UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

"Dinâmica de dois condensados de Bose-Einstein-Tratamento de campo médio"

Renata B. Prandini

Orientador: Prof. Dr. A. F. R. de Toledo Piza

SBI-IFUSP
305M810T3742

Dissertação apresentada
à Comissão de Pós-Graduação do
Instituto de Física da USP
para a obtenção do título
de Doutor em Ciências.

Banca examinadora:
Prof. Dr. A. F. R. de Toledo Piza - *IFUSP*
Prof. Dr. A. Kraenkel -*IFT-UNESP*
Prof. Dr. A. Gammal -*IFUSP*
Prof. Dr. M. Hussein -*IFUSP*
Prof. Dr. V. Bagnato -*USP-São Carlos*

4 de dezembro de 2002

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

INSTITUTO DE FÍSICA
Serviço de Biblioteca e Informação
Tombo: 3742
ex. 1

def. 01/10/02

530.42
P899d
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Prandini, Renata Benedicto

"Dinâmica de dois condensados de Bose-Einstein – Tratamento de campo médio". São Paulo 2002

Tese (Doutoramento) Universidade de São Paulo Instituto de Física – Departamento de Física Matématica

Orientador: Prof. Dr. A. F. R. de Toledo Piza
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Dois condensados de Bose-Einstein; 2. Mecânica Quântica; 3. Equação de Gross-Pitaevski; 4. Potencial em forma de charuto; 5. Coexistência e separação de fases.

USP/IF/SBI-063/2002

Agradecimentos

Agradeço ao professor Piza pela oportunidade de trabalhar com condensação de Bose-Einstein, por se tratar de um sistema que alia "simplicidade teórica" à prática experimental. Agradeço pela sua orientação segura, e pela coragem de estabelecer nossa relação sobre os princípios de liberdade com responsabilidade. Agradeço aos professores Emerson e Lin pela cooperação, aos demais colegas do grupo pela companhia e a todos os funcionários que trabalham a fim de manter esse Instituto caminhando. Dedico esta tese aos meus dois Georges, George e George Lucas, que me dão a alegria necessária para perseguir um ideal. Finalmente, agradeço à **FAPESP** e a meus familiares, sem o apoio dos quais não seria possível a realização deste trabalho.

Abstract

We study the system formed by two coupled condensates of different Rubidium hyperfine states trapped in a cigar shaped potential, that is, a real quasi one-dimensional system. The dependancy of the solution of the Gross-Pitaevski equations is investigated as a function of trap displacement and Josephson coupling parameter for three different values of the total trapped atoms number. For some sets of parameters we report the existence of metaestable states. The observable we chose to characterize this system was the mean separation between the packages, because we found two branches which correspond to closer or more separated solutions.

Resumo

Investigamos o sistema formado por dois condensados aprisionados em estados hiperfinos diferentes do Rubídio, num potencial em forma de charuto, ou seja, num sistema físico real e quase-unidimensional.

É investigada a dependência das soluções das equações de Gross-Pitaevski com a separação entre as armadilhas, bem como com o parâmetro de acoplamento de Josephson, para três valores diferentes do número total de átomos aprisionados. Para alguns conjuntos de parâmetros constatamos a existência de estados metaestáveis.

O observável que escolhemos para caracterizar tal sistema físico foi a separação média entre os pacotes, pois os dois ramos de soluções encontrados correspondem a soluções mais juntas ou mais separadas espacialmente.

Sumário

1 Introdução **8**

2 A equação de Gross-Pitaevski **9**

3 O problema de dois condensados **10**

4 Solução das equações de Gross-Pitaevski acopladas para espécies atômicas diferentes **12**

4.1 O modelo 12

4.2 Solução da Equação de Gross-Pitaevski para um condensado . 14

4.3 Solução das Equações de Gross-Pitaevski acopladas 22

5 Termo de Josephson interno **29**

5.1 Tratamento teórico unidimensional para o sistema tridimensional 30

5.1.1 Resultados 34

5.1.2 Comparação com a aproximação gaussiana 34

5.1.3 Modelo com parâmetros realistas 41

5.2 Potencial em forma de charuto 49

5.2.1 O modelo 50

5.2.2 Resultados 52

5.2.3 Discussão dos erros 65

5.2.4 Dependência com o número total de partículas 72

5.3 Conclusão 90

6 Perspectivas **90**

Lista de Figuras

1 Comparação entre a solução de Thomas-Fermi para um condensado com a de Gross-Pitaevski para ΔT igual a 10^{-5} para diversos critérios de parada: dois valores para o erro a saber 10^{-10} e 10^{-11} e número máximo de iterações igual a 5000. . . . 19

2 Comparação entre a solução de Thomas-Fermi para um condensado com a de Gross-Pitaevski para ΔT igual a 10^{-5} e número máximo de iterações igual a 5000 e com ΔT igual a 10^{-4} e 1000 iterações. 20

3 Zoom na região crítica para a solução de Gross-Pitaevski para um condensado para ΔT igual a 10^{-5}. 21

4 Solução de Thomas-Fermi para mistura de condensados de Sódio e Rubídio. 26

5 Comparação da função de onda radial $U(r) = r\Psi$para a mistura de condensados de Sódio e Rubídio entre a solução de Thomas-Fermi e a de Gross-Pitaevski. 27

6 Parâmetro de ordem para a solução de Gross-Pitaevski para a mistura de condensados de Sódio e Rubídio. 28

7 Separação entre os pacotes como função do termo de Josephson, resultados da aproximação gaussiana (em unidades do oscilador). Da esquerda para a direita, as curvas correspondem a valores de z_0 iguais a 0, 0.08, 0.23, 0.3 z_{osc}. Para as curvas que apresentam mais de uma solução, a linha cheia representa estados instáveis, a linha tracejada pequena representa estados metaestáveis e a linha tracejada grande representa os estados fundamentais. Ainda, para $z_0 = 0$, os estados fundamentais coincidem com o eixo de separação entre os pacotes igual a zero. 36

8 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson para os dois ramos de soluções, $z_0 = 0$. 37

9 Padrão espacial da função de onda para o estado fundamental (acima) e para o estado metaestável para dois valores do termo de Josephson, $z_0 = 0$. 38

10 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson para os dois ramos de soluções, $z_0 = 0.08$. 39

11 Padrão espacial da função de onda para o estado fundamental(acima) e para o estado metaestável para dois valores do termo de Josephson, $z_0 = 0.08$. 40
12 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0$. 42
13 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0.08$. 43
14 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0.1$. 44
15 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0.5$. 45
16 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0.8$. 46
17 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 1.0$. 47
18 Padrão espacial $z_0 = 1.0$, ramos junto e separado, $\Omega = 0.6$. . . 48
19 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0$ e $N = 20.000$. 54
20 Padrão espacial configuração separada, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0$ e $N = 20.000$. 55
21 Padrão espacial configuração junta, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0$ e $N = 20.000$. 56
22 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0.08$ e $N = 20.000$. 57
23 Padrão espacial configuração separada, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0.08$ e $N = 20.000$. 58
24 Padrão espacial configuração junta, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0.08$ e $N = 20.000$. 59
25 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0.5$ e $N = 20.000$. 61
26 Padrão espacial comparado configurações junta e separada, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0.5$ e $N = 20.000$. 62

27 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 1$ e $N = 20.000$. 63
28 Comparação entre os padrões espaciais, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 1$ e $N = 20.000$ 64
29 Padrão espacial obtido a partir de gaussianas unidas (acima) e separadas (abaixo), $z_0 = 0$. 66
30 Padrão espacial obtido a partir de gaussianas unidas (acima) e separadas (abaixo), $z_0 = 0.08$. 68
31 Padrão espacial obtido a partir de gaussianas unidas (acima) e separadas (abaixo), $z_0 = 0.5$. 69
32 Padrão espacial obtido a partir de gaussianas unidas (acima) e separadas (abaixo), $z_0 = 1.0$. 71
33 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0$ e $N = 10.000$. 73
34 Padrão espacial configuração separada, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0$ e $N = 10.000$. 74
35 Padrão espacial configuração junta , termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0$ e $N = 10.000$. 75
36 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0.08$ e $N = 10.000$. 77
37 Padrão espacial configuração separada , termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0.08$ e $N = 10.000$. 78
38 Padrão espacial configuração junta , termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo) , $z_0 = 0.08$ e $N = 10.000$. 79
39 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0.5$ e $N = 10.000$. 80
40 Comparação entre os padrões espaciais, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0.5$ e $N = 10.000$ 81
41 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 1$ e $N = 10.000$. 82

42 Comparação dos padrões espaciais das funções de onda juntas e separadas, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 1$ e $N = 10.000$. 83
43 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0$ e $N = 5.000$. 84
44 Padrão espacial configuração separada, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0$ e $N = 5.000$. 85
45 Padrão espacial configuração junta, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0$ e $N = 5.000$. 86
46 Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 1$ e $N = 5.000$. 87
47 Comparação dos padrões espaciais das funções de onda juntas e separadas, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 1$ e $N = 5.000$. 88
48 Padrão espacial obtidos a partir de gaussianas superpostas, $\Omega = 0.6$ para $N = 5.000$ (acima) e $N = 10.000$ (abaixo), $z_0 = 0$ 89

Lista de Tabelas

1 Comparação entre as soluções obtidas para $z_0 = 0$ e $N = 20.000$ com duas funções tentativa iniciais diferentes. 65
2 Comparação entre as separações obtidas para os diferentes ramos e o erro correspondente, $z_0 = 0$ e $N = 20.000$. 67
3 Comparação entre as separações obtidas para $z_0 = 0.08$ e $N = 20.000$ com duas funções tentativa iniciais diferentes. 70
4 Comparação entre as separações obtidas para os diferentes ramos e o erro correspondente, $z_0 = 0.08$ e $N = 20.000$ 70
5 Comparação entre as separações obtidas para $z_0 = 0.5$ e $N = 20.000$ com duas funções tentativa iniciais diferentes. 72
6 Comparação entre as separações obtidas para os diferentes ramos e o erro correspondente, $z_0 = 0.5$ e $N = 20.000$ 72
7 Comparação entre as separações obtidas para $z_0 = 1.0$ e $N = 20.000$ com duas funções tentativa iniciais diferentes. 72
8 Comparação entre as separações obtidas para os diferentes ramos e o erro correspondente, $z_0 = 1.0$ e $N = 20.000$ 76

1 Introdução

Quando um gás é resfriado a temperaturas muito baixas, é possível atingir um regime onde seu comportamento deixa de ser clássico e a visão tradicional que temos de um gás como sendo constituído de partículas com um movimento desordenado não é mais adequado. Se as partículas forem bosons, o estado que atingimos no regime de ultra baixa temperatura é denominado Condensado de Bose-Einstein (CBE), que recebeu este nome pois foi inicialmente previsto por A. Einstein em 1925, usando para isto as bases teóricas contidas no trabalho do cientista Satiendra Nath Bose. Einstein observou que um gás de bosons em temperaturas ultra-baixas poderia apresentar uma população macroscópica no seu estado de mais baixa energia (número este da ordem do número total de partículas do sistema). Assim, as partículas neste estado particular contribuiriam para as propriedades do gás de uma forma diferente das demais, com um peso maior. Esta mudança de comportamento com relação às propriedades termodinâmicas (como por exemplo pressão, viscosidade, condutividade térmica) caracteriza a chamada transição de fase. Define-se assim uma nova "fase" com propriedades peculiares. A possível realização experimental da CBE num gás é muito atraente pois cria um sistema livre das complicações apresentadas pelo hélio-4, um sistema líquido e portanto de forte interação entre as partículas. Procurando a realização experimental da CBE num sistema gasoso, vários cientistas passaram a investir no dessenvolvimento de técnicas que permitem o resfriamento de um gás confinado a temperaturas que chegam a ser da ordem de $10^{-9}K$. A técnica que mostrou-se mais promissora é aquela que utiliza lasers como meio de resfriamento de átomos. Como esta técnica pode-se produzir uma amostra gasosa à temperatura de alguns micro-Kelvins, que serve como ponto inicial para a obtenção de um gás nas condições onde CBE é esperado que ocorra. Durante o ano de 1995, três grupos de pesquisa utilizando técnicas que conjugam resfriamento com lasers, aprisionamento magnético de átomos e resfriamento evaporativo, conseguiram reunir as condições necessárias para a observação da CBE em gases. O sistema utilizado foi vapor de metal alcalino. Num primeiro experimento no JILA [3], átomos de Rubídio a uma densidade de 10^{12} átomos por cm^3 foram resfriados a cerca de $100nK$ mostrando neste regime uma variação de comportamento com respeito a sua distribuição espacial, os quais asseguram que o sistema sofreu CBE. Num segundo experimento em Rice [4] , átomos de Lítio sofreram quase que o mesmo tratamento para atingirem CBE. Finalmente num terceiro experimento no MIT [5], desta vez

com Sódio, demostrou a ocorrência de CBE. Cada um dos experimentos utilizou maneiras próprias de lidar com os vários problemas que surgiram no dessenrolar do experimento. Estes experimentos devem ser vistos como passos iniciais de um novo tipo de física experimental. Hoje, 7 anos depois das primeiras realizações experimentais da CBE, mais de 20 grupos no mundo dominam as técnicas de condensação. Os experimentos tornaram-se cada vez mais específicos e sofisticados, por exemplo envolvendo mais de uma espécie atômica, ou diferentes geometrias da armadilha que permitem o confinamento em duas ou até uma dimensão. Uma conquista importante foi a condensação do Hidrogênio atômico [18]. Outros candidatos a CBE estão sendo investigados, como Césio [14, 15, 25], Potássio [31], Hélio [2] e Neon [37].

2 A equação de Gross-Pitaevski

Quando o primeiro condensado de Bose-Einstein de baixa densidade de um gás de elementos alcalinos foi produzido numa armadilha magneto-ótica [3], as equações de Gross-Pitaevski já eram conhecidas há um bom tempo [1]. No entanto, o aprimoramento das técnicas de manipulação dos condensados e a possibilidade de realizarmos medidas cada vez mais sofisticadas do condensado abriu caminho para uma ampla área de investigação tanto experimental quanto teórica [36]. Nas condições experimentais hoje normais, ou seja, condensados contendo aproximadamente $10^5 - 10^6$ partículas com uma densidade média da ordem de 10^{14} partículas por cm^3 a aproximação de Thomas-Fermi, que consiste em desprezar o termo cinético na equação de Gross-Pitaevski, leva a resultados que descrevem bastante bem as propriedades do condensado exceto onde o "parâmetro de ordem" (densidade do condensado, ou no caso de mais de uma espécie, a densidade de pelo menos uma das espécies) se aproxima de zero. A solução de Thomas-Fermi para um condensado apresenta problemas precisamente no ponto em que $\mu = V(\vec{r})$ com relação à energia cinética, pois a derivada é descontínua. Isto levou, já em 1995, ao estudo dos efeitos da energia cinética, principalmente na região sensível [7], através da solução da equação de Gross-Pitaevski estacionária. Também para o problema de um condensado com interação atrativa a solução de Thomas-Fermi não apresenta resultados satisfatórios.

