

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

SBI-IFUSP



305M810T3756

Dinâmica da formação de bolhas de ar em fluidos

Viviane da Silva Mendes Piassi

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do Título de Mestre em Ciências

Banca Examinadora:

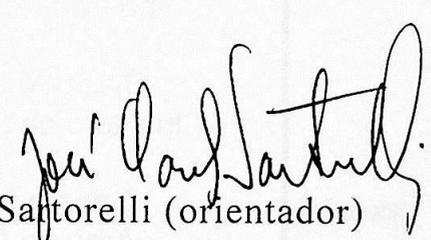
Prof. Dr. José Carlos Sartorelli (orientador)

Profa. Dra. Coraci Pereira Malta

Prof. Dr. Eduardo Colli

São Paulo

2002


Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3756

ex. 1

del. 19/11/02

- P581d

M

ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Piassi, Viviane da Silva Mendes

Dinâmica da formação de bolhas de ar em fluidos.
São Paulo 2002.

Dissertação (Mestrado) Universidade de São Paulo
Instituto de Física – Departamento de Física Geral.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Sartorelli
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Caos; 2. Bolhas; 3. Sistemas dinâmicos;
4. Adição de período; 5. Mapa do círculo.

USP/IF/SBI-067/2002

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Sarcelis pela orientação e por ter sempre acreditado em mim.

Aos meus pais pela educação e pelo constante incentivo. Ao Luiz Paulo e Luiza pela compreensão e por tornarem minha vida tão feliz.

A minha irmã Carolina e ao Paulo, meus irmãos de coração em Brasília.

A todos os amigos e familiares que me apoiaram durante este trabalho.

A todos os professores do curso de Física, especialmente Marcelo Mendonça e Hugo Torres, pelas importantes orientações durante o curso de graduação e de mestrado, e ao Prof. Roberto de Souza, que sempre me incentivou a estudar Física.

A todos os professores do curso de Física que me ajudaram durante este trabalho.

Enquanto passavam as estações, uma coisa mantinha-se constante...

... a maravilhada gratidão por ter sido escolhido.

Noah Gordon em "O Físico"

A Capes, ao CNPq e à FAPESP pelo apoio financeiro.

E a todos que de alguma forma colaboraram com este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Sartorelli pela orientação e por ter sempre acreditado em mim.

Aos meus pais pela educação e pelo constante incentivo. Ao Luís Paulo e a Luiza pela compreensão e por tornarem minha vida tão feliz.

À minha irmã Cristiane e à Regina e ao Álvaro, meus irmãos de coração, pela força.

Ao Tufaile pela presença e paciência em todos os momentos.

Aos colegas Adriana, Ciro, Desiree, Fernando, Juliano, Marcelo, Reynaldo, Thiago e Tiago, sempre dispostos a ajudar, pelas importantes sugestões e amizade, sem esquecer do Dariel, da Gabi, do Fábio e do Pedro, que completam esta família.

À Andreza pela ajuda em diversos momentos.

Ao Rubão e ao Marcelino por terem sido tão prestativos.

Aos novos amigos, Vânia, Carina, Flávia e Alex, que me compreenderam e incentivaram.

À Capes, ao CNPq e à FAPESP pelo apoio financeiro.

E à todos que de alguma forma colaboraram com este trabalho.

RESUMO

Estudamos comportamentos caóticos na dinâmica de formação de bolhas de ar em fluidos viscosos tendo o fluxo de ar como parâmetro de controle, para três valores de comprimento da mangueira de alimentação de ar, o que representa uma mudança na dissipação do sistema.

Também perturbamos o sistema com uma onda sonora e em alguns casos a amplitude da onda foi usada como parâmetro de controle.

Observamos bolhas de bifurcação, primárias e secundárias, crise, explosão/sela-nó e adição de período. Alguns comportamentos puderam ser emulados com o mapa cúbico, com o mapa do círculo bidimensional e com acoplamento deste com o mapa logístico.

ABSTRACT

We have studied the chaotic behaviour in air bubble formation into viscous fluid. The air flow was used as the main control parameter, and the system dissipation was selected by using one of the three different lengths of the air feeding hose.

We also applied a sound wave to the system and, in some cases, the sound wave amplitude was used as a parameter control.

We observed primary and secondary bubbling bifurcation, crisis, saddle-node/explosion and period-adding route. Some behaviours were emulated by using the cubic map and the two-dimensional circle map or by coupling the last one with the logistic map.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	ASPECTOS TEÓRICOS.....	7
2.1	ESTUDO DE SISTEMAS DINÂMICOS	7
2.2	ESTADOS ESTACIONÁRIOS	7
2.3	ESTABILIDADE DE UM PONTO FIXO	9
2.4	SEÇÃO DE POINCARÉ.....	12
2.5	MAPAS.....	14
	2.5.1 Mapas de retorno	15
2.6	MAPA DO CÍRCULO BIDIMENSIONAL.....	16
2.7	BIFURCAÇÕES.....	19
	Duplicação de período	21
	Bifurcação de Hopf.....	21
	Bifurcação sela-nó.....	23
2.8	DIMENSÕES	25
2.9	EXPOENTE DE LYAPUNOV	26
2.10	LÍNGUAS DE ARNOLD	27
2.11	BOLHAS DE BIFURCAÇÃO.....	29
3	APARATO EXPERIMENTAL.....	33
3.1	O TUBO.....	33
3.2	SISTEMA PNEUMÁTICO	34
3.3	SISTEMA DE CONTROLE DA VAZÃO	35
3.4	SISTEMA DE AQUISIÇÃO	36
3.5	PERTURBAÇÃO DO SISTEMA	37
3.6	AS SOLUÇÕES	38
3.7	AS IMAGENS	38

4	ANÁLISE DE DADOS E RESULTADOS.....	40
4.1	LÍQUIDO 2:1	40
	4.1.1 <i>Análise da região do surgimento da bolha de bifurcação.....</i>	42
	4.1.2 <i>Intermitência</i>	46
	4.1.3 <i>Análise da região próximo ao retorno ao período 1.</i>	49
	Modelagem com o mapa cúbico	51
4.2	LÍQUIDO 4:1	52
	4.2.1 <i>Adição de período: L como parâmetro de controle.....</i>	52
4.3	PERTURBAÇÃO COM ONDA SONORA: LÍQUIDO 4:1	57
	4.3.1 <i>Amplitude constante variando a vazão e $\Omega = f_s / f_b$.....</i>	57
	4.3.2 <i>Vazão constante variando a amplitude da onda sonora</i>	60
	Vazão de 110 ml/min: o mapa do círculo	61
	Vazão de 93 ml/min: mapas acoplados.....	64
	Vazão de 90 ml/min.....	68
5	CONCLUSÕES.....	72
6	REFERÊNCIAS.....	74

1 INTRODUÇÃO

Sistemas cuja dinâmica apresentam sensibilidade às condições iniciais podem apresentar comportamento caótico, não sendo possível fazer previsões a longo prazo sobre seu comportamento, mesmo com incertezas relativamente pequenas nas condições iniciais.

Grande número de sistemas dinâmicos estudados nas últimas décadas apresentam comportamento caótico, como variações climáticas [Lorenz, 1980], torneiras pingando [Shaw, 1984 e Sartorelli *et al.*, 1994] e formação de bolhas [Tufaile, 2000].

Baseando-se no experimento da Torneira Gotejante construído no Laboratório de Fenômenos Não-Lineares (LFNL) [Sartorelli *et al.*, 1994], Tufaile desenvolveu o experimento do Tubo Borbulhador [Tufaile, 2000] que permite estudar a formação de bolhas de ar em soluções viscosas, com ou sem a ação de uma perturbação periódica aplicada por uma onda sonora através de um alto-falante.

Esse experimento é de interesse tanto no estudo de sistemas dinâmicos como em várias aplicações práticas, tais como dispersão de gases em líquidos, formação de bolhas em equipamentos de limpeza, cavitação em válvulas e bombas hidráulicas, etc.

A aplicação da Teoria do Caos para o estudo de formação de bolhas foi feita primeiramente por Tritton [Tritton *et al.*, 1994] que utilizou um medidor de fluxo anemométrico para obter dados sobre a dinâmica de formação de bolhas. Nesse trabalho porém o método de medição é invasivo e a caracterização feita para o comportamento caótico é subjetiva. Uma técnica não invasiva foi utilizada por Mittoni [Mittoni *et al.*, 1998] que caracterizou os sinais obtidos, por um transdutor de pressão, como caóticos obtendo expoentes de Lyapunov positivos.

No campo da Engenharia Química, o *Chaos Research Group* (CRG), da Universidade do Tennessee estuda desde 1992 a dinâmica de uma coluna de bolhas de ar formada por um bico, procurando estudar a rota para o Caos via duplicação de período e técnicas de controle de Caos.

No experimento montado no LFNL, medimos os intervalos de tempo entre bolhas consecutivas que se formam no bico soprador. A seqüência de intervalos nos permite construir uma série temporal com a qual podemos analisar o comportamento do sistema. As técnicas de análise são as mesmas utilizadas no experimento da Torneira Gotejante [Gonçalves, 1996; Pinto, 1999] que incluem a construção de diagramas de bifurcação e reconstruções dos espaços de fase por meio de mapas de retorno. Também são obtidas imagens das bolhas com uma câmera de vídeo VHS, com as quais podemos visualizar o comportamento do sistema.

O processo de formação de bolhas é bastante complexo de modo que os modelos existentes são adequados apenas para casos particulares. Para a formação das bolhas à vazão baixa e constante, Davidson [Davidson *et al.*, 1960] apresenta um modelo que supõe que:

1. a bolha se forma mantendo o formato esférico;
2. o líquido em torno da bolha está em repouso, ou seja, a circulação do líquido é desprezível;
3. o movimento de uma bolha não é afetado pela bolha anterior a ela;
4. a bolha se destaca ao atingir o raio máximo R ;
5. a bolha se move, todo o tempo, com a velocidade de *Stokes* apropriada a seu tamanho.

Assim, o movimento do centro de massa de uma bolha que se forma longe das paredes de um reservatório com as condições acima, apresenta velocidade v com valor dado pela equação:

$$v = \frac{2r^2 g}{9\nu}, \quad (1-1)$$

onde r é o raio da bolha, g a aceleração da gravidade e ν a razão entre a viscosidade do líquido e sua densidade. A relação entre o volume V da bolha e o fluxo Q de gás nos permite escrever:

$$V = Qt = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad (1-2)$$

com t representando o tempo. Levando em conta que durante a formação da bolha, a velocidade v corresponde a velocidade de crescimento radial $\left(\frac{dr}{dt}\right)$, reescrevemos a equação (1-1) substituindo r obtido pela equação (1-2):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2g}{9\nu} \left(\frac{3Q}{4\pi}\right)^{2/3} t^{2/3} \quad (1-3)$$

integrando r de 0 a R , o valor máximo do raio da bolha, e t entre 0 e T , o tempo de formação da bolha temos:

$$T = \left(\frac{15\nu R}{2g}\right)^{3/5} \left(\frac{4\pi}{3Q}\right)^{2/5} \quad (1-4)$$

onde R representa o raio máximo alcançado pela bolha ao se desprender. Podemos então perceber que a relação entre o tempo de formação de bolhas e o fluxo, ou vazão volumétrica de ar é hiperbólico.

Para vazão de ar mais alta, as cinco condições apresentadas não ocorrem e o comportamento do sistema pode ser diferente. É necessário, então, analisar um número maior de parâmetros como no modelo

apresentado por Zhang e Shoji [Zhang e Shoji, 2001]. As forças consideradas nesse modelo são:

$$\text{Força de Empuxo:} \quad F_E = V(\rho_{liq} - \rho_{gas})g \quad (1-5)$$

$$\text{Momento do Fluxo de gás:} \quad F_M = \rho_{gas} \frac{Q^2}{\pi R_b^2} \quad (1-6)$$

$$\text{Força de tensão superficial:} \quad F_\sigma = \frac{\pi R_b \sigma}{2} \quad (1-7)$$

$$\text{Força de massa adicional:} \quad F_I = (\rho_{gas} + \frac{11}{16} \rho_{liq}) \frac{d}{dt} \left(V \frac{ds}{dt} \right) \quad (1-8)$$

$$\text{Força de arrasto} \quad F_D = \frac{1}{2} \rho_{liq} \pi r^2 C_D \left(\frac{ds}{dt} - v_w \right) \left| \frac{ds}{dt} - v_w \right| \quad (1-9)$$

onde ρ_{liq} e ρ_{gas} são as densidades do líquido e do gás, respectivamente; σ é o coeficiente de tensão superficial; s a posição do centro da bolha em relação ao bico; C_D é a constante de arraste; e a velocidade média v_w que vem da força de arrasto causada pela subida da bolha anterior.

Durante a formação de uma bolha, em um bico com raio R_b e fluxo constante Q , temos a seguinte relação:

$$F_E + F_M \geq F_\sigma + F_I + F_D \quad (1-10)$$

de modo que a velocidade da bolha é igual a velocidade de crescimento radial. Na fase seguinte, a bolha deixa o orifício mas permanece presa por um menisco que aumenta com o tempo, nesse estágio temos:

$$F_E + F_M = F_\sigma + F_I + F_D \quad (1-11)$$

O menisco da bolha colapsa quando seu comprimento se torna maior ou igual ao diâmetro do bico:

$$l \geq 2R_b \quad (1-12)$$

No experimento do Tubo Borbulhador foi observado comportamento periódico e quase-periódico, bifurcações e regime caótico, seja variando a vazão de ar, ou aplicando uma perturbação periódica ao sistema com vazão fixa. Foi feito o estudo da relação entre a formação de bolhas e a viscosidade da solução sendo mostrado que para soluções mais viscosas o sistema apresenta maior estabilidade, e com maior definição das transições do regime de borbulhamento. Também foi estudada a indução de veias líquidas utilizando bolhas e a estabilidade de fluidos, com viscosidades diferentes, sobrepostos, além da formação de antibolhas [Tufaile, 2000]. Atratores obtidos com esse experimento foram comparados com atratores de Hénon, já que em alguns casos, apresentam comportamentos semelhantes caracterizados através dos planos simbólicos [Tufaile *et al.*, 2000b]

Aplicando a onda sonora ao sistema o comportamento do sistema foi comparado com o mapa do círculo [Tufaile *et al.*, 2001]. Aqui, são parâmetros relevantes a razão entre a frequência sonora e a de borbulhamento, $\Omega^{\text{exp}} = f_{\text{som}}/f_{\text{bol}}$ e a amplitude da onda sonora, A , que são comparados com Ω e K no mapa do círculo. As semelhanças entre o comportamento do sistema e o modelo do mapa do círculo aparecem em diagramas de bifurcação e mapas de retorno. Também foi observado explosão/bifurcação sela-nó na transição de caos para comportamento periódico, evidenciando mais uma semelhança do sistema com o mapa do círculo [Tufaile, 2002].

Nesse trabalho estudamos a dinâmica de formação de bolhas utilizando um novo tubo construído com diâmetro maior que o utilizado anteriormente por Tufaile. Estudamos para esse tubo, a dinâmica de formação de bolhas em soluções com viscosidade diferentes com e sem a ação da perturbação da onda sonora.

Variando a vazão do ar injetado encontramos bolhas de bifurcação e alterando parte do sistema injetor de ar observamos alterações destas

bolhas de bifurcação, como bolhas de bifurcação secundárias e rota de adição de período.

Com a ação da perturbação aplicada pela onda sonora, observamos o comportamento do sistema para alguns valores fixos de vazão de ar em relação à posição da bolha de bifurcação.

Chamamos de *estados estacionários* os estados em que o sistema não muda mais com o tempo. Para isso, o sistema deve estar em equilíbrio. Para isso, a perturbação aplicada deve ser constante.

Um sistema é considerado *estacionário* quando suas variáveis de estado não mudam mais com o tempo. Isso ocorre quando o sistema está em equilíbrio.

Para determinar os estados estacionários de um sistema, devemos resolver as equações de estado do sistema. Isso pode ser feito de várias maneiras, dependendo do tipo de sistema.

2.2 Estados Estacionários

Um sistema é considerado *estacionário* quando suas variáveis de estado não mudam mais com o tempo. Isso ocorre quando o sistema está em equilíbrio.

$$\dot{x} = Ax + Bx \quad (2-1)$$

2 ASPECTOS TEÓRICOS

2.1 Estudo de sistemas dinâmicos

Chamamos de sistema dinâmico um sistema cujos estados podem ser gerados a partir de seu estado anterior por meio de regras determinadas. Para estudar a evolução temporal de sistemas dinâmicos podemos usar equações diferenciais do tipo

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = f[\bar{x}(t), \alpha], \quad (2-1)$$

onde α representa um parâmetro independente de t que caracteriza o sistema. Dadas as condições iniciais $t = t_0$ e $x(t = t_0) = x_0$ podemos determinar para elas uma solução analítica do tipo $x(t)$, se o sistema é linear.

Em caso de sistemas não lineares, em geral, não apresentam solução analítica. Esses sistemas podem apresentar sensibilidade a condições iniciais, ou seja, soluções com condições iniciais muito próximas podem divergir exponencialmente. A presença de parâmetros independentes do tempo, ou parâmetros de controle, é decisiva para determinar o comportamento do sistema e a alteração desses pode provocar grandes modificações no comportamento do sistema.

2.2 Estados Estacionários.

Um sistema dinâmico pode apresentar soluções periódicas, ou estacionárias, ou caóticas, de acordo com os parâmetros de controle do sistema. Vejamos um sistema descrito pela equação (2-1), com a função $f(\bar{x})$ dada

$$f(\bar{x}) = \alpha + \beta \bar{x} \quad (2-2)$$

sendo α e β constantes dadas. Um estado estacionário ou ponto fixo, x^* , do sistema é dado por:

$$\frac{dx^*}{dt} = f(x^*) = 0. \quad (2-3)$$

Assim, se o sistema tende a permanecer em um certo estado com o passar do tempo, então esse é um estado estacionário. No caso da equação (2-2) temos que um estado estacionário é o ponto fixo $x^* = \alpha/\beta$, já que satisfaz a equação (2-3).

Mas nem sempre sistemas permanecem em um ponto fixo, por vezes oscilam e voltam ao mesmo estado oscilatório após uma pequena perturbação. Poincaré introduziu para este estado o conceito de ciclo-limite.

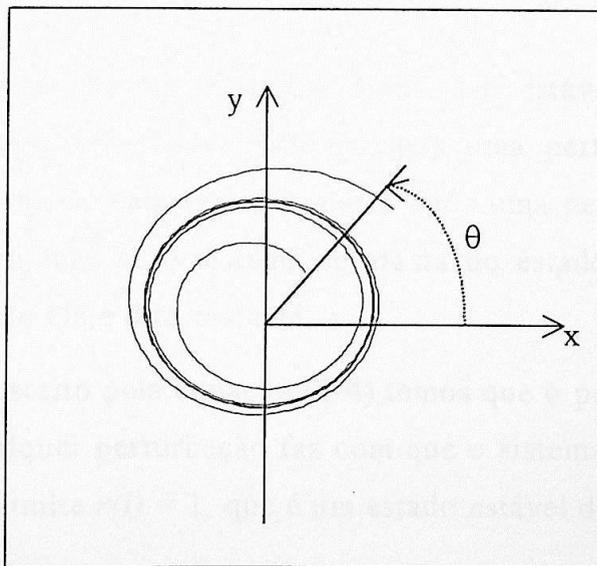


Figura 2- 1 Espaço de fase em coordenadas polares do sistema descrito pela equação 2- 4.

Tomemos como exemplo o sistema descrito pelas equações diferenciais abaixo:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= a r (1 - r) \\ \frac{d\theta}{dt} &= 2\pi\end{aligned}\tag{2-4}$$

Olhando melhor para esta função podemos notar que para $r(t) > 1$ a variação temporal de r será negativa enquanto para $0 < r(t) < 1$ será positiva. Dessa forma temos que para toda solução $r(t) \neq 0$ a função tenderá a 1. Como se trata de coordenadas polares teremos um círculo de raio 1 no espaço de fase, ou ciclo limite, como mostra a figura 2-1. Para $r(t) = 0$, o sistema apresenta apenas um ponto fixo estável.

2.3 Estabilidade de um ponto fixo

Um ponto fixo, ou ciclo limite, pode ser estável ou instável dependendo do comportamento do sistema após uma perturbação. Se o sistema sempre retorna ao estado estacionário após uma perturbação, esse estado é dito estável, mas se o sistema se afasta do estado original após uma perturbação então ele é dito instável.

No sistema descrito pela equação (2-4) temos que o ponto fixo $r(t) = 0$ é instável pois qualquer perturbação faz com que o sistema se afaste dele em direção ao ciclo-limite $r(t) = 1$, que é um estado estável do sistema.

Para entender melhor como determinar a estabilidade de estados estacionários, tomemos como exemplo um sistema com N variáveis descrito por equações diferenciais. Nas proximidades de um estado estacionário \bar{x}^* , a linearização da função $f[\bar{x}(t)]$ nos permite escrever:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = M (\bar{x} - \bar{x}^*)\tag{2-5}$$

onde M representa a matriz de Floquet cujos elementos são as derivadas parciais

$$m_{i,j} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{x}=\bar{x}^*} \quad (2-6)$$

onde f_i é a evolução temporal da i -ésima variável, x_j é a j -ésima variável, tomadas no estado estacionário \bar{x}^* .

Os autovalores da matriz M nos dão informações sobre o comportamento do sistema próximo ao estado estacionário, de modo que podemos saber sobre a estabilidade desse estado.

Peguemos como exemplo um sistema genérico, linearizado, em duas dimensões:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= ax_1 + bx_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= cx_1 + dx_2 \end{aligned} \quad (2-7)$$

teremos então que a matriz M , dada por

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (2-8)$$

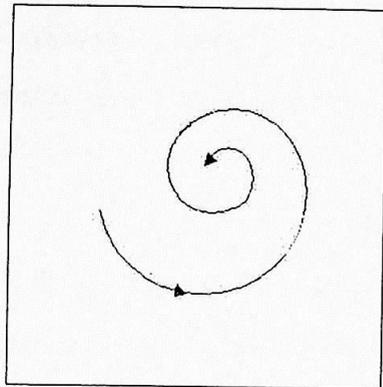
tem autovalores:

$$\lambda_{\pm} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}. \quad (2-9)$$

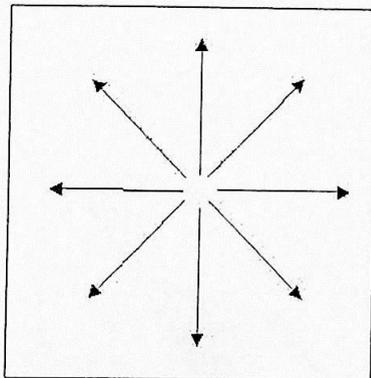
Dependendo dos valores dos parâmetros a , b , c e d , esses autovalores podem ser reais ou imaginários. Se algum dos autovalores, ou a parte real deles, for positiva temos um estado estacionário instável, se todos forem negativos teremos um estado estável.

