

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA



Propagação de Campos em Buracos Negros Esféricos

Carlos Molina Mendes

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla



São Paulo
2003

del 23/10/03

523.8875

43387

10

102

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Mendes, Carlos Molina

Propagação de Campos em Buracos Negros Esféricos.
São Paulo, SP - 2003

Tese (Doutoramento) Universidade de São Paulo
Instituto de Física. Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Propagação de Campos;
2. Buracos Negros; 3. Gravitação.

USP/IF/SBI-056/2003

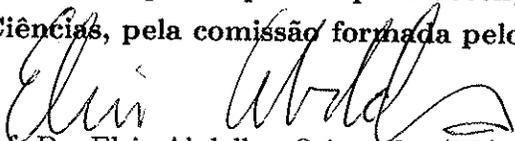
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

Propagação de Campos em Buracos Negros Esféricos

Carlos Molina Mendes

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Ciências, pela comissão formada pelos professores:

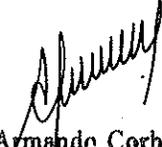

Prof. Dr. Elcio Abdalla - Orientador (IF/USP)

Prof. Dr. Alberto Saa (IMECC/UNICAMP)

Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas (IFT/UNESP)

Prof. Dr. José Ademir Sales de Lima (DFTE/UFRN, IAG/USP)

Prof. Dr. Luís Raul Weber Abramo (IF/USP)


Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

São Paulo, 27 de agosto de 2003.

Resumo

O estudo de perturbações em buracos negros tem sido um campo de pesquisa ativo nas últimas décadas, levando a importantes contribuições para o entendimento da física de corpos compactos em geral. Para o caso de geometrias esféricas assintoticamente planas quadridimensionais, existe um panorama muito bem delineado para a dinâmica de diversos campos de interesse. A introdução de uma constante cosmológica nas equações de Einstein muda o caráter assintótico das soluções tipo buraco negro e neste caso, muito menos é conhecido. No trabalho desenvolvido nesta tese abordamos alguns aspectos da propagação de campos em geometrias esféricas assintoticamente de Sitter e anti-de Sitter, considerando inclusive geometrias com dimensão maior que quatro. No regime quase extremo a dinâmica é mais simples. Neste caso, são obtidas expressões analíticas para os potenciais efetivos e para os modos quasi-normais, caracterizando completamente a dinâmica. Em geral, entretanto, somos forçados a recorrer a métodos semi-analíticos e numéricos. Empregamos estes métodos para uma análise ampla da forma de decaimento dos diversos campos. Nossos resultados esboçam um quadro geral bastante coeso em uma grande gama de situações.

Abstract

The study of perturbations in black holes has been an active field of research in the last decades, leading to a better understanding of the physics of compact objects in general. In the case of asymptotically flat spherical geometries with four dimensions, there is a schematic picture regarding the dynamics of many fields of interest. The introduction of a cosmological constant in the Einstein equations changes the asymptotic character of the black hole solutions, and in this case much less is known. In the work developed in this thesis we treat some aspects of the field propagation in spherically symmetric geometries which are asymptotically de Sitter and anti-de Sitter, considering also geometries with dimension greater than four. In the near extreme regime the dynamics is simpler. In this case, we obtain analytic expressions to the effective potentials and to the quasinormal modes, completely characterizing the dynamics. In general we are forced to use semi-analytic and numerical methods. These methods are employed in an extensive analysis of the decay modes of the fields considered. Our results sketch a general picture in a wide sample of situations.

Agradecimentos

Ao meu orientador Elcio Abdalla, pela orientação e motivação, não somente restritas a física e a pesquisa.

Às pessoas que me ajudaram em muitos pontos, relacionados de uma maneira ou de outra com este trabalho. Entre elas Arnaldo, Bin, João Luiz, Luciano, Mário e Massayuki.

Às pessoas que tiveram a gentileza e paciência de ler alguns trechos desta tese, entre elas Davi, João Luiz, Karlúcio e Mário.

Aos amigos do IFUSP e IFT, em especial ao pessoal do departamento de Física Matemática.

Aos amigos do CRUSP, em especial aqueles que passaram pelo 611G.

À Adriana, por tudo.

À minha família e às pessoas que amo.

À FAPESP, pelo apoio financeiro.

Aos meus pais, Carlos e Nilza, e à minha filha, Juliana.

Deep in the human unconscious is a pervasive need for a logical universe that makes sense. But the real universe is always one step beyond logic.

from “The Collected Sayings of Muad’Dib”, by the Princess Irulan

Sumário

1	Introdução	1
2	O Espaço-Tempo	8
2.1	Gravidade e Espaço-Tempo	8
2.2	Equações de Einstein	11
2.3	Soluções Esfericamente Simétricas	14
2.4	Buracos Negros Esféricos	16
3	Campos Linearizados	19
3.1	Introduzindo a Aproximação Linear	19
3.2	Campo Escalar	20
3.3	Campos Eletromagnético e Gravitacional	25
3.4	Características Gerais do Decaimento	28
3.5	Problema de Condições Iniciais Características	32
4	Campos em Geometrias Assintoticamente de Sitter	39
4.1	Estrutura de Horizontes	39
4.1.1	Geometria em SdS d-Dimensional	40
4.1.2	Geometria RNdS d-Dimensional	42
4.2	Coordenada Tartaruga	44

4.2.1	Espaço-Tempo Reissner-Nordström-de Sitter	44
4.2.2	Características Básicas	47
4.2.3	Variando a Carga e a Constante Cosmológica	49
4.3	Potenciais Efetivos	53
4.3.1	Potencial Escalar	53
4.3.2	Potenciais Eletromagnético e Gravitacional	57
4.3.3	Comportamento Assintótico	59
4.4	Modos Quasi-Normais em SdS e RNdS	62
5	Buracos Negros com Constante Cosmológica Quase Extrema	65
5.1	Buracos Negros Quase Extremos	65
5.2	Potencial Efetivo Escalar	71
5.3	Modos Quasi-Normais	74
6	Propagação de Campos em Geometrias Assintoticamente de Sitter	77
6.1	Método Numérico e Semi-Analítico	77
6.2	Campos em Schwarzschild-de Sitter	79
6.3	Campos em Reissner-Nordström-de Sitter	92
6.4	Campo Escalar Massivo	98
6.5	Potenciais Efetivos Negativos	99
7	Campos em Geometrias Assintoticamente Anti-de Sitter	102
7.1	Estrutura de Horizontes	102
7.1.1	Geometria RNAdS	103
7.1.2	Geometria SAdS d-Dimensional	107
7.2	Características da Função Tartaruga	110
7.3	Potenciais Efetivos	111

7.4	Modos Quasi-Normais em SAdS e RNAdS	114
8	Propagação de Campos em Geometrias Assintoticamente	
	Anti-de Sitter	117
8.1	Método Numérico	117
8.2	Campos em Schwarzschild-Anti-de Sitter	118
8.3	Campos em Reissner-Nordström-Anti-de Sitter	121
9	Conclusões	125
A	Estrutura de Horizontes	128
A.1	Horizontes em SdS d-Dimensional	128
A.2	Horizontes em RNdS d-Dimensional	134
A.3	Horizontes em RNAdS Quadridimensional	139
A.4	Horizontes em SAdS d-Dimensional	140

Lista de Figuras

Figura 3.2: Problema inicial de valores característicos	33
Figura 3.3: Retângulo nulo no plano $u - v$, usado na discretização da equação de movimento.....	34
Figura 4.1: Espaço de parâmetros da métrica Schwarzschild-de Sitter	42
Figura 4.2: Gráficos dos potenciais efetivos gravitacionais axial e polar	58
Figura 4.3: Gráficos dos potenciais efetivos escalar, eletromagnético e gravitacional.....	61
Figura 4.4: Diagrama de Carter-Penrose da região entre o horizonte de eventos e o horizonte cosmológico, nas geometrias Schwarzschild-de Sitter e Reissner-Nordström-de Sitter.....	64
Figura 5.1: Gráficos do potencial efetivo escalar no limite quase extremo.....	73
Figura 6.1: Plano $u - v$ discretizado com condições iniciais especificadas nas superfícies características, para as geometrias SdS e RNdS.....	78
Figura 6.2: Decaimento escalar (não massivo) e eletromagnético para $\ell = 1$ em SdS, se aproximando do limite quase extremo	80

- Figura 6.3:** Decaimento escalar (não massivo), eletromagnético, gravitacional axial e gravitacional polar para $\ell = 2$ em SdS, se aproximando do limite quase extremo 81
- Figura 6.4:** Dependência de $\text{Re}(\omega)^2$ com $\ell(\ell + d - 3)$, no regime quase extremo de SdS, para os campos escalar, eletromagnético, gravitacional axial e polar 82
- Figura 6.5:** Dependência das componentes real e imaginária das frequências quasi-normais com κ_+ , à medida em que nos afastamos do regime quase extremo de SdS 82
- Figura 6.6:** Diagramas $\text{Re}(\omega) - \text{Im}(\omega)$ para os campos escalar, gravitacional axial e polar, com vários valores de ℓ no buraco negro SdS 86
- Figura 6.7:** Decaimento escalar (não massivo), eletromagnético e gravitacional (axial e polar) para $d = 4$ e $\ell = 2$ em SdS 87
- Figura 6.8:** Encontro dos coeficientes $-\text{Im}(\omega)$ e k_{exp} , para os campos escalar (não massivo), eletromagnético e gravitacional (axial e polar) em SdS 88
- Figura 6.9:** Dependência de k_{exp} com κ_c para os campos escalar (não massivo), eletromagnético e gravitacional (axial e polar), para alguns valores de ℓ em SdS 89
- Figura 6.10:** Dependência de k_{exp} com κ_c para os campos escalar (não massivo), eletromagnético e gravitacional (axial e polar), para vários valores de ℓ e d em SdS 90
- Figura 6.11:** Comportamento dos campos, a medida que a geometria se aproxima do limite Schwarzschild puro em SdS 91
- Figura 6.12:** Dependência de $\text{Re}(\omega)^2$ com $\ell(\ell + 1)$, no regime quase extremo, para vários valores da carga elétrica do buraco negro em RNdS 93
- Figura 6.13:** Dependência das componentes real e imaginária das frequências quasi-normais com a carga do buraco negro em RNdS 94

Figura 6.14: Diagramas $\text{Re}(\omega) - \text{Im}(\omega)$ para vários valores da carga do buraco negro em RNdS.....	95
Figura 6.15: Campo escalar na geometria RNdS, para vários valores da carga do buraco negro	96
Figura 6.16: Se aproximando do limite Reissner-Nordström puro	97
Figura 6.17: Dependência de $\text{Re}(\omega)^2$ com λ^2 , no regime quase extremo em SdS.....	98
Figura 6.18: Comportamento do campo escalar com o aumento da massa efetiva do campo, para geometrias com separação nítida entre horizontes de eventos e cosmológico	99
Figura 6.19: Comportamento do modo $\ell = 0$ do campo escalar.....	100
Figura 6.20: Comportamento do modo $\ell = 0$ do campo escalar com o aumento da massa efetiva	101
Figura 7.1: Potenciais efetivos para o campo escalar na região externa de buracos negros assintoticamente anti-de Sitter com diversas dimensões	113
Figura 7.2: Diagrama de Carter-Penrose da região externa ao horizonte de eventos, nas geometrias Schwarzschild-anti-de Sitter e Reissner-Nordström-anti-de Sitter.....	115
Figura 8.1: Plano $u - v$ discretizado com condições iniciais especificadas nas superfícies características e em $x = 0$, para as geometrias SAdS e RNAdS.....	118
Figura 8.2: Função de onda para o caso $\ell = 0$ e vários valores de r_+ e d em SAdS.....	119
Figura 8.3: Função de onda para o caso $r_+ = 0.4$ e $d = 4, 5$ com vários valores de ℓ em SAdS	120

-
- Figura 8.4:** Função de onda para o caso $\ell = 0$ e vários valores para a carga (menores que q_{lim}) em RNAdS 121
- Figura 8.5:** Função de onda para vários valores de q e ℓ em RNAdS 123
- Figura 8.6:** Função de onda com valores altos para q em RNAdS 124

Lista de Tabelas

Tabela 6.1: Freqüências quasi-normais para o campo escalar em SdS	83
Tabela 6.2: Freqüências quasi-normais para o campo eletromagnético em SdS	84
Tabela 6.3: Freqüências quasi-normais para o campo gravitacional em SdS	85
Tabela 8.1: Freqüências quasi-normais para o campo escalar em SAdS	120
Tabela 8.2: Freqüências quasi-normais para o campo escalar em RNAdS	122

Capítulo 1

Introdução

Buracos negros estão entre os objetos mais estranhos propostos por uma teoria física. Sendo os corpos mais compactos no universo, eles contêm a forma de matéria mais extrema conhecida — uma quantidade arbitrariamente grande de massa comprimida em um volume que se aproxima de um ponto matemático. Dentre a enorme gama de aspectos teóricos explorados no estudo de buracos negros, que envolvem desde a física mais fundamental até aplicações em astrofísica, é surpreendente a grande quantidade de problemas relacionados às perturbações destes objetos. O estudo de perturbações em buracos negros tem sido um campo de pesquisa ativo nos últimos 50 anos, levando a importantes contribuições para o entendimento da física de corpos compactos em geral.

Apesar de suas peculiaridades, acredita-se hoje que buracos negros são relativamente comuns. Observações de quasares entre 1960 e 1970 sugeriam que apenas um buraco negro gigante, com massa milhões de vezes a do Sol, poderia gerar tamanha quantidade de energia sendo emitida. Mais recentemente, modelos de estrutura de galáxias e observações atuais indicam que em todas as galáxias elípticas e em galáxias planas com um bojo central (como a Via Láctea por exemplo) contêm um buraco negro super massivo em seu centro.

Até pouco tempo atrás, evidências de buracos negros eram circunstanciais. Possíveis candidatos incluem corpos extremamente massivos e densos, cuja única explicação teórica disponível é que sejam buracos negros. Incluem também fontes de radiação em tamanha magnitude que a máquina energética razoável para explicar tamanha quantidade de energia deve conter um buraco negro. Recentemente, entretanto, astrônomos podem ter achado prova direta para a existência destes corpos bizarros [1]. Estimando a taxa de acreção de matéria em

regimes específicos, alguns grupos têm observado que energia cinética e térmica do fluxo de matéria caindo no corpo compacto parece sumir, indicando a presença de um horizonte de eventos. Esta seria uma característica única de um buraco negro, que o distinguiria de outros corpos compactos.

Geometrias esfericamente simétricas têm um papel de destaque em relatividade geral, e no estudo de buracos negros em particular. Isso acontece devido ao fato de que a simetria esférica é uma aproximação razoável em uma grande quantidade de situações físicas, ao mesmo tempo que oferece uma enorme facilidade de tratamento. Uma das primeiras soluções exatas das equações de Einstein, e uma das mais importantes, é a solução de Schwarzschild. Generalizações desta solução serão o arcabouço básico deste trabalho.

Desde que o conceito moderno de buraco negro foi introduzido, após o advento da relatividade geral, o colapso de matéria em buracos negros é um assunto que tem sido amplamente explorado. O estudo de perturbações em buracos negros teve início no trabalho pioneiro de Regge e Wheeler [2] nos anos 50. Naquele trabalho, onde a preocupação principal era verificar a estabilidade do buraco negro de Schwarzschild, foram introduzidas algumas linhas de abordagem que seriam seguidas até hoje. A pesquisa envolvendo buracos negros neutros teve novo ímpeto na década de 70, com os trabalhos de Vishveshwara [3] e Zerilli [4, 5], entre outros.

Aliás, o termo “frequências quasi-normais” foi introduzido nesta época, no trabalho de Press [6] em 1971. Em geral, perturbações no espaço-tempo exterior ao horizonte de eventos de um buraco negro são seguidas por oscilações com frequências bem características. Estas oscilações são atenuadas exponencialmente, de forma que as frequências associadas (frequências quasi-normais) são complexas. Conforme será visto com detalhes, estes “modos quasi-normais” são importantes porque dependem da geometria do buraco negro, e não da perturbação inicial, e podem ser vistos como ressonâncias do campo no espaço-tempo. Chandrasekhar chama estas frequências de “tons puros” dos buracos negros [7].

O mecanismo responsável pela relaxação de perturbações externas no caso do buraco negro de Schwarzschild foi exibido por Price em 1972 [8]. Estudando o comportamento de um campo escalar sem massa, ele mostrou que na região externa do buraco negro o campo é atenuado na forma de lei de potência. Este trabalho merece destaque também pelo fato de ter mostrado que os processos de relaxação de perturbações escalares e gravitacionais são bastante similares. Campos escalares podem servir então como um modelo bastante razoável para campos mais complexos.

A solução das equações de Einstein proposta por Reissner em 1916 e por Nordström em 1918 generaliza a solução de Schwarzschild. Neste caso, o corpo com simetria esférica parece,

à distância, não só como um centro de atração gravitacional, mas também com um centro de linhas de força elétricas. Se do ponto de vista de um observador externo um buraco negro Reissner-Nordström se comporta como um objeto carregado, a introdução de carga muda completamente a sua estrutura interna. Pelo menos formalmente observa-se que a singularidade, que no caso neutro é do tipo espaço, passa a ser do tipo tempo, enquanto que na região interna do buraco negro surge outro horizonte, um horizonte de Cauchy.

A solução de Reissner-Nordström é uma solução exata das equações de Einstein, e somente por este fato já é bastante interessante. Mas além do interesse intrínseco, ela atrai atenção por ser em muitos aspectos similar à solução de Kerr. Conforme colocado por John Wheeler, “*a carga é o momento angular do mais desfavorecido*”. A solução de Kerr, bastante mais complicada que a solução de Reissner-Nordström, descreve buracos negros com rotação, e portanto não apresenta simetria esférica. Apesar de um buraco negro carregado eletricamente não ser talvez fisicamente realista, a solução de Reissner-Nordström tem sido usada em alguns trabalhos que tentam explicar a emissão de jatos de raios gama (Gamma Ray Bursts) [9] com um certo sucesso.

Um dos primeiros trabalhos envolvendo perturbações de buracos negros carregados foi desenvolvido por Ruffini, Tiomno e Vishveshwara [10]. Neste trabalho os autores calcularam a perturbação no campo eletromagnético na vizinhança de um buraco negro gerada por uma partícula carregada em movimento. A análise de perturbações na geometria Reissner-Nordström foi continuada em 1974 por Zerilli, onde foram consideradas, além de perturbações eletromagnéticas, também perturbações gravitacionais [11].

Em vários trabalhos mais recentes, entre eles [7], a abordagem independente do tempo para perturbações escalares, eletromagnéticas e gravitacionais em buracos negros assintoticamente planos foi bastante desenvolvida. A aplicação de abordagens lineares em geometrias esféricas foi encorajada por diversos estudos numéricos da dinâmica não-linear da propagação de campos [12, 13, 14]. Estes trabalhos indicaram que o padrão de decaimento é qualitativamente muito bem descrito linearmente.

Temos atualmente um panorama geral muito bem delineado para a dinâmica de campos na região externa de buracos negros esféricos assintoticamente planos. Conforme mostrado por diversos autores [15, 16], um observador estático fora do buraco negro observa três estágios da evolução do campo. Inicialmente temos a parte transiente, cuja forma exata depende fortemente da perturbação inicial. Este estágio é seguido pelo decaimento em modos quasi-normais, que carrega informação sobre a estrutura do espaço-tempo. Finalmente, para tempos grandes, o processo de relaxação é dominado por uma “cauda”, que no caso Reissner-Nordström

é do tipo lei de potência. Entre os diversos trabalhos que enfocam a fase de decaimento quasi-normal podemos destacar [17]. O comportamento para tempos grandes em uma variedade de cenários abordado por Ching et al. [15], enquanto que um tratamento matematicamente mais rigoroso é feito por Bachelot em [18].

Estamos presenciando atualmente uma revolução na cosmologia observacional. Um dos elementos desta revolução vem do estudo de supernovas. Na última década, estudos de supernovas tipo Ia próximas, com detectores modernos, têm feitos destas explosões as melhores velas padrão na astrofísica. Observações recentes [19] mostram que a luminosidade é 10% a 15% menor que a esperada, o que sugere que o universo não somente está apenas se expandindo, mas também acelerando. Embora atualmente os resultados observacionais não sejam conclusivos, avanços na tecnologia disponível aos astrônomos devem esclarecer este ponto.

Uma possível aceleração para a taxa de expansão do universo, juntamente com outras evidências observacionais, sugerem a existência de algum tipo de “energia escura”, que não é matéria bariônica nem a chamada matéria escura. O cenário esboçado por estas considerações é muito diferente da visão predominante do universo até vinte anos atrás.

Um candidato natural para matéria escura é uma constante cosmológica não nula. A constante cosmológica foi introduzida por Einstein logo depois da formulação da teoria da relatividade geral, na tentativa de obter um modelo estático para o universo. Foi abandonada pouco tempo depois, quando se percebeu que os modelos aparentemente estáticos de Einstein eram instáveis, e principalmente com as observações de Hubble indicando uma expansão universal. A idéia de uma constante cosmológica surge novamente no contexto da teoria quântica de campos, mas estimativas baseadas nestas teorias apresentam valores absurdamente grandes. As observações recentes entretanto indicam fortemente que pelo menos algum tipo de constante cosmológica efetiva deve ter algum papel na cosmologia atual.

Um outro cenário em que uma constante cosmológica efetiva poderia existir é no período inflacionário, que o universo supostamente passou por uma fase de aceleração extremamente rápida. Estes modelos são bastante eficientes em explicar vários aspectos da cosmologia atual, como o problema do horizonte e da geração de perturbações iniciais.

A introdução de uma constante cosmológica nas equações de Einstein muda drasticamente o caráter assintótico das soluções esfericamente simétricas. Dependendo do sinal da constante cosmológica, temos uma geometria que é assintoticamente de Sitter ou anti-de Sitter, se o sinal for positivo ou negativo respectivamente. No caso de geometrias que não são assintoticamente planas, muito pouco foi feito no estudo da dinâmica clássica de campos quando comparamos com o caso plano. Em 1989, Polarski estudou um campo escalar nos espaço-tempos de Sitter

e anti-de Sitter puros em dimensão arbitrária, obtendo soluções exatas para as equações de campo independentes do tempo [20]. Mellor e Moss por sua vez estudaram perturbações eletromagnéticas e gravitacionais acopladas no exterior de buracos negros Schwarzschild-de Sitter [21], também na abordagem independente do tempo, de maneira bastante parecida àquela feita por Chandrasekhar no caso análogo plano. Obtiveram equações desacopladas e calcularam numericamente as frequências quasi-normais.

Recentemente, Brady et al. estudaram a dinâmica de um campo escalar em buracos negros não assintoticamente planos Reissner-Nordström-de Sitter [22] e Schwarzschild-de Sitter [23]. Nestes trabalhos foi estudado a dinâmica de um campo escalar com a constante cosmológica muito pequena, em uma abordagem dependente do tempo. Foi determinado o comportamento do campo para tempos grandes, mas pouca atenção foi dada para a fase quasi-normal.

No caso de buracos negros com carga, existe uma linha de pesquisa adicional a ser explorada. Nestes buracos negros, assim como nos buracos negros com rotação, temos a presença de um horizonte de Cauchy, interno ao horizonte de eventos. Existe uma enorme quantidade de literatura abordando a questão da estabilidade deste horizonte (ver por exemplo [24, 25]). Este problema não será tratado diretamente nesta tese, mas um dos ingredientes básicos para o estudo do interior de qualquer solução tipo buraco negro envolve o comportamento dos campos cruzando o horizonte de eventos. Portanto, o entendimento da dinâmica dos campos na região externa ao buraco negro é necessária para o estudo da estabilidade do horizonte de Cauchy.

É interessante estender as considerações sobre a dinâmica de campos para o caso de espaço-tempos assintoticamente anti-de Sitter. Além de aspectos ligados à evolução do campo teste, incluindo o teorema “sem cabelo”, estudo de modos quasi-normais e estabilidade do horizonte de Cauchy, a descoberta da correspondência anti-de Sitter/teoria de campo conforme (AdS/CFT) torna a investigação mais atraente. As frequências quasi-normais têm interpretação direta em termos da teoria de campos conforme dual (CFT). Através da correspondência AdS/CFT [26, 27], um buraco negro corresponde aproximadamente a um estado térmico na teoria de campos, e o decaimento do campo teste corresponde à volta ao estado de equilíbrio.

O primeiro trabalho envolvendo modos quasi-normais em espaços AdS foi feito por Horowitz e Hubeny [28], em um fundo tipo buraco negro Schwarzschild anti-de Sitter com dimensão quatro, cinco e sete. Considerando que a solução Reissner-Nordström-anti-de Sitter oferece um quadro mais amplo que a geometria de Schwarzschild, a abordagem independente do tempo usada em [28] foi generalizada em [29] para o caso carregado.

O trabalho apresentado nesta tese pretende explorar alguns aspectos da dinâmica de campos escalares, eletromagnéticos e gravitacionais se propagando em geometrias esfericamente

simétricas, com ênfase na região exterior de buracos negros que não são assintoticamente planos. A estrutura da tese segue algumas das linhas de pesquisa comentadas nesta introdução. No capítulo 2 é feita uma breve síntese de relatividade geral e das soluções da equação de Einstein usadas neste trabalho.

A apresentação de resultados básicos é concluída no capítulo seguinte, onde são introduzidos os diversos campos objetos discutidos neste trabalho. São exibidas expressões gerais para potenciais efetivos em função da coordenada radial r , para os campos escalar, eletromagnético e gravitacional. São apresentados também os métodos semi-analíticos e numéricos que serão utilizados em todo o trabalho.

No capítulo 4 expomos resultados envolvendo campos em geometrias simetricamente esféricas assintoticamente de Sitter, talvez o caso mais relevante fisicamente. Embora a dinâmica do campo escalar neste fundo tenha sido abordado na literatura, não houve um estudo sistemático envolvendo por exemplo dimensões maiores que quatro. Acreditamos que uma visão mais completa é fundamental para o entendimento desta classe importante de sistemas físicos. Estudamos as características básicas dos potenciais efetivos associados aos diversos campos de interesse, importantes da caracterização da dinâmica propriamente dita.

No próximo capítulo são estudadas a dinâmica de campos na geometria Reissner-Nordström-de Sitter (RNdS) em um limite bem específico — o limite quase extremo. Neste limite o espaço-tempo é caracterizado pela quase coincidência dos horizontes de eventos e cosmológico.

No capítulo 6 continuamos a estudar a propagação de campos em geometrias assintoticamente de Sitter. Nosso objetivo é ter uma visão abrangente das possíveis formas de decaimento dos diversos campos de interesse. Não nos restringimos ao limite extremo ou ao limite da constante cosmológica pequena. Os métodos numéricos e semi-analíticos são complementares, permitindo uma visão bastante ampla do problema. Resultados analíticos do capítulo 5 são comparados com aqueles obtidos numericamente.

O capítulo 7 trata do caso em que a constante cosmológica é negativa. O estudo de modos quasi-normais nesta classe de geometrias está atraindo bastante atenção nos últimos anos devido a conjectura AdS/CFT. A ênfase neste caso é em campos escalares evoluindo em variedades esfericamente simétricas de dimensão arbitrária. São analisados neste capítulo os potenciais efetivos apropriados, e algumas de suas propriedades básicas são apontadas. O próximo capítulo explora a dinâmica apresentada no capítulo 7, através da utilização de métodos numéricos. Os resultados obtidos estão em boa concordância com os presentes na literatura.

Finalmente no capítulo 9 apresentamos as conclusões gerais do trabalho, assim como possíveis extensões e pontos que poderiam ser melhor explorados. Para a conveniência do leitor, acrescentamos apêndices com material importante, mas que pode ser visto em uma segunda leitura. Alguns dos principais resultados desta tese foram publicados em [30, 31, 32, 33].

Capítulo 2

O Espaço-Tempo

2.1 Gravidade e Espaço-Tempo

O tema central desta tese é a propagação de campos na vizinhança de buracos negros. Aborda a interação de campos clássicos com a gravidade, em regimes onde a dinâmica newtoniana não é mais válida. Se faz necessário, portanto, o estudo da gravitação no domínio da relatividade geral — a teoria física que hoje melhor descreve a gravidade. A idéia básica deste capítulo é apresentar uma visão geral da teoria da relatividade de Einstein, no contexto usado neste trabalho. Pretendemos aqui expor a teoria de forma concisa, sem seguir o seu desenvolvimento histórico.

A característica marcante da gravidade é a sua universalidade. Todos os campos conhecidos da natureza interagem gravitacionalmente. O primeiro passo no reconhecimento deste ponto foi dado por Galileu, quando ele observou que, em situações onde o atrito é desprezível, corpos com massas diferentes caem com a mesma aceleração. Além de universal, a gravidade é uma interação sempre atrativa e de longo alcance, tornando-a a interação fundamental dominante em grandes distâncias. Isso porque as interações nucleares forte e fraca são de curto alcance, enquanto que o eletromagnetismo (embora uma força de longo alcance) tem seus efeitos praticamente anulados para corpos macroscópicos devido ao balanceamento de cargas opostas. Essa universalidade sugere uma descrição da gravidade em termos da geometria — dado que todos os campos seriam sensíveis à geometria, todos seriam sensíveis à gravidade.

A estrutura básica utilizada na relatividade geral para descrever o espaço-tempo — o conjunto de todos os eventos — é uma variedade diferenciável \mathcal{M} . Assumimos o conceito de evento como primitivo, denotando uma posição bem definida no espaço e no tempo. Uma variedade corresponde à idéia intuitiva de continuidade espacial e temporal. Essa continuidade é bem estabelecida para distâncias até a ordem de $10^{-17}m$, através de experimentos com espalhamento de píons. A variedade \mathcal{M} também é suposta conexa, visto que a existência de um possível setor desconexo do espaço-tempo não geraria consequências experimentais no nosso setor conexo, que descreve o universo.

Não cabe aqui uma revisão detalhada de geometria diferencial, mas podemos ressaltar alguns pontos básicos importantes. Para uma introdução ao assunto, ver por exemplo [34, 35, 36, 37]. Sendo que o conjunto de eventos forma uma variedade diferenciável, vemos que localmente essa variedade é similar ao espaço euclidiano. Na construção desta variedade, é assumida uma topologia já fixada. Essa topologia é Hausdorff com uma base contável. A variedade é coberta por abertos (da topologia fixada) que podem ser mapeados no \mathbb{R}^n , denotados de sistemas de coordenadas. Desta forma, \mathcal{M} é descrita localmente pelo sistema de coordenadas respectivo.

Em um ponto P da variedade temos um espaço vetorial V , definido por exemplo como o conjunto das aplicações (que satisfazem uma regra tipo Leibnitz) do conjunto de funções definidas no ponto P em \mathbb{R} . Um elemento deste espaço é dito um vetor contravariante. O espaço vetorial dual a V , denotado por V^* , forma o espaço dos vetores covariantes. Em uma variedade diferenciável tensores são definidos de forma natural como aplicações multilineares de vetores e covetores em um ponto de \mathcal{M} até \mathbb{R} . O conjunto de aplicações de tipo (k, l) forma o espaço tangente de tensores

$$T : \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_k \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_l \rightarrow \mathbb{R}$$

com k índices covariantes e l índices contravariantes. Considerando o conjunto de espaços vetoriais de um dado tipo em cada ponto, obtém-se um campo vetorial. É importante ressaltar que, sem estruturas adicionais, não existe relação entre espaços tangentes em pontos distintos.

Introduzimos então nesta variedade uma métrica, definida como um tensor simétrico e não degenerado de tipo $(0, 2)$, não necessariamente positivo definido. Com esta métrica, podemos por exemplo relacionar vetores covariantes e contravariantes, pois em um dado ponto ela pode ser encarada como isomorfismo entre os espaços V e V^* . Neste estágio da apresentação da teoria, a métrica ainda é arbitrária, e esta liberdade extra é usada para descrever a gravitação.

Embora não tenhamos a intenção de abordar aqui os princípios que levaram Einstein a chegar na teoria da relatividade geral, é ilustrativo mencionarmos o princípio da equivalência. Este é um assunto extensamente tratado na literatura. A forma menos restritiva deste princípio é o chamado princípio da equivalência fraca, que afirma a igualdade das massas inercial e gravitacional em partículas teste. Esse princípio é verificado experimentalmente com uma precisão muito grande, e a história destes testes experimentais é bastante extensa. Começa com a descoberta do princípio por Galileu, usando planos inclinados e pêndulos. Passa pelos experimentos clássicos de Eötvös com balanças de torsão, no final do século XIX. Até finalmente a realização de medidas extremamente precisas que comprovam que a Terra e a Lua caem com a mesma aceleração ao redor do Sol [38, 39].

Uma forma mais restritiva do princípio da equivalência é o chamado princípio da equivalência forte. Infelizmente não existe um consenso sobre sua melhor definição, sendo este princípio apresentado em uma variedade de formas ligeiramente diferentes na literatura. Uma de suas formulações pode ser encontrado em STEWART [40], apresentada a seguir:

Na vizinhança de cada evento e no espaço-tempo existe um sistema de coordenadas preferencial chamado de inercial. Para cada classe de fenômenos físicos exceto a gravidade, um conjunto de leis locais podem ser selecionadas de forma que, quando expressas em termos do sistema de coordenadas inerciais e aplicadas no ponto e , tomam uma forma padrão com constantes independentes da posição no espaço-tempo e das forças gravitacionais de maré.

De maneira mais simples (porém menos precisa), o princípio da equivalência forte afirma que, localmente, as leis físicas (não gravitacionais) têm a mesma forma que em referenciais inerciais. Um corolário deste princípio é que a métrica deve ter assinatura Lorentziana. Essa é a restrição básica que é imposta ao tensor métrico.

O par formado pela variedade diferenciável e pela métrica de assinatura Lorentziana é chamado espaço-tempo. Essa é a arena básica que descreve a gravitação. Entretanto, embora a topologia do espaço-tempo já esteja fixada, a métrica ainda é uma quantidade indeterminada. São introduzidas mais camadas na teoria para chegarmos nas equações de campo para a métrica, que no contexto da relatividade geral são as chamadas equações de Einstein.

2.2 Equações de Einstein

Na seção anterior foram introduzidas uma variedade diferenciável e uma métrica Lorentziana como a estrutura básica para descrever o espaço-tempo. Na variedade são definidas de maneira natural funções, curvas parametrizadas, espaços tangentes, vetores e tensores. Em particular, é possível introduzirmos uma métrica (ainda não especificada), que relaciona vetores (tensores em geral) covariantes e contra-variantes, e possibilita a definição de distância. Entretanto, somente com as estruturas apresentadas não é possível compararmos tensores em pontos diferentes. Os espaços tangentes são totalmente não correlacionados.

Uma maneira equivalente de apresentarmos o problema é como a falta de uma definição covariante para a derivação. Neste sentido, a capacidade de “comparar” vetores em pontos próximos de certa forma corresponde a podermos “diferenciar” um campo vetorial. O inverso também é possível. Definindo uma “derivação”, podemos “arrastar” vetores, permitindo compará-los. Naturalmente é preciso definir precisamente o que significam os termos entre aspas.

O operador derivada covariante ∇ é definido como um mapa de um campo tensorial de posto (k, l) para o campo tensorial de posto $(k, l + 1)$ com as seguintes propriedades:

1. Linearidade:

$$\nabla_Z(X + Y) = \nabla_Z X + \nabla_Z Y$$

2. Obedece a regra de Leibniz para o produto:

$$\nabla_Z(X \otimes Y) = (\nabla_Z X) \otimes Y + X \otimes (\nabla_Z Y)$$

3. Comuta com contrações:

$$\nabla_\rho (X^{\mu_1 \dots \delta \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \delta \dots \nu_l}) = \nabla_\rho X^{\mu_1 \dots \delta \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \delta \dots \nu_l}$$

4. Se reduz a derivação parcial usual no caso de atuar sobre escalares:

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$$

Se ∇ é linear e obedece a regra de Leibniz, então esse operador pode ser escrito como uma derivada parcial mais correções lineares. Temos desta forma, para as componentes V^ν de um vetor:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda. \quad (2.1)$$

As quantidades $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ são denominadas coeficientes de conexão.

Vemos então que para definimos diferenciação covariante (sem o auxílio de um campo vetorial especificado) temos que introduzir uma estrutura nova, na forma de operadores satisfazendo as propriedades (1-4) ou na forma de uma conexão. Essa conexão também define transporte paralelo [34, 36, 40].

A partir de uma dada conexão, definimos duas grandezas de importância fundamental — curvatura e torção. A curvatura R é um tensor de tipo (1,3). Visto como um mapa que leva três campos vetoriais para um quarto, é definido como

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (2.2)$$

A curvatura está relacionada a dependência do transporte paralelo com o caminho utilizado. A torção é um tensor tipo (1,2) definido como

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \quad (2.3)$$

Ressaltamos que curvatura e torção não são quantidades associadas a um espaço-tempo (entendido como uma variedade equipada com uma métrica), mas sim a uma conexão. Para um mesmo espaço-tempo, portanto, podemos ter outras curvaturas e torções. Existem por exemplo equivalentes teleparalelos da relatividade geral, onde a curvatura é zero e a torção é não nula [41].

Uma conexão em que a derivada covariante da métrica é zero é chamada de “compatível com a métrica”. Existem infinitas conexões deste tipo. Porém, existe uma única conexão compatível com a métrica, e com torção nula. Esta é a conexão usada na relatividade geral, denominada conexão de Christoffel:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (\partial_{\beta} g_{\mu\gamma} + \partial_{\gamma} g_{\mu\beta} - \partial_{\mu} g_{\beta\gamma}). \quad (2.4)$$

Para esta conexão, as componentes da curvatura são dadas (segundo a convenção usada por exemplo em [37, 42]) por

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_{\gamma} \Gamma_{\beta\delta}^{\alpha} - \partial_{\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\beta\delta}^{\mu} - \Gamma_{\mu\delta}^{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu}. \quad (2.5)$$

Através do tensor de curvatura, define-se por meio de contrações desse tensor várias quantidades importantes, como o tensor de Ricci

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} , \quad (2.6)$$

e o escalar de curvatura

$$R = g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} . \quad (2.7)$$

A introdução de matéria é fundamental na descrição da gravidade. Na relatividade geral, isso é feito (em geral) através de campos definidos na variedade \mathcal{M} , associados a um tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$. Estes campos obedecem a equações de movimento que em geral podem ser expressas em termos de relações tensoriais em \mathcal{M} . Nestas equações, as derivadas espaciais são derivadas covariantes com relação a conexão definida pela métrica. É normalmente esperado que, para campos de matéria fisicamente razoáveis, o tensor $T_{\mu\nu}$ satisfaça alguns pré-requisitos, como por exemplo conservação local de energia e momento e causalidade local [35].

Em 1916, Einstein propôs como equação de movimento para as componentes da métrica a relação

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} . \quad (2.8)$$

A equação tensorial acima, um sistema de equações não lineares para as 10 componentes independentes da métrica, é conhecida como equação de Einstein. O termo Λ , de importância fundamental neste trabalho, é chamado constante cosmológica. A constante $8\pi G/c^4$ é escolhida de forma que no limite não relativístico sejam obtidos os resultados previstos pelas leis de Newton. É bastante comum na literatura o uso das chamadas “unidades geométricas”, em que $G = c = 1$. Neste sistema de unidades, usado deste ponto em diante, o fator $8\pi G/c^4$ torna-se então 8π .

Não podemos deixar de mencionar que, até a presente data, todas as medidas realizadas estão de acordo com as previsões experimentais da relatividade geral. Aliás, esta teoria fornece um dos mais impressionantes acordos entre uma medida física e a previsão teórica — a curva espiral do pulsar PSR 1913+16, localizado em um sistema binário. A determinação precisa de seus parâmetros orbitais possibilitou o cálculo da quantidade de energia emitida na forma de ondas gravitacionais. Os resultados obtidos são compatíveis com a teoria em uma precisão fantástica. Por este trabalho, Taylor e Hulse receberam o prêmio Nobel de física em 1993.

2.3 Soluções Esfericamente Simétricas

O trabalho aqui desenvolvido envolve principalmente geometrias esfericamente simétricas. Como estamos interessados em espaços-tempos com dimensão não necessariamente igual a quatro, cabem alguns comentários sobre simetria esférica em dimensão arbitrária. De uma maneira não rigorosa, simetria esférica significa invariância por rotações. De maneira mais precisa, o grupo de isometria do espaço-tempo d -dimensional deve conter um subgrupo isomórfico ao grupo $SO(d-1)$. No caso quadridimensional, o subgrupo de isometria deve ser o $SO(3)$ usual. O espaço-tempo esfericamente simétrico com d dimensões pode então ser foliado em esferas S^{d-2} .

Esta estrutura sugere que seja usado um sistema de coordenadas adaptado à foliação. Como temos uma variedade de d dimensões foliado por uma subvariedade de $d-2$ dimensões, usamos $d-2$ coordenadas $(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^{d-2})$ para especificar a posição de um evento na subvariedade S^{d-2} , e 2 coordenadas (t, r) para especificar em que subvariedade o evento se encontra. É possível mostrar que a métrica pode ser escrita como

$$ds^2 = -h(t, r)dt^2 + f(t, r)dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2}^2 \quad (2.9)$$

onde

$$d\Omega_{d-2}^2 = (d\theta^1)^2 + \sin^2 \theta^1 (d\theta^2)^2 + \dots + \sin^2 \theta^1 \dots \sin^2 \theta^{d-2} (d\theta^{d-2})^2 \quad (2.10)$$

que é a forma mais geral para uma métrica em uma geometria esfericamente simétrica [36, 42, 43].

O Ansatz (2.9) é extremamente geral, e independe inclusive das equações de campo para a métrica. Vamos nos restringir agora a soluções da equação de Einstein com constante cosmológica para buracos negros carregados. Assumiremos também que a dimensão d do espaço-tempo é arbitrária.

De maneira geral, o campo eletromagnético é introduzido no espaço-tempo (sem fontes de campo elétrico) através de um tensor de campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ satisfazendo as equações de movimento:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu = 0, \quad (2.11)$$

$$\nabla_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0. \quad (2.12)$$

A região de interesse não é o vácuo, pois existe a presença de um campo eletromagnético.

Neste caso, o tensor de energia-momento é não nulo, e é dado [36, 37, 42] por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(g^{\gamma\epsilon} F_{\mu\gamma} F_{\nu\epsilon} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\gamma\epsilon} F^{\gamma\epsilon} \right). \quad (2.13)$$

A métrica para o espaço-tempo simetricamente esférico em d dimensões acoplado a um campo eletrostático foi talvez primeiro apresentada por Thangherlini em [43]. Devido à simetria esférica, e assumindo que não existam fontes de campo elétrico, a forma do tensor $F^{\mu\nu}$ é

$$F_{\mu\nu} = E(r) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Substituindo o Ansatz acima nas equações de Maxwell, obtemos que

$$E(r) = \frac{q}{r^{d-2}}, \quad (2.15)$$

onde q é uma constante de integração. No caso quadridimensional, q pode ser interpretada como uma carga elétrica. Substituindo os resultados acima nas equações de Einstein, obtemos por sua vez que

$$h(t, r) \equiv h(r) = 1 - \frac{2m}{r^{d-3}} + \frac{q^2}{r^{2d-6}} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad (2.16)$$

$$f(t, r) = h(t, r)^{-1}, \quad (2.17)$$

para $d > 3$. A constante de integração m pode ser interpretada como uma massa no caso quadridimensional.

Para um valor fixo de d , temos três parâmetros livres na métrica. Apesar disso, o espaço de parâmetros da teoria é efetivamente bidimensional. Isso porque é sempre possível reescalonar as coordenadas r e t de forma a absorver, por exemplo, a constante m . Fisicamente, esta transformação de coordenadas nada mais é do que uma mudança no sistema de unidades usado.

A característica marcante na métrica apresentada é a existência de divergências em $r = 0$ e eventualmente em um conjunto de valores reais positivos da variável radial, dependendo da dimensão do espaço-tempo e da escolha dos parâmetros m , q e Λ . Esses pontos singulares serão discutidos na próxima seção.

2.4 Buracos Negros Esféricos

Em uma situação usual, a métrica (2.9) juntamente com a expressão (2.16) para a função $h(r)$, é o resultado da ação gravitacional de uma distribuição de massa esfericamente simétrica, válida somente em um intervalo da coordenada radial r em que os seus elementos não apresentam anomalias. Entretanto, um corpo esférico suficientemente massivo e frio não se mantém em equilíbrio termodinâmico. Nestes casos, as pressões internas não são suficientes para suplantarem a atração gravitacional, e o corpo sofre colapso total. A teoria clássica afirma que toda a massa do corpo fica concentrada em um ponto, e o espaço-tempo resultante é descrito pela métrica (2.9). Faz-se necessário então discutir o significado das divergências na expressão (2.9).

É bem conhecido o fato de que a singularidade em $r = 0$ é uma singularidade real, e não pode ser removida por uma transformação de coordenadas. Como o objetivo principal do trabalho desta tese envolve a propagação de campos na região exterior de um buraco negro, não vamos nos aprofundar neste ponto. As demais singularidades aparentes no tensor métrico correspondem aos zeros reais positivos na função $h(r)$. Estas singularidades entretanto podem ser removidas através de uma mudança adequada no sistema de coordenadas, e portanto não são singularidades “físicas”. Porém, os zeros em $h(r)$ determinam a estrutura causal do espaço-tempo, no sentido discutido a seguir.