Os sistemas tornados acessíveis pelas técnicas experimentais dessenvolvidas mais recentemente (especialmente o aprisionamento ótico dos átomos constituintes) são mais ricos em relação aos discutidos acima por envolver

átomos de duas espécies diferentes [32].Espera-se que condensados de Bose-Einstein de gases atômicos de metais alcalinos de mais de um componente apresentem fenômenos quânticos macroscópicos que não são encontrados no sistema de apenas um condensado. Particularmente, quando tratamos o problema de dois condensados, a importância relativa da energia cinética é maior, pois se a aproximação de Thomas-Fermi descreve bem as características principais de um condensado de interação repulsiva, o mesmo não acontece para o caso de dois condensados, onde pequenas variações nas constantes de interação da ordem da energia cinética envolvida resultam em mudanças quantitativas significativas. Portanto, para tratar o problema de dois condensados de maneira quantitativamente correta deve-se resolver o par de equações de Gross-Pitaevski acopladas correspondente. Além das dificuldades relativas à fronteira externa do sistema, esta comum ao caso mais simples de um condensado, existe a característica adicional da existência de uma multiplicidade de soluções que podem ainda ser interconectadas de várias formas. No nível de Thomas-Fermi as ambiguidades decorrentes deste fato podem ser tratadas estudando por exemplo a energia total do sistema. A omissão da energia cinética pode ser no entanto uma limitação importante em determinados casos, em particular para o estudo da estabilidade das diferentes soluções estacionárias obtidas variacionalmente.

3 O problema de dois condensados

A estrutura do estado estacionário para sistemas de dois condensados já foi bastante estudada. Do ponto de vista teórico, Ho e Shenoy [9] foram os primeiros a determinar os padrões espaciais para o problema de dois condensados, usando a aproximação de Thomas-Fermi. A solução estacionária nos informa o padrão espacial dos condensados caracterizado pelos parâmetros do sistema- frequência da armadilha, número de átomos de cada componente, os comprimentos de espalhamento que caracterizam as interações inter e entre espécies. Dependendo da relação entre os valores destas últimas, podemos encontrar soluções que se separam espacialmente [13, 27]. Assim, dependendo dos valores das constantes de interação podemos encontrar regiões de coexistência e de separação de fases. Dentro desta última podemos encontrar ainda duas diferentes configurações dos condensados [16, 28] : uma que preserva e outra que quebra a simetria da Lagrangeana. No caso mais geral, a simetria a que nos referimos é a simetria espacial, determinada pela forma do

potencial externo. Por exemplo, para um potencial com simetria esférica, a solução que preserva a simetria da Lagrangeana tem simetria esférica. Porém, é possível encontrar também soluções que não são esfericamente simétricas, e dizemos então que tais soluções quebram a simetria da Lagrangeana. Pu e Bigelow investigaram numericamente o estado estacionário de um sistema de dois condensados de espécies atômicas diferentes: Na e Rb, assumindo simetria esférica [17]. Quando a constante de interação entre as espécies é grande, eles encontraram o estado fundamental com um núcleo de Rb circundado pelo condensado de Sódio e um estado metaestável constituído por um centro de Sódio circundado pelo Rubídio. Neste trabalho, eles notaram também a existência de um modo instável. Depois disto, foi mostrada a existência de soluções com quebra espontânea de simetria esférica para o estado fundamental, para as equações de Gross-Pitaevski em duas e três dimensões [16, 28, 20]. Ohberg mostrou ainda que o estado fundamental toma a forma que quebra ou preserva a simetria da Lagrangeana, dependendo não só da interação entre espécies, mas também da auto interação, do número de partículas e da forma do potencial, para condensados confinados em armadilhas com simetria cilíndrica. Kasamatsu,Yasui e Tsubota [40] analisaram o mesmo sistema, ou seja, dois condensados em uma armadilha em forma de charuto, analisando o problema em apenas uma dimensão, segundo o tratamento proposto por Goldstein, Moore, Pu e Meystre [34]. Estes detalham o espaço das possíveis configurações das soluções, como função da constante de interação entre espécies e do número de partículas. Detalham as regiões onde deve aparecer estados metaestáveis e estudam a possibilidade de tunelamento entre tais estados e o "verdadeiro" estado fundamental. Estados metaestáveis também são encontrados quando tratamos do problema de um condensado com interação atrativa [4]. A energia cinética de ponto zero, embora relativamente pequena, é suficiente para contrabalancear a auto atração, evitando que o condensado colapse e possibilitar a existência de um estado metaestável. Neste trabalho apresentamos estados metaestáveis que aparecem na solução das equações de Gross-Pitaevski acopladas em uma dimensão, estudando a sua dependência com o parâmetro de acoplamento de Josephson e com o deslocamento relativo entre as armadilhas. Lin, Passos, Hussein, Lee e Piza [43] estudam tal sistema utilizando a aproximação gaussiana.

Esse trabalho parte de um ponto de vista pedagógico e então numa primeira parte são mostrados tópicos que embora não constituam resultados inéditos, contribuem para o esclarecimento de conceitos relevantes. Assim, discorremos primeiramente sobre o sistema físico constituído por dois con-

densados de espécies atômicas diferentes. Como não há troca de partículas entre os condensados, o número de partículas de cada condensado é fixo, e este é um sistema mais simples para ser estudado. O modelo bem como os resultados obtidos são apresentanos na seção (4). Nessa seção discorremos também sobre o problema de um condensado numa armadilha com simetria esférica. O método numérico empregado para a solução das equações de Gross-Pitaevski é explicado com detalhes nesse caso mais simples e então generalizado para o caso de dois condensados. Uma vez dominado o método de solução das equações de Gross-Pitaevski acopladas para espécies atômicas diferentes, passaremos a generalização para os casos de inter-conexão entre condensados (5), que constitue a parte inédita deste trabalho. O sistema de dois condensados em armadilhas em forma de charuto com interação de Josephson e cujos centros das armadilhas podem variar é tratado em (5.2). O modelo é exposto em (5.2.1) e a apresentação dos resultados para o padrão espacial, separação entre os pacotes e energia total por partículas como função do deslocamento entre as armadilhas e do termo de Josephson está em (5.2.2). Apresentamos então uma discussão dos erros a fim de responder a questão sobre o número de mínimos do funcional da energia para diferentes deslocamentos entre as armadilhas e valores do termo de acoplamento de Josephson (5.2.3). Finalmente, mostramos alguns resultados para diferentes valores do número total de partículas (5.2.4) .

4 Solução das equações de Gross-Pitaevski acopladas para espécies atômicas diferentes

4.1 O modelo

A dinâmica de dois condensados de espécies atômicas diferentes é tomada como sendo descrita por uma Lagrangeana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int d^3r\{\frac{i\hbar}{2}\left(\dot{\phi}_a^*\phi_a - \phi_a^*\dot{\phi}_a\right) + \frac{i\hbar}{2}\left(\dot{\phi}_b^*\phi_b - \phi_b^*\dot{\phi}_b\right) + \\ &+\phi_a^*\left[\frac{\hbar^2}{2m_a}\nabla^2 - V_a(\vec{r}) - \frac{\lambda_a}{2} \mid \phi_a \mid^2\right]\phi_a + \\ &+\phi_b^*\left[\frac{\hbar^2}{2m_b}\nabla^2 - V_b(\vec{r}) - \frac{\lambda_b}{2}|\phi_b|^2\right]\phi_b - \lambda_{ab} \mid \phi_a \mid^2 \mid \phi_b \mid^2\} \qquad (1)\end{aligned}$$

onde $\phi_{(a,b)}$ é o campo escalar efetivo, associados a bosons de massa $m_{(a,b)}$ sujeitos a um potencial externo de um corpo $V_{(a,b)}(\vec{r})$ e com uma interação efetiva de dois corpos representada por um pseudo potencial de contato caracterizado pelo parâmetro λ, expresso em termos do comprimento de espalhamento a como

$$\lambda = \frac{4\pi h^2 a}{m} \tag{2}$$

O termo proporcional a λ_{ab} decreve colisões entre átomos de espécies diferentes por meio de um potencial de contato. No contexto macroscópico em que esses sistemas são investigados , a dinâmica associada a (1) é tratada numa aproximação de campo médio , que pode ser implementada tratando $\phi_{(a,b)}(\vec{r})$ como um "número-c" com a interpretação $\rho_{(a,b)}(\vec{r}) = |\phi_{(a,b)}(\vec{r})|^2$. É usual chamar $\phi_{(a,b)}(\vec{r})$, com estas propriedades de "parâmetro de ordem" do sistema.

Isso conduz variacionalmente, de forma essencialmente imediata, às equações de movimento não lineares:

$$i\hbar\dot{\phi}_{(a,b)}(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m_{(a,b)}}\nabla^2\phi_{(a,b)}(\vec{r},t) + \tag{3}$$
$$+\left(V_{(a,b)}(\vec{r}) + \lambda_{(a,b)} \mid \phi_{(a,b)}(\vec{r},t) \mid^2 - \mu_{(a,b)} + \lambda_{ab} \mid \phi_{(b,a)}(\vec{r},t) \mid^2\right)\phi_{(a,b)}(\vec{r},t)$$

onde o potencial químico $\mu_{(a,b)}$ é associado à condição de normalização do parâmetro de ordem

$$N_{(a,b)} = \int d^3r \mid \phi_{(a,b)}(\vec{r},t)) \mid^2 \tag{4}$$

e é introduzido na Lagrangeana como um multiplicador de Lagrange. O termo proporcional a λ_{ab} acopla as duas equações, pois depende da densidade da outra espécie atômica. Tais equações são conhecida no presente contexto como equações de Gross-Pitaevski acopladas. Se estamos procurando soluções estacionárias devemos resolver as equações de Gross-Pitaevski independentes do tempo:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_a}\nabla^2 + V_a(\vec{r}) + \lambda_a \mid \phi_a(\vec{r}) \mid^2 - \mu_a + \lambda_{ab} \mid \phi_b \mid^2\right]\phi_a(\vec{r}) = 0 \tag{5}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_b}\nabla^2 + V_b(\vec{r}) + \lambda_b \mid \phi_b(\vec{r}) \mid^2 - \mu_b + \lambda_{ab} \mid \phi_a \mid^2\right]\phi_b(\vec{r}) = 0 \tag{6}$$

O limite de validade da aproximação de Gross-Pitaevski (limite do gás diluto), a saber

$$\rho a^3 << 1$$

onde ρ é a densidade, implica numa hierarquia de escalas típicas

$$a < \rho^{-\frac{1}{3}} < (\rho a)^{-\frac{1}{2}} \tag{7}$$

$\rho^{-\frac{1}{3}}$ é a escala de comprimento relacionada a distância média entre as partículas, enquanto $(\rho a)^{-\frac{1}{2}}$ está relacionado ao comprimento de onda de De Broglie. Há menos de um ano foi mostrado que as condições experimentais nas quais os condensados são hoje produzidos estão pelo menos muitos próximas do chamado limite de Gross-Pitaevski, onde as soluções das equações de Gross-Pitaevski tornam-se exatas [44]. Tal limite corresponde a tomar o número de partículas tendendo ao infinito, porém mantendo o produto Na, bem como o volume, constantes. Em tal limite não há depleção do condensado e portanto o efeito das correlações pode ser desprezado. A hierarquia (7) é reforçada em tal limite.

4.2 Solução da Equação de Gross-Pitaevski para um condensado

Começamos estudando a solução da equação de Gross-Pitaevski para apenas um condensado. Escolhemos o método que pareceu mais simples do ponto de vista numérico [8], e que é utilizado com frequência e de modo satisfatório para resolver equações de Schöredinger não-lineares [30, 35, 11, 10]. O método numérico consiste basicamente em introduzir uma variável auxiliar, muitas vezes referida como intervalo de tempo imaginário, que através de uma falsa dinâmica, evolue o sistema para o mínimo do funcional da energia, iterativamente. Este utiliza-se do fato que a equação de Gross-Pitaevski para um condensado pode ser deduzida também através da minimização do funcional da energia

$$F_{GP} = \int d^3r \left[\frac{\hbar^2}{2m} \mid \nabla\phi \mid^2 + V(\vec{r}) \mid \phi \mid^2 + \frac{\lambda}{2} \mid \phi \mid^4 \right] \tag{8}$$

Variando este funcional em primeira ordem temos:

$$\Delta F_{GP} = \frac{\delta F}{\delta \phi} \Delta \phi \tag{9}$$

para que esta aproximação seja válida é necessário que o termo de segunda ordem seja desprezível em relação ao termo de primeira ordem. Isto ocorrerá se $\Delta\phi$ for pequeno. Podemos procurar o mínimo deste potencial introduzindo uma variável auxiliar t. Assim:

$$\frac{\delta F}{\delta t} = \frac{\delta F}{\delta \phi}\frac{\delta \phi}{\delta t} \tag{10}$$

se

$$\frac{\delta F}{\delta \phi} = -\frac{\delta \phi}{\delta t} \tag{11}$$

então

$$\frac{\delta F}{\delta t} = -\left(\frac{\delta \phi}{\delta t}\right)^2 \tag{12}$$

que é uma quantidade estritamente negativa. Ou seja, se a equação (11) é satisfeita , sabemos que o sistema evoluirá para o mínimo. Mas

$$\frac{\delta F}{\delta \phi} = H\phi \tag{13}$$

onde

$$H = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) + \lambda \mid \phi(\vec{r}) \mid^2\right] \tag{14}$$

Nota-se, em termos de H a equação de Gross-Pitaevski escreve-se:

$$(H - \mu)\phi = 0$$

Finalmente reescrevemos (11), substituindo (13) como

$$\Delta\phi = -H\phi\Delta t \tag{15}$$

A equação (15) nos diz que Δt deve ser escolhido pequeno, pois é proporcional a $\Delta\phi$. Finalmente

$$\phi_{t+\Delta t} = \phi_t - H\phi_t\Delta t \tag{16}$$

resolvemos (16) iterativamente, utilizando a solução de Thomas-Fermi como função tentativa inicial, ou seja, o ϕ_0 da primeira iteração. A solução é obtida até o nível de precisão desejado, caracterizado pela função erro:

$$erro = \sum_r (\phi_{t+\Delta t} - \phi_t)^2 \tag{17}$$

Nota-se que no funcional F_{GP} não aparece o potencial químico. De fato, μ foi introduzido na Lagrangeana como um multiplicador de Lagrange para assegurar que o número de partículas se mantivesse constante. Neste método alternativo, tal fato é assegurado normalizando-se a função de onda a cada iteração. Uma maneira de fazer isto é obter a solução de Thomas-Fermi para um dado μ, calcular o N correspondente integrando-se a densidade em d^3r. Depois basta utilizar a solução de Thomas-Fermi normalizada como função tentativa e impor a cada iteração que a norma de ϕ seja um. Tal procedimento será utilizado para o caso de dois condensados. Quando trabalhamos com apenas um condensado existe uma maneira mais estilosa de obter o mesmo efeito. Se aplicarmos as seguintes transformações, obteremos variáveis adimensionais e a nova função de onda terá norma igual a um por construção:

$$\phi = \sqrt{\frac{N}{b^3}}\psi \tag{18}$$

$$r = br' \tag{19}$$

onde

$$b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \tag{20}$$

Neste ponto é necessário fixar a forma do potencial externo que estamos trabalhando, no caso um potencial de oscilador simples, harmônico:

$$V(\vec{r}) = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

Desta maneira, a nova equação de Gross-Pitaevski fica:

$$(H' - 2\mu')\,\psi = E'\psi \tag{21}$$

Com

$$E' = \hbar\omega E$$

$$\mu' = \hbar\omega\mu$$

e

$$H' = -\nabla'^2 + r'^2 + u \mid \psi \mid^2 \tag{22}$$

onde

$$u = \frac{2m\lambda N}{\hbar^2 b} = 8\pi a N \tag{23}$$

Nota-se que

$$\int d^3r' \mid \psi \mid^2 = \frac{1}{b^3} \int d^3r \mid \phi \mid^2 \frac{b^3}{N} = \frac{1}{N} \int d^3r \mid \phi \mid^2 = 1 \tag{24}$$

como desejado. A solução de Thomas-Fermi é trivial:

$$\mid \psi \mid^2 = \frac{2\mu' - r'^2}{u} \tag{25}$$

se

$$2\mu' > r'^2$$

e

$$\mid \psi \mid^2 = 0$$

se

$$2\mu' < r'^2$$

Assim existe um r' crítico (r'_c) onde o parâmetro de ordem vai abruptamente a zero.