A figura 2-2 mostra diagramas representando alguns exemplos do comportamento do sistema próximo a pontos fixos. Em (a) temos a vizinhança de um ponto tipo foco, onde os autovalores são complexo

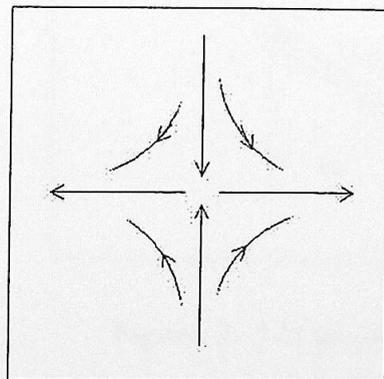
conjugados com parte real diferente de zero. Em (b) temos o caso onde os autovalores são reais com o mesmo sinal, ponto nó. Em (c) temos um caso que só ocorre para sistema com dimensão maior ou igual a 2, a vizinhança de um ponto de sela, que ocorre quando os autovalores são reais e com sinais opostos, ou seja, com uma variedade estável e outra instável.



(a) ponto tipo foco instável



(b) ponto nó estável



(c) ponto de sela

Figura 2- 2 Diagramas representando a vizinhança de alguns pontos fixos.

2.4 Seção de Poincaré

A análise do espaço de fase de um sistema dinâmico é um importante instrumento para entender o que se passa com o sistema, mas algumas vezes o mapa ou seção de Poincaré é mais funcional.

A seção de Poincaré é uma reconstrução em um espaço com dimensão menor que o espaço de fase original do sistema. Para tal fixamos o valor de uma variável e condicionamos outra, de modo que podemos, por exemplo, representar em uma superfície o comportamento de um sistema em quatro dimensões.

Peguemos como exemplo o pêndulo duplo que consiste em duas massas ligadas uma a outra e suspensas por fios ideais, representado na figura 2-3. As variáveis desse sistema são θ_1 , θ_2 , p_1 e p_2 que são os ângulos e os momentos, respectivamente.

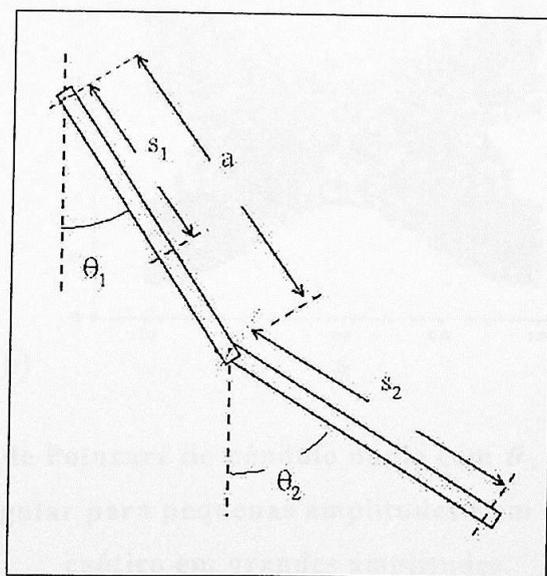


Figura 2- 3 O pêndulo duplo.

No caso de pequenas oscilações encontramos um comportamento quase-periódico mas para amplitudes maiores o sistema apresenta comportamento caótico. Para construir uma seção de Poincaré medimos p_1 e θ_1 toda vez que $\theta_2 = 0$ e $p_2 \geq 0$. A figura 2-4 mostra em (a) uma curva contínua, representando o movimento quase-periódico em (b) uma região preenchida devido ao comportamento caótico.

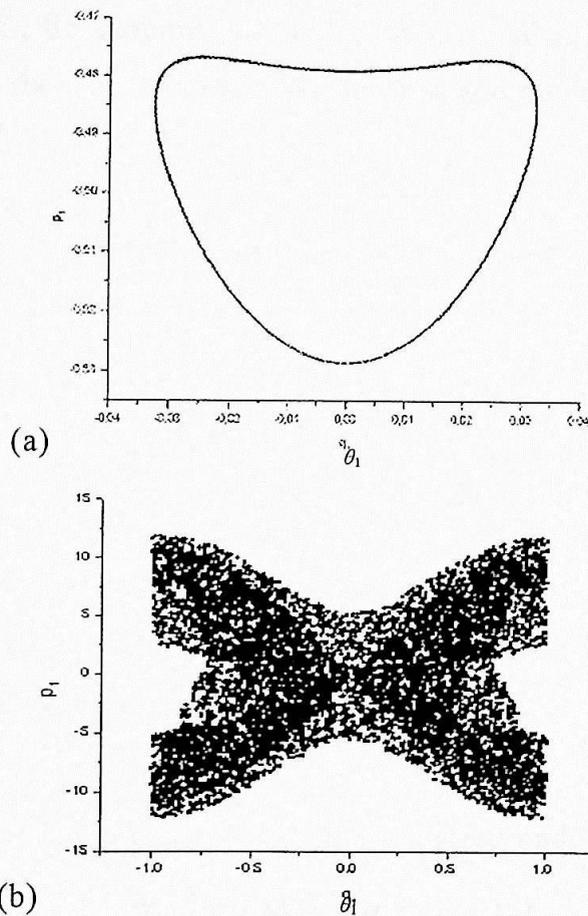


Figura 2- 4 Seção de Poincaré do pêndulo duplo com $\theta_2 = 0$ e $p_2 \geq 0$ em (a) o comportamento regular para pequenas amplitudes e em (b) o comportamento caótico em grandes amplitudes.

2.5 Mapas

Também podemos estudar o comportamento de sistemas dinâmicos descritos por séries de integrais finitas, ou mapas. O sistema é então descrito por uma função com tempo discreto, do tipo:

$$\bar{X}_{n+1} = f(\bar{X}_n), \quad (2-10)$$

que nos permite, conhecendo uma condição inicial \bar{X}_0 , determinar todos os demais estados \bar{X}_n do sistema, $\{\bar{X}_0, \bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_{m-1}, \bar{X}_m\}$. No caso de mapas, os pontos fixo, ou estados estacionários, são determinados fazendo:

$$\bar{X}^* = f(\bar{X}^*). \quad (2-11)$$

A estabilidade desses pontos pode ser encontrada construindo a matriz Jacobiana J com elementos:

$$J_{ij} = \left. \frac{\partial f_i(X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{M,n})}{\partial X_j} \right|_{\bar{X}=\bar{X}^*} \quad (2-12)$$

onde $f_i(X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{M,n}) = X_{i,n+1}$, semelhante a matriz de Floquet utilizada no caso de equações diferenciais. Também nesse caso são os autovalores da matriz tomada no ponto fixo que determinam sua estabilidade. Para mapas, $|\lambda| < 1$ identifica uma variedade estável enquanto $|\lambda| > 1$, a variedade instável.

Se tomarmos como exemplo o mapa logístico onde

$$X_{n+1} = f(X_n) = a X_n (1 - X_n) \quad (2-13)$$

o ponto fixo será dado por

$$X^* = 1 - 1/a. \quad (2-14)$$

A matriz J possui apenas um elemento, já que o mapa é unidimensional e a estabilidade dos pontos fixos são determinadas de acordo com o parâmetro a . Vejamos então uma órbita de período 1, a derivada da função (2-13) com X^* dado pela equação (2-14) é:

$$f'(X^*) = 2 - a. \quad (2-15)$$

Como para o mapa logístico o parâmetro a varia entre 1 e 4, existem valores de a em que o ponto fixo de período 1 é estável ou instável. Ou seja, para $1 \leq a \leq 3$ temos $|f'(X^*)| \leq 1$ e X^* é estável enquanto para $a > 3$ temos $|f'(X^*)| > 1$ e o ponto fixo X^* é instável. Análise semelhante pode ser feita para identificar a estabilidade de órbitas com período maior que 1.

A importância da utilização de mapas nesse trabalho se deve ao fato que ao observarmos um sistema dinâmico periodicamente podemos saber o comportamento desse sistema a intervalos de tempo definidos, a série de medidas obtidas desta forma podem ser tratada como um mapa.

2.5.1 Mapas de retorno

Quando tratamos de experimentos, a análise do sistema através do espaço de fase usualmente não é possível, pois tal espaço é desconhecido. Frequentemente apenas uma variável do sistema pode ser medida, de modo que é necessário utilizar reconstruções do espaço de fase a partir de séries temporais ou de eventos.

Obtemos uma série temporal observando o sistema a intervalos de tempo determinados. Também podemos obter intervalos de tempo entre eventos ao que chamamos de série de eventos.

Como uma série de eventos não reproduz exatamente o espaço de fase, precisamos utilizar técnicas de reconstrução. Uma das técnicas mais importantes de reconstrução do espaço de fases é o mapa de retorno. Adota um atraso na série podemos criar vetores no espaço de imersão e o número de componentes desses vetores dá a dimensão do espaço de imersão. Uma medida dinamicamente importante para o sistema contém toda informação sobre o sistema dinâmico como estabelece o teorema de imersão de Takens.

O mapa de primeiro retorno é criado pelas duplas (x_n, x_{n+1}) , o de segundo retorno pelas duplas (x_n, x_{n+2}) e assim por diante.

O método de reconstrução proposto por Packard, Crutchfield, Farmer e Shaw para analisar os dados do experimento da torneira gotejante é o mais comum método de reconstrução do espaço de fase. O atrator em um espaço de fase d -dimensional, \mathbb{R}^d , descreve a dinâmica de uma série $\{x\}$ em sistemas dissipativos, podendo ser periódico, quase-periódico ou caótico.

Nesse trabalho apresentamos mapas de retorno bidimensionais, com elementos (T_n, T_{n+j}) , onde $j = 1, 2$ e 3 e mapas de primeiro retorno tridimensionais, (T_n, T_{n+1}, T_{n+2}) , onde T representa o tempo entre bolhas formadas no experimento. Quando se fizer necessário, outras representações serão especificadas.

2.6 Mapa do Círculo Bidimensional

Um sistema não linear, onde é possível obter a seção de Poincaré é o oscilador amortecido, no qual uma força externa K_0 e um torque constante M_0 são aplicados impulsivamente a intervalos de tempo T fixos.

Se nós denotamos a constante de amortecimento por C e se o momento de inércia é igual a um, a equação do movimento pode ser escrita como

$$\ddot{\theta} + C \dot{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} [M_0 - K_0 \sin 2\pi\theta(t)] \delta(t - nT) \quad (2-16)$$

Desta equação é possível obter equações que associam as variáveis antes e após o n -ésimo forçamento

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi\theta_n + br_n \quad (\text{mod } 1) \\ r_{n+1} &= br_n - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi\theta_n \end{aligned} \quad (2-17)$$

Aqui θ_n denota o ângulo de rotação imediatamente anterior ao n -ésimo impulso; r_n é proporcional à velocidade angular correspondente. Se nós interpretarmos θ_n e r_n como coordenadas polares, nós podemos considerar a equação (2-8) uma representação de um mapa do círculo dissipativo onde a constante b regula o amortecimento e K é uma medida para a intensidade do impulso externo não linear. Este sistema é equivalente a dois osciladores acoplados e os parâmetros K e Ω representam a intensidade de acoplamento e a relação entre as frequências dos osciladores, respectivamente. Neste trabalho usamos

$$\Omega = \Omega^{exp} \pmod{1},$$

o que significa tomar apenas a parte fracionária de Ω^{exp} .

A figura 2-5 mostra a mudança de um mapa do círculo dissipativo quando a não linearidade K é aumentada para os parâmetros de controle fixos $b = 0.2$, $\Omega = 5.2 \pmod{1} = 0.2$. As condições iniciais escolhidas foram $r_0 = 0.1$, $\theta_0 = 0.1$ e a transformação para coordenadas polares é $r = 1 + 4 r_n$, $\theta = \theta_n$. Para $K = 0$, nós obtemos um círculo de raio $r = 1$ que é ligeiramente deformado quando $K = 0.8$, figura 2-5(a). Para $K > 1$, a circunferência é esticada e dobrada sobre si mesma e o toro se desintegra, levando ao caos via quase-periodicidade.

Aumentando mais o valor de K , para $K = 2.7$ obtemos travamento em período 2, figura 2-5(b), que surge por uma bifurcação sela-nó supercrítica. Aumentando o parâmetro para $K = 3.2$, em (c), podemos ver duas bandas caóticas que surgem devido a uma cascata de duplicação de período. Outro atrator pode ser visto em (d) para $K = 3.9$. Se nós interpretarmos o mapa do círculo dissipativo com um mapa de Poincaré, ele pode servir como modelo para a desintegração de um toro bidimensional em um espaço de fase de três dimensões.

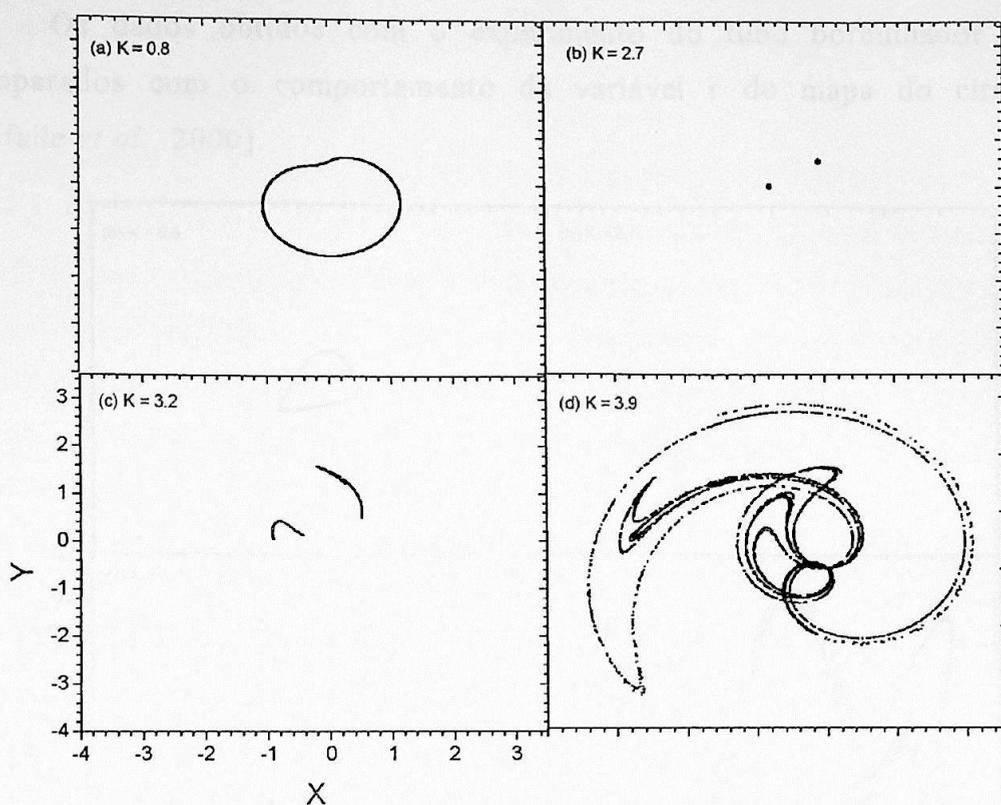


Figura 2- 5: Espaço de fase do mapa do círculo dissipativo em representação polar. Em (a) temos $K = 0.8$, em (b) temos $K=2.7$, em (c) $K =3.2$ e em (d) $K = 3.9$, onde $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$.

Podemos tratar o mapa do círculo como um mapa unidimensional, olhando apenas a variável r . Podemos então estudar o sistema por meio da série $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, construindo diagramas de bifurcação e reconstruir o espaço de fase com mapas retorno.

A figura 2-6 mostra mapas de primeiro retorno para o mapa do círculo com os mesmos parâmetros da figura 2-7. Podemos obter deles as mesmas informações que com o espaço de fase. Em (a) temos atrator quase-periódico, representando o círculo deformado da figura 2-6 (a). (b) nos mostra comportamento periódico, em período 2, em (c) duas bandas caóticas, representando o que vemos na figura 2-6 (c). Em (d) podemos ver um atrator caótico, como vemos na figura 2-6 (d).

Os dados obtidos com o experimento do tubo borbulhador são comparados com o comportamento da variável r do mapa do círculo [Tufaile *et al.*, 2000].

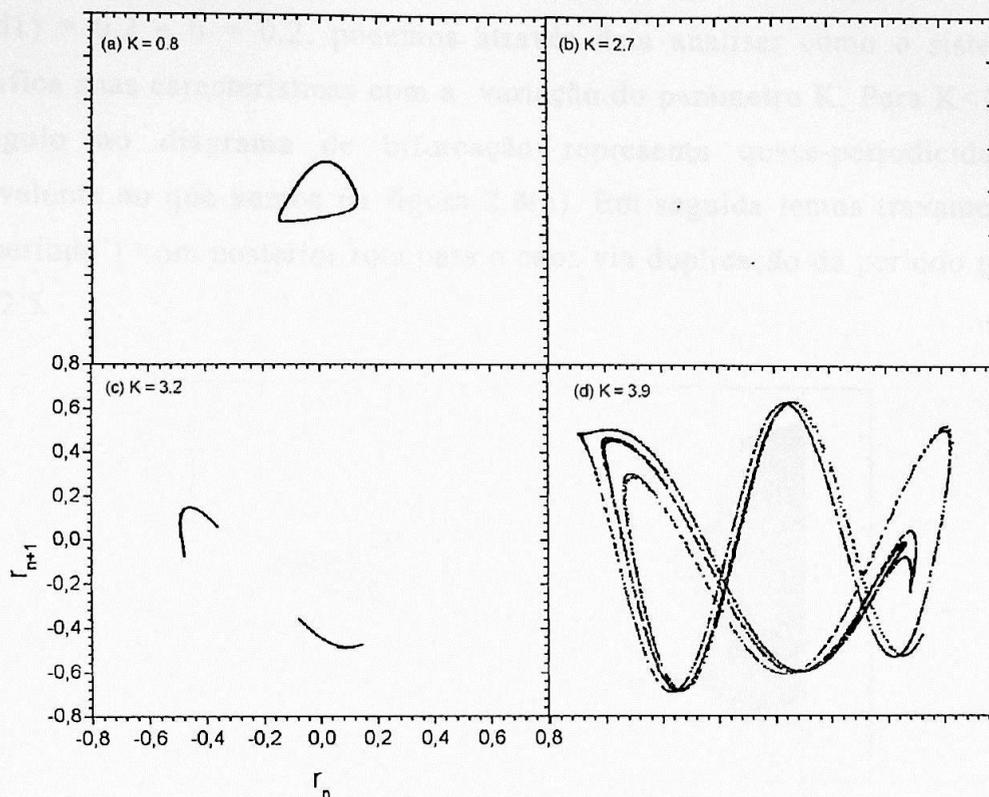


Figura 2- 6 Mapas de primeiro retorno para a variável r do mapa do círculo. Em (a) temos $K = 0.8$, em (b) temos $K=2.7$, em (c) $K =3.2$ e em (d) $K = 3.9$.

2.7 Bifurcações

A variação de qualquer parâmetro de controle em um sistema dinâmico pode causar alterações qualitativas em sua dinâmica. Tais mudanças, chamadas bifurcações, podem ocorrer com pequenas alterações desses parâmetros modificando a estabilidade e até o número de estados estacionários do sistema. Bifurcações podem ser locais, modificando o comportamento do sistema apenas em uma pequena vizinhança de estados estacionários, ou globais, causando mudanças drásticas em todo o espaço. Para analisarmos as alterações no comportamento do sistema de acordo

com a mudança de um parâmetro de controle podemos construir um diagrama de bifurcação.

A figura 2-7 mostra um diagrama de bifurcação obtido para $\Omega = 5.2$ ($\text{mod } 1$) = 0.2 e $b = 0.2$, podemos através dela analisar como o sistema modifica suas características com a variação do parâmetro K . Para $K < 1$, o triângulo no diagrama de bifurcação representa quase-periodicidade, equivalente ao que vemos na figura 2.8(a). Em seguida temos travamento em período 1 com posterior rota para o caos via duplicação de período para $K > 2.5$.

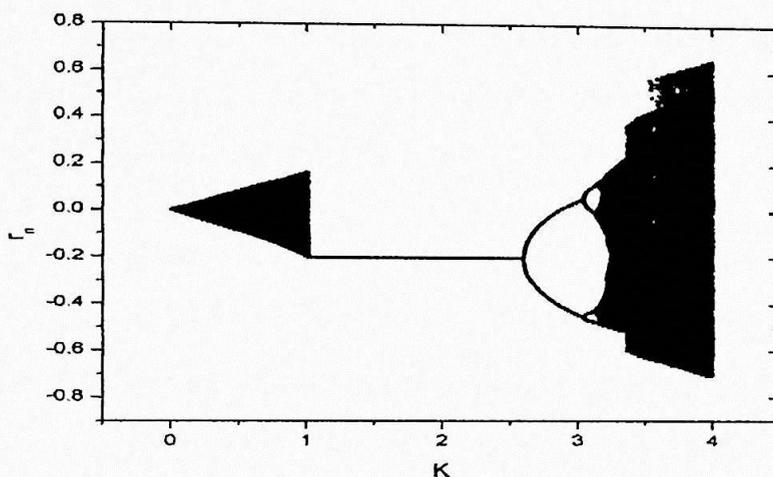


Figura 2- 7 Diagrama de bifurcação do mapa do círculo, para a variável r , sendo $\Omega = 5.2$ ($\text{mod } 1$) = 0.2 e $b = 0.2$.

Várias bifurcações podem ser identificadas quando variamos os parâmetros de um sistema levando tanto ao surgimento de outras órbitas periódicas ou a comportamento caótico, portanto é importante para esse trabalho analisar algumas delas.

Duplicação de período

Esse tipo de bifurcação, também chamada de bifurcação flip, envolve a troca de estabilidade de uma órbita estável para instável ao

mesmo tempo que surge outra órbita estável com o dobro do período da órbita anterior.

Portanto, chamamos de bifurcação tipo duplicação de período a bifurcação já comentada antes onde a órbita de período 1 do mapa logístico se torna instável e surge uma órbita estável de período 2. Esta bifurcação pode ser vista no diagrama de bifurcação da figura 2-7 para o parâmetro $K \cong 2.6$. Nesta mesma figura podemos observar nitidamente outra duplicação de período para $K \cong 3$.

O mapa do círculo sofre outras duplicações de período levando o sistema a comportamento caótico via duplicação de período [Alligood *et al.*, 1996]. Rota para o caos como esta foi observada para o tempo entre bolhas formadas em líquidos [Tufaile *et al.*, 2001].