A função $h(r)$ pode ser escrita como

$$h(r) = -\frac{\Lambda}{3r^{2d-6}}P(r) , \quad (2.18)$$

onde

$$P(r) = r^{2d-4} - \frac{3}{\Lambda}r^{2d-6} + \frac{6m}{\Lambda}r^{d-3} - \frac{3q^2}{\Lambda} , \quad (2.19)$$

de forma que os seus zeros reais positivos são os zeros do polinômio $P(r)$, formando um conjunto discreto e finito (ou mesmo vazio), denotado por $\{r_i\}$. Se o número de zeros de $h(r)$ for n , podemos pensar nestes valores de r como fronteiras, ou horizontes, dividindo a variedade em $n + 1$ regiões distintas. Cada região $r_i < r < r_{i+1}$ é denominada um bloco (T_i), ou mais precisamente

$$T_i = \{(t, r, \theta_1, \dots, \theta_{d-2}), r_i < r < r_{i+1}\} . \quad (2.20)$$

Temos também os blocos delimitados por $r = 0$ e $r \rightarrow \infty$, denotados por

$$T_0 = \{(t, r, \theta_1, \dots, \theta_{d-2}), 0 < r < r_1\} \quad (2.21)$$

e

$$T_{n+1} = \{(t, r, \theta_1, \dots, \theta_{d-2}), r_n < r < \infty\} . \quad (2.22)$$

Rigorosamente falando, a métrica (2.9) só é válida em um destes blocos. Podemos entretanto falar da extensão maximal desta subvariedade, que é obtida “colando” blocos de acordo com um método bem estabelecido [44]. Atenção especial deve ser dada para o comportamento assintótico da variedade, que depende do sinal da constante cosmológica. Se Λ for zero, a variedade é assintoticamente plana, se Λ for positivo a variedade é assintoticamente de Sitter, enquanto que se Λ for negativo a variedade é assintoticamente anti-de Sitter. Estes pontos serão novamente abordados nos capítulos seguintes.

É possível mostrar (ver próxima seção) que os horizontes $r = r_i$ são superfícies nulas. A presença destes horizontes significa que existem regiões nas quais curvas tipo tempo ou tipo luz, dirigidas para o futuro, cruzam estas superfícies em apenas um sentido. Os horizontes agem como uma membrana, permitindo a passagem em apenas uma direção, delimitando uma região na qual nada escapa. Se a expressão (2.16) possui pelo menos um zero real positivo, temos um buraco negro esférico.

Caso a função $h(r)$ seja positiva em um determinado bloco, então a métrica nesta região é estática. Um horizonte $r = r_+$ é chamado horizonte de eventos se a métrica apresenta uma singularidade real e se r_+ é o último valor em que o bloco T_+ é estático. O objetivo desta tese é estudar a dinâmica de campos que se propagam no bloco T_+ , que corresponde à região “externa” do buraco negro.

Em um dado bloco T_i , é bastante conveniente introduzirmos uma outra coordenada radial — a coordenada tartaruga — definida como

$$x_i(r) = \int \frac{dr}{h(r)} \quad \text{com } r_i < r < r_{i+1} . \quad (2.23)$$

A forma explícita da função $x_i(r)$, bem como seu domínio e imagem, dependem de maneira crucial do conjunto de zeros de $h(r)$ e do bloco em que ela está definida.

A partir da coordenada radial tartaruga, definimos as coordenadas nulas retardada e avançada — respectivamente u_i e v_i — como

$$u_i = t - x_i , \quad (2.24)$$

$$v_i = t + x_i . \quad (2.25)$$

Escrevendo a métrica em termos das coordenadas v_i e r , temos

$$ds^2 = h(r)dv_i^2 + 2dv_i dr + r^2 d\Omega_{d-2}^2 , \quad (2.26)$$

que é não singular em $r = r_i$ ou $r = r_{i+1}$, mostrando que de fato as singularidades nos zeros de $h(r)$ são apenas aparentes.

Em termos das coordenadas u_i e v_i , a métrica fica

$$ds^2 = -h(r(v_i, u_i)du_i dv_i + r(v_i, u_i)^2 d\Omega_{d-2}^2 , \quad (2.27)$$

justificando o termo “coordenadas nulas” para u_i e v_i . Este sistema de coordenadas será utilizado nos próximos capítulos.

Capítulo 3

Campos Linearizados

3.1 Introduzindo a Aproximação Linear

Nesta tese serão discutidos alguns aspectos da dinâmica da propagação de campos escalares, eletromagnéticos e gravitacionais, no exterior de buracos negros esféricos. Em todo o trabalho aqui desenvolvido, uma aproximação é sempre usada — os campos são tratados como perturbações evoluindo em um fundo fixo, e a reação de radiação está sendo desprezada.

Classicamente, os campos de matéria podem ser introduzidos no espaço-tempo através de equações de movimento apropriadas. Associado a cada um destes campos, temos um tensor energia-momento, que está presente nas equações de movimento para as componentes da métrica. Ignorar a reação de radiação de um dado campo significa desprezar o seu tensor energia-momento. A métrica então é mantida fixa, e somente as variáveis de campo possuem uma dinâmica, descrita por equações de movimento lineares.

O fenômeno da reação de radiação na relatividade geral tem um análogo mais familiar em eletrodinâmica clássica. Uma partícula carregada se movendo em um campo eletromagnético externo emite radiação quando é acelerada, o que resulta em perda de energia, momento linear e momento angular. Isso por sua vez altera o movimento da partícula, daí o termo “reação de radiação”. O caso gravitacional é qualitativamente similar. Qualquer campo (ou partícula) no espaço-tempo tem associado um conteúdo de energia que modifica a estrutura do espaço-tempo, o que por sua vez altera a dinâmica da propagação deste campo.

Certamente a reação de radiação gravitacional desempenha um papel dominante em muitos processos astrofísicos [45]. O exemplo notável é o caso de dois corpos muito massivos orbitando um ao outro. A emissão de ondas gravitacionais pelos objetos leva as suas órbitas a espiralarem, efeito observado por Taylor e Hulse em 1975 para o caso de um sistema binário [46].

Entretanto, vários trabalhos, entre eles [14, 24, 47], afirmam que para uma grande gama de situações, a aproximação linear descreve com bastante fidelidade as principais características do problema. Essa aproximação é muito razoável em diversas situações físicas, em que se espera que as perturbações da métrica gerada pelo campo introduzido sejam desprezíveis.

3.2 Campo Escalar

Existem alguns bons motivos que justificam o estudo de campos escalares. Eles podem ser encarados como campos efetivos que descrevem partículas neutras, como o méson π_0 . Por outro lado, modelos envolvendo campos escalares são abundantes na cosmologia contemporânea, sendo razoável esperar que talvez tenham algum papel em outras áreas relacionadas. E finalmente temos a enorme facilidade de tratamento destes campos. Mas talvez a principal motivação venha de vários trabalhos, utilizando tanto abordagens lineares como não-lineares, que mostram que muitas das características de campos mais complexos estão presentes no caso escalar, bem mais simples.

Em geometrias esfericamente simétricas, campos escalares podem ser tratados com bastante generalidade. Introduzimos um campo escalar real massivo Φ no espaço-tempo através da equação de movimento

$$(\square - \mu^2 - \xi R)\Phi = 0 , \quad (3.1)$$

onde \square é o operador d'Alembertiano:

$$\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu . \quad (3.2)$$

Associado a este campo temos um tensor energia-momento, que está presente nas equações de Einstein. A evolução destas equações, no problema completo não-linear, modificaria a métrica esfericamente simétrica introduzida no capítulo 2. Entretanto, estamos assumindo a aproximação linear, o que simplifica o problema enormemente. Neste caso, a métrica é fixa, e o escalar de Ricci pode ser calculado de maneira independente dos campos na variedade.

Tomando as equações de Einstein com a métrica (2.9) e o tensor de energia-momento (2.13), fazemos a contração

$$g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) = 8\pi g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} . \quad (3.3)$$

Notando que $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta_{\mu}^{\mu} = d$, o lado esquerdo da equação anterior nos fornece:

$$g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) = R \left(1 - \frac{d}{2} \right) + \Lambda d . \quad (3.4)$$

Por outro lado, o termo $8\pi g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ pode ser imediatamente calculado, através da forma específica do tensor energia-momento (2.13) para o caso eletromagnético sem fontes, apresentado no capítulo 2:

$$8\pi g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 2 \left(1 - \frac{d}{4} \right) F_{\gamma\epsilon} F^{\gamma\epsilon} . \quad (3.5)$$

É importante salientar que se $d = 4$, independentemente da forma da métrica ou do Ansatz para o tensor $F^{\mu\nu}$, a soma $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ é nula. Tal fato, porém, não ocorre em geral para um d arbitrário.

Usando o Ansatz (2.14) para o tensor $F_{\mu\nu}$, temos que

$$F_{\gamma\epsilon} F^{\gamma\epsilon} = F_{01} F^{01} + F_{10} F^{10} = -2E(r)^2 , \quad (3.6)$$

onde

$$E(r) = \frac{q}{r^{d-2}} . \quad (3.7)$$

Combinando o resultado anterior com a expressão obtida para $8\pi g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$, vemos que este termo pode ser escrito como

$$8\pi g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = (d - 4) E(r)^2 .$$

E substituindo este resultado nas equações de Einstein, juntamente com o resultado (3.4), obtemos o escalar de curvatura R :

$$R = \frac{2\Lambda d}{d-2} - \frac{2(d-4)}{d-2} E(r)^2 . \quad (3.8)$$

Com a expressão para R , a equação de onda para o campo escalar Φ fica

$$\left(\square - \mu^2 - \frac{2\Lambda\xi d}{d-2} + \frac{2(d-4)\xi}{d-2} E(r)^2 \right) \Phi = 0 . \quad (3.9)$$

Vemos então que no caso linear podemos agrupar a massa μ associada ao campo e a constante de acoplamento ξ em um acoplamento efetivo, denominado λ :

$$\lambda^2 = \mu^2 + \frac{2\Lambda\xi d}{d-2}, \quad (3.10)$$

e a equação de movimento para o campo escalar é escrita como

$$\left(\square - \lambda^2 + \frac{2(d-4)\xi}{d-2} E(r)^2 \right) \Phi = 0. \quad (3.11)$$

A equação anterior pode ser escrita em termos das coordenadas esféricas $(t, r, \{\theta^i\})$, escrevendo o operador d'Alembertiano como

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu), \quad (3.12)$$

onde $g = \det(g_{\mu\nu})$. Como a matriz $(g_{\mu\nu})$ é diagonal, o seu determinante é simplesmente o produto dos seus elementos na diagonal, e portanto

$$\sqrt{-g} = r^{d-2} \sin^{d-3} \theta^1 \sin^{d-5} \theta^2 \dots \sin \theta^{d-3}. \quad (3.13)$$

Os elementos de $(g^{\mu\nu})$ podem ser calculados imediatamente, e dado que $g^{ij} = 0$ para $i \neq j$, o operador \square é expresso como

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\partial_0 (\sqrt{-g} g^{00} \partial_0) + \dots + \partial_{d-1} (\sqrt{-g} g^{d-1 d-1} \partial_{d-1}) \right]. \quad (3.14)$$

Vamos dividir \square em duas partes, da seguinte forma

$$\square = \square_2 + \frac{1}{r^2} \nabla_{d-2}, \quad (3.15)$$

onde definimos os operadores \square_2 e ∇_{d-2} como

$$\square_2 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\partial_0 (\sqrt{-g} g^{00} \partial_0) + \partial_1 (\sqrt{-g} g^{11} \partial_1) \right] \quad (3.16)$$

$$\nabla_{d-2} = \frac{r^2}{\sqrt{-g}} \left[\partial_2 (\sqrt{-g} g^{22} \partial_2) + \dots + \partial_{d-1} (\sqrt{-g} g^{d-1 d-1} \partial_{d-1}) \right]. \quad (3.17)$$

Substituindo os elementos da métrica em \square_2 , obtemos, após os devidos cancelamentos, que

$$\square_2 = -h(r)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{r^{d-2}} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{d-2} h(r) \frac{\partial}{\partial r} \right]. \quad (3.18)$$

Trabalharemos agora com o operador ∇_{d-2} . Para o termo $i = 2$ na somatória, temos $g^{22} = r^{-2}$, de forma que

$$\frac{r^2}{\sqrt{-g}} [\partial_2 (\sqrt{-g} g^{22} \partial_2)] = \frac{1}{\sin^{d-3} \theta^1} \left[\frac{\partial}{\partial \theta^1} \left(\sin^{d-3} \theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \right]. \quad (3.19)$$

Para um termo $2 < i < d - 2$ da somatória, o elemento diagonal g^{ii} é dado por

$$g^{ii} = r^{-2} \sin^{-2} \theta^1 \sin^{-2} \theta^2 \dots \sin^{-2} \theta^{i-1}, \quad (3.20)$$

portanto

$$\frac{r^2}{\sqrt{-g}} [\partial_i (\sqrt{-g} g^{ii} \partial_i)] = \frac{r^2}{\sin^{d-i-2} \theta^i \sin^2 \theta^1 \sin^2 \theta^2 \dots \sin^2 \theta^{i-1}} \left[\frac{\partial}{\partial \theta^i} \left(\sin^{d-i-2} \theta^i \right) \frac{\partial}{\partial \theta^i} \right], \quad (3.21)$$

onde na expressão acima não usamos a convenção de Einstein para somatórias. E para o último termo da somatória, onde $i = d - 2$, ficamos com

$$g^{d-2, d-2} = r^{-2} \sin^{-2} \theta^1 \sin^{-2} \theta^2 \dots \sin^{-2} \theta^{d-3}, \quad (3.22)$$

então

$$\frac{r^2}{\sqrt{-g}} [\partial_{d-2} (\sqrt{-g} g^{d-2, d-2} \partial_{d-2})] = \frac{1}{\sin^2 \theta^1 \sin^2 \theta^2 \dots \sin^2 \theta^{d-3}} \left[\frac{\partial^2}{\partial (\theta^{d-2})^2} \right]. \quad (3.23)$$

A partir das expressões (3.19), (3.21) e (3.23), vemos que o operador ∇_{d-2} é o operador Laplaciano em $d - 2$ dimensões [48], escrito em coordenadas esféricas.

Como o operador \square_2 só atua nas variáveis t e r , enquanto que o operador ∇_{d-2} só atua nas variáveis angulares, expandimos o campo Φ em multipolos, ou seja,

$$\Phi = \sum_{\ell, m} r^{-\frac{d-2}{2}} \psi_{\ell}^{\ell s}(t, r) Y_{\ell m}(\{\theta_i\}), \quad (3.24)$$

onde $Y_{\ell m}$ são os harmônicos hiper-esféricos, auto-funções do operador Laplaciano $(d-2)$ -dimensional:

$$\nabla_{d-2} Y_{\ell m} = -\ell(\ell + d - 3) Y_{\ell m} . \quad (3.25)$$

Segundo a notação utilizada neste trabalho, m é um índice coletivo, denotando

$$m = (m_1, m_2, \dots, m_{d-3}) . \quad (3.26)$$

Substituindo o Ansatz (3.24) na equação de movimento, ficamos com

$$\begin{aligned} \sum_{\ell, m} \left\{ \square_2 \left(r^{-\frac{d-2}{2}} \psi_{\ell}^{es} \right) Y_{\ell m} + r^{-\frac{d-2}{2}} \psi_{\ell}^{es} \frac{1}{r^2} \nabla_{d-2} Y_{\ell m} \right. \\ \left. + \left[-\lambda^2 + \frac{2(d-4)\xi}{d-2} E(r)^2 \right] r^{-\frac{d-2}{2}} \psi_{\ell}^{es} Y_{\ell m} \right\} = 0 . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Simplificando a expressão anterior, obtemos

$$\sum_{\ell, m} Y_{\ell m} \left\{ \square_2 \left(r^{-\frac{d-2}{2}} \psi_{\ell}^{es} \right) + r^{-\frac{d-2}{2}} \left[-\frac{\ell(\ell + d - 3)}{r^2} - \lambda^2 + \frac{2(d-4)\xi}{d-2} E(r)^2 \right] \psi_{\ell}^{es} \right\} = 0 . \quad (3.28)$$

Como as funções $Y_{\ell m}$ formam um conjunto completo, cada termo da somatória anterior deve se anular. Ficamos então com equações independentes para cada modo ℓ :

$$\square_2 \left(r^{-\frac{d-2}{2}} \psi_{\ell}^{es} \right) + r^{-\frac{d-2}{2}} \left[-\frac{\ell(\ell + d - 3)}{r^2} - \lambda^2 + \frac{2(d-4)\xi}{d-2} E(r)^2 \right] \psi_{\ell}^{es} = 0 . \quad (3.29)$$

Vejamos o comportamento do primeiro termo da expressão acima,

$$\square_2 \left(r^{-\frac{d-2}{2}} \psi_{\ell}^{es} \right) = -\frac{r^{-\frac{d-2}{2}}}{h(r)} \frac{\partial^2 \psi_{\ell}^{es}}{\partial t^2} + \frac{1}{r^{d-2}} \frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{d-2}{2} r^{\frac{d-4}{2}} h(r) \psi_{\ell}^{es} + r^{-\frac{d-2}{2}} h(r) \frac{\partial \psi_{\ell}^{es}}{\partial r} \right] . \quad (3.30)$$

Fazendo a derivada em r e reagrupando termos, obtemos

$$\begin{aligned} \square_2 \left(r^{-\frac{d-2}{2}} \psi_{\ell}^{es} \right) = \\ = r^{-\frac{d-2}{2}} \left\{ -\frac{1}{h(r)} \frac{\partial^2 \psi_{\ell}^{es}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(h(r) \frac{\partial \psi_{\ell}^{es}}{\partial r} \right) - \left[\frac{(d-2)(d-4)}{4r^2} h(r) + \frac{d-2}{2r} h'(r) \right] \psi_{\ell}^{es} \right\} . \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde denotamos a derivada da função $h(r)$ por $h'(r)$. Substituindo os resultados acima na equação de movimento, ficamos com

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 \psi_\ell^{es}}{\partial t^2} + h(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(h(r) \frac{\partial \psi_\ell^{es}}{\partial r} \right) = \\ & = h(r) \left[\frac{\ell(\ell+d-3)}{r^2} + \frac{d-2}{2r} h'(r) + \frac{(d-2)(d-4)}{4r^2} h(r) + \lambda^2 - \frac{2(d-4)\xi}{d-2} E(r)^2 \right] \psi_\ell^{es}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Definimos a função $V_{es}(r)$ como

$$V_{es}(r) = h(r) \left[\frac{\ell(\ell+d-3)}{r^2} + \frac{d-2}{2r} h'(r) + \frac{(d-2)(d-4)}{4r^2} h(r) + \lambda^2 - \frac{2(d-4)\xi}{d-2} E(r)^2 \right]. \quad (3.33)$$

de forma que a equação de movimento é escrita como

$$-\frac{\partial^2 \psi_\ell^{es}}{\partial t^2} + h(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(h(r) \frac{\partial \psi_\ell^{es}}{\partial r} \right) = V_{es}(r) \psi_\ell^{es} \quad (3.34)$$

A função $V_{es}(r)$ é usualmente denominada de potencial efetivo.

Temos então para cada modo ℓ uma equação parcial linear hiperbólica para a função $\psi_\ell(t, r)$, que descreve a dinâmica da componente ℓ do campo escalar Φ . A equação de onda apresentada aqui com o potencial (3.34) generaliza os vários casos particulares encontrados na literatura. As características do potencial efetivo $V_{es}(r)$ — possíveis zeros, extremos, comportamento assintótico, etc — dependem fortemente dos parâmetros da geometria (m , q e Λ) e do campo (μ , ξ e ℓ). Nos capítulos 4 e 7, este potencial será analisado em maiores detalhes.

3.3 Campos Eletromagnético e Gravitacional

Para os campos eletromagnético e gravitacional, o acoplamento com o espaço-tempo é mais complexo. Nós nos limitaremos aqui apenas à propagação destes campos em variedades quadridimensionais. Os resultados usados nesta tese estão bem discutidos em diversos artigos [10, 21], portanto nesta seção nos restringiremos a comentá-los.

O campo eletromagnético é acoplado ao espaço-tempo através das equações de movimento

$$g^{\rho\mu}\nabla_{\rho}F_{\mu\nu} = 0 \quad (3.35)$$

$$\nabla_{[\rho}F_{\mu\nu]} = 0 \quad (3.36)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético que descreve a perturbação na geometria. Como estamos ignorando a reação de radiação, a métrica permanece a mesma.

Associado ao tensor $F_{\mu\nu}$, temos o campo vetorial A_{μ} , definido como

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} . \quad (3.37)$$

A equação de movimento responsável pela dinâmica do campo eletromagnético é a equação (3.35). Ela pode ser expressa como

$$\partial_{\nu} [\sqrt{-g}F^{\mu\nu}] = 0 . \quad (3.38)$$

De forma análoga ao caso escalar, é usada como Ansatz uma expansão em harmônicos esféricos vetoriais quadridimensionais para o potencial vetor. A decomposição do potencial vetor em termos de paridade oposta implica que os elementos de mesma paridade satisfazem independentemente à equação de movimento. Temos assim duas equações tensoriais, uma para os termos relacionados à componente axial e outra relacionada à componente polar. Entretanto, o cálculo explícito [10] mostra que as duas componentes são descritas por uma única equação da forma

$$-\frac{\partial^2\psi^{el}}{\partial t^2} + h(r)\frac{\partial}{\partial r} \left(h(r)\frac{\partial\psi^{el}}{\partial r} \right) = V_{el}(r)\psi^{el} , \quad (3.39)$$

onde o potencial efetivo $V_{el}(r)$ é dado por

$$V_{el}(r) = h(r)\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} . \quad (3.40)$$

Naturalmente, o campo escalar ψ^{el} tem interpretação distinta do campo ψ^{es} . O potencial efetivo V_{el} com a expressão $h(r)$ dada por (3.4) generaliza os diversos resultados encontrados na literatura.

Vamos tratar agora de perturbações gravitacionais em buracos negros sem carga. Dada uma métrica de fundo $g_{\mu\nu}^{(0)}$, é possível analisarmos como se propagam pequenas perturbações nesta métrica. O termo “pequena” indica que estamos interessados em perturbações de primeira ordem. Na região de interesse — fora do horizonte de eventos — escrevemos

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu} , \quad (3.41)$$

onde $h_{\mu\nu}$ é a perturbação, que pode ser encarada como um campo de spin 2 propagando-se em uma geometria fixa. A geometria de fundo é descrita pela métrica $g_{\mu\nu}^{(0)}$, que neste caso é uma métrica esférica apresentada no capítulo 2.

A estratégia de abordagem do problema é a mesma dos casos escalar e eletromagnético. Substituindo o Ansatz (3.41) nas equações de Einstein e trabalhando até a primeira ordem de perturbação, são obtidas equações diferenciais acopladas. Estas equações são simplificadas através de uma decomposição em harmônicos esféricos gravitacionais, fornecendo duas classes distintas de soluções: as soluções axiais e as soluções polares.

Foi demonstrado que mesmo no caso em que a constante cosmológica é não nula as equações de movimento podem ser reduzidas a duas equações escalares desacopladas. Para as componentes axial e polar, temos respectivamente

$$-\frac{\partial^2 \psi^{ax}}{\partial t^2} + h(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(h(r) \frac{\partial \psi^{ax}}{\partial r} \right) = V_{ax}(r) \psi^{ax} , \quad (3.42)$$

$$-\frac{\partial^2 \psi^{po}}{\partial t^2} + h(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(h(r) \frac{\partial \psi^{po}}{\partial r} \right) = V_{po}(r) \psi^{po} , \quad (3.43)$$

onde os potenciais efetivos são dados por

$$V_{ax}(r) = h(r) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6m}{r^3} \right] , \quad (3.44)$$

$$V_{po}(r) = h(r) \frac{2}{r^3} \frac{9m^3 + 3c^2 m r^2 + c^2(1+c)r^3 + 3m^2(3cr - \Lambda r^3)}{(3m + cr)^2} , \quad (3.45)$$

com o inteiro c definido por $c = \frac{1}{2} [\ell(\ell+1) - 2]$.

3.4 Características Gerais do Decaimento

Vimos que nos diversos casos abordados, a dinâmica dos campos pode ser descrita por equações escalares desacopladas na forma

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + h(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(h(r) \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = V(r) \psi . \quad (3.46)$$

Calculado o campo escalar ψ , as componentes do campo eletromagnético ou gravitacional são imediatamente determinadas.

É importante lembrar que está implícito que estamos trabalhando no bloco T_+ , exterior ao horizonte de eventos, conforme discutido no capítulo anterior. Neste bloco, introduzimos a coordenada tartaruga $x(r)$, onde por simplicidade descartamos o índice i , já que a região do espaço-tempo já está definida:

$$x(r) = \int \frac{dr}{h(r)} . \quad (3.47)$$

Da definição, temos que

$$\frac{\partial}{\partial x} = h(r) \frac{\partial}{\partial r} , \quad (3.48)$$

e a equação de movimento fica

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = V(r) \psi . \quad (3.49)$$

Em geral, não são conhecidas soluções analíticas para a equação acima. Entretanto, uma análise qualitativa do problema é possível.

Uma maneira de se tratar a equação diferencial (3.49) é como um problema de Cauchy. São especificados valores iniciais para $\psi(t = 0, x)$ e $\frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0}$ em um intervalo I , onde sem perda de generalidade, especificamos o tempo inicial como $t = 0$. Este intervalo depende dos detalhes da geometria, que se refletem no comportamento do potencial efetivo. Eventualmente devemos especificar a função ψ para os extremos do intervalo I , caso estes extremos sejam finitos. Nos casos assintoticamente plano e de Sitter, o problema de Cauchy é formalmente o mesmo, porque o potencial efetivo vai a zero para $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$. O caso $\Lambda < 0$ é diferente, pois como veremos, a variável x só está definida na semi-reta $]-\infty, 0[$.

Usamos agora a transformada de Laplace $\hat{\psi}(s, x)$, definida por

$$\hat{\psi}(s, x) = \mathcal{L}[\psi(t, x), s] = \int_0^{\infty} \psi(t, x) e^{-st} dt. \quad (3.50)$$

Aplicando o operador \mathcal{L} na equação diferencial (3.49), obtemos

$$s^2 \hat{\psi} - \hat{\psi}'' + V(r) \hat{\psi} = s \hat{\psi}(0, x) + \frac{\partial \hat{\psi}(0, x)}{\partial t}, \quad (3.51)$$

onde

$$\hat{\psi}' = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x}. \quad (3.52)$$

Por simplicidade, denotamos o termo inhomogêneo da equação diferencial por $j(s, x)$

$$j(s, x) = s \hat{\psi}(0, x) + \frac{\partial \hat{\psi}(0, x)}{\partial t}, \quad (3.53)$$

que é especificado pelas condições iniciais. O problema de Cauchy é desta forma expresso como um problema de Sturm.

A solução formal da equação diferencial ordinária (3.51) é dada a partir de uma função de Green associada ao sistema:

$$\hat{\psi} = \int \hat{G}(x, x'; s) j(s, x') dx'. \quad (3.54)$$

Todas as funções de Green podem ser construídas a partir de duas soluções linearmente independentes da equação diferencial homogênea associada a (3.51)

$$s^2 \hat{\psi} - \hat{\psi}'' + V(x) \hat{\psi} = 0 \quad (3.55)$$

através de

$$\hat{G}(x, x'; s) = \frac{1}{W(s)} \begin{cases} f_-(s, x') f_+(s, x) & (x' < x) \\ f_-(s, x) f_+(s, x') & (x' > x) \end{cases} \quad (3.56)$$

onde $W(s)$ é a função Wronskiana, neste caso definida por

$$W(s) = f_-(s, x) \frac{\partial f_+(s, x)}{\partial x} - f_+(s, x) \frac{\partial f_-(s, x)}{\partial x}. \quad (3.57)$$

Na seleção das funções $f_-(s, x)$ e $f_+(s, x)$ são usadas informações sobre o comportamento assintótico do potencial, que refletem as características do espaço-tempo.

Com o problema original expresso em termos de uma equação diferencial ordinária, cuja solução depende de uma função de Green já especificada, passemos agora à análise qualitativa do comportamento do campo. A função de onda dependente do tempo pode ser obtida através da transformada inversa de Laplace da função $\hat{\psi}$, denotada por

$$\psi(t, x) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{\psi}(s, x), t] . \quad (3.58)$$

Esta transformada inversa pode ser calculada através da fórmula complexa de inversão de Bromwich. Formalmente, a função $\psi(t, x)$ pode ser escrita como

$$\psi(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int \hat{\psi}(s, x) e^{st} ds . \quad (3.59)$$

Na integral em (3.59), tomamos a continuação analítica de s , e a integração é efetuada ao longo de uma reta $s = \gamma$ no plano complexo. O número real γ é escolhido de modo que a reta $s = \gamma$ esteja à direita de todas as singularidades de $\hat{\psi}(s, x)$ — especificamente pólos e eventuais pontos de ramificação. Esta reta é completada com um semi-círculo C de raio R , sendo tomado o limite $R \rightarrow \infty$.

Através do teorema dos resíduos, temos que

$$\oint \hat{\psi}(s, x) e^{st} ds = 2\pi i \sum_{s_i} \text{Res}(s_i) = -\psi_{qn} , \quad (3.60)$$

onde $\text{Res}(s_i)$ é o resíduo associado ao pólo s_i . Por outro lado, temos que

$$\oint \hat{\psi}(s, x) e^{st} ds = \psi + \psi_C + \psi_t . \quad (3.61)$$

Vemos então que, de maneira geral, a função de onda pode ser escrita como a soma de três componentes

$$\psi = \psi_{qn} + \psi_t + \psi_C . \quad (3.62)$$

É de especial interesse a contribuição ψ_{qn} na função de onda total. Esta é a contribuição quasi-normal. Conforme discutido, essa contribuição é originada dos pólos isolados na função $\hat{\psi}$, que por sua vez têm origem nas singularidades provocadas pelos zeros da função Wronskiana. Temos também ψ_t , a contribuição originada do contorno usado para escapar da singularidade de ramificação, e ψ_C , resultado da integração pelo arco C .

Definimos o conjunto de frequências quasi-normais como o conjunto C_s formado pelos s_i

complexos que são zeros do Wronskiano $W(s)$:

$$C_s = \{s_i \in \mathbb{C} \mid W(s_i) = 0\} . \quad (3.63)$$

É fato bem conhecido que a condição necessária e suficiente para que $W(s)$ se anule é que as funções $f_+(s, x)$ e $f_-(s, x)$ sejam linearmente dependentes. Desta forma, para $s_i \in \mathbb{C}$

$$f_+(s_i, x) = c(s_i)f_-(s_i, x) \quad (3.64)$$

onde $c(s_i)$ é uma constante, que depende do modo quasi-normal. As correspondentes funções $f_+(s_i, x)$ são chamadas auto-funções quasi-normais.

Para o caso Schwarzschild, foi demonstrado rigorosamente (ver [16, 18, 49]) que o comportamento da função $\psi(t, x)$, em um intervalo finito $]x_0, x_1[$, pode ser aproximado por uma soma finita da forma

$$\psi(t, x) \approx \sum_{i=1}^N a_i e^{s_i t} f_+(s_i, x) , \quad (3.65)$$

onde está sendo assumido que

$$\operatorname{Re}(s_{i+1}) < \operatorname{Re}(s_i) < 0 . \quad (3.66)$$

A aproximação \approx significa que para x_0, x_1, ϵ e t_0 , existe uma constante $C(t_0, x_0, x_1, \epsilon)$ tal que a desigualdade

$$\left| \psi(t, x) - \sum_{i=1}^N a_i e^{s_i t} f_+(s_i, x) \right| \leq C e^{(-\operatorname{Re}(s_{i+1}) + \epsilon)t} \quad (3.67)$$

vale para $t > t_0, x_0 < x < x_1$ e $\epsilon > 0$.

Os pólos originados pelos zeros do Wronskiano podem não ser a única fonte de singularidades na função $\hat{\psi}(s, x)$. As propriedades analíticas das funções $f_+(s, x)$ e $f_-(s, x)$ dependem fortemente do comportamento assintótico do potencial. Se $V(x)$ decai suficientemente rápido com $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$, as funções f_{\pm} são regulares. Uma condição necessária é que o potencial decaia mais rápido que qualquer exponencial [15]. Ainda que o potencial se comporte como uma exponencial, por exemplo para valores grandes de x , esse comportamento não gera singularidades em $s = 0$, e portanto não afeta a função de onda para $t \rightarrow \infty$ [15]. Não é observada então a presença de uma "cauda", e o comportamento assintótico da função de onda é dominado pelos modos quasi-normais.

Se a constante cosmológica é nula, entretanto, é observado que o potencial não decai

exponencialmente com x , mas sim seguindo uma lei de potência. Neste caso a singularidade em f_+ toma a forma de um ponto de ramificação em $s = 0$, e temos a presença de uma componente ψ_t na função de onda. Para campos em geometrias Schwarzschild ou Reissner-Nordström, o campo para t muito grande é dominado por uma cauda tipo lei de potência. As contribuições para o comportamento assintótico de campos linearizados provenientes do termo ψ_t , para uma ampla gama de potenciais efetivos, foram analisadas em [15].

A última componente do campo escalar vem do termo ψ_C , originado da integração do semi-círculo $|s| = C$ com $C \rightarrow \infty$. Pode ser mostrado que esse termo é desprezível para t grande [15], ou seja, ele é um termo transiente. Completamos então um esquema para a análise qualitativa da dinâmica de um campo escalar dada pela equação de movimento (3.49). A solução analítica para o problema, entretanto, é em geral desconhecida. Somos forçados a recorrer a métodos numéricos. Na próxima seção vamos introduzir uma possível abordagem numérica, que será bastante explorada neste trabalho.

3.5 Problema de Condições Iniciais Características

O esquema usual para o estudo de equações hiperbólicas é baseado no problema de Cauchy. No caso particular da equação (3.49), este problema pode ser especificado através dos valores para o campo e sua derivada temporal em um certo tempo inicial, em um intervalo. A partir destas condições iniciais e de condições de contorno para os extremos do intervalo, o campo é determinado para um t arbitrário.

Apesar de muito conveniente em uma grande variedade de situações, o esquema de Cauchy não é o único possível. Outra possibilidade são esquemas iniciais característicos, baseados na especificação de condições iniciais em hipersuperfícies nulas. Um esquema específico é o chamado “problema das duplas coordenadas nulas”. Na versão (1+1)-dimensional deste esquema, a equação hiperbólica de movimento é escrita usando as coordenadas nulas u e v , definidas no capítulo 2:

$$u = t - x , \tag{3.68}$$

$$v = t + x . \tag{3.69}$$

Por simplicidade de notação, estamos omitindo o índice i , já que o bloco em que estamos

trabalhando é fixo. Através destas coordenadas, vemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}, \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}. \quad (3.71)$$

Substituindo na equação de movimento, é obtido

$$\frac{\partial^2 \psi(u, v)}{\partial u \partial v} = -\frac{1}{4}V(r(u, v))\psi(u, v). \quad (3.72)$$

No chamado problema inicial de valores característicos ou problema de Goursat (ver por exemplo [50]), o campo é especificado na fronteira de um ângulo delimitado pelas semi-retas $u = u_0 (v \geq v_0)$ e $v = v_0 (u \geq u_0)$, que se interceptam no ponto (u_0, v_0) conforme ilustrado na figura 3.1:

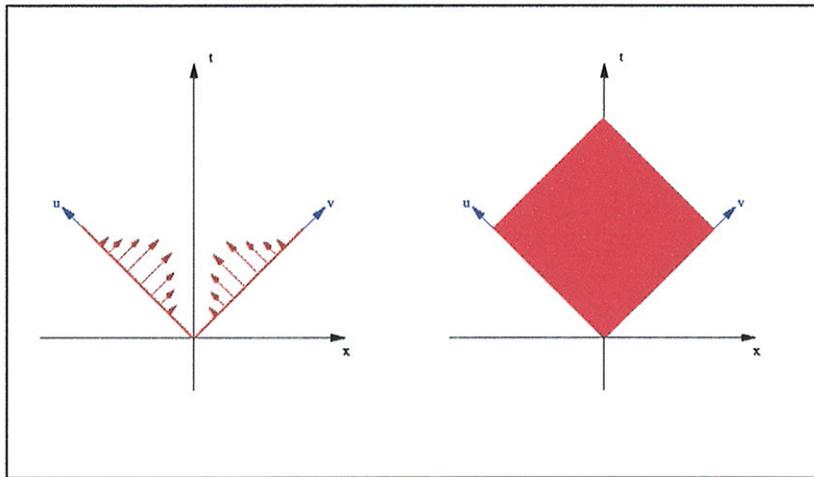


Figura 3.1: (esquerda) Problema inicial de valores característicos, onde o campo é especificado na fronteira de um ângulo. (direita) A partir destas condições iniciais, o campo é unicamente determinado no interior do ângulo.

Eventualmente, outras condições de contorno devem ser fornecidas, dependendo do comportamento assintótico de $V(x)$. A partir do campo especificado na fronteira, o campo no interior do ângulo está determinado de maneira única.

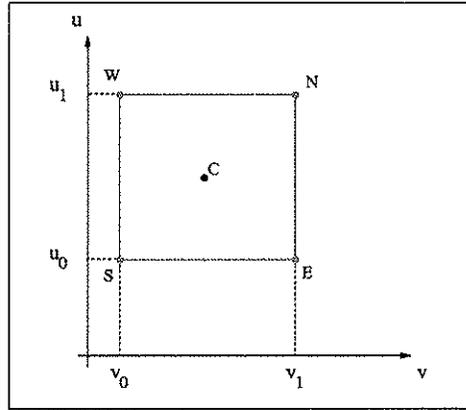


Figura 3.2: Região R do plano $u - v$ na forma de um retângulo nulo delimitado pelos pontos N , S , E , W e C .

Vamos transformar a equação diferencial em uma equação integral. Integramos a equação diferencial em um retângulo nulo do plano $u - v$ delimitado pelos pontos N , S , E , W conforme indica a figura 3.2:

$$\int \frac{\partial^2 \psi(u, v)}{\partial u \partial v} du dv = -\frac{1}{4} \int V(u, v) \psi(u, v) du dv . \quad (3.73)$$

Via teorema de Fubini, escrevemos as integrais de superfície como integrais iteradas

$$\int_{v_0}^{v_1} \left[\int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial^2 \psi(u, v)}{\partial u \partial v} du \right] dv = -\frac{1}{4} \int_{v_0}^{v_1} \left[\int_{u_0}^{u_1} V(u, v) \psi(u, v) du \right] dv . \quad (3.74)$$

Resolvemos o lado esquerdo da equação através do teorema fundamental do cálculo:

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^{v_1} \left[\int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial^2 \psi(u, v)}{\partial u \partial v} du \right] dv &= \int_{v_0}^{v_1} \frac{\partial}{\partial v} \left[\int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} du \right] dv \\ &= \psi(u_1, v_1) - \psi(u_1, v_0) - \psi(u_0, v_1) + \psi(u_0, v_0) \\ &= \psi(N) - \psi(E) - \psi(W) + \psi(S) , \end{aligned} \quad (3.75)$$

obtendo desta forma

$$\psi(N) - \psi(E) - \psi(W) + \psi(S) = -\frac{1}{4} \int_{v_0}^{v_1} \int_{u_0}^{u_1} V(u, v) \psi(u, v) dudv . \quad (3.76)$$

A maioria dos esquemas característicos em (1+1) dimensões são, de uma maneira ou de outra, baseados na equação (3.76). A idéia básica é discretizar o plano $(u - v)$ e usar a relação integral (3.76) para gerar uma equação de movimento discretizada.

Definimos a função $p(u, v)$ como

$$p(u, v) = V(u, v)\psi(u, v) , \quad (3.77)$$

de forma que

$$\int_{v_0}^{v_1} \int_{u_0}^{u_1} V(u, v)\psi(u, v) dudv = \int_{v_0}^{v_1} \int_{u_0}^{u_1} p(u, v) dudv . \quad (3.78)$$

Sem perda de generalidade, escolhemos a origem do sistema $u - v$ de forma que o centro do retângulo esteja no ponto $(0, 0)$, e a integral fica

$$\int_{v_0}^{v_1} \int_{u_0}^{u_1} p(u, v) dudv = \int_{-\Delta v/2}^{+\Delta v/2} \int_{-\Delta u/2}^{+\Delta u/2} p(u, v) dudv . \quad (3.79)$$

Usando o teorema do valor médio, temos que

$$\int_{-\Delta v/2}^{+\Delta v/2} \int_{-\Delta u/2}^{+\Delta u/2} p(u, v) dudv = p(u', v')\Delta u\Delta v , \quad (3.80)$$

onde $(u', v') \in [-\Delta u/2, +\Delta u/2] \otimes [-\Delta v/2, +\Delta v/2]$. Mas supondo que $p(u, v)$ seja pelo menos diferenciável duas vezes em u e v , podemos expandir $p(u', v')$ em termos de $p(0, 0)$, de forma que

$$p(u', v') = p(0, 0) + \left. \frac{\partial p}{\partial u} \right|_{(0,0)} u' + \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_{(0,0)} v' + o(\Delta^2) , \quad (3.81)$$

então

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta v/2}^{+\Delta v/2} \int_{-\Delta u/2}^{+\Delta u/2} p(u, v) dudv &= p(0, 0)\Delta u\Delta v + \Delta v \int_{-\Delta u/2}^{+\Delta u/2} u' du + \Delta u \int_{-\Delta v/2}^{+\Delta v/2} v' dv + O(\Delta^4) \\ &= p(0, 0)\Delta u\Delta v + o(\Delta^4) . \end{aligned} \quad (3.82)$$

Usando o resultado anterior, e substituindo este resultado na equação (integral) de movimento

$$\psi(N) - \psi(E) - \psi(W) + \psi(S) = -\frac{1}{4}V(C)\psi(C)\Delta u\Delta v + o(\Delta^4) . \quad (3.83)$$

Por outro lado, podemos fazer

$$\psi(C) = \frac{1}{2} [\psi(E) + \psi(W)] + o(\Delta^4) \quad (3.84)$$

e como o potencial só depende de r , ele tem o mesmo valor nos pontos C e S :

$$V(C) = V(S) . \quad (3.85)$$

É obtida então uma forma discretizada para a equação de movimento

$$\psi(N) = \psi(E) + \psi(W) - \psi(S) - \frac{V(S)\Delta u\Delta v}{8} [\psi(E) + \psi(W)] + o(\Delta^4) . \quad (3.86)$$

A equação (3.86) acima é a base do método numérico usado em vários trabalhos [47, 22, 53].

Podemos entretanto obter uma outra versão para a equação de movimento discretizada. Usando a regra do trapézio para a integração na expressão (3.76), fazemos

$$\int_{u_0}^{u_1} p(u, v) du = \frac{\Delta u}{2} [p(u_0, v) + p(u_1, v)] + o(\Delta^3) . \quad (3.87)$$

Continuando com a definição da função $p(u, v)$, calculamos a integral dupla

$$\int_{v_0}^{v_1} \int_{u_0}^{u_1} V(u, v) \psi(u, v) dudv = \frac{\Delta u \Delta v}{4} [p(u_0, v_0) + p(u_0, v_1) + p(u_1, v_0) + p(u_1, v_1)] + o(\Delta^4) . \quad (3.88)$$

Através da definição dos pontos N , S , E e W , obtemos

$$\int_{v_0}^{v_1} \int_{u_0}^{u_1} V(u, v) \psi(u, v) dudv = \frac{\Delta u \Delta v}{4} [V(S)\psi(S) + V(E)\psi(E) + V(W)\psi(W) + V(N)\psi(N)] + o(\Delta^4) . \quad (3.89)$$

Substituindo na equação (integral) de movimento, obtemos

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{\Delta u \Delta v}{16} V(N) \right] \psi(N) &= \psi(E) + \psi(W) - \psi(S) \\ &\quad - \frac{\Delta u \Delta v}{16} [V(S)\psi(S) + V(E)\psi(E) + V(W)\psi(W)] \\ &\quad + o(\Delta^4) . \end{aligned} \quad (3.90)$$

Como $V(N) = V(S)$, expressamos o campo no ponto N a partir do valor do campo nos pontos S , E e W conforme desejado:

$$\psi(N) = \frac{\psi(E) + \psi(W) - \psi(S) - \frac{\Delta u \Delta v}{16} [V(S)\psi(S) + V(E)\psi(E) + V(W)\psi(W)]}{1 - \frac{\Delta u \Delta v}{16} V(S)} + o(\Delta^4). \quad (3.91)$$

Usando o esquema de discretização (3.86) ou (3.91), o algoritmo básico consiste em iterar a região de interesse, onde a partir de três pontos conhecidos, calcula-se o quarto. Os algoritmos específicos, que dependem do comportamento assintótico do potencial efetivo, serão discutidos nos capítulos 6 e 8.

Um método eficiente para o cálculo dos modos quasi-normais foi desenvolvido por Schutz e Will, [54] e mais tarde aperfeiçoado por Iyer e Will [55]. Consiste de um método tipo WKB de ordem alta, e provou ser bastante eficiente e robusto. É aplicável desde que o potencial $V(x)$ tenha um máximo e tenda a zero para $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$.

Por este método, as frequências quasi-normais são dadas por

$$\omega(n) = (V_0 + P) - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(-2V_0^{(2)} \right)^{1/2} (1 + Q). \quad (3.92)$$

O inteiro n rotula os modos e as quantidades P e Q são dadas por

$$P = \frac{1}{8} \left[\frac{V_0^{(4)}}{V_0^{(2)}} \right] \left(\frac{1}{4} + \alpha^2 \right) - \frac{1}{288} \left[\frac{V_0^{(3)}}{V_0^{(2)}} \right]^2 (7 + 60\alpha^2), \quad (3.93)$$

$$Q = \frac{1}{-2V_0^{(2)}} \left\{ \frac{5}{6912} \left[\frac{V_0^{(3)}}{V_0^{(2)}} \right]^4 (77 + 188\alpha^2) \right. \\ \left. - \frac{1}{384} \left[\frac{V_0^{(3)2} V_0^{(4)}}{V_0^{(2)}} \right] (51 + 100\alpha^2) + \frac{1}{2304} \left[\frac{V_0^{(4)}}{V_0^{(2)}} \right]^2 (67 + 68\alpha^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{288} \left[\frac{V_0^{(3)} V_0^{(5)}}{V_0^{(2)2}} \right] (19 + 28\alpha^2) - \frac{1}{288} \left[\frac{V_0^{(6)}}{V_0^{(2)}} \right] (5 + 4\alpha^2) \right\}. \quad (3.94)$$

Nas equações (3.92) a (3.94), definimos $\alpha = n + 1/2$, e a notação (i) denota diferenciação com respeito a x do potencial $V(x)$. Este potencial e suas derivadas são calculadas no ponto

extremo x_{max} . Este método foi aplicado com sucesso para campos escalares, eletromagnéticos e gravitacionais nas geometrias Schwarzschild e Reissner-Nordström [56].