$$r'_c = \sqrt{2\mu'}$$

Lembrando disto e impondo que tal solução tenha norma um, conseguimos escrever μ' em termos de u:

$$\mu' = \frac{1}{2} \left(\frac{15u}{8\pi} \right)^{2/5} \tag{26}$$

como a relação (23) nos mostra u como função de N, sabemos relacionar μ' com N, neste caso mais simples de apenas um condensado.Ou seja, os parâmetros do nosso programa numérico que implementa tal modelo e gera a solução de Gross-Pitaevski para um condensado são a, b e N. Utilizamos os mesmos valores numéricos do artigo [8] para os dois primeiros parâmetros, a saber:

$$a = 5.2910^{-7} m$$

$$b = 1.2210^{-7} m$$

Trataremos apenas de condensados com interação repulsiva, portanto não precisamos nos preocupar com a estabilidade das soluções obtidas. N é pedido como uma entrada do programa, que foi escrito em FORTRAN. Para a integração utilizamos o método de Simpson e para as derivadas usamos

diferenças finitas. Notamos que Δt poderia variar com r' e portanto introduzimos a seguinte parametrização a fim de apressar a convergência da solução:

$$\Delta t = T\left(\tanh r'^2\right)^2$$

Observamos ainda que do ponto de vista numérico é preferível trabalhar com a função de onda radial $\frac{\psi}{r'}$. A conversão entre a função de onda radial e o parâmetro de ordem é trivial. No programa, a função de onda é discretizada e representada por um vetor de 250 pontos. O programa apresenta dois critérios para cessar as iterações: um número máximo de iterações (chamado nas figuras de 'íter') ou um erro menor que um certo valor (o aparece nas legendas das figuras seguintes como 'err'). Mais ainda, se por exemplo mandarmos o computador iterar 2000 vezes, ele retornará como saída o erro (como definido em 17) obtido na útima iteração. Se fixarmos o erro, o programa retorna o número de iterações ocorridas. Utilizamos sempre N=5000. Essencial para o funcionamento do método é o fato que Δt deve ser suficientemente pequeno. Começamos então com $T = 10^{-7}$, mas a convergência para este valor é muito demorada. Para $T = 10^{-5}$, a convergência ainda é lenta, porém conseguimos chegar à solução $\psi(r')$ como mostra a figura 1. Finalmente, observamos que o melhor valor é $T = 10^{-4}$, que dá origem rapidamente à solução correta, como sabemos pois comparamos com a solução obtida utilizando-se o parâmetro menor, como mostrado na figura 2. Conseguimos reproduzir os resultados da equação de Gross-Pitaevski para um condensado. Observamos que o efeito da inclusão da energia cinética é suavizar a queda do parâmetro de ordem em direção a zero conforme aumentamos r', fato em destaque na figura 3. Nota-se, como esperado, que a energia cinética só modifica o parâmetro de ordem na região que este aproxima-se de zero. O método exposto é intuitivo e funciona. Passemos então para a sua generalização para o caso de dois condensados.

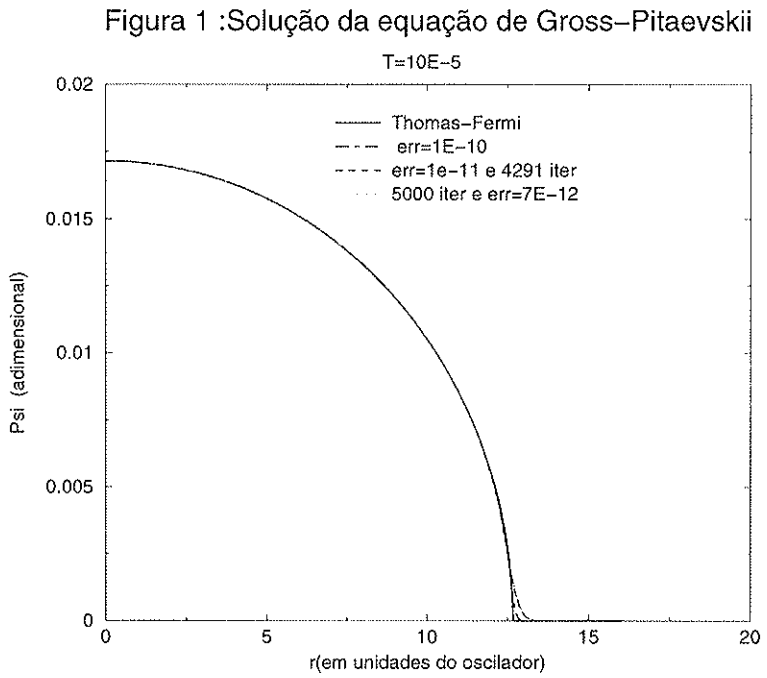


Figura 1: Comparação entre a solução de Thomas-Fermi para um condensado com a de Gross-Pitaevski para ΔT igual a 10^{-5} para diversos critérios de parada: dois valores para o erro a saber 10^{-10} e 10^{-11} e número máximo de iterações igual a 5000.

Figura 2 : Solução da equação de Gross–Pitaevskii

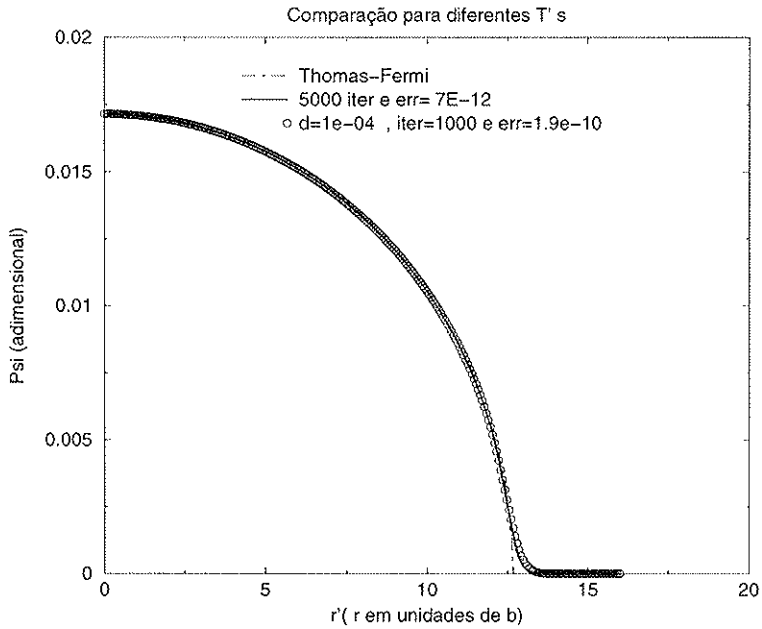


Figura 2: Comparação entre a solução de Thomas-Fermi para um condensado com a de Gross-Pitaevski para ΔT igual a 10^{-5} e número máximo de iterações igual a 5000 e com ΔT igual a 10^{-4} e 1000 iterações.

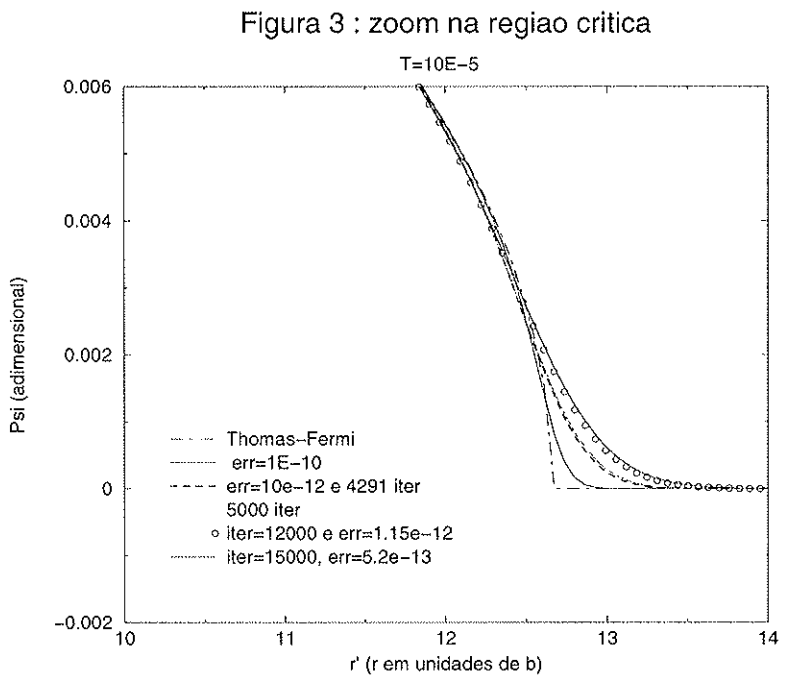


Figura 3: Zoom na região crítica para a solução de Gross-Pitaevski para um condensado para ΔT igual a 10^{-5}.

4.3 Solução das Equações de Gross-Pitaevski acopladas

Poderíamos seguir exatamente os mesmos passos descritos na seção anterior e definir uma transformação de variáveis que torna as variáveis adimensionais e as funções de onda normalizadas. Acharíamos então a solução de Thomas-Fermi e impondo a normalização acharíamos duas equações algébricas acopladas para os potenciais químicos em função dos números de partículas. Este é um caminho possível, porém é muito menos trabalhoso e tão eficiente quanto apenas tornar as variáveis adimensionais, achar a solução de Thomas-Fermi e então integrá-las numericamente, encontrando o número de partículas correspondente e normalizando a solução de Thomas-Fermi, que estará então pronta para servir de função tentativa no algoritmo que resolve as equações de Gross-Pitaevski acopladas. Assim, definimos as transformações:

$$r = br'$$

$$b = \sqrt{\frac{\hbar}{m_a \omega}} \tag{27}$$

$$\phi_a = \sqrt{\frac{1}{b^3}}\psi_a \tag{28}$$

$$\phi_b = \sqrt{\frac{1}{b^3}}\psi_b \tag{29}$$

o que transforma as equações (53) e (54) em:

$$\left[h_a^{'} + u_{ab} \mid \psi_b \mid^2 - 2\mu_a^{'}\right]\psi_a = 0 \tag{30}$$

$$\left[h_b^{'} + u_{ab} \mid \psi_a \mid^2 - 2\mu_b^{'}\right]\psi_b = 0 \tag{31}$$

com

$$h_a^{'} = -\nabla'^2 + r'^2 + u_a \mid \psi_a \mid^2 \tag{32}$$

$$h_b^{'} = -\frac{m_a}{m_b}\nabla'^2 + \frac{m_b}{m_a}r'^2 + u_b \mid \psi_b \mid^2 \tag{33}$$

e

$$u_{(a,b)} = \frac{2\lambda_{(a,b)}m_{(a,b)}}{\hbar^2 b} \tag{34}$$

$$u_{ab} = \frac{2\lambda_{ab}m_a}{\hbar^2 b} \tag{35}$$

A generalização do método iterativo de busca do mínimo do funcional da energia é direta:

$$\psi_{(a,b)} = \psi^0_{(a,b)} - H_{(a,b)}\psi_{(a,b)}\Delta t \tag{36}$$

onde

$$H_{(a,b)} = h'_{(a,b)} + u_{ab} \mid \psi_{(b,a)} \mid^2 \tag{37}$$

Passemos então a questão mais delicada de encontrar a solução de Thomas-Fermi, que corresponde a eliminar o termo cinético de (30) e (31) . Este resultado é conhecido. Adaptaremos os cálculos da referência [9] , para o nosso caso de variáveis adimensionais. Trabalharemos, então, com o ^{87}Rb que será o elemento a e com o ^{23}Na (elemento b). Definindo potenciais químicos efetivos:

$$\mu^{ef}_a = 2\mu'_a - r'^2 \tag{38}$$

$$\mu^{ef}_b = 2\mu'_b - \frac{m_b}{m_a}r'^2 \tag{39}$$

escrevemos as equações de Thomas-Fermi como:

$$(u_a \mid \psi_a \mid^2 - \mu^{ef}_a + u_{ab} \mid \psi_b \mid^2)\psi_a = 0 \tag{40}$$

$$(u_b \mid \psi_b \mid^2 - \mu^{ef}_b + u_{ab} \mid \psi_a \mid^2)\psi_b = 0 \tag{41}$$

Existem quatro soluções possíveis:

1. **região 0**

   A ausência total de partículas:

   $\psi_a = \psi_b = 0$

2. **região 1**

   A existência apenas das partículas a:

   $\psi_b = 0$ e $\mid \psi_a \mid^2 = \frac{\mu^{ef}_a}{u_b}$

3. **região 2**

   ou das b: $\psi_a = 0$ e $\mid \psi_b \mid^2 = \frac{\mu^{ef}_b}{u_b}$

4. **região 3**

   Uma "fase" mista onde coexistem partículas a e b:

$$| \psi_a |^2 = \frac{u_{ab}\mu_b^{ef} - u_b\mu_a^{ef}}{u_{ab}^2 - u_a u_b} \tag{42}$$

$$| \psi_b |^2 = \frac{u_{ab}\mu_a^{ef} - u_a\mu_b^{ef}}{u_{ab}^2 - u_a u_b} \tag{43}$$

O que determina em qual das quatro regiões estamos são os valores dos potencias químicos efetivos. A fronteira entre as regiões são as de densidade de partícula nula:

$$\frac{\mu_a^{ef}}{\mu_b^{ef}} = \frac{u_{ab}}{u_b} \tag{44}$$

entre as regiões 3 e 2, onde $\psi_a = 0$.

$$\frac{\mu_b^{ef}}{\mu_a^{ef}} = \frac{u_{ab}}{u_a} \tag{45}$$

entre as regiões 3 e 1, onde $\psi_b = 0$.

$$\mu_a^{ef} = 0 \tag{46}$$

entre as regiões 0 e 2.

$$\mu_b^{ef} = 0 \tag{47}$$

entre as regiões 0 e 1.