Bifurcação de Hopf

Esta bifurcação implica no surgimento de órbitas quase periódicas a partir de pontos fixos estáveis que se tornam instáveis. A figura 2-8 ilustra esta transição, indicando uma modificação qualitativa em uma pequena região do espaço. Pontos externos a região limitada pela linha pontilhada continuam sendo atraídas para dentro desta região, no entanto estando dentro desta região, após a bifurcação de Hopf as órbitas não mais tendem a um ponto fixo, mas a uma órbita quase periódica estável [Alligood *et al.*, 1996].

O mapa do círculo apresenta esse tipo de bifurcação. Para $K = 0$ existe um ponto de equilíbrio estável, em $r = 0$, e para $K > 0$ surge uma família de órbitas quase periódicas caracterizando a alteração no comportamento do sistema [Sartorelli *et al.*, 1994]. Na figura 2-9 mostramos estas órbitas para alguns valores do parâmetro K entre 0 e 0.5. As linhas em cinza indicam o contorno da figura formada por estas órbitas no diagrama de bifurcação. Em vermelho está indicado o ponto fixo

instável que surge na bifurcação. Os demais parâmetros aqui utilizados são os mesmos da figura 2-7.

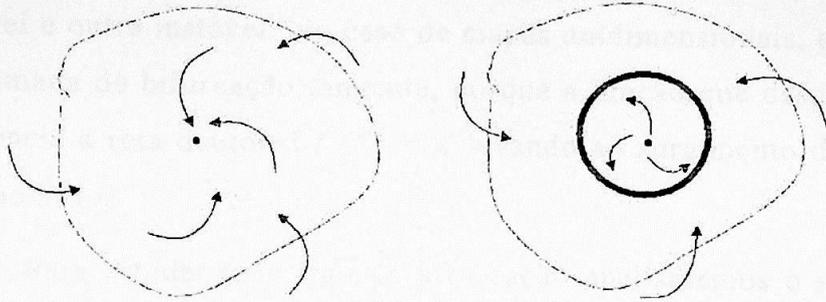


Figura 2- 8 Esquema representando alteração do espaço devido a uma bifurcação de Hopf. À esquerda o sistema antes e à direita após a bifurcação.

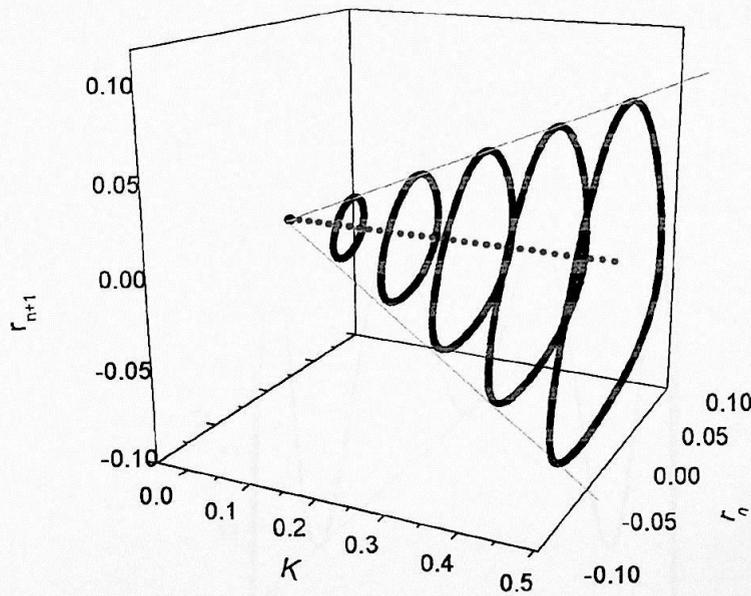


Figura 2- 9 Diagrama representando as órbitas envolvidas em uma bifurcação Hopf.

Bifurcação sela-nó

Em uma bifurcação sela-nó, um sistema que não apresenta, inicialmente, estado estacionário, passa a ter ao mesmo tempo uma órbita estável e outra instável. No caso de mapas unidimensionais, esta bifurcação é chamada de bifurcação tangente, porque a função que descreve o sistema tangencia a reta diagonal $f(X) = X$ levando ao surgimento de dois estados estacionários.

Para estudar esse tipo de bifurcação analisaremos o mapa logístico definido na equação (2-13), após o parâmetro crítico, $a_c \cong 3.82843$. Para esse parâmetro a função da terceira iterada do mapa logístico tangencia a diagonal, figura 2-10, ou seja,

$$f^3(X) = X, \quad (2-18)$$

levando assim ao surgimento de duas órbitas de período 3, uma instável e outra estável.

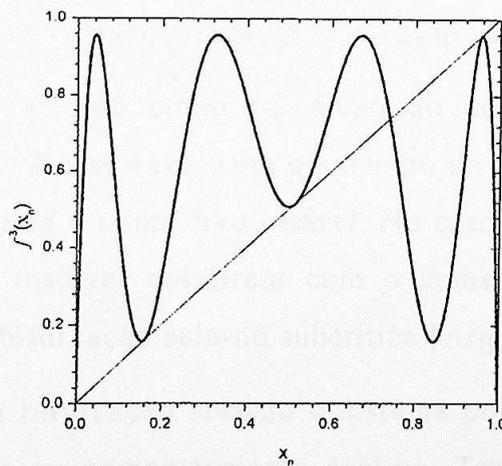


Figura 2- 10: Bifurcação tangente: temos a função $f^3(x)$ do mapa logístico, sendo $a = 3.82843$, tangendo a diagonal no mapa de retorno.

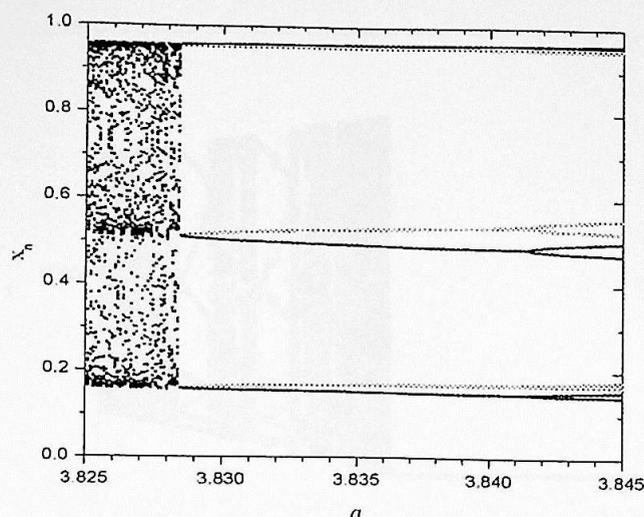


Figura 2- 11: Diagrama de bifurcação do mapa logístico para valores de a próximos do valor crítico a_c .

Olhando um trecho do diagrama de bifurcação do mapa logístico, figura 2-11, podemos ver que para a próximo de a_c o sistema deixa de visitar uma região larga para visitar a órbita estável de período 3, em preto. Em cinza, podemos ver a órbita instável que surge nesta bifurcação. Para mapas com dimensão maior que 1 esse tipo de bifurcação faz surgir ao mesmo tempo um ponto de sela, instável, e um ponto nó, estável.

A bifurcação sela-nó como foi mostrado no exemplo anterior é chamada supercrítica. Nesse caso, com o aumento do parâmetro de controle o sistema converge para o ponto fixo estável. No caso de dois pontos fixos, um estável e outro instável colidirem com o aumento do parâmetro de controle temos uma bifurcação sela-nó subcrítica [Argyris, 1994].

Antes de uma bifurcação sela-nó o sistema pode ou não apresentar estados estacionários ou comportamento caótico. Transições descontínuas que levam o sistema de um ponto fixo estável para um atrator que ocupa larga região do espaço, através de uma bifurcação sela-nó subcrítica, são chamadas explosões [Thompson et al., 1986].

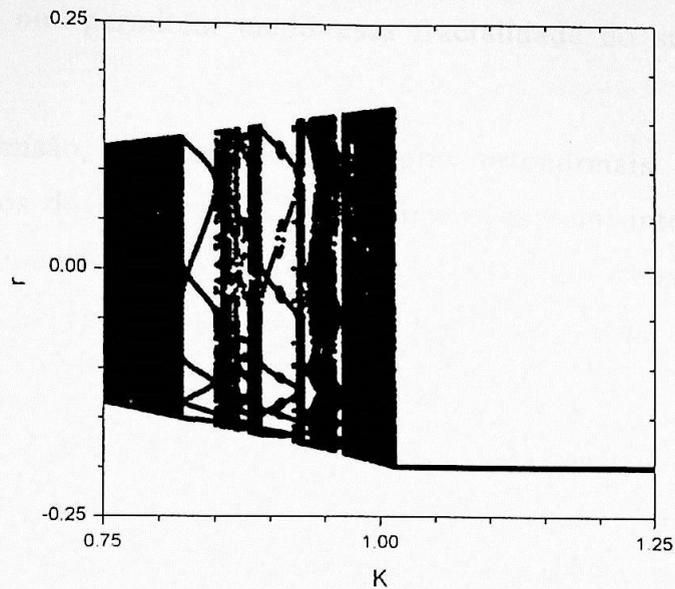


Figura 2- 12 Trecho do diagrama de bifurcação do mapa do círculo para $\Omega = 5.2 \pmod{1} = 0.2$ e $b = 0.2$, para $0.75 < K < 1.25$.

No mapa do círculo a bifurcação sela-nó/explosão pode ser vista para os parâmetros já tratados anteriormente sendo $K \cong 1.01$. A figura 2-12 mostra esta região e a transição de comportamento caótico para uma órbita estável de período 1.

Foi observado no estudo da dinâmica de formação de bolhas comportamento semelhante a esse, onde o sistema chega ao caos via quase periodicidade e depois sofre uma bifurcação explosão/sela-nó [Tufaile *et al.*, 2002].

2.8 Dimensões

A dimensão de um atrator, que caracteriza o comportamento do sistema dinâmico, é um aspecto básico. Os atratores podem ter dimensão inteira ou semi-inteira, apresentando estrutura fractal, o que caracteriza o comportamento como periódico, ou quase-periódico, ou caótico. Dimensões

generalizadas nos permitem medir essa fractalidade do sistema [Tufaille, 2000].

A dimensão, em termos de vetores ortonormais sobrepostos ao objeto, não nos dá informações sobre dimensões semi-inteiras, para isto, precisamos de outros conceitos de dimensão, como a dimensão de Hausdorff (D_H), a dimensão de Kaplan-Yorke (D_{KY}) e a dimensão de informação (D_i) por exemplo.

A dimensão de informação pode ser obtida pelo método das caixas. Esse método implica em cobrir o espaço ocupado pelo atrator por uma grade, ou hipergrade, de aresta variável α e contar o número k de células ocupadas quando a série temporal de comprimento N , que representa o atrator, é dada. Obtemos então a dimensão de informação pela relação:

$$D_i = \lim_{k/N \rightarrow 0} \frac{d \log(k/N)}{d \log(\alpha(k/N))} \quad (2-19)$$

Nesse trabalho calculamos a dimensão de informação pelo método acima utilizando um dos software do pacote TISEAN [Hegger, 1999] disponível na internet (<http://www.mpipks-dresden.mpg.de/~tisean>).

2.9 Expoente de Lyapunov

Uma forma de refinar a noção de que sistemas caóticos exibem sensibilidade às condições iniciais são o número e o expoente de Lyapunov. O número de Lyapunov L de uma órbita $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é definido como

$$L(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|f'(x_1)| |f'(x_2)| \dots |f'(x_n)| \right)^{1/n}, \quad (2-20)$$

se o limite existe. O expoente de Lyapunov ε então é:

$$\varepsilon = \ln L. \quad (2-21)$$

Uma órbita é caótica se possui expoente de Lyapunov positivo e não é periódica assintoticamente [Alligood *et al.*, 1996]. Assim, em uma órbita

com expoente de Lyapunov positivo, mesmo uma pequena distância entre dois pontos aumenta exponencialmente com o passar do tempo, devido a dinâmica do sistema.

Podemos obter o espectro de expoentes de Lyapunov [Hegger *et al.*, 1999] que analisa o crescimento de perturbações infinitesimais, estimando Jacobianas locais. Também é possível obter o expoente de Lyapunov máximo, desde que se garanta a independência de parâmetros e uma lei de crescimento exponencial para obtermos uma caracterização confiável do expoente de Lyapunov positivo.

Algumas comparações, como a conjectura de Kaplan-Yorke [Argyris *et al.*, 1994], podem ser feitas já que a dinâmica do atrator é caracterizada pelo expoente de Lyapunov. Segundo a conjectura de Kaplan-Yorke a dimensão de imersão, D_i , deve coincidir com a dimensão de Kaplan-Yorke:

$$D_{KY} = k + \frac{\sum_{i=1}^k \varepsilon_i}{|\varepsilon_{k+1}|}, \quad (2- 22)$$

onde k é um inteiro de modo que a soma dos k expoentes máximos seja maior ou igual a zero [Tufaile, 2000].

2.10 Línguas de Arnold

Um dos conceitos mais importantes no estudo de sistemas dinâmicos é o número de rotação W , a média da rotação do oscilador forçado por ciclo:

$$W(K, \Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n - \theta_0}{n}. \quad (2- 23)$$

Para estudar melhor esse conceito trataremos o mapa do círculo da equação (2-17) apenas na forma angular quando o sistema é altamente dissipativo, $b \ll 1$:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi\theta_n \pmod{1} \quad (2-24)$$

Para $0 < K < 1$, o comportamento do sistema ser periódico ou quase-periódico depende dos parâmetros Ω e K . Se esses parâmetros são tais que obtemos um número de rotação racional, $W = p/q$ com p e q inteiros que não possuem divisor comum, o sistema é periódico, mas se W é irracional, então o sistema é quase-periódico.

Analisando então o espaço de parâmetros (K, Ω) , temos regiões onde W é irracional, comportamento quase-periódico, e regiões onde ocorre o travamento de frequência, onde W é racional.

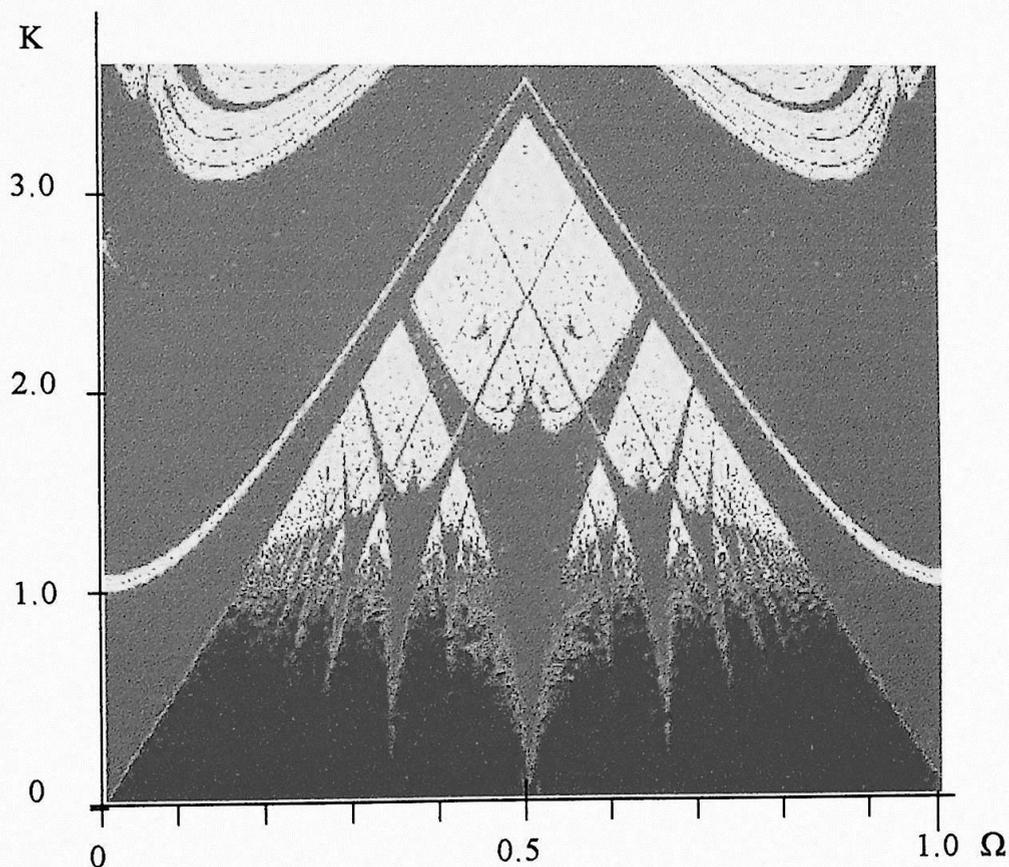


Figura 2- 13 Línguas de Arnold do mapa do círculo unidimensional.

A figura 2-13 mostra o espaço de parâmetros (K, Ω) , temos em vermelho o comportamento quase-periódico e em verde o comportamento

periódico. Estas regiões em verde são chamadas Línguas de Arnold [Argyris et al., 1994]. Podemos notar nesta figura que as línguas de Arnold se alargam quando aumentamos K , e não se sobrepõem para $K < 1$. Para $K > 1$, as Línguas de Arnold começam a se sobrepôr e surgem regiões onde o comportamento é caótico, em amarelo. O parâmetro Ω se repete a cada unidade pela definição, $\Omega \pmod{1}$, e apresenta simetria em torno do valor $\Omega = 0.5$.

O diagrama de bifurcação mostrado na figura 2-7 pode ser entendido analisando a figura 2-13. O diagrama foi obtido com $\Omega = 5.2 \pmod{1} = 0.2$, assim, ao variarmos K estaremos seguindo uma linha vertical no espaço de parâmetros, com $\Omega = 0.2$ constante. Percebemos então que inicialmente o sistema é quase-periódico, entrando em seguida em uma região periódica. Aumentando ainda mais o valor de K , encontramos uma região caótica.

2.11 Bolhas de bifurcação

Encontramos bolhas de bifurcação em sistemas cuja função $f(X_n, a, b)$ apresenta um ponto de inflexão em X_i , ou seja, um ponto de mínimo da função derivada, $f'(X, a, b)$:

$$f''(X_i, a, b) = 0, \quad (2-25)$$

e

$$f'''(X_i, a, b) > 0 \quad (2-26)$$

Determinado o valor a^* de modo que exista

$$f'(X_i, a^*, b) = -1 \quad (2-27)$$

fixamos um valor de a próximo de a^* . Ao variarmos b obteremos um diagrama de bifurcação onde surge uma estrutura de bolha. Se ao invés disso a função derivada apresentar um máximo

$$f'''(X^*, a, b) < 0 \quad (2-28)$$

de modo que podemos escolher um parâmetro para que

$$f'(X_n, a^*, b)|_{X_i = +1} \quad (2-29)$$

obteremos bistabilidade fixando a próximo de a^* e variando o parâmetro b [Ambika e Sujatha, 2000].

Um mapa que nos permite observar a formação de bolhas em diagramas de bifurcação é o mapa cúbico descrito pela equação:

$$X_{n+1} = b + X_n^3 - a X_n \quad (2-30)$$

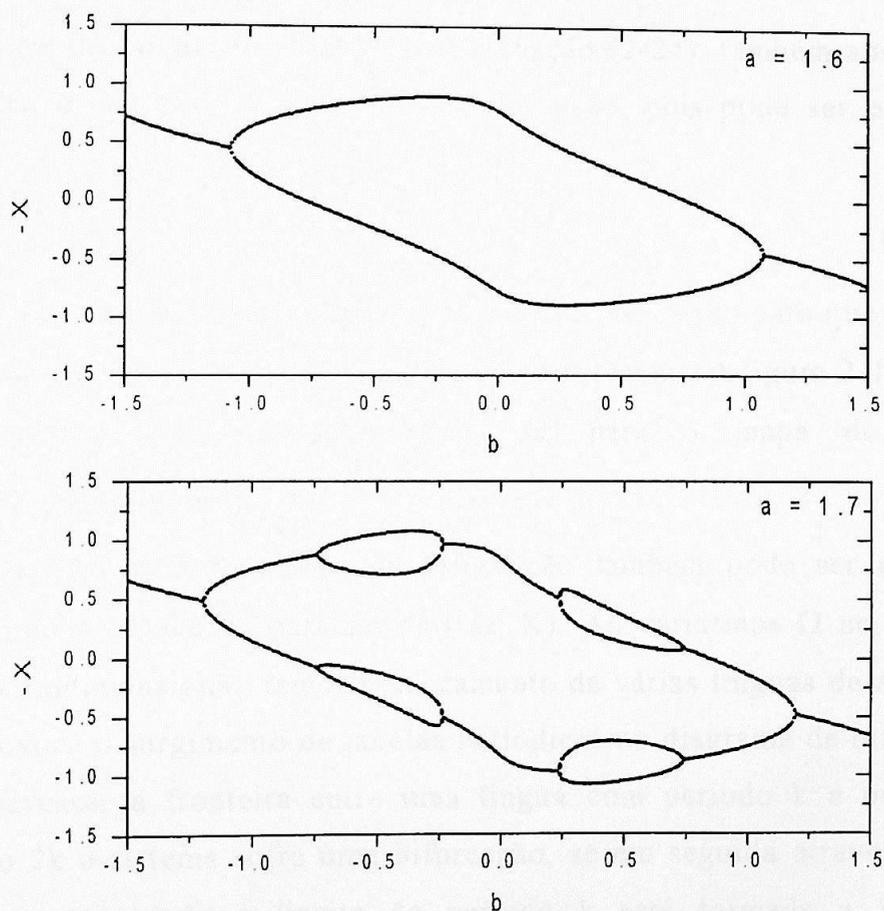


Figura 2- 14 Diagramas de bifurcação obtidos para o mapa cúbico, equação (2-31), variando b entre -1.5 e 1.5 , para (a) $a = 1.6$ e (b) $a = 1.7$.

Para esse mapa temos um ponto de inflexão em $X_i = 0$, onde a terceira derivada é positiva, $f''' = 6$, e $a^* = 1$ pode ser obtido da equação (2-26). Assim para obtermos os diagramas de bifurcação da Figura 2-14, escolhemos em (a) $a = 1.6$ e em (b) $a = 1.7$.

Podemos a ver a formação de uma bolha primária para $a = 1.6$ no diagrama de bifurcação enquanto para $a = 1.7$ já vemos a formação, também de bolhas secundárias. Aumentando mais o parâmetro a podemos criar novas duplicações de período podendo levar a comportamento caótico.

