências *quase-normais.*

Como já fora indicado por Vishveshwara, Chandrasekhar e Cunningham, Price e Moncrief [34, 16, 28, 3], a imposição de condições de contorno da forma

$$\chi \to e^{ikr^*}$$

em $r^* \to -\infty$ e

$$\chi \to e^{-ikr^*}$$

em $r^* \to +\infty$ exige que as freqüências sejam complexas com partes imaginárias negativas. Tal resultado está relacionado com o fenômeno de amortecimento radiativo e espalhamento ressonante. De fato, o campo perturbativo pode ser visto como sendo a fonte de radiação gravitacional em alguma região fora do horizonte de eventos. À medida que a energia associada com esse campo é transportada para $\mathcal{I}^+$ na forma de radiação gravitacional, o amortecimento radiativo fará com que a freqüência seja complexa com a parte imaginária negativa representando o decaimento da fonte.

Por outro lado, se o fenômeno em questão é o espalhamento de ondas gravitacionais, as freqüências quase-normais implicarão pólos na matriz de espalhamento com a conseqüente ocorrência de ressonâncias na seção de choque de espalhamento.

Modos quase-normais têm sido estudados desde o início dos anos 70 [35, 36, 37, 38, 39].

5.2 Solução assintótica em $\mathcal{I}^+$

A forma assintótica do potencial (3.55) em $r \to \infty$ sugere a seguinte expansão para a função $\chi(t,r)$ [10, 11, 4]:

$$\chi_{inf}(t,r) = X_0(u) + \frac{1}{r}X_1(u) + \frac{1}{r^2}X_2(u) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad , \tag{5.8}$$

onde $u = t - r^*$.

Substituindo (5.8) em (3.54) obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\chi_{inf}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\chi_{inf}}{\partial r^{*2}} &= \Gamma\left[-\Gamma\frac{2}{r^3}X_1 - \frac{2}{r^2}\frac{\partial X_1}{\partial u} - \frac{4}{r^3}\frac{\partial X_2}{\partial u} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)\right] \\
&= -V(r)\chi_{inf} \\
&= \left[\frac{3R}{r^3} - \frac{2(\lambda+1)}{r^2}\right]\left[X_0 + \frac{1}{r}X_1 + \frac{1}{r^2}X_2\right] \quad , \\
\lambda + 1 &\equiv \frac{\ell(\ell+1)}{2} \quad .
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

Resolvendo a equação acima ordem a ordem, temos:

-Ordem $1/r^2$:

$$
\frac{1}{\lambda+1}\frac{\partial X_1}{\partial u} = X_0(u) \quad . \tag{5.10}
$$

-Ordem $1/r^3$:

$$
\frac{\partial X_2}{\partial u} = -\frac{X_1}{2} + \frac{(\lambda+1)}{2}X_1 - \frac{3RX_0}{4} \quad .
$$

Segue de (5.10) que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial X_2}{\partial u} &= -\frac{(\lambda+1)}{2}\int^u X_0(u')du' + \frac{(\lambda+1)^2}{2}\int^u X_0(u')du' \\
&\quad -\frac{3RX_0(u)}{4} \quad .
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

Definindo

$$
X_0(u) \equiv \frac{1}{\lambda+1}\ddot{X}(u) \quad , \tag{5.12}
$$

onde $\ddot{X}(u) \equiv \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}$, obtemos:

$$X_1(u) = \dot{X}(u) \tag{5.13}$$

e

$$\begin{aligned} X_2(u) &= -\frac{X(u)}{2} + \frac{(\lambda+1)}{2}X(u) - \frac{3R\dot{X}(u)}{4(\lambda+1)} \\ &= \frac{\lambda}{2}X(u) - \frac{3R\dot{X}(u)}{4(\lambda+1)} \quad . \end{aligned} \tag{5.14}$$

Portanto [10],

$$\chi_{inf}(t,r) = \frac{\ddot{X}(u)}{\lambda+1} + \frac{1}{r}\dot{X}(u) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\lambda X(u)}{2} - \frac{3R}{4(\lambda+1)}\dot{X}(u)\right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad . \tag{5.15}$$