No capítulo 6, mostraremos que o método WKB estendido apresentado aqui pode ser também utilizado quando a geometria é assintoticamente de Sitter. A abordagem utilizada neste trabalho é calcular estas constantes através de

$$V(x_{max}) = V(x(r_{max})) \quad (3.95)$$

$$V^{(2)}(x_{max}) = \left. \frac{d^{(2)}V(x)}{dx^{(2)}} \right|_{x=x_{max}} = h(r) \frac{d}{dr} \left[h(r) \frac{dV(r)}{dr} \right] \Big|_{r=r_{max}} \quad (3.96)$$

⋮

$$V^{(6)}(x_{max}) = \left. \frac{d^{(6)}V(x)}{dx^{(6)}} \right|_{x=x_{max}} = h(r) \frac{d}{dr} \left[\left. \frac{d^{(5)}V(x)}{dx^{(5)}} \right|_{x=x(r)} \right] \Big|_{r=r_{max}} . \quad (3.97)$$

Neste contexto, é um método “semi-analítico”, porque o ponto máximo r_{max} ainda tem que ser determinado numericamente.

Capítulo 4

Campos em Geometrias Assintoticamente de Sitter

4.1 Estrutura de Horizontes

O primeiro passo no estudo da dinâmica de campos linearizados é a caracterização do espaço-tempo onde os campos vão evoluir. É conveniente escrevermos a constante Λ em função do “raio cosmológico” a , definido como

$$a^2 = \frac{3}{\Lambda} > 0. \quad (4.1)$$

Em termos do parâmetro a , a função $h(r)$ para a métrica Reissner-Nordström-de Sitter fica

$$h(r) = 1 - \frac{2m}{r^{d-3}} + \frac{q^2}{r^{2d-6}} - \frac{r^2}{a^2}. \quad (4.2)$$

Talvez a principal característica das métricas esfericamente simétricas apresentadas no capítulo 2, e em particular a especificada por (4.2), seja a presença de horizontes, dados pelos zeros reais positivos da função $h(r)$.

Esta estrutura de horizontes determina a estrutura causal da variedade, e será o tópico de estudo desta seção. É conveniente definimos o polinômio $P(r)$ como

$$h(r) = -\frac{P(r)}{a^2 r^{2d-6}}, \quad (4.3)$$

de forma que

$$P(r) = r^{2d-4} - a^2 r^{2d-6} + 2ma^2 r^{d-3} - a^2 q^2 . \quad (4.4)$$

Os possíveis horizontes são dados então pelos zeros reais positivos de um polinômio de grau 4 ou maior.

A menos de casos particulares, a determinação analítica dos zeros de $P(r)$ não é possível. Entretanto, podemos mostrar algumas propriedades gerais do polinômio $P(r)$, em um nível que nos permite uma caracterização da estrutura de horizontes da variedade. A hipótese básica assumida é que o parâmetro de massa m e o raio cosmológico a são reais e positivos. Ou seja, estamos interessados em buracos negros “físicos”, possivelmente carregados e assintoticamente de Sitter.

Para a classificação dos possíveis horizontes, a presença de carga elétrica torna o problema consideravelmente mais complexo. Por uma questão de clareza, trataremos separadamente o caso em que a carga é nula.

4.1.1 Geometria em SdS d-Dimensional

Quando a carga do buraco negro é nula, a métrica de Reissner-Nordström-de Sitter recai na métrica de Schwarzschild-de Sitter. O polinômio $P(r)$ pode então ser fatorado como

$$P(r) = r^{d-3} \left(r^{d-1} - a^2 r^{d-3} + 2ma^2 \right) . \quad (4.5)$$

Desta forma nos restringimos ao estudo dos zeros do polinômio $P_0(r)$ de grau $d - 1$:

$$P_0(r) = r^{d-1} - a^2 r^{d-3} + 2ma^2 . \quad (4.6)$$

Mesmo neste caso, em geral a determinação dos zeros de $P_0(r)$ só é possível através de métodos numéricos. Ainda assim, podemos fazer uma classificação dos possíveis zeros. A idéia é que, apesar de não ser possível calcular as raízes de $P_0(r)$, podemos encontrar os pontos extremos deste polinômio. Esta informação, juntamente com o comportamento assintótico de $P_0(r)$, nos permite uma caracterização dos seus zeros.

Veremos a seguir que o quadro geral é muito parecido para qualquer valor de d , com $d \geq 4$. Entretanto, os detalhes específicos dependem da dimensão ser par ou ímpar. Abordaremos estes casos em duas proposições, apresentadas a seguir.

Proposição 4.1: *Seja $d \geq 4$ par, $a^2 > 0$ e $m > 0$. Dependendo do valor de $a^{2(d-3)}/m^2$, temos as seguintes possibilidades quanto aos zeros reais do polinômio $P_0(r)$:*

- A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} > \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}}$ é uma condição necessária e suficiente para $P_0(r)$ possuir uma raiz real negativa e duas raízes reais positivas, todas com multiplicidade 1.
- A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} = \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}}$ é uma condição necessária e suficiente para $P_0(r)$ possuir uma raiz real negativa com multiplicidade 1, e uma raiz real positiva multiplicidade 2.
- A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} < \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}}$ é uma condição necessária e suficiente para $P_0(r)$ possuir uma raiz real negativa multiplicidade 1.

Proposição 4.2: *Seja $d \geq 5$ ímpar, $a^2 > 0$ e $m > 0$. Dependendo do valor de a^{d-3}/m , temos as seguintes possibilidades quanto aos zeros reais do polinômio $P_0(r)$:*

- A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} > \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}}$, é uma condição necessária e suficiente para $P_0(r)$ possuir duas raízes reais negativas e duas raízes reais positivas.
- A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} = \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}}$, é uma condição necessária e suficiente para $P_0(r)$ possuir uma raiz real negativa e uma raiz real positiva.
- A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} < \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}}$, é uma condição necessária e suficiente para $P_0(r)$ não possuir nenhuma raiz real.

O que as proposições 4.1 e 4.2 estão afirmando é que a estrutura global das variedades descritas pela métrica Schwarzschild-de Sitter é basicamente independente da dimensão. Conforme comentado no capítulo 2, e visto explicitamente nesta seção, o espaço de parâmetros para esta métrica é unidimensional, ou seja, o único parâmetro efetivo é $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2}$ ou $m^2\Lambda^{d-3}$.

Para um valor pequeno de $m^2\Lambda^{d-3}$, a métrica Schwarzschild-de Sitter descreve um espaço-tempo com dois horizontes — um horizonte de eventos r_+ e um outro horizonte r_c , denominado de horizonte cosmológico, tais que $0 < r_+ < r_c < \infty$. A região de interesse neste trabalho é a o bloco T_+ , conforme comentado no capítulo 2. Neste bloco $P_0(r) < 0$, e portanto $h(r) > 0$. Desta forma, T_+ é estática e nela $\partial/\partial t$ é um vetor de Killing tipo tempo.

À medida em que $m^2\Lambda^{d-3}$ aumenta, os horizontes r_+ e r_c se aproximam, visto que o mínimo local $P_0(r'_+)$ se torna mais próximo de zero:

$$P_0(r'_+) = \frac{6m}{\Lambda} \left[1 - \frac{3^{\frac{d-3}{2}} (d-1)^{\frac{1-d}{2}} (d-3)^{\frac{d-3}{2}}}{m\Lambda^{\frac{d-3}{2}}} \right]. \quad (4.7)$$

No valor crítico $m^2\Lambda^{d-3} = (m^2\Lambda^{d-3})_{crit}$ os horizontes de evento e cosmológico coincidem, onde

$$(m^2\Lambda^{d-3})_{crit}(d) = \frac{(d-1)^{d-1}}{[3(d-3)]^{d-3}}. \quad (4.8)$$

Este é um tipo de buraco negro extremo, similar a um outro caso que surge quando o buraco negro é carregado.

Quando $m^2\Lambda^{d-3}$ ultrapassa o valor crítico $(m^2\Lambda^{d-3})_{crit}$, a métrica deixa de descrever um buraco negro. A singularidade em $r = 0$ está exposta — temos uma singularidade nua.

Um diagrama do espaço de parâmetros para as possíveis soluções da métrica Schwarzschild-de Sitter é apresentado na figura 4.1 a seguir. Como veremos na próxima seção, o espaço de parâmetros para o caso em que $q \neq 0$ é bidimensional, e é consideravelmente mais complexo.

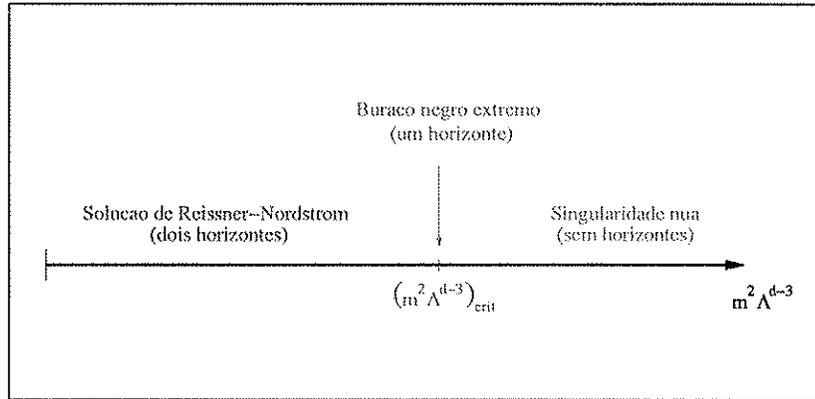


Figura 4.1: Espaço de parâmetros para a métrica Schwarzschild-de Sitter, destacando as possíveis configurações de horizontes.

4.1.2 Geometria RNdS d-Dimensional

As possibilidades para os possíveis conjuntos de zeros do polinômio $P(r)$, com $q \neq 0$, são bastante mais ricas. A estrutura do espaço de parâmetros da métrica RNdS é portanto muito mais complexa que o caso SdS. De acordo com o caráter de suas raízes reais, o espaço de parâmetros pode ser dividido em quatro regiões. Novamente, apresentamos os resultados através de duas proposições, para os casos par e ímpar.

Proposição 4.3: *Seja $d \geq 4$, d par, $m > 0$, $a^2 > 0$ e $q \neq 0$. As raízes reais do polinômio $P(r)$ podem ser:*

- *Uma raiz negativa (r_n) e três raízes positivas ($0 < r_- < r_+ < r_c$), todas com multiplicidade 1.*
- *Uma raiz negativa (r_n) e uma raiz positiva (r_+) com multiplicidade 1 e uma segunda raiz positiva (r_c), com multiplicidade 2, tal que $r_n < 0 < r_+ < r_c$.*
- *Uma raiz negativa (r_n) e uma raiz positiva (r_c) com multiplicidade 1 e uma segunda raiz positiva (r_+) com multiplicidade 2, tal que $r_- < 0 < r_+ < r_c$.*
- *Uma raiz negativa (r_n) e uma raiz positiva (r_c), ambas com multiplicidade 1.*

Proposição 4.4: *Seja $d \geq 5$, d ímpar, $m > 0$, $a^2 > 0$ e $q \neq 0$. As raízes reais do polinômio $P(r)$ podem ser:*

- *Três raízes positivas ($0 < r_- < r_+ < r_c$) e três raízes negativas ($-r_c < -r_+ < -r_- < 0$), todas com multiplicidade 1.*
- *Uma raiz positiva (r_-) e uma raiz negativa ($-r_-$) com multiplicidade 1 e uma raiz positiva (r_c) e uma raiz negativa ($-r_c$), com multiplicidade 2, onde $r_- < r_c$.*
- *Uma raiz positiva (r_c) e uma raiz negativa ($-r_c$) com multiplicidade 1 e uma raiz positiva (r_+) e uma raiz negativa ($-r_+$) com multiplicidade 2, onde $r_+ < r_c$.*
- *Uma raiz negativa ($-r_c$) e uma raiz positiva (r_c), ambas com multiplicidade 1.*

As proposições 4.3 e 4.4 são demonstradas no apêndice A. Elas nos dizem que, para um dado valor de d , temos 4 configurações possíveis, dependendo dos valores de m , q e Λ . Vemos também que se $q \neq 0$ a singularidade está sempre protegida por horizontes.

Neste trabalho, estamos principalmente interessados na região do espaço de parâmetros em que a métrica RNdS possui três horizontes. Esta é a geometria Reissner-Nordström-de Sitter propriamente dita, e os seus horizontes são denominados horizontes de Cauchy (r_-), de eventos (r_+) e cosmológico (r_c).

No bloco T_+ , conforme visto no capítulo 2, temos que $h(r) > 0$, e portanto esta região é estática. Uma diferença importante entre o caso Schwarzschild-de Sitter e Reissner-Nordström-de Sitter é que neste último singularidade em $r = 0$ passa a ser do tipo tempo. Nas próximas seções, veremos que os efeitos da carga na estrutura do bloco T_+ não são pronunciados.

4.2 Coordenada Tartaruga

Introduzimos a coordenada tartaruga no bloco T_+ , definida da maneira usual, e portanto o domínio de $x(r)$ é o intervalo $]r_+, r_c[$. A estratégia para o cálculo da forma explícita da função $x(r)$ é expandir o integrando presente na definição da coordenada tartaruga em frações parciais. Tal expansão depende fundamentalmente da estrutura de raízes de $h(r)$, que foi estudada na seção anterior.

Vamos abordar inicialmente o caso mais geral Reissner-Nordström-de Sitter propriamente dito, em que a carga elétrica é não nula e a função $h(r)$ possui três raízes positivas simples. Em seguida, veremos alguns casos limites desta geometria.

4.2.1 Espaço-Tempo Reissner-Nordström-de Sitter

A partir das proposições 4.3 e 4.4, vemos que existe uma região do espaço de parâmetros em que temos a presença de três horizontes (r_- , r_+ e r_c). Escrevemos a função $h(r)$ como

$$h(r) = \begin{cases} -\frac{(r-r_c)(r-r_+)(r-r_-)(r-r_n)\prod(r-\tilde{r}_i)(r-\tilde{r}_i^*)}{a^2 r^{2d-6}} & q \neq 0, d \text{ par} \\ -\frac{(r-r_c)(r-r_+)(r-r_-)(r+r_c)(r+r_+)(r+r_-)\prod(r-\tilde{r}_i)(r-\tilde{r}_i^*)}{a^2 r^{2d-6}} & q \neq 0, d \text{ ímpar} \end{cases} \quad (4.9)$$

onde os $\{\tilde{r}_i\}$ e $\{\tilde{r}_i^*\}$ são as raízes complexas e suas conjugadas, e os produtórios envolvem os pares destas raízes. A expansão em frações parciais de $1/h(r)$ fica então, para d par:

$$\frac{1}{a^2 h(r)} = \frac{C_c}{r-r_c} + \frac{C_+}{r-r_+} + \frac{C_-}{r-r_-} + \frac{C_n}{r+r_n} + \sum_i \left(\frac{\tilde{C}_i}{r-\tilde{r}_i} + \frac{\tilde{C}_{i^*}}{r-\tilde{r}_i^*} \right) \quad (4.10)$$

e para d ímpar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 h(r)} &= \frac{C_c}{r-r_c} + \frac{C_+}{r-r_+} + \frac{C_-}{r-r_-} + \frac{C'_c}{r+r_c} + \frac{C'_+}{r+r_+} + \frac{C'_-}{r+r_-} \\ &+ \sum_i \left(\frac{\tilde{C}_i}{r-\tilde{r}_i} + \frac{\tilde{C}_{i^*}}{r-\tilde{r}_i^*} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nas expressões anteriores, os $\{\tilde{C}_i\}$ e $\{\tilde{C}_{i^*}\}$ são números complexos e seus conjugados, respectivamente.

A próxima etapa é o cálculo dos coeficientes das frações parciais. Seja C_i um coeficiente arbitrário, real ou complexo, associado a uma raiz r_i . A função $h(r)$ pode então ser escrita como

$$h(r) = (r - r_i)g(r) , \quad (4.12)$$

e a expansão em frações parciais expressa através de

$$\frac{1}{a^2 h(r)} = \frac{C_i}{r - r_i} + R(r) . \quad (4.13)$$

Temos então que

$$\lim_{r \rightarrow r_i} \frac{r - r_i}{a^2 h(r)} = C_i = \frac{1}{a^2} \frac{1}{g(r_i)} \quad (4.14)$$

e como

$$g(r_i) = r_i^{-2d+6} \prod_{j \neq i} (r_i - r_j) , \quad (4.15)$$

obtemos uma expressão para o coeficiente C_i em termos das raízes de $h(r)$:

$$\frac{1}{a^2 C_i} = r_i^{-2d+6} \prod_{j \neq i} (r_i - r_j) . \quad (4.16)$$

Através das expressões para os coeficientes e do comportamento da função $h(r)$, podemos verificar explicitamente que

$$C_c < 0 , \quad (4.17)$$

$$C_+ > 0 , \quad (4.18)$$

$$C_- < 0 , \quad (4.19)$$

$$C'_i = -C_i , \quad (4.20)$$

$$\tilde{C}_{i*} = \tilde{C}_i^* . \quad (4.21)$$

Para métricas na forma apresentada , a gravidade superficial κ_i no horizonte $r = r_i$ é dada por

$$\kappa_i = \frac{1}{2} \left| \frac{dh(r)}{dr} \right|_{r=r_i} . \quad (4.22)$$

Podemos expressar a gravidade superficial em termos das raízes de $h(r)$. Diferenciando a função $h(r)$:

$$\frac{dh(r)}{dr} = g(r) + (r - r_i) \frac{dg(r)}{dr} . \quad (4.23)$$

Usando os resultados anteriores,

$$2\kappa_i = |g(r_i)| = \frac{1}{a^{2r_i^{2d-6}}} \prod_{j \neq i} |r_i - r_j| . \quad (4.24)$$

Através da expressão (4.24), vemos que as constantes C_i estão relacionadas às gravidades superficiais κ_i :

$$a^2 |C_i| = \frac{1}{2\kappa_i} . \quad (4.25)$$

Muitas vezes é conveniente escrevermos expressão para $1/a^2 h(r)$ apenas em termos de quantidades reais. Para este propósito, definimos as quantidades

$$p_i = -(\tilde{r}_i + \tilde{r}_i^*) = -2 \operatorname{Re}(\tilde{r}_i) , \quad (4.26)$$

$$q_i = \tilde{r}_i \tilde{r}_i^* = |\tilde{r}_i|^2 , \quad (4.27)$$

$$A_i = C_i + C_i^* = 2 \operatorname{Re}(C_i) , \quad (4.28)$$

$$B_i = C_i \tilde{r}_i^* + C_i^* \tilde{r}_i = C_i \tilde{r}_i^* + (C_i \tilde{r}_i^*)^* = 2 \operatorname{Re}(C_i \tilde{r}_i^*) , \quad (4.29)$$

Usando as definições (4.26)-(4.29), obtemos a relação

$$\frac{\tilde{C}_i}{r - \tilde{r}_i} + \frac{\tilde{C}_{i^*}}{r - \tilde{r}_i^*} = \frac{A_i r - B_i}{r^2 + p_i r + q_i} . \quad (4.30)$$

Dado que os $\{\tilde{r}_i\}$ são complexos, temos que os $\{p_i\}$ e $\{q_i\}$ satisfazem a desigualdade $4q_i - p_i^2 > 0$.

O cálculo da forma explícita da função $x(r)$ agora é imediato. Para d par

$$\begin{aligned} \frac{x(r)}{a^2} &= C_c \ln(r_c - r) + C_+ \ln(r - r_+) + C_- \ln(r - r_-) + C_n \ln(r - r_n) \\ &+ \sum_i \left\{ \frac{A_i}{2} \ln(r^2 + p_i r + q_i) + \frac{2B_i - p_i A_i}{\sqrt{4q_i - p_i^2}} \arctan \left(\frac{2r + p_i}{\sqrt{4q_i - p_i^2}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

e para d ímpar

$$\begin{aligned} \frac{x(r)}{a^2} = & C_c \ln(r_c - r) + C_+ \ln(r - r_+) + C_- \ln(r - r_-) \\ & - C_c \ln(r + r_c) - C_+ \ln(r + r_+) - C_- \ln(r + r_-) \\ & + \sum_i \left\{ \frac{A_i}{2} \ln(r^2 + p_i r + q_i) + \frac{2B_i - p_i A_i}{\sqrt{4q_i - p_i^2}} \arctan \left(\frac{2r + p_i}{\sqrt{4q_i - p_i^2}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Com a motivação de tornar mais compactas as expressões para $x(r)$, definimos as funções:

$$\Gamma(d) = \frac{1}{2} [1 - (-1)^d] = \begin{cases} 1 & d \text{ par} \\ 0 & d \text{ ímpar} \end{cases} \quad (4.33)$$

$$H(r) = \sum \left\{ \frac{A_i}{2} \ln(r^2 + p_i r + q_i) + \frac{2B_i - p_i A_i}{\sqrt{4q_i - p_i^2}} \arctan \left(\frac{2r + p_i}{\sqrt{4q_i - p_i^2}} \right) \right\}. \quad (4.34)$$

Utilizando as definições para $\Gamma(d)$ e $H(r)$, escrevemos a função $x(r)$ na forma

$$\begin{aligned} \frac{x(r)}{a^2} = & C_c \ln(r_c - r) + C_+ \ln(r - r_+) \\ & + C_- \ln(r - r_-) - C_- \ln(r + r_-) \\ & + \Gamma(d) [-C_c \ln(r + r_c) - C_+ \ln(r + r_+)] \\ & + \Gamma(d + 1) C_n \ln(r - r_n) \\ & + H(r). \end{aligned} \quad (4.35)$$

4.2.2 Características Básicas

Exploraremos agora as características básicas da função $x(r)$ para d arbitrário, ou seja, seus limites assintóticos e os pontos extremos. Estas características são importantes na determinação das propriedades dos potenciais efetivos, e portanto na dinâmica dos diversos campos.

O primeiro ponto é que a função $x(r)$ tende a menos infinito com r próximo ao horizonte de eventos. De fato, notamos que no limite $r \rightarrow r_+$, ficamos com

$$\lim_{r \rightarrow r_+} x(r) = a^2 C_+ \lim_{r \rightarrow r_+} \ln(r - r_+) + \text{TERMO FINITO} \rightarrow -\infty \quad (4.36)$$

visto que $C_+ < 0$. Podemos inclusive obter uma expressão aproximada para a função $x(r)$ no limite $r \approx r_+$, observando que

$$x(r) \approx a^2 C_+ \ln(r - r_+) , \quad (4.37)$$

e portanto, em termos da gravidade superficial κ_+ :

$$r(x) = r_+ (1 + e^{2\kappa_+ x}) + O(e^{4\kappa_+ x}) . \quad (4.38)$$

De maneira análoga, a função $x(r)$ tende a infinito próximo do horizonte cosmológico. Dado que $C_c < 0$, obtemos

$$\lim_{r \rightarrow r_c} x(r) = a^2 C_c \lim_{r \rightarrow r_c} \ln(r_c - r) + \text{TERMO FINITO} \rightarrow +\infty \quad (4.39)$$

Vemos assim, que no limite $r \approx r_c$, temos

$$x(r) \approx a^2 C_c \ln(r_c - r) , \quad (4.40)$$

e desta forma, em termos de κ_c ,

$$r(x) = r_c (1 - e^{2\kappa_c x}) + O(e^{4\kappa_c x}) . \quad (4.41)$$

O último ponto a ser demonstrado é que a função $x(r)$ é uma função crescente. Isso é feito mostrando que essa função não tem pontos extremos. Diferenciando $x(r)$ temos

$$\frac{dx(r)}{dr} = \frac{d}{dr} \int \frac{dr}{h(r)} = \frac{1}{h(r)} . \quad (4.42)$$

Os pontos extremos de $x(r)$ são dados pelas soluções da equação

$$\left. \frac{dx(r)}{dr} \right|_{r=r_{ext}} = 0 , \quad (4.43)$$

e a partir da definição de $x(r)$, a equação para os extremos de $x(r)$ fica

$$\frac{1}{h(r_{ext})} = 0 . \quad (4.44)$$

A equação acima não tem solução para $r \in]r_+, r_c[$, porque $h(r)$ é uma função positiva neste intervalo. Visto os comportamentos assintóticos da função $x(r)$ e o fato de que esta função

não possui extremos, infere-se que ela é crescente. Seu domínio e imagem são dados por

$$x :]r_+, r_c[\longrightarrow]-\infty, +\infty[.$$

4.2.3 Variando a Carga e a Constante Cosmológica

Podemos encarar $x(r)$ também como uma função dos parâmetros da métrica, e em particular de q . Embora a função $x(r)$ esteja definida no bloco T_+ apenas, ela é sensível a mudanças globais. E certamente existe uma mudança abrupta das propriedades do espaço-tempo quando a carga vai a zero. Um ponto que se revela importante é se a função $x(r)$ é contínua no limite $q \rightarrow 0$. Vamos argumentar aqui que a resposta é afirmativa, para qualquer valor de d .

Podemos escrever $x(r)$ como

$$x(r) = -a^2 \int \frac{r^{2d-6}}{P(r)} dr . \quad (4.45)$$

Usando a notação já estabelecida para os polinômios $P(r)$ e $P_0(r)$, fazemos

$$P(r) = r^{d-3} P_0(r) - q^2 a^2 , \quad (4.46)$$

de forma que

$$x(r) = -a^2 \int \frac{r^{2d-6}}{r^{d-3} P_0(r) - q^2 a^2} dr . \quad (4.47)$$

Como o domínio da função $x(r)$ é o intervalo $]r_+, r_c[$, o polinômio $P_0(r)$ é necessariamente diferente de zero. Portanto, o integrando de (4.47) é uma função contínua no limite $q \rightarrow 0$. Isto é visto explicitamente escrevendo $x(r)$ como

$$x(r) = -a^2 \int \frac{r^{d-3}}{P_0(r)} dr - q^2 a^4 \int \frac{dr}{P_0^2(r)} + O(q^4) . \quad (4.48)$$

Vamos obter diretamente a expressão para $x(r)$ quando a carga q é nula. Neste caso, temos que a função $h(r)$ é escrita em termos de seus zeros como

$$h(r) = \begin{cases} -\frac{(r-r_c)(r-r_+)(r-r_n) \prod (r-\tilde{r}_i)(r-\tilde{r}_i^*)}{a^2 r^{d-3}} & q = 0, d \text{ par} \\ -\frac{(r-r_c)(r-r_+)(r+r_c)(r+r_+) \prod (r-\tilde{r}_i)(r-\tilde{r}_i^*)}{a^2 r^{d-3}} & q = 0, d \text{ ímpar} \end{cases} \quad (4.49)$$

A expansão em frações parciais de $1/h(r)$ fica então, para $q = 0$ e d par:

$$\frac{1}{a^2 h(r)} = \frac{C_c}{r_c - r} + \frac{C_+}{r - r_+} + \frac{C_n}{r + r_n} + \sum_i \left(\frac{\tilde{C}_i}{r - \tilde{r}_i} + \frac{\tilde{C}_{i*}}{r - \tilde{r}_i^*} \right), \quad (4.50)$$

e para $q = 0$ e d ímpar:

$$\frac{1}{a^2 h(r)} = \frac{C_c}{r_c - r} + \frac{C_+}{r - r_+} + \frac{C'_c}{r + r_c} + \frac{C'_+}{r + r_+} + \sum_i \left(\frac{\tilde{C}_i}{r - \tilde{r}_i} + \frac{\tilde{C}_{i*}}{r - \tilde{r}_i^*} \right). \quad (4.51)$$

O cálculo das constantes na expansão em frações parciais é o mesmo que foi feito para o caso em que $q \neq 0$. Desta forma, seguindo o procedimento já realizado, obtemos que para o caso de carga nula, a função $x(r)$ fica:

$$\begin{aligned} \frac{x(r)}{a^2} = & C_c \ln(r_c - r) + C_+ \ln(r - r_+) \\ & + \Gamma(d) [-C_c \ln(r + r_c) - C_+ \ln(r + r_+)] \\ & + \Gamma(d + 1) C_n \ln(r - r_n) \\ & + H(r). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Outro ponto de interesse é com o comportamento da métrica com a variação da constante cosmológica. Abordaremos inicialmente o caso em que $\Lambda = 0$. Este é o espaço-tempo de Reissner-Nordström, e a função $h(r)$ é dada por

$$h(r) = 1 - \frac{2m}{r^{d-3}} + \frac{q^2}{r^{2d-6}}, \quad (4.53)$$

ou

$$h(r) = \frac{P(r)}{r^{2d-6}}, \quad (4.54)$$

onde

$$P(r) = r^{2d-6} - 2mr^{d-3} + q^2. \quad (4.55)$$

Formalmente, a determinação dos zeros de $P(r)$, com $\Lambda = 0$, é muito mais simples que nos casos não assintoticamente planos. É imediato verificar que esses zeros são dados pelas soluções das equações

$$r^{d-3} = m \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{q}{m} \right)^2} \right], \quad (4.56)$$

$$r^{d-3} = m \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{q}{m}\right)^2} \right]. \quad (4.57)$$

Embora a determinação analítica de todos os zeros de $h(r)$ em geral não seja factível, os resultados (4.56) e (4.57) tornam possível a caracterização da estrutura de horizontes de $h(r)$. Os principais pontos desta estrutura são:

- Se $q = 0$, o espaço-tempo possui um horizonte de eventos simples.
- Se $0 < q < m$, o espaço-tempo possui dois horizontes simples — um horizonte de Cauchy e um horizonte de eventos.
- Se $q = m$, o espaço-tempo possui um horizonte de eventos duplo. Este é o caso extremo.
- Se $q > m$, o espaço-tempo não possui horizontes. Temos uma singularidade nua.

Vamos nos detalhar um pouco no caso carregado não-extremo. Se $0 < q < m$, os horizontes de Cauchy e de eventos são expressos em termos dos parâmetros m e q através de

$$r_+ = \left[m + \sqrt{m^2 - q^2} \right]^{\frac{1}{d-3}}, \quad (4.58)$$

$$r_- = \left[m - \sqrt{m^2 - q^2} \right]^{\frac{1}{d-3}}. \quad (4.59)$$

Dependendo da dimensão ser par ou ímpar, temos ainda que:

- Se d é par e $0 < q < m$, $h(r)$ possui mais $2(d-2)$ raízes complexas, em pares conjugados.
- Se d é ímpar e $0 < q < m$, $(-r_+)$ e $(-r_-)$ também são raízes de $h(r)$, que também possui mais $2(d-3)$ raízes complexas, em pares conjugados.

A partir da caracterização dos zeros de $h(r)$, podemos proceder para o cálculo da coordenada tartaruga. Entretanto, a expansão em frações parciais no caso assintoticamente plano é diferente. Isso porque neste caso $1/h(r)$ é uma fração imprópria. De fato, podemos escrever esta fração como

$$\frac{1}{h(r)} = \frac{r^{2d-6}}{r^{2d-6} - 2mr^{d-3} + q^2} = 1 + \frac{2mr^{d-3} - q^2}{r^{2d-6} - 2mr^{d-3} + q^2}, \quad (4.60)$$

e a última fração na expressão acima é uma fração própria. Decompondo agora o último termo em frações parciais, obtemos para d par,

$$\frac{1}{h(r)} = \frac{C_+}{r-r_+} + \frac{C_-}{r-r_-} + \sum_i \left(\frac{\tilde{C}_i}{r-\tilde{r}_i} + \frac{\tilde{C}_{i*}}{r-\tilde{r}_i^*} \right), \quad (4.61)$$

e para d ímpar:

$$\frac{1}{h(r)} = \frac{C_+}{r-r_+} + \frac{C_-}{r-r_-} - \frac{C_+}{r+r_+} - \frac{C_-}{r+r_-} + \sum_i \left(\frac{\tilde{C}_i}{r-\tilde{r}_i} + \frac{\tilde{C}_{i*}}{r-\tilde{r}_i^*} \right). \quad (4.62)$$

A função $x(r)$ é determinada integrando o resultado anterior:

$$\begin{aligned} x(r) = & r + C_+ \ln(r-r_+) + C_- \ln(r-r_-) \\ & + \Gamma(d+1) [-C_+ \ln(r+r_+) - C_- \ln(r+r_-)] \\ & + H(r). \end{aligned} \quad (4.63)$$

onde $H(r)$ envolve as contribuições das raízes complexas conforme (4.34), e $\Gamma(d+1)$ é 0 ou 1 conforme d é par ou ímpar respectivamente. Os coeficientes C_i por sua vez são dados por

$$\frac{1}{C_i} = r_i^{-2d-6} \prod_{j \neq i} (r_i - r_j). \quad (4.64)$$

Verifica-se que o comportamento assintótico de $x(r)$ com $r \rightarrow r_+$ é o mesmo do caso em que $\Lambda \neq 0$. De fato,

$$x(r) \approx C_+ \ln(r-r_+) \quad (4.65)$$

com $r \approx r_+$, e portanto nesta aproximação obtemos

$$r(x) = r_+ \left(1 + e^{\frac{x}{C_+}} \right). \quad (4.66)$$

Por outro lado, o comportamento assintótico com $r \rightarrow \infty$ é distinto. Neste limite, para qualquer valor de d , temos:

$$r(x) \approx x. \quad (4.67)$$

4.3 Potenciais Efetivos

A determinação da forma explícita de $V(x) \equiv V(r(x))$ para os potenciais escalar, eletromagnético e gravitacional em geral não é possível, pois em geral não há uma forma analítica para a função inversa $r(x)$. Um caso em que o cálculo analítico para $r(x)$ é factível ocorre nos chamados limites quase extremos, que serão explorados no próximo capítulo.

Apesar de não podermos em geral obter expressões explícitas para $V(x)$, existem dois aspectos importantes que podemos tratar. Um ponto é a (possível) positividade do potencial efetivo. Um potencial que não é positivo definido produz uma dinâmica muito peculiar, conforme será visto no próximo capítulo. Outro ponto passível de análise é o comportamento assintótico de $V(x)$. Este aspecto é importante na caracterização do comportamento assintótico dos campos associados.

Vimos na seção anterior que $r(x)$ é uma função monotonicamente crescente e positiva definida (para qualquer valor de d), cuja imagem é o intervalo $]r_+, r_c[$. Isso implica que $V(r)$ (com $r \in]r_+, r_c[$) e $V(x)$ têm o mesmo número de zeros, se estes existirem. Os potenciais efetivos considerados podem ser escritos como

$$V(r) = h(r)\Omega(r) , \quad (4.68)$$

onde a função $\Omega(r)$ depende do campo e da dimensão do espaço-tempo. Como $h(r)$ é não nula e positiva entre r_+ e r_c , os zeros do potencial são dados pelos zeros da função $\Omega(r)$. Veremos a seguir que esta função é finita e não nula nos horizontes de eventos e cosmológico, o que implica que nos casos não críticos estes pontos são zeros simples da função $V(r)$. Cabe então a questão de como o potencial $V(x)$ vai a zero assintoticamente.

4.3.1 Potencial Escalar

Foi visto no capítulo 2 que o potencial efetivo escalar $V_{es}(r)$ é dado por

$$V_{es}(r) = h(r)\Omega_{es}(r) , \quad (4.69)$$

onde a função $\Omega_{es}(r)$ neste caso é:

$$\Omega_{es}(r) = \frac{\ell(\ell + d - 3)}{r^2} + \frac{d - 2}{2r}h'(r) + \frac{(d - 2)(d - 4)}{4r^2}h(r) + \lambda^2 - \frac{2(d - 4)\xi}{d - 2} \frac{q^2}{r^{2(d-2)}} . \quad (4.70)$$

Podemos reescrever $\Omega_{es}(r)$ na seguinte forma:

$$\Omega_{es}(r) = A + \frac{B}{r^2} + \frac{Cm}{r^{d-1}} - \frac{Dq^2}{r^{2(d-2)}} , \quad (4.71)$$

onde as constantes A , B , C e D são

$$A = \lambda^2 - \frac{d(d-2)}{4a^2} , \quad (4.72)$$

$$B = \ell(\ell + d - 3) + \frac{(d-2)(d-4)}{4} \geq 0 , \quad (4.73)$$

$$C = \frac{(d-2)^2}{2} > 0 , \quad (4.74)$$

$$D = \frac{(3d-8)(d-2)}{4} + \frac{2(d-4)\xi}{d-2} > 0 . \quad (4.75)$$

A determinação analítica dos zeros de $\Omega_{es}(r)$ em geral não é possível, mas algumas características destes zeros podem ser inferidas.

Um caso simples é quando a carga do buraco negro é nula e a massa associada ao campo escalar é tal que

$$\lambda^2 \geq \frac{d(d-2)}{4a^2} . \quad (4.76)$$

Nesta situação, é imediato ver que $\Omega_{es}(r)$ é positivo no intervalo $]r_+, r_c[$, e portanto $V_{es}(x) > 0$.

Se a carga do buraco negro é não nula, podemos escrever a função $\Omega_{es}(r)$ como

$$\Omega_{es}(r) = f_1(r) - f_2(r) , \quad (4.77)$$

onde $f_1(r)$ e $f_2(r)$ têm as seguintes características:

- São funções positivas para $r > 0$.
- Suas derivadas são negativas para $r > 0$, ou seja, são funções decrescentes.
- Suas derivadas segundas são positivas para $r > 0$.

Estas propriedades implicam que, se existe um ponto $r = r_*$ em que $f_1(r_*) = f_2(r_*)$, então este ponto é único. Se $q = 0$, a função $f_2(r)$ deixa de ser decrescente, mas a mesma conclusão se mantém. Dado que um possível zero de $\Omega_{es}(r)$ é único, uma condição suficiente para que

este zero se encontre no intervalo $]r_+, r_c[$ é que

$$\Omega_{es}(r_+)\Omega_{es}(r_c) < 0 . \quad (4.78)$$

Para o modo $\ell = 0$ de um campo escalar com massa nula, acoplado minimamente ($\mu = \xi = 0$), podemos mostrar que sempre existe um $r_0 \in]r_+, r_c[$, ou seja, sempre existe uma região com potencial negativo. Neste caso, temos que

$$\Omega_{es}(r) = \frac{d-2}{2r}h'(r) + \frac{(d-2)(d-4)}{4r^2}h(r) , \quad (4.79)$$

e portanto

$$\Omega_{es}(r_+) = \frac{d-2}{2r_+}h'(r_+) > 0 , \quad (4.80)$$

$$\Omega_{es}(r_c) = \frac{d-2}{2r_c}h'(r_c) < 0 , \quad (4.81)$$

Desta forma, existe uma região em que $V_{es}(x)$ é negativo.

O caso quadridimensional é o mais interessante fisicamente, e vamos tratá-lo com detalhes. Se $d = 4$, a função $\Omega_{es}(r)$ é escrita como

$$\Omega_{es}(r) = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2m}{r^3} - \frac{2q^2}{r^4} + \lambda^2 - \frac{2}{a^2} . \quad (4.82)$$

Para esta geometria, os parâmetros m , q e a estão relacionados com os zeros (r_c , r_+ , r_- e r_n) da função $h(r)$ através das equações

$$r_n + r_- + r_+ + r_c = 0 , \quad (4.83)$$

$$r_n r_- + r_n r_+ + r_n r_c + r_- r_+ + r_- r_c + r_+ r_c = -a^2 , \quad (4.84)$$

$$r_n r_- r_+ + r_n r_- r_c + r_n r_+ r_c + r_- r_+ r_c = -2ma^2 , \quad (4.85)$$

$$r_n r_- r_+ r_c = -q^2 a^2 . \quad (4.86)$$

Deste sistema de equações lineares, podemos calcular a massa, a carga e o raio cosmológico a partir dos horizontes, obtendo

$$a^2 = r_c^2 + r_+^2 + r_-^2 + r_- r_+ + r_- r_c + r_+ r_c , \quad (4.87)$$

$$2m = \frac{r_-^2(r_+ + r_c) + r_+^2(r_- + r_c) + r_c^2(r_- + r_+) + 2r_-r_+r_c}{r_c^2 + r_+^2 + r_-^2 + r_-r_+ + r_-r_c + r_+r_c}, \quad (4.88)$$

$$q^2 = \frac{r_-r_+r_c(r_- + r_+ + r_c)}{r_c^2 + r_+^2 + r_-^2 + r_-r_+ + r_-r_c + r_+r_c}. \quad (4.89)$$

Usando a expressão (4.82), escrevemos, para $\lambda^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} a^2 r_+^4 \Omega_{es}(r_+) &= a^2 r_+^2 \ell(\ell + 1) + 2ma^2 r_+ - 2q^2 a^2 + (\lambda^2 a^2 - 2)r_+^4 \\ &\geq 2ma^2 r_+ - 2q^2 a^2 - 2r_+^4. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Através das expressões (4.87)-(4.89), temos que

$$2ma^2 r_+ - 2q^2 a^2 - 2r_+^4 = (r_+^2 - r_-^2)(r_+ r_c - r_+^2) + (r_+ - r_-)(r_+ r_c^2 - r_+^3) > 0. \quad (4.91)$$

Combinando as desigualdades (4.90) e (4.91), obtemos que, independentemente do valor de ℓ :

$$\Omega_{es}(r_+) > 0. \quad (4.92)$$

Para o cálculo de $\Omega_{es}(r_c)$, a situação é mais complexa. Vamos tratar inicialmente o caso em que $\ell > 0$, de forma que

$$\begin{aligned} a^2 r_c^4 \Omega_{es}(r_c) &= a^2 r_c^2 \ell(\ell + 1) + 2ma^2 r_c - 2q^2 a^2 + (\lambda^2 a^2 - 2)r_c^4 \\ &\geq 2a^2 r_c^2 + 2ma^2 r_c - 2q^2 a^2 - 2r_c^4. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Utilizando os resultados (4.87)-(4.89), obtemos

$$\begin{aligned} &2a^2 r_c^2 + 2ma^2 r_c - 2q^2 a^2 - 2r_c^4 = \\ &= 3r_+^2 r_c^2 + 3r_-^2 r_c^2 + 3r_+ r_c^3 + 3r_- r_c^3 + 3r_+ r_c^3 + r_- r_+ r_c (2r_c - r_+ - r_-) \\ &> 0. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Combinando as desigualdades (4.93) e (4.94) vemos que se $\ell > 0$, então $\Omega_{es}(r_c) > 0$. Mas foi visto que $\Omega_{es}(r_+) > 0$, o que implica que o potencial $V_{es}(x)$ é positivo definido quando $\ell > 0$ e $d = 4$.

Se $\ell = 0$, o potencial efetivo não é necessariamente positivo definido. Para este caso, temos que

$$a^2 r_c^4 \Omega_{es}(r_c) = 2ma^2 r_c - 2q^2 a^2 + (\lambda^2 a^2 - 2)r_c^4. \quad (4.95)$$

A soma dos dois primeiros termos da expressão (4.95) é positiva:

$$2ma^2r_c - 2q^2a^2 = r_-r_c^3 + r_-^2r_c^2 + r_+r_c(r_c^2 - r_-^2) + r_+r_c(r_c - r_-) > 0. \quad (4.96)$$

Portanto, a condição $\lambda^2a^2 - 2 \geq 0$ é suficiente para que $\Omega_{es}(r_c) > 0$ e neste caso o potencial $V_{es}(x)$ é também positivo definido quando $\ell = 0$.

Assumindo agora que $\ell = \lambda = 0$, e refazendo o cálculo (4.95) com estes parâmetros, obtemos:

$$a^2r_c^4\Omega_{es}(r_c) = -r_c(r_c - r_+)(r_c^2 - r_-^2) - r_c(r_c - r_-)(r_c^2 - r_+^2) < 0. \quad (4.97)$$

Assim, se $\ell = \lambda = 0$, o potencial $V_{es}(r)$ apresenta um (único) ponto $r_* \in]r_+, r_c[$ para o qual $V_{es}(r) < 0$ se $r > r_*$. Desta forma, existe um intervalo $]x_*, +\infty[$ no qual $V_{es}(x)$ é negativo.

Mas o potencial efetivo pode ser também encarado como uma função crescente do parâmetro λ . Inferimos então que existe um valor crítico $\lambda_{crit} \in]0, \sqrt{2}/a[$ para λ na qual o potencial, com $\lambda < \lambda_{crit}$, $\ell = 0$ e $d = 4$, deixa de ser positivo definido.

4.3.2 Potenciais Eletromagnético e Gravitacional

Para o caso do potencial eletromagnético, foi mostrado no capítulo 3 que

$$\Omega_{el}(r) = \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2}. \quad (4.98)$$

É portanto imediato ver que o potencial efetivo $V_{el}(x)$ é positivo definido.

Para o casos gravitacional axial e polar, os potenciais efetivos associados são positivo definidos, conforme mostraremos a seguir. No caso Schwarzschild-de Sitter, as relações entre os parâmetros da métrica e os horizontes são:

$$a^2 = r_c^2 + r_+^2 + r_+r_c, \quad (4.99)$$

$$2m = \frac{r_+^2r_c + r_c^2r_+}{r_c^2 + r_+^2 + r_+r_c}. \quad (4.100)$$

Usando as relações (4.99)-(4.100), calculamos que:

$$r_+^3a^2\Omega_{ax}(r_+) \geq 6r_+a^2 - 6ma^2 = 3[r_+r_c^2 + r_+^2r_c^2 + 2r_+^2] > 0. \quad (4.101)$$

Para qualquer $r > r_+$, temos ainda

$$r^3 a^2 \Omega_{ax}(r) > \ell(\ell + 1)r_+ a^2 - 6ma^2 > 0 . \quad (4.102)$$

Portanto, o potencial efetivo $V_{ax}(x)$ é positivo definido.