O mapa do círculo unidimensional, equação (2-24), também apresenta a formação de bolhas no diagrama de bifurcação, pois pode ser escrito na forma

$$\theta_{n+1} = \Omega + f(\theta_n, K) \quad (2-31)$$

de modo que é possível escolher o parâmetro K adequado para que variando Ω encontremos uma bolha no diagrama de bifurcação. A figura 2-15 mostra um diagrama de bifurcação, θ vs. Ω , para o mapa do círculo unidimensional, para $K = 1.7$.

A formação de bolhas de bifurcação também pode ser explicada analisando o espaço de parâmetros (Ω, K) . Ao variarmos Ω no mapa do círculo unidimensional, temos o cruzamento de várias línguas de Arnold, o que provoca o surgimento de janelas periódicas no diagrama de bifurcação. Ao atravessar a fronteira entre uma língua com período k e outra com período $2k$ o sistema sofre uma bifurcação, se em seguida atravessa outra fronteira retornando à língua de período k está formada a bolha de bifurcação.

Com esta análise, é possível a formação de bolhas de bifurcação também em função de K para o mapa do círculo unidimensional, pois, como podemos ver na figura 2-13, as línguas de Arnold são inclinadas,

permitindo que se atravesse diretamente de uma língua de Arnold para outra com período distinto.

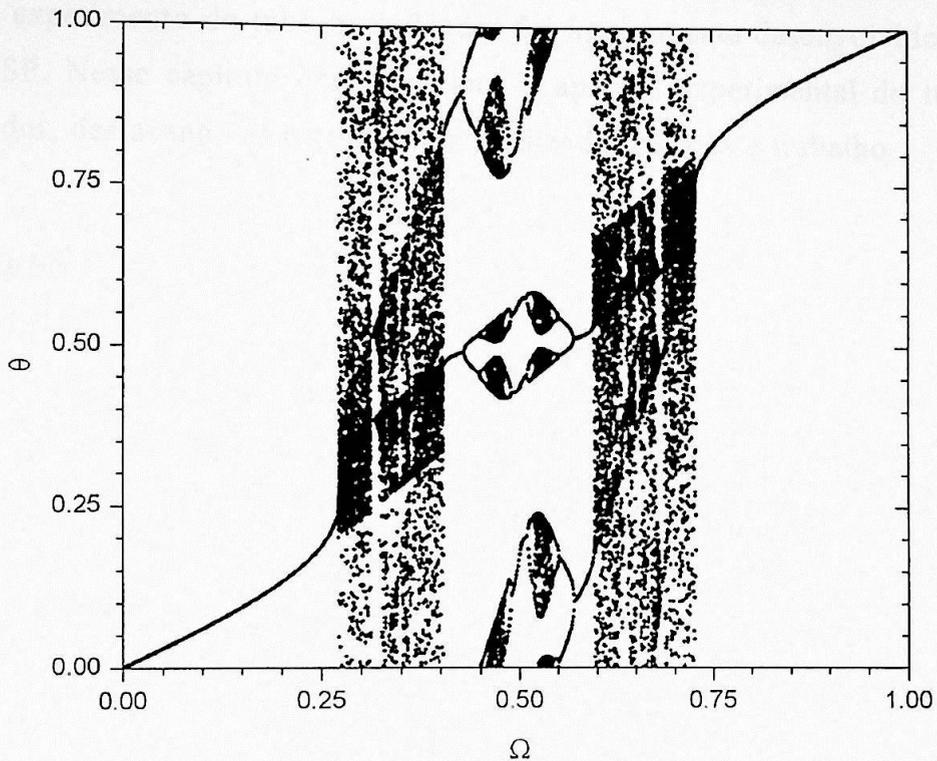


Figura 2- 15 Diagrama de bifurcação do mapa do círculo unidimensional

3 APARATO EXPERIMENTAL

O experimento do tubo borbulhador foi inteiramente desenvolvido no LFNL-USP. Nesse capítulo descreveremos o aparato experimental do tubo borbulhador, destacando as modificações realizadas para este trabalho.

3.1 O tubo

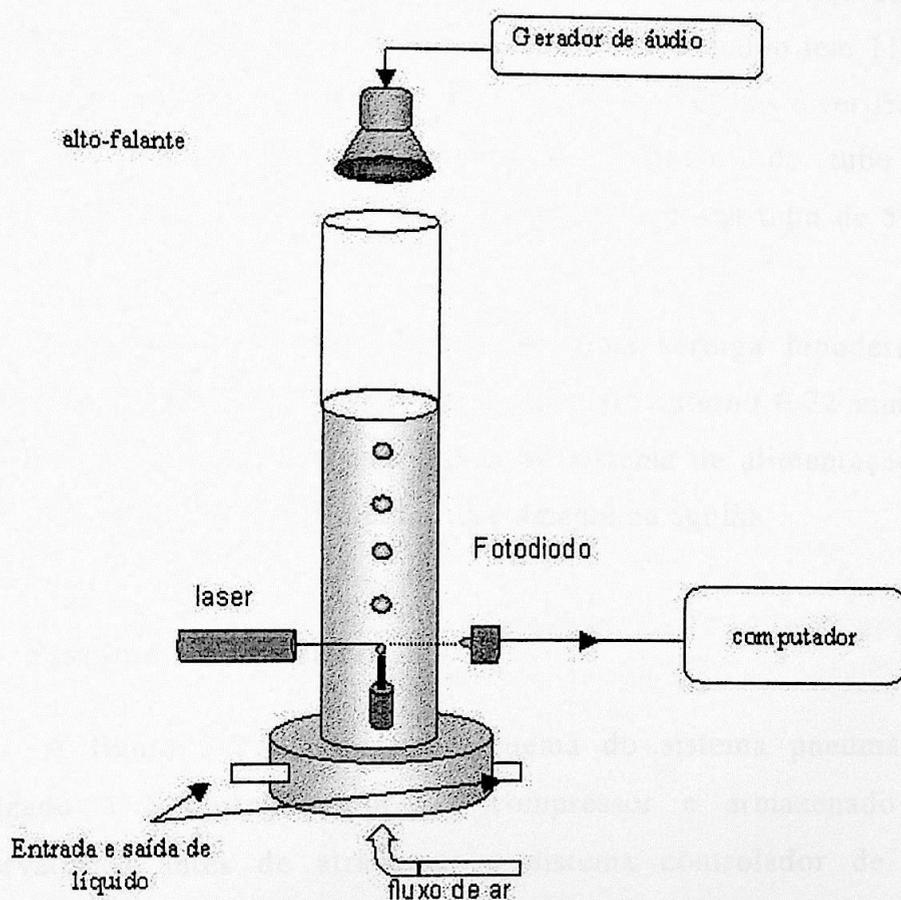


Figura 3- 1: Diagrama representando o aparato experimental do tubo borbulhador.

A figura 3-1 mostra um diagrama do aparato experimental que consiste de um tubo de acrílico, onde colocamos uma mistura de glicerina e água. Na base do tubo injetamos ar, com fluxo controlado, através de um bico onde se formam as bolhas. Logo acima do bico temos um sistema laser/fotodiodo de modo que logo após deixar o bico, as bolhas interrompem o feixe de laser, fazendo com que o fotodiodo envie um sinal que é captado pelo computador, detalhes são apresentados mais adiante. No topo do tubo colocamos um alto-falante, com o qual podemos aplicar uma perturbação ao sistema.

O tubo de acrílico é fixo em uma base de PVC, onde colocamos válvulas do tipo esfera para controlar a entrada e saída do líquido e um bico por onde o ar é injetado. O tubo utilizado nesse trabalho tem 110.0 mm de diâmetro interno com 70 cm de altura. Um dos objetivos é verificar como o comportamento do sistema depende do diâmetro do tubo utilizado, comparando esses resultados com os obtidos com um tubo de 53.0 mm de diâmetro.

O bico borbulhador consiste em uma seringa hipodérmica, com agulha de 37 mm de comprimento e diâmetro interno 0.72 mm, presa na base de PVC. A seringa está ligada ao sistema de alimentação de ar de modo que as bolhas são formadas diretamente na agulha.

3.2 Sistema Pneumático

A figura 3-2 mostra um esquema do sistema pneumático. O ar utilizado é comprimido por um compressor e armazenado em dois reservatórios antes de atravessar o sistema controlador de vazão. O compressor com reservatório de 75 litros está calibrado para manter a pressão do ar entre 70 e 100 psi, e o segundo reservatório, com capacidade para 200 litros, está regulado para uma pressão de 60 psi. Esse reservatório está colocado bem próximo do aparato borbulhador. Próximo ao bico borbulhador diminuimos a pressão para 10 psi com outra válvula

reguladora, permitindo que a vazão seja controlada pelo sistema automático de controle de vazão.

A conexão entre esse regulador e o bico borbulhador é feita com uma mangueira flexível. Utilizamos três mangueiras com comprimentos diferentes. A de comprimento menor, 50 cm, é a mesma anteriormente utilizada por Tufaile [Tufaile, 2000]. As demais, de 140 e 300 cm, foram utilizadas para que pudéssemos estudar a influência do comportamento da mangueira e do sistema pneumático na dinâmica da formação de bolhas.

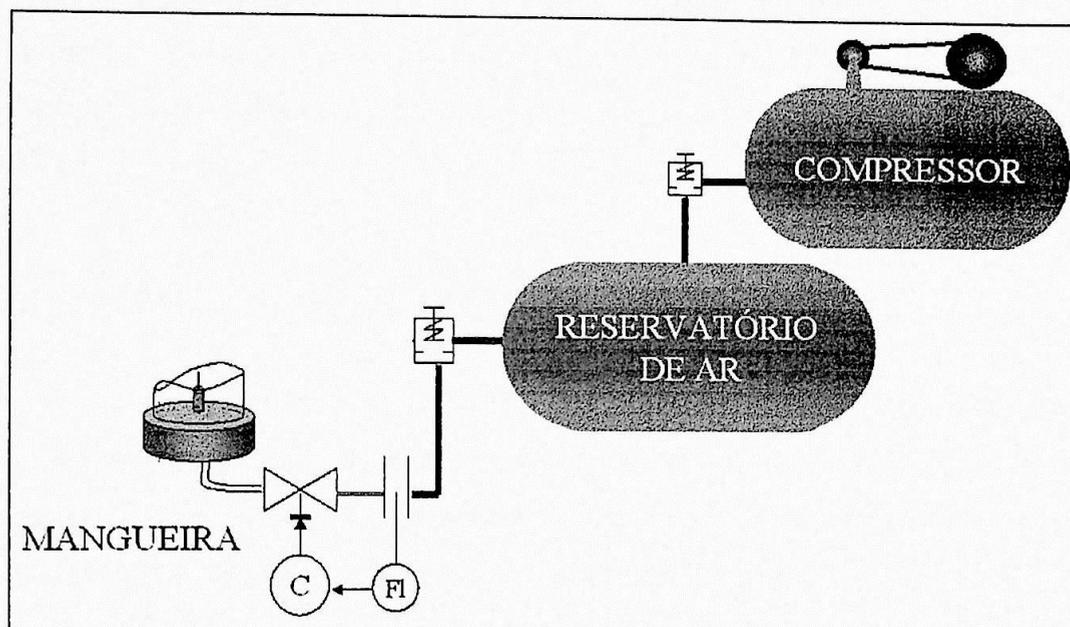


Figura 3- 2 Esquema representando o sistema de alimentação de ar do experimento.

3.3 Sistema de controle da vazão

Utilizamos o medidor de vazão modelo GFM47, fabricado pela AALBORG *Instruments & Controls*. Seu funcionamento é através do aquecimento de uma pequena parte do fluxo de ar separada em um tubo capilar de aço inoxidável, de modo que a vazão de ar nesse tubo seja proporcional à vazão de ar no tubo primário. Medindo o gradiente de

temperatura nesse tubo sensor é possível determinar a vazão através dele e daí a vazão no tubo primário. O controle de vazão é feito por um controlador do tipo proporcional, integral e diferencial (PID) da marca BTC, modelo BTC-2220. Ele recebe um sinal de corrente enviado pelo medidor de vazão e envia um sinal de controle para a válvula solenóide colocada no circuito. Com esse controlador podemos manter a vazão de ar fixa ou alterar linearmente a vazão, com velocidade escolhida pelo usuário, entre dois valores determinados.

A válvula solenóide, modelo PSV-5, é fabricada por AALBORG *Instruments & Controls*. Ela responde a um sinal de tensão contínua de entrada e consiste, basicamente, de uma bobina que posiciona o atuador da válvula continuamente. Esse sistema também está representado na figura 3-2.

3.4 Sistema de Aquisição.

Para detectar a formação das bolhas, colocamos um sistema laser/fotodiodo logo acima do bico. Quando a bolha atravessa o feixe de laser, o sinal analógico induzido no fotodiodo é captado por uma placa contadora de tempo inserida em um microcomputador.

A figura 3-3 indica uma seqüência de bolhas e como é feita a contagem do tempo. A medida de tempo (T_n) entre duas bolhas consecutivas é feita considerando o intervalo de tempo desde que a bolha interrompe o laser até a próxima bolha interrompê-lo, incluindo o tempo em que o fotodiodo fica iluminado. Na figura estão indicados três momentos do trem de bolhas, primeiro quando iniciamos a medida de T_n , quando a bolha n interrompe o feixe de laser, depois, um momento onde a bolha $n + 1$ começa a se formar no bico soprador e por último, o momento em que encerramos a medida de T_n , quando a bolha $n + 1$ interrompe o feixe de laser.

Com essas medidas de tempo construímos uma série que nos permite estudar a dinâmica do sistema por meio de reconstruções, como diagramas de bifurcação e mapas de retorno.

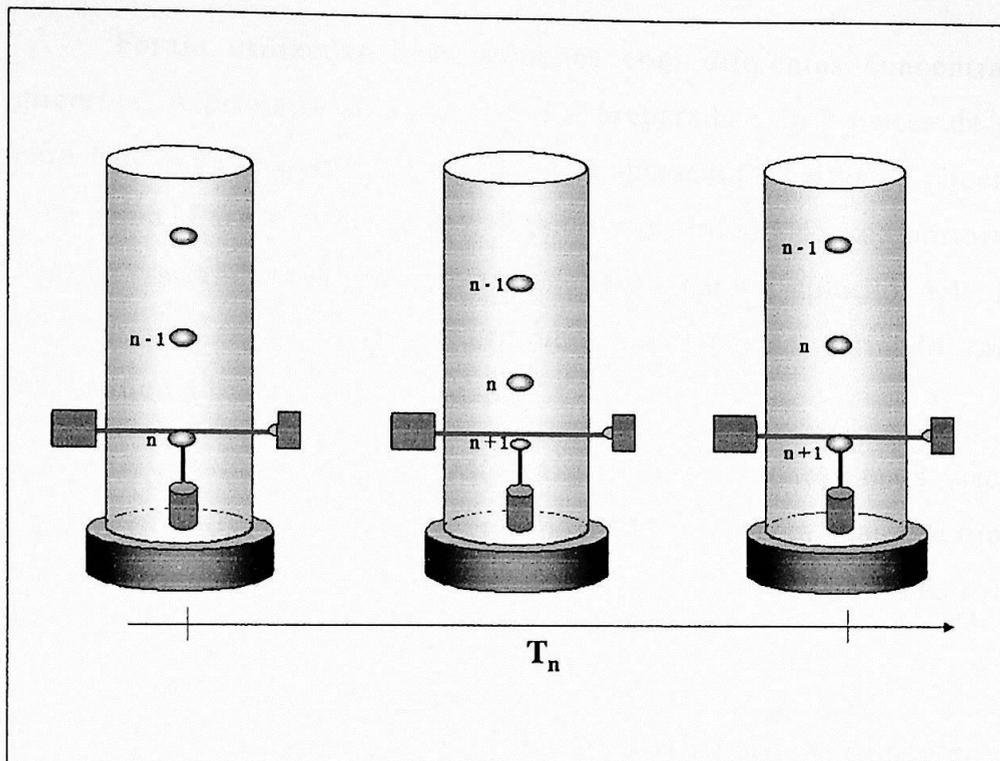


Figura 3- 3 Diagrama representando a medida do tempo T_n de formação da bolha.

3.5 Perturbação do sistema

É aplicada uma perturbação ao sistema utilizando um alto-falante de bobina móvel colocado no topo do tubo, ligado a um gerador de funções Tektronix modelo AFG 320 e um amplificador de áudio Aiwa. O gerador de funções pode ser controlado pelo microcomputador através de sua placa GPIB. Escolhemos a frequência de 150 Hz para a onda sonora já que é próxima da frequência de ressonância do tubo de acordo com o que foi desenvolvido por Tufaile [Tufaile 2000]. A amplitude da onda sonora

aplicada é medida por um microfone colocado a 5 cm da superfície da solução e o sinal do microfone é medido por um osciloscópio.

3.6 As soluções

Foram utilizadas duas soluções com diferentes concentrações de glicerina. A primeira solução, 2:1, foi preparada com 2 partes de glicerina para 1 de água enquanto a segunda, 4:1, apresenta 4 partes de glicerina para 1 de água. Para a solução 2:1, fizemos um estudo do comportamento do sistema variando a vazão de ar, enquanto para a solução 4:1, foi feito também um estudo do comportamento do sistema variando também a amplitude da onda sonora aplicada.

O trabalho de Tufaile mostra que para soluções mais viscosas, as transições entre regimes de borbulhamento apresenta maior definição. A tabela 3.1 apresenta os valores da tensão superficial para as duas soluções.

Solução	Tensão superficial (dina/cm)
2:1	69
4:1	71

Tabela 3-1 Tensão superficial das soluções utilizadas.

3.7 As imagens

Utilizando uma câmera de vídeo VHS podemos obter imagens das bolhas formadas em diferentes regimes de borbulhamento. Para que possamos obter imagens com maior nitidez, foi colocada uma lâmpada fluorescente e uma placa difusora de luz de modo que o tubo borbulhador fique entre a placa e a câmera. As imagens assim obtidas são digitalizadas com o auxílio de um microcomputador.

O objetivo da obtenção destas imagens é ilustrar o comportamento do sistema, observando bolhas formadas periodicamente ou em comportamento caótico. A figura 3-4 mostra exemplos de imagens das bolhas se formando em período 2 (a) e em período 1 (b).

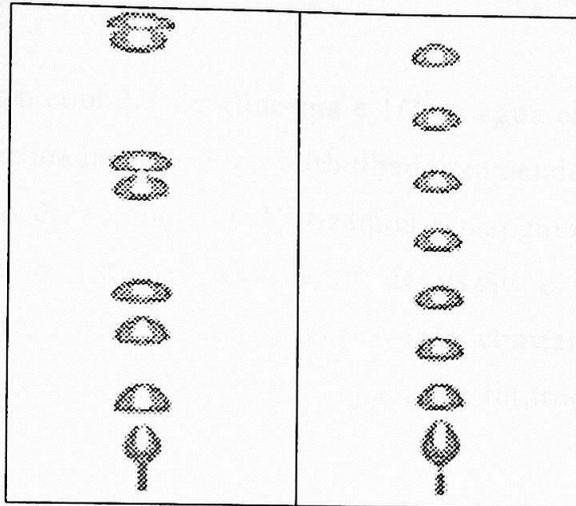


Figura 3- 4 Imagens do trem de bolhas em formação. Em (a) podemos observar formação de bolhas em período 2 e em (b) em período 1.

4 ANÁLISE DE DADOS E RESULTADOS

4.1 Líquido 2:1

Para o líquido com 2/3 de glicerina e 1/3 de água estudamos o tempo entre bolhas (T_n) formadas pelo bico borbulhador tomando como parâmetro de controle a vazão do ar injetado. Utilizamos a mangueira com 50 cm de comprimento entre o sistema controlador de vazão e o bico soprador. Podemos assim obter séries temporais para vazão constante ou variando a vazão, permitindo reconstruções do tipo mapa de retorno e diagramas de bifurcação.

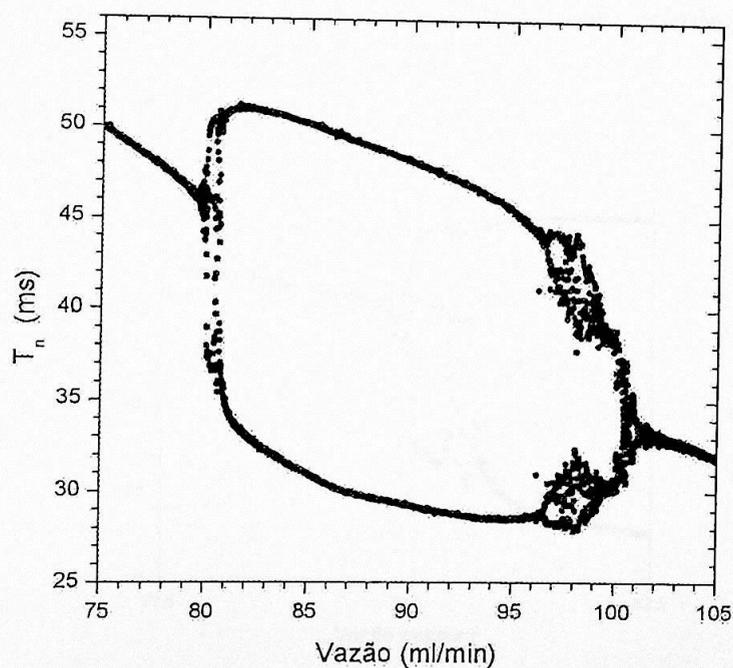


Figura 4- 1 Diagrama de bifurcação obtido aumentando a vazão.

A figura 4-1 mostra o comportamento do sistema enquanto aumentamos a vazão de ar de 75 a 105 ml/min. Podemos observar que o tempo entre bolhas diminui, sofrendo uma bifurcação e depois colapsando em período um novamente, formando uma bolha no diagrama de

bifurcação. Na figura 4-2 temos imagens do trem de bolhas formadas em período 2 dentro da bolha de bifurcação, em (a), e com vazão mais alta, novamente em período 1, em (b).

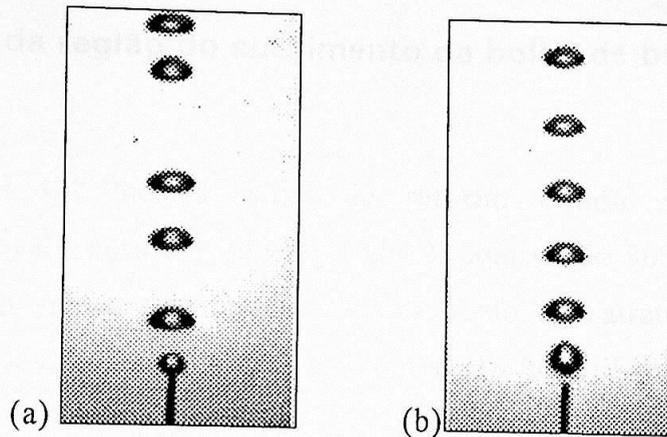


Figura 4- 2 Imagens das bolhas se formando (a) em período 2 e em (b) período 1.