Os coeficientes da métrica $h_0^\ell(t,r)$ e $h_1^\ell(t,r)$ são determinados substituindo a expressão (5.15) em (3.56):

$$h_0^\ell(t,r) = -r\frac{\ddot{X}(u)}{\lambda+1} - \frac{\lambda}{\lambda+1}\dot{X}(u) + \frac{1}{r}\left[-\frac{R\dot{X}(u)}{4(\lambda+1)} - \frac{\lambda X(u)}{2}\right] \tag{5.16}$$

$$h_1^\ell(t,r) = r\frac{\ddot{X}(u)}{\lambda+1} + \left[\frac{R\ddot{X}(u)}{\lambda+1} + \dot{X}(u)\right] + \frac{1}{r}\left[\frac{R^2\ddot{X}(u)}{\lambda+1} + \frac{R\dot{X}(u)}{4\,(\lambda+1)} + \frac{\lambda X(u)}{2}\right] \tag{5.17}$$

A divergência das perturbações, escritas no calibre de Regge-Wheeler, é manifesta. Naturalmente, trata-se de um efeito da escolha de calibre, e quaisquer quantidades físicas, independentemente do calibre em que são expressas, deverão ser finitas nessa região.

5.3 Solução assintótica no horizonte

De modo análogo, escrevemos a solução de (3.54) como uma expansão em termos do fator $\Gamma \equiv 1 - \frac{R}{r}$:

$$\chi_{hor}(t,r) = Y_0(v) + \Gamma Y_1(v) + \Gamma^2 Y_2(v) + \mathcal{O}\left(\Gamma^3\right) \quad , \tag{5.18}$$

onde $v = t + r^*$.

Substituindo (5.18) em (3.54) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi_{hor}}{\partial r^{*2}} - \frac{\partial^2 \chi_{hor}}{\partial t^2} &= \Gamma \left(\frac{Y_1}{R^2} + \frac{2\dot{Y}_1}{R} \right) \\ &\quad + \Gamma^2 \left[-\frac{6Y_1}{R^2} + \frac{4}{R^2} \left(Y_2 + R\dot{Y}_2 - R\dot{Y}_1 \right) \right] \\ &= V \chi_{hor} \\ &= \frac{\Gamma(1-\Gamma)^2}{R^2} \left[2(\lambda+1) - 3(1-\Gamma) \right] \chi \quad , \end{aligned} \tag{5.19}$$

onde $\dot{Y}_i \equiv \frac{\partial Y_i}{\partial v}$.

Em primeira ordem, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \left(\frac{Y_1}{R} + 2\dot{Y}_1 \right) &= \frac{Y_0}{R^2} (2\lambda - 1) \\ &\equiv 2Y(v) \end{aligned}$$

$$\dot{Y}_1 + \frac{Y_1}{2R} = Y$$

$$
\begin{aligned}
Y_1(v) &= \exp\left(-\frac{v}{2R}\right) \int^v \exp\left(\frac{v'}{2R}\right) Y(v') dv' \\
&\equiv \exp\left(-\frac{v}{2R}\right) W(v) \quad .
\end{aligned}
$$

Em segunda ordem,

$$
\begin{aligned}
Y_2 + R\dot{Y}_2 &= R\dot{Y}_1 + \frac{Y_1}{4}(5+2\lambda) + \frac{Y_0}{4}(5-4\lambda) \\
&= \exp\left(-\frac{v}{2R}\right) W \left(\frac{3+2\lambda}{4}\right) \\
&\quad + R\exp\left(-\frac{v}{2R}\right) \dot{W} \left(1 + \frac{5-4\lambda}{2(2\lambda-1)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_2(v) &= \exp\left(-\frac{v}{R}\right) \times \\
&\quad [\frac{3+2\lambda}{4R} \int^v \exp\left(\frac{v'}{2R}\right) W(v') dv' \\
&\quad + \left(1 + \frac{5-4\lambda}{2(2\lambda-1)}\right) \int^v \exp\left(\frac{v'}{2R}\right) \dot{W}(v') dv']
\end{aligned}
$$

Podemos escrever as funções Y_0 , Y_1 e Y_2 em termos de uma função arbitrária $F(v)$ definindo

$$
\dot{F}(v) \equiv \exp\left(-\frac{v}{R}\right) \int^v dv' \exp\left(\frac{v'}{2R}\right) W(v') \quad . \tag{5.20}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\chi_{hor}(t,r) &= \frac{1}{2\lambda-1}\left[2R\frac{\partial\ddot{F}(v)}{\partial v}+3\ddot{F}(v)+\frac{\dot{F}(v)}{R}\right]+\Gamma\left[\ddot{F}(v)+\frac{\dot{F}(v)}{R}\right] \\
&+\Gamma^2\left[\frac{2\lambda+3}{4R}\dot{F}(v)+\frac{3}{2(2\lambda-1)}\left(\ddot{F}(v)+\frac{\dot{F}(v)}{2R}\right)\right] \quad . \qquad (5.21)
\end{aligned}
$$