Dependendo da escolha dos potenciais químicos e conforme r' varia percorreremos uma trajetória no plano (μ_a^{ef}, μ_b^{ef}), que pode atravessar mais de uma região. Assim, devemos tomar o cuidado de usar a solução correta para cada r'. Usamos os mesmos valores para os λ's da referência [9] a saber:

$$\lambda_a = 9.604 * 10^{-38} erg.cm^3$$

$$\lambda_b = 17.78 * 10^{-38} erg.cm^3$$

$$\lambda_{ab} = 6.636 * 10^{-38} erg.cm^3$$

Tal escolha de λ_{ab} corresponde a uma interação repulsiva entre os condensados. As constantes u_a, u_b e u_{ab} são calculadas usando-se (34) e (35). Usamos $\omega = 180Hz$ e as massas são encontradas em qualquer tabela atômica. Escolhemos $\mu_b = 2.25\mu_a$, o que nos coloca dentro da região 3 (coexistência de "fases"), próximo à fronteira com a região 2. Conforme r' aumente, esperamos que o condensado de Rubídio vá a zero, restando apenas o condensado

de Sódio, até que este último também anule-se. A função de onda é contínua nestes pontos de transição entre diferentes regiões, porém sua derivada é descontínua.É possível saber os valores de r' onde ocorrem tais mudanças. A transição entre as regiões 3 e 2 ocorre quando (ver equação 44):

$$\frac{\mu_a^{ef}}{\mu_b^{ef}} = \frac{u_{ab}}{u_b}$$

$$\frac{2\mu_a' - r'^2}{2\mu_b' - \frac{m_b}{m_a}r'^2} = \frac{u_{ab}}{u_b}$$

e o condensado de Sódio vai a zero quando (equação 47):

$$2\mu_b' - \frac{m_b}{m_a}r'^2 = 0$$

$$2\mu_b' = \frac{m_b}{m_a}r'^2$$

A figura 4 mostra $\mid \psi_{(a,b)}(r') \mid^2$ para tal solução. Como comentado anteriormente, o parâmetro de ordem não está normalizado. Calculamos numericamente através do método de Simpson o número de partículas, a saber: $N_a = 0.2555$ e $N_b = 464.8$. Uma vez normalizadas, as funções de onda estão prontas a servirem de entrada no algoritmo que calcula a solução de Grosss-Pitaevski. A figura 5 mostra as funções de onda radiais na aproximação de Thomas-Fermi e a solução de Gross-Pitaevski. A figura 6 mostra o parâmetro de ordem da solução de Gross-Pitaevski, não normalizado, a fim de ser comparado com a solução de Thomas-Fermi (figura 4). Concluímos que o termo de energia cinética suaviza as descontinuidades na derivada do parâmetro de ordem nos pontos onde pelo menos um dos condensados vai a zero. De um ponto de vista mais prático, tal estudo é importante pois nos possibilita dar suporte teórico a iniciativas experimentais mostrando os valores possíveis de λ_{ab} que geram soluções aceitáveis. Podemos notar que as soluções dependem de modo delicado dos parâmetros iniciais. Ou seja, escolhas ligeiramente diferentes de μ_a e μ_b podem gerar soluções muito distintas. μ_a e μ_b estão diretamente relacionados a N_a e N_b. Continuando tal estudo poderíamos responder a seguinte questão: Qual o melhor número de partículas com que devemos preparar o aparato experimental a fim de observarmos condensação de duas espécies diferentes na mesma armadilha. Este porém não foi o caminho seguido. Decidiu-se por uma linha mais teórica e

Figura 4. Parâmetro de ordem

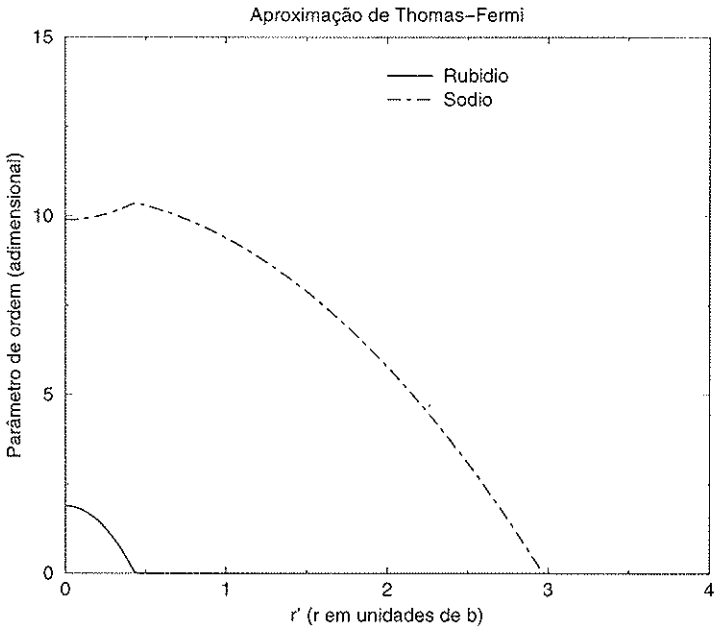


Figura 4: Solução de Thomas-Fermi para mistura de condensados de Sódio e Rubídio.

Figura 5: Função de onda radial

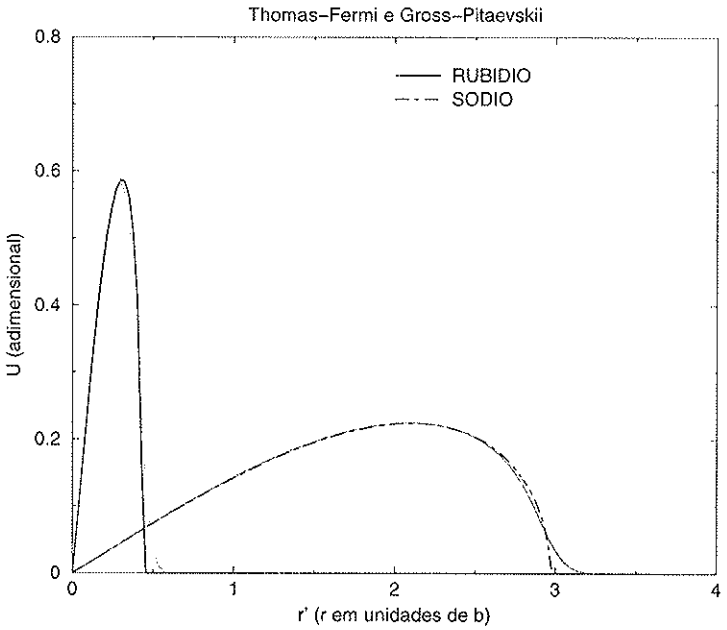


Figura 5: Comparação da função de onda radial $U(r) = r\Psi$para a mistura de condensados de Sódio e Rubídio entre a solução de Thomas-Fermi e a de Gross-Pitaevski.

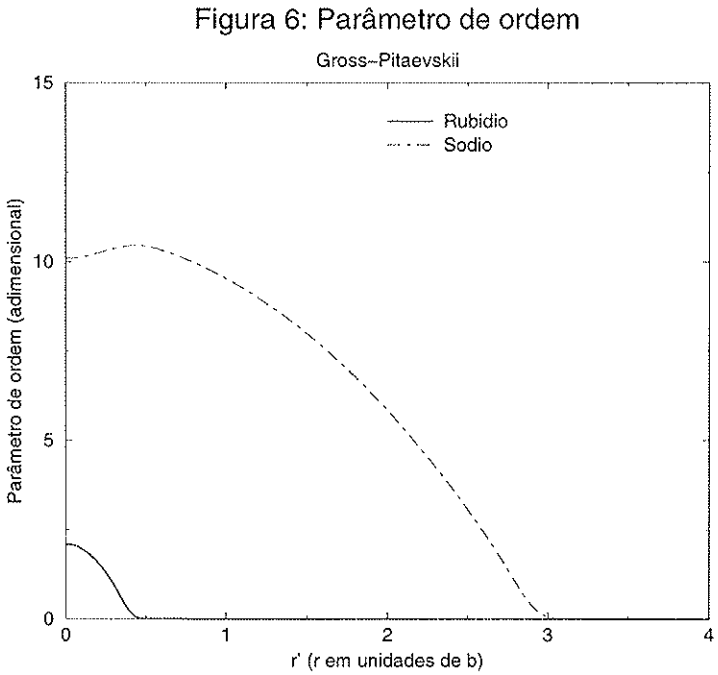


Figura 6: Parâmetro de ordem para a solução de Gross-Pitaevski para a mistura de condensados de Sódio e Rubídio.

incluímos a possibilidade de troca de partículas entre os meios, assunto que é tratado no próximo capítulo. Até essa seção apenas reproduzimos resultados conhecidos a fim de ganhar intimidade com a solução das equações de Gross-Pitaevski acopladas. A partir de agora passamos a discorrer sobre a parte deste trabalho que é inédita.

5 Termo de Josephson interno

O problema específico que passamos a estudar é o sistema formado por dois condensados de Rubídio (^{87}Rb) em estados hiperfinos diferentes, a saber:

$$|f = 1, m_f = -1\rangle$$

e

$$|f = 2, m_f = 1\rangle$$

É possível então promover troca de população entre os dois níveis atômicos em questão, através de uma fonte de microonda externa. Neste trabalho estudamos como o padrão espacial das funções de onda para os condensados variam como função da intensidade da fonte externa incidente (o que, do ponto de vista teórico é descrito através do parâmetro de acoplamento de Josephson). Estudamos o caso geral em que os centros das armadilhas para cada um dos condensados podem estar deslocados. A variável espacial que escolhemos para caracterizar o sistema de dois condensados é a separação entre os pacotes, definida como a diferença entre as posições médias de cada condensado. Sinteticamente, este trabalho estuda o efeito da atração resultante da existência de uma fonte de microondas externa capaz de promover troca entre as populações entre os dois estados hiperfinos, para diferentes separações entre os centros das armadilhas. Esse sistema ainda é relativamente pouco estudado especialmente se comparado com o efeito de Josephson externo, onde apenas um condensado encontra-se numa armadilha que tem dois mínimos que definem dois estados quânticos diferentes, porém indistinguíveis. Segundo o artigo de revisão [41], a melhor aproximação a este sistema (efeito de Josephson interno) realizadas experimentalmente são os trabalhos de Hall e colaboradores [22] e [23]. Estudamos dois modelos unidimensionais diferentes para tal sistema. Primeiro, estudamos uma lagrangeana unidimensional que pretende descrever as características principais do problema físico real e

tridimensional. Tal modelo e resultados são mostrados na seção (5.1). Depois partimos para uma situação quase-unidimensional, a saber, condensados em forma de charuto.

5.1 Tratamento teórico unidimensional para o sistema tridimensional

Estudamos um tratamento unidimensional [26] que pretende mimicar o caso real de dois condensados tridimensionais nos diferentes estados hiperfinos. A seguinte Lagrangeana descreve o sistema de dois condensados

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{i\hbar}{2}\left(\dot{\phi}_a^*\phi_a - \phi_a^*\dot{\phi}_a\right) + \frac{i\hbar}{2}\left(\dot{\phi}_b^*\phi_b - \phi_b^*\dot{\phi}_b\right) + \\ &+\phi_a^*\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{2}m\omega^2(z-z_0)^2 - \frac{\lambda_a}{2}|\phi_a|^2\right)\phi_a + \\ &+\phi_b^*\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{2}m\omega^2(z+z_0)^2 - \frac{\lambda_b}{2}|\phi_b|^2\right)\phi_b - \lambda_{ab} \mid \phi_a \mid^2 \mid \phi_b \mid^2 + \\ &+ (\Omega\phi_a^*\phi_b + \Omega^*\phi_b^*\phi_a) \qquad (48)\end{aligned}$$

onde $\phi_{(a,b)}$ é o campo escalar efetivo, associados a bosons de massa m sujeitos a um potencial externo de um corpo

$$V_{(a,b)}(z) = \frac{1}{2}m\omega^2(z \pm z_0)^2$$

onde z_0 é o deslocamento do centro da armadilha em relação à origem, e com uma interação efetiva de dois corpos representada por um pseudo potencial de contato caracterizado pelo parâmetro λ, expresso em termos do comprimento de espalhamento a como

$$\lambda = \frac{a}{z_{osc}} \qquad (49)$$

$$z_{osc} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \qquad (50)$$

Nota-se que o parâmetro λ que caracteriza as interações tem dimensão e definição diferentes neste modelo unidimensional [26] se comparado com a sua forma mais usual

$$\lambda = \frac{4\pi h^2 a}{m} \qquad (51)$$

O termo proporcional a λ_{ab} decreve colisões entre átomos de estados hiperfinos diferentes por meio de um potencial de contato. Ω é o parâmetro que caracteriza o acoplamento entre os estados diferentes e assim permite troca de partículas entre os meios. Tal tratamento será aqui admitido (como é usual), para a sua justificativa nos referimos a [41] e [19]. Na seção 5 apresentaremos resultados de como algumas grandezas características do sistema variam com Ω, chamado então de "Termo de Josephson". A dinâmica associada a (48) é tratada numa aproximação de campo médio e as equações de movimento não lineares correspondentes são:

$$
\begin{aligned}
& i\hbar\dot{\phi}_{(a,b)}(z,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi_{(a,b)}(z,t) + \\
& + \left(V_{(a,b)}(z) + \lambda_{(a,b)} \mid \phi_{(a,b)}(z,t) \mid^2 - \mu + \lambda_{ab} \mid \phi_{(b,a)}(z,t) \mid^2\right) \phi_{(a,b)}(z,t) \\
& -\Omega\phi_{(b,a)}(z,t)
\end{aligned}
$$

onde o potencial químico μ é associado à condição de normalização do parâmetro de ordem

$$
N = \int dz \left(\mid \phi_{(a)}(z)) \mid^2 + \mid \phi_{(b)}(z)) \mid^2 \right) \tag{52}
$$

e é introduzido na Lagrangeana como um multiplicador de Lagrange. Nota-se que nesse caso impomos apenas um vínculo, que assegura que o número total de partículas mantenha-se constante. Com a introdução do termo de Josephson, as densidades de cada um dos condensados pode variar. Os termos proporcionais a λ_{ab} e Ω acoplam as duas equações. Se estamos procurando soluções estacionárias devemos resolver as equações de Gross-Pitaevski independentes do tempo:

$$
\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_a(z) + \lambda_a \mid \phi_a(z) \mid^2 - \mu + \lambda_{ab} \mid \phi_b \mid^2 \right] \phi_a(z) - \Omega\phi_b(z) = 0 \tag{53}
$$

$$
\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_b(z) + \lambda_b \mid \phi_b(z) \mid^2 - \mu + \lambda_{ab} \mid \phi_a \mid^2 \right] \phi_b(z) - \Omega\phi_a(z) = 0 \tag{54}
$$

O funcional da energia, que pode ser deduzido a partir da Lagrangeana (48), é dado por:

$$
\begin{aligned}
F_{GP} \;=\; & \int dz \frac{\hbar^2}{2m} \mid \frac{\partial^2\phi_a}{\partial z^2} \mid^2 + V_a(z) \mid \phi_a \mid^2 + \frac{\lambda_a}{2} \mid \phi_a \mid^4 + \\
& + \frac{\hbar^2}{2m} \mid \frac{\partial^2\phi_b}{\partial z^2} \mid^2 + V_b(z) \mid \phi_b \mid^2 + \frac{\lambda_b}{2} \mid \phi_b \mid^4 + \\
& + \lambda_{ab} \mid \phi_a \mid^2 \mid \phi_b \mid^2 + (\Omega\phi_a^*\phi_b + \Omega^*\phi_b^*\phi_a)
\end{aligned} \tag{55}
$$