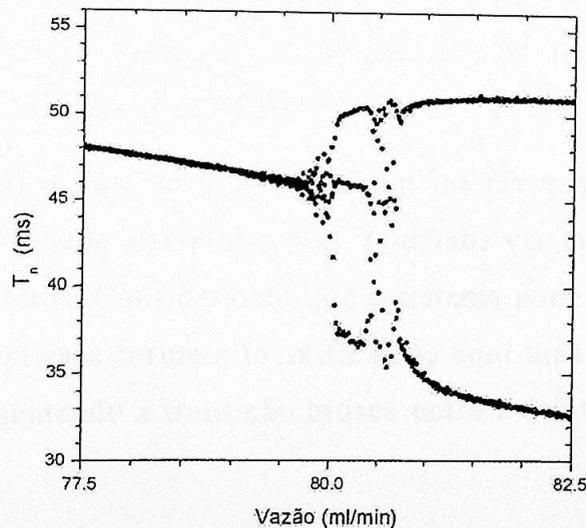


Figura 4- 3 Ampliação da região onde ocorre a bifurcação.

Ocorrem processos distintos em cada extremidade da bolha de bifurcação. No sentido em que T_n diminui, obtivemos que a bifurcação se dá de período um para período três, sendo a vazão aproximadamente 80

ml/min, passando depois para um período 2, através de uma região onde observamos intermitência, como mostra a figura 4-3. Esse período 2 permanece durante certo intervalo até duplicar novamente, criando em cada ramo uma nova bolha de bifurcação.

4.1.1 Análise da região do surgimento da bolha de bifurcação.

A figura 4-4 mostra mapa de retorno obtido na região de intermitência entre o período 3 e o período 2, com vazão 80.5 ml/min. Em (a) o mapa de primeiro retorno nos mostra como é o atrator encontrado nesta região. A evolução temporal do tempo de borbulhamento, em (b), mostra que o atrator permanece mais tempo próximo de 3 valores de T_n , caracterizando intermitência.

Este comportamento é melhor visualizada com as reconstruções do atrator com mapas de 3° e 2° retorno, T_{n+3} vs. T_n e T_{n+2} vs. T_n , figura 4-5. Esses mapas indicam a forma, respectivamente, da terceira e segunda iteradas da função que descreve o sistema.

A figura 4-5(a) nos permite analisar a interface da região caótica com o período 3. Traçada a reta diagonal, podemos ver que a figura tange esta reta em três pontos. Considerando que o sistema pode ser representado por uma função com esse formato identificamos aqui uma bifurcação sela-nó/explosão, representando a transição brusca entre a órbita de período 3 e a órbita caótica.

No caso da interface entre a região caótica e o período 2, analisamos a partir do mapa T_{n+2} vs. T_n , figura 4-5(b). Podemos notar o formato da estrutura próximo de $T_n = 49$ ms. Ali podemos notar ponto fixo é instável, mas a inclinação da tangente nesse ponto não é muito maior que 45° , assim é possível que ele se torne estável na transição para o período 2, juntamente com o ponto fixo próximo a 40 ms.

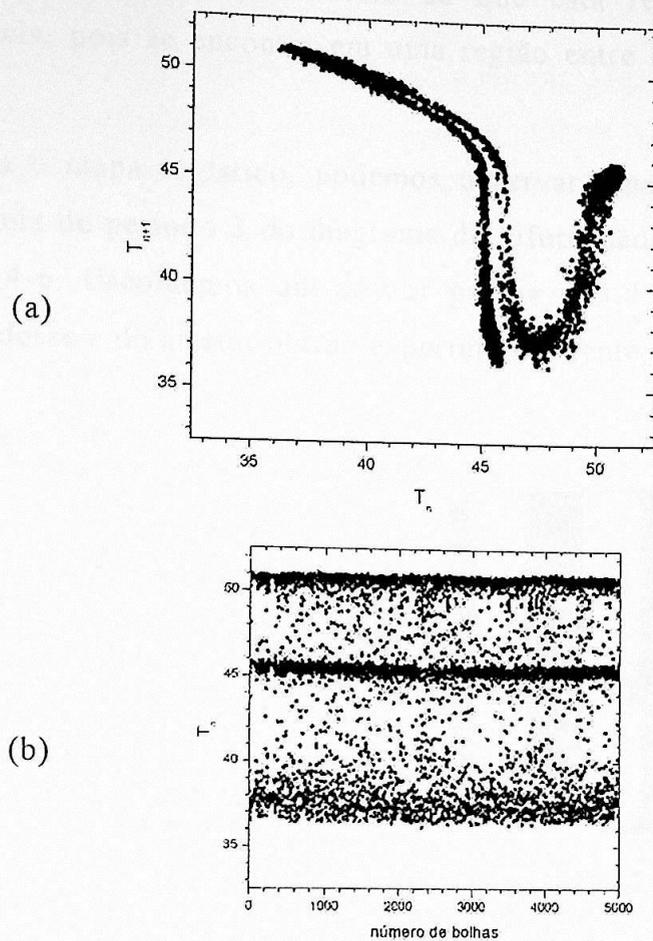


Figura 4- 4 Região de transição do período 3 para período 2. Em (a) mapa de primeiro retorno, em (b) evolução temporal do atrator.

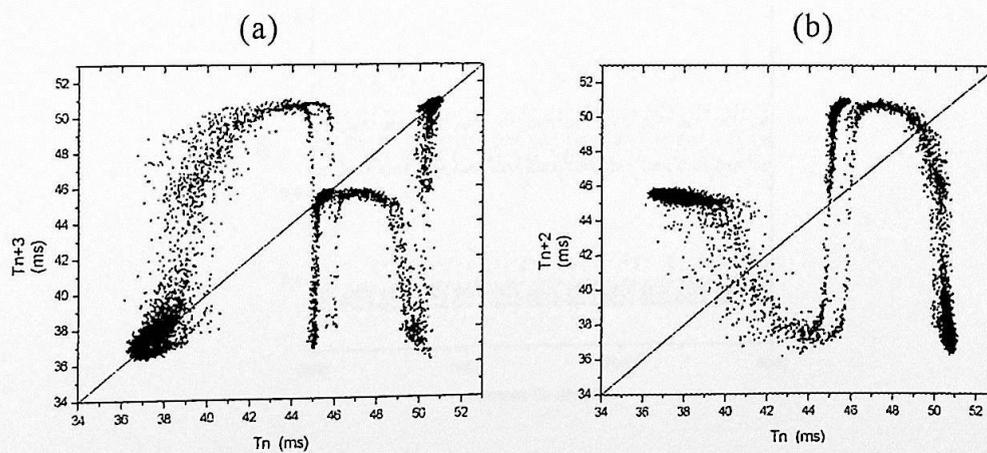


Figura 4- 5 Mapas (a) T_{n+3} vs. T_n e (b) T_{n+2} vs. T_n , para a região caótica entre os períodos 3 e 2.

Esta análise reforça a idéia de que esta região corresponde a intermitência, pois se encontra em uma região entre duas órbitas estáveis distintas.

Para o mapa logístico, podemos observar uma região intermitente após a janela de período 3 do diagrama de bifurcação, como está indicado na figura 4-6. Escolhemos um atrator para $a = 3.85805$ e calculamos a dimensão desse e do atrator obtido experimentalmente, Figura 4- 4 (a).

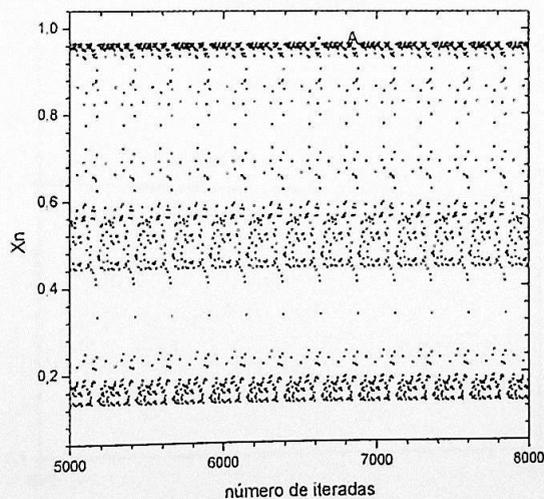
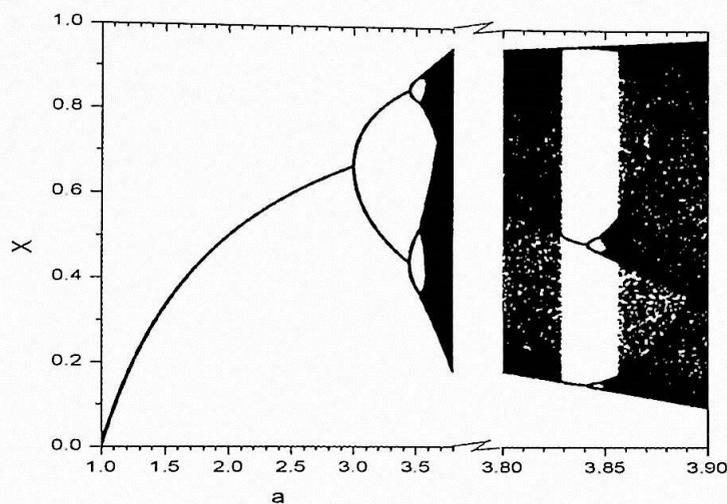


Figura 4- 6 (a) Diagrama de bifurcação do mapa logístico, com ampliação da região $3.8 < a < 3.9$. Em (b) temos a evolução temporal do atrator escolhido.

Para obter a dimensão de informação desses atratores um dos programas do pacote TISEAN. Este programa calcula a dimensão de uma série de dados para diferentes valores de dimensão de imersão utilizando o método das caixas. A dimensão de informação é dada no limite em que o tamanho das caixas tende a zero. [Hegger *et al.*, 1999].

Na figura 4-7(a) temos a dimensão calculada para o mapa logístico, com dimensão de imersão igual a 1. O valor obtido para a dimensão de informação é 0.9. Na figura 4-7(b) obtivemos a dimensão de informação igual a 2.2 para o atrator da figura 4-5 cuja dimensão de imersão é 3.

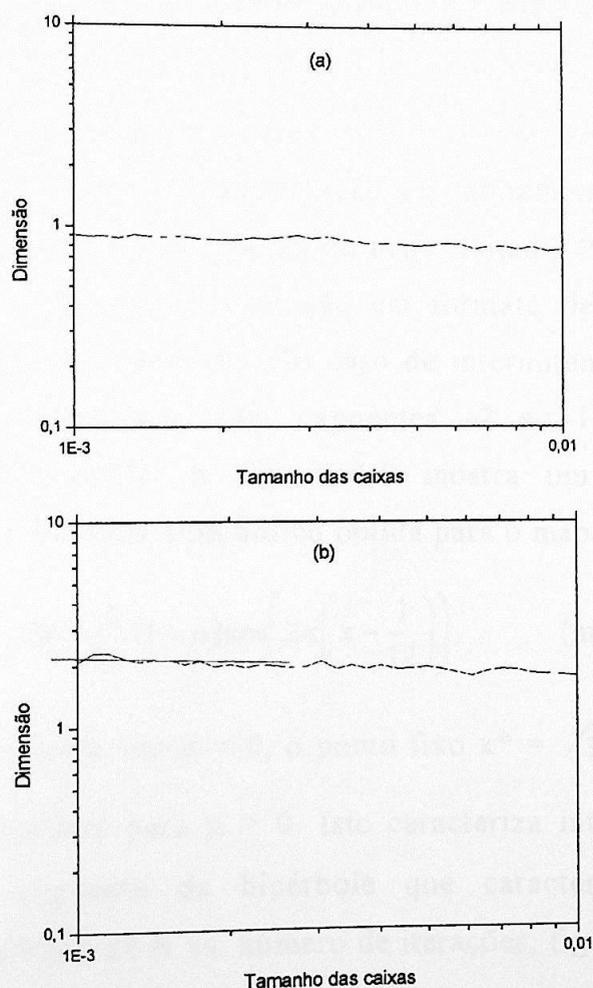


Figura 4- 7 Dimensão do (a) atrator do mapa logístico e (b) do atrator experimental da figura 4-5 com dimensão de imersão 1 e 3, respectivamente.

4.1.2 Intermitência

São conhecidos três tipos de intermitência, cada um ligado a um diferente tipo de bifurcação. A intermitência tipo I surge, por exemplo, quando temos uma bifurcação sela-nó, com autovalor $\lambda = +1$. Um exemplo desta intermitência ocorre na região caótica antes do surgimento do período 3 por bifurcação tangente no mapa logístico, $a \cong 3.828$, figura 4-6. A intermitência tipo II ocorre quando temos bifurcação de Hopf e o autovalor é complexo com módulo igual a 1, ou seja, $\lambda = \alpha \pm i\beta$ e $|\lambda| = 1$. A intermitência tipo III ocorre quando existe bifurcação flip, ou duplicação de período com autovalor real e igual a -1 [Argyris *et al.*, 1994].

Experimentalmente, os três tipos de intermitência podem ser distinguidos pelo formato da distribuição $N(t)$ do tempo t em que o valor da variável analisada permanece na região mais visitada. Para intermitência de tipo I é encontrada uma distribuição em formato de U, valorizando os longos tempos de permanência. No caso de intermitência tipos II e III, a distribuição é hiperbólica, com expoentes -2 e -1.5 , respectivamente [Ruzicka *et al.*, 1997]. A figura 4-9 mostra um exemplo de uma distribuição com formato hiperbólico obtida para o mapa:

$$x \mapsto f(x, \mu) = 1 - 2x - \frac{1}{2\pi} (1 - \mu) \cos \left(2\pi \left(x - \frac{1}{12} \right) \right) \pmod{1}. \quad (4-1)$$

Para esse mapa, em $\mu = 0$, o ponto fixo $x^* = \frac{1}{3}$ tem autovalor $\lambda = -1$ e se torna instável para $\mu > 0$. Isto caracteriza intermitência tipo III. Para obter o expoente da hipérbole que caracteriza a distribuição construímos o gráfico de N vs. número de iterações, figura 4-9. Esse estudo numérico nos mostra pontos que tendem a reta em vermelho, que representa uma hipérbole com expoente -1.5 .

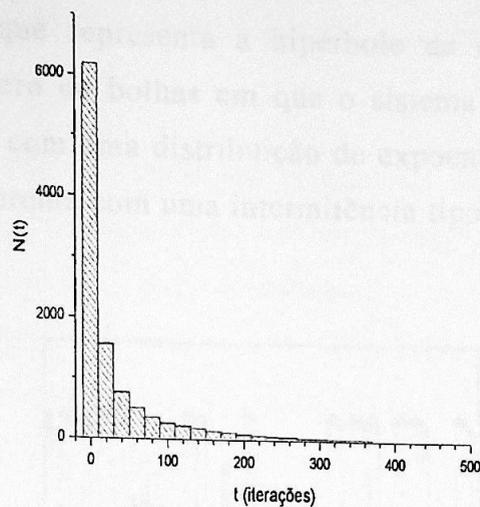


Figura 4- 8 Distribuição N do intervalo de iterações t em que o atrator obtido para $\mu = 0.2$ permanece visitando valores menores que 0.9.

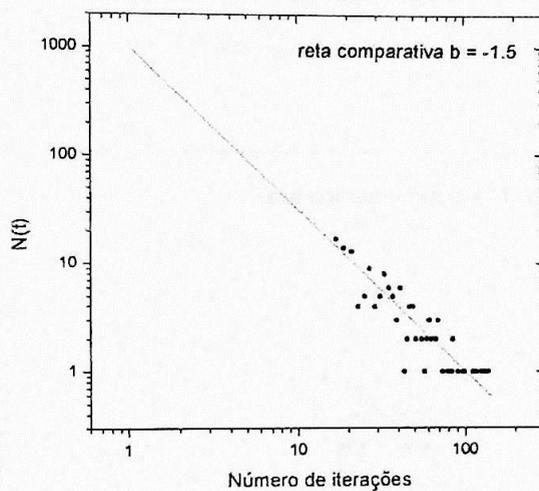


Figura 4- 9 Distribuição N vs. número de iterações.

Para a série de tempos entre bolhas que apresentamos no mapa de retorno da figura 4-4(a) fizemos análise semelhante a anterior, mas estudando o número de bolhas, n_b , em que o sistema permanece na órbita de período 3. A figura 4-10(a) mostra a evolução temporal do atrator a cada 3 bolhas, podemos ver pela figura que o sistema permanece parte do tempo na órbita de período 3, escapando e retornando a ela após algumas bolhas. Na figura 4-10(b) vemos a distribuição N vs. n_b . Nesta figura também está

indicada uma reta que representa a hipérbole de coeficiente -1.5 . A distribuição do número de bolhas em que o sistema permanece na órbita periódica é coerente com uma distribuição de expoente -1.5 , portanto esse comportamento é coerente com uma intermitência tipo III.

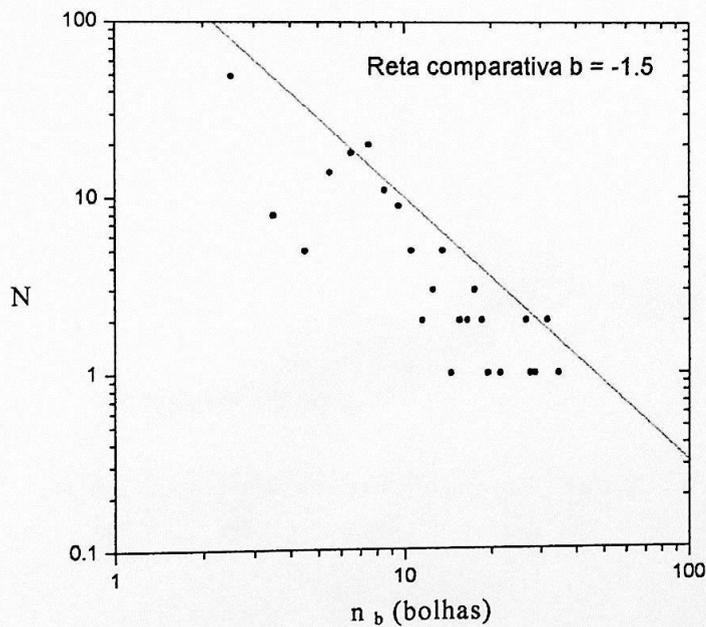
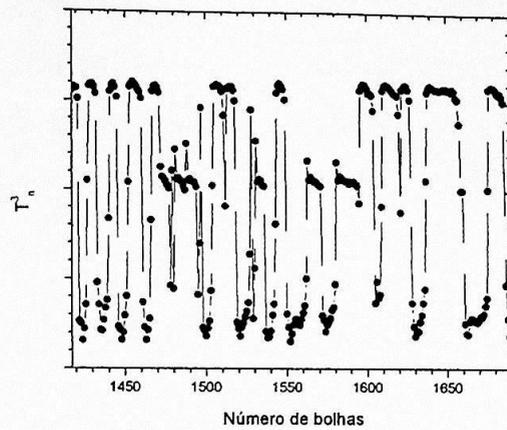


Figura 4- 10 (a) Evolução temporal e (b) N vs. n_b .

4.1.3 Análise da região próximo ao retorno ao período 1.

Ainda na região da bolha de bifurcação da figura 4-1, antes de retornar ao período 1 o tempo entre bolhas apresenta bolhas de bifurcação secundárias. Na figura 4-11 abaixo, temos uma ampliação do diagrama de bifurcação obtido com vazão entre 95 e 105 ml/min. A formação das bolhas de bifurcação secundárias fica evidenciada pela bifurcação que ocorre em cada ramo da bolha de bifurcação primária. O diagrama foi montado com diferentes cores para que possamos observar cada ramo da bolha de bifurcação secundária.

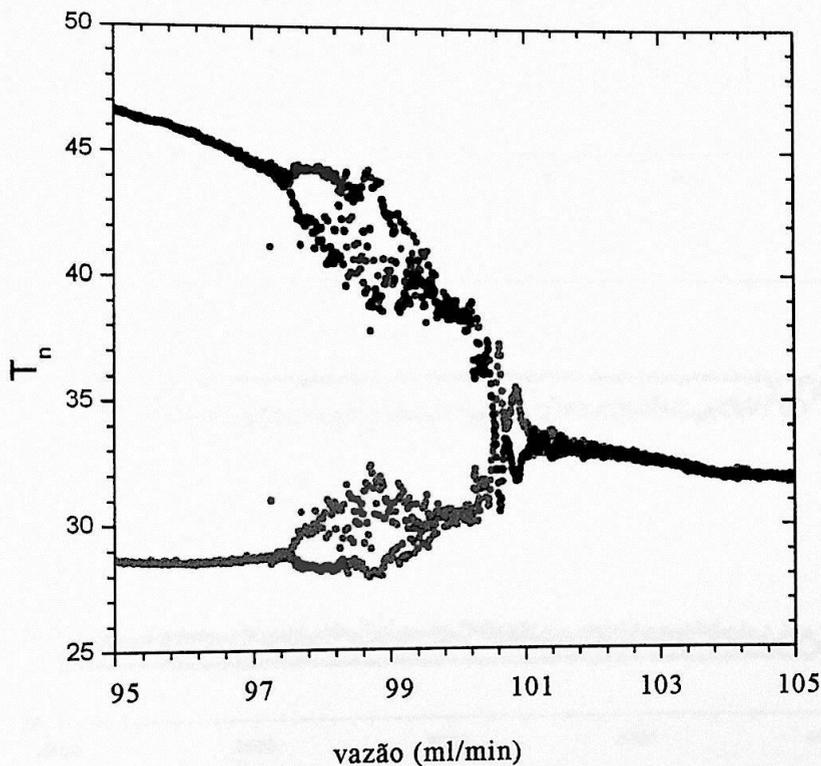


Figura 4- 11 Tempo entre bolhas variando a vazão de ar entre 95 e 105 ml/min.

Podemos perceber nesta figura que cada ramo da bolha de bifurcação secundária passa a visitar uma região mais larga até se misturar com o outro ramo. O mapa de retorno da figura 4-12(a) foi construído com tempo

entre bolhas obtidos para vazão de aproximadamente 98 ml/min onde cada ramo começa a tocar a região ocupada pelo outro, mas ainda sem se misturar. Na figura 4-12(b) vemos a evolução temporal para alguns pontos desse atrator, novamente podemos perceber o período 4.