Para o caso polar, a demonstração é análoga. Usando a expressão para o potencial efetivo $V_{po}(r)$ apresentada no capítulo 3, temos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} a^2 r_+^3 (3m + cr_+)^2 \Omega_{po}(r_+) \\ & > 9m^3 a^2 + 12ma^2 r_+^2 + 12ma^2 r_+^3 + 9m^2 r_+ (2a^2 - r_+^2) \\ & = 9m^3 a^2 + 12ma^2 r_+^2 + 12ma^2 r_+^3 + 9m^2 r_+ (2r_c^2 + r_+ + 2r_+ r_c) > 0 . \end{aligned} \quad (4.103)$$

Do mesmo modo que no potencial gravitacional axial, se $r > r_+$ então

$$\frac{1}{2} a^2 r^3 (3m + cr)^2 \Omega_{po}(r) > \frac{1}{2} a^2 r_+^3 (3m + cr_+)^2 \Omega_{po}(r_+) > 0 , \quad (4.104)$$

e desta forma mostramos que o potencial efetivo $V_{po}(x)$ é positivo definido.

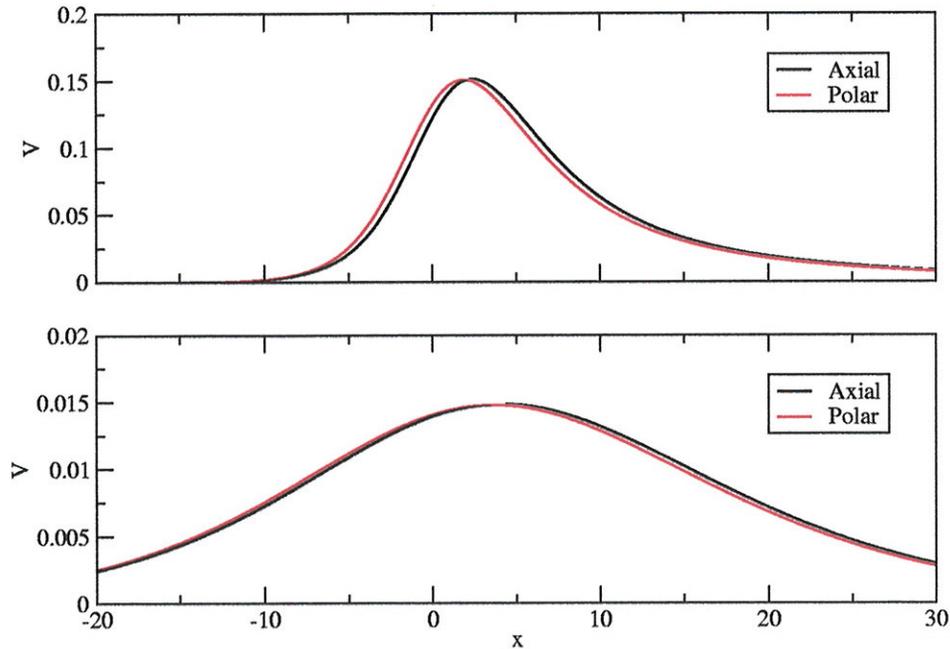


Figura 4.2: Gráficos dos potenciais efetivos gravitacionais axial e polar, para $m = 1.0$, $\ell = 2$, $\Lambda = 10^{-4}$ (acima) e $\Lambda = 10^{-1}$ (abaixo).

Um ponto a ser ressaltado é que os potenciais gravitacionais axial e polar são muito parecidos, em uma grande gama de condições. Ilustramos este fato na figura 4.2.

4.3.3 Comportamento Assintótico

Na transformação de coordenadas $r \rightarrow x(r)$, o intervalo aberto $]r_+, r_c[$ é mapeado no intervalo $] - \infty, +\infty[$. Como $V(r_+) = V(r_c) = 0$, temos que o potencial em termos da coordenada tartaruga $V(x)$ deve tender a zero assintoticamente. Veremos que esse decaimento é exponencial para os dois limites assintóticos quando o horizonte de eventos e cosmológico forem simples, o que acontece quando a constante cosmológica for positiva e a carga do buraco negro não for extrema.

No limite $x \rightarrow \infty$ o potencial efetivo — escalar, eletromagnético ou gravitacional — se comporta como:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = \Omega(r_c) \lim_{r \rightarrow r_c} \left[1 - \frac{2m}{r^{d-3}} + \frac{q^2}{r^{2d-6}} - \frac{r^2}{a^2} \right]. \quad (4.105)$$

Usando a expressão assintótica (4.41) para a função $r(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) &= \Omega(r_c) \left[1 - \frac{2m}{r_c^{d-3}} (1 - e^{-2\kappa_c x})^{-d+3} + \frac{q^2}{r_c^{2d-6}} (1 - e^{-2\kappa_c x})^{-2d+6} \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_c^2}{a^2} (1 - e^{-2\kappa_c x})^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Levando em conta que as exponenciais por hipótese são pequenas, já que estamos no limite de x grande, ficamos com

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) &= \Omega(r_c) \left[1 - \frac{2m}{r_c^{d-3}} (1 + (d-3)e^{-2\kappa_c x}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q^2}{r_c^{2d-6}} (1 + (2d-6)e^{-2\kappa_c x}) - \frac{r_c^2}{a^2} (1 - 2e^{-2\kappa_c x}) \right] \\ &= \Omega(r_c)h(r_c) + \Omega(r_c) \left[-\frac{2(d-3)m}{r_c^{d-3}} + \frac{2(d-3)q^2}{r_c^{2d-6}} + \frac{2r_c^2}{a^2} \right] e^{-2\kappa_c x}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Usando o fato que $h(r_c) = 0$, obtemos o limite de $V(x)$ para x grande

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = 2\Omega(r_c) \left[-\frac{(d-3)m}{r_c^{d-3}} + \frac{(d-3)q^2}{r_c^{2d-6}} + \frac{r_c^2}{a^2} \right] e^{-2\kappa_c x}. \quad (4.108)$$

De maneira análoga, podemos obter o limite assintótico de $V(x)$ para $x \rightarrow -\infty$. Usando (4.38), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = \Omega(r_+) & \left[1 - \frac{2m}{r_+^{d-3}} (1 + e^{2\kappa_+ x})^{-d+3} \right. \\ & \left. + \frac{q^2}{r_+^{2d-6}} (1 + e^{2\kappa_+ x})^{-2d+6} - \frac{r_+^2}{a^2} (1 - e^{2\kappa_+ x})^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Como estamos no limite $x \rightarrow -\infty$, e lembrando que $h(r_+) = 0$, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = 2\Omega(r_+) \left[\frac{(d-3)m}{r_+} - \frac{(d-3)q^2}{r_+^2} - \frac{r_+^2}{a^2} \right] e^{2\kappa_+ x}. \quad (4.110)$$

Conforme visto, se $\Omega(r_c)$ é negativo, o potencial efetivo $V_{es}(x)$ é negativo no intervalo $]x_*, \infty[$, para algum $x_* \in \mathbb{R}$. Neste caso, o decaimento exponencial para $x \rightarrow \infty$ se mantém, com a diferença de que o potencial vai a zero negativamente.

Em todos os casos discutidos até agora, o decaimento do potencial efetivo é sempre exponencial. Entretanto, existem situações limite em que o decaimento têm outra natureza. O caso notável é quando a constante cosmológica é nula. Nesta situação, não existe um horizonte cosmológico. O comportamento assintótico de $V(x)$ para $x \rightarrow -\infty$ continua sendo exponencial, e conforme esperado, o limite com $x \rightarrow \infty$ muda. Usando o resultado (4.67), temos que para o campo escalar (em dimensão arbitrária)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V_{es}(x) = \mu^2 + \frac{4\ell(\ell + d - 3) + (d - 2)(d - 4)}{4x^2} + O(x^{-3}), \quad (4.111)$$

enquanto que para os campos eletromagnético, gravitacional axial e polar:

$$V_{el}(x) = V_{ax}(x) = V_{po}(x) = \frac{\ell(\ell + 1)}{x^2} + O(x^{-3}). \quad (4.112)$$

Um ponto interessante é que a transição do decaimento exponencial (no caso $\Lambda > 0$) para o decaimento tipo lei de potência (no caso $\Lambda = 0$) é em certo sentido suave. Quando Λ é diferente de zero porém muito pequeno já é observado uma região com comportamento tipo lei de potência, embora o decaimento final seja exponencial. Veremos no capítulo 6 que este tipo de transição também acontece no comportamento assintótico dos campos. Na figura 4.3, ilustramos as características do potencial efetivo escalar, com a constante cosmológica tendendo a zero.

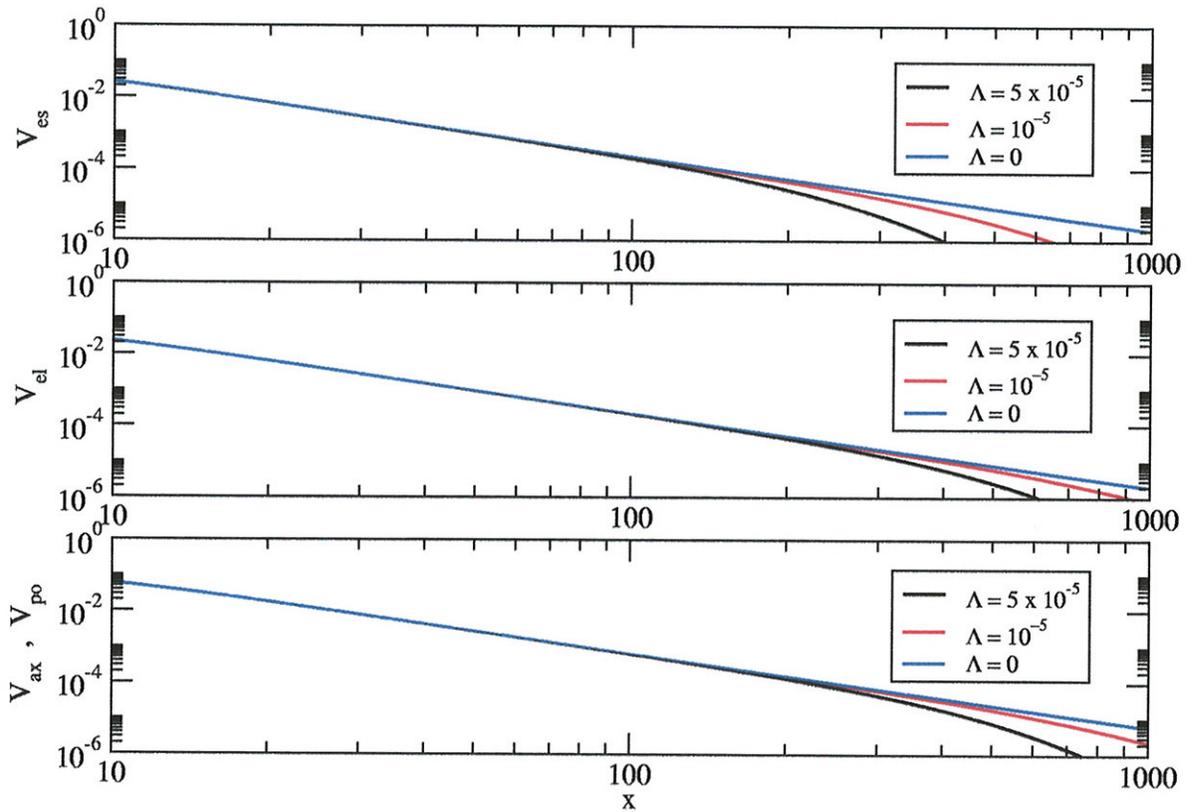


Figura 4.3: (acima) Gráfico log-log do potencial efetivo escalar com $\ell = 1$. (centro) Gráfico log-log do potencial efetivo eletromagnético com $\ell = 1$. (abaixo) Gráfico log-log do potencial efetivo gravitacional axial com $\ell = 2$. Para todas as curvas $m = 1.0$.

4.4 Modos Quasi-Normais em SdS e RNds

Os comportamentos assintóticos dos potenciais efetivos no bloco T_+ das geometrias assintoticamente planas ou de Sitter são similares. Para estes casos, os potenciais tendem a zero para $x \rightarrow \infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, e os campos se propagam livremente nestes limites. Esta é uma indicação de que a estrutura assintótica de T_+ é a mesma com $\Lambda = 0$ ou $\Lambda > 0$. Não pretendemos fazer uma análise detalhada da estrutura T_+ nesta seção, mas apenas esboçá-la. A idéia é mostrar que ela é idêntica ao bloco T_+ no caso assintoticamente plano, para qualquer dimensão. Veremos no capítulo 7 que quando $\Lambda < 0$, o bloco T_+ muda drasticamente.

Existe um procedimento bem definido para a análise da estrutura assintótica de variedades, que no caso das geometrias simetricamente esféricas é bem sistematizado [44]. A partir da coordenada radial tartaruga, definimos as coordenadas nulas u e v da maneira usual, conforme apresentado no capítulo 2. Neste sistema de coordenadas, o horizonte de eventos passado é mapeado em

$$\begin{aligned} r \rightarrow r_+ &\implies x \rightarrow -\infty &\implies u \rightarrow \text{const.} \\ t \rightarrow -\infty &\implies t \rightarrow -\infty &\implies v \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (4.113)$$

O horizonte de eventos futuro é mapeado em

$$\begin{aligned} r \rightarrow r_+ &\implies x \rightarrow -\infty &\implies u \rightarrow \infty \\ t \rightarrow +\infty &\implies t \rightarrow +\infty &\implies v \rightarrow \text{const.} \end{aligned} \quad (4.114)$$

O horizonte cosmológico passado é mapeado em

$$\begin{aligned} r \rightarrow r_c &\implies x \rightarrow +\infty &\implies u \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow -\infty &\implies t \rightarrow -\infty &\implies v \rightarrow \text{const.} \end{aligned} \quad (4.115)$$

E o horizonte cosmológico futuro é mapeado em

$$\begin{aligned} r \rightarrow r_c &\implies x \rightarrow +\infty &\implies u \rightarrow \text{const.} \\ t \rightarrow +\infty &\implies t \rightarrow +\infty &\implies v \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (4.116)$$

Para estudar as propriedades globais da subvariedade T_+ , imergimos esta subvariedade em uma nova variedade com fronteira, definindo U e V como:

$$\begin{aligned} U &= \arctan(u) & -\frac{\pi}{2} \leq U \leq \frac{\pi}{2} \\ V &= \arctan(v) & -\frac{\pi}{2} \leq V \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (4.117)$$

Neste sistema de coordenadas, os horizontes passam a tomar valores finitos em U e V . O horizonte de eventos passado fica

$$\begin{aligned} u \rightarrow \text{const.} \\ v \rightarrow -\infty \end{aligned} \implies \begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq U < \frac{\pi}{2} \\ V = -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (4.118)$$

O horizonte de eventos futuro fica

$$\begin{aligned} u \rightarrow +\infty \\ v \rightarrow \text{const.} \end{aligned} \implies \begin{aligned} U = \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq V < \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (4.119)$$

O horizonte cosmológico passado fica

$$\begin{aligned} u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow \text{const.} \end{aligned} \implies \begin{aligned} U = -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq V < \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (4.120)$$

E o horizonte cosmológico futuro fica

$$\begin{aligned} u \rightarrow \text{const.} \\ v \rightarrow \infty \end{aligned} \implies \begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq U < \frac{\pi}{2} \\ V = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (4.121)$$

A partir das coordenadas U e V , traçamos o diagrama de Carter-Penrose da região entre o horizonte de eventos e o horizonte cosmológico, apresentado na figura 4.4 a seguir. Esse diagrama é válido para qualquer valor de d .

Em termos do comportamento assintótico das possíveis soluções da equação homogênea (3.55), temos quatro possibilidades. São tomadas as soluções com o seguinte comportamento:

$$f_-(s, x) \propto \begin{cases} e^{sx} & x \rightarrow -\infty \\ A_{in}(s)e^{sx} + A_{out}(s)e^{-sx} & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (4.122)$$

$$f_+(s, x) \propto \begin{cases} B_{in}(s)e^{sx} + B_{out}(s)e^{-sx} & x \rightarrow -\infty \\ e^{-sx} & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (4.123)$$

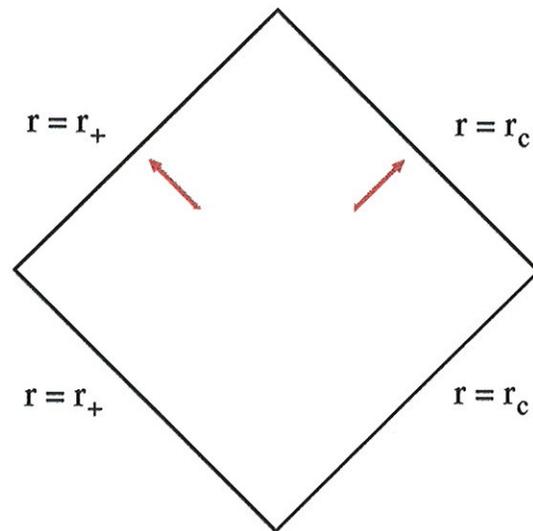


Figura 4.4: Diagrama de Carter-Penrose da região entre o horizonte de eventos e o horizonte cosmológico, nas geometrias Schwarzschild-de Sitter e Reissner-Nordström-de Sitter. As setas indicam as condições de contorno quasi-normais.

O Wronskiano associado às soluções $f_+(s, x)$ e $f_-(s, x)$ pode ser imediatamente calculado:

$$W(s) = -2sA_{in}(s). \quad (4.124)$$

Do fato de que a função $W(s)$ é uma constante em x , observa-se que as diversas constantes nas expressões (7.76) e (7.77) não são independentes. A função de Green obtida a partir das funções $f_+(s, x)$ e $f_-(s, x)$ é denominada função de Green retardada, denotada por \hat{G}^{ret} .

Conforme discutido no capítulo 3, as frequências quasi-normais são os valores complexos de s em que o Wronskiano destas duas funções se anula. Esta escolha é a mesma feita para o caso assintoticamente plano. Para campo nas geometrias assintoticamente anti-de Sitter uma outra escolha deve ser tomada, devido ao comportamento assintótico diferente na região exterior ao horizonte de eventos.

Capítulo 5

Buracos Negros com Constante Cosmológica Quase Extrema

5.1 Buracos Negros Quase Extremos

No capítulo anterior, foram apresentadas os potenciais efetivos associados a diversos campos de interesse em geometrias esféricas. Mas conforme visto, a determinação analítica destes potenciais em termos da coordenada tartaruga não foi possível. Em geral, somos forçados a recorrer a técnicas numéricas neste ponto. Entretanto, em pelo menos um caso limite o cálculo explícito dos potenciais em função de x é factível. Neste capítulo, abordaremos este regime — os chamados buracos negros quase extremos — obtendo inclusive expressões exatas para as frequências quasi-normais.

Vamos inicialmente introduzir as geometrias esféricas quase extremas. Estamos lidando com métricas esfericamente simétricas, na forma

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + h(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_{d-2}^2 . \quad (5.1)$$

Conforme visto, as métricas Schwarzschild-de Sitter e Reissner-Nordström-de Sitter satisfazem às seguintes condições:

- A função $h(r)$ possui pelo menos duas raízes positivas r_1 e r_2 ($r_1 < r_2$).
- A função $h(r)$ é lisa no intervalo $]r_1, r_2[$, e existe um único ponto extremo $r_0 \in]r_1, r_2[$.

- As raízes r_1 e r_2 são simples.
- Existe um limite quase extremo — uma região no espaço de parâmetros da métrica em que as raízes r_1 e r_2 estão arbitrariamente próximas.

Se as condições acima são satisfeitas, a geometria tratada é dita quase extrema. Neste caso, estamos interessados na subvariedade dada pelo bloco

$$T_1 = \{(t, r, \theta_1, \dots, \theta_{d-2}), r_1 < r < r_2\} . \quad (5.2)$$

Definimos então o parâmetro adimensional δ como

$$\delta = \frac{r_2 - r_1}{r_1} . \quad (5.3)$$

Este parâmetro assume valores deste zero, correspondendo ao limite extremo, até infinito, associado à geometria Reissner-Nordström pura. Em termos de δ , o limite quase extremo corresponde a

$$0 < \delta \ll 1 . \quad (5.4)$$

É conveniente tomarmos como parâmetros fundamentais os horizontes r_1 e r_2 e a gravidade superficial κ_1 . Assumindo que r_1 e r_2 são zeros simples, a função $h(r)$ pode ser escrita como

$$h(r) = (r_2 - r)(r - r_1)R(r) . \quad (5.5)$$

No intervalo $]r_1, r_2[$, a função $R(r)$ é não nula. Expandimos a função $h(r)$ em uma série de Taylor em torno do ponto r_0^{ap} , definido como o ponto médio entre r_1 e r_2 :

$$r_0^{ap} = \frac{r_1 + r_2}{2} . \quad (5.6)$$

No limite quase extremo, aproximamos a função $h(r)$ como

$$h(r) = h(r_0^{ap}) + r_1 \left. \frac{dh(r)}{dr} \right|_{r=r_0^{ap}} \left(\frac{r - r_0^{ap}}{r_1} \right) + \frac{r_1^2}{2} \left. \frac{d^2h(r)}{dr^2} \right|_{r=r_0^{ap}} \left(\frac{r - r_0^{ap}}{r_1} \right)^2 + O(\delta^3) . \quad (5.7)$$

Desenvolvendo os termos da expressão anterior, temos que

$$h(r_0^{ap}) = (r_2 - r_0^{ap})(r_0^{ap} - r_1^{ap})R(r_0^{ap}) = \left(\frac{r_2 - r_1}{2} \right) R(r_0^{ap})^2 , \quad (5.8)$$

$$r_1 \left. \frac{dh(r)}{dr} \right|_{r=r_0^{\text{ap}}} \left(\frac{r-r_0}{r_1} \right) = 0 + O(\delta^3) , \quad (5.9)$$

$$\frac{r_1^2}{2} \left. \frac{d^2h(r)}{dr^2} \right|_{r=r_0^{\text{ap}}} \left(\frac{r-r_0}{r_1} \right)^2 = -R(r_0)(r-r_0)^2 + O(\delta^3) . \quad (5.10)$$

Através das expressões (5.8)-(5.10) acima, escrevemos a função $h(r)$ como

$$h(r) = R(r_0)(r_2 - r)(r - r_1) + O(\delta^3) \quad (5.11)$$

A partir da aproximação (5.5) para a função $h(r)$, a coordenada tartaruga $x(r)$ fica

$$x(r) = -\frac{1}{R(r_0)(r_2 - r_1)} \ln(r_2 - r) + \frac{1}{R(r_0)(r_2 - r_1)} \ln(r - r_1) + O(\delta^3) , \quad (5.12)$$

de maneira que a constante $R(r_0)$ é expressa em termos de k_1 como

$$R(r_0) = \frac{2\kappa_1}{r_2 - r_1} . \quad (5.13)$$

Usando os resultados (5.12) e (5.13), a função $x(r)$ pode ser simplificada para

$$x(r) = \frac{1}{2\kappa_1} \ln \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r} \right) + O(\delta^3) . \quad (5.14)$$

A partir da expressão obtida para $x(r)$, o cálculo analítico da função $r(x)$ é factível. Invertendo a relação (5.14), obtemos que

$$r(x) = \frac{r_1 + r_2 e^{2\kappa_1 x}}{1 + e^{2\kappa_1 x}} + O(\delta^3) . \quad (5.15)$$

Com a forma explícita para $r(x)$, podemos escrever a função $h(x)$. Substituindo (5.15) em (5.11), e usando (5.13), calculamos

$$h(x) = \frac{2\kappa_1}{r_2 - r_1} \frac{(r_2 + r_2 e^{2\kappa_1 x} - r_1 - r_2 e^{2\kappa_1 x})(r_1 + r_2 e^{2\kappa_1 x} - r_1 - r_1 e^{2\kappa_1 x})}{(1 + e^{2\kappa_1 x})^2} + O(\delta^3) , \quad (5.16)$$

que por sua vez pode ser simplificada para

$$h(x) = \frac{(r_2 - r_1)\kappa_1}{2 \cosh^2(\kappa_1 x)} + O(\delta^3) . \quad (5.17)$$

A expressão (5.17) é bastante geral. Ao contrário do caso RN, a métrica RNdS apresenta dois possíveis limites quase extremos: $r_- \approx r_+$ e $r_+ \approx r_c$. Apesar dos resultados apresentados nesta seção poderem ser aplicados nos dois limites, estamos interessados principalmente no segundo caso.

Para a geometria Schwarzschild-de Sitter, podemos obter expressões para $r(x)$ e $h(x)$ em termos dos parâmetros m e Λ . Conforme visto no capítulo anterior, o espaço de parâmetros da métrica SdS está bem caracterizado. Definimos a constante

$$\bar{\delta} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{a^{2(d-3)}} \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}}}, \quad (5.18)$$

e ao contrário do parâmetro δ , observamos que $\bar{\delta}$ está restrita ao intervalo $[0, 1]$, se a geometria descreve um buraco negro. Em termos deste parâmetro, o limite quase extremo é dado por como

$$0 < \bar{\delta} \ll 1. \quad (5.19)$$

Outro parâmetro natural que pode ser definido, e que será usado a seguir, é dado por

$$\delta' = \frac{r_c - r_+}{a}. \quad (5.20)$$

Através da constante δ' , o limite quase extremo fica

$$0 < \delta' \ll 1. \quad (5.21)$$

Os limites (5.19) e (5.21) são equivalentes, no sentido de que um limite implica no outro. Veremos mais a seguir que os parâmetros $\bar{\delta}$ e δ são proporcionais em primeira ordem.

Na geometria Schwarzschild-de Sitter, a função $h(r)$ possui um máximo local no intervalo $]r_+, r_c[$. Este ponto, denotado por r_0 , pode ser expresso em termos dos parâmetros m e a como

$$r_0 = [(d-3)ma^2]^{\frac{1}{d-1}}. \quad (5.22)$$

A estratégia no caso SdS quase extremo é expandir a função $h(r)$ em torno do ponto r_0 . Isso porque este ponto pode ser calculado em termos de m e a , e estamos interessados em uma expressão final em termos destes parâmetros. Fazendo a expansão em série de Taylor, temos

$$h(r) = h(r_0) + \frac{a^2}{2} \left. \frac{d^2 h(r)}{dr^2} \right|_{r=r_0} \left(\frac{r - r_0}{a} \right)^2 + O(\delta'^3). \quad (5.23)$$

Usando a forma específica da função $h(r)$, obtemos que

$$h(r_0) = 1 - \frac{2m}{[(d-3)ma^2]^{\frac{d-3}{d-1}}} - \frac{[(d-3)ma^2]^{\frac{2}{d-1}}}{a^2} = 1 - \left[\frac{m^2}{a^{2(d-3)}} \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}} \right]^{\frac{1}{d-1}}. \quad (5.24)$$

Em termos da constante $\bar{\delta}$, escrevemos $h(r_0)$ como

$$h(r_0) = 1 - (1 - \bar{\delta}^2)^{\frac{1}{d-1}}. \quad (5.25)$$

Por outro lado, é imediato que

$$\frac{1}{2}a^2 \left. \frac{d^2 h(r)}{dr^2} \right|_{r=r_0} = -\frac{(3-d)(2-d)ma^2}{r_0^{d-1}} - 1 = -(d-1). \quad (5.26)$$

Escrevemos desta forma a função $h(r)$ como

$$h(r) = 1 - (1 - \bar{\delta}^2)^{\frac{1}{d-1}} - (d-1) \frac{(r-r_0)^2}{a^2} + O(\delta'^3). \quad (5.27)$$

Introduzindo as constantes r_c^{ap} e r_+^{ap} , podemos reescrever a expressão anterior na forma

$$h(r) = \frac{d-1}{a^2} (r_c^{ap} - r)(r - r_+^{ap}) + O(\delta'^3), \quad (5.28)$$

onde r_c^{ap} e r_+^{ap} são dadas por

$$r_c^{ap} = r_0 + a \sqrt{\frac{1 - (1 - \bar{\delta}^2)^{\frac{1}{d-1}}}{d-1}} = a \left(\sqrt{\frac{d-3}{d-1}} + \frac{\bar{\delta}}{d-1} \right) + O(\delta'^2), \quad (5.29)$$

$$r_+^{ap} = r_0 - a \sqrt{\frac{1 - (1 - \bar{\delta}^2)^{\frac{1}{d-1}}}{d-1}} = a \left(\sqrt{\frac{d-3}{d-1}} - \frac{\bar{\delta}}{d-1} \right) + O(\delta'^2). \quad (5.30)$$

A partir das expressões para os horizontes, podemos calcular a relação entre os parâmetros δ' e $\bar{\delta}$ como

$$\delta' = \frac{r_c^{ap} - r_+^{ap}}{a} + O(\delta'^2) = \frac{\bar{\delta}}{d-1} + O(\bar{\delta}^2). \quad (5.31)$$

Ou seja, $\bar{\delta}$ e δ' são proporcionais em primeira ordem. As expansões anteriores, em que o erro estava expresso em termos de δ' , podem ser reescritas em termos de $\bar{\delta}$.

As constantes r_+^{ap} e r_c^{ap} são aproximações para os horizontes da geometria SdS. É ilustrativo compará-las com as expressões exatas, nos casos em que a determinação analítica destes horizontes é possível.

O caso mais simples ocorre com $d = 5$, onde os horizontes de eventos e cosmológicos são dados pelos zeros da equação

$$r^4 - a^2 r^2 + 2ma^2 = 0, \quad (5.32)$$

que podem ser imediatamente calculados

$$r_c = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{8m}{a^2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(1 + \sqrt{1 - (1 - \bar{\delta}^2)^{1/2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.33)$$

$$r_+ = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8m}{a^2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(1 - \sqrt{1 - (1 - \bar{\delta}^2)^{1/2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.34)$$

sendo reais, positivos e distintos no caso de $\bar{\delta} < 1$.

No limite de $\bar{\delta}$ muito pequeno, temos que

$$\sqrt{1 - (1 - \bar{\delta}^2)^{1/2}} \approx \sqrt{1 - 1 + \frac{\bar{\delta}^2}{2} + O(\bar{\delta}^2)} \approx \frac{\bar{\delta}}{\sqrt{2}} + O(\bar{\delta}^2), \quad (5.35)$$

de forma que os horizontes são aproximados por

$$r_c = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\bar{\delta}}{\sqrt{2}} + O(\bar{\delta}^2) \right)^{\frac{1}{2}} = a \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\bar{\delta}}{4} \right) + O(\bar{\delta}^2). \quad (5.36)$$

$$r_+ = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\bar{\delta}}{\sqrt{2}} + O(\bar{\delta}^2) \right)^{\frac{1}{2}} = a \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\bar{\delta}}{4} \right) + O(\bar{\delta}^2), \quad (5.37)$$

o que está perfeitamente de acordo com as expressões (5.33) e (5.34). Outro caso em que as expressões podem ser comparadas com resultados exatos é quando $d = 4$.

A partir do resultado (5.28), a expressão para a função $x(r)$ pode ser calculada, da mesma forma como foi feito no caso geral,

$$x(r) = \frac{1}{2\kappa_+^{ap}} \ln \left(\frac{r - r_+}{r_c - r} \right) + O(\bar{\delta}^3), \quad (5.38)$$

onde a constante κ_+^{ap} é dada por

$$\kappa_+^{ap} = \frac{\bar{\delta}}{a} = \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{a^{2(d-2)}} \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}}} + O(\bar{\delta}^2) . \quad (5.39)$$

Ela pode ser interpretada como uma aproximação para a gravidade superficial κ_+ . No limite $\bar{\delta} \rightarrow 0$, vemos que κ_+^{ap} tende a zero conforme esperado.

Podemos agora calcular as expressões para a função $r(x)$ e $h(x)$ em termos dos parâmetros da métrica m e Λ . Para $r(x)$, temos

$$r(x) = \frac{e^{2\kappa_+^{ap}x} r_c^{ap} + r_+^{ap}}{1 + e^{2\kappa_+^{ap}x}} + O(\bar{\delta}^3) . \quad (5.40)$$

Com a expressão anterior, calculamos facilmente

$$h(x) = \frac{\bar{\delta}^2}{d-1} \frac{1}{\cosh^2(\kappa_+^{ap}x)} + O(\bar{\delta}^3) . \quad (5.41)$$

5.2 Potencial Efetivo Escalar

Conforme visto nos capítulos 3 e 4, um campo escalar real massivo, se propagando na região externa de um buraco negro SdS ou RNdS, é caracterizado pelo potencial efetivo

$$V_{es}(r) = h(r)\Omega_{es}(r) , \quad (5.42)$$

onde

$$\begin{aligned} \Omega_{es}(r) = & \frac{\ell(\ell+d-3)}{r^2} + \frac{d-2}{2r}h'(r) + \frac{(d-2)(d-4)}{4r^2}h(r) \\ & + \lambda^2 - \frac{2(d-4)\xi q^2}{d-2} \frac{1}{r^{2(d-2)}} . \end{aligned} \quad (5.43)$$

Estamos interessados nesta seção nos casos em que o potencial $V_{es}(x)$ é positivo definido, ou seja, quando a função $\Omega_{es}(r)$ é positiva no intervalo $]r_+, r_c[$. Conforme visto, podemos mostrar explicitamente a positividade em um grande número de situações de interesse.

Vamos expandir a função $\Omega_{es}(r)$ em torno do ponto r_0^{ap} , em ordem mais baixa do parâmetro δ . Temos então que

$$\Omega_{es}(r) = \Omega_{es}(r_0^{ap}) + O(\delta) . \quad (5.44)$$

Mas por outro lado, conforme (5.9), temos que

$$h'(r_0^{ap}) = 0 + O(\delta^2) , \quad (5.45)$$

enquanto que $h(r_0^{ap})$ é da ordem de δ , como indica a expressão (5.8). Desta forma, a função $\Omega_{es}(r)$ é aproximada por

$$\Omega_{es}(r) = \frac{\ell(\ell + d - 3)}{(r_0^{ap})^2} + \lambda^2 - \frac{2(d-4)\xi q^2}{(d-2)(r_0^{ap})^{2(d-2)}} + O(\delta) , \quad (5.46)$$

e como

$$r_0^{ap} = r_+ + O(\delta) \quad (5.47)$$

temos que em ordem mais baixa

$$\Omega_{es}(r) = \frac{\ell(\ell + d - 3)}{r_+^2} + \lambda^2 - \frac{2(d-4)\xi q^2}{(d-2)r_+^{2(d-2)}} + O(\delta) . \quad (5.48)$$

Usando os resultados (5.17) e (5.48), aproximamos o potencial efetivo $V_{es}(r)$, no limite quase extremo, por

$$V_{es}(r) = \left[\frac{\ell(\ell + d - 3)}{r_+^2} + \lambda^2 - \frac{2(d-4)\xi q^2}{(d-2)r_+^{2(d-2)}} \right] \frac{2\kappa_+(r_c - r)(r - r_+)}{r_c - r_+} + O(\delta) . \quad (5.49)$$

Através do resultado (5.15) para $r(x)$, obtemos uma expressão aproximada para o potencial efetivo em termos da coordenada tartaruga:

$$V_{es}(x) = \frac{V_{es}^0}{\cosh^2(\kappa_+ x)} + O(\delta) , \quad (5.50)$$

onde a constante V_{es}^0 , valor máximo de $V_{es}(x)$, é dada por

$$V_{es}^0 = \left[\frac{\ell(\ell + d - 3)}{r_+^2} + \lambda^2 - \frac{2(d-4)\xi q^2}{(d-2)r_+^{2(d-2)}} \right] \frac{(r_c - r_+)\kappa_+}{2} . \quad (5.51)$$

A expressão anterior demonstra que a dinâmica é caracterizada por um potencial tipo Pöschl-Teller [57].

No caso em que a carga do buraco negro é nula, podemos escrever o potencial efetivo em termos dos parâmetros da métrica m e Λ . Para isso, expandimos o potencial em torno do ponto r_0 , de forma a obter uma expressão análoga a (5.48). Usando este resultado, juntamente com (5.22), escrevemos o potencial efetivo para a geometria SdS quase extrema como

$$V_{es}(x) = \frac{V_{es}^0}{\cosh^2(\kappa_+^{ap} x)} + O(\delta), \quad (5.52)$$

onde κ_+^{ap} é dado por (5.39), e V_{es}^0 neste caso é escrito como

$$V_{es}^0 = \frac{\ell(\ell + d - 3)\bar{\delta}^2}{(d - 3)a^2} = \frac{\ell(\ell + d - 3)(\kappa_+^{ap})^2}{d - 3}. \quad (5.53)$$

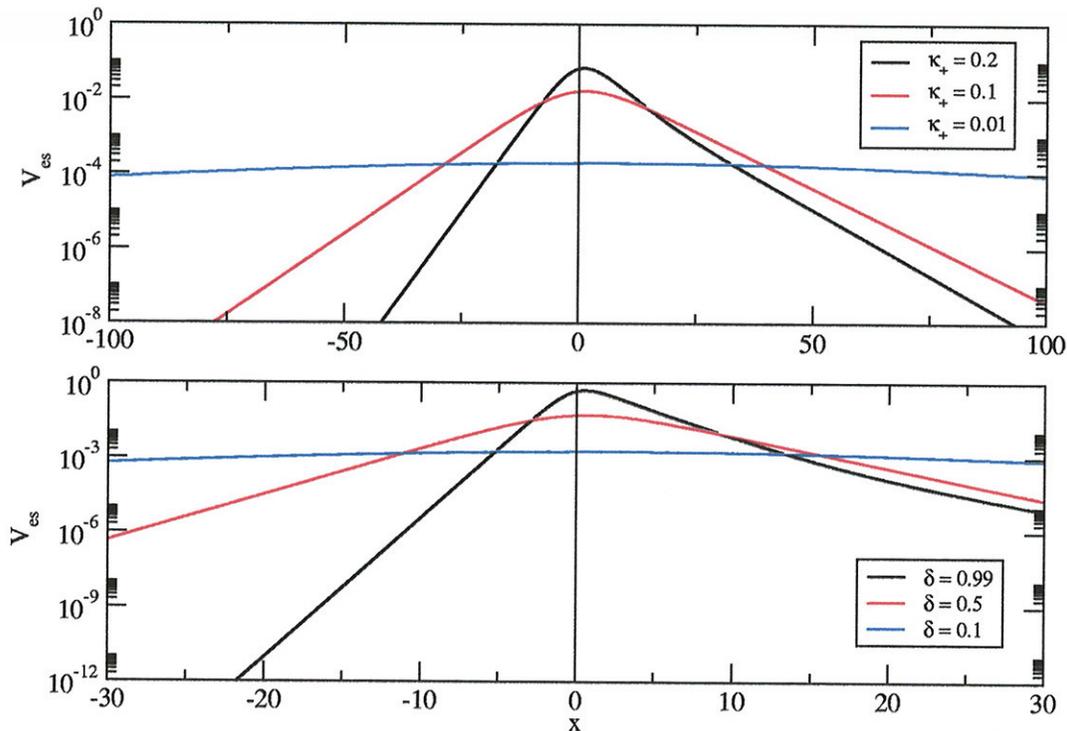


Figura 5.1: (acima) Gráfico semi-log do potencial efetivo escalar, para $d = 4, m = 1.0, q = 0.5$ e $\ell = 1$. (abaixo) Gráfico semi-log do potencial efetivo escalar, para $d = 5, m = 1.0, q = 0$ e $\ell = 1$.

As características do potencial Pöschl-Teller ajudam a entender por que (5.50) e (5.52) são boas aproximações para o potencial efetivo escalar no limite quase extremo. É fácil ver que $V_{es}(x)$ decai exponencialmente para $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow \infty$ com a mesma taxa:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V_{es}(x) = V_{es}^0 e^{-2\kappa_+ x}, \quad (5.54)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} V_{es}(x) = V_{es}^0 e^{2\kappa_+ x}. \quad (5.55)$$

Este ponto é esperado, pois foi mostrado no capítulo 4 que os potenciais efetivos decaem exponencialmente, com taxas de decaimento igual a $2\kappa_+$ e $2\kappa_c$. Mas no limite quase extremo temos que $\kappa_+ \approx \kappa_c$, de forma que os comportamentos assintóticos (5.54) e (5.55) são esperados. Ilustramos os resultados nesta seção na figura 5.1, onde são traçados as curvas de potenciais efetivos escalares, para parâmetros que se aproximam do limite quase extremo.

5.3 Modos Quasi-Normais

Os modos quasi-normais associados ao potencial tipo Pöschl-Teller foram bastante estudados [58]. As frequências quasi-normais são dadas por

$$\omega = \kappa_+ \left[\sqrt{\frac{V_{es}^0}{\kappa_+^2} - \frac{1}{4}} - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (5.56)$$

onde $n \in \{0, 1, \dots\}$ é um inteiro que rotula os modos.

Usando os resultados obtidos e a expressão (5.56), temos que as frequências quasi-normais para um campo escalar são dadas por

$$\frac{\omega^{es}}{\kappa_+} = \sqrt{\left[\frac{\ell(\ell + d - 3)}{r_+^2} + \lambda^2 - \frac{2(d-4)\xi q^2}{(d-2)r_+^{2(d-2)}} \right] \frac{r_c - r_+}{2\kappa_+} - \frac{1}{4} - i \left(n + \frac{1}{2} \right)}. \quad (5.57)$$

Se $d = 4$, obtemos um importante caso particular:

$$\frac{\omega^{es}}{\kappa_+} = \sqrt{\left[\frac{\ell(\ell + 1)}{r_+^2} + \lambda^2 \right] \frac{r_c - r_+}{2\kappa_+} - \frac{1}{4} - i \left(n + \frac{1}{2} \right)}. \quad (5.58)$$

Precisamos entretanto exigir que $\ell \neq 0$ ou $\lambda \neq 0$, pois caso contrário o potencial efetivo não seria positivo definido. No próximo capítulo veremos que para este caso específico, o comportamento do campo é bastante peculiar.

O primeiro ponto a ser comentado sobre as frequências quasi-normais no limite quase extremo é que a expressão (5.58) é qualitativamente muito parecida para qualquer dimensão ou parâmetros do buraco negro. Vemos também que a parte real da frequência, relacionada ao período de oscilação, é constante para todos os modos n , em particular no limite de amortecimento infinito ($n \rightarrow \infty$). Por outro lado, a parte imaginária da frequência, relacionada a taxa de decaimento do campo, é completamente independente dos parâmetros da geometria e até do acoplamento e da massa do campo escalar.

No caso Schwarzschild-de Sitter, o espaço de parâmetros da métrica é muito bem caracterizado. Como consequência, podemos escrever uma expressão para as frequências quasi-normais em termos de m e Λ . Usando a expressão (5.52) para o potencial efetivo $V_{es}(x)$ e o resultado (5.56), obtemos que

$$\begin{aligned} \text{Re}(\omega^{es}) = & \left[\frac{\Lambda}{3} - \frac{m^2 \Lambda^{d-2}}{3^{d-2}} \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \left[\frac{\ell(\ell+d-3)}{d-3} + \frac{3\lambda^2}{(d-1)\Lambda} - \frac{1}{4} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\text{Im}(\omega^{es}) = - \left(n + \frac{1}{2} \right) \left[\frac{\Lambda}{3} - \frac{m^2 \Lambda^{d-2}}{3^{d-2}} \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.60)$$

No caso particular $d = 4$ e $\mu = \xi = 0$, reproduzimos os resultados apresentados em [59].

Para o campo eletromagnético e para as componentes axial e polar do campo gravitacional, a situação é bastante similar ao cenário desenvolvido neste capítulo. As expressões para as frequências quasi-normais no regime quase extremo (em $d = 4$) foram obtidas em [59]. Como elas serão usadas mais adiante, apresentaremos estas expressões aqui:

$$\frac{\omega^{el}}{\kappa_+} = - \left(n + \frac{1}{2} \right) i + \sqrt{\ell(\ell+1) - \frac{1}{4}}, \quad (5.61)$$

$$\frac{\omega^{ax}}{\kappa_+} = \frac{\omega^{po}}{\kappa_+} = - \left(n + \frac{1}{2} \right) i + \sqrt{(\ell+2)(\ell-1) - \frac{1}{4}}. \quad (5.62)$$

Usando a última expressão, vemos que para a geometria SdS em quatro dimensões, as frequências quasi-normais dos campos escalar, eletromagnético e gravitacional estão relacionadas como

$$\text{Im}(\omega^{es}) = \text{Im}(\omega^{el}) = \text{Im}(\omega^{gr}) , \quad (5.63)$$

$$\text{Re}(\omega^{es}) = \text{Re}(\omega^{el}) > \text{Re}(\omega^{gr}) . \quad (5.64)$$

No próximo capítulo, exibiremos numericamente os modos quasi-normais no regime quase extremo. Veremos que os resultados deste capítulo estão em perfeito acordo com os resultados numéricos, o que torna mais confiáveis as abordagens usadas.

Capítulo 6

Propagação de Campos em Geometrias Assintoticamente de Sitter

6.1 Método Numérico e Semi-Analítico

Em geral não dispomos de soluções analíticas para a dinâmica dos campos, o que nos leva a recorrer a métodos numéricos ou semi-analíticos. Neste capítulo, serão usadas duas abordagens para o estudo da propagação dos diversos campos de interesse. As abordagens são complementares, possibilitando uma visão mais ampla do que seria possível somente com uma delas.