Para utilizar o método numérico exposto na seção anterior devemos aplicar as seguintes transformações, que tornam as grandezas adimensionais:

$$z = bz' \tag{56}$$

$$b = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \tag{57}$$

$$\phi_a = \sqrt{\frac{N}{b}}\psi_a \tag{58}$$

$$\phi_b = \sqrt{\frac{N}{b}}\psi_b \tag{59}$$

$$\mu = \hbar\omega\mu' \tag{60}$$

$$u = \frac{\lambda N}{\hbar\omega b} \tag{61}$$

$$\Omega' = \frac{\Omega}{\hbar\omega} \tag{62}$$

definindo

$$h_a^{'} = -\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \frac{(z' - z_0')^2}{4} + u_a \mid \psi_a \mid^2$$

$$h_b^{'} = -\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \frac{(z' + z_0')^2}{4} + u_b \mid \psi_b \mid^2$$

escrevemos as equações de Gross-Pitaevski como:

$$\left[h_a^{'} - \mu' + u_{ab} \mid \psi_b \mid^2\right]\psi_a - \Omega'\psi_b = 0 \tag{63}$$

$$\left[h_b^{'} - \mu' + u_{ab} \mid \psi_a \mid^2\right]\psi_b - \Omega'\psi_a = 0 \tag{64}$$

A cada passo impomos que a função de onda total Ψ, de componentes ψ_a e ψ_b, tenha norma igual a um. Desde modo, os módulos das componentes passam a representar densidades parciais de cada condensado. Pela própria natureza do método, podemos encontrar soluções que não correspondem a um mínimo global, mas são apenas mínimos locais. Quando resolvemos as equações de Gross-Pitaevski estacionárias para temperatura zero, o mínimo

global associado a um conjunto de parâmetros é o chamado **estado fundamental**, enquanto os mínimos locais estão associados a **estados metaestáveis**. Uma vez que obtemos as soluções das equações de Gross-Pitaevski, podemos voltar ao funcional da energia (55) e calcular o valor da energia total, bem como os valores dos diversos termos da energia (por partícula), assim definidos: Energia cinética por partícula:

$$\mathcal{E}_{cin} = \hbar\omega[\frac{1}{4}\int dz' \mid \frac{\partial\psi_{(a,b)}}{\partial z'} \mid^2] \tag{65}$$

Energia potencial (da armadilha) por partícula:

$$\mathcal{E}_{pot} = \hbar\omega[\frac{1}{4}\int dz'(z'-z_0')^2 \mid \psi_{(a,b)} \mid^2] \tag{66}$$

Energia de auto-repulsão por partícula:

$$\mathcal{E}_{auto} = \hbar\omega[\frac{1}{4}u_{(a,b)}\int dz'\frac{1}{2} \mid \psi \mid^4] \tag{67}$$

Energia de repulsão entre os condensados por partícula:

$$\mathcal{E}_{entre} = \hbar\omega[\frac{1}{4}u_{ab}\int dz' \mid \psi_a \mid^2 \mid \psi_b \mid^2] \tag{68}$$

Energia devido ao acoplamento de Josephson:

$$\mathcal{E}_{jos} = \hbar\omega[-2\Omega'\int dz' \mid \psi_a \mid\mid \psi_b \mid] \tag{69}$$

Inicialmente resolvemos as equações de Gross-Pitaevski (EGP) para os mesmos parâmetros do artigo [43], onde as constantes que determinam as interações inter e entre condensados são tomadas todas iguais. Neste caso específico, além da simetria espacial de reflexão em relação ao eixo z (quando $z_0 = 0$), temos também a simetria por troca de partículas. O estado que preserva a simetria da Lagrangeana apresenta estas duas simetrias separadamente, enquanto o estado que quebra a simetria é simétrico apenas pelo produto de tais transformações, e não por cada uma delas separadamente. Uma comparação entre os resultados fornecidos pela aproximação gaussiana e pela solução das EGP são mostrados na seção (5.1.2). Tal estudo define conceitos que serão utilizados na análise das soluções das equações de Gross-Pitaevski para parâmetros realistas (ver seção 5.1.3).

5.1.1 Resultados

5.1.2 Comparação com a aproximação gaussiana

Como no artigo [43], as constantes de interação inter e entre condensados são iguais a

$$\lambda = 17,5\mu m s^{-1}\hbar$$

positivas e portanto representam interações repulsivas. Ou seja, os condensados se auto-repelem e se repelem entre si. A frequência da armadilha é

$$\nu = 60Hz$$

e o número total de partículas é igual a

$$N = 23.000$$

o que pretende simular o campo médio para a situação real e tridimensional de 500.000 átomos [26]. Tais são os parâmetros do nosso modelo. As constantes que caracterizam a interação inter e entre os condensados são tornadas adimensionais segundo a transformação (61) mostrada na seção anterior 5.1. Fazendo isto para os valores acima citados e utilizando valores tabelados para $\hbar$ e para a massa dos átomos de Rubídio resulta u (parâmetro adimensional que caracteriza as interações inter e entre condensados) igual a 1024. As variáveis, a saber z e Ω, também são tornadas adimensionais através de (56) e (62). Utilizamos gaussianas adimensionais e de norma igual a um como função tentativa inicial no método iterativo para busca das soluções:

$$\psi_0 = e^{\frac{(z'-\bar{z}')^2}{4}} \tag{70}$$

o único parâmetro característico é o deslocamento em relação a origem da coordenadas($\bar{z}'$). Tal forma tão simples para a gaussiana é obtida pois o parâmetro do oscilador definido por (50), que tem dimensão de comprimento, corresponde a largura da gaussiana que é solução para o problema livre (livre, neste contexto, refere-se a aproximação obtida quando fazemos as constantes de interação iguais a zero e a equação de Gross-Pitaevski reduz-se a equação de Schöredinger usual para o oscilador harmônico). Para os parâmetros utilizados neste trabalho temos:

$$z_{osc} = 1.4\mu m$$

Na aproximação gaussiana fixa-se a forma da função de onda (gaussiana) e então através de um método variacional determina-se analiticamente quais são os parâmetros da gaussiana que minimizam o funcional da energia. Poderíamos ter utilizado os resultados da aproximação gaussiana, que para cada conjunto de parâmetros $N, \lambda, \omega, \Omega$ prediz qual será o deslocamento de cada condensado em relação à origem. Preferimos resolver as equações de Gross-Pitaevski de forma independente da aproximação gaussiana. Utilizamos, porém, os resultados obtidos através dessa como guia. Observado a figura 7, que foi copiada do artigo [43] nota-se que a separação entre os pacotes é positiva mas menor que 8 em unidades do oscilador, qualquer que seja o valor da separação entre as armadilhas.

Partimos então de (a) gaussianas bastante separadas (na prática, utilizamos a função tentativa inicial (70) com $\bar{z}' = 4$) para o termo de Josephson igual a zero (mínima atração) , e encontramos uma solução batizada de solução **separada**, pois ao calcularmos a separação entre os pacotes, através da diferença entre os valores médios de z, encontramos valores maiores do que os relativos à outra solução, chamada **junta** (b) obtida a partir de gaussianas superpostas ($\bar{z}' = 0$) e para termo de Josephson igual a 6.6. A partir destas soluções, aumentando Ω no caso das soluções separadas e diminuindo Ω no caso das soluções juntas, geramos dois ramos de soluções : o **ramo junto** e o **ramo separado**. Estudamos dois valores de separação entre as armadilhas: $z_0 = 0$, valor para o qual a Lagrangeana tem simetria de reflexão e $z_0 = 0.08$, que na aproximação gaussiana apresenta um "back-bending" (ou seja, para uma faixa de termos de Josephson, escontra-se três soluções, dois mínimos e um máximo do potencial) como mostra a figura 7. A figura 8 mostra os dois ramos obtidos para $z_0 = 0$.

Para sabermos qual é o estado fundamental e qual o metaestável devemos analisar o valor da energia total para os ramos. A figura 8 traz esta análise, mostrando que o ramo junto corresponde ao estado fundamental e portanto o ramos separado é o metaestável. Analisando os padrões espacias das componentes para os dois ramos, mostrados nas figuras 9, notamos que o estado fundamental corresponde ao estado que preserva a simetria da Lagrangeana, enquanto o estado metaestável quebra a simetria. Nestas figuras mostramos as componentes ψ_a e ψ_b para os valores máximo e mínimo do termo de Josephson. Fizemos o mesmo tipo de análise para $z_0 = 0.08$. Embora tenhamos mantido a nomenclatura ramos junto e saparado, ambas soluções estão separadas espacialmente como mostram os padrões espaciais mostrados nas figuras 11. As soluções ditas "juntas" (estado fundamental) estão mais

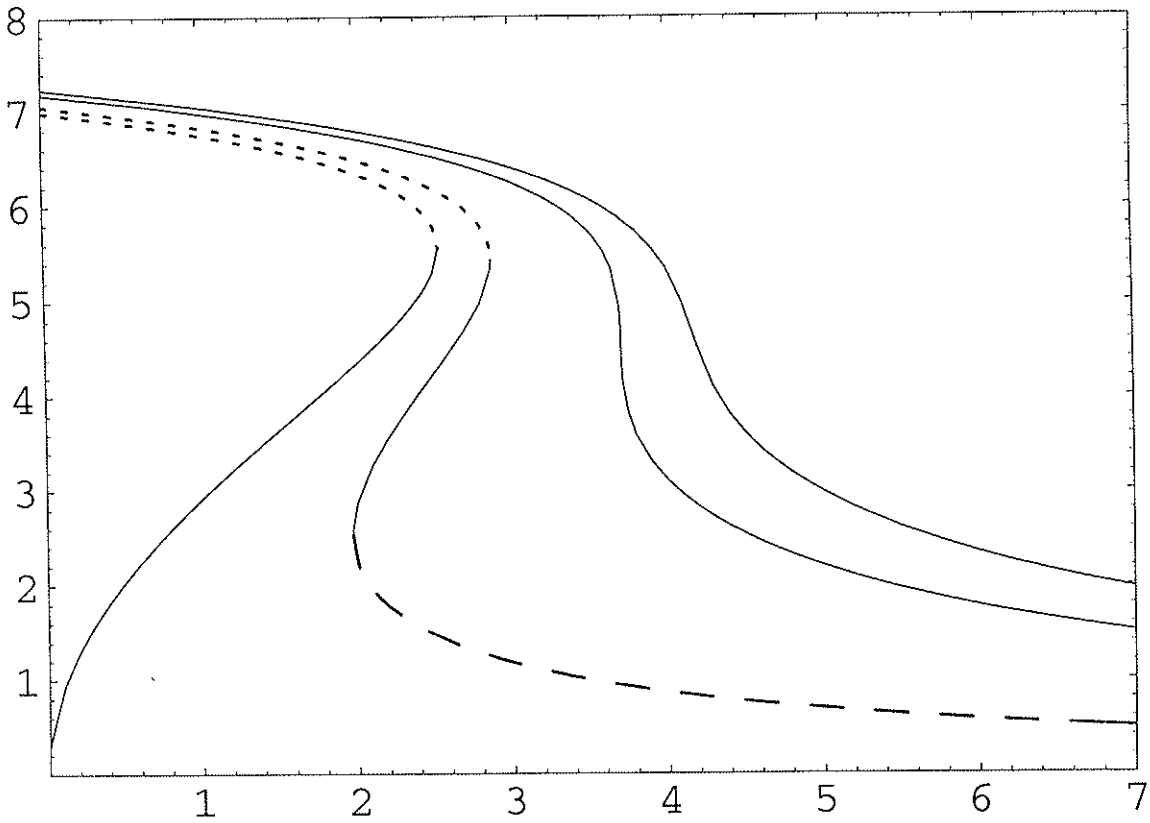


Figura 7: Separação entre os pacotes como função do termo de Josephson, resultados da aproximação gaussiana (em unidades do oscilador). Da esquerda para a direita, as curvas correspondem a valores de z_0 iguais a 0, 0.08, 0.23, 0.3 z_{osc}. Para as curvas que apresentam mais de uma solução, a linha cheia representa estados instáveis, a linha tracejada pequena representa estados metaestáveis e a linha tracejada grande representa os estados fundamentais. Ainda, para $z_0 = 0$, os estados fundamentais coincidem com o eixo de separação entre os pacotes igual a zero.

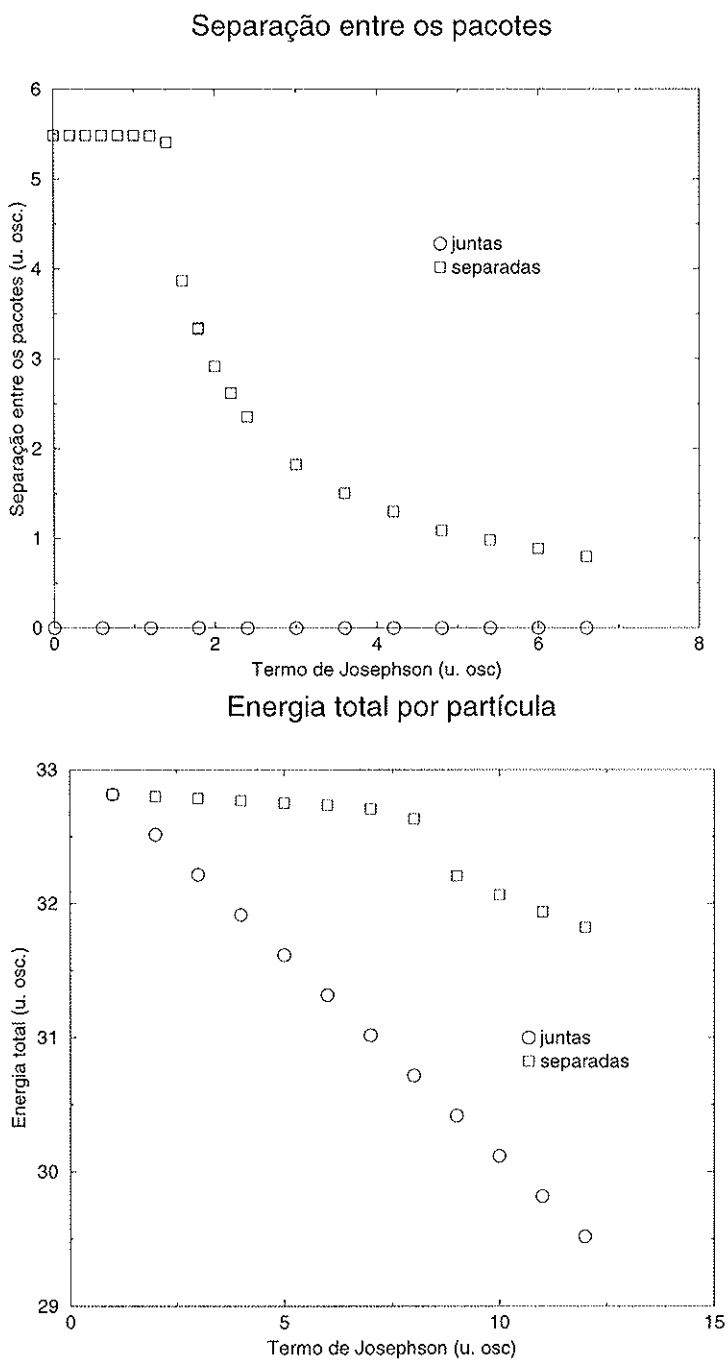
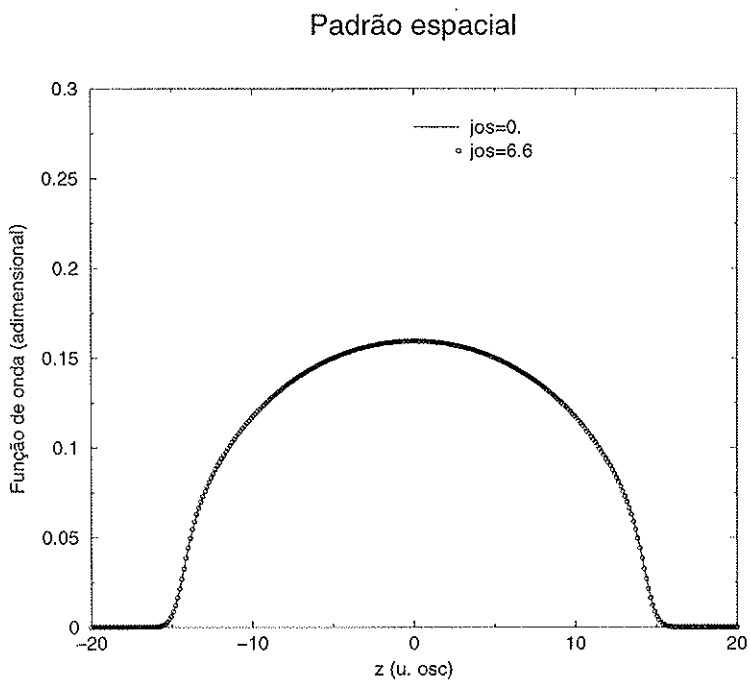


Figura 8: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson para os dois ramos de soluções, $z_0 = 0$.