Substituindo (5.21) em (3.56) e redefinindo as funções $F(v)$ como

$$
\ddot{G}(v) \equiv \frac{\partial\ddot{F}}{\partial v}+\frac{\ddot{F}}{R} \ ,
$$

obtemos:

$$
\begin{aligned}
h_0^\ell(t,r) &= \frac{1}{2\lambda-1}\left[2R^2\ddot{G}(v)+R\dot{G}(v)\right] \\
&+\Gamma\left\{\frac{1}{2\lambda-1}\left[2R^2\ddot{G}(v)+3R\dot{G}(v)+G(v)\right]+R\dot{G}(v)+G(v)\right\} \\
&+\mathcal{O}\left(\Gamma^2\right) \qquad (5.22)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_1^\ell(t,r) &= \frac{1}{\Gamma}\left\{\frac{1}{2\lambda-1}\left[2R^2\ddot{G}(v)+R\dot{G}(v)\right]\right\} \\
&+\Gamma^0\left\{\frac{1}{2\lambda-1}\left[2R^2\ddot{G}(v)+R\dot{G}(v)\right]+R\dot{G}(v)\right\}+\mathcal{O}\left(\Gamma^1\right) \\
& \qquad (5.23)
\end{aligned}
$$

No horizonte, a divergência de h_1^ℓ , expressa no calibre de Regge-Wheeler, também é manifesta. Novamente, trata-se de um efeito da escolha de calibre, e quaisquer quantidades físicas - expressas nesse ou em outro calibre - deverão ser finitas nessa região.

Capítulo 6

Fluxo de energia em $\mathcal{I}^+$ e no horizonte de eventos

O cálculo do fluxo de energia é usualmente efetuado no calibre de radiação, onde as componentes radiativas da métrica são dadas por h_{22} , h_{23} e h_{33} . Nesse capítulo veremos que o fluxo de energia calculado no calibre de Regge-Wheeler é finito e idêntico aos resultados conhecidos [3, 4, 5, 6].

Dados os fluxos nas regiões assintóticas, obteremos a variação de massa do buraco negro perturbado devida à energia irradiada por ondas gravitacionais.

6.1 Fluxo de energia em $\mathcal{I}^+$

Obtemos a variação de massa do Buraco Negro perturbado devido à emissão de radiação substituindo (5.16) e (5.17) em (4.45):

$$
\begin{aligned}
\left\langle {}^{(2)}R^{0}{}_{1}(h)\right\rangle_{\Omega} &= -\sum_{\ell}\frac{\ell(\ell+1)}{(2\ell+1)(\lambda+1)^2}\left\{\frac{2\ddot{X}\dddot{X}}{r}\right. \\
&\left. +\frac{1}{r^2}\left[(\lambda+2)\ddot{X}^2+2(\lambda+1)\dot{X}\dddot{X}\ +4R\ddot{X}\dddot{X}\right]\right\} \\
&= \frac{2G\Delta_1\dot{M}(t,r)}{r^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \qquad (6.1)\\
2G\Delta_1 M &= -\sum_{\ell}\frac{\ell(\ell+1)}{(2\ell+1)(\lambda+1)^2}\times \\
&\int_{-\infty}^{\infty}\left[r\left(2\ddot{X}\dddot{X}\right)+(\lambda+2)\ddot{X}^2+2(\lambda+1)\dot{X}\dddot{X}+4R\ddot{X}\dddot{X}\right]du \quad . \qquad (6.2)
\end{aligned}
$$

O primeiro termo sob o sinal de integral em (6.2) parece ser divergente. Ora, a solução da Equação de Regge-Wheeler pode ser escrita como uma superposição de ondas planas nos limites $r^* \to \pm\infty$:

$$
\chi_{inf}(u) \to \ddot{X}(u) \to \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega)\exp(-i\omega u) \quad .
$$

Para pacotes de onda gaussianos, temos:

$$
\begin{aligned}
g(\omega) &= \exp(-a\omega^2) \\
\ddot{X} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega u)\exp(-a\omega^2) \\
&= \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{u^2}{4a}\right) \quad . \qquad (6.3)
\end{aligned}
$$