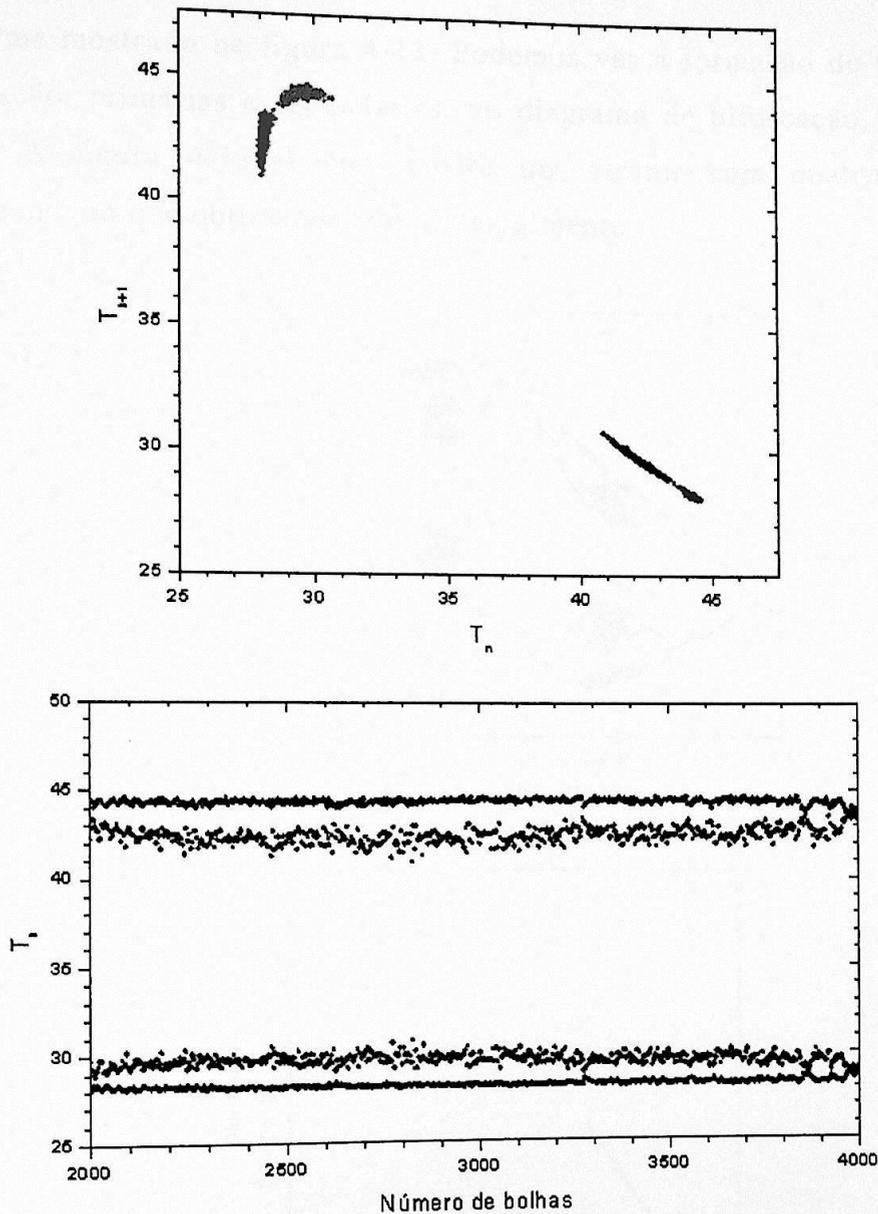


Figura 4- 12 Atrator obtido na região caótica das bolhas de bifurcação secundárias. Em (a) o mapa de primeiro retorno, em (b) a evolução temporal do atrator.

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3756

ex. 1

Modelagem com o mapa cúbico

Bolhas de bifurcação secundária podem ser obtidas com o mapa cúbico:

$$X_{n+1} = b + X_n^3 - a X_n, \quad (4-2)$$

conforme mostrado na figura 4-13. Podemos ver a formação de bolhas de bifurcação, primárias e secundárias, no diagrama de bifurcação, figura 4-13(a). A figura 4-13(b) nos mostra um atrator com quatro bandas, semelhante ao que obtivemos experimentalmente.

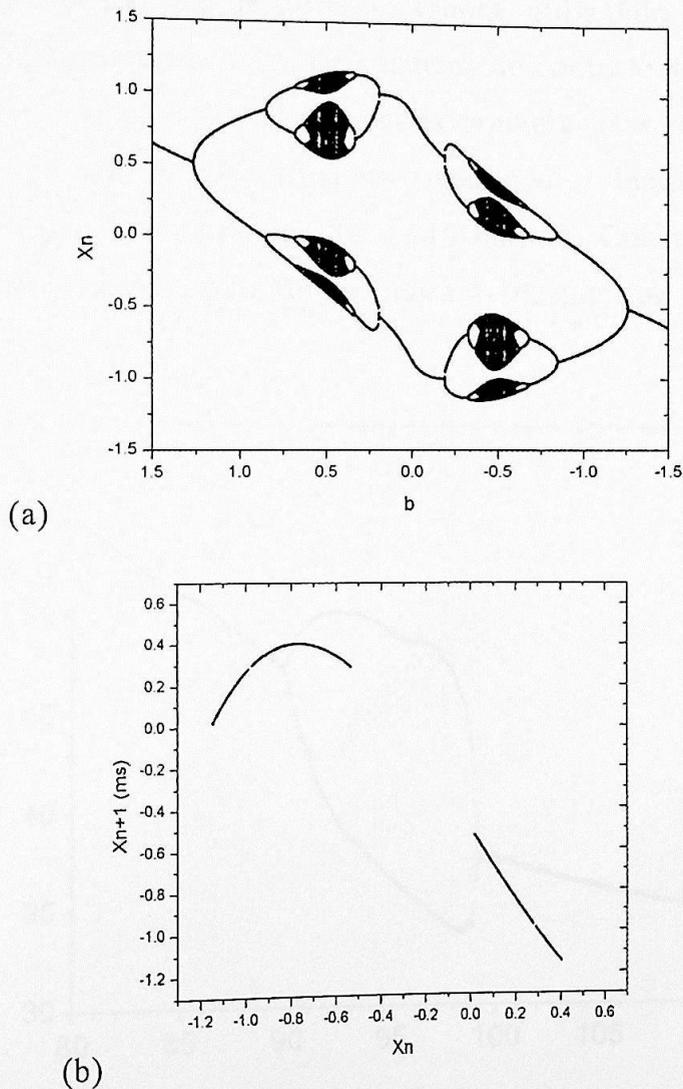


Figura 4- 13(a) Diagrama de bifurcação para o mapa cúbico variando o parâmetro b e em (b) mapa de retorno para $b = -0.5$, com $a = 1.76$.

4.2 Líquido 4:1

Utilizamos um líquido mais viscoso, com 4 partes de glicerina para 1 de água, para analisar a influência da perturbação através de onda sonora e do sistema pneumático na dinâmica de formação de bolhas.

4.2.1 Adição de período: L como parâmetro de controle

Estudamos o comportamento da dinâmica de formação de bolhas em função da vazão de ar, sem perturbação sonora, utilizando três mangueiras de diferentes comprimentos ligando o sistema de controle de vazão ao bico soprador. Para a mangueira utilizada anteriormente para o líquido menos viscoso, com 50 cm de comprimento, medimos o tempo entre bolhas enquanto aumentamos a vazão de 80 a 110 ml/min. Construimos assim o diagramas de bifurcação mostrado na figura 4-14, que traz T_n vs. vazão de ar..

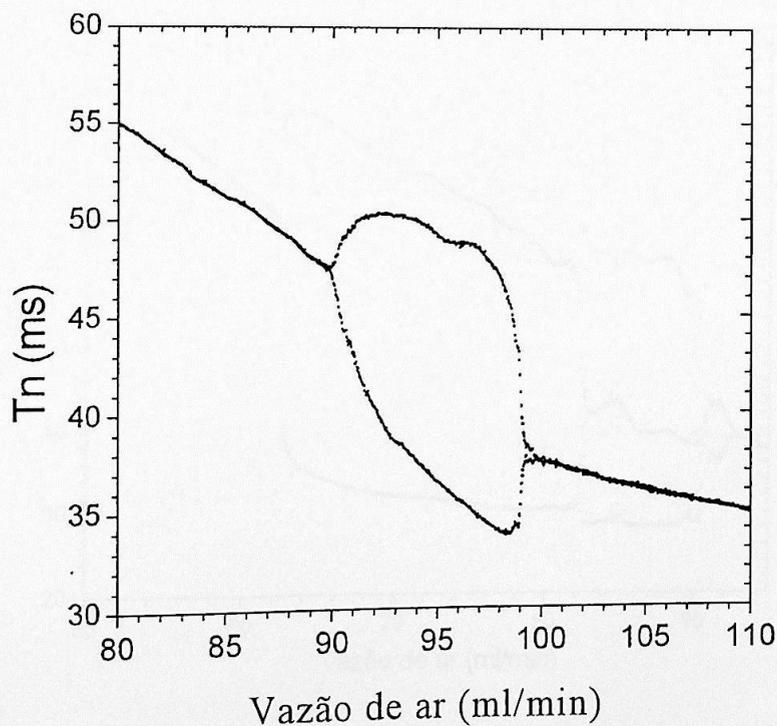


Figura 4- 14 Diagrama de T_n obtido aumentando a vazão de ar para a solução 4:1 utilizando a mangueira com 50 cm de comprimento.

Podemos observar também a formação de uma bolha de bifurcação nesse diagrama, como no caso do líquido menos viscoso. Isto mostra que a estrutura de bolha de bifurcação não é uma característica apenas do líquido menos viscoso, embora não observemos a formação de bolhas secundárias ou outro tipo de estrutura, como a intermitência tipo III observada para o líquido anterior.

Trocando a mangueira de alimentação de ar por outra de comprimento maior, 140 cm, percebemos que a estrutura de bolha de bifurcação ocorre para vazões mais baixas. Também o intervalo de vazão em que encontramos estruturas é maior e podemos observar o surgimento de um período 3 para valores mais altos de vazão dentro da região da bolha de bifurcação, figura 4-15. Esse comportamento é semelhante ao que observamos para o líquido menos viscoso se olharmos o comportamento do sistema, naquele caso, com a vazão diminuindo, figura 4-1.

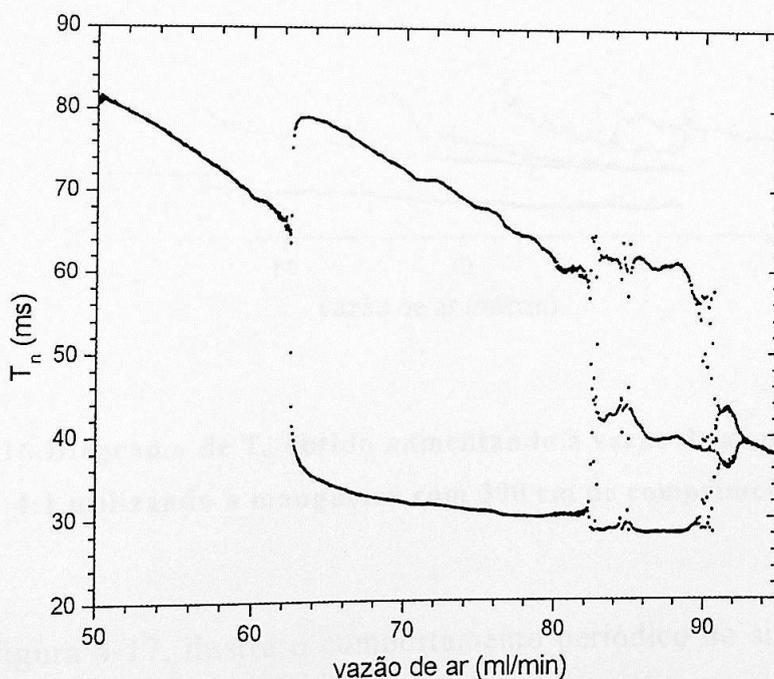


Figura 4- 15 Diagrama de T_n obtido aumentando a vazão de ar para a solução 4:1 utilizando a mangueira com 140 cm de comprimento

Já para a mangueira mais longa, com 300 cm de comprimento, o deslocamento da bolha de bifurcação para vazões ainda mais baixas, além do alargamento do intervalo de vazão, impossibilitou que obtivéssemos toda a bolha de bifurcação para a construção do diagrama da figura 4-16. Podemos observar nesta figura que para a vazão 50 ml/min o tempo entre bolhas apresenta um período 2. Aumentando a vazão o sistema apresenta bifurcações que levam ao aumento de período desse estados estacionários, período 3, 4, 5 e 6. Surge então, abruptamente, o período 1.

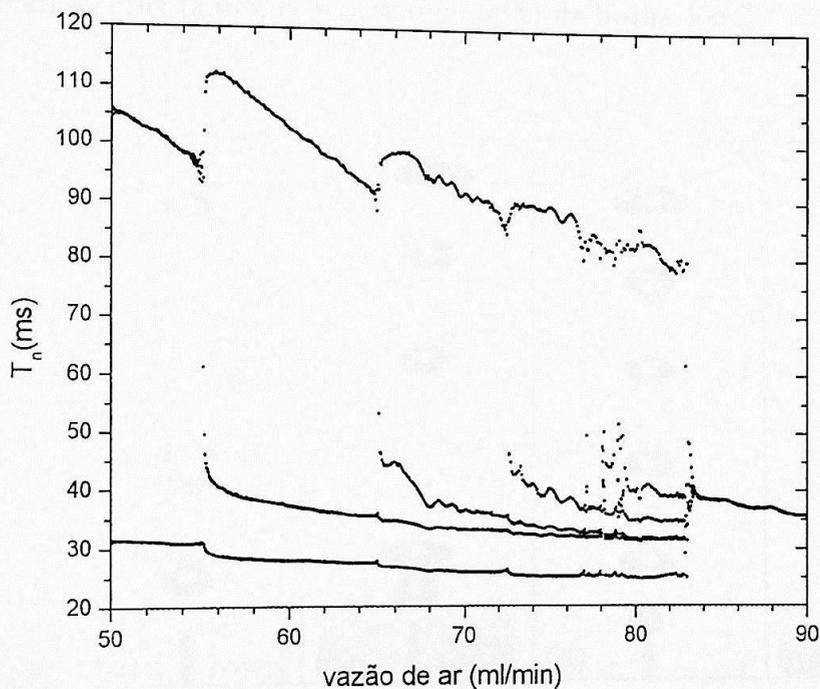


Figura 4- 16 Diagrama de T_n obtido aumentando a vazão de ar para a solução 4:1 utilizando a mangueira com 300 cm de comprimento

A figura 4-17, ilustra o comportamento periódico do sistema, de (a) a (d) temos bolhas formadas em órbitas de período 2 a 5 e em (e) temos órbita de período 1 para valor de vazão pouco acima da região da bolha de bifurcação. No caso do período 2 o comportamento é um tempo longo entre

uma bolha e a anterior e um tempo curto entre esta bolha e a próxima. Para o período 3, temos a primeira bolha após um tempo longo da anterior, já o tempo entre a primeira e a segunda bolha é tão pequeno que as bolhas colapsam pouco tempo após saírem do bico, o tempo entre a segunda e a terceira bolha é um pouco maior.

Para o período 4, novamente ocorre um colapso das bolhas 1 e 2, pois o tempo entre elas é bastante pequeno, assim, olhando para a coluna de bolhas, podemos distinguir apenas 3 bolhas ao invés de 4. Também o período 5 permite observar apenas 4 bolhas se olharmos a coluna de borbulhamento, pois também ocorre o colapso da bolha 1 e 2.

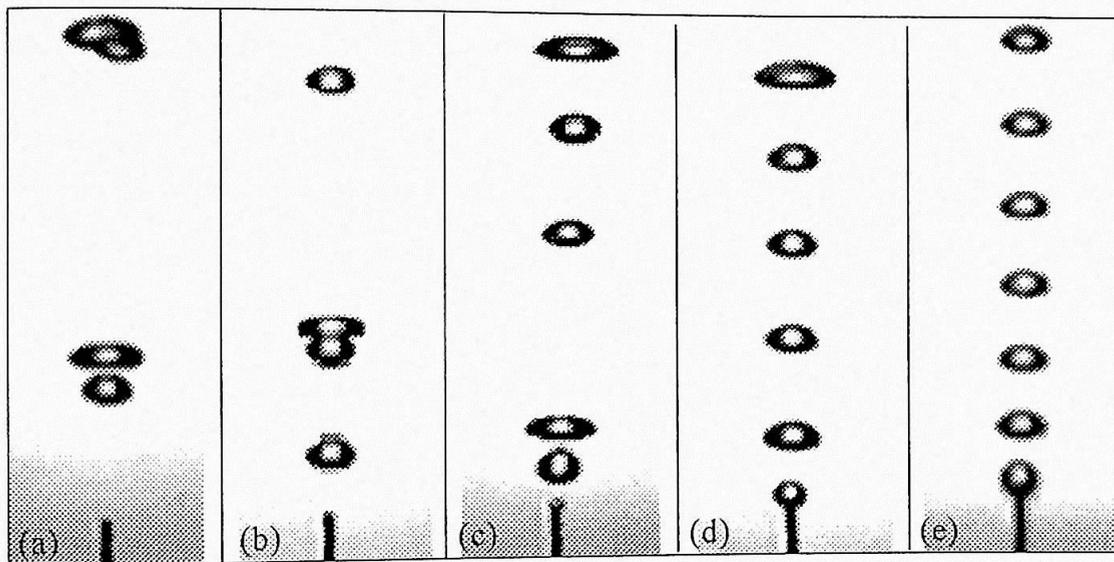


Figura 4- 17 Imagens das bolhas, obtidas utilizando a mangueira de comprimento 300 cm.

Esse estudo revela que quanto maior o comprimento da mangueira de alimentação de ar mais baixo é o intervalo de vazão onde encontramos a estrutura da bolha de bifurcação. Estas bifurcações onde observamos a soma de períodos são conhecidas como adição de período e são encontrados em diferentes sistemas onde há estímulos periódicos. A adição de período pode, ou não, vir acompanhada de regiões caóticas na transição de um

período para o outro. Nos casos em que existe a região caótica se observa duplicação de período e bifurcação sela-nó/explosão [Holden *et al.*, 1992].

Uma rota de adição de período com a presença de regiões caóticas foi observado experimentalmente por Elnashaie em um reator catalítico em meio fluidificado [Elnashaie *et al.*, 1996].

Em modelos de neurônios também é possível encontrar adição de período como foi mostrado por Fan para o modelo de Rose-Hindmarsh [Fan *et al.*, 1993] e por Coombes para o modelo de FitzHugh-Nagumo [Coombes *et al.*, 2000]

4.3 Perturbação com onda sonora: Líquido 4:1

Para analisar o comportamento do sistema, na região da bolha de bifurcação, sob ação de uma perturbação periódica, utilizamos o líquido mais viscoso (4:1) e a mangueira de alimentação de ar mais curta, 50 cm de comprimento. Aplicamos ao sistema a perturbação através da onda sonora emitida por um alto-falante. Fizemos um estudo do sistema variando a vazão para amplitude de perturbação constante e também um estudo com vazão constante variando a amplitude da onda sonora.

4.3.1 Amplitude constante variando a vazão e $\Omega = f_s / f_b$

Em todos os diagramas da figura 4-18 foram obtidos sendo a frequência da onda sonora $f_{son} = 150$ Hz, portanto a razão entre a frequência sonora e a frequência de borbulhamento, Ω^{exp} , varia entre 8.25 e 5.25 enquanto a vazão varia entre 80 e 110 ml/min. A figura 4-18 mostra o comportamento de T_n ao variarmos a vazão de ar aplicando ao sistema diferentes amplitudes de perturbação.

Aplicando uma perturbação de 7 mV, figura 4-18(a), podemos identificar a formação da bolha primária, mas com a presença de outras estruturas. Vemos um período 3, seguido de uma região caótica e de um travamento em período 2 (I), semelhante ao que observamos no caso do líquido menos viscoso. Também identificamos o surgimento de bolhas secundárias (II).

Aumentando a perturbação para 14 mV, figura 4-18(b), a janela periódica com período 3 se torna mais nítida (I) enquanto o travamento em período 2 deixa de ocorrer, não havendo mais o aparecimento de bolhas secundárias. Podemos, no entanto, observar travamento em período 2 e

bifurcação para período 1 (II), tipo duplicação de período. Também podemos observar explosão (III), isto é, transição de período 1 para caos.

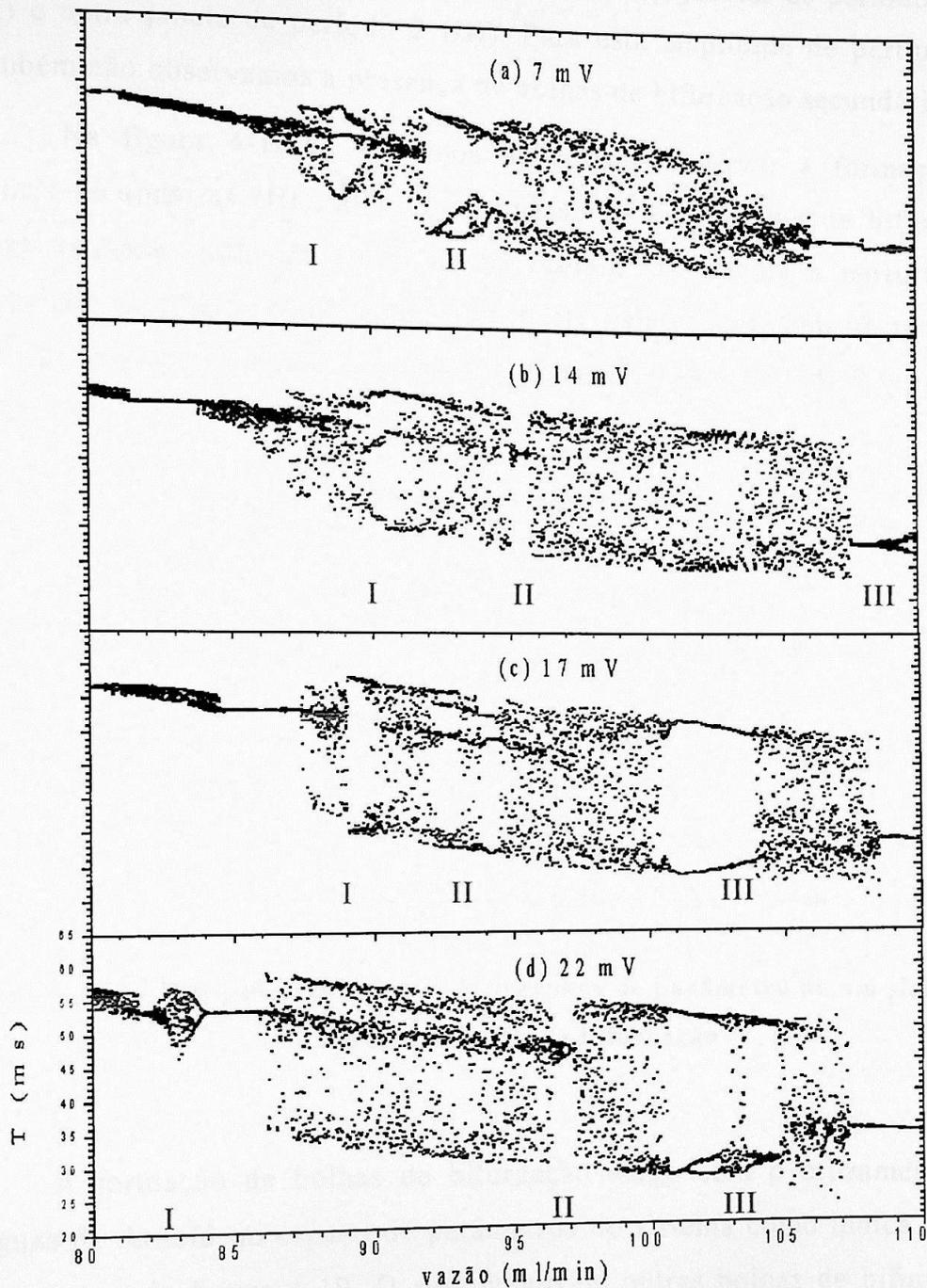


Figura 4- 18 Diagramas de bifurcação obtidos diminuindo a vazão de ar sob diferentes amplitudes de perturbação.