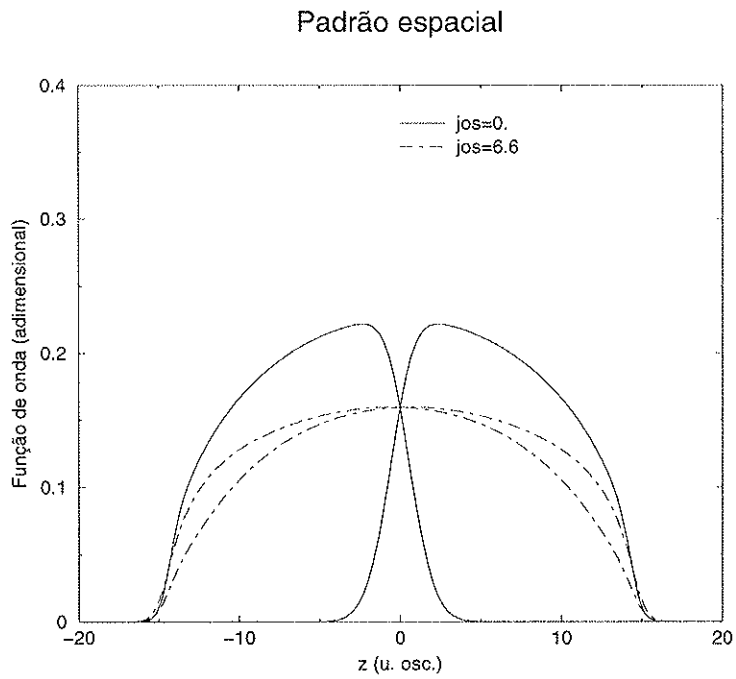


Figura 9: Padrão espacial da função de onda para o estado fundamental (acima) e para o estado metaestável para dois valores do termo de Josephson, $z_0 = 0$.

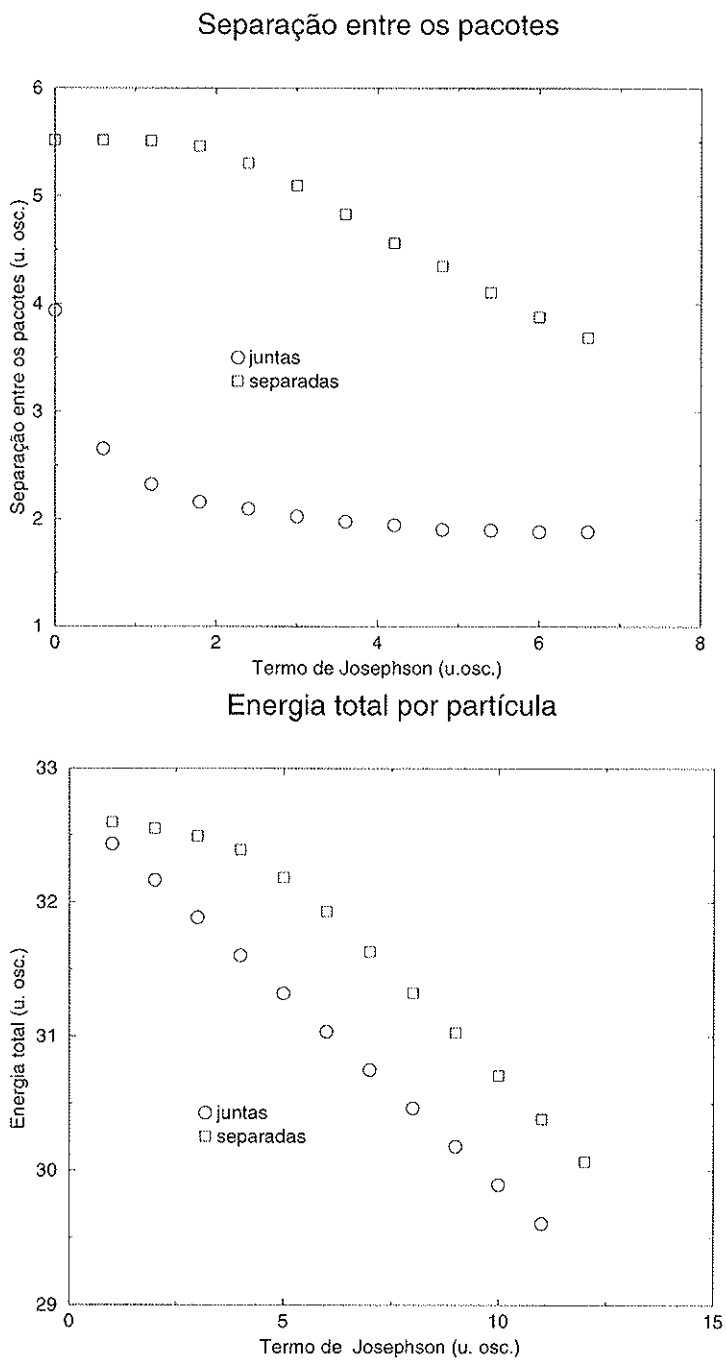


Figura 10: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson para os dois ramos de soluções, $z_0 = 0.08$.

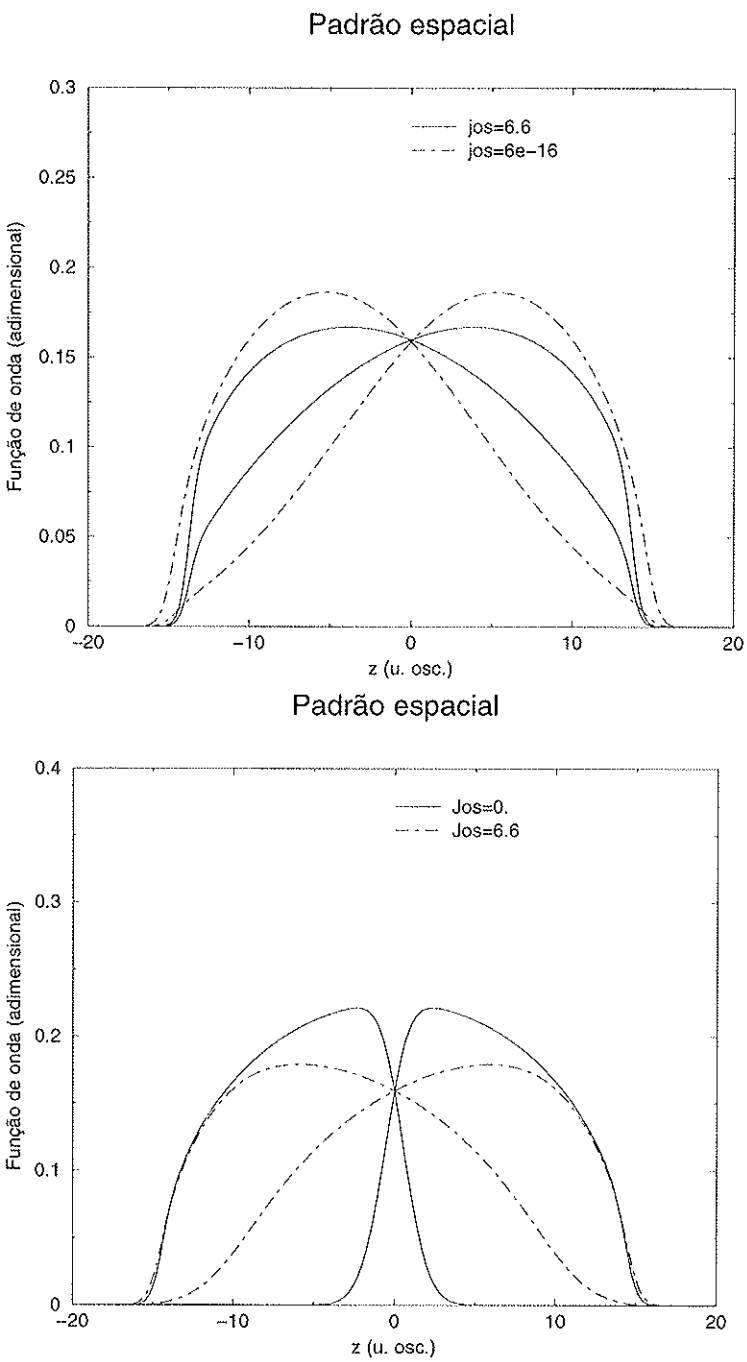


Figura 11: Padrão espacial da função de onda para o estado fundamental(acima) e para o estado metaestável para dois valores do termo de Josephson, $z_0 = 0.08$.

próximas que as soluções ditas separadas (estado metaestável), o que pode ser visto de forma mais clara na figura 10. Concluindo a nossa comparação com os resultados obtidos através da aproximação gaussiana, observa-se que não aparece back-bending na solução das equações de Gross-Pitaevski. Para essa, sempre existem dois ramos de soluções, sendo que um corresponde ao estado fundamental e outro a um estado metaestável. Devemos tomar um certo cuidado com tal comparação pois a aproximação gaussiana procura extremos do funcional da energia, enquanto as equações de Gross-Pitaevski valem apenas para os mínimos do funcional. Assim, quando analisamos o back-bending mostrado na figura 7, devemos levar em conta que a linha ascendente que une as duas soluções estáveis na aproximação gaussiana para $z_0 = 0.08$ corresponde a um máximo do funcional da energia. Tal solução não pode ser encontrada pelo nosso método que procura apenas mínimos. Porém nossos resultados indicam que tal "solução" existe pois encontramos sempre dois mínimos para o funcional da energia e matematicamente sempre existe um máximo entre dois mínimos. É possível porém modificar o método empregado a fim de encontrar este máximo.

5.1.3 Modelo com parâmetros realistas

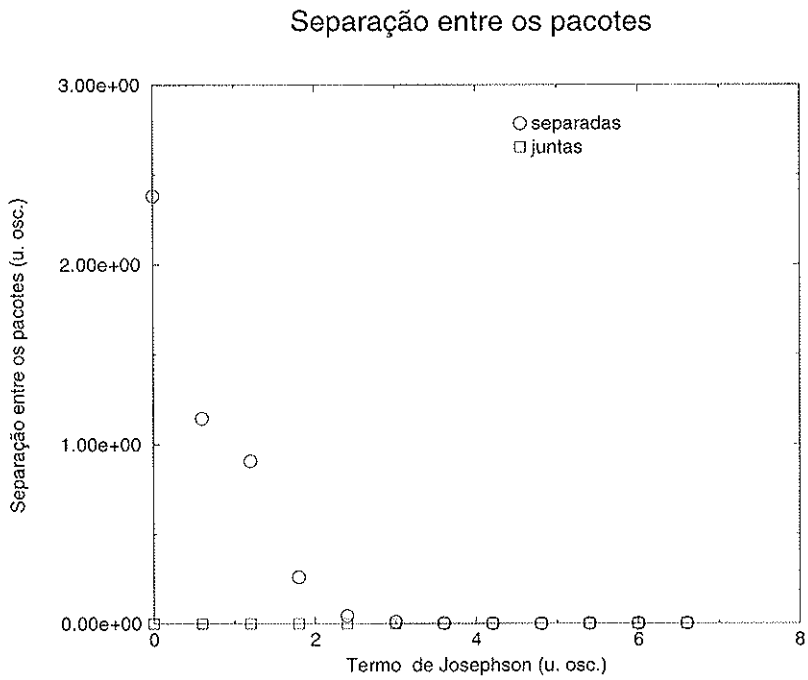
Na seção anterior fizemos as constantes de interação entre e inter condensados todas iguais a fim de observar a quebra de simetria da Lagrangeana. Se utilizamos valores realistas para tais parâmetros temos que

$$u_a = 0.97 u_{ab}$$

$$u_b = 1.03 u_{ab}$$

onde u_{ab} é o parâmetro de interação definido por (61) onde λ é calculado através de (49) com o comprimento de espalhamento inter espécies igual a $a = 5,5nm$. Com tais parâmetros, a Lagrangeana não é mais simétrica pela troca de partículas, apenas é simétrica por reflexão, somente quando $z_0 = 0$.

As figuras 12 a 17 mostram as separações entre os pacotes como função do termo de Josephson para diversas separações entre as armadilhas entre 0 e 1 unidade do oscilador harmônico (z_{osc}), juntamente com a energia total por partículas. O padrão é bastante parecido com os encontrados anteriormente. Existem sempre duas soluções, uma corresponde ao estado fundamental e outra ao estado metaestável. Tal distinção só pode ser definida ao observarmos os respectivos gráficos da energia total por partículas como função



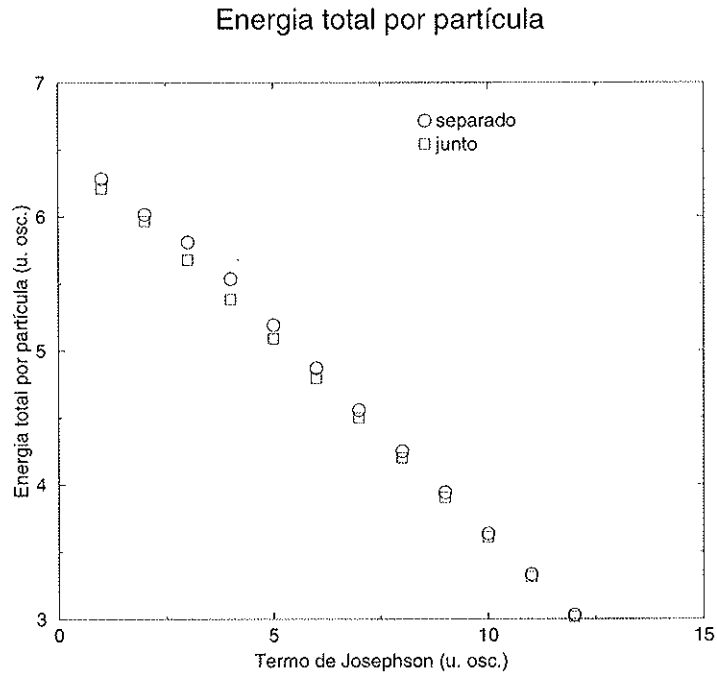


Figura 12: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0$.