Substituindo (6.3) em (6.2) e integrando por partes, vemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{X}\dddot{X} du = 0 \ ,$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}\dddot{X} du = -\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{X}^2 du \ .$$

Conseqüentemente,

$$G\Delta_1 M = \sum_{\ell} \frac{\lambda(\lambda+1)}{(2\ell+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{inf}^2 du \ . \tag{6.4}$$

6.2 Fluxo de energia no horizonte

De maneira análoga, substituímos (5.22) e (5.23) em (4.45):

$$\begin{aligned} \left\langle {}^{(2)}R^0{}_1(h) \right\rangle_\Omega &= -\sum_{\ell} \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \frac{2R\ddot{G}+\dot{G}}{\Gamma^2 R^2 (2\lambda-1)^2} \times \\ & \quad \left[\lambda(2R\ddot{G}+\dot{G}) + R\left(2R\frac{\partial \ddot{G}}{\partial v} + \ddot{G} \right) \right] \\ &\equiv -\sum_{\ell} \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \frac{\tilde{G}(\lambda\tilde{G}+R\dot{\tilde{G}})}{R^2\Gamma^2(2\lambda-1)^2} \\ &= -\frac{2G\Delta_1 \dot{M}(t,r)}{R^2\Gamma^2} \ , \end{aligned} \tag{6.5}$$

onde o sinal negativo na última igualdade refere-se ao fato de que o buraco negro perturbado está ganhando massa (Eq.(4.39)). Conseqüentemente,

$$G\Delta_1 M = \sum_\ell \frac{(\lambda+1)}{(2\ell+1)(2\lambda-1)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}\left(\lambda\tilde{G} + R\dot{\tilde{G}}\right) du \quad . \tag{6.6}$$

Para pacotes de onda gaussianos, o último termo sob o sinal de integral em (6.6) se anula, de tal modo que

$$G\Delta_1 M \;=\; \sum_\ell \frac{\lambda(\lambda+1)}{(2\ell+1)}\int_{-\infty}^{+\infty} \chi^2_{hor} du \quad . \tag{6.7}$$

6.3 Discussão dos resultados

Em geral, o cálculo de quantidades físicas é efetuado no calibre de radiação, onde as componentes radiativas da métrica são dadas por suas partes transversais [3, 4, 5, 6]. Comparando os resultados das duas últimas seções com o resultado obtido por Martel e Poisson [6], veremos que as perturbações de Regge-Wheeler levam a resultados finitos e equivalentes àqueles obtidos no calibre de radiação.

Com o intuito de examinar as perturbações gravitacionais nas proximidades de $\mathcal{I}^+$, Martel adota o sistema de coordenadas retardado (u, r, θ, ϕ), $u \equiv t - r^*$. Nesse sistema de coordenadas, a métrica de Schwarzschild é dada por

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta &= g_{ab}dx^a dx^b + r^2\Omega_{AB}d\theta^A d\theta^B \\ &= \Gamma du^2 - 2dudr + r^2\Omega_{AB}d\theta^A d\theta^B \quad , \end{aligned}$$

onde $a, b, ... = 0, 1$, $A, B, ... = 2, 3$ e $\Omega_{AB} = diag(1, \sin^2\theta)$.

Em coordenadas assintoticamente planas, as componentes radiativas da métrica decaem com r^{-1}. Transformando para coordenadas esféricas, temos [3, 4, 5, 6]:

$$h_{ab} = \mathcal{O}(r^{-1}), \quad h_{aB} = \mathcal{O}(r^{0}), \quad h_{AB} = \mathcal{O}(r) \quad . \tag{6.8}$$

Diferentemente do calibre adotado por nós, a escolha de Martel é tal que o vetor de Killing t^a - definido por

$$t^a = -\epsilon^{ab} r_b \quad , \tag{6.9}$$

onde $\epsilon_{01} = 1$ é o símbolo de Levi-Civitta e $r_b \equiv r_{,b}$ - é perpendicular a h_{aB}:

$$t^a h_{ab} = 0 = t^a h_{aB} \quad . \tag{6.10}$$

Ou seja, $h_0 = 0$, e o comportamento assintótico de $h_{\alpha\beta}$ implica que são radiativas a parte proporcional a r^0 em h_1 e a r em h_2.