A primeira consiste na resolução direta das equações de movimento, encaradas como um problema de condições iniciais características. Os métodos numéricos básicos foram apresentados no capítulo 3, e serão complementados neste capítulo com informações sobre a grade numérica utilizada. A estrutura desta grade depende do caráter assintótico da geometria, sendo diferente para os casos de Sitter ou anti-de Sitter. A outra abordagem consiste na aplicação do método WKB estendido, conforme introduzido no capítulo 3. É um método semi-analítico, e oferece uma forma rápida para o cálculo das frequências quasi-normais, inclusive além dos modos fundamentais.

Conforme visto, o comportamento do campo deve ser em grande parte independente das condições iniciais usadas. Na maior parte das simulações feitas, usamos como perturbação inicial um pulso gaussiano no eixo $u = u_0$, e fazemos o campo nulo no eixo $v = v_0$:

$$\psi(u, v_0) = 0, \quad (6.1)$$

$$\psi(u_0, v) = \exp\left[\frac{(v - v_0)^2}{2\sigma}\right]. \quad (6.2)$$

Testamos diretamente se existe alguma dependência na forma particular do pulso através do uso de outras configurações iniciais alternativas. A menos de particularidades na região transiente, os resultados não apresentaram mudanças significativas.

De maneira resumida, o algoritmo numérico consiste na varredura do plano $u - v$ discretizado, onde dado três pontos calcula-se um quarto, usando as expressões (3.86) ou (3.91) apresentadas no capítulo 3. Verificamos que, para os casos assintoticamente de Sitter, ambas as expressões apresentam bom comportamento. Portanto, neste capítulo foi usado a (3.86), menos onerosa em termos de tempo de computação. A forma da grade, para os casos com geometria esférica, e assintoticamente de Sitter, são indicadas na figura 6.1 a seguir.

Durante a varredura da grade, selecionamos determinadas regiões de interesse. Por exemplo, a hiper-superfície $u = u_{max}$ corresponde ao horizonte de eventos futuro, para u_{max} suficientemente grande. Já $v = v_{max}$ corresponde ao horizonte cosmológico futuro para v_{max} suficientemente grande.

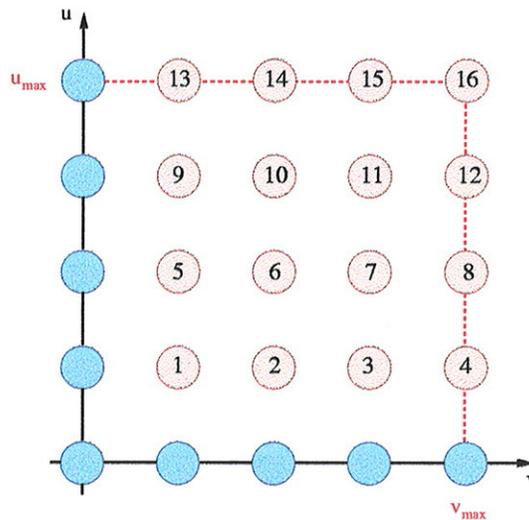


Figura 6.1: Plano $u - v$ discretizado com condições iniciais especificadas nas superfícies características. Os pontos azuis são as condições iniciais, e os pontos vermelhos são os sítios da grade a serem calculados. Uma possível varredura do plano é seguir a numeração indicada.

A grande vantagem do método numérico apresentado é que ele nos fornece uma visão ampla das possíveis formas de decaimento dos campos. Por outro lado, com este método, só podemos estimar o modo de decaimento quasi-normal fundamental — aquele com decaimento exponencial mais lento. A abordagem semi-analítica, introduzida no capítulo 3, compensa esta deficiência. Ela nos fornece uma maneira rápida, e como veremos precisa, de calcular as frequências quasi-normais para modos mais altos. Unidos dos métodos apresentados, vamos fazer uma exploração pelas possíveis configurações de campos. As características relevantes observadas serão comentadas nas seções seguintes.

6.2 Campos em Schwarzschild-de Sitter

Vamos começar tratando a propagação de campos na geometria Schwarzschild-de Sitter com $d = 4$. É o caso mais importante por diversos fatores. Em particular, é fisicamente o mais realista, sendo também possível a comparação simples entre os campos escalar não massivo, eletromagnético e gravitacional.

Por conveniência, em geral calcularemos a função de onda no horizonte de eventos futuro. Fixamos a massa em $m = 1$ sem perda de generalidade, e variamos o raio cosmológico. Partiremos do bem conhecido limite quase extremo, prosseguindo com o aumento do raio cosmológico até o limite Schwarzschild puro.

O estudo da propagação de campos no limite quase extremo foi feita no capítulo 5 com grande generalidade. É interessante começar o estudo numérico neste ponto, em que a dinâmica é mais simples. O decaimento dos diversos campos é dominado por modos quasi-normais, e dispomos de resultados analíticos para comparar com as simulações.

O método numérico apresentado nos permite o cálculo direto da função de onda. Para $\ell = 1$, a função de onda para os campos escalar não massivo e eletromagnético é mostrada a seguir. Conforme esperado, os campos tendem a coincidir no limite quase extremo. Mais ainda, é aparente que o decaimento é puramente quasi-normal. Para $\ell = 2$, podemos incluir na análise os campos gravitacionais axial e polar. As funções de onda para os diversos campos para esta componente de multipolo são exibidas na figura 6.2.

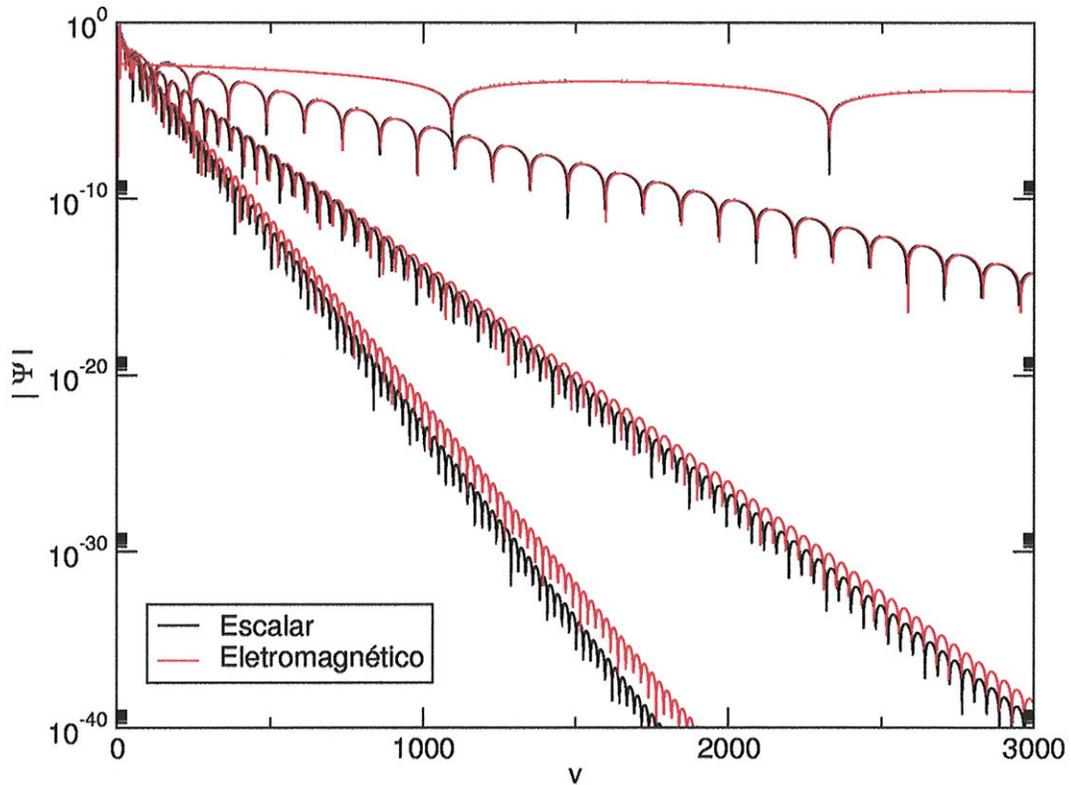


Figura 6.2: Decaimento escalar (não massivo) e eletromagnético para $\ell = 1$. O gráfico mostra quatro pares de curvas, para vários valores da constante cosmológica ($\Lambda = 0.8333, 0.1011, 0.110.1111$). A medida que Λ cresce, os pares tendem a coincidir. A massa é fixada em $m = 1.0$.

Para componentes mais altas de ℓ o comportamento do campo é qualitativamente semelhante. De fato, as características básicas dos campos vistos nas simulações são:

- A menos da parte transiente, o decaimento é dominado inteiramente pela fase quasi-normal.
- À medida em que nos aproximamos do limite quase extremo, o período de oscilação aumenta e a taxa de decaimento diminui.
- Os campos escalar e eletromagnético tendem a coincidir no limite quase extremo.
- As componentes axial e polar da parte gravitacional são sempre muito parecidas.

Os pontos acima estão em plena concordância com os resultados analíticos apresentados no capítulo 5.

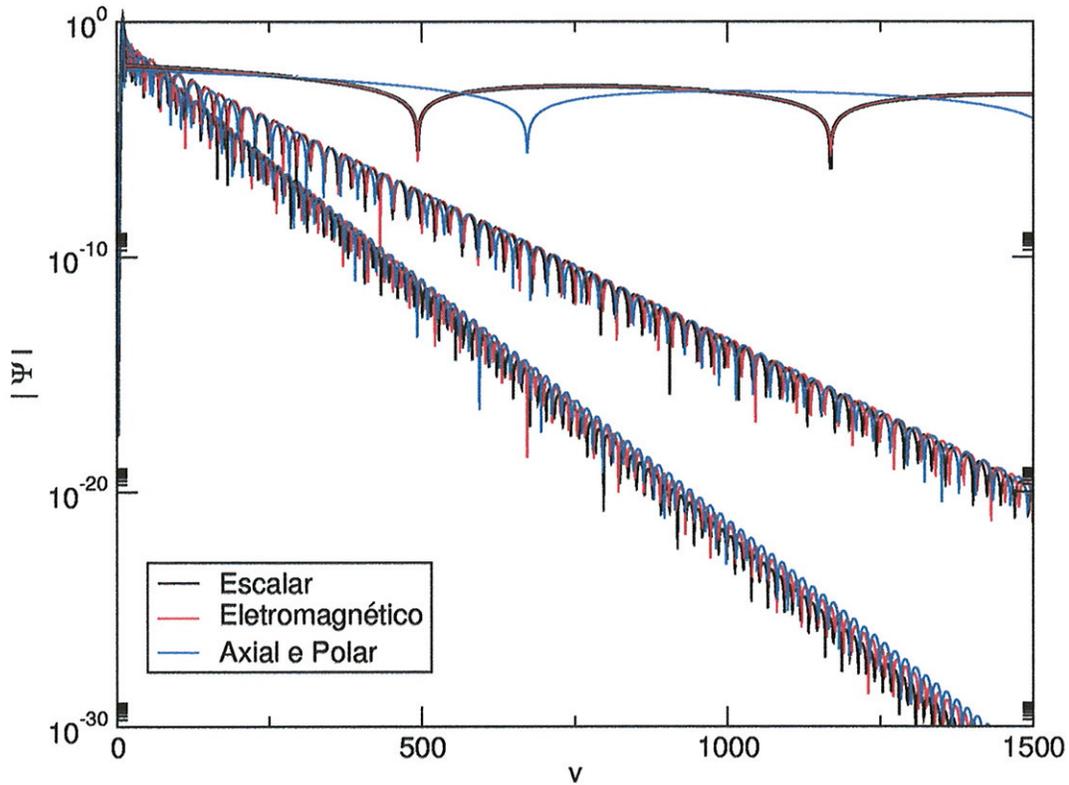


Figura 6.3: Decaimento escalar (não massivo), eletromagnético, gravitacional axial e gravitacional polar para $\ell = 2$. As curvas para os modos gravitacional axial e polar coincidem sempre, enquanto que os campos escalar e eletromagnético tendem a coincidir no limite quase extremo. Neste gráfico, a massa é fixa ($m = 1.0$), enquanto que a constante cosmológica varia ($\Lambda = 0.8333, 0.1011, 0.1111$).

Através das curvas de campo, as frequências quasi-normais podem ser estimadas. Podemos assim determinar diretamente a dependência dos modos com ℓ , e comparar os resultados obtidos com o previsto no capítulo 5, conforme ilustrado na figura 6.4.

À medida em que a separação entre os horizontes cosmológico e de eventos vai ficando clara, a gravidade superficial κ_+ vai aumentando e as expressões obtidas para o limite quase extremo deixam de ser válidas. Por exemplo, as frequências quasi-normais associadas começam a se desviar do previsto no capítulo anterior, conforme ilustrado na figuras 6.5 para $\ell = 1$ e $\ell = 2$. Para valores maiores de ℓ , o comportamento é semelhante.

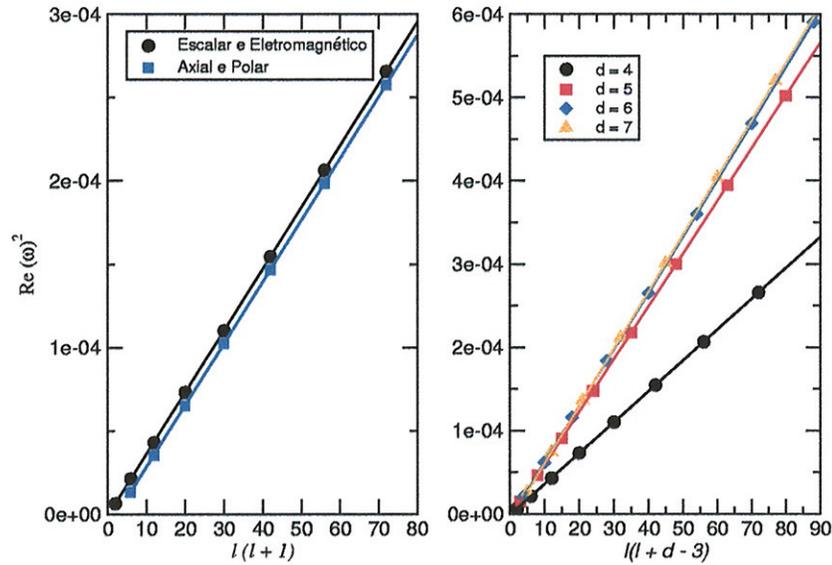


Figura 6.4: Dependência de $\text{Re}(\omega)^2$ com $l(l+d-3)$, no regime quase extremo, para os campos escalar, eletromagnético, gravitacional axial e polar (esquerda); e para campos escalares em geometrias com vários valores de d (direita). Os pontos indicam resultados numéricos e as curvas mostram os resultados analíticos. Os parâmetros são $m = 1.0$ e $\delta = 0.01$.

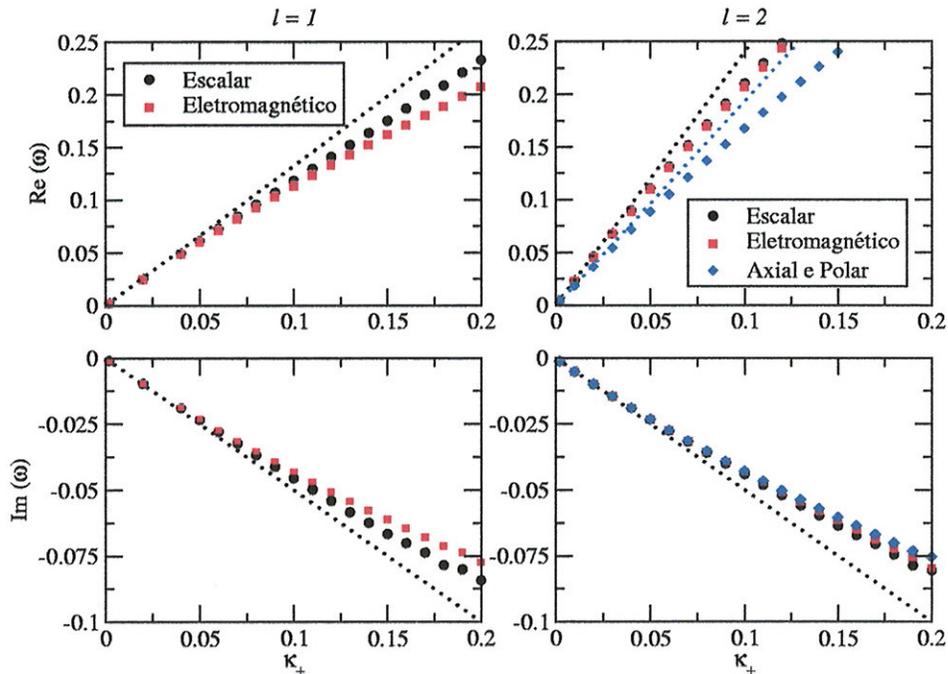


Figura 6.5: Dependência das componentes real e imaginária das freqüências quasi-normais com κ_+ , à medida em que nos afastamos do regime quase extremo. Para os gráficos a esquerda temos que $l = 1$, e para os gráficos a direita, temos que $l = 2$. A massa é mantida fixa em $m = 1.0$.

É interessante comparar os valores obtidos para os modos fundamentais usando as abordagens numéricas e semi-analíticas. Nossos resultados mostram que a concordância entre elas é boa para valores da constante cosmológica desde zero até o seu valor limite. A diferença é menor para valores de ℓ pequenos, o que é esperado, pois o cálculo numérico é melhor nesta região. Nas tabelas a seguir, ilustramos este ponto para alguns casos.

		Numérico		Semi-analítico	
ℓ	Λ	$\text{Re}(\omega)$	$-\text{Im}(\omega)$	$\text{Re}(\omega)$	$-\text{Im}(\omega)$
1	1.000E-5	2.930E-1	9.753E-1	2.911E-1	9.780E-2
	1.000E-4	2.928E-1	9.764E-02	2.910E-1	9.797E-2
	1.000E-3	2.914E-1	9.726E-02	2.896E-1	9.771E-2
	1.000E-2	2.770E-1	9.455E-02	2.753E-1	9.490E-2
	1.000E-1	8.159E-2	3.123E-2	8.144E-2	3.137E-2
2	1.000E-5	4.840E-1	9.653E-2	4.832E-1	9.680E-2
	1.000E-4	4.833E-1	8.948E-2	4.830E-1	9.677E-2
	1.000E-3	4.816E-1	8.998E-2	4.809E-1	9.643E-2
	1.000E-2	4.598E-1	8.880E-2	4.592E-1	9.290E-2
	1.000E-1	1.466E-1	3.068E-2	1.466E-1	3.070E-2
3	1.000E-5	6.769E-1	8.662E-2	6.752E-1	9.651E-2
	1.000E-4	6.754E-1	8.654E-2	6.749E-1	9.647E-2
	1.000E-3	6.732E-1	8.660E-2	6.720E-1	9.611E-2
	1.000E-2	6.437E-2	9.200E-2	6.428E-2	9.235E-2
	1.000E-1	2.091E-2	3.054E-2	2.091E-2	3.056E-2

Tabela 6.1: Comparação entre as frequências estimadas numericamente e as obtidas através do método semi-analítico para o campo escalar (não massivo). A massa é mantida fixa em $m = 1.0$.

		Numérico		Semi-analítico	
ℓ	Λ	Re(ω)	-Im(ω)	Re(ω)	-Im(ω)
1	1.000E-5	2.481E-1	9.226E-2	2.459E-1	9.310E-2
	1.000E-4	2.481E-1	9.223E-2	2.457E-1	9.307E-2
	1.000E-3	2.475E-1	9.176E-2	2.448E-1	9.270E-2
	1.000E-2	2.374E-1	8.839E-2	2.352E-1	8.896E-2
	1.000E-1	8.035E-2	3.027E-2	8.023E-2	3.033E-2
2	1.000E-5	4.577E-1	8.985E-2	4.571E-1	9.506E-2
	1.000E-4	4.575E-1	8.991E-2	4.569E-1	9.502E-2
	1.000E-3	4.559E-1	9.439E-2	4.551E-1	9.464E-2
	1.000E-2	4.371E-1	8.941E-2	4.364E-1	9.074E-2
	1.000E-1	1.458E-1	3.037E-2	1.458E-1	3.038E-2
3	1.000E-5	6.578E-1	8.365E-2	6.567E-1	9.563E-2
	1.000E-4	6.576E-1	8.349E-2	6.564E-1	9.559E-2
	1.000E-3	6.547E-1	8.399E-2	6.538E-1	9.520E-2
	1.000E-2	6.276E-1	8.852E-2	6.267E-1	9.125E-2
	1.000E-1	2.085E-1	3.039E-2	2.085E-1	3.040E-2

Tabela 6.2: Comparação entre as frequências estimadas numericamente e as obtidas através do método semi-analítico para o campo eletromagnético. A massa é mantida fixa em $m = 1.0$.

		Numérico		Semi-analítico	
ℓ	Λ	$\text{Re}(\omega)$	$-\text{Im}(\omega)$	$\text{Re}(\omega)$	$-\text{Im}(\omega)$
2	1.000E-5	3.738E-1	8.883E-2	3.731E-1	8.921E-2
	1.000E-4	3.737E-1	8.880E-2	3.730E-1	8.918E-2
	1.000E-3	3.721E-1	8.850E-2	3.715E-1	8.888E-2
	1.000E-2	3.566E-1	8.538E-2	3.560E-1	8.572E-2
	1.000E-1	1.179E-1	3.020E-2	1.179E-1	3.023E-2
3	1.000E-5	5.999E-1	8.677E-2	5.992E-1	9.272E-2
	1.000E-4	5.996E-1	8.676E-2	5.990E-1	9.269E-2
	1.000E-3	5.972E-1	8.971E-2	5.966E-1	9.234E-2
	1.000E-2	5.725E-1	8.695E-2	5.718E-1	8.874E-2
	1.000E-1	1.900E-1	3.030E-2	1.900E-2	3.032E-2
4	1.000E-5	8.106E-1	8.810E-2	8.091E-1	9.417E-2
	1.000E-4	8.102E-1	8.781E-2	8.087E-1	9.413E-2
	1.000E-3	8.070E-1	8.799E-2	8.055E-1	9.376E-2
	1.000E-2	7.733E-2	8.714E-2	7.720E-1	9.000E-2
	1.000E-1	2.564E-2	3.034E-3	2.563E-1	3.036E-2

Tabela 6.3: *Comparação entre as frequências estimadas numericamente e as obtidas através do método semi-analítico para o campo gravitacional, componentes axial e polar. A massa é mantida fixa em $m = 1.0$.*

Modos mais altos não podem (em geral) ser inferidos a partir das soluções numéricas, mas eles podem ser estudados através do método WKB estendido. À medida em que a constante cosmológica diminui, as curvas “inflam”, ou mais precisamente a magnitude das frequências aumenta, até o limite em que a geometria é assintoticamente plana. O comportamento dos modos é ilustrado na figura 6.6 a seguir. Para o campo eletromagnético, o comportamento é similar.

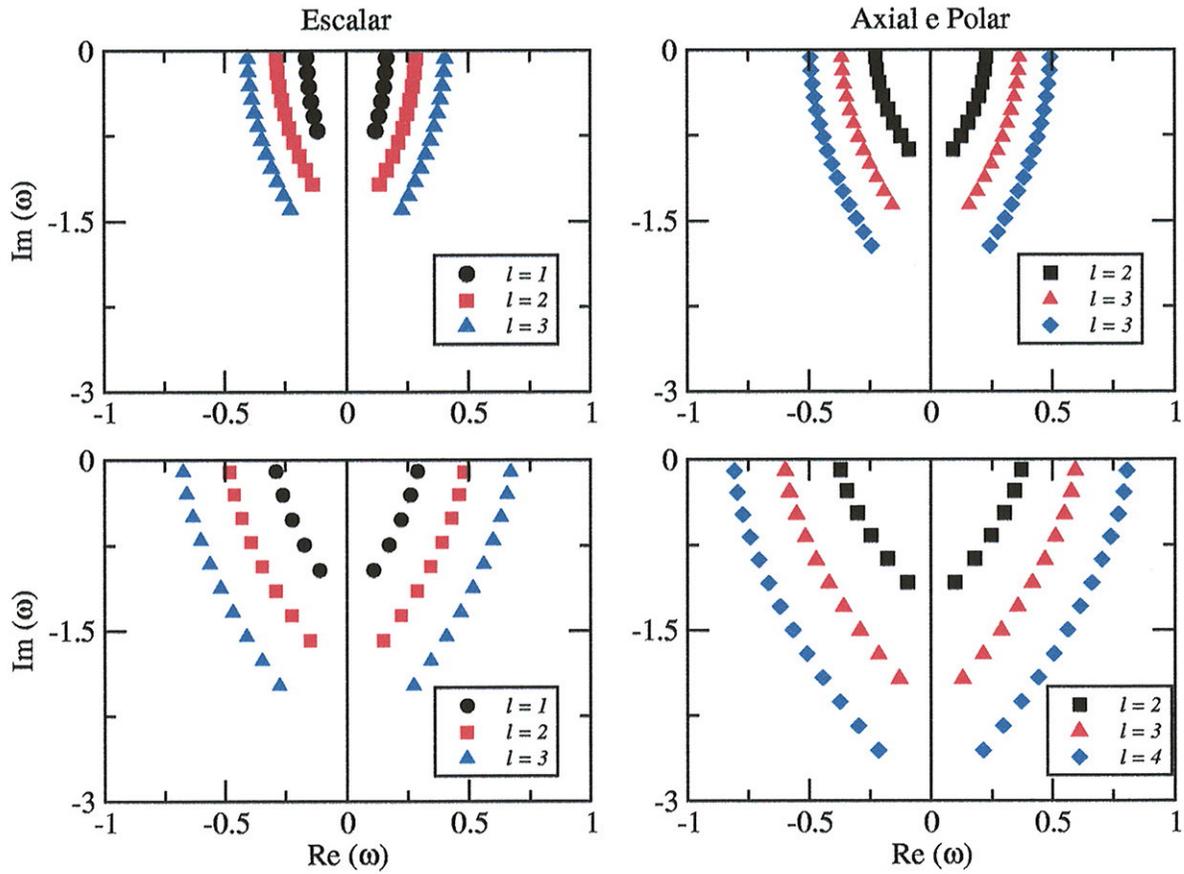


Figura 6.6: Diagramas $\text{Re}(\omega) - \text{Im}(\omega)$ para os campos escalar, gravitacional axial e polar, para vários valores de l . Para os gráficos acima temos que $\Lambda = 0.1$ e $m = 1.0$. Para os gráficos abaixo, temos que $\Lambda = 10^{-3}$ e $m = 1.0$.

Mais importante, começam a aparecer efeitos qualitativamente diferentes quando nos afastamos do limite quase extremo. Especificamente, para Λ suficientemente pequeno, o comportamento assintótico deixa de ser dominado pelo modo quasi-normal. Além da componente quasi-normal, surge uma cauda exponencial. Esta característica nova é ilustrada na figura 6.7. É bastante interessante o fato de que a cauda exponencial aparece também nos casos eletromagnético e gravitacional.

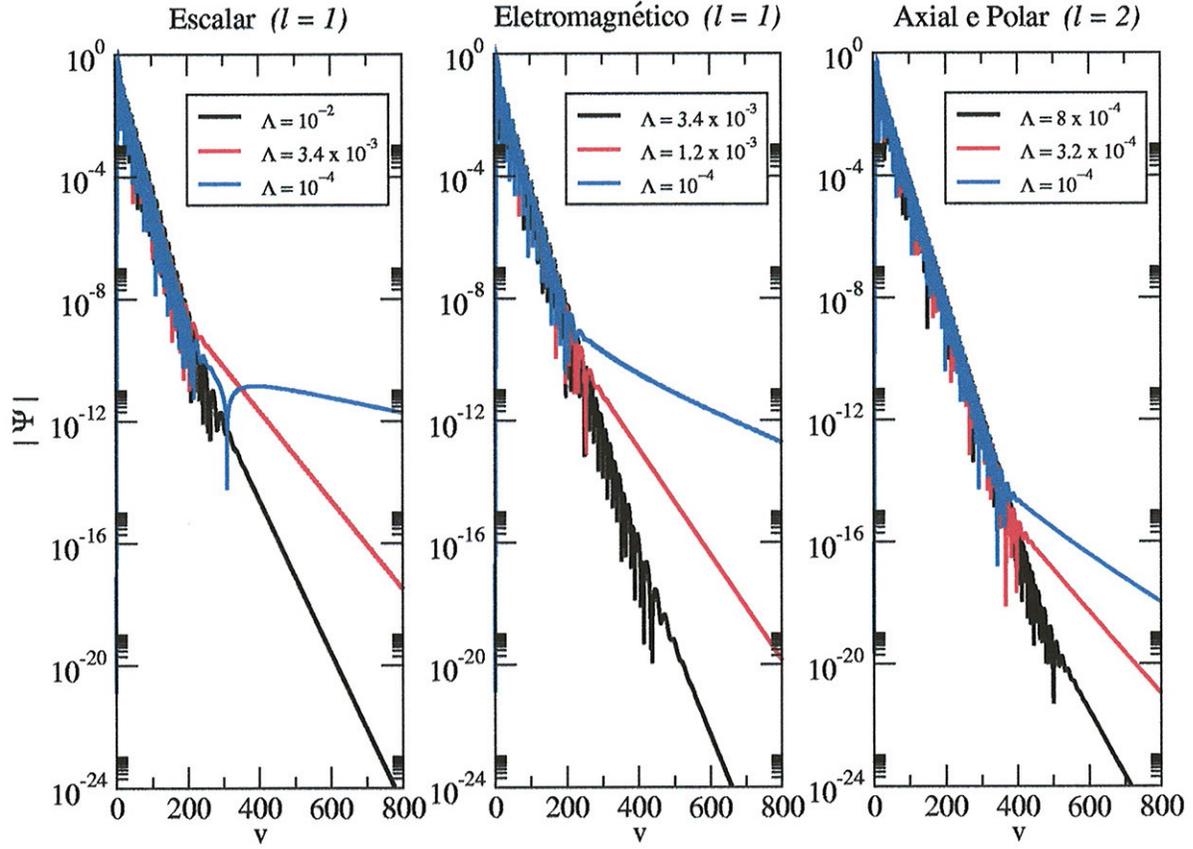


Figura 6.7: Decaimento escalar (não massivo), eletromagnético e gravitacional (axial e polar) para $d = 4$ e $\ell = 2$.

A figura 6.7 ilustra o fato de que os campos escalar não massivo, eletromagnético e gravitacional, na geometria SdS obedecem a

$$\psi_{\ell}^{es} \sim e^{-k_{exp}^{es} t} \quad \text{com } t \rightarrow \infty, \quad (6.3)$$

$$\psi_{\ell}^{el} \sim e^{-k_{exp}^{el} t} \quad \text{com } t \rightarrow \infty, \quad (6.4)$$

$$\psi_{\ell}^{ax} \sim e^{-k_{exp}^{ax} t} \quad \text{com } t \rightarrow \infty, \quad (6.5)$$

$$\psi_{\ell}^{po} \sim e^{-k_{exp}^{po} t} \quad \text{com } t \rightarrow \infty, \quad (6.6)$$

para t suficientemente grande. No horizonte de eventos e cosmológico, t  substituído por v e u respectivamente.

As simulações numéricas desenvolvidas para este trabalho revelam um quadro interessante na transição entre os modos oscilatório e exponencial puro. Conforme ilustrado na figura 8, à medida em que diminuimos a constante cosmológica, o módulo de ω_I^{es} diminui. Não observamos a cauda exponencial, pois até um certo valor crítico de Λ , o coeficiente k_{exp}^{es} é maior que ω_I^{es} , e portanto o decaimento quasi-normal domina. Mas para Λ menor que um certo valor crítico, ω_I^{es} se torna maior que k_{exp}^{es} desta forma a cauda exponencial passa a dominar. O ponto importante aqui é que para Λ suficientemente pequeno, a cauda exponencial domina o comportamento assintótico dos diversos campos tratados.

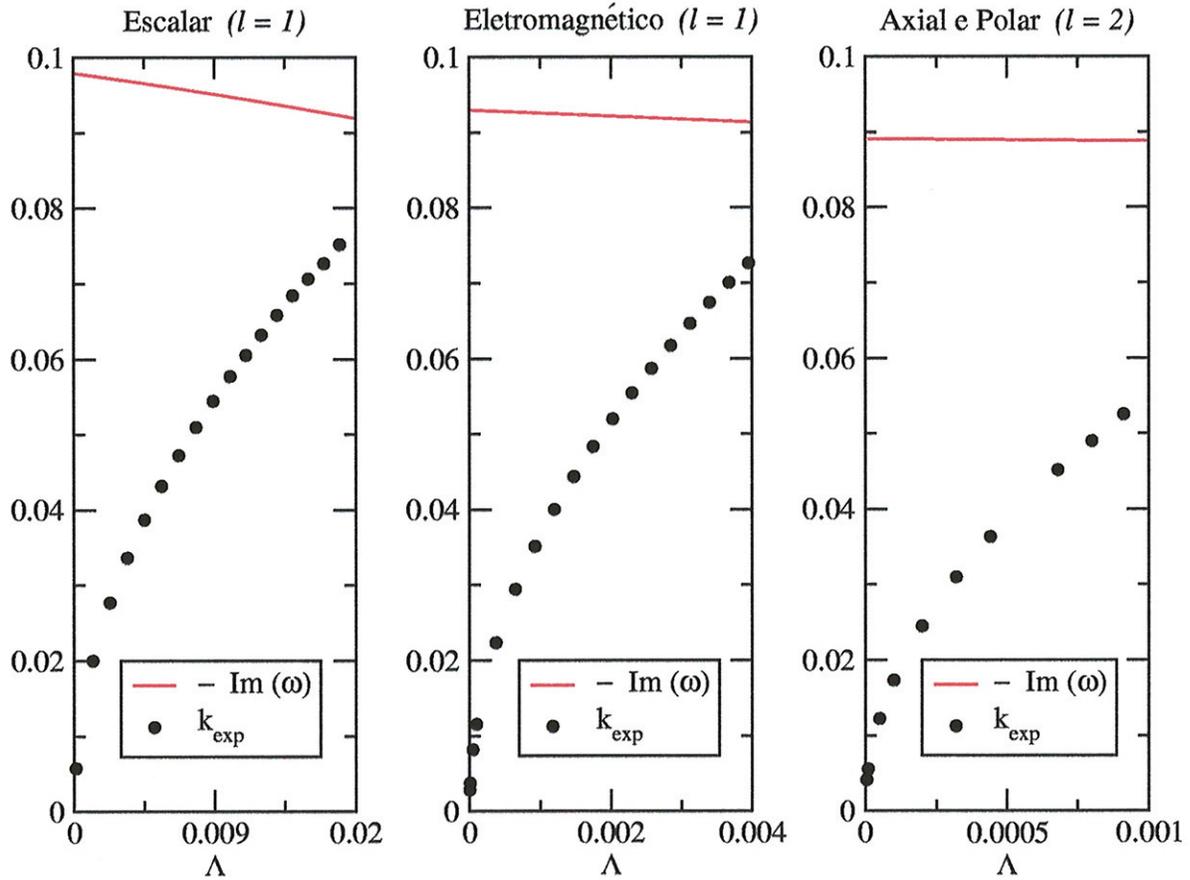


Figura 6.8: Encontro dos coeficientes $-Im(\omega)$ e k_{exp} , para os campos escalar (não massivo), eletromagnético e gravitacional (axial e polar).

Outro aspecto a ser investigado neste regime intermediário é a dependência dos parâmetros k_{exp}^{es} , k_{exp}^{el} , k_{exp}^{ax} e k_{exp}^{po} com ℓ e κ_c (conveniente neste caso). Nossos resultados sugerem que os diversos k_{exp} são funções pelo menos segundo deriváveis de κ_c em um certo aberto limitado a esquerda por $\kappa_c = 0$. Além disso, observamos que a segunda derivada é positiva.

Mais especificamente, para campos eletromagnéticos e gravitacionais (axial e polar) observamos a seguinte relação, válida na vizinhança de $\kappa_c = 0$ (que representa o caso Schwarzschild puro)

$$k_{exp}^{el}(\kappa_c) \approx k_{exp}^{ax}(\kappa_c) \approx k_{exp}^{po}(\kappa_c) \approx (\ell + 1) (\kappa_c + c^{e-9} \kappa_c^2) . \quad (6.7)$$

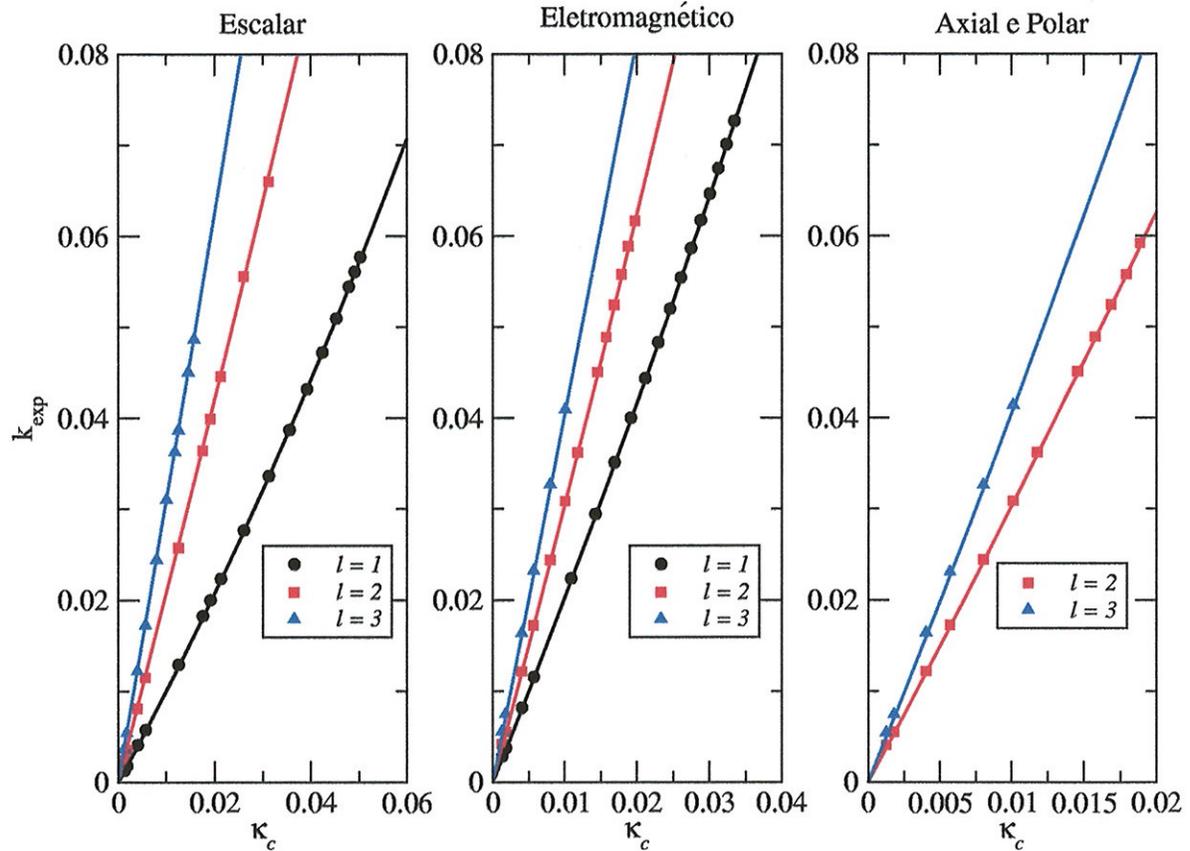


Figura 6.9: Dependência de k_{exp} com κ_c para os campos escalar (não massivo), eletromagnético e gravitacional (axial e polar), para alguns valores de ℓ e $d = 4$. Os pontos são os resultados numéricos, e as linhas contínuas são os ajustes quadráticos.

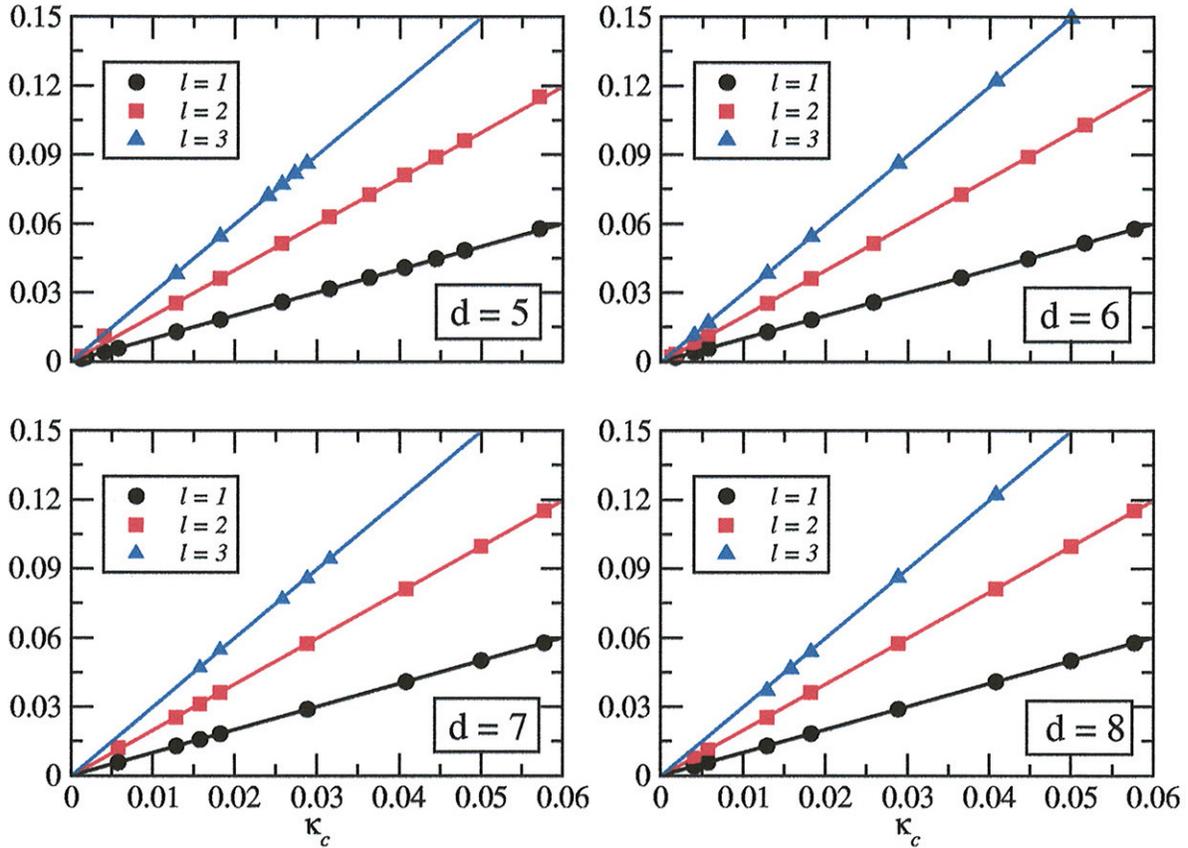


Figura 6.10: Dependência de k_{exp} com κ_c para os campos escalar (não massivo), eletromagnético e gravitacional (axial e polar), para alguns valores de l e vários valores de d . Os pontos são os resultados numéricos, e as linhas contínuas são os ajustes quadráticos.

Para campos escalares não massivos, observamos que a relação entre o coeficiente de decaimento exponencial e a constante cosmológica, para qualquer valor da dimensão do espaço-tempo, é compatível com a relação

$$k_{exp}^{es}(\kappa_c) \approx l(\kappa_c + c^{es}\kappa_c^2) \quad (d \geq 4). \quad (6.8)$$

Este ponto é ilustrado na figura 6.10.

O limite da geometria SdS próximo do caso assintoticamente plano foi estudado por Brady et al. em [22, 23]. Neste regime já temos uma separação razoável entre os horizontes de evento e cosmológico, de forma que

$$\delta = \frac{r_c - r_+}{r_+} \gtrsim 50. \quad (6.9)$$

No limite em que a separação entre os horizontes de eventos e cosmológico é muito grande, é verificado o surgimento uma nova mudança qualitativa — o aparecimento de uma fase de decaimento tipo lei de potência. Este é um ponto interessante, pois a região de decaimento de potência se encontra entre as regiões de decaimento em modos quasi-normais e de decaimento exponencial. O campo desta forma não pode ser simplesmente descrito como uma superposição dos vários modos, pois neste caso o modo tipo lei de potência dominaria assintoticamente.