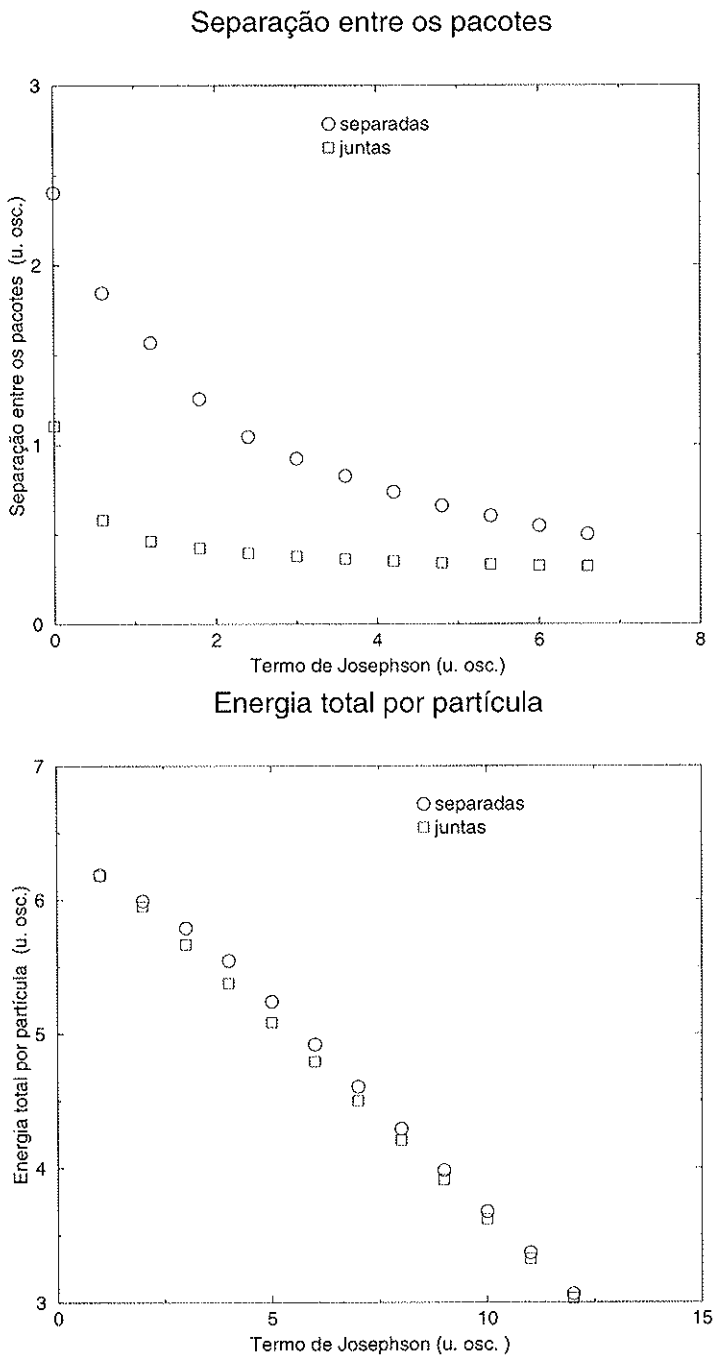
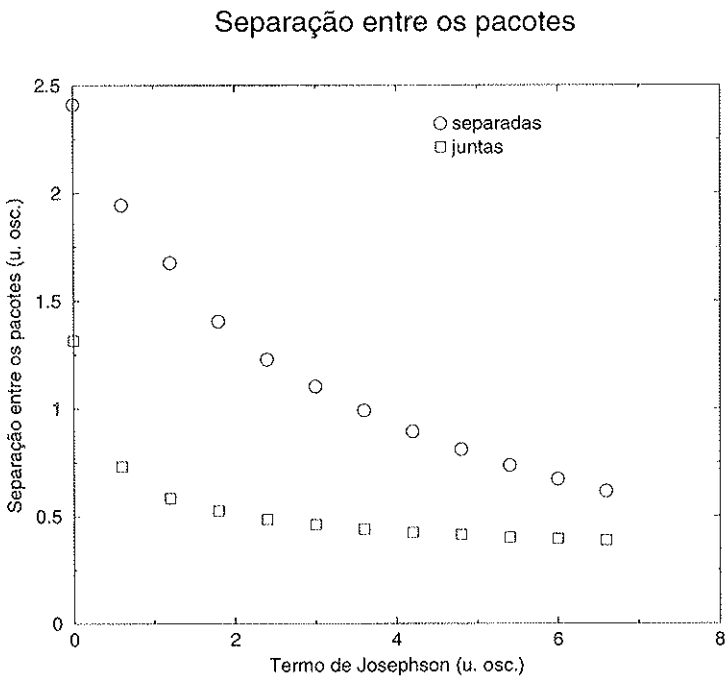


Figura 13: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0.08$.



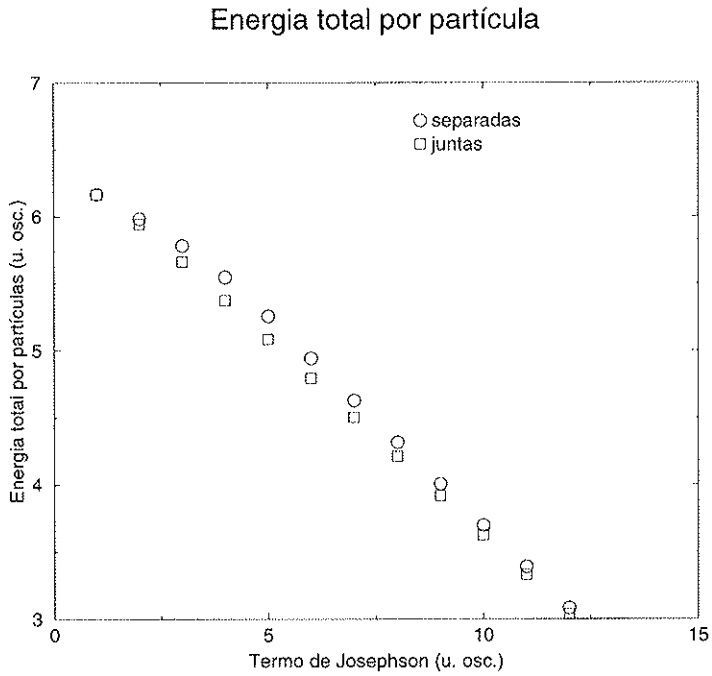


Figura 14: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0.1$.

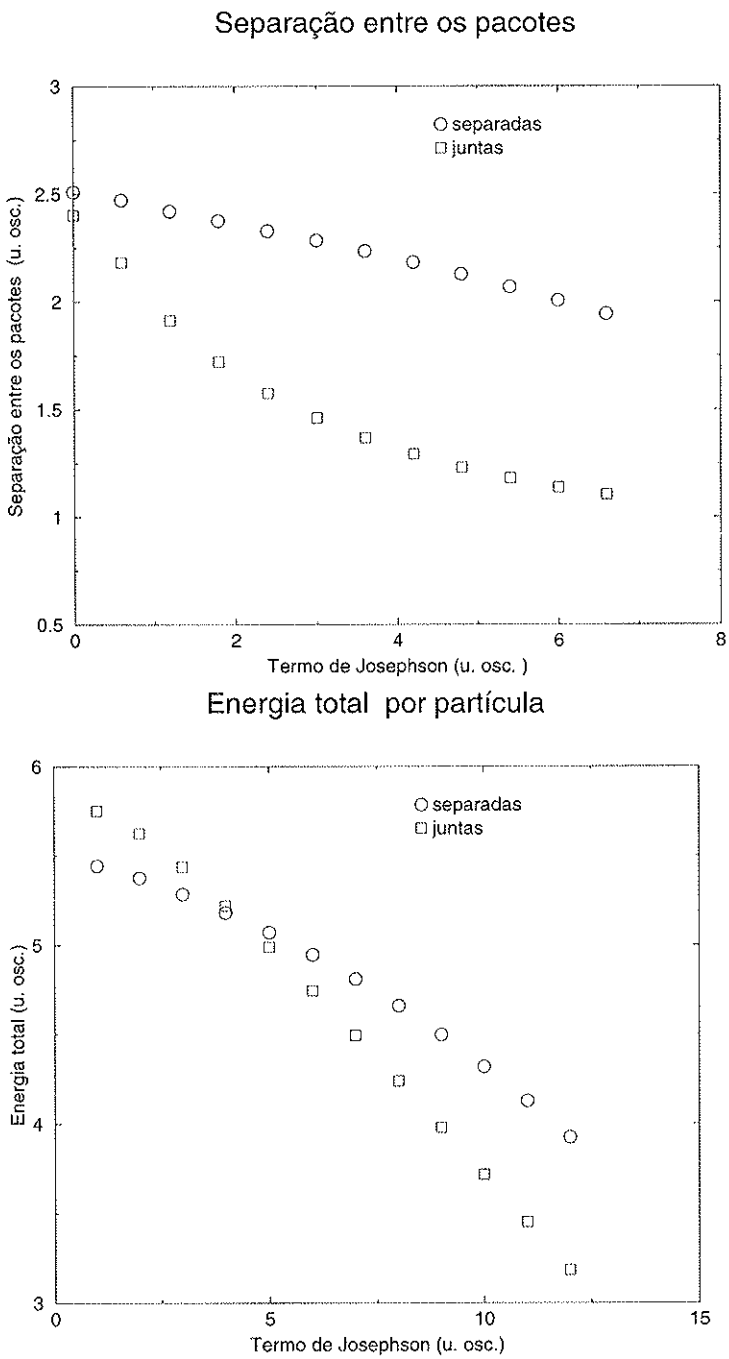
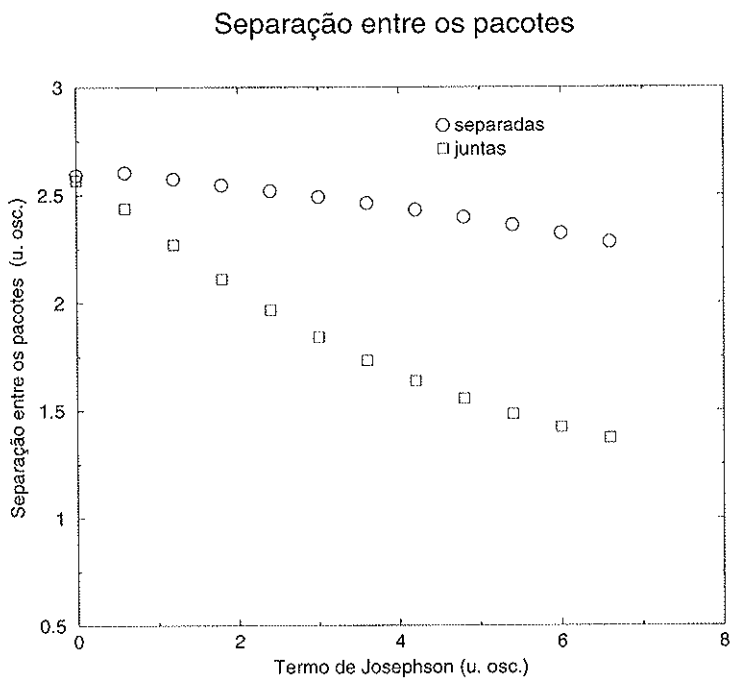


Figura 15: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0.5$.



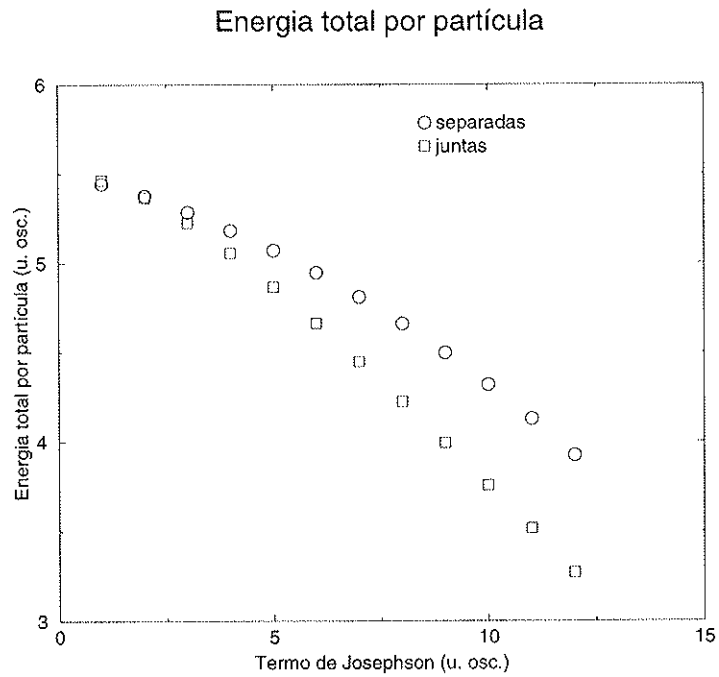


Figura 16: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0.8$.

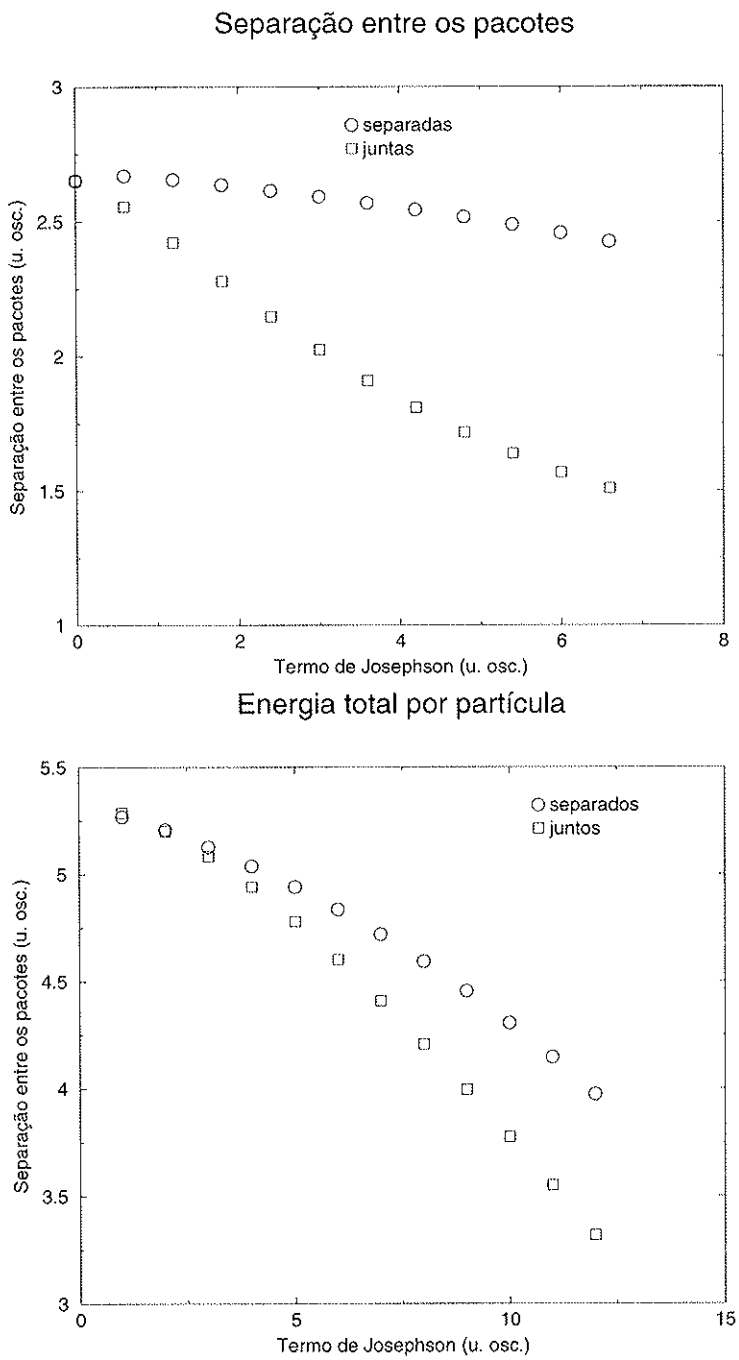


Figura 17: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 1.0$.