Escrevendo h_1 e h_2 como uma série de potências em r^{-1} e substituindo-as nas Equações de Einstein no vácuo, obtemos:

$$h_1 = -\frac{(\ell-1)(\ell+2)}{2r} \int^{u} b(u')du' + \mathcal{O}(r^{-2}) \tag{6.11}$$

e

$$h_2 = r b(u) + \mathcal{O}(r^{0}) \quad . \tag{6.12}$$

Em geral, os coeficientes da métrica são dependentes da escolha de calibre. Por uma transformação de coordenadas

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}$$

com ξ^α dado por (3.48), os coeficientes se transformam de acordo com (3.49); podemos, no entanto, definir uma função $\tilde{h}_a$ que seja invariante:

$$\tilde{h}_a = h_a - \frac{1}{2}\nabla_a h_2 + \frac{1}{r} r_a h_2 \ , \tag{6.13}$$

onde ∇_a é o operador de derivada covariante compatível com a métrica bi-dimensional g_{ab}. Em termos de $\tilde{h}_a$, Martel redefine a *função de Cunningham-Price-Moncrief* [3] como

$$\psi^{\ell m} \equiv \frac{2r}{(\ell-1)(\ell+2)}\epsilon^{ab}\left(\nabla_a \tilde{h}_b^{\ell m} - \frac{2}{r} r_a \tilde{h}_b^{\ell m}\right) \ . \tag{6.14}$$

Substituindo as perturbações (6.11) e (6.12) em (6.14) obtemos:

$$\psi^{\ell m}(u, r \to \infty) = b(u) + \mathcal{O}(r^{-1}) \ , \tag{6.15}$$

de tal modo que

$$\begin{aligned} h_{AB}^{\ell m} &= \frac{r}{2}\psi^{\ell m}(u, r\to\infty)\left(\epsilon_A{}^C D_B + \epsilon_B{}^C D_A\right) D_C Y^{\ell m} \\ &\equiv r\psi^{\ell m}(u, r\to\infty) X_{AB}^{\ell m} \ , \end{aligned} \tag{6.16}$$

onde D_A é o operador de derivada covariante compatível com Ω_{AB} e $\epsilon_{23} = \sin\theta$ é o símbolo de Levi-Civitta definido na 2-esfera unitária. Note que a perturbação (6.16) é dada em termos de harmônicos esféricos, enquanto que a forma canônica das perturbações de Regge-Wheeler usada neste trabalho é dada em termos de polinômios de Legendre.

Martel obtém a expressão para a potência total irradiada

$$\begin{aligned} \frac{dE}{du} &= \int d\Omega \frac{dE}{dud\Omega} \ , \\ d\Omega &= d\theta d\phi \sin\theta \end{aligned}$$

substituindo (6.16) na fórmula da média invariante do TMEE de Isaacson [2] definida no capítulo 4 . O resultado é:

$$\left\langle \frac{dE}{du} \right\rangle^{\ell m} = \frac{1}{64\pi G}(\ell-1)\ell(\ell+1)(\ell+2)\left\langle \left(\dot{\psi}^{\ell m}\right)^2 \right\rangle \ , \tag{6.17}$$

onde $\dot{\psi}^{\ell m} \equiv \frac{d\psi^{\ell m}}{du}$. Note que o resultado acima foi calculado tomando-se a integral no ângulo sólido, ao contrário do nosso procedimento em que o tensor de Ricci de segunda ordem é dado em termos de uma média angular.

Para compararmos o resultado acima com o resultado obtido no calibre de Regge-Wheeler, devemos escrever a função de Cunningham-Price-Moncrief em termos dos coeficientes da métrica h_0^ℓ e h_1^ℓ - calculados no capítulo anterior - dados por

$$h_0^\ell(t,r) = -r\frac{\ddot{X}(u)}{\lambda+1} - \frac{\lambda}{\lambda+1}\dot{X}(u) + \frac{1}{r}\left[-\frac{R\dot{X}(u)}{4(\lambda+1)} - \frac{\lambda X(u)}{2}\right]$$

e

$$h_1^\ell(t,r) = r\frac{\ddot{X}(u)}{\lambda+1} + \left[\frac{R\ddot{X}(u)}{\lambda+1} + \dot{X}(u)\right] + \frac{1}{r}\left[\frac{R^2\ddot{X}(u)}{\lambda+1} + \frac{R\dot{X}(u)}{4\,(\lambda+1)} + \frac{\lambda X(u)}{2}\right] \ .$$