Na figura 4-18(c), onde a amplitude de perturbação foi fixada em 17 mV, surgem outras órbitas periódicas. Podemos observar, no sentido que a vazão de ar aumenta, uma janela de período 2 (I), janelas de período 5 e 3 (II) e outra janela de período 2 (III). Para esta amplitude de perturbação também não observamos a presença de bolhas de bifurcação secundárias.

Na figura 4-18(d), podemos novamente observar a formação de bolhas secundárias (III), além da formação de outra bolha de bifurcação primária para vazão em torno de 83 ml/min (I), devida a perturbação. Semelhante ao que observamos em (b II) vemos aqui uma diminuição abrupta da região visitada, seguida de bifurcações para período 2 e período 1 (II).

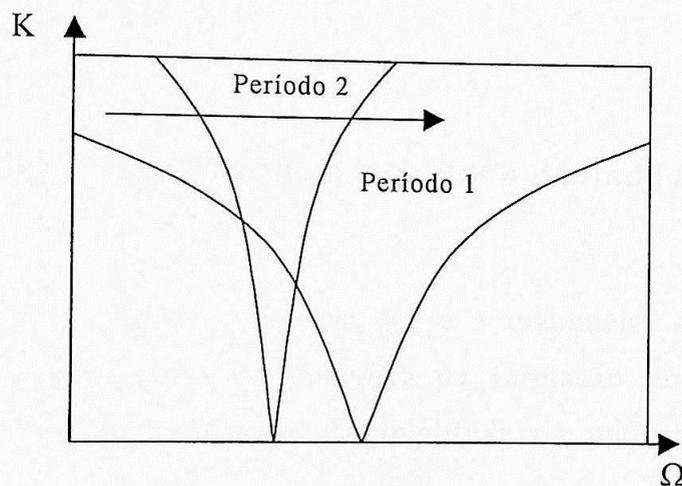


Figura 4- 19 Esquema representando o espaço de parâmetro de um sistema que apresenta bolha de bifurcação

A formação de bolhas de bifurcação surge com o cruzamento de línguas de Arnold no espaço de parâmetros do sistema como indica a seta no esquema da figura 4-19. O surgimento de outras bolhas de bifurcação devido a presença da perturbação sugere a existência de outros cruzamentos entre as línguas de Arnold do espaço de parâmetros do sistema.

Com a ajuda das figuras 4-14 e 4-18 podemos analisar o comportamento do sistema inicialmente a T_n próximo de 35 ms, sem

perturbação. Podemos observar que para $A = 14$ mV temos que nesta região o sistema ainda é periódico, mas com período 2. Com $A = 17$ mV a região visitada sofre um alargamento, sugerindo a existência de uma crise.

Para uma perturbação mais alta, $A = 22$ mV, onde a região que nos casos anteriores ocorria o retorno a uma banda mais estreita, o sistema continua visitando uma larga região. Se formos analisar o tempo de borbulhamento quando a vazão de ar é mais baixa, $T \sim 50$ ms, percebemos que o comportamento é bastante diferente do que descrevemos anteriormente. Não vemos duplicação de período até a amplitude de 22 mV onde ocorre a formação da outra bolha de bifurcação. O próximo passo então, é analisar o sistema variando continuamente a amplitude da perturbação.

4.3.2 Vazão constante variando a amplitude da onda sonora

Novamente utilizamos o líquido 4:1 e a mangueira de 50 cm de comprimento para analisar a da dinâmica da formação de bolhas para valores fixos de vazão em função da amplitude da perturbação sonora aplicada.

Fixamos a vazão de ar em 110, 93 e 90 ml/min. Em 110 ml/min o sistema possui vazão de ar mais alta do que na região onde aparece a estrutura da bolha de bifurcação. A vazão de ar de 93 ml/min nos permite estudar o sistema dentro da região da bolha de bifurcação e em 90 ml/min a vazão está abaixo da bolha de bifurcação.

Com a vazão fixa, variamos a amplitude da onda sonora entre 0 e 15 mV, sinal obtido com o microfone a 5 cm da superfície do líquido. Também obtivemos alguns atratores para estas vazões com amplitude sonora fixa. A frequência da onda sonora é 150 Hz.

Vazão de 110 ml/min: o mapa do círculo

A figura 4-20 mostra um desses diagramas obtido com o sistema em período 1 sendo a razão entre a frequência da onda sonora e a frequência de borbulhamento $\Omega^{\text{exp}} = 5.25$. Esse diagrama é semelhante ao que encontramos com o mapa do círculo, figura 4-21, com $\Omega = 5.25 \pmod{1} = 0.25$. Nesse diagrama temos uma região quase-periódica, para $K < 1$ e comportamento caótico para $1 < K < 2$, caracterizando transição para o caos via quase-periodicidade.

Aumentando mais o parâmetro K , surge um ponto fixo estável e um instável, caracterizando bifurcação sela-nó supercrítica, que no sentido em que diminuimos K representa explosão. Aumentando ainda mais K temos outra rota para o caos, agora via duplicação de período.

A figura 4-22 mostra os atratores obtidos para T_n em torno de 35 ms. Podemos ver período 1 (a), atrator quase-periódico (b), travamento em período 1 (c) e, em (d), período 2, que surge após a duplicação de período observada no diagrama de bifurcação, figura 4-20.

Novamente encontramos semelhança com o mapa do círculo, comparando os atratores obtidos experimentalmente, com os atratores do mapa do círculo mostrados na figura 4-23. Para $\Omega = \Omega^{\text{exp}} \pmod{1}$ podemos obter o mesmo tipo de comportamento com o mapa do círculo. Podemos observar, nesta figura, como na figura 4-22, período 1 nem (a), atrator quase-periódico em (b), período 1 surgido de uma bifurcação sela-nó/explosão em (c) e em (d) período 2.

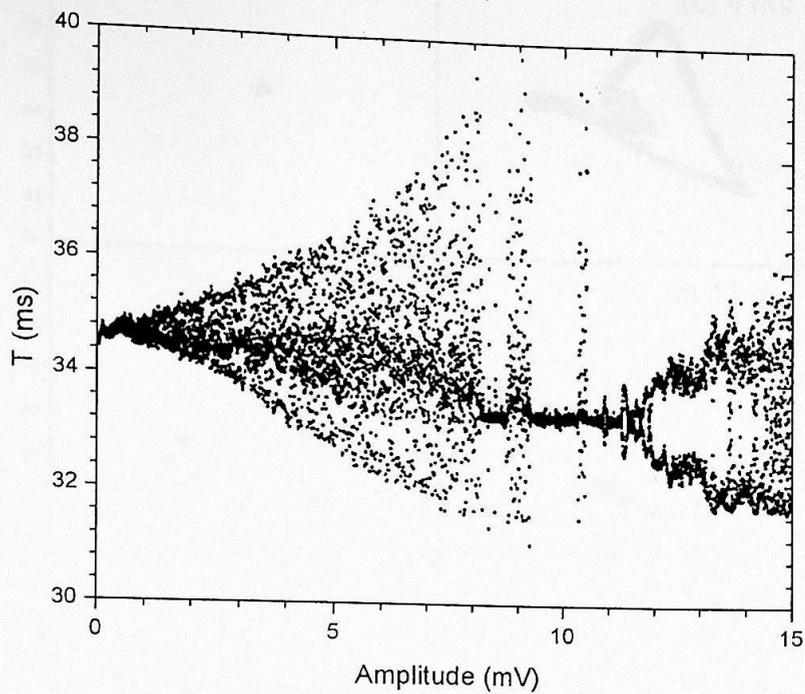


Figura 4- 20 Diagrama obtido variando a amplitude da onda sonora entre 0 e 15 mV, com vazão constante em 110 ml/min e $\Omega^{exp} = 5.25$.

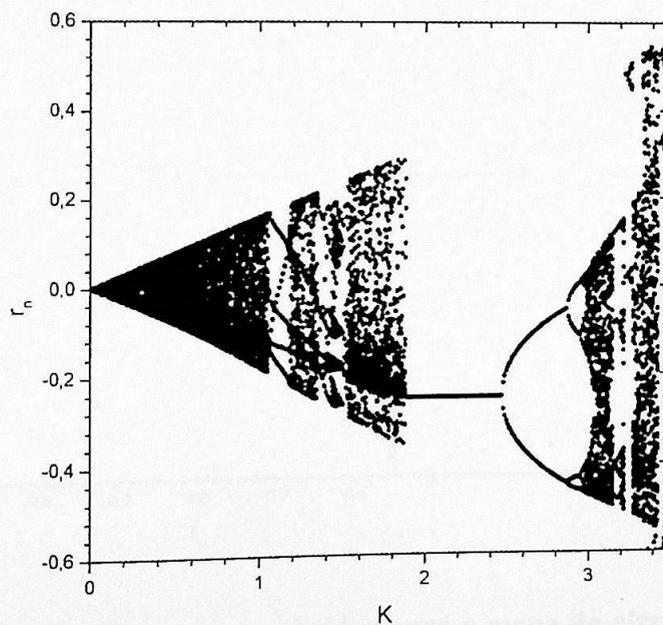


Figura 4- 21 Diagrama de bifurcação obtido para o mapa do círculo com $\Omega = 5.25 \pmod{1} = 0.25$ e $b = -0.2$.

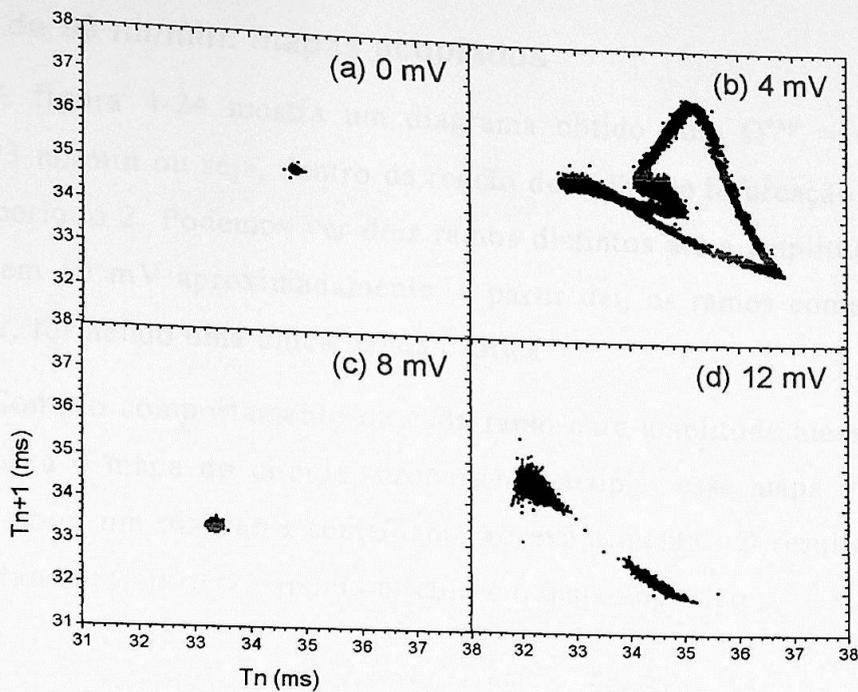


Figura 4- 22 Atratores obtidos para $f_b = 28.8$ bolhas/s.

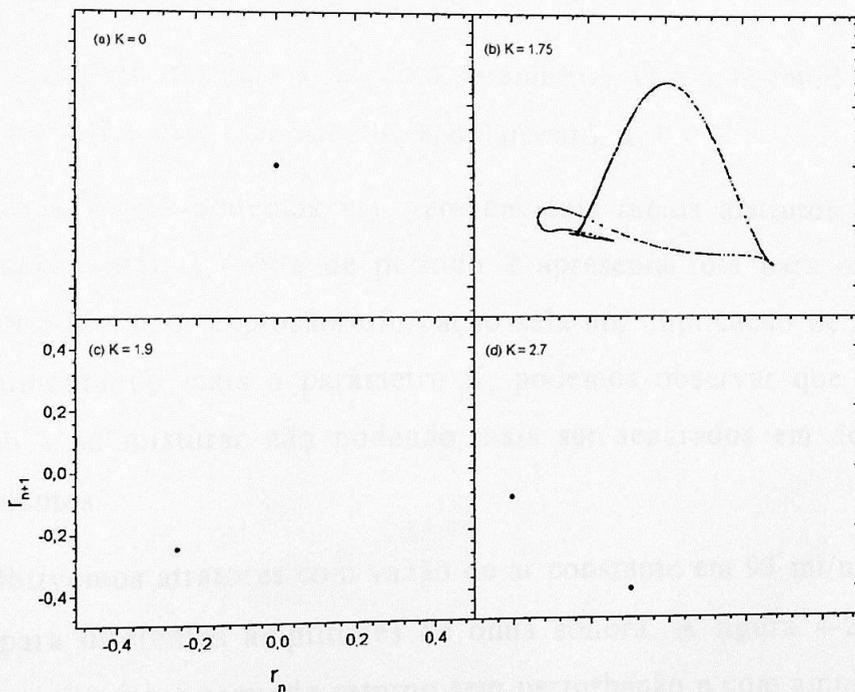


Figura 4- 23 Atratores obtidos para o mapa do círculo para $\Omega = 5.25 \pmod{1} = 0.25$, $b = -0.2$ sendo K em (a) igual a 0, em (b) igual a 1.75, em (c) igual a 1.9 e em (d) igual a 2.7.

Vazão de 93 ml/min: mapas acoplados

A figura 4-24 mostra um diagrama obtido com $\Omega^{\text{exp}} = 6.46$ com vazão 93 ml/min ou seja, dentro da região de bolha de bifurcação, partindo de um período 2. Podemos ver dois ramos distintos até a amplitude sonora chegar em 10 mV aproximadamente, a partir daí, os ramos começam a se misturar, formando uma única banda caótica.

Como o comportamento de cada ramo para amplitude menor que 10 mV lembra o mapa do círculo, procuramos acoplar esse mapa a outro de modo a obter um diagrama semelhante ao experimental. O resultado então do acoplamento entre o mapa do círculo e o mapa logístico:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \text{sen } 2\pi\theta_n + br_n \quad (\text{mod } 1) \\ r_{n+1} &= br_n - \frac{K}{2\pi} \text{sen } 2\pi\theta_n \\ x_{n+1} &= ax_n(1-x_n) + a_c r_{n+1}\end{aligned} \quad (4-3)$$

nos permitiu obter a figura 4-25, com parâmetros, $\Omega = 6.46 \pmod{1} = 0.46$, $b = 0.2$, $a = 3.2$ e uma constante de acoplamento, $a_c = 0.1$.

Nesta figura podemos ver, também dois ramos distintos, como no caso experimental, a órbita de período 2 apresenta rota para o caos via quase-periodicidade, explosão/bifurcação sela-nó, duplicação de período e caos. Aumentando mais o parâmetro K, podemos observar que os ramos começam a se misturar não podendo mais ser separados em dois ramos independentes.

Obtivemos atratores com vazão de ar constante em 93 ml/min e $\Omega^{\text{exp}} = 6.46$ para diferentes amplitudes de onda sonora. A figura 4-26 mostra mapas de primeiro e segundo retorno sem perturbação e com amplitudes de 6, 9.5 e 12 mV. Podemos ver o sistema inicialmente uma órbita periódica de período 2, em (a) temos o mapa de primeiro retorno e em (A) o ponto representando esta órbita na diagonal do mapa de segundo retorno, T_{n+2} vs. T_n para $n = 1, 3, 5 \dots$

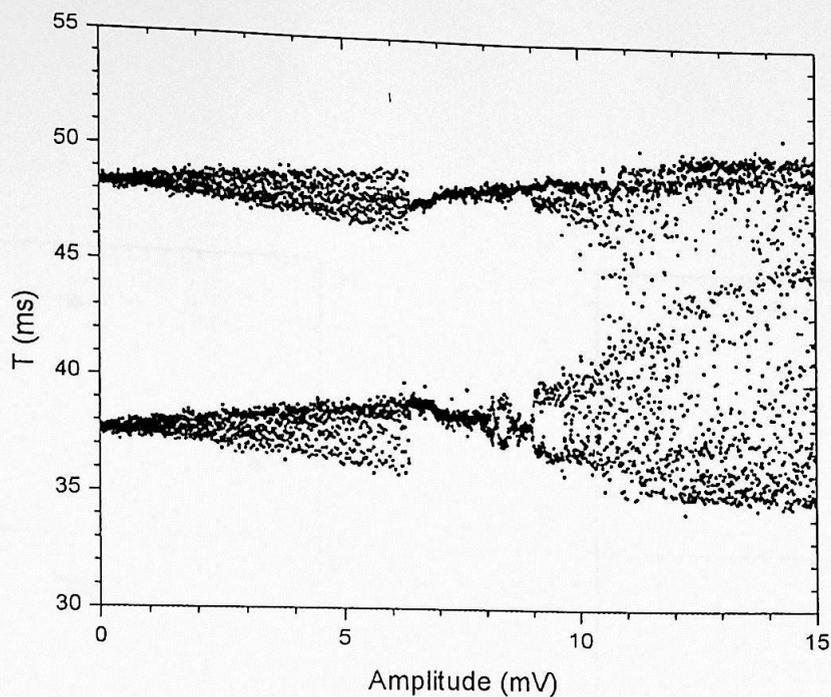


Figura 4- 24 Diagrama obtido variando a amplitude da onda sonora entre 0 e 15 mV, com vazão constante em 93 ml/min e $\Omega^{\text{exp}} = 6.46$.

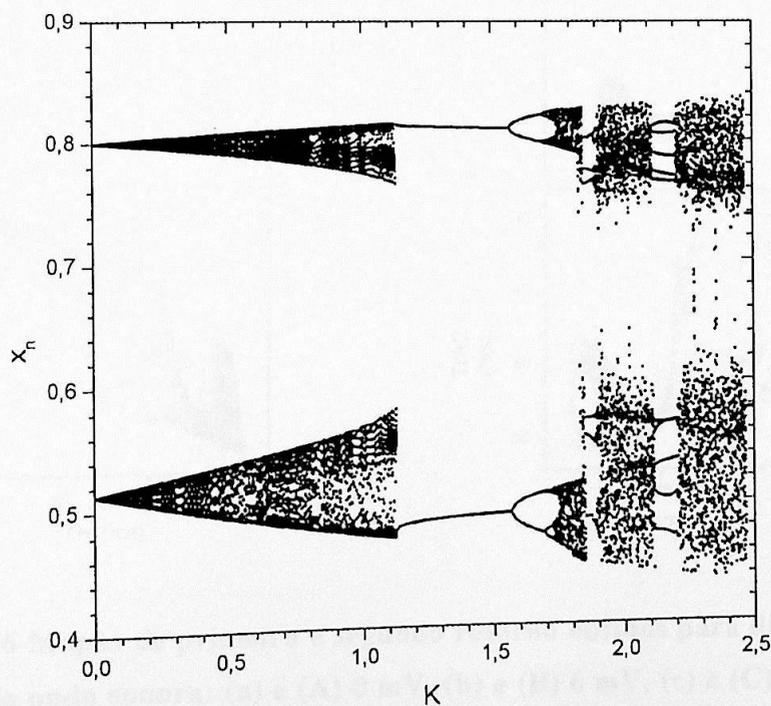


Figura 4- 25 Diagrama de bifurcação obtido do acoplamento entre o mapa do círculo e o mapa logístico sendo $\Omega = 6.46 \pmod{1} = 0.46$.