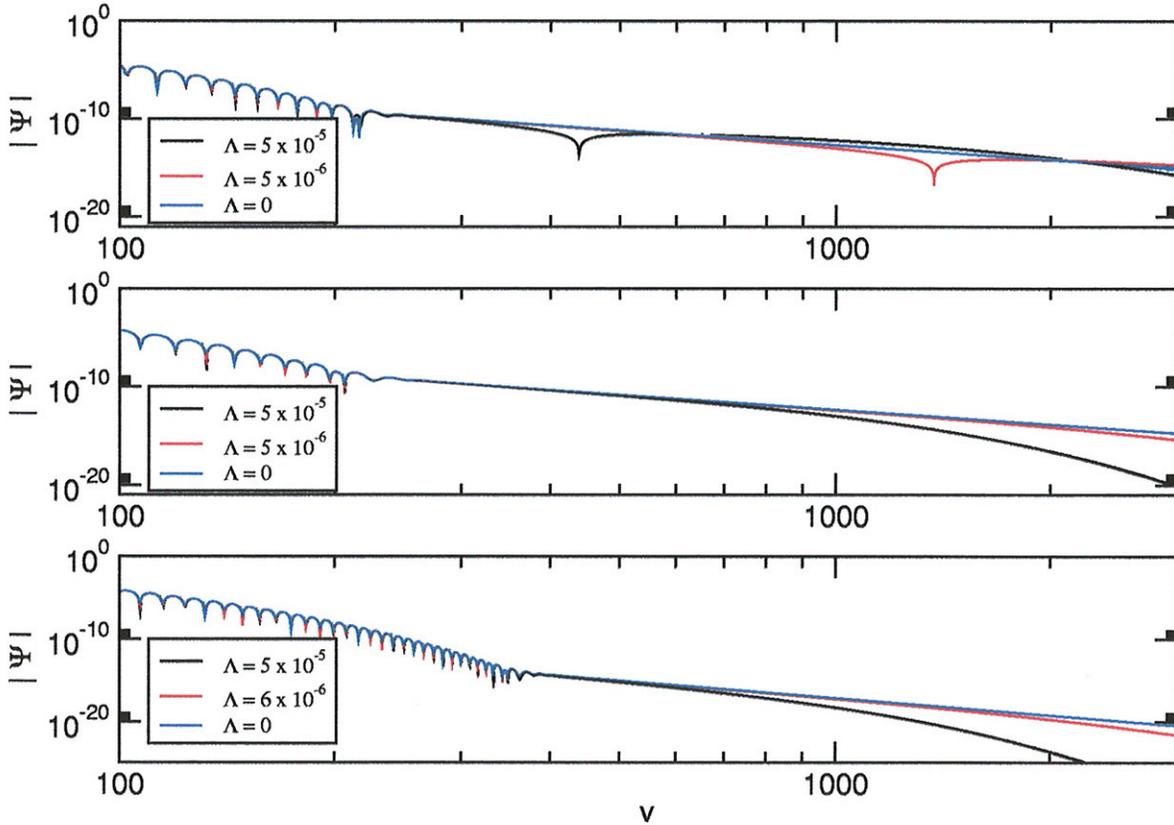


Figura 6.11: *Comportamento dos campos, a medida que a geometria se aproxima do limite Schwarzschild puro, com $d = 4$. (acima) Campos escalar (não massivo) com $\ell = 1$. (centro) Campo eletromagnético com $\ell = 1$. (abaixo) Campo gravitacional (axial e polar) com $\ell = 2$.*

Vamos fazer um resumo dos resultados desta seção. Vimos quatro regimes mais ou menos bem caracterizados, com $m \neq 0$, $\Lambda > 0$, $\lambda = 0$ e $\ell > 0$.

- **O regime quase extremo:** neste regime, temos expressões analíticas para o potencial $V(x)$ e para as frequências quasi-normais. Os modos quasi-normais são completos, e a função de onda, para os campos estudados, são inteiramente dominados por este tipo de decaimento.
- **Próximo do regime quase extremo:** as funções de onda ainda são dominadas pelo decaimento quasi-normal, mas as frequências se desviam do previsto no regime quase extremo.
- **Região intermediária:** as funções de onda sofrem uma mudança qualitativa importante, com o aparecimento de uma cauda exponencial. Esta cauda domina o decaimento em tempos grandes.
- **Próximo do limite assintoticamente plano:** surge nas funções de onda uma região intermediária entre a fase de decaimento quasi-normal e a cauda exponencial — uma região de decaimento em lei de potência. À medida em que nos aproximamos do limite assintoticamente plano, esta região se estende cada vez mais. Quando $\Lambda = 0$, a cauda exponencial não está presente, sendo totalmente substituída pela cauda em lei de potência.

Veremos nas próximas seções que esta descrição qualitativa é ainda mais geral, válida nos casos em que o buraco negro possui carga.

6.3 Campos em Reissner-Nordström-de Sitter

O próximo passo é estudar a propagação de campos na vizinhança de buracos negros carregados. Uma característica desta classe de geometrias é não existir perturbações gravitacionais ou eletromagnéticas puras. Por simplicidade, nos restringiremos à análise do comportamento de campos escalares, verificando como a variação da carga elétrica do buraco negro afeta a sua dinâmica.

Novamente o caso mais simples é o limite em que a constante cosmológica é quase extrema. No capítulo 5, foi visto que mesmo no caso RNdS a dinâmica é bem conhecida. Podemos usar

os métodos numéricos para confirmar a validade das expressões para as frequências quasi-normais. Por exemplo, a dependência da componente real dos modos quasi-normais é ilustrada na figura 6.12 a seguir.

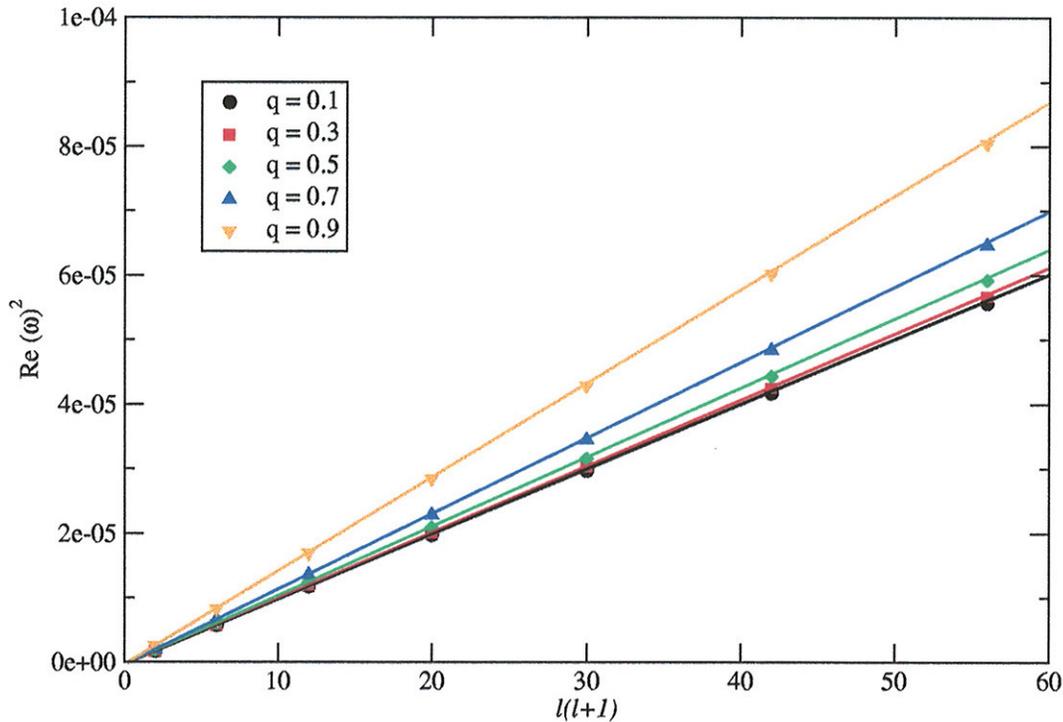


Figura 6.12: Dependência de $\text{Re}(\omega)^2$ com $\ell(\ell+1)$, no regime quase extremo, para vários valores da carga elétrica do buraco negro. Em todas as curvas, $m = 1.0$ e $\delta = 10^{-3}$. Os pontos indicam os resultados numéricos, e as linhas contínuas representam os resultados analíticos.

A questão natural que surge com a introdução de carga elétrica no buraco negro é qual a dependência do comportamento do campo com a carga. Verificamos que o comportamento qualitativo do campo é o mesmo — o quadro esboçado durante o estudo da geometria SdS permanece inalterado. E embora as frequências quasi-normais dependam de maneira não trivial com a carga, esta dependência não é muito forte. Podemos proceder com o cálculo das frequências quasi-normais numericamente ou através do método semi-analítico. Alguns resultados são ilustrados na figura 6.13. Um ponto interessante é se a transição do buraco negro com carga muito pequena e o com carga nula é contínua. Nossos resultados sugerem fortemente que a resposta é afirmativa.

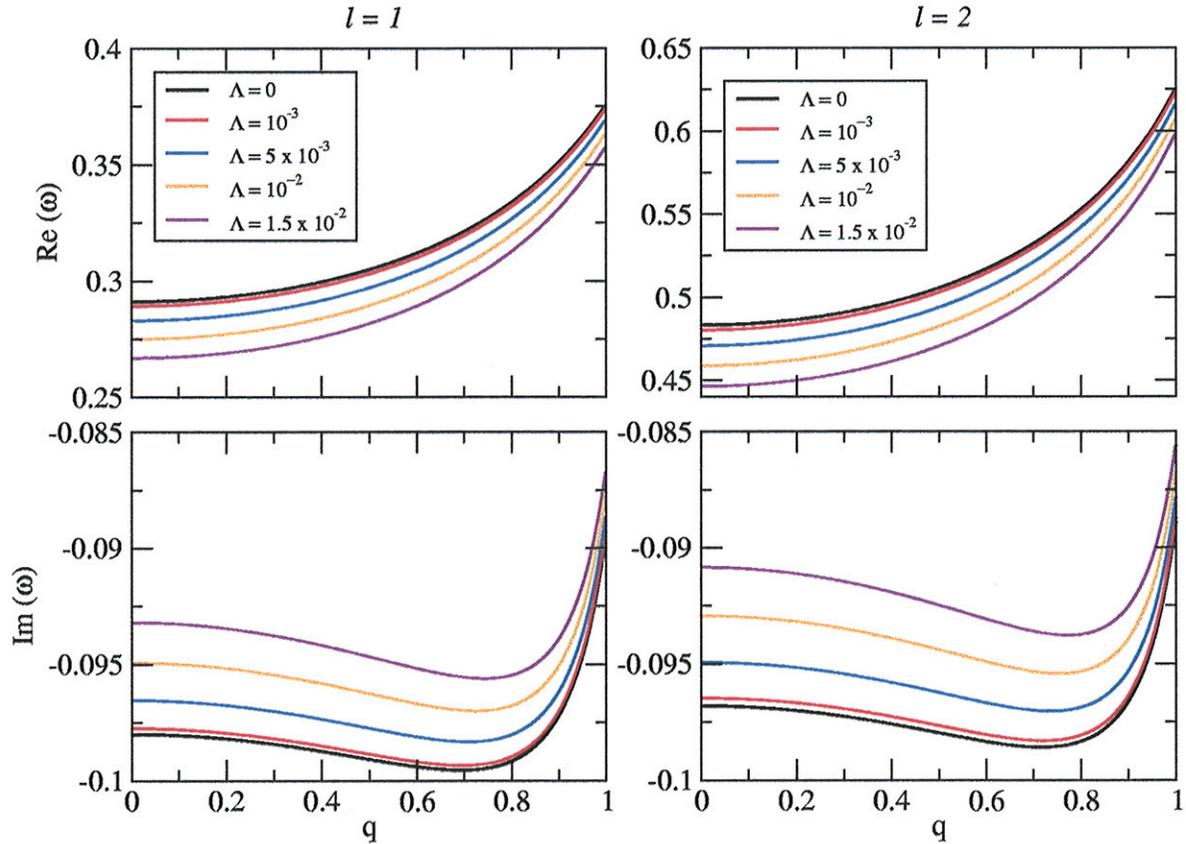


Figura 6.13: Dependência das componentes real e imaginária das frequências quasi-normais com a carga do buraco negro. O ponto $q = 0$ está incluído nos gráficos.

Indo além do modo fundamental, apresentamos alguns diagramas $\text{Re}(\omega) - \text{Im}(\omega)$ para $\ell = 1, 2$. Vemos que quanto maior a carga, mais as curvas “inflam”. Incidentalmente, vemos também que quanto mais próximo os horizontes de eventos e cosmológico estão, mais verticais se tornam os diagramas, conforme esperado pelas considerações do capítulo anterior.

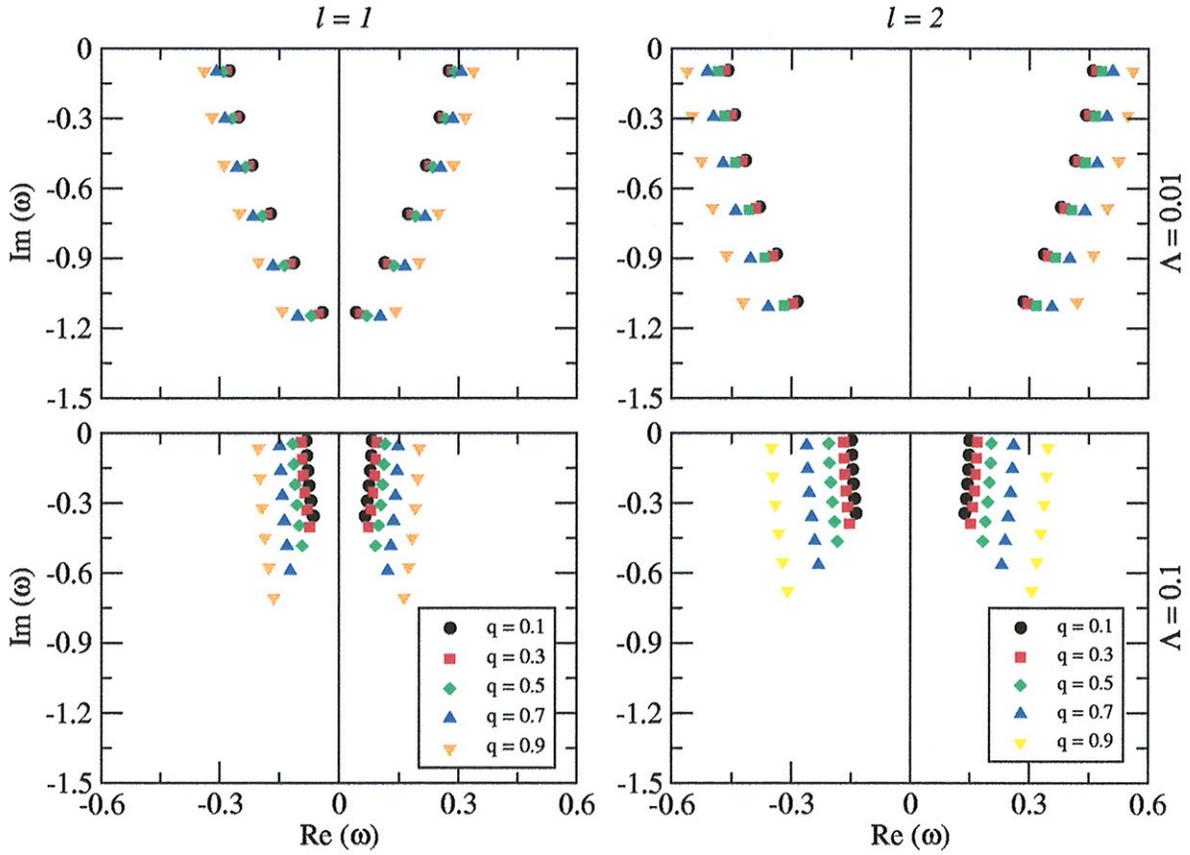


Figura 6.14: Diagramas $\text{Re}(\omega) - \text{Im}(\omega)$ para vários valores da carga do buraco negro. Próximo do limite em que a constante cosmológica é quase extrema, as curvas ficam mais horizontais e densas.

Também no caso RNdS, eventualmente o comportamento assintótico é dominado por uma cauda exponencial. Entretanto, não observamos dependência significativa do coeficiente de decaimento com a carga, conforme ilustrado na figura 6.15 para $\ell = 1, 2$.

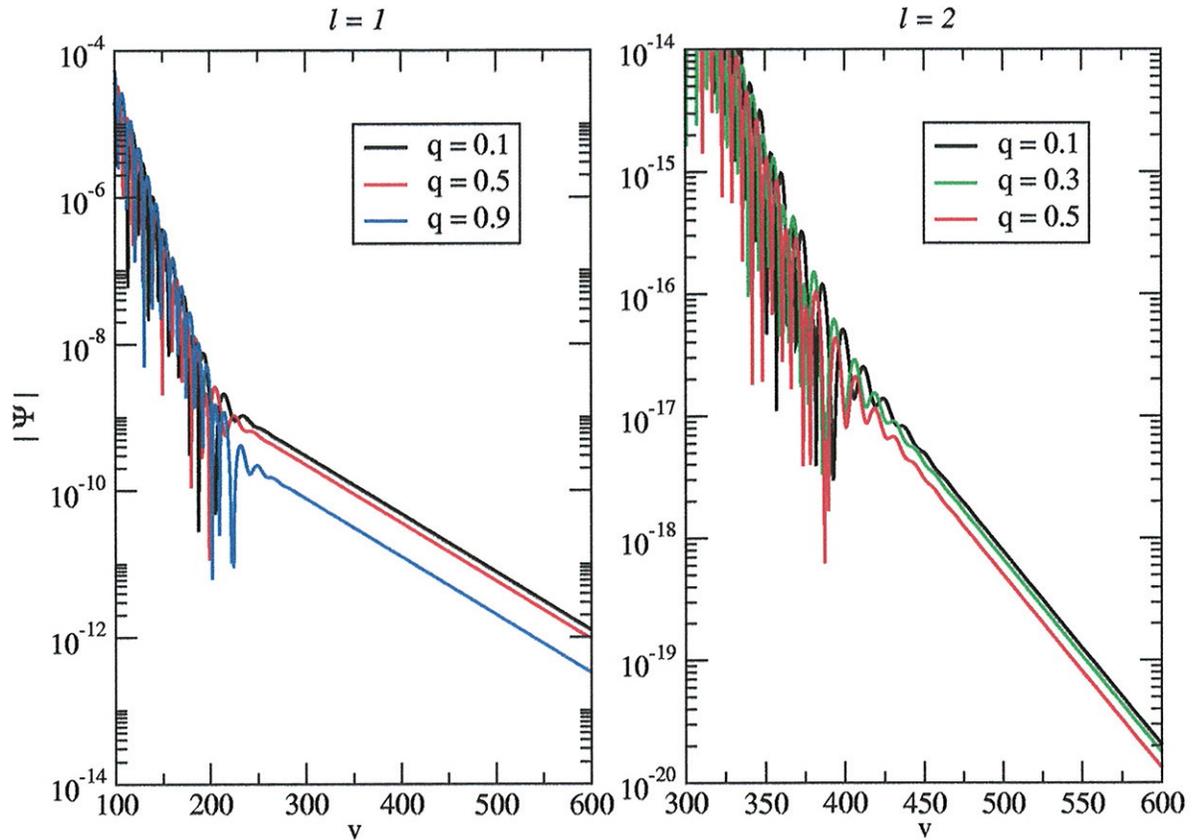


Figura 6.15: Gráficos semi-log do campo escalar na geometria RNdS, para vários valores da carga do buraco negro, com $l = 1$ (esquerda) e $l = 2$ (direita). Os gráficos ressaltam a cauda exponencial. Parâmetros dos gráficos: $\Lambda = 10^{-3}$ e $m = 1.0$.

Verificamos a aproximação ao limite assintoticamente plano, analisando o comportamento dos campos quando a separação entre os horizontes de eventos e cosmológicos aumenta muito. Da mesma forma que no caso de buracos negros neutros, aparece uma fase de decaimento tipo lei de potência, intermediária entre a fase quasi-normal e a cauda exponencial. Ilustramos este ponto na figura 6.16, para vários valores de carga.

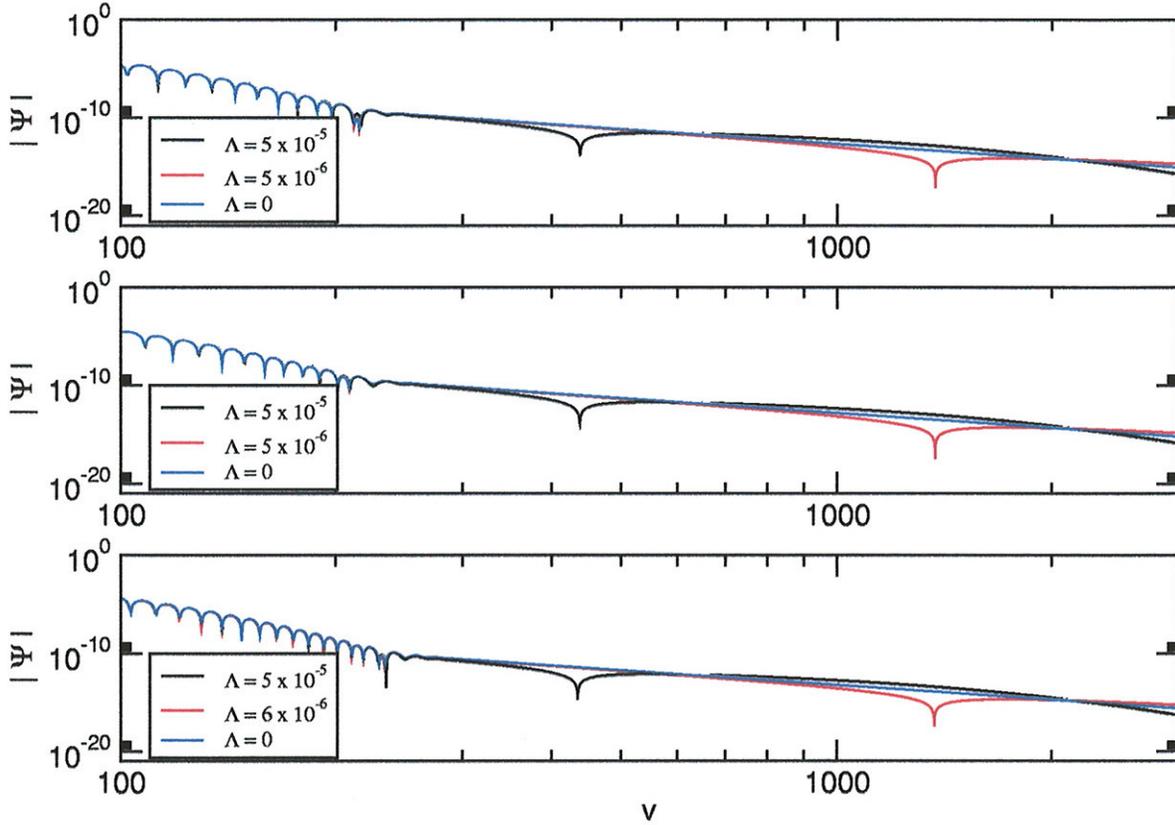


Figura 6.16: *Se aproximando do limite Reissner-Nordström puro. Valores da carga: $q = 0.1$ (acima), $q = 0.5$ (centro) e $q = 0.9$ (abaixo).*

A seguir, apresentamos um resumo dos resultados obtidos nesta seção:

- Os pontos básicos observados para a propagação de campos na geometria SdS quadridimensional se mantém. No limite quase extremo, o decaimento é dominado por modos quasi-normais. Para separações razoáveis entre os horizontes de evento e cosmológico, uma cauda exponencial domina com tempos grandes. No limite assintoticamente plano, surge uma fase de decaimento tipo lei de potência.
- Verificamos que a influência da carga é muito branda. As frequências quasi-normais variam pouco com a carga, e os coeficientes de decaimento exponencial não variam nada, pelo menos no âmbito do método numérico usado.
- A transição para o caso em que a carga é nula é suave. Não foi observado nenhum indício de descontinuidade no limite $q \rightarrow 0$.

6.4 Campo Escalar Massivo

Podemos aumentar a complexidade do campo escalar, introduzindo massa para esta perturbação. Abordaremos nesta seção o efeito da massa em sua dinâmica.

Podemos usar o método numérico para verificar diretamente as expressões analíticas do capítulo 5. Apresentamos alguns resultados referentes a este ponto na figura 16, onde estudamos a dependência da parte real do primeiro modo quasi-normal com a massa efetiva do campo. Conforme esperado, a concordância entre as diferentes abordagens é excelente.

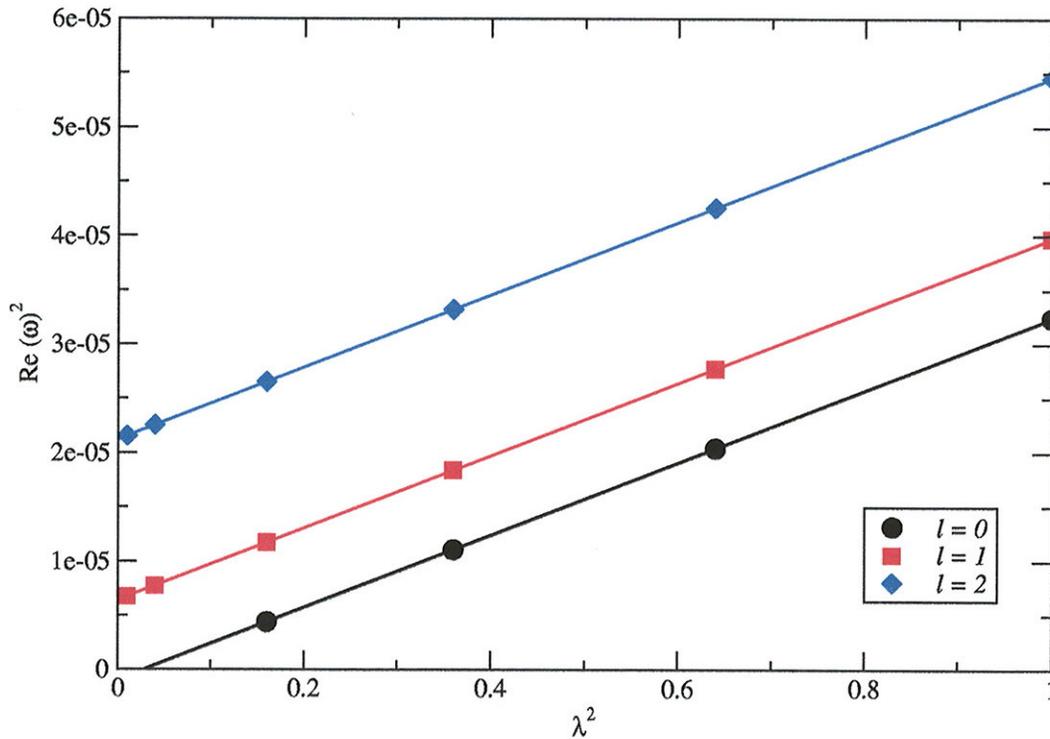


Figura 6.17: Dependência de $\text{Re}(\omega)^2$ com λ^2 , no regime quase extremo. Os pontos são obtidos diretamente do método numérico, enquanto que as linhas contínuas representam as expressões analíticas. Para estas curvas, $q = 0$, $m = 1.0$ e $\Lambda = 0.1111$.

O comportamento da dinâmica de campos escalares com o aumento da massa fica mais interessante em geometrias com uma separação clara entre os horizontes de eventos e cosmológicos. Se a massa efetiva do campo é nula, ou pequena, observamos a presença da cauda

exponencial. Porém, a partir de um certo valor para λ , a cauda exponencial é substituída por uma segunda fase de decaimento quasi-normal. Este segundo modo tem frequência diferente do primeiro. Ilustramos esta mudança na dinâmica na figura 6.18.

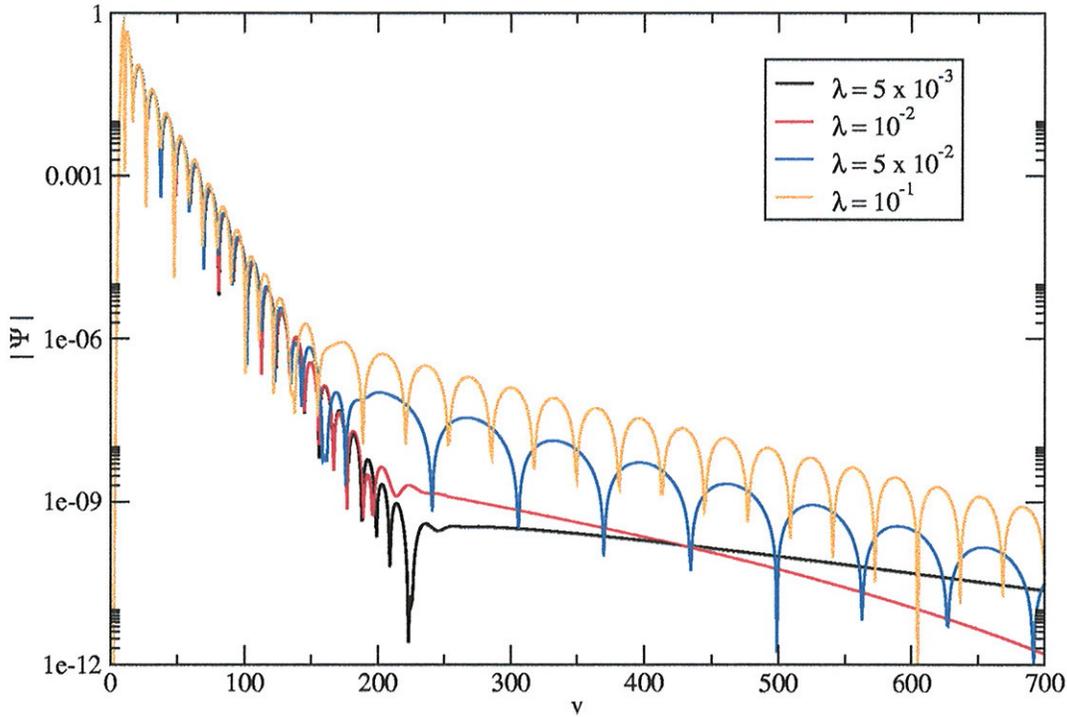


Figura 6.18: *Comportamento do campo escalar com o aumento da massa efetiva do campo, em geometrias com separação nítida entre horizontes de eventos e cosmológico. Os parâmetros para estes gráficos são $m = 1.0$, $\Lambda = 10^{-4}$, $q = 0$ e $\ell = 1$.*

6.5 Potenciais Efetivos Negativos

Uma característica peculiar do potencial efetivo escalar é que, em muitos casos, este potencial tem regiões negativas. Vamos mostrar que isso tem conseqüências drásticas na dinâmica do campo.

Por exemplo, no buraco negro quadridimensional, se a massa efetiva é nula, o potencial com $\ell = 0$ sempre apresenta uma região negativa. Conforme visto no capítulo 4, se a constante cosmológica é pequena, a região negativa do campo também o é. Mais precisamente, a área

integrada negativa do potencial é muito menor que a área positiva. Ainda assim, o comportamento assintótico é completamente diferente. Ao invés de uma cauda tipo lei de potência, o modo $\ell = 0$ tende a uma constante.

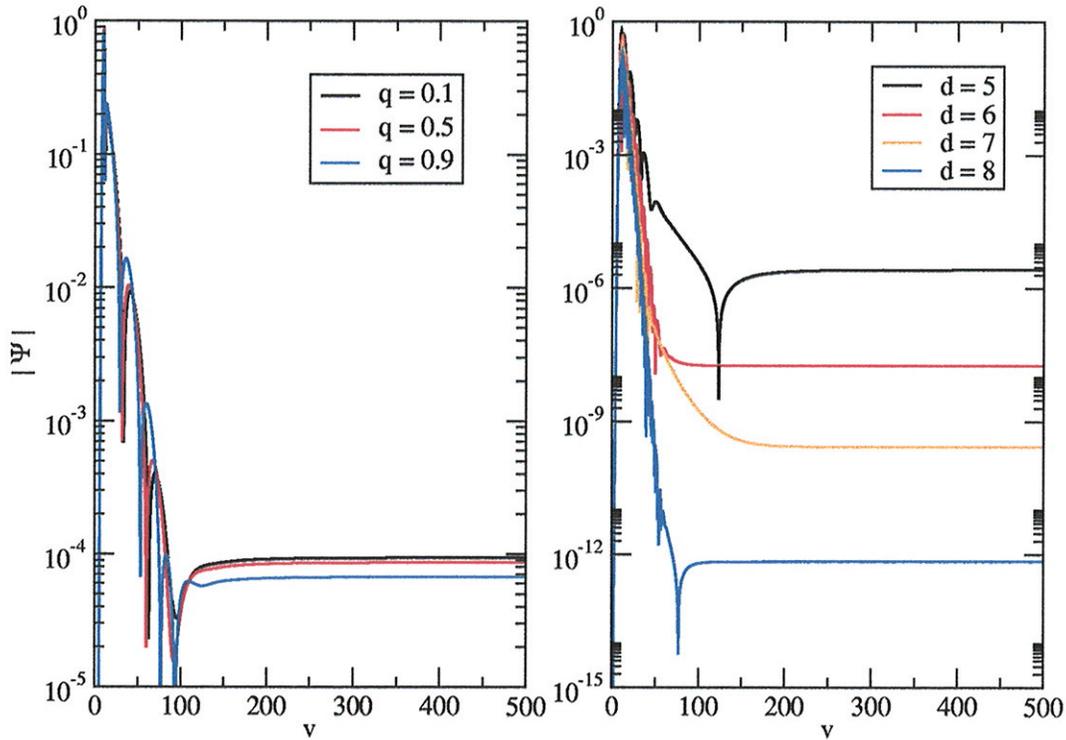


Figura 6.19: *Comportamento do modo $\ell = 0$ do campo escalar com massa efetiva nula. Os parâmetros para estes gráficos são $d = 4$, $m = 1.0$, $q = 0.5$, $\Lambda = 10^{-4}$ e $\lambda = 0$.*

Foi mostrado no capítulo 4 que para $\ell = 0$ e massas efetivas muito pequenas ainda existe uma região de potencial negativo. A partir de um certo valor limite da massa entretanto, $V(x)$ passa a ser positivo definido. Essa transição se reflete no comportamento do campo escalar, conforme ilustrado na figura 6.20.

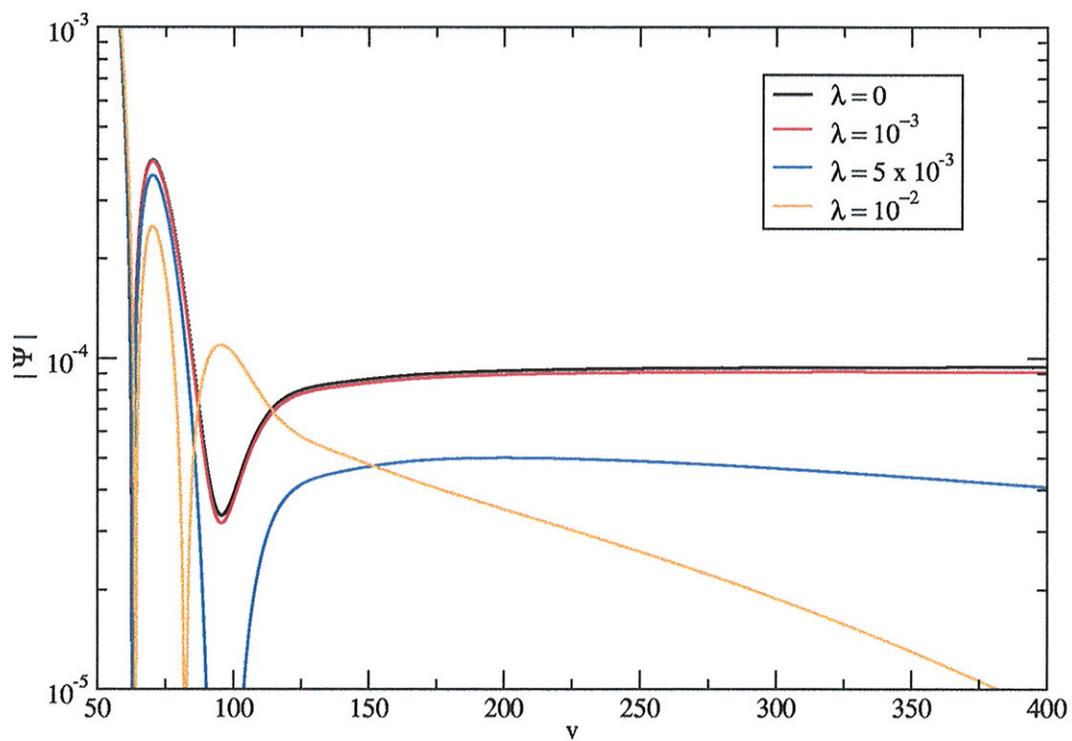


Figura 6.20: Comportamento do modo $\ell = 0$ do campo escalar com o aumento da massa efetiva. Os parâmetros para estes gráficos são $d = 4$, $m = 1.0$, $q = 0$.

Capítulo 7

Campos em Geometrias Assintoticamente Anti-de Sitter

7.1 Estrutura de Horizontes

O caminho a ser seguido para o estudo de campos em geometrias esféricas assintoticamente anti-de Sitter é o mesmo que foi feito para os casos com $\Lambda > 0$. E o primeiro passo é a caracterização do espaço-tempo onde os campos irão evoluir. Para isso é necessária a determinação da estrutura de horizontes da métrica, dada pelas possíveis raízes reais positivas da função $h(r)$.

Se a constante cosmológica é negativa, é conveniente escrevê-la em função de uma constante real positiva R , na forma

$$\Lambda = -\frac{3}{R^2} . \quad (7.1)$$

Em termos do “raio” R , o elemento da métrica $h(r)$ fica

$$h(r) = 1 - \frac{2m}{r^{d-3}} + \frac{q^2}{r^{2d-6}} + \frac{r^2}{R^2} . \quad (7.2)$$

O conjunto de zeros de (7.2) pode ser mais facilmente investigado através da introdução do polinômio

$$P(r) = r^{2d-4} + R^2 r^{2d-6} - 2mR^2 r^{d-3} + R^2 q^2 , \quad (7.3)$$

de forma que

$$h(r) = \frac{P(r)}{R^2 r^{2d-6}} \quad (7.4)$$

Os zeros de $h(r)$ são dados pelos zeros do polinômio $P(r)$.

Uma grande motivação para o estudo da propagação de campos escalares em dimensões maiores que quatro é a correspondência AdS/CFT. As perturbações relevantes neste contexto são campos escalares minimamente acoplados à geometria SAdS, e nos limitaremos a estes campos na tese. Por uma questão de clareza, trataremos separadamente a geometria Reissner-Nordström-anti de Sitter quadridimensional.

7.1.1 Geometria RNAdS

Para o caso em que $d = 4$ e $q \neq 0$, a estrutura de horizontes da geometria Reissner-Nordström-anti-de Sitter é determinada pelo conjunto de zeros reais e positivos do polinômio $P(r)$, neste caso escrito como

$$P(r) = r^4 + R^2 r^2 - 2mR^2 r + R^2 q^2. \quad (7.5)$$

Caracterizamos os horizontes da métrica RNAdS através da proposição 7.1 apresentada a seguir:

Proposição 7.1: *Seja $m > 0$, $q \neq 0$ e $\Lambda < 0$. As raízes reais do polinômio $P(r)$ podem ser:*

- *Dois raízes positivas ($0 < r_- < r_+$), ambas com multiplicidade 1.*
- *Uma raiz positiva, com multiplicidade 2.*
- *Nenhuma raiz real.*

A demonstração da proposição 7.1 é feita no apêndice A.3. Ela nos indica que, na geometria RNAdS, a singularidade em $r = 0$ está em geral envolvida por dois horizontes — um horizonte de Cauchy (r_-) e um horizonte de eventos (r_+). Ao contrário das geometrias esféricas assintoticamente de Sitter, não existe um horizonte cosmológico. Temos entretanto um possível caso extremo, em que os horizontes r_+ e r_- coincidem. Este caso acontece quando a carga elétrica q atinge um valor extremo q_{ext} .

Nem sempre é conveniente a utilização dos parâmetros usuais — a massa m , a carga q e o raio R — para a descrição da geometria. No caso da métrica RNAdS quadridimensional, usaremos as grandezas r_+ , r_- e R . Para obtermos uma relação entre as diversas constantes, fazemos

$$h(r) = \frac{1}{R^2 r^2} (R^2 r^2 - 2mR^2 r + q^2 R^2 + r^4) - \frac{1}{R^2 r^2} (r - r_+)(r - r_-)(r - r_1)(r - r_2). \quad (7.6)$$

Da expressão anterior, obtemos o sistema de equações

$$r_1 + r_2 = -(r_+ + r_-), \quad (7.7)$$

$$r_+ r_- + (r_+ + r_-)(r_1 + r_2) + r_1 r_2 = R^2, \quad (7.8)$$

$$r_+ r_- (r_1 + r_2) + r_1 r_2 (r_+ + r_-) = 2mR^2, \quad (7.9)$$

$$r_+ r_- r_1 r_2 = q^2 R^2. \quad (7.10)$$

Utilizando as relações acima, podemos mostrar explicitamente que r_1 e r_2 são complexos, e que são dados por

$$r_1 = r_2^* = -\frac{p}{2} + i \sqrt{q_1 - \left(\frac{p_1}{2}\right)^2}, \quad (7.11)$$

onde definimos as constantes reais p_1 e q_1 como

$$p_1 = -(r_1 + r_2) = r_+ + r_- > 0, \quad (7.12)$$

$$q_1 = r_1 r_2 = R^2 + r_+^2 + r_-^2 + r_+ r_- > 0. \quad (7.13)$$

As raízes r_1 e r_2 são necessariamente reais, visto que p_1 e q_1 satisfazem a desigualdade

$$q_1 - \left(\frac{p_1}{2}\right)^2 = \frac{3r_+^2}{4} + \frac{3r_-^2}{4} + \frac{r_+ r_-}{2} + R^2 > 0. \quad (7.14)$$

Podemos ainda obter expressões para a massa e para carga elétrica do buraco negro em função dos parâmetros r_+ , r_- e R , a saber

$$m = \frac{(R^2 + r_+^2 + r_-^2)(r_+ + r_-)}{2R^2}, \quad (7.15)$$

$$q^2 = \frac{r_+ r_-}{R^2} (R^2 + r_+^2 + r_-^2 + r_+ r_-). \quad (7.16)$$

A partir da relação (7.16), obtemos uma expressão para o valor extremo para a carga do buraco negro (q_{ext}), fazendo $r_- \rightarrow r_+$:

$$q_{ext}^2 = r_+^2 + \frac{3r_+^4}{R^2} \quad (7.17)$$

Ressaltamos novamente que o campo escalar é introduzido no bloco T_+ , ou seja, na região externa ao horizonte de eventos. Nesta subvariedade, introduzimos a coordenada “tartaruga” $r^*(r)$, definida da maneira usual.

$$r^* = \int \frac{dr}{h(r)}. \quad (7.18)$$

Ao substituirmos a definição de $h(r)$ na definição de r^* , é conveniente expressarmos a relação em termos de p e q definidos anteriormente, visto que r_1 e r_2 são complexos.

Vamos resolver a integral em (7.18) pelo método da expansão em frações parciais. Para isso, fazemos

$$\frac{r^2 dr}{(r - r_+)(r - r_-)(r^2 + p_1 r + q_1)} = \frac{C_+}{r - r_+} - \frac{C_-}{r - r_-} + \frac{-Ar + B}{r^2 + p_1 r + q_1}. \quad (7.19)$$

A relação anterior nos fornece

$$\begin{aligned} r^2 = & (C_+ - C_- - A)r^3 + [C_+(p_1 - r_-) - C_-(p_1 - r_+) + Ap_1 + B]r^2 \\ & + [C_+(q_1 - p_1 r_-) - C_-(q_1 - p_1 r_+) - Ar_+ r_- - C_4 B p_1]r \\ & - C_+ q_1 r_- + C_- q_1 r_+ + Br_+ r_- . \end{aligned} \quad (7.20)$$

Comparando os termos de mesma potência, obtemos o seguinte sistema de equações

$$C_+ - C_- - A = 0, \quad (7.21)$$

$$C_+(p_1 - r_-) - C_-(p_1 - r_+) + Ap_1 + B = 1, \quad (7.22)$$

$$C_+(q_1 - p_1 r_-) - C_-(q_1 - p_1 r_+) - Ar_+ r_- - Bp_1 = 0, \quad (7.23)$$

$$-C_+ q_1 r_- + C_- q_1 r_+ + Br_+ r_- = 0. \quad (7.24)$$

O sistema anterior é linear nas variáveis $\{C_+, C_-, A, B\}$, e pode ser resolvido, fornecendo:

$$C_+ = \frac{r_+^2}{(r_+ - r_-)(3r_+^2 + r_-^2 + 2r_+ r_- + R^2)}, \quad (7.25)$$

$$C_- = \frac{r_-^2}{(r_+ - r_-)(3r_-^2 + r_+^2 + 2r_+r_- + R^2)}, \quad (7.26)$$

$$A = \frac{(r_+ + r_-)(r_+^2 + r_-^2 + 2r_+r_- + R^2)}{(3r_+^2 + r_-^2 + 2r_+r_- + R^2)(3r_-^2 + r_+^2 + 2r_+r_- + R^2)}, \quad (7.27)$$

$$B = \frac{(r_+^2 + r_-^2 + R^2)(r_+^2 + r_-^2 + r_+r_- + R^2)}{(3r_+^2 + r_-^2 + 2r_+r_- + R^2)(3r_-^2 + r_+^2 + 2r_+r_- + R^2)}, \quad (7.28)$$

Calculadas as constantes C_+ , C_- , A e B , a integração na expressão (7.18) é imediata:

$$\begin{aligned} r^* &= R^2 C_+ \ln(r - r_+) - R^2 C_- \ln(r - r_-) \\ &\quad - \frac{R^2 A}{2} \ln(r^2 + p_1 r + q_1) + \frac{R^2(2B + Ap_1)}{\sqrt{4q_1 - p_1^2}} \arctan\left(\frac{2r + p_1}{\sqrt{4q_1 - p_1^2}}\right). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Uma característica básica da função $r^*(r)$, que não está presente nos casos assintoticamente plano ou de Sitter é que ela tende a uma constante com r tendendo a infinito, constante esta que denotamos r_{as}^* . Vemos isto tomando o limite $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} r^* &= R^2(C_+ - C_- - A) \lim_{r \rightarrow \infty} \ln(r) \\ &\quad + \frac{R^2(2B + C_3 Ap_1)}{\sqrt{4q_1 - p_1^2}} \lim_{r \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{2r}{\sqrt{4q_1 - p_1^2}}\right). \end{aligned} \quad (7.30)$$

Porém, usando a relação (7.21) e dado que o comportamento assintótico da função \arctan é

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{2r}{\sqrt{4q_1 - p_1^2}}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad (7.31)$$

temos que

$$r_{as}^* = \lim_{r \rightarrow \infty} r^* = \frac{\pi R^2(2B + Ap_1)}{2\sqrt{4q_1 - p_1^2}}. \quad (7.32)$$

Definimos uma nova coordenada tartaruga, ou equivalentemente, acrescentamos uma constante na integral (7.18), de forma que o limite assintótico seja zero:

$$\begin{aligned} x(r) &= r^*(x) - r_{as}^* \\ &= R^2 C_+ \ln(r - r_+) - R^2 C_- \ln(r - r_-) \\ &\quad - \frac{R^2 A}{2} \ln(r^2 + p_1 r + q_1) + \frac{R^2(2B + Ap_1)}{\sqrt{4q_1 - p_1^2}} \left[\arctan\left(\frac{2r + p_1}{\sqrt{4q_1 - p_1^2}}\right) - \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned} \quad (7.33)$$

7.1.2 Geometria SAdS d-Dimensional

Passamos agora para geometrias com dimensão maior ou igual a quatro. Nesta seção, nos restringiremos a buracos negros sem carga. O polinômio $P(r)$ para $q = 0$, $d \geq 4$ e $\Lambda < 0$ fica

$$P(r) = r^{d-1} + R^2 r^{d-3} - 2mR^2. \quad (7.34)$$

A estrutura de zeros reais de $P(r)$ acima é dada pela proposição 7.2 apresentada a seguir.