Desse modo,

$$
\begin{aligned}
\dot{h_1}^{\ell} &= \frac{r\dddot{X}}{\lambda+1} + \left(\frac{R\dddot{X}}{\lambda+1} + \ddot{X}\right) + \frac{1}{r}\left[\frac{R^2\dddot{X}}{\lambda+1} + \frac{R\ddot{X}(4\lambda+1)}{4(\lambda+1)} + \frac{\lambda\dot{X}}{2}\right] \\
h_0^{\ell\,\prime} &= -\frac{1}{\lambda+1}\left\{\ddot{X} - r\dddot{X}\left[1+\frac{R}{r}+\frac{R^2}{r^2}+\mathcal{O}\left(r^{-3}\right)\right]\right\} \\
&\quad +\frac{\lambda}{\lambda+1}\ddot{X}\left[1+\frac{R}{r}+\mathcal{O}\left(r^{-2}\right)\right] - \frac{1}{r}\left[-\frac{R\ddot{X}}{4(\lambda+1)} - \frac{\lambda\dot{X}}{2}\right] \\
\frac{2}{r}h_0^{\ell} &= -\frac{2\ddot{X}}{\lambda+1} - \frac{2\lambda}{\lambda+1}\frac{\dot{X}}{r} \\
\dot{\psi}^{\ell} &= \frac{4\lambda\ddot{X}}{(\ell-1)(\ell+2)(\lambda+1)}
\end{aligned}
$$

Portanto, decorre de (6.17) que:

$$
\begin{aligned}
8\pi G\left\langle\frac{dE}{du}\right\rangle^{\ell 0} &= \frac{2\lambda^2\ell(\ell+1)}{(\ell-1)(\ell+2)}\left\langle(\chi_{inf})^2\right\rangle \\
&= 2\lambda(\lambda+1)\left\langle(\chi_{inf})^2\right\rangle \quad .
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

Para o modo $(\ell, m=0)$, os harmônicos esféricos são dados por [40]

$$
Y^{\ell 0} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P^{\ell 0}(\cos\theta) \quad .
$$

Substituindo a definição acima na expressão para o tensor de Ricci de segunda ordem - calculado no capítulo 4 - obtemos:

$$
\begin{aligned}
\left\langle {}^{(2)}R^0{}_1 \right\rangle^{\ell 0} &= \left\langle \left(\frac{\partial Y^{\ell 0}}{\partial\theta}\right)^2 h_1^\ell \left(\frac{h_0^\ell}{r^4} - \frac{h^\ell_{0\,,\,11}}{2r^2} - \frac{h^\ell_{1\,,\,0}}{r^3} + \frac{h^\ell_{1\,,\,01}}{2r^2}\right)\right\rangle \\
&= \frac{2\ell+1}{4\pi}\left\langle \left(\frac{\partial P^{\ell 0}(\cos\theta)}{\partial\theta}\right)^2 h_1^\ell \left(\frac{h_0^\ell}{r^4} - \frac{h^\ell_{0\,,\,11}}{2r^2} - \frac{h^\ell_{1\,,\,0}}{r^3} + \frac{h^\ell_{1\,,\,01}}{2r^2}\right)\right\rangle \\
&= \frac{2\ell+1}{4\pi}\left\langle \left(\frac{\partial P^{\ell}(\cos\theta)}{\partial\theta}\right)^2 h_1^\ell \left(\frac{h_0^\ell}{r^4} - \frac{h^\ell_{0\,,\,11}}{2r^2} - \frac{h^\ell_{1\,,\,0}}{r^3} + \frac{h^\ell_{1\,,\,01}}{2r^2}\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Integrando em $d\Omega$, temos:

$$
\begin{aligned}
\left\langle {}^{(2)}R^0{}_1 \right\rangle^{\ell 0} &= \frac{2\ell+1}{4\pi}\left[2\pi\frac{2\ell(\ell+1)}{2\ell+1}\right]\left\langle h_1^\ell \left(\frac{h_0^\ell}{r^4} - \frac{h^\ell_{0\,,\,11}}{2r^2} - \frac{h^\ell_{1\,,\,0}}{r^3} + \frac{h^\ell_{1\,,\,01}}{2r^2}\right)\right\rangle \\
&= 2\lambda(\lambda+1)\left\langle \left(\chi^{\ell 0}_{inf}\right)^2\right\rangle \quad . \qquad (6.19)
\end{aligned}
$$

Esse resultado estabelece a igualdade entre o fluxo calculado no calibre de radiação, Eq.(6.18), e o fluxo calculado no calibre de Regge-Wheeler, Eq.(6.19).