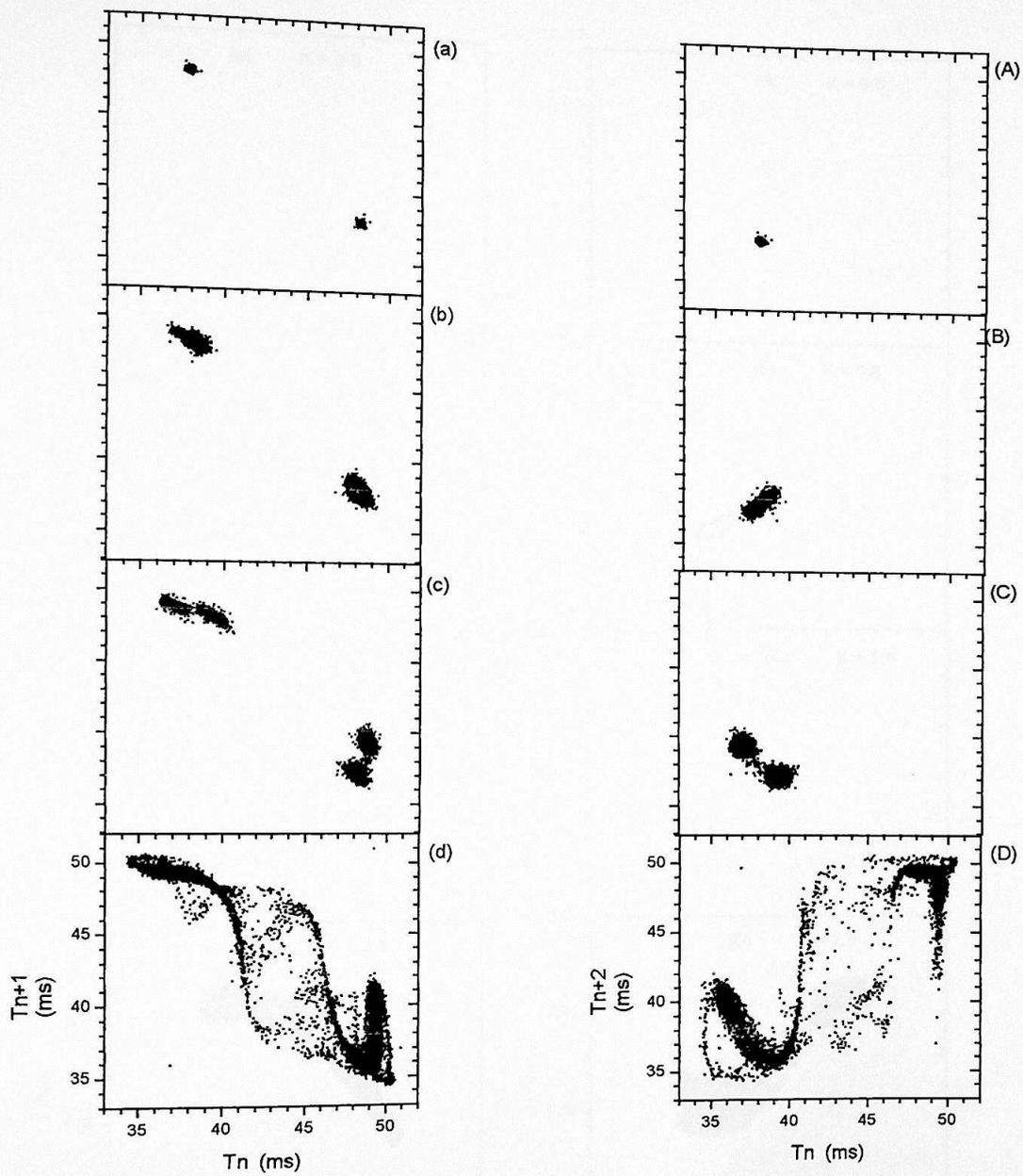


Figura 4- 26 Mapas de primeiro e segundo retorno obtidos para diferentes amplitudes de onda sonora: (a) e (A) 0 mV, (b) e (B) 6 mV, (c) e (C) 9.5 mV e (d) e (D) 12 mV.

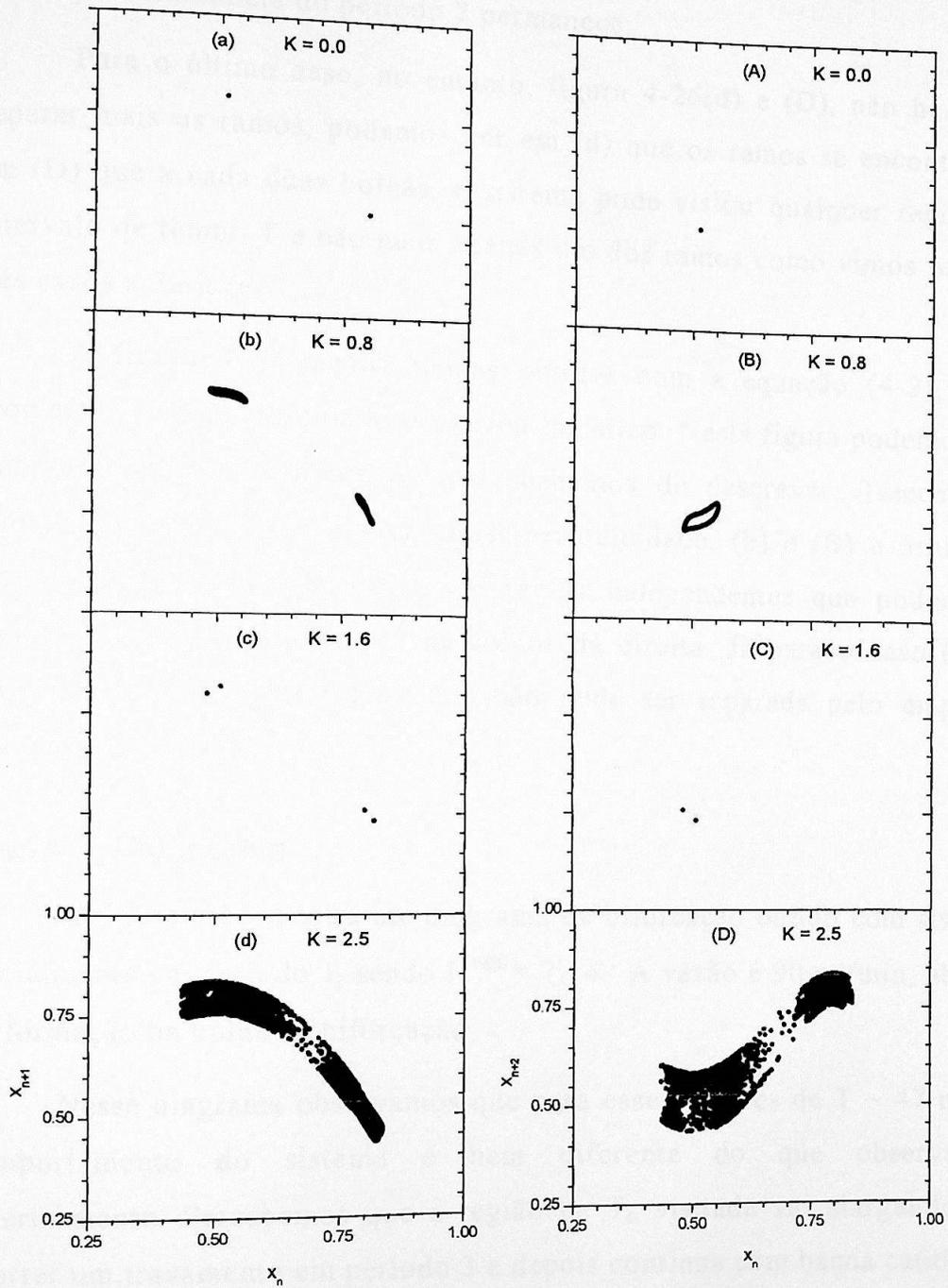


Figura 4- 27 Mapas de primeiro e segundo retorno obtidos com a equação (4-4).

Em (b) cada ramo visitado apresenta uma quase-periodicidade que também pode ser vista para um dos ramos no mapa de segundo retorno (B). O terceiro atrator está próximo de um período 4, mas perdendo a fase, figura 4-26 (c) e (C). Ainda é possível tratar os dois ramos separadamente, pois a predominância do período 2 permanece.

Para o último caso, no entanto, figura 4-26(d) e (D), não há como separar mais os ramos, podemos ver em (d) que os ramos se encontram e em (D) que a cada duas bolhas, o sistema pode visitar qualquer região do intervalo de tempo T e não mais apenas um dos ramos como vimos para os três casos anteriores.

A figura 4-27 mostra mapas obtidos com a equação (4-2), onde acoplamos o mapa do círculo e o mapa logístico. Nesta figura podemos ver comportamento semelhante ao que acabamos de descrever. Temos uma órbita de período 2, (a) e (A), quase-periodicidade, (b) e (B) e órbita de período 4, (c) e (C), apresentando ramos independentes que podem ser separados, como podemos ver na coluna da direita. Já para o caso (d), o mapa visita uma larga região que não pode ser separada pelo mapa de segundo retorno (D).

Vazão de 90 ml/min

A figura 4-28 mostra um diagrama de bifurcação obtido com sistema inicialmente em período 1, sendo $\Omega^{\text{exp}} = 7.14$. A vazão é 90 ml/min, abaixo da formação da bolha de bifurcação.

Nesse diagrama observamos que para esses valores de $T \sim 47$ ms, o comportamento do sistema é bem diferente do que observamos anteriormente. Percebemos que a região de T_n visitada vai alargando até ocorrer um travamento em período 3 e depois continua com banda caótica.

O comportamento caracterizado por esse diagrama de bifurcação é bastante diferente do que observamos anteriormente. Não há semelhança, a primeira vista, com o mapa do círculo, mostrando que a bolha de bifurcação influencia o comportamento do sistema para valores próximos desta frequência de borbulhamento.

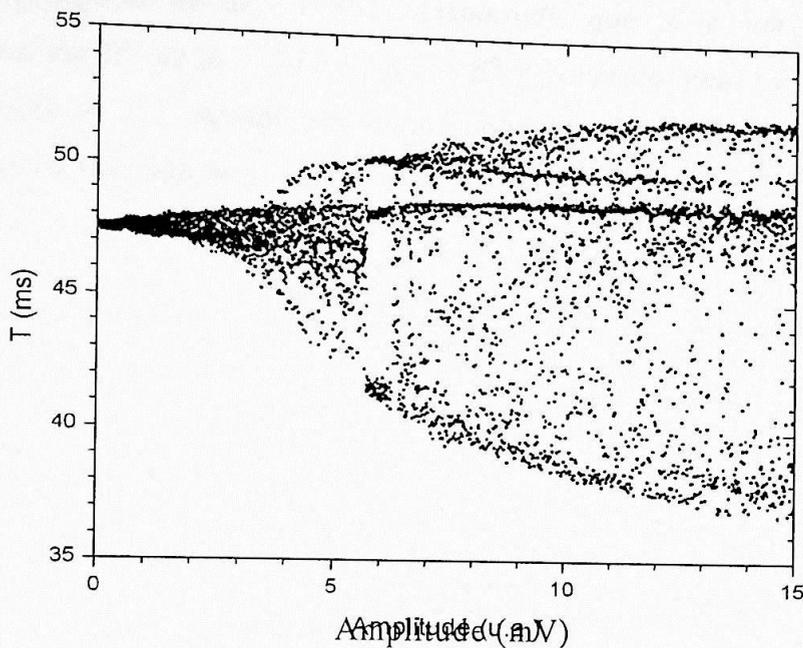


Figura 4- 28 Diagrama obtido variando a amplitude da onda sonora entre 0 e 15 mV, com vazão constante em 90 ml/min e $\Omega^{\text{exp}} = 7.14$.

A figura 4-29 mostra uma seqüência de atratores obtidos aumentando a amplitude da onda sonora para $\Omega^{\text{exp}} = 7.14$. Podemos ver em (a) a órbita estável de período 1, sem perturbação e em (b) o ciclo limite. Em seguida o atrator passa a ter duas bandas (c), identificando a existência de uma bifurcação. O travamento em período 3, visto em (d), assegura a existência do caos que vemos nos atratores mostrado em (e)

Na figura 4-29(e) podemos ver um atrator obtido após a região de período 3, nesta figura podemos identificar a existência e a posição de um ponto de sela. Na figura 4-29(f), o atrator se alarga um pouco mais, e podemos identificar, pela diagonal, a existência de três pontos de sela. O entanto não sabemos se nesses

mapas de retorno os atratores estão reproduzidos corretamente, para isto é preciso conhecermos a dimensão embebida do atrator.

A dimensão de imersão m de um atrator mostra o número de coordenadas suficientes para descrever o atrator tal como ele é no espaço de fase original. Uma definição para dimensão de imersão é dada por Alligood [Alligood et al., 1996]: *Assumindo que A é um atrator d -dimensional em \mathbb{R}^k . Se $m > 2d$ e $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ é genérico, então F reproduz A na proporção de 1:1.* Assim temos uma condição suficiente para encontrar a dimensão de imersão m de um atrator.

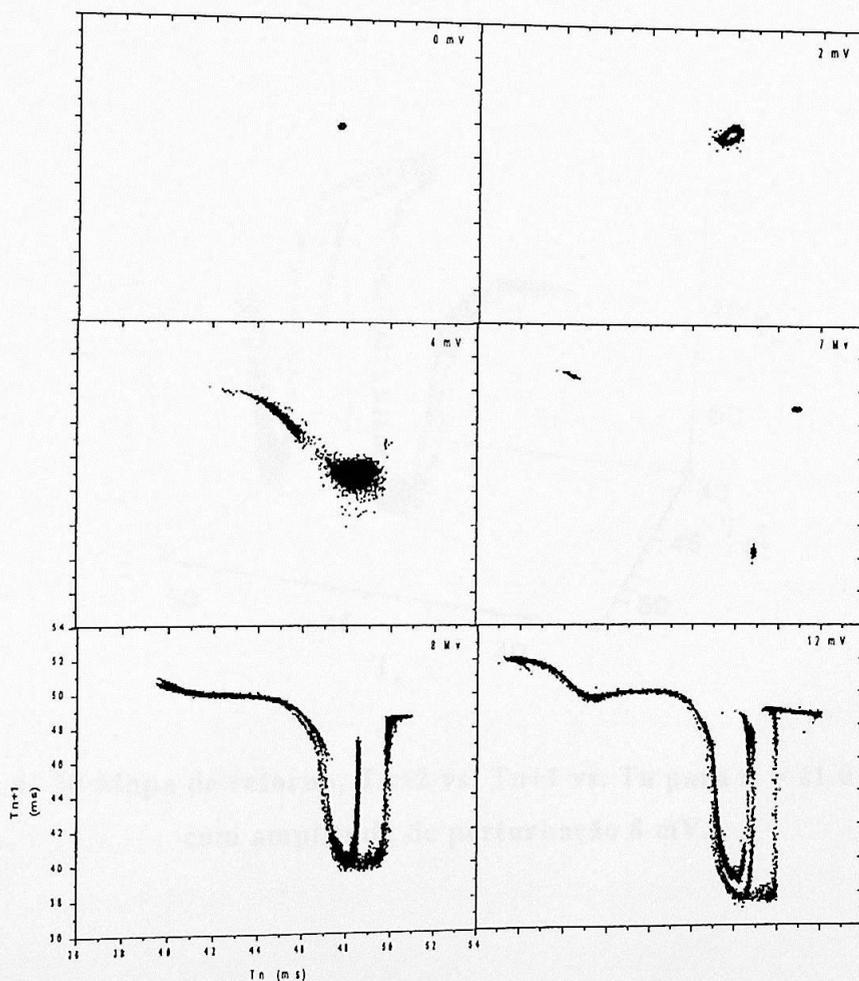


Figura 4- 29 Atratores obtidos para $f_b = 21.0$ bolhas/s para diferentes amplitudes de perturbação.

Outra forma mais genérica de encontrar esta dimensão é o método de falsos vizinhos. Para o atrator obtido com amplitude da onda sonora de 8 mV obtivemos 3 para sua dimensão embebida. Para obter esta dimensão utilizamos um programa do pacote TISEAN que utiliza o método de falsos vizinhos [Hegger *et al.*, 1999].

A figura 4-30 mostra um mapa em 3 dimensões para ilustrar melhor esse atrator. Podemos perceber que os três ramos visitados pelo atrator não se encontram no mesmo plano, revelando uma estrutura mais complexa. Ainda é possível observar regiões mais visitadas nesse atrator, que não podem ser identificadas no mapa de primeiro retorno.

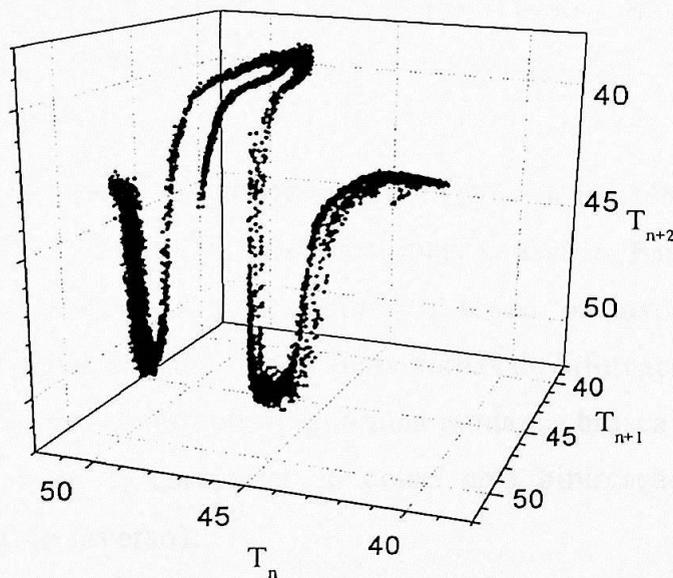


Figura 4- 30 Mapa de retorno, T_{n+2} vs. T_{n+1} vs. T_n para $f_b = 21.0$ bolhas/s com amplitude de perturbação 8 mV.

5 CONCLUSÕES

Estudamos a dinâmica de formação de bolhas de ar em dois fluidos viscosos com e sem a aplicação de uma perturbação periódica.

Com o fluido menos viscoso obtivemos bolhas de bifurcação, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, tendo o fluxo de ar como parâmetro de controle. Obtivemos ainda bolhas de bifurcação secundárias, em cada ramo da bolha de bifurcação primária, que foram simuladas com um mapa cúbico. Observamos também um regime intermitente consistente com a intermitência tipo I.

Com o fluido mais viscoso também observamos bolhas de bifurcação que dependem do comprimento da mangueira de alimentação de ar, portanto depende da dissipação do sistema. Tendo o fluxo de ar como parâmetro de controle obtivemos uma rota para o caos via adição de período.

No caso do menor comprimento da mangueira também perturbamos o sistema aplicando uma onda sonora em duas situações. Para a amplitude da onda sonora fixa em alguns valores e tendo o fluxo de ar como parâmetro de controle também observamos bolhas de bifurcação primárias e secundárias e em um caso foi observado uma mudança brusca de um regime caótico para período 1, caracterizado como uma bifurcação sela-nó (ou explosão no sentido inverso).

Na segunda situação foi mantido o fluxo de ar fixo em três valores e tendo a amplitude da onda sonora como parâmetro de controle. Para a mais alta vazão e partindo de um período 1 foi observado comportamento quase-periódico seguido de uma região caótica, bifurcação sela-nó/explosão e rota para o caos via duplicação de período, sendo que esse comportamento é muito bem simulado pelo mapa do círculo bidimensional.

Para um fluxo de ar um pouco mais baixo e partindo de um período 2 foi observado também comportamento quase-periódico, bifurcação sela-nó

e duplicações de período em cada um dos ramos e após uma crise interior as duas bandas caóticas se misturam e nesse caso somente o mapa do círculo não mostrou-se adequado para simular o sistema, foi necessário fazer um acoplamento com o mapa logístico.

Para uma vazão ainda um pouco mais baixa as duplicações de período ou bifurcação sela-nó não são mais observadas e nesse caso um modelo mais elaborado precisa ser construído.

6 REFERÊNCIAS

- Alligood, K. T., Sauer, T. D. e Yorke, J. A. (1996): *Chaos – an introduction to dynamical systems*, Springer, New York.
- Ambika, G. e Sujatha, N. V. (2000): *Bubbling and bistability in two parameter discrete systems*, Pramana, vol. 54, no. 5, 751-761.
- Argyris, J., Faust, G. e Haase, M. (1994): *An Exploration of Chaos*, North-Holland, Amsterdam.
- Coombes, S. e Osbaldestin, A. H. (2000): *Period-adding bifurcations and chaos in a periodically stimulated excitable neural relaxation oscillator*, Phys. Ver. E **62**, 3, 4057-4066.
- Davidson, J. F., Mech, A. M. I. e Schüller, B. O. G. (1960): *Bubble formation at na orifice in a viscous liquid*, Trans. Instn Chem. Engrs, **38**, 144-154.
- Dullin, H. R. (1994): *Melnikov's method applied to the double pendulum*, Z. Phys. B **93**, 521-528.
- Elnashaie, S. S. E. H. e Ajbar, A. (1996): *Period-adding and Chaos in Fluidized Bed Catalytic Reactors*, Chaos, Solitons & Fractals **7**, 8, 1317-1331.
- Fan, Y. e Holden, A. V. (1993): *Bifurcations, Burstings, Chaos and Crises in the Rose-Hindmarsh Model for Neuronal Activity*, Chaos, Solitons & Fractals **3**, 4, 439-449.
- Gonçalves, W. M. (1996): *A experiência da Torneira Gotejante*, Tese de doutorado, IFUSP.
- Grebogi, C., Ott, E e Yorke, J. A. (1983): *Crises, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos*, Physica D **7**, 181-200.
- Grebogi, C., Ott, E., Romeiras, F. Yorke, J. A. (1987): *Critical exponentes for crisis-induced intermittency*, Phys. Rev. A, **36**, 11, 5365-5379.

- Hegger, R., Kantz, H. e Schreiber, T. (1999): *Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package*, Chaos 9, 413-425.
- Holden, A. V. e Y. Fan (1992): *From Simple to Complex Oscillatory Behaviour via Intermittent Chaos in the Rose-Hindmarsh Model For Neuronal Activity*, Chaos, Solitons & Fractals 2, 4, 349-369.
- Lorenz, E. N. (1980): *Attractor sets and quase-geostrophic equilibrium*, J. Atmos. Sci 37, 1685-1699.
- Mittoni, L. J., Schwartz, M. P. e La Nauze, R. J. (1995): *Deterministic chaos in the gas inlet pressure of gas-liquid bubbling systems*, Phys. Fluids 7, 891-893.
- Pinto, R. D. (1999): *Comportamento Complexo na Experiência da Torneira Gotejante*, Tese de doutorado, IFUSP.
- Ruzicka, M. C., Drahos, J., Zahradník, J. e Thomas, N. H. (1997): *Intermittent transition from bubbling to jetting regime in gas-liquid two phase flows*, Int. J. Multiphase Flow 23, 4, 671-682.
- Sartorelli, J.C., Gonçalves, W. M. e Pinto, R. D. (1994): *Crisis and intermittence in a leaky-faucet experiment*, Phys. Rev. E 49, 3963-3975.
- Shaw, R. (1984): *The dripping faucet as a model chaotic system*, Aerial Press: Santa Cruz.
- Thompson, J. M. T., Stewart, H. B. (1986): *Nonlinear Dynamics and Chaos: Geometrical Methods for Engineers and Scientists*, John Wiley and Sons, Great Britain.
- Tritton, D. J., Egdell, C. (1993): *Chaotic bubbling*, Phys. Fluids A 5, 503-505.
- Tufaile, A. . (2000): *Estudo da formação de bolhas em líquidos viscosos (Uma abordagem usando a Teoria do Caos)*, Tese de doutorado, IFUSP.
- Tufaile, A. ., Sartorelli, J. C. (2000a): *Chaotic Behavior in bubble formation dynamics*, Physica A 275 336-346.
- Tufaile, A. ., Sartorelli, J. C. (2000b): *Hénon-like attractor in air bubble formation*, Phys. Let. A 275 211-217.

- Tufaile, A ., Sartorelli, J. C. (2001): *The circle map dynamics in air bubble formation*, Phys. Let. A **287** 74-80.
- Tufaile, A ., Reyes, M. B., e Sartorelli, J. C. (2002): *Explosion of chaotic bubbling*, Physica A, **308**, 15-24.
- Zhang, L. e Shoji, M. (2001): *Aperiodic bubble formation from a submerged orifice*, Chemical Engrs Science, **56**, 5371-5381.