Proposição 7.2: *Seja $m > 0$, $d > 4$ e $\Lambda < 0$.*

- *Se d é par, o polinômio $P(r)$ possui uma única raiz real positiva (r_+) de multiplicidade 1.*
- *Se d é ímpar, as únicas raízes reais do polinômio $P(r)$ são uma raiz positiva (r_+) e uma raiz negativa ($-r_+$), ambas com multiplicidade 1.*

A proposição 7.2 é demonstrada no apêndice A.4. Ela mostra que para qualquer dimensão d , o buraco negro possui somente um horizonte. Mais do que isso, este horizonte é simples, ou seja, não existem casos extremos, onde a temperatura do horizonte é nula.

O próximo passo consiste no cálculo da coordenada tartaruga. Usando a proposição 7.2, temos que

$$P(r) = \begin{cases} (r - r_+)(r - \tilde{r}_1)(r - \tilde{r}_1^*) \cdots (r - \tilde{r}_{\frac{D-2}{2}})(r - \tilde{r}_{\frac{D-2}{2}}^*) & \text{d par} \\ (r - r_+)(r + r_+)(r - \tilde{r}_1)(r - \tilde{r}_1^*) \cdots (r - \tilde{r}_{\frac{D-3}{2}})(r - \tilde{r}_{\frac{D-3}{2}}^*) & \text{d ímpar} \end{cases} \quad (7.35)$$

onde adotamos a convenção de que r_+ é o horizonte de eventos, e os $\{\tilde{r}_i\}$ são as raízes complexas de $h(r)$.

A expansão em frações parciais de $1/R^2 h(r)$, para d par, fica

$$\frac{1}{R^2 h(r)} = \frac{C_+}{r - r_+} + \frac{C_1}{r - \tilde{r}_1} + \frac{\tilde{C}_1}{r - \tilde{r}_1^*} + \cdots + \frac{\tilde{C}_{\frac{D-2}{2}}}{r - \tilde{r}_{\frac{D-2}{2}}} + \frac{\tilde{C}_{\frac{D-2}{2}^*}}{r - \tilde{r}_{\frac{D-2}{2}}^*}, \quad (7.36)$$

e para d ímpar

$$\frac{1}{R^2 h(r)} = \frac{C_+}{r - r_+} + \frac{C_N}{r + r_+} + \frac{\tilde{C}_1}{r - \tilde{r}_1} + \frac{\tilde{C}_{1*}}{r - \tilde{r}_1^*} + \cdots + \frac{\tilde{C}_{\frac{D-3}{2}}}{r - \tilde{r}_{\frac{D-3}{2}}} + \frac{\tilde{C}_{\frac{D-3}{2}*}}{r - \tilde{r}_{\frac{D-3}{2}}^*}. \quad (7.37)$$

Os diversos coeficientes C_+ , $\{\tilde{C}_i, \tilde{C}_i^*\}$ podem ser determinados através do conjunto de raízes r_+ , $\{\tilde{r}_i, \tilde{r}_i^*\}$. As expressões são obtidas de maneira análoga ao que foi feito para os casos assintoticamente de Sitter:

$$\frac{1}{R^2 C_i} = r_i^{-2d-6} \prod_{j \neq i} (r_i - r_j). \quad (7.38)$$

Através das expressões para os coeficientes, podemos verificar explicitamente que

$$\tilde{C}_{i*} = \tilde{C}_i^*, \quad (7.39)$$

$$C_N = -C_+. \quad (7.40)$$

Da mesma forma que no capítulo 4, calculamos a forma explícita da função $r^*(r)$. Para d par

$$\begin{aligned} \frac{r^*}{R^2} = & C_+ \ln(r - r_+) \\ & + \sum_i^{(d-2)/2} \left\{ \frac{A_i}{2} \ln(r^2 + p_i r + q_i) + \frac{2B_i - p_i A_i}{\sqrt{4q_i - p_i^2}} \arctan \left(\frac{2r + p_i}{\sqrt{4q_i - p_i^2}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (7.41)$$

e para d ímpar

$$\begin{aligned} \frac{r^*}{R^2} = & C_+ \ln(r - r_+) - C_+ \ln(r + r_-) \\ & + \sum_i^{(d-3)/2} \left\{ \frac{A_i}{2} \ln(r^2 + p_i r + q_i) + \frac{2B_i - p_i A_i}{\sqrt{4q_i - p_i^2}} \arctan \left(\frac{2r + p_i}{\sqrt{4q_i - p_i^2}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (7.42)$$

onde introduzimos os coeficientes reais $\{A_i\}$ e $\{B_i\}$:

$$A_i = 2 \operatorname{Re}(C_i), \quad (7.43)$$

$$B_i = 2 \operatorname{Re}(C_i \tilde{r}_i^*) . \quad (7.44)$$

Por questão de simplicidade, vamos escrever as duas expressões acima em uma única expressão:

$$\begin{aligned} \frac{r^*}{R^2} &= C_+ \ln(r - r_+) - \Lambda(d) C_+ \ln(r + r_+) \\ &+ \sum_i \left\{ \frac{A_i}{2} \ln(r^2 + p_i r + q_i) + \frac{2B_i - p_i A_i}{\sqrt{4q_i - p_i^2}} \arctan \left(\frac{2r + p_i}{\sqrt{4q_i - p_i^2}} \right) \right\} , \end{aligned} \quad (7.45)$$

onde introduzimos a função

$$\Lambda(d) = \begin{cases} 0 & d \text{ par} \\ 1 & d \text{ ímpar} \end{cases} \quad (7.46)$$

e o limite na somatória é $(d - 2)/2$ se d é par, ou $(d - 2)/3$ no caso de d ímpar.

Da mesma forma que no caso RNAdS quadridimensional, a função $r^*(r)$ tende assintoticamente a uma constante com r tendendo a infinito. Tomando o limite $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^*}{R^2} &= R^2 C_+ \ln(r) - \Lambda(d) R^2 C_+ \ln(r) \\ &+ \sum_i \left\{ \frac{R^2 A_i}{2} \ln(r^2) + \frac{(2B_i - p_i A_i) R^2}{\sqrt{4q_i - p_i^2}} \arctan \left(\frac{2r}{\sqrt{4q_i - p_i^2}} \right) \right\} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} R^2 \left(C_+ - \Lambda(D) C_+ + \sum_i A_i \right) \ln(r) + R^2 \sum_i \frac{2B_i - p_i A_i}{\sqrt{4q_i - p_i^2}} \frac{\pi}{2} . \end{aligned} \quad (7.47)$$

Ou seja, para d par

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^*}{R^2} = R^2 \left(C_+ + \sum_i^{(d-2)/2} A_i \right) \lim_{r \rightarrow \infty} \ln(r) + \frac{\pi R^2}{2} \sum_i^{(d-2)/2} \frac{2B_i - p_i A_i}{\sqrt{4q_i - p_i^2}} , \quad (7.48)$$

e para d ímpar

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^*}{R^2} = R^2 \left(\sum_i^{(d-3)/2} A_i \right) \lim_{r \rightarrow \infty} \ln(r) + \frac{\pi R^2}{2} \sum_i^{(d-3)/2} \frac{2B_i - p_i A_i}{\sqrt{4q_i - p_i^2}} . \quad (7.49)$$

Porém podemos mostrar que para d par

$$C_+ + \sum_i^{(d-2)/2} A_i = 0, \quad (7.50)$$

e para d ímpar

$$\sum_i^{(d-3)/2} A_i = 0, \quad (7.51)$$

de forma que o primeiro termo das expressões (7.48) e (7.49) são nulos. Obtemos assim que a função $r^*(r)$ tende assintoticamente a uma constante

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^* = r_{as}^* = \frac{\pi R^2}{2} \sum_i \frac{2B_i - p_i A_i}{\sqrt{4q_i - p_i^2}}. \quad (7.52)$$

Por uma questão de conveniência, introduzimos uma nova coordenada tartaruga, deslocando o zero de r^* de modo que seu limite assintótico seja nulo

$$x(r) = r^* - r_{as}^*. \quad (7.53)$$

7.2 Características da Função Tartaruga

É importante salientarmos algumas características básicas da função tartaruga, mais especificamente o comportamento assintótico e eventuais pontos extremos. Vamos agora apontar as características básicas de $x(r)$ para d arbitrário.

- O primeiro ponto é que a função $x(r)$ tende a menos infinito próximo do horizonte de eventos, ou seja, a medida que r tende a r_+ :

$$\lim_{r \rightarrow r_+} x(r) = R^2 C_+ \lim_{r \rightarrow r_+} \ln(r - r_+) + \text{TERMO FINITO} \rightarrow -\infty \quad (7.54)$$

Aliás, muito próximo do horizonte podemos calcular explicitamente a função inversa $r(x)$. Para $r \rightarrow r_+$ temos que

$$r(x) = r_+ + e^{\frac{x}{R^2 C_+}} \quad x \rightarrow -\infty. \quad (7.55)$$

- A expressão anterior mostra que a constante C_+ está relacionada com a gravidade superficial no horizonte de eventos κ_+ como

$$C_+ = \frac{1}{2R^2\kappa_+} . \quad (7.56)$$

- A segunda característica relevante é que a função $x(r)$ não tem pontos extremos para $r > r_+$, visto que

$$\frac{dx(r)}{dr} = \frac{d}{dr} \int \frac{dr}{h(r)} = \frac{1}{h(r)} . \quad (7.57)$$

Os pontos extremos de $x(r)$ são dados pelas soluções da equação

$$\left. \frac{dx(r)}{dr} \right|_{r=r_{ext}} = 0 . \quad (7.58)$$

A equação acima não tem solução para $r > r_+$.

- A função $x(r)$ tende assintoticamente a zero com r tendendo a infinito.
- Conforme comentado, a imagem de $x(r)$ não é toda a reta real. Seu domínio e imagem são

$$x : (r_+, \infty) \longrightarrow (-\infty, 0) . \quad (7.59)$$

7.3 Potenciais Efetivos

Consideremos agora campos escalares não-massivos, minimamente acoplados à geometria na região fora do horizonte de eventos. Os potenciais efetivos $V_{es}(r)$ associados a estes campos são dados, conforme visto no capítulo 3, por

$$V_{es}(r) = \begin{cases} h(r) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2m}{r^3} - \frac{2q^2}{r^4} + \frac{2}{R^2} \right] & d = 4, q \neq 0 \\ h(r) \left[\frac{d(d-2)}{4R^2} + \frac{(d-2)(d-4) + 4\ell(\ell+d-3)}{4r^2} + \frac{(d-2)^2 m}{2r^{d-1}} \right] & d > 3, q = 0 \end{cases} . \quad (7.60)$$

O primeiro ponto básico é que o potencial efetivo é positivo no intervalo $]r_+, \infty[$, para qualquer valor de ℓ . Esta é uma característica importante, e nos indica que os modos $\ell = 0$ não devem ter comportamento anômalo, ao contrário dos casos assintoticamente de Sitter.

Para geometrias com $q = 0$ esta propriedade é verificada imediatamente. Para $q \neq 0$ e $d = 4$, a demonstração da positividade do potencial segue as mesmas linhas do caso de Sitter. Escrevemos o potencial efetivo como

$$V_{es}(r) = h(r)\Omega_{es}(r) , \quad (7.61)$$

e para o caso quadridimensional, verificamos que a função $\Omega_{es}(r)$ possui um único zero real positivo. Como no limite de $r \rightarrow \infty$ a função $\Omega_{es}(r)$, é necessário apenas verificarmos que $\Omega_{es}(r_+) > 0$ para demonstrar que esta função é positiva em todo o intervalo $]r_+, \infty[$. E em termos de r_+ , r_- e R , temos que

$$\begin{aligned} R^2 r_+^4 \Omega_{es}(r_+) &\geq \frac{2m}{r_+^3} - \frac{2q^2}{r_+^4} + \frac{2}{R^2} \\ &= (R^2 r_+ + r_+^3)(r_+ - r_-) + r_+^2 (r_+^2 - r_-^2) + r_+ (r_+^3 - r_-^3) \\ &> 0 . \end{aligned} \quad (7.62)$$

Portanto, o potencial escalar é positivo para $r > r_+$, como queríamos demonstrar.

Vemos ainda que o potencial tende a zero no horizonte de eventos. De forma análoga a feita para as geometrias assintoticamente de Sitter, aqui nos também podemos obter expressões para o potencial em termos da coordenada tartaruga somente próximo do horizonte de eventos. Para o caso quadridimensional carregado, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} V_{es}(x) &= \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r_+^2} + \frac{2m}{r_+^3} - \frac{2q^2}{r_+^4} + \frac{2}{R^2} \right] \left[1 - \frac{2m}{r_+} (1 + e^{2\kappa+x})^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{q^2}{r_+^2} (1 + e^{2\kappa+x})^{-2} + \frac{r_+^2}{R^2} (1 - e^{2\kappa+x})^2 \right] . \end{aligned} \quad (7.63)$$

Como estamos no limite $x \rightarrow -\infty$, e lembrando que $h(r_+) = 0$, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} V_{es}(x) = 2 \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r_+^2} + \frac{2m}{r_+^3} - \frac{2q^2}{r_+^4} + \frac{2}{R^2} \right] \left[\frac{m}{r_+} - \frac{q^2}{r_+^2} + \frac{r_+^2}{R^2} \right] e^{2\kappa+x} . \quad (7.64)$$

Para a geometria Schwarzschild-anti-de Sitter d -dimensional, temos que no limite de interesse, a função $h(r(x))$ fica:

$$h(x) = 1 + \frac{1}{R^2} \left(r_+ + e^{\frac{x}{\sigma_+}} \right)^2 - 2m \left(r_+ + e^{\frac{x}{\sigma_+}} \right)^{3-d} , \quad (7.65)$$

de forma que obtemos

$$h(x) = 2 \left[\frac{1}{R^2} + (d-3)m \right] e^{2\kappa_+ x}, \quad (7.66)$$

onde na última passagem usamos o fato de que r_+ é raiz de $h(r)$. Com o resultado anterior, calculamos $V(x)$:

$$V_{es}(x) = 2 \left[\frac{1}{R^2} + (d-3)m \right] \left[\frac{d(d-2)}{4R^2} + \frac{(d-2)(d-4) + 4c}{4r_+^2} + \frac{(d-2)^2 m}{2r_+^{d-1}} \right] e^{2\kappa_+ x}. \quad (7.67)$$

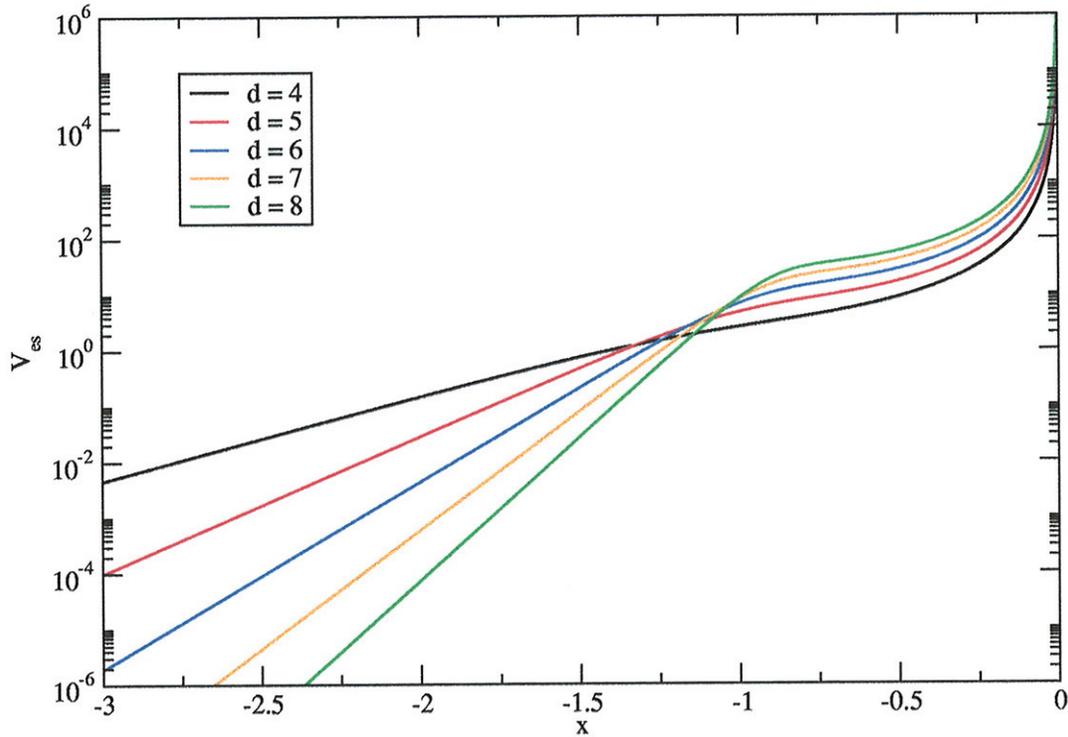


Figura 7.1: Potenciais efetivos para o campo escalar na região externa de buracos negros assintoticamente anti-de Sitter com diversas dimensões. Nas curvas deste gráfico, $m = 1.0$ e $R = 1.0$.

A característica realmente marcante do potencial efetivo associado a campos escalares em geometrias esféricas assintoticamente anti-de Sitter é que este potencial diverge para $r \rightarrow \infty$.

Confirmamos este ponto tomando diretamente o limite

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} V_{es}(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{R^2} \frac{d(d-2)}{4R^2} \rightarrow \infty. \quad (7.68)$$

Como consequência, o potencial $V_{es}(x)$ diverge com $x \rightarrow 0$. Esta característica é relevante no que se refere a escolha das condições de contorno utilizadas, conforme será visto na próxima seção. Os pontos discutidos nesta seção estão ilustrados na figura 7.1.

7.4 Modos Quasi-Normais em SAdS e RNAdS

Definimos no bloco T_+ as coordenadas nulas u e v da maneira usual. Usando os limites assintóticos de x , vemos que no infinito espacial

$$\begin{array}{ccc} r \rightarrow \infty & \implies & x = 0 \\ t \rightarrow \text{const.} & \implies & t \rightarrow \text{const.} \end{array} \implies \begin{array}{c} u = v \\ -\infty < t < \infty \end{array} \quad (7.69)$$

No horizonte de eventos futuro

$$\begin{array}{ccc} r \rightarrow r_+ & \implies & x \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty & \implies & t \rightarrow +\infty \end{array} \implies \begin{array}{c} u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \text{const.} \end{array} \quad (7.70)$$

No horizonte de eventos passado

$$\begin{array}{ccc} r \rightarrow r_+ & \implies & x \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow -\infty & \implies & t \rightarrow -\infty \end{array} \implies \begin{array}{c} u \rightarrow \text{const.} \\ v \rightarrow -\infty \end{array} \quad (7.71)$$

A fim de explicitarmos a estrutura dos infinitos da subvariedade T_+ , vamos usar a representação de Penrose. Definimos as coordenadas

$$\begin{array}{l} U = \arctan(u) \\ V = \arctan(v) \end{array} \quad \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq U \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq V \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \quad (7.72)$$

Neste sistema de coordenadas, os valores infinitos de u e v tomam valores finitos. No infinito espacial, temos

$$\begin{array}{ccc} u = v & \implies & U = V \\ -\infty < t < \infty & \implies & -\infty < t < \infty \end{array} \quad (7.73)$$

No horizonte de eventos futuro

$$\begin{aligned} u \rightarrow +\infty \\ v \rightarrow \text{const.} \end{aligned} \implies \begin{aligned} U = \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq V < \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (7.74)$$

E no horizonte de eventos passado

$$\begin{aligned} u \rightarrow \text{const.} \\ v \rightarrow -\infty \end{aligned} \implies \begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq U < \frac{\pi}{2} \\ V = -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (7.75)$$

A partir das coordenadas U e V , traçamos o diagrama de Carter-Penrose da região externa ao horizonte de eventos, apresentado na figura 7.2 a seguir. Esse diagrama é válido para qualquer valor de d .

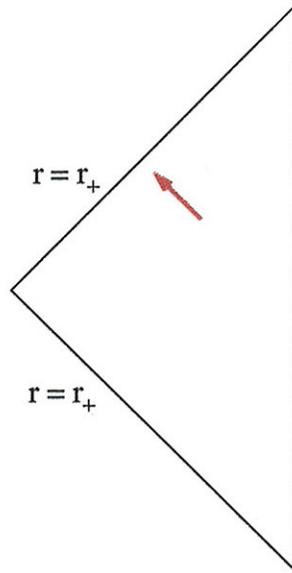


Figura 7.2: Diagrama de Carter-Penrose para a região externa do buraco negro $SAdS$ d -dimensional.

Para campo nas geometrias assintoticamente anti-de Sitter uma outra escolha deve ser tomada, devido ao comportamento assintótico diferente da subvariedade T_+ . Em termos do comportamento assintótico das possíveis soluções da equação homogênea (3.55), são tomadas

as soluções com o seguinte comportamento:

$$f_{-}(s, x) \propto \begin{cases} e^{sx} & x \rightarrow -\infty \\ 0 & x \rightarrow 0 \end{cases}, \quad (7.76)$$

$$f_{+}(s, x) \propto \begin{cases} B_{in}(s)e^{sx} + B_{out}(s)e^{-sx} & x \rightarrow -\infty \\ 0 & x \rightarrow 0 \end{cases}. \quad (7.77)$$

Conforme discutido no capítulo 3, as frequências quasi-normais são os valores complexos de s em que o Wronskiano destas duas funções se anula.

Capítulo 8

Propagação de Campos em Geometrias Assintoticamente Anti-de Sitter

8.1 Método Numérico

Como condições iniciais, o campo é especificado nas duas superfícies nulas $u = u_0$ e $v = v_0$. O comportamento do campo é largamente independente das condições iniciais usadas. Tipicamente foram usadas gaussianas no eixo u e valores constantes no eixo v :

$$\Psi(v = v_0, u) = 0 , \quad (8.1)$$

$$\Psi(v, u = u_0) = \exp \left[-\frac{(v - v_0)^2}{2\sigma^2} \right] . \quad (8.2)$$

Em $x = 0$ impomos como condição de contorno tipo Dirichlet, especificamente

$$\Psi|_{x=0} = 0 . \quad (8.3)$$

Como não dispomos da solução analítica para a equação de movimento, a abordagem seguida é tentar resolvê-la numericamente, usando um esquema de diferenciação finita. Para geometrias de fundo assintoticamente anti-de Sitter, entretanto, não utilizaremos a discretiza-

ção usada no capítulo 6, e sim a forma alternativa (3.91) apresentada no capítulo 3. A grade usada no método numérico é mostrada na figura 8.1 a seguir.

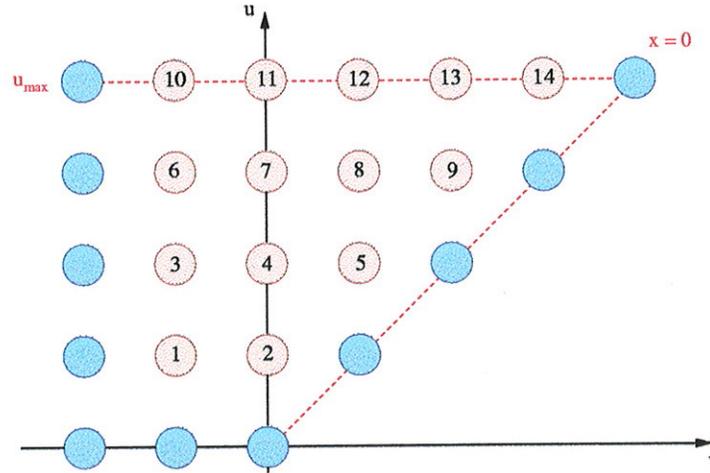


Figura 8.1: *Grade usada no método numérico para geometrias assintoticamente anti-de Sitter. Os pontos azuis são as condições iniciais, e os pontos vermelhos são os sítios da grade a serem calculados. Uma possível varredura do plano é seguir a numeração indicada.*

Nas próximas seções apresentaremos alguns dos resultados obtidos para as simulações da dinâmica de um campo escalar sem massa em fundos assintoticamente AdS.

8.2 Campos em Schwarzschild-Anti-de Sitter

Tomando $q = 0$, os nossos resultados refletem as propriedades da geometria Schwarzschild-AdS. Na primeira série de simulações numéricas, nós fazemos o índice de multipolo ℓ igual a zero. Ilustramos os resultados obtidos na figura 8.2, para vários valores de r_+ e d .

Observamos que as características básicas da dinâmica do campo escalar independem da dimensão do buraco negro esférico. A figura 8.2 mostra o comportamento típico do campo para o caso de buracos negros sem carga. Temos uma fase transiente, que depende das condições iniciais utilizadas e, para grandes valores de v , o campo oscila decaindo exponencialmente, o que sinaliza o modo quasi-normal fundamental.

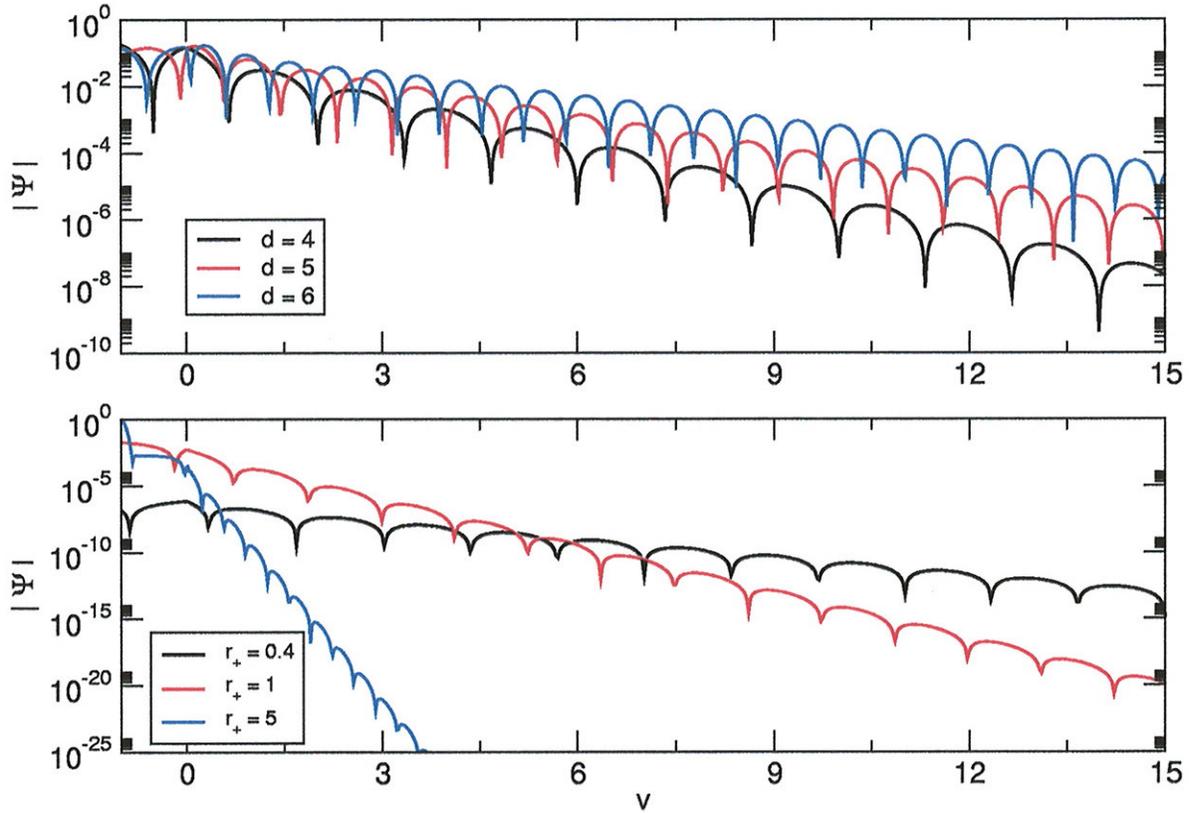


Figura 8.2: (acima) Gráfico semi-log do valor absoluto da componente $\ell = 0$ da função de onda, para vários valores de r_+ e $d = 4$. (abaixo) Gráfico semi-log do valor absoluto da função de onda para vários valores de d , com $r_+ = 0.4$, $R = 1$ e $\ell = 0$.

Um ponto importante a ser ressaltado é que os resultados numéricos obtidos indicam que não existe neste caso uma cauda, exponencial ou em lei de potência. Podemos estimar, a partir das funções de onda computadas, os valores das partes real e imaginária para o primeiro modo quasi-normal. No caso da geometria de fundo sendo Schwarzschild-anti-de Sitter quadridimensional, alguns dos valores obtidos são mostrados na tabela 8.1.

r_+	$-\text{Im}(\omega)$	$\text{Re}(\omega)$
100	274.61	185.38
50	133.68	91.38
10	26.79	18.85
5	13.41	9.99
1	2.67	2.79
0.8	2.15	2.58
0.6	1.58	2.41
0.4	1.006	2.362

Tabela 8.1: *Freqüências quasi-normais de um campo escalar em um buraco negro Schwarzschild-AdS, com $\ell = 0$ e $d = 4$.*

Salientamos aqui que a concordância com os valores calculados por Horowitz e Hubeny em [28] é muito boa, apesar do fato de métodos bastante diferentes serem utilizados. Inclusive, o método usado aqui e o usado em [28] funcionam melhor em regiões distintas do espaço de parâmetros. O método descrito nesta tese funciona melhor para pequenos valores de r_+ , enquanto que o utilizado em [28] funciona melhor para grandes valores de r_+ .

Abordaremos agora a dinâmica do campo na geometria SAdS para diferentes valores de ℓ . Algumas curvas para a função de onda são mostradas na figura 8.3.

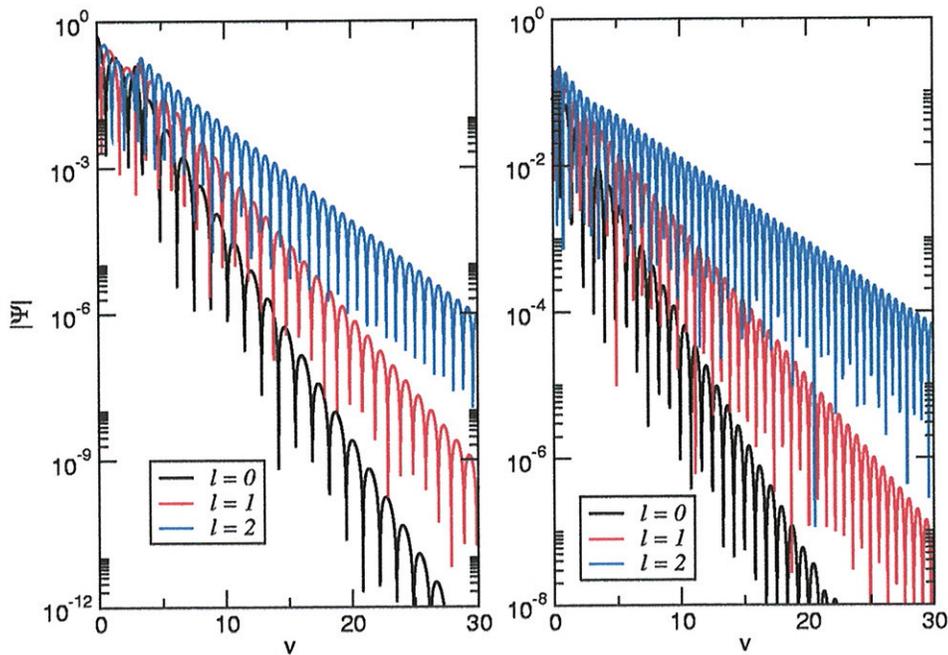


Figura 8.3: (esquerda) Gráfico semi-log da função de onda para o caso $r_+ = 0.4$ e $d = 4$ com vários valores de ℓ . (direita) Gráfico semi-log da função de onda para o caso $r_+ = 0.4$ e $d = 5$ com vários valores de ℓ .

Uma característica peculiar para o caso da propagação de ondas escalares em buracos negros assintoticamente anti-de Sitter é o comportamento do campo com o aumento do índice de multipolo ℓ . Verificamos que a medida que o valor de ℓ aumenta, a evolução do campo teste experimenta um aumento na escala de tempo de decaimento e uma diminuição na escala de tempo de oscilação. Este comportamento é o oposto do que é observado no caso assintoticamente plano. Vemos que tal resultado se mantém para valores aparentemente arbitrários de d . Este quadro é consistente com o apresentado em [28, 29].

8.3 Campos em Reissner-Nordström-Anti-de Sitter

O passo seguinte é introduzir carga no buraco negro. A figura 8.4 a seguir demonstra o comportamento do campo com a presença de carga na geometria Reissner-Nordström-anti-de Sitter. Mantemos inicialmente o valor de q pequeno comparado com o limite extremo.

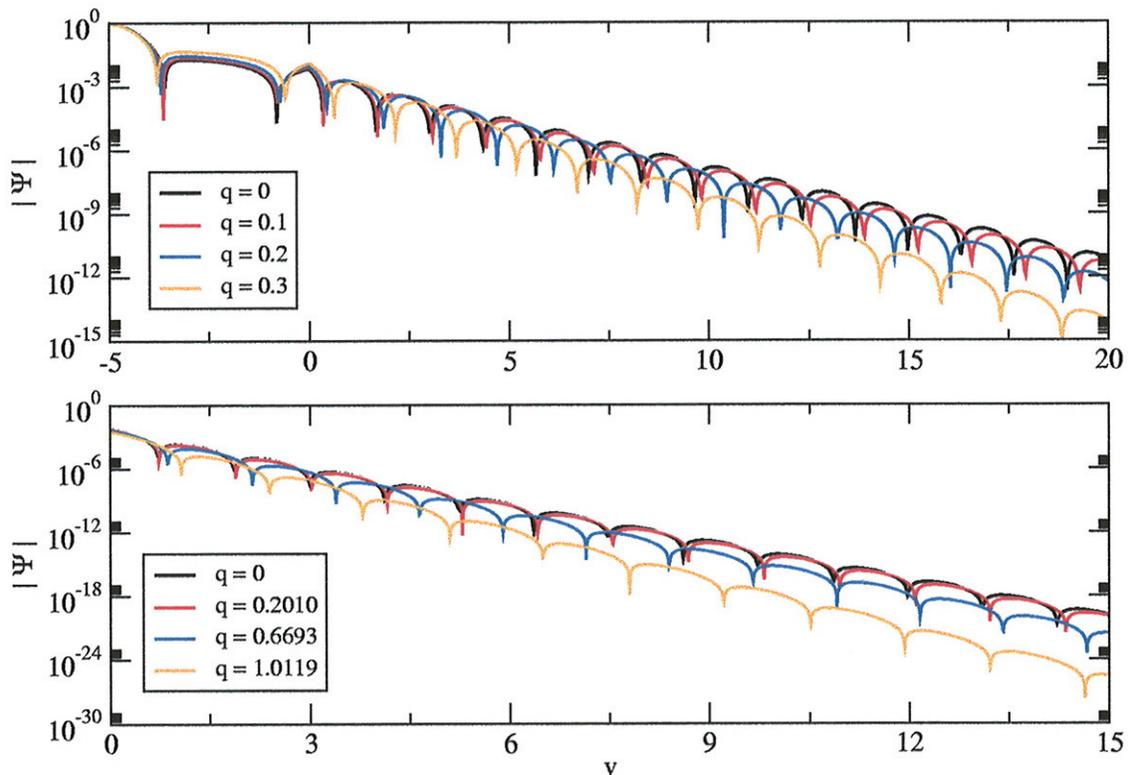


Figura 8.4: (acima) Gráfico semi-log da função de onda para o caso $\ell = 0$, $r_+ = 0.4$ e vários valores para a carga (menores que q_{im}). (abaixo) Gráfico semi-log da função de onda para o caso $\ell = 0$, $r_+ = 1.0$ e vários valores para a carga (menores que q_{im}).

As frequências reais e imaginárias estão relacionadas com o tempo de amortecimento e com o tempo de oscilação. Vemos que à medida em que q aumenta, $-\text{Im}(\omega)$ também aumenta, o que corresponde a uma diminuição da escala de tempo de decaimento. Além disso, a tabela 8.2 e figura 8.4 também nos mostram que quanto maior q , menor as frequências de oscilação. Ou seja, se perturbamos um buraco negro AdS carregado, o fundo não “vibra” por tanto tempo como vibraria um buraco negro com menos carga.

Para valores da carga elétrica até um certo limite q_{lim} , as frequências quasi-normais computadas, juntamente com o panorama geral exemplificado pela figura 8.4, concordam com os resultados apresentados em [29]. O panorama geral é que, a medida que a carga elétrica aumenta, o campo decai mais rapidamente e oscila com uma frequência menor. Na tabela 8.2 são listados os valores para as partes reais e imaginárias das frequências quasi-normais em várias configurações de parâmetros.

$r_+ = 0.4 (q_{ext} = 0.4866)$			$r_+ = 1 (q_{ext} = 2)$		
q	$-\text{Im}(\omega)$	$\text{Re}(\omega)$	q	$-\text{Im}(\omega)$	$\text{Re}(\omega)$
0	1.007	2.363	0	2.671	2.792
0.1000	1.034	2.327	0.1000	2.680	2.782
0.2000	1.132	2.217	0.2010	2.689	2.773
0.3000	1.369	2.074	0.5500	2.814	2.605
0.3162	1.420	2.051	0.6693	2.890	2.503
0.3536	1.531	2.043	1.0119	3.469	2.263

Tabela 8.2: *Modos quasi-normais para buraco negro Reissner-Nordström AdS, para várias configurações de parâmetros com $\ell = 0$ e $R = 1$. Os valores para as cargas são sempre menores que q_{lim} .*

No caso de buracos negros esféricos AdS carregados observamos novamente o mesmo tipo de comportamento com a variação do índice de multipolo que foi visto quando $q = 0$. A medida que ℓ aumenta, a parte imaginária de ω diminui. Ilustramos este ponto na figura 8.5.

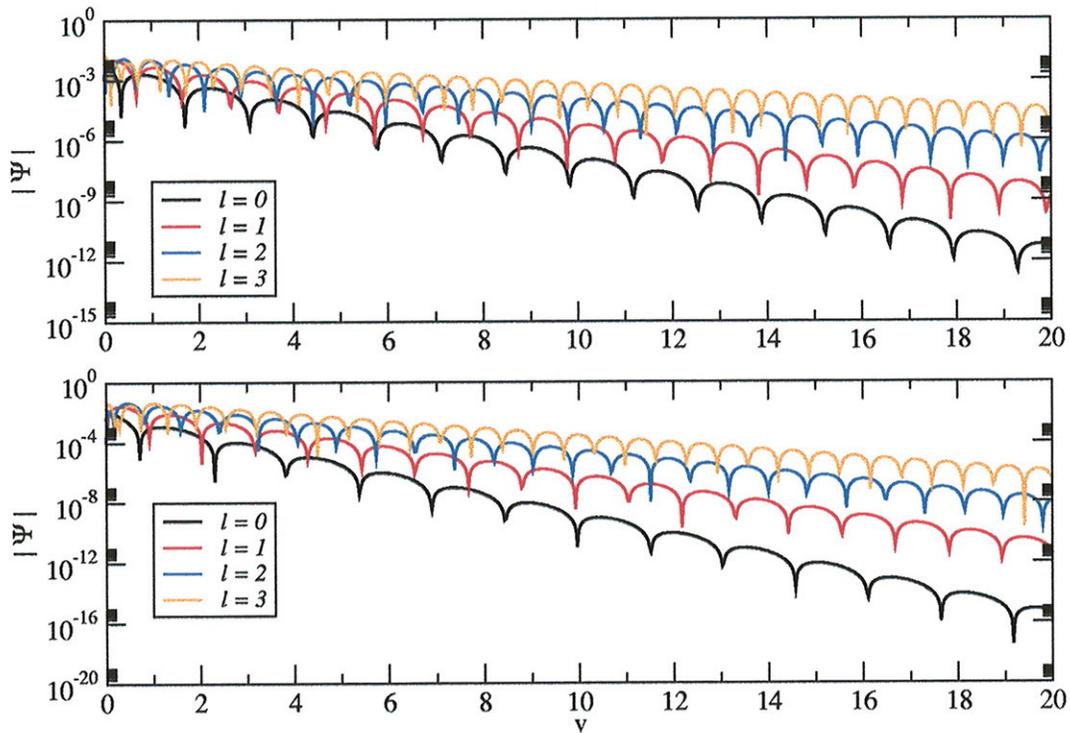


Figura 8.5: (acima) Gráfico semi-log da função de onda no caso $q = 0.1$ para $r_+ = 0.4$, com $\ell = 0, 1, 2, 3$. (abaixo) Gráfico semi-log da função de onda no caso $q = 0.35$ para $r_+ = 0.4$, com $\ell = 0, 1, 2, 3$.

Entretanto o quadro esboçado até aqui para a propagação de campos escalares em geometrias RNAdS não se mantém quando aumentamos suficientemente a carga do buraco negro. Para valores de q maiores que o valor limite q_{lim} , a dinâmica do campo escalar muda drasticamente. Vemos o surgimento de uma cauda exponencial. O comportamento típico da função de onda neste regime é ilustrado na figura 8.6.

A evolução do campo mostrado nas figuras anteriores é qualitativamente diferente. Aqui nós vemos que a escala de tempo de decaimento aumenta com q , correspondendo a uma diminuição da frequência imaginária. Isso significa que acima de q_{lim} , quanto maior a carga q , mais lentamente a perturbação decai no exterior. Verificamos inclusive que q_{lim} não depende apenas dos parâmetros do espaço-tempo, mas também do parâmetro ℓ , como pode ser visto por exemplo através da curva para $q = 0.39$ nos gráficos da figura 8.6.

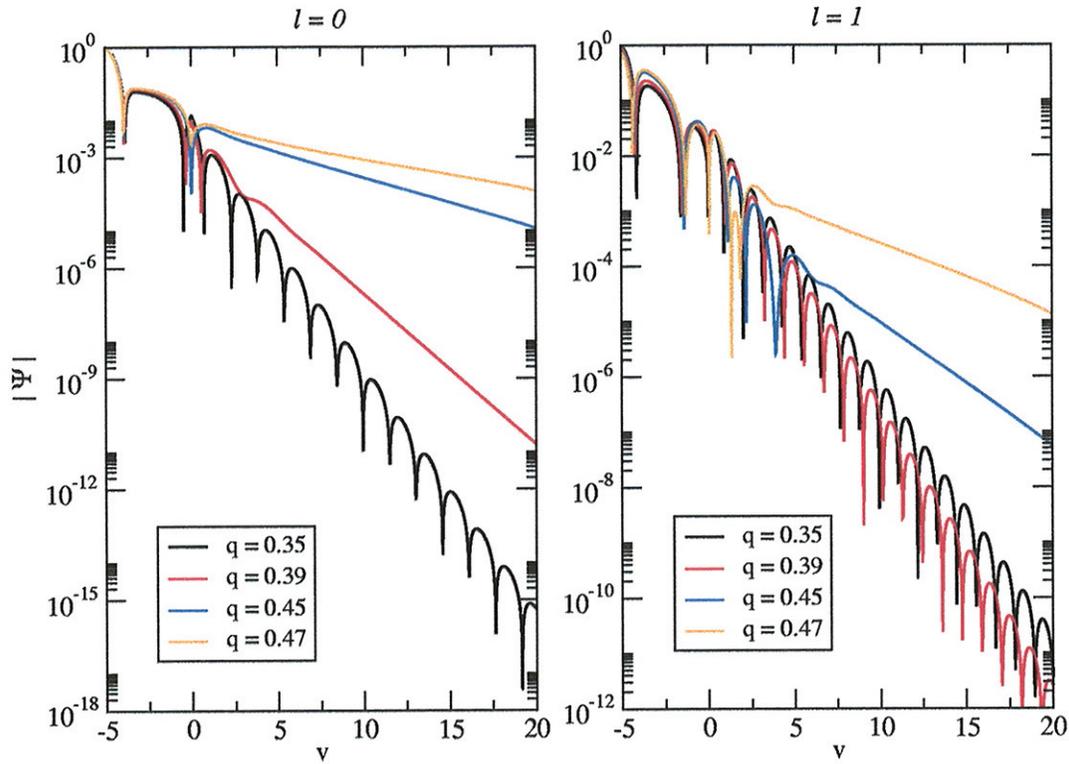


Figura 8.6: Gráfico semi-log da função de onda com $r_+ = 0.4$ e alguns valores de q , com $\ell = 0$ (esquerda) e $\ell = 1$ (direita). O valor extremo de q neste caso é 0.4866.

Essa mudança qualitativa nas características do decaimento do campo escalar é um dos resultados importantes deste capítulo. Ressalta a necessidade da resolução da equação de movimento dependente do tempo (em oposição aos métodos independentes do tempo) para a compreensão da dinâmica dos campos de interesse.