Para a radiação no horizonte de eventos, Martel adota o sistema de coordenadas avançado (v, r, θ, ϕ) , $v = t + r^*$, e impõe novamente as igualdades (6.10) como condições de calibre. Identificando as componentes radiativas da métrica como sendo h_{AB}, $A, B = 2, 3$ [12], e expandindo os coeficientes da métrica em uma série de potências em Γ, os autores concluem que:

$$
\begin{aligned}
h_1 &= \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{8G^2M^2}\int^v dv' b(v') \\
h_2 &= b(v) \\
h^{\ell m}_{AB} &= -2GM \\
\psi^{\ell m}(v, r \to 2GM) &= -\frac{1}{2GM} b(v)
\end{aligned}
$$

O cálculo da potência irradiada é efetuado usando uma fórmula derivada por Poisson [12] que é equivalente à fórmula de Isaacson (4.19) no limite de altas freqüências. O resultado é:

$$\left\langle \frac{dE}{dv} \right\rangle^{\ell m} = \frac{1}{64\pi G}(\ell-1)\ell(\ell+1)(\ell+2)\left\langle \left(\dot{\psi}^{\ell m}\right)^2 \right\rangle \quad . \tag{6.20}$$

Note que, assim como as expressões para o fluxo de energia calculado no calibre de Regge-Wheeler, (6.17) e (6.20) são similares.

Escrevendo a função de Cunningham-Price-Moncrief em termos de (5.22) e (5.23), dados por

$$\begin{aligned} h_0^\ell(t,r) &= \frac{1}{2\lambda-1}\left[2R^2\ddot{G}(v)+R\dot{G}(v)\right] \\ &+\Gamma\left\{\frac{1}{2\lambda-1}\left[2R^2\ddot{G}(v)+3R\dot{G}(v)+G(v)\right]+R\dot{G}(v)+G(v)\right\} \\ &+\mathcal{O}\left(\Gamma^2\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h_1^\ell(t,r) &= \frac{1}{\Gamma}\left\{\frac{1}{2\lambda-1}\left[2R^2\ddot{G}(v)+R\dot{G}(v)\right]\right\} \\ &+\Gamma^0\left\{\frac{1}{2\lambda-1}\left[2R^2\ddot{G}(v)+R\dot{G}(v)\right]+R\dot{G}(v)\right\}+\mathcal{O}\left(\Gamma^2\right) \quad , \end{aligned}$$

obtemos:

$$
\begin{aligned}
\dot{h}_1^{\ell} &= \frac{1}{\Gamma(2\lambda-1)}\left(2R^2\dddot{G}+R\ddot{G}\right)+\frac{1}{2\lambda-1}\left(2R^2\dddot{G}+R\ddot{G}\right)+R\ddot{G} \\
h_0^{\ell\prime} &= \frac{1}{\Gamma(2\lambda-1)}\left(2R^2\dddot{G}+R\ddot{G}\right)+\frac{1}{2\lambda-1}\left(2R^2\dddot{G}+5R\ddot{G}+4\dot{G}+\frac{G}{R}\right) \\
&\quad +R\ddot{G}+2\dot{G}+\frac{G}{R} \\
\psi^{\ell 0} &= \frac{2}{(\ell-1)(\ell+2)}\left[\frac{1}{2\lambda-1}\left(2R\dot{G}+G\right)+2R\dot{G}+G\right] \\
\dot{\psi}^{\ell 0} &= \frac{4\lambda}{(\ell-1)(\ell+2)}\chi_{hor}
\end{aligned}
$$

de tal modo que,

$$
8\pi G\left\langle\frac{dE}{dv}\right\rangle^{\ell 0} = 2\lambda(\lambda+1)\left\langle(\chi_{hor})^2\right\rangle \quad . \tag{6.21}
$$

Das análises acima, vemos que a divergência das perturbações escritas no calibre de Regge-Wheeler é irrelevante para o cálculo de quantidades físicas.

Conclusão

Vimos que perturbações arbitrárias da métrica de Schwarzschild podem ser escritas como uma soma de harmônicos esféricos escalares, vetoriais e tensoriais. O calibre de Regge-Wheeler, além de simplificar enormemente a estrutura tensorial das equações, fixa completamente o sistema de coordenadas, eliminando quaisquer liberdades de calibre residuais e levando a métrica a uma forma única - no sentido que toda métrica escrita em um calibre arbitrário pode ser levada à forma canônica de Regge-Wheeler por um procedimento único e bem definido. Separando as equações de movimento e resolvendo suas partes radial e temporal, dadas pela Equação de Regge-Wheeler, vimos que, apesar dos coeficientes da métrica serem divergentes nas regiões assintóticas, o fluxo de energia é finito e idêntico aos resultados obtidos em calibres de radiação. Em outras palavras, a variação de massa de um buraco negro devida à emissão ou absorção de ondas gravitacionais é um invariante e, sendo assim, pode ser calculada em qualquer calibre.