Capítulo 9

Conclusões

O trabalho desenvolvido nesta tese apresenta uma visão ampla do comportamento de vários campos de interesse em geometrias esféricas. No caso quadridimensional com constante cosmológica positiva, são analisados os campos escalar, eletromagnético e gravitacional. Este é talvez o caso mais interessante fisicamente. A possibilidade de detecção de ondas gravitacionais nos próximos anos torna atraente tais considerações.

Abordamos também a dinâmica de campos escalares em geometrias esféricas com dimensão maior que quatro. Embora buracos negros de maior dimensionalidade talvez não sejam fisicamente relevantes, eles se encaixam muito bem em alguns contextos explorados atualmente, como correspondência (A)dS/CFT e gravidade quântica.

Considerando geometrias assintoticamente de Sitter, um caso bastante importante estudado é o limite em que a constante cosmológica é quase extrema. Neste limite, os horizontes de eventos e cosmológico estão muito próximos. A importância do estudo da dinâmica de campos nestas geometrias é que ela é bastante simples. Foi visto nesta tese que para condições bastante gerais, o potencial efetivo é do tipo Pöschl-Teller, e o decaimento é completamente dominado por modos quasi-normais. As frequências podem ser determinadas analiticamente, para uma grande classe de situações, incluindo campos escalares massivos em dimensões maiores que quatro. Os resultados numéricos estão em perfeito acordo com as expressões analíticas.

Saindo do limite quase extremo, a situação é bem mais complexa. Somos forçados a recorrer a métodos aproximativos. Para os casos assintoticamente de Sitter, utilizamos um método semi-analítico para o cálculo das frequências, e um método numérico para a resolução

do problema dependente do tempo. No quadro que emerge do trabalho realizado, com $\Lambda > 0$ e $\ell > 0$, temos quatro regimes:

- O regime quase extremo: neste regime, temos expressões analíticas para o potencial $V(x)$ e para as frequências quasi-normais. Os modos quasi-normais são completos, e a função de onda, para os campos estudados, são inteiramente dominados por este tipo de decaimento.
- Próximo do regime quase extremo: as funções de onda ainda são dominadas pelo decaimento quasi-normal, mas as frequências se desviam do previsto no regime quase extremo.
- Região intermediária: as funções de onda sofrem uma mudança qualitativa importante, com o aparecimento de uma cauda exponencial. Esta cauda domina o decaimento em tempos grandes.
- Próximo do limite assintoticamente plano: surge nas funções de onda uma região intermediária entre a fase de decaimento quasi-normal e a cauda exponencial — uma região de decaimento em lei de potência. À medida em que nos aproximamos do limite assintoticamente plano, esta região se estende cada vez mais. Quando $\Lambda = 0$, a cauda exponencial não está presente, sendo totalmente substituída pela cauda em lei de potência.

O quadro acima é bastante geral, compatível com todos os valores de d e q verificados. De fato, vimos que a influência da carga é muito branda no caso assintoticamente de Sitter. As frequências quasi-normais variam pouco com q , e os coeficientes de decaimento exponencial não variam nada, pelo menos no âmbito do método numérico usado. Inclusive, verificamos que a transição para o caso de carga nula é suave. Não foi observado nenhum indício de descontinuidade no limite $q \rightarrow 0$.

Um ponto extremamente importante no caso de campos escalares nas geometrias assintoticamente de Sitter vistas é que existe a possibilidade de potenciais efetivos que não são positivos definidos. A dinâmica do campo associado muda de forma drástica. De fato, observamos que o modo $\ell = 0$ vai assintoticamente para uma constante, pelo menos no contexto de um problema de condições iniciais características. Ressaltamos que não foram observados modos crescentes.

Nesta tese tratamos também de campos escalares evoluindo em geometrias esféricas que são assintoticamente anti-de Sitter. Os potenciais efetivos são positivo definidos, porém com um comportamento assintótico peculiar. Neste caso, é talvez um abuso de linguagem falar

sobre modos quasi-normais, embora possa ser definido um termo análogo ao visto nos casos assintoticamente planos e de Sitter.

Observamos que, para o caso Scharzschild-anti-de Sitter, o decaimento é dominado por uma fase quasi-normal para qualquer valor da dimensão do espaço-tempo. Os valores específicos mostrados aqui são compatíveis com os obtidos por outros métodos. No trabalho desenvolvido aqui não são observadas caudas quando $q = 0$.

A introdução de carga, no entanto, muda este cenário. Para valores de carga acima de até um certo limite q_{lim} , continuam sendo observados somente uma evolução em modos quasi-normais. Porém, com $q > q_{lim}$, o decaimento para tempos grandes passa a ser dominado por uma fase exponencial pura.

Uma possível extensão do trabalho desenvolvido aqui poderia incluir o estudo de perturbações eletromagnéticas e gravitacionais em geometrias Reissner-Nordström-de Sitter. Neste caso, os modos são necessariamente acoplados, e os potenciais efetivos associados são diferentes. Seria interessante também a investigação de perturbações mais complexas em geometrias assintoticamente anti-de Sitter.

Apêndice A

Estrutura de Horizontes

A.1 Horizontes em SdS d-Dimensional

Apresentaremos nesta seção as demonstrações das proposições 4.1 e 4.2. Nestas proposições são classificados os zeros reais da função $h(r)$ com $\Lambda > 0$, $m > 0$ e $q = 0$, ou de forma equivalente os zeros do polinômio

$$P_0(r) = r^{d-1} - a^2 r^{d-3} + 2ma^2 . \quad (\text{A.1})$$

Antes de passarmos para as proposições propriamente ditas, vamos fazer uma análise geral do problema. As derivadas do polinômio $P_0(r)$ podem ser imediatamente calculadas:

$$P_0'(r) = (d-1)r^{d-2} - (d-3)a^2 r^{d-4} , \quad (\text{A.2})$$

$$P_0''(r) = (d-1)(d-2)r^{d-3} - (d-3)(d-4)a^2 r^{d-5} . \quad (\text{A.3})$$

Para $d > 4$, a função $P_0'(r)$ possui três zeros, denotados como r'_+ , r'_- e r'_0 :

$$r'_0 = 0 , \quad (\text{A.4})$$

$$r'_+ = a \sqrt{\frac{d-3}{d-1}} > 0 , \quad (\text{A.5})$$

$$r'_- = -r'_+ = -a \sqrt{\frac{d-3}{d-1}} < 0 . \quad (\text{A.6})$$

Com $d = 4$, existe uma peculiaridade. Neste caso, o ponto $r = r'_0 = 0$ não é um zero de $P'_0(r)$, e os únicos zeros da derivada de $P_0(r)$ são dados por r'_+ e r'_- :

$$r'_+ = -r'_- = \frac{a}{\sqrt{3}}. \quad (\text{A.7})$$

Para caracterizar os zeros de $P'_0(r)$, calculamos a derivada segunda nestes pontos. Após algumas simplificações, obtemos

$$P''_0(r'_+) = 2(d-1)^{\frac{5-d}{2}}(d-3)^{\frac{d-3}{2}}a^{d-3} > 0. \quad (\text{A.8})$$

Portanto, o ponto $r = r'_+$ é sempre um mínimo local.

De forma análoga para r'_- , temos para $d > 4$:

$$P''_0(r'_-) = -(-1)^d 2(d-1)^{\frac{5-d}{2}}(d-3)^{\frac{d-3}{2}}a^{d-3}. \quad (\text{A.9})$$

O ponto $r = r'_-$ é então um ponto de máximo local, no caso de d par, ou um ponto de mínimo, no caso de d ímpar. O mesmo resultado é obtido no caso em que $d = 4$.

Com $d > 4$, temos ainda um outro zero da função $P'_0(r)$. É imediato verificar que

$$P''_0(r'_0 = 0) = \begin{cases} -2a^2 < 0 & d = 5 \\ 0 & d > 5 \end{cases}. \quad (\text{A.10})$$

Desta forma, o ponto $r = r'_0$ é um ponto inflexão, com excessão do caso $d = 5$, em que este ponto é um máximo local.

Vamos calcular o valor de $P_0(r)$ nos pontos extremos r'_+ e r'_- . Para qualquer valor de d , temos que

$$P_0(r'_+) = 2a^2 \left[m - a^{d-3} \sqrt{\frac{(d-3)^{d-3}}{(d-1)^{d-1}}} \right], \quad (\text{A.11})$$

e portando o sinal de $P_0(r'_+)$ pode ser positivo, negativo ou nulo.

Vejamos o máximo local $r = r'_-$. Para este valor de r , obtemos

$$P_0(r'_-) = 2a^2 \left[m + (-1)^d a^{d-3} \sqrt{\frac{(d-3)^{d-3}}{(d-1)^{d-1}}} \right]. \quad (\text{A.12})$$

Se d é par, $P_0(r'_-)$ fica

$$P_0(r'_-) = 2a^2 \left[m + a^{d-3} \sqrt{\frac{(d-3)^{d-3}}{(d-1)^{d-1}}} \right] > 0, \quad (\text{A.13})$$

ou seja, $P_0(r'_-)$ é sempre positivo. Por outro lado, se d é ímpar

$$P_0(r'_-) = P_0(r'_+), \quad (\text{A.14})$$

e o sinal de $P_0(r'_-)$ não é fixo, sendo porém igual ao sinal de $P_0(r'_+)$.

Para o ponto $r = 0$, que é um máximo local em $d = 5$ e um ponto de inflexão em $d > 5$, temos que

$$P_0(0) = 2ma^2 > 0, \quad (\text{A.15})$$

que é sempre positivo, independente da dimensão.

Veremos a seguir que o quadro geral é muito parecido para qualquer valor de d , com $d \geq 4$. Entretanto, os detalhes específicos dependem da dimensão ser par ou ímpar. Abordaremos estes casos em duas proposições, apresentadas a seguir.

Proposição 4.1: *Seja $d \geq 4$ par, $a^2 > 0$ e $m > 0$. Dependendo do valor de $a^{2(d-3)}/m^2$, temos as seguintes possibilidades quanto aos zeros reais do polinômio $P_0(r)$:*

- A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} > \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}}$ é uma condição necessária e suficiente para $P_0(r)$ possuir uma raiz real negativa e duas raízes reais positivas, todas com multiplicidade 1.
- A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} = \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}}$ é uma condição necessária e suficiente para $P_0(r)$ possuir uma raiz real negativa com multiplicidade 1, e uma raiz real positiva multiplicidade 2.
- A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} < \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}}$ é uma condição necessária e suficiente para $P_0(r)$ possuir uma raiz real negativa multiplicidade 1.

A demonstração se baseia fortemente na continuidade do polinômio $P_0(r)$. Para d par, este polinômio apresenta o seguinte comportamento assintótico

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} P_0(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{d-1} \rightarrow +\infty, \quad (\text{A.16})$$

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} P_0(r) = \lim_{r \rightarrow -\infty} r^{d-1} \rightarrow -\infty. \quad (\text{A.17})$$

Vamos demonstrar primeiro que as condições citadas são suficientes. Pela continuidade do polinômio, e pelo fato de que ele é positivo em $r = 0$ e tender a menos infinito com $r \rightarrow -\infty$, vemos que $P_0(r)$ possui pelo menos um zero real negativo. Mas como d é par, o polinômio $P_0(r)$ só possui um ponto de máximo para $r < 0$, e esse ponto de máximo é tal que

$$P_0(r'_-) > P_0(0) > 0, \quad (\text{A.18})$$

de forma que o polinômio só cruza o eixo das abcissas uma vez. O zero real negativo portanto é único.

Por outro lado, devido a continuidade de $P_0(r)$, ao fato de cruzar o eixo das ordenadas em um valor positivo, tender a mais infinito com $r \rightarrow +\infty$ e só possuir um mínimo para $r > 0$, vemos que os possíveis zeros positivos de $P_0(r)$ dependem do sinal deste polinômio no ponto $r = r'_+$. Temos assim três possibilidades:

- A condição $P_0(r'_+) < 0$, ou seja

$$\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} > \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}} \quad (\text{A.19})$$

ou

$$m^2 \Lambda^{d-3} < \frac{(d-1)^{d-1}}{[3(d-3)]^{d-3}} \quad (\text{A.20})$$

é uma condição suficiente para o polinômio possuir somente 2 zeros reais positivos.

Foi visto que o ponto extremo r_- é tal que $P_0(r_-) > 0$, e por hipótese temos que o ponto extremo r_+ é tal que $P_0(r_+) < 0$. Portanto nenhuma das raízes reais é um zero do polinômio $P'_0(r)$, que é condição necessária e suficiente para que a multiplicidade destas raízes seja 1.

- A condição $P_0(r'_+) = 0$, ou seja

$$\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} = \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}} \quad (\text{A.21})$$

ou

$$m^2 \Lambda^{d-3} = \frac{(d-1)^{d-1}}{[3(d-3)]^{d-3}} \quad (\text{A.22})$$

é uma condição suficiente para o polinômio possuir 1 zero real positivo. A raiz negativa tem multiplicidade 1, pelos argumentos do caso anterior. A raiz positiva, entretanto, por hipótese é raiz de $P'_0(r)$, o que implica que a sua multiplicidade é maior que 1. Mas foi mostrado que esta raiz é um ponto extremo, ou seja, $P''_0(r'_+) < 0$. Portanto sua multiplicidade é menor que

3, portanto 2.

- A condição $P_0(r'_+) > 0$, ou seja, se

$$\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} < \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}} \quad (\text{A.23})$$

ou

$$m^2 \Lambda^{d-3} > \frac{(d-1)^{d-1}}{[3(d-3)]^{d-3}} \quad (\text{A.24})$$

é uma condição suficiente para o polinômio não possuir zeros reais positivos. E conforme discutido, a raiz negativa tem multiplicidade 1.

Mostrar que as condições citadas são necessárias é bem mais fácil. Foi visto que o polinômio possui dois pontos extremos r'_- e r'_+ . Se o polinômio possui três raízes reais (r_n , r_+ e r_c) tais que $r_n < 0 < r_+ < r_c$, e como o polinômio $P_0(r)$ tende a mais infinito com $r \rightarrow +\infty$, então $P_0(r) < 0$ entre r_+ e r_c . E como $P_0(r)$ é uma função contínua, $r'_+ \in]r_+, r_c[$, logo $P_0(r'_+) < 0$.

Se o polinômio possui duas raízes reais (r_n e r_c) tais que $r_n < 0 < r_c$, e como $P_0(r)$ tende a mais infinito com $r \rightarrow +\infty$, o ponto mínimo para $r > 0$ é o ponto r_c em que $P_0(r_c) = 0$. Desta forma $r_c = r'_+$, e $P_0(r'_+) = 0$.

Se o polinômio não possui raízes positivas, então $P(r) > 0$ para $r > 0$. Como $r'_+ > 0$, segue que $P(r'_+) > 0$. ■

Proposição 4.2: *Seja $d \geq 5$ ímpar, $a^2 > 0$ e $m > 0$. Dependendo do valor de a^{d-3}/m , temos as seguintes possibilidades quanto aos zeros reais do polinômio $P_0(r)$:*

- A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} > \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}}$, é uma condição necessária e suficiente para $P_0(r)$ possuir duas raízes reais negativas e duas raízes reais positivas.
- A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} = \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}}$, é uma condição necessária e suficiente para $P_0(r)$ possuir uma raiz real negativa e uma raiz real positiva.
- A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} < \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}}$, é uma condição necessária e suficiente para $P_0(r)$ não possuir nenhuma raiz real.

Esse polinômio é uma função par, com o seguinte comportamento assintótico:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P_0(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{d-1} \rightarrow +\infty, \quad (\text{A.25})$$

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} P_0(r) = \lim_{r \rightarrow -\infty} r^{d-1} \rightarrow +\infty. \quad (\text{A.26})$$

Vamos demonstrar primeiro que as condições citadas são suficientes. Como a função $P_0(r)$ é contínua, possui um valor positivo em $r = 0$, tende a mais infinito com $r \rightarrow \infty$, e só possui um mínimo local para $r > 0$, infere-se que o número de zeros neste intervalo depende do sinal de $P_0(r'_+)$. Além disso, a função é par, implicando na existência do mesmo número de zeros para $r < 0$. Temos novamente três possibilidades.

- No caso de $P_0(r'_+) < 0$, ou seja se

$$\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} > \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}} \quad (\text{A.27})$$

ou

$$m^2 \Lambda^{d-3} < \frac{(d-1)^{d-1}}{[3(d-3)]^{d-3}} \quad (\text{A.28})$$

então o polinômio possui dois zeros reais positivos e dois zeros reais negativos. Estes zeros possuem todos multiplicidade 1, pois não são pontos extremos.

- No caso de $P_0(r'_+) = 0$, ou seja se

$$\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} = \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}} \quad (\text{A.29})$$

ou

$$m^2 \Lambda^{d-3} = \frac{(d-1)^{d-1}}{[3(d-3)]^{d-3}} \quad (\text{A.30})$$

então o polinômio possui um zero real positivo e um zero real negativo. Estes zeros possuem multiplicidade 2, pois por hipótese são pontos extremos (conforme discutido na proposição 1).

- No caso de $P_0(r'_+) > 0$, ou seja se

$$\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} < \frac{(d-1)^{d-1}}{(d-3)^{d-3}} \quad (\text{A.31})$$

ou

$$m^2 \Lambda^{d-3} > \frac{(d-1)^{d-1}}{[3(d-3)]^{d-3}} \quad (\text{A.32})$$

então o polinômio não possui zeros reais. A demonstração de que as condições são necessárias é idêntica ao caso em que d é par. ■

A.2 Horizontes em RNdS d-Dimensional

Para o caso em que a carga é não nula, o problema se torna mais complexo. O polinômio cujos zeros estamos interessados passa a ser

$$P(r) = r^{2d-4} - a^2 r^{2d-6} + 2ma^2 r^{d-3} - a^2 q^2. \quad (\text{A.33})$$

A estratégia no entanto é a mesma: estudar os pontos extremos para determinar a posição dos zeros reais. As derivadas da função $P(r)$ são

$$P'(r) = (2d-4)r^{2d-5} - (2d-6)a^2 r^{2d-7} + 2(d-3)ma^2 r^{d-4}, \quad (\text{A.34})$$

$$P''(r) = (2d-4)(2d-5)r^{2d-6} - (2d-6)(2d-7)a^2 r^{2d-8} + 2(d-3)(d-4)ma^2 r^{d-5}. \quad (\text{A.35})$$

Em geral não somos capazes de determinar nem mesmo os zeros de $P'(r)$. Entretanto, podemos determinar a estrutura de zeros deste polinômio, da mesma maneira que fizemos com o polinômio $P_0(r)$. Isto é feito na proposição A.1 a seguir.

Proposição A.1: *Seja $d \geq 4$, $a^2 > 0$ e $m > 0$. Seja*

$$\left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} \right)_{P'} = \frac{1}{4} \frac{(d-1)^{d-1} (d-2)^{d-3}}{(d-3)^{2(d-3)}}. \quad (\text{A.36})$$

Dependendo do valor de $a^{2(d-3)}/m^2$, temos as seguintes possibilidades quanto aos zeros reais do polinômio $P'(r)$:

- *A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} > \left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} \right)_{P'}$, com d par, é uma condição necessária e suficiente para $P'(r)$ possuir uma raiz real negativa, duas raízes reais positivas e uma raiz em $r = 0$.*
- *A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} > \left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} \right)_{P'}$, com d ímpar, é uma condição necessária e suficiente para $P'(r)$ possuir duas raízes reais negativas, duas raízes reais positivas e uma raiz em $r = 0$.*
- *A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} = \left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} \right)_{P'}$ é uma condição necessária e suficiente para $P'(r)$ possuir uma raiz real negativa, uma raiz real positiva e uma raiz em $r = 0$.*
- *A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} < \left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} \right)_{P'}$, com d par, é uma condição necessária e suficiente para $P'(r)$ possuir uma raiz real negativa e uma raiz em $r = 0$.*

- A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} < \left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2}\right)_{P'}$, com d ímpar, é uma condição necessária e suficiente para que a única raiz real que $P'(r)$ possua seja $r = 0$.

A demonstração usa as proposições 4.1 e 4.2. Podemos fazer

$$P'(r) = (2d - 4)r^{d-4} \left[r^{d-1} - \frac{2d-6}{2d-4}a^2r^{d-3} + \frac{2(d-3)}{2d-4}ma^2 \right]. \quad (\text{A.37})$$

Escrevemos a expressão anterior como

$$P'(r) = (2d - 4)r^{d-4}Q(r), \quad (\text{A.38})$$

onde definimos $Q(r)$ como

$$Q(r) = r^{d-1} - \frac{d-3}{d-2}a^2r^{d-3} + \frac{d-3}{d-2}ma^2. \quad (\text{A.39})$$

Vemos imediatamente que $r = 0$ é sempre uma raiz de $P'(r)$. Por outro lado, comparando as expressões (4.6) e (A.39), é aparente que a estrutura dos polinômios $Q(r)$ e $P_0(r)$ é a mesma, ou seja, os coeficientes não nulos dos dois polinômios têm o mesmo sinal. Isso fica explícito com a transformação

$$a'^2 = \frac{d-3}{d-2}a^2 > 0, \quad (\text{A.40})$$

$$2m'a'^2 = \frac{d-3}{d-2}ma^2 > 0. \quad (\text{A.41})$$

De forma que o polinômio $Q(r)$ é escrito como

$$Q(r) = r^{d-1} - a'^2r^{d-3} + 2m'a'^2. \quad (\text{A.42})$$

O termo $\frac{a'^{2(d-3)}}{m'^2}$, em termos de a e m , fica

$$\frac{a'^{2(d-3)}}{m'^2} = 4 \left(\frac{d-3}{d-2} \right)^{d-3} \frac{a^{2(d-3)}}{m^2} \quad (\text{A.43})$$

Usando as proposições 4.1 e 4.2, chega-se as condições citadas. ■

Uma vez conhecida a estrutura de zeros de $P'(r)$, precisamos determinar o caráter destes zeros, ou seja, se eles representam máximos, mínimos ou pontos de inflexão. Para isso, apresentamos a seguinte proposição.

Proposição A.2: *Seja $d > 4$, $a^2 > 0$ e $m > 0$. Seja*

$$\left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2}\right)_{P''} = \frac{1}{4} \frac{(2d-5)^{d-3}(d-1)^{d-1}(d-2)^{d-3}(d-4)^2}{(2d-7)^{d-1}(d-3)^{2(d-3)}}. \quad (\text{A.44})$$

Dependendo do valor de $a^{2(d-3)}/m^2$, temos as seguintes possibilidades quanto aos zeros reais do polinômio $P''(r)$:

- *A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} > \left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2}\right)_{P''}$, com d par, é uma condição necessária e suficiente para $P''(r)$ possuir uma raiz real negativa, duas raízes reais positivas e uma raiz em $r = 0$.*
- *A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} > \left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2}\right)_{P''}$, com d ímpar, é uma condição necessária e suficiente para $P''(r)$ possuir duas raízes reais negativas, duas raízes reais positivas e uma raiz em $r = 0$.*
- *A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} = \left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2}\right)_{P''}$ é uma condição necessária e suficiente para $P''(r)$ possuir uma raiz real negativa, uma raiz real positiva e uma raiz em $r = 0$.*
- *A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} < \left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2}\right)_{P''}$, com d par, é uma condição necessária e suficiente para $P''(r)$ possuir uma raiz real negativa e uma raiz em $r = 0$.*
- *A condição $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} < \left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2}\right)_{P''}$, com d ímpar, é uma condição necessária e suficiente para que a única raiz real que $P''(r)$ possua seja $r = 0$.*

A demonstração é análoga a demonstração feita para a proposição A.1. O único ponto a se ter cuidado é quando $d = 4$. Neste caso particular, as raízes de $P''(r)$ podem ser facilmente calculadas:

$$r''_- = -\frac{a}{\sqrt{6}} \quad r''_+ = \frac{a}{\sqrt{6}}. \quad (\text{A.45})$$

Isso é válido para qualquer valor de $\frac{a^2}{m^2} > 0$.

Através da proposição A.2, é visto que se $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} > \left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2}\right)_{P'}$, o polinômio $P'(r)$ possui duas raízes positivas (denotadas r'_{++} e r'_{+}) e uma raiz negativa (denotada r'_n). Por outro lado, temos que

$$\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} > \left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2}\right)_{P'} > \left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2}\right)_{P''}, \quad (\text{A.46})$$

portanto o polinômio $P''(r)$ também possui duas raízes positivas (denotadas r''_{++} e r''_{+}) e uma raiz negativa (denotada r''_n). O fato de $P''(r)$ possuir somente duas raízes positivas (para

$d > 4$) restringe os zeros de $P'(r)$ a serem extremos. Para $d > 4$, $P'(r)$ possui somente uma raiz positiva, e a mesma conclusão se mantém.

Independente da dimensão, o polinômio $P(r)$ apresenta os seguintes comportamentos assintóticos

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} P(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{2d-4} \rightarrow +\infty, \quad (\text{A.47})$$

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} P(r) = \lim_{r \rightarrow -\infty} r^{2d-4} \rightarrow +\infty. \quad (\text{A.48})$$

Além disso

$$P(r=0) = -q^2 a^2 < 0. \quad (\text{A.49})$$

Como

$$0 < r''_+ < r'_+ < r''_{++} < r'_{++} \quad (\text{A.50})$$

vemos que o ponto r'_{++} é um ponto de mínimo local para $P(r)$, enquanto que r'_+ é um ponto de máximo local. Desta forma, temos necessariamente que

$$P(r'_+) > P(r''_+). \quad (\text{A.51})$$

Porém, existe a possibilidade destes valores de $P(r)$ serem positivos, negativos ou mesmo nulos. Vamos abordar estas possibilidades nas proposições A.3 e A.4.

Proposição A.3: *Seja $d \geq 4$, d par, $a^2 > 0$ e $m > 0$. Se $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} > \left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2}\right)_{P'}$, as raízes reais do polinômio $P(r)$ podem ser:*

- Uma raiz negativa e uma raiz positiva, ambas com multiplicidade 1.
- Uma raiz negativa e uma raiz positiva, ambas com multiplicidade 1 e uma outra raiz positiva, com multiplicidade 2.
- Uma raiz negativa e três raízes positivas, todas com multiplicidade 1.

Como o polinômio $P'(r)$ só tem um zero negativo r'_n , devido a

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} P(r) = \lim_{r \rightarrow -\infty} r^{2d-4} \rightarrow +\infty, \quad (\text{A.52})$$

$$P(r=0) = -q^2 a^2 < 0, \quad (\text{A.53})$$

vemos que r'_n é necessariamente um mínimo local, e que $P(r)$ só possui um único zero negativo.

- Se $P(r'_+) > P(r'_{++}) > 0$, vemos que $P(r)$ possui um único zero real positivo.

- Se $P(r'_+) > 0$ e $P(r'_{++}) = 0$, vemos que $P(r)$ possui duas raízes reais positivas. A raiz r'_+ entretanto é também um mínimo e portanto tem multiplicidade 2.
- $P(r'_+) = 0$ e $P(r'_{++}) < 0$, vemos que $P(r)$ possui duas raízes reais positivas.
- $P(r'_+) > 0$ e $P(r'_{++}) < 0$, vemos que $P(r)$ possui três raízes reais positivas.

Proposição A.4: *Seja $d \geq 5$, d ímpar, $a^2 > 0$ e $m > 0$. Se $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} > \left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2}\right)_{P'}$, as raízes reais do polinômio $P(r)$ podem ser:*

- Uma raiz negativa e uma raiz positiva, ambas com multiplicidade 1.
- Duas raízes negativas e duas raízes positivas, onde uma das raízes positivas e uma das raízes negativas têm multiplicidade 2.
- Três raízes negativas e três raízes positivas, todas com multiplicidade 1.

A demonstração é essencialmente a mesma que foi feita para a preposição A.3. A diferença é que, para d ímpar, o polinômio $P(r)$ é uma função par. Desta forma, existem o mesmo número de raízes negativas para $P(r)$ quanto de raízes positivas. ■

Proposição A.5: *Seja $d \geq 4$, $a^2 > 0$ e $m > 0$. Se $\frac{a^{2(d-3)}}{m^2} \leq \left(\frac{a^{2(d-3)}}{m^2}\right)_{P'}$, o polinômio $P(r)$ possui uma raiz positiva e uma raiz negativa.*

Independente da dimensão, o polinômio $P(r)$ apresenta os seguintes comportamentos assintóticos

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} P(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{2d-4} \rightarrow +\infty, \quad (\text{A.54})$$

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} P(r) = \lim_{r \rightarrow -\infty} r^{2d-4} \rightarrow +\infty, \quad (\text{A.55})$$

Além disso

$$P(r=0) = -q^2 a^2 < 0 \quad (\text{A.56})$$

de forma que $P(r)$ deve cruzar o eixo das abcissas pelo menos uma vez para $r < 0$ e $r > 0$. Mas o zero positivo e o zero negativo são únicos, pois pela proposição A.1, o polinômio $P(r)$ não possui dois extremos no eixo negativo nem no eixo positivo. ■

Por uma questão de simplicidade de apresentação, as proposições A.3, A.4 e A.5 apresentadas nesta seção foram expostas no capítulo 4 de uma forma compacta nas proposições 4.3 e 4.4.

A.3 Horizontes em RNAdS Quadrídimensional

Demonstraremos nesta seção a proposição 7.1 apresentada no capítulo 7. Estamos interessados em classificar os zeros do polinômio $P(r)$ dado por

$$P(r) = r^4 + R^2 r^2 - 2mR^2 r + R^2 q^2 . \quad (\text{A.57})$$

onde assumimos que $m > 0$ e $R^2 > 0$. Para esta função, temos o seguinte comportamento

$$P(r=0) = R^2 q^2 > 0 , \quad (\text{A.58})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(r) \rightarrow +\infty , \quad (\text{A.59})$$

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} P(r) \rightarrow +\infty . \quad (\text{A.60})$$

Desta forma, a menos que o polinômio possua extremos, ele não terá zeros reais.

Vamos verificar os possíveis extremos de $P(r)$. As derivadas deste polinômio podem ser facilmente calculadas:

$$P'(r) = 4r^3 + 2R^2 r - 2mR^2 , \quad (\text{A.61})$$

$$P''(r) = 12r^2 + 2R^2 r^2 . \quad (\text{A.62})$$

É aparente que a função $P'(r)$ é tal que

$$P'(r=0) = -2mR^2 < 0 , \quad (\text{A.63})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P'(r) \rightarrow +\infty , \quad (\text{A.64})$$

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} P'(r) \rightarrow -\infty . \quad (\text{A.65})$$

de forma que possui pelo menos um zero positivo. Mas é imediato verificar que este zero é único, e que ele representa um ponto de mínimo, denotado aqui por r_{min} . A proposição 7.1 segue naturalmente.

Proposição 7.1: *Seja $m > 0$, $q \neq 0$ e $\Lambda < 0$. As raízes reais do polinômio $P(r)$ podem ser:*

- *Duas raízes positivas ($0 < r_- < r_+$), ambas com multiplicidade 1.*
- *Uma raiz positiva, com multiplicidade 2.*

- *Nenhuma raiz real.*

Como $r_{min} > 0$ e $P(r = 0) > 0$, as possíveis raízes de $P(r)$ são necessariamente positivas. Dependendo do sinal da constante $P(r_{min})$, temos três possibilidades.

- No caso de $P(r_{min}) < 0$, o polinômio $P(r)$ possui duas raízes positivas com multiplicidade 1.
- No caso de $P(r_{min}) = 0$, o polinômio $P(r)$ possui uma única raiz positiva, o próprio r_{min} . Como esta raiz é um ponto extremo, ela tem multiplicidade 2.
- No caso de $P(r_{min}) > 0$, o polinômio $P(r)$ não possui raízes reais. ■

A.4 Horizontes em SAdS d-Dimensional

Demonstraremos agora a proposição 7.2 apresentada no capítulo 7.

Proposição 7.2: *Seja $m > 0$, $d > 4$ e $\Lambda < 0$.*

- *Se d é par, o polinômio $P(r)$ possui uma única raiz real positiva (r_+) de multiplicidade 1.*
- *Se d é ímpar, as únicas raízes reais do polinômio $P(r)$ são uma raiz positiva (r_+) e uma raiz negativa ($-r_+$), ambas com multiplicidade 1.*

Para $d > 3$, $q = 0$ e $\Lambda < 0$, temos que

$$P(r) = r^{d-1} + R^2 r^{d-3} - 2mR^2, \quad (\text{A.66})$$

$$P'(r) = (d-1)r^{d-2} + (d-3)R^2 r^{d-4}. \quad (\text{A.67})$$

Vemos então que se $d > 4$, o polinômio $P'(r)$ um zero em $r = 0$. E se $d = 4$, o polinômio $P'(r)$ não possui zeros reais. Temos também que

$$P''(r) = (d-1)(d-2)r^{d-3} + (d-3)(d-4)R^2 r^{d-5}, \quad (\text{A.68})$$

o que mostra que se $d > 5$, então o ponto $r = 0$ é um ponto de inflexão de $P(r)$, enquanto que se $d = 5$, este ponto é um máximo. É conveniente agora analisar separadamente os casos d par e d ímpar.

- Caso d par.

Neste caso, temos o seguinte comportamento para o polinômio $P(r)$:

$$P(r = 0) = -2mR^2 < 0 , \quad (\text{A.69})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(r) \rightarrow +\infty , \quad (\text{A.70})$$

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} P(r) \rightarrow -\infty . \quad (\text{A.71})$$

Desta forma, como a função $P(r)$ é contínua e não existem pontos extremos para $r \neq 0$, existe um único zero real e positivo para $P(r)$. Segue também que este zero tem multiplicidade 1.

- Caso d ímpar.

Neste caso, $P(r)$ é uma função par com o seguinte comportamento:

$$P(r = 0) = -2mR^2 < 0 , \quad (\text{A.72})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(r) \rightarrow +\infty , \quad (\text{A.73})$$

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} P(r) \rightarrow +\infty . \quad (\text{A.74})$$

Novamente, dado que a função $P(r)$ é contínua e não existem pontos extremos para $r \neq 0$, esta função possui apenas dois zeros reais (r_+ e $-r_+$), com multiplicidades 1. ■

Referências Bibliográficas

- [1] NARAYAN, R. **On the lack of type I X-ray bursts in black hole X-ray binaries: evidence for the event horizon?** *Astrophysical Journal*, v.574, p. L139-L142, 2002. <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0203089>>. NARAYAN, R. **Evidence for the black hole event horizon.** Proceedings of the Coral Gables Conference on High Energy Physics and Cosmology, 2001. <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0204080>>.
- [2] REGGE, T.; WHEELER J. **Stability of a Schwarzschild singularity.** *Physical Review*, v. 108, p.1063-1069, 1957.
- [3] VISHVESHWARA, C. **Stability of the Schwarzschild Metric.** *Physical Review D*, v.1, p.2870-2879, 1970.
- [4] ZERILLI, F. **Effective potential for even-parity Regge-Wheeler gravitational perturbation equations.** *Physical Review Letters*, v.24, p.737-738, 1970.
- [5] ZERILLI, F. **Gravitational field of a particle falling in a Schwarzschild geometry analysed in tensor harmonics.** *Physical Review D*, v. 2, p.2141-2160, 1970.
- [6] PRESS, W. **Long wave trains of gravitational waves from a vibrating black hole.** *Astrophysical Journal*, v.170, p.105-108, 1971.
- [7] CHANDRASEKHAR, S. **The Mathematical Theory of Black Holes.** Oxford: Oxford University Press, 1983.
- [8] PRICE, R. **Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse. I. Scalar and Gravitational Perturbations.** *Physical Review D*, v.5, p.2419-2438, 1972.
- [9] PREPARATA, G.; RUFFINI, R.; XUE, S. **The dyadosphere of black holes and gamma-ray bursts.** *Astronomy and Astrophysics*, v.338, p.87-90, 1998.

- <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/9810182>>.
- RUFFINI, R.; SALMONSON, J.; WILSON, J. XUE, S. **On the pair electromagnetic pulse of a black hole with electromagnetic structure.** *Astronomy and Astrophysics*, v.350, p.334-343, 1999. <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/9907030>>.
- RUFFINI, R.; VITAGLIANO, L. **Irreducible mass and energetics of an electromagnetic black hole.** *Physics Letters B*, v.545, p.233-237, 2002. <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0209072>>.
- [10] RUFFINI, R.; TIOMNO, J.; VISHVESHWARA, C. **Electromagnetic field of a particle moving in a spherically symmetric black hole background.** *Lettere al Nuovo Cimento*, v. 3, n. 5, p. 211-215, 1972.
- [11] ZERILLI, F. **Perturbation analysis for gravitational and electromagnetic radiation in a Reissner-Nordström geometry.** *Physical Review D*, v. 9, p.860-868, 1974.
- [12] GUNDLACH, C.; PRICE, R.; PULLIN, J. **Late-time behavior of stellar collapse and explosions. II. Nonlinear evolution.** *Physical Review D*, v. 49, n. 2, p.890-899, 1994. <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9307010>>.
- [13] MARSA, R.; CHOPTUIK, M. **Black hole-scalar field interactions in spherical symmetry.** *Physical Review D*, v. 54, n. 8, p.4929-4943, 1996. <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9607034>>.
- [14] BURKO, L.; ORI, A. **Late time evolution of nonlinear gravitational collapse.** *Physical Review D*, v. 56, n. 12, p.7820-7832, 1997. <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9703067>>.
- [15] CHING, E.; LEUNG, P.; SUEN, W.; YOUNG, K. **Wave propagation in gravitational systems: Late time behavior.** *Physical Review D*, v. 52, n. 4, p. 2118-2132, 1995. <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9507035>>.
- [16] KOKKOTAS, K.; SCHMIDT, B. **Quasi-normal modes of stars and black holes.** *Living Reviews in Relativity*, v. 2, 1999. <<http://www.livingreviews.org/Articles/Volume2/1999-2kokkotas>> .
- [17] LEAVER, E. **Spectral decomposition of the perturbation response of the Schwarzschild geometry.** *Physical Review D*, v. 34, n. 2, p. 384-408, 1986.
- [18] BACHELOT, A.; MOTET-BACHELET, A. **Les résonances d'un trou noir de Schwarzschild.** *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, v. 59, n. 1, p. 3-68, 1993.

- [19] RIESS, A. et al. **Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant.** *Astrophysical Journal*, v.116, p.1009-1038, 1998. <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/980111>>.
- [20] POLARSKI, D. **The scalar wave equation on static de Sitter and anti-de Sitter spaces.** *Classical and Quantum Gravity*, v.6, p.893-900, 1989.
- [21] MELLOR, F.; MOSS, I. **Stability of black holes in de Sitter space.** *Physical Review D*, v. 41, n. 2, p.403-409, 1990.
- [22] BRADY, P.; CHAMBERS, C.; KRIVAN, W.; LAGUNA, P. **Telling tails in the presence of a cosmological constant.** *Physical Review D*, v. 55, n. 12, p.7538-7545, 1997. <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9611056>>.
- [23] BRADY, P.; CHAMBERS, C.; LAARAKKERS, W.; POISSON, W. **Radiative falloff in Schwarzschild-de Sitter spacetime.** *Physical Review D*, v. 60, 064003, 1999. <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9902010>>.
- [24] BURKO, L. **Structure of the black hole's Cauchy horizon singularity.** *Physical Review Letters*, v.79, p.4958-4961, 1997. <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9710112>>.
- [25] CHAMBERS, C. **The Cauchy horizon in black hole-de Sitter spacetimes.** *Proceedings of the workshop on "The Internal Structure of Black Holes and Spacetime Singularities"*, 1997, Haifa, Israel. <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9709025>>.
- [26] MALDACENA, J. **The large N limit of superconformal field theories and supergravity.** *Advances in Theoretical Mathematical Physics*, v. 2, p.231, 1998. <<http://arxiv.org/abs/hep-th/9711200>>.
- [27] WITTEN, E. **Anti de Sitter space and holography.** *Advances in Theoretical Mathematical Physics*, v. 2, p.253-291, 1998. <<http://arxiv.org/abs/hep-th/9802150>>.
- [28] HOROWITZ, G.; HUBENY, V. **Quasinormal modes of AdS black holes and the approach to thermal equilibrium.** *Physical Review D*, v. 62, 024027, 2000. <<http://arxiv.org/abs/hep-th/9909056>>.
- [29] WANG, B.; LIN, C.; ABDALLA, E. **Quasinormal modes of Reissner-Nordström anti-de Sitter black holes.** *Physics Letters B*, v.481, p.79-88, 2000. <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0003295>>.

- [30] WANG, B.; MOLINA, C.; ABDALLA, E. **Evolving of a massless scalar field in Reissner-Nordström anti-de Sitter spacetimes.** *Physical Review D*, v. 63, 084001, 2001. <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0005143>>.
- [31] MOLINA, C. **Quasinormal modes of d-dimensional spherical black holes with a near extreme cosmological constant.** *Physical Review D*, v. 68, 064007, 2003. <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0304053>>.
- [32] ABDALLA, E; MOLINA, C; SAA, A. **Field propagation in the Schwarzschild-de Sitter black hole.** <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0309078>>.
- [33] MOLINA, C; GIUGNO, D; ABDALLA, E. **Field propagation in the Reissner-Nordström-de Sitter black hole.** <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0309079>>.
- [34] GÖCKELER, M.; SCHÜCLER, T. **Differential Geometry, Gauge Theories and Gravity.** Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- [35] HAWKING, S.; ELLIS, G. **The Large Scale Structure of Space-Time.** Cambridge: Cambridge University Press, 1973.
- [36] WALD, R. **General Relativity.** Chicago: The University of Chicago Press, 1984.
- [37] MISNER, C.; THORNE, K.; WHEELER, J. **Gravitation.** New York: W. H. Freeman and Company, 1970.
- [38] ANDERSON, J.; WILLIAMS, J. **Long-range tests of the equivalence principle.** *Classical and Quantum Gravity*, v. 18, p. 2447-2456, 2001.
- [39] DICKEY, J. et al. Lunar laser ranging: A continuing legacy of the Apollo program. *Science*, v. 265, p. 482-490, 1994.
- [40] STEWART, J. **Advanced General Relativity.** Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [41] HEHL, F.; McCREA, J.; MIELKE, E.; NE'EMAN, Y. **Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance.** *Physical Report v.1* p.258, 1995. <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9402012>>.
- MALUF, J.; ROCHA-NETO, J.; TORÍBIO, T.; KASTELO-BRANCO, K. **Energy and angular momentum of the gravitational field in the teleparallel geometry.** *Physical Review D*, v. 65, 124001, 2002. <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0204035>>.

- [42] WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. New York: John and Wiley & Sons, 1972.
- [43] TANGHERLINI, F. **Schwarzschild field in n dimensions and the dimensionality of space problem**. *Il Nuovo Cimento*, v.XXVII, n.3, p.636-651, 1963.
- [44] WALKER, M. **Block Diagrams and the extension of timelike two-surfaces**. *Journal of Mathematical Physics*, v.11, n.8, p.2280-2286, 1970.
- [45] CAPON, A. **Radiation Reaction Near Black Holes**. Cardiff, 1988. Tese submetida a *University of Wales* para obtenção do título de *Doctor of Philosophy*.
- [46] HULSE, R.; TAYLOR, J. **Discovery of a pulsar in a binary system**. *Astrophysical Journal*, v.195, p.L51-L53, 1975.
- [47] GUNDLACH, C.; PRICE, R.; PULLIN, J. **Late-time behavior of stellar collapse and explosions. II. Nonlinear evolution**. *Physical Review D*, v. 49, n. 2, p.890-899, 1994. <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9307010>>.
- [48] ERDLYI, A. **Higher Transcendental Functions**, vol. II, Bateman Manuscript Project, editado por A. Erdlyi. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [49] ANDERSSON, N. **Excitation of Schwarzschild black hole quasinormal modes**. *Physical Review D*, v. 51, n. 2, p.353-363, 1995.
- [50] RUBINSTEIN, I.; RUBINSTEIN, L. **Partial Differential Equations in Classical Mathematical Physics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [51] GOMEZ, R.; WINICOUR, J.; ISAACSON, R. **Evolution of scalar fields from characteristic data**. *Journal of Computational Physics*, v. 98, p. 11-25, 1992.
- [52] GUNDLACH, C.; PRICE, R.; PULLIN, J. **Late-time behavior of stellar collapse and explosions. I. Linearized perturbations**. *Physical Review D*, v. 49, n. 2, p.883-889, 1994. <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9307009>>.
- [53] LAARAKKERS, W.; POISSON, E. **Radiative falloff in Schwarzschild-de Sitter spacetime**. *Physical Review D*, v. 60, 064003, 1999. <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9902010>>.
- [54] SCHUTZ, B.; WILL, C. **Black hole normal modes: a semianalytic approach**. *The Astrophysical Journal*, v.291, p.L33, 1985.

- [55] IYER, S.; WILL, C. **Black hole normal modes: A WKB approach. I. Foundations and application of a higher-order WKB analysis of potential-barrier scattering.** Physical Review D, v. 35, 3621, 1987.
- [56] IYER, S. **Black hole normal modes: A WKB approach. II. Schwarzschild black holes.** Physical Review D, v.35, p.3632, 1987.
KOKKOTAS, K.; SCHUTZ, B. **Black hole normal modes: A WKB approach. III. Reissner-Nordström black holes.** Physical Review D, v.37, p.3378, 1988.
- [57] PÖSCHL, G.; TELLER, E. **Bemerkungen zur quantenmechanik des anharmonischen oszillators.** Zeitschrift für Physik. v.83, p.143-151, 1933.
- [58] BEYER, H. **On the completeness of the quasinormal modes of the Pöschl-Teller Potential.** Communications in Mathematical Physics, v.204, p.397-423, 1999.
- [59] CARDOSO, V.; LEMOS, J. **Quasinormal modes of the near extremal Schwarzschild de Sitter black hole.** Physical Review D, v.67, 084020, 2003.
<<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0305037>>.