Referências Bibliográficas

[1] L. Landau and E. Lifshitz, Theorie des champs, Mir-Elipses (1994).

[2] R. Isaacson, Phys. Rev. **166**, 1272 (1968).

[3] C. T. Cunningham, R. H. Price, and V. Moncrief, Astrophys. J. **224**, 643 (1978).

[4] R. J. Gleiser, C. O. Nicasio, R. H. Price, and J. Pullin, Phys. Rept. **325**, 41 (2000), gr-qc/9807077.

[5] C. O. Nicasio, R. Gleiser, and J. Pullin, Gen. Rel. Grav. **32**, 2021 (2000), gr-qc/0001021.

[6] K. Martel and E. Poisson, Phys. Rev. **D71**, 104003 (2005), gr-qc/0502028.

[7] T. Regge and J. A. Wheeler, Phys. Rev. **108**, 1063 (1957).

[8] R. J. Gleiser, C. O. Nicasio, R. H. Price, and J. Pullin, Class. Quant. Grav. **13**, L117 (1996), gr-qc/9510049.

[9] R. d'Inverno, Introducing Einstein's Relativity, Clarendon Press .

[10] L. R. W. Abramo and F. Finelli, Gen. Rel. Grav. **33**, 339 (2001), gr-qc/9907102.

[11] R. J. Gleiser, Class. Quant. Grav. **14**, 1911 (1997), gr-qc/9710097.

[12] E. Poisson, Phys. Rev. **D70**, 084044 (2004), gr-qc/0407050.

[13] S. Weinberg, Gravitation and cosmology, John Wiley and Sons (1972).

[14] J. R. Oppenheimer and H. Snyder, Phys. Rev. **56**, 455 (1939).

[15] R. H. Price, Phys. Rev. **D10**, 2419 (1971).

[16] C. V. Vishveshwara, Phys. Rev. **D1**, 2870 (1970).

[17] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).

[18] J. H. Traschen, (1999), gr-qc/0010055.

[19] B. F. Schutz, A first course in general relativity, Cambrige University Press (1985).

[20] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).

[21] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D7**, 2333 (1973).

[22] S. W. Hawking, Phys. Rev. Lett. **26**, 1344 (1971).

[23] R. Isaacson, Phys. Rev. **166**, 1263 (1968).

[24] L. A. Edelstein and C. V. Vishveshwara, Phys. Rev. **D1**, 3514 (1970).

[25] V. Moncrief, Ann. Phys. **88**, 323 (1974).

[26] O. Sarbach and M. Tiglio, Phys. Rev. **D64**, 084016 (2001), gr-qc/0104061.

[27] F. J. Zerilli, Phys. Rev. Lett. **24**, 737 (1970).

[28] S. Chandrasekhar, The mathematical theory of black holes, Clarendon Press (1983).

[29] D. R. Brill and J. B. Hartle, Phys. Rev. **135**, B271 (1964).

[30] P. C. Vaidya, Phys. Rev. **1**, 10 (1950).

[31] P. C. Vaidya, Proc. Indian Acad. Sci. **A33**, 264 (1951).

[32] P. C. Vaidya, Nature **171**, 260 (1953).

[33] F. J. Zerilli, Phys. Rev. D **2**, 2141 (1970).

[34] C. V. Vishveshwara, Nature **227**, 936 (1970).

[35] S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. London, Ser. A **344**, 441 (1975).

[36] H. P. Nollert, In *Rome 1985, Proceedings, General Relativity, Pt. A*, 759- 767.

[37] K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt, Living Rev. Rel. **2**, 2 (1999), gr-qc/9909058.

[38] C. Molina, Phys. Rev. **D68**, 064007 (2003), gr-qc/0304053.

[39] C.-G. Shao, B. Wang, E. Abdalla, and R.-K. Su, Phys. Rev. **D71**, 044003 (2005), gr-qc/0410025.

[40] G. B. Arfken and H. J. Weber, Mathematical methods for physicists, Academic Press, fourth edition (1995).