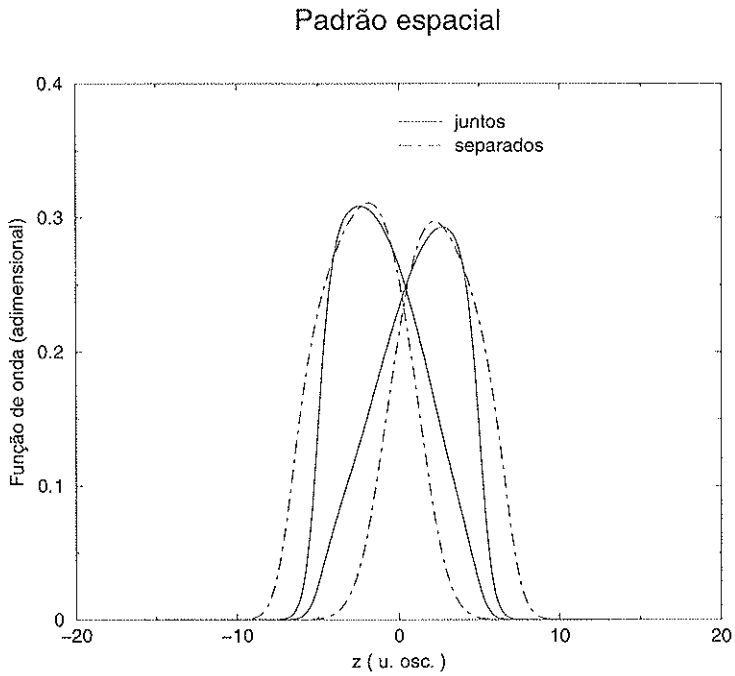


Figura 18: Padrão espacial $z_0 = 1.0$, ramos junto e separado, $\Omega = 0.6$.

do termo de Josephson para os dois ramos. Distintamente do caso anterior, para parâmetros realistas observamos uma estrutura mais rica. Por exemplo, na figura 5.1.3 para $z_0 = 0.5$ observa-se que para valores pequenos do parâmetro de Josephson o estado fundamental corresponde ao ramo junto, porém acima de um parâmetro crítico a solução separada passa a ser o estado fundamental. Para $z_0 = 0.8$ e $z_0 = 1$ não observamos tal estrutura, porém os dois ramos se juntam para valores pequenos do termo de Josephson. Para pequenas separações entre as armadilhas observa-se o esperado: o ramo junto é o estado fundamental, o ramo separado é o metaestável, porém a diferença de energia entre os estados é bastante pequena, ou seja , os estado são praticamente degenerados. Observando a figura 17 para a separação entre os pacotes como função do termo de Josephson para $z_0 = 1$, vê-se que para o termo de Josephson igual a zero a separação entre os pacotes referentes às soluções dos dois ramos coincidem. Mais ainda, observando a figura 17 vemos que a solução junta sempre é o estado de menor energia. Esta nomenclatura pode levar a erros. Para tal valor de separação entre as armadilhas $z_0 = 1$, as soluções nunca estão superpostas. O termo "junta" refere-se ao fato de tais soluções estarem mais próximas do que as ditas separadas. A figura 18 mostra os padrões espaciais das soluções junta e separada para $z_0 = 1$ e termo de Josephson igual a 6.6. O estado fundamental é a solução junta, que tem valor da separação entre os pacotes menor do que o estado metaestável (separada). Para analisar melhor o que de fato está acontecendo é necessário analisar para cada caso a composição entre os diversos termos da energia. Porém resolvemos fazer essa análise mais minuciosa no modelo apresentado na próxima seção, que corresponde a uma situação realista e unidimensional.

5.2 Potencial em forma de charuto

Apresentamos agora um modelo com parâmetros realistas, para uma situação que é quase-unidimensional, ou seja , para uma armadilha em forma de charuto (simetria axial), nos moldes do artigo [34], onde as funções de onda nas outras variáveis (que não a axial) são tomadas como gaussianas. Isso modifica os parâmetros de interação através de constantes multiplicativas dependentes da frequência da armadilha. Continuaremos tratando do mesmo sistema físico, ou seja, condensados de Rubídio nos dois diferentes estados hiperfinos. A principal diferença é que tais condensados encontram-se numa armadilha atômica com forte confinamento transversal no plano x-y. O artigo citado acima supõe que a propagação no eixo z é livre e portanto em tal

artigo $U_j(r) = U(x, y)$. Supondo soluções homogêneas calculam a frequência de rotação da fase para o estado fundamental (w_0, potencial químico dividido por $\hbar$) e descobrem que é possível cancelar o termo dependente da densidade se algumas condições forem satisfeitas (condições essas associadas à modificação efetiva nas constantes de auto e inter repulsão devido ao confinamento). Tal resultado é importante pois está ligado à possibilidade de se fazer medidas precisas com fontes coerentes de átomos. Nesse trabalho supomos que a partícula está confinada também na direção axial, porém a frequência da armadilha nessa direção é bem menor se comparada a frequência transversal. Resolveremos as equações de Gross-Pitaevski e incluiremos o termo de acoplamento de Josephson explicitamente na Lagrangeana, o que não está contemplado no artigo original [34], onde tal termo é omitido da Hamiltoniana de muitos corpos, pois é suposto muito pequeno ou desligado adiabaticamente depois que o estado estacionário é atingido. Embora não apareça explicitamente na Hamiltoniana, o acoplamento de Josephson está presente pois eles permitem variações nas densidades de cada componente e introduzem apenas um multiplicador de Lagrange, associado a conservação do número total de partículas, da mesma forma que fizemos no modelo apresentado na seção anterior.

5.2.1 O modelo

Partindo da seguinte Lagrangeana

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \int d^3r \frac{i\hbar}{2}\left(\dot{\phi}_a^*\phi_a - \phi_a^*\dot{\phi}_a\right) + \frac{i\hbar}{2}\left(\dot{\phi}_b^*\phi_b - \phi_b^*\dot{\phi}_b\right) + \\
&+\phi_a^*\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - V_a(\vec{r}) - \frac{\lambda_a}{2}|\phi_a|^2\right)\phi_a + \\
&+\phi_b^*\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - V_b(\vec{r}) - \frac{\lambda_b}{2}|\phi_b|^2\right)\phi_b + \\
&-\lambda_{ab} \mid \phi_a \mid^2 \mid \phi_b \mid^2 + (\Omega\phi_a^*\phi_b + \Omega^*\phi_b^*\phi_a)
\end{aligned} \tag{71}$$

é possivel determinar o funcional da energia de Gross-Pitaevski tridimensional. Mas

$$V_a = \frac{1}{2}m\omega^2(z - z_0)^2 + \frac{1}{2}m\omega_{trans}^2(x^2 + y^2)$$

$$V_b = \frac{1}{2}m\omega^2(z + z_0)^2 + \frac{1}{2}m\omega_{trans}^2(x^2 + y^2)$$

INSTITUTO DE FÍSICA
Serviço de Biblioteca e Informação
Tombo: 3742
ex. 1

e se ω_{trans} (frequência da armadilha na direção transversal) for muito maior do que ω (frequência da armadilha na direção axial), o potencial externo tem forma de charuto. Se a energia de interação de dois corpos for menor que $\hbar\omega_{trans}$, esta não afeta a componente transversal da função de onda, o que nos permite analisar o problema num espaço unidimensional. Usando a função de onda para o estado fundamental no potencial de oscilador harmônico para a função de onda transversal, supomos que a função de onda macroscópica pode ser decomposta como:

$$\Psi(r,t) = \psi(z,t)\psi^{trans}(x,y)$$

Estas funções de onda são substituídas no funcional de energia de Gross-Pitaevski tridimensional, que é então integrado em x e y. Obtemos assim o funcional de energia de Gross-Pitaevski unidimensional:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathcal{GP}} &= \int dz \frac{\hbar^2}{2m} \mid \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial z^2} \mid^2 + V_a(z) \mid \phi_a \mid^2 + \frac{U_a}{2} \mid \phi_a \mid^4 + \\ &+ \frac{\hbar^2}{2m} \mid \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial z^2} \mid^2 + V_b(z) \mid \phi_b \mid^2 + \frac{U_b}{2} \mid \phi_b \mid^4 + \\ &+ U_{ab} \mid \phi_a \mid^2 \mid \phi_b \mid^2 - 2\Omega \mid \phi_a \mid\mid \phi_b \mid \end{aligned} \tag{72}$$

as interações de dois corpos de dois corpos são iguais a :

$$U_a = \lambda_a \int dxdy \mid \psi_a^{trans}(x,y) \mid^4 = \frac{\lambda_a}{2\pi b_{trans}^2}$$

$$U_b = \lambda_b \int dxdy \mid \psi_b^{trans}(x,y) \mid^4 = \frac{\lambda_b}{2\pi b_{trans}^2}$$

$$U_{ab} = \lambda_{ab} \int dxdy \mid \psi_a^{trans}(x,y) \mid^2 \mid \psi_b^{trans}(x,y) \mid^2 = \frac{\lambda_{ab}}{2\pi b_{trans}^2}$$

onde

$$b_{trans} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{trans}}}$$

$$\lambda = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$$

e as equações de Gross-Pitaevski acopladas independentes do tempo correspondentes são:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_a(z) + U_a \mid \phi_a(z) \mid^2 - \mu + U_{ab} \mid \phi_b \mid^2 \right] \phi_a(z) - \Omega\phi_b(z) = 0 \tag{73}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_b(z) + U_b \mid \phi_b(z) \mid^2 - \mu + U_{ab} \mid \phi_a \mid^2\right] \phi_b(z) - \Omega\phi_a(z) = 0 \quad (74)$$

5.2.2 Resultados

Procedemos como nos casos anteriores, utilizamos o mesmo método e as mesmas transformações que tornam as grandezas adimensionais. Em relação aos modelos anteriores temos uma auto-repulsão e inter-repulsão efetiva muito maior, os condensados ocupam portanto uma maior região do espaço e como preferimos manter o número de pontos e o "tamanho da caixa", tivemos que utilizar uma unidade de medida de comprimento maior, a saber:

$$b = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}$$

assim, os condensados couberam numa mesma escala de $z' = bz$ adimensional, ou seja, de -20 a 20. Primeiramente, repetimos a análise anterior para o mesmo número de partículas do modelo apresentado na seção anterior, ou seja, 20.000 partículas. Os parâmetros utilizados foram os mesmos do artigo [40], a saber

$$\omega = 180\pi rad/s$$

$$\omega_{trans} = 30\omega$$

esse artigo, posterior a [34], faz uma análise no espaço de parâmetros, variando N e λ_{ab}, do número de mínimos do funcional da energia para o potencial de charuto, porém sem termo de Josephson e sem deslocamento entre as armadilhas. Utilizamos os mesmos parâmetros para os comprimentos de espalhamento que foram utilizados na seção anterior (5.1.3), que são os hoje aceitos como parâmetros realistas para os estados hiperfinos do Rubídio, que são os utilizados na referência [34], havendo apenas alguma controvérsia em relação ao comprimento de espalhamento entre os condensados. A figura 19 mostra a separação entre os pacotes como função do termo de Josephson quando não há separação entre as armadilhas ($z_0 = 0$). Como anteriormente constatamos a existência de dois mínimos para o funcional da energia. A solução junta corresponde ao estado fundamental, enquanto a separada é o estado metaestável. Nas figuras 20 e 21 podemos observar os padrões espaciais para as soluções juntas e separadas para os valores mínimo e máximo do termo de Josephson. Observamos que o estado que tem comprimento de espalhamento maior fica com a menor população, tanto na configuração

separada quanto na junta. Isso indica que estamos num regime dominado pela interação entre partículas. O que é esperado pois o confinamento para uma dimensão acarretou num acréscimo efetivo nas constantes de interação de dois corpos. Isso poderia indicar que a interação de Josephson pudesse ser desprezada. Porém, como mostram os padrões espaciais ocorre uma mudança significativa na população relativa entre os condensados quando variamos o termo de Josephson. O que pode ser visto comparando-se as figuras mostradas em 20 (acoplamento de Josephson fraco e forte respectivamente para a solução separada, que é o estado metaestável); e 21 (o mesmo para o estado fundamental, solução junta). Observamos que essa solução é simétrica por reflexão em relação ao eixo, enquanto o estado metaestável não é. Esse fato difere dos resultado mostrados na seção anterior, onde a solução separada também era simétrica por reflexão, apenas não era pela troca de partículas. Nesse modelo, condensados confinados no potencial de charuto, a solução separada não é simétrica pelo produto das transformações de reflexão e troca de partículas como ocorria anteriormente, o que é esperado pois as diferentes constantes de acoplamento de auto-repulsão distingue os estados.

Cabe notar nesse ponto que os dados mostrados na seção anterior podem ser reinterpretados como condensados no potencial de charuto sentindo uma interação de dois corpos (ou de campo médio como também é usual ouvir) mais fraca. Podemos então comparar os dois modelos a fim de esclarecer o papel de tal parâmetro. Podemos imaginar que no futuro será possível condensar um maior número de espécies atômicas e o estudo das ressonâncias de Fleshbach são um exemplo de alguma liberdade para mudar tais constantes.

Passamos a apresentar os mesmos gráficos para separação entre as armadilhas igual a 0.08. Notamos que mesmo com este pequeno valor de separação entre as armadilhas, os condensados separam-se. Para $\Omega = 0.6$ (figura 23) as soluções encontram-se completamente separadas espacialmente, para os dois ramos gerados. Apenas para $\Omega = 7.2$, ramo junto, encontramos algum resquício da solução simétrica, pois embora a maioria da população tenha se deslocado para um dos lados, ainda resta um pequeno pico do outro lado (figura 24). Para $\Omega = 7.2$, ramo separado, a solução encontra-se separada espacialmente. Observando a figura 22 notamos que o estado fundamental continua sendo o ramo junto, enquanto o ramo separado é o metaestável.

Já para $z_0 = 0.5$ encontramos funções de onda bastante similares para os dois ramos, fixos os valores de Ω, como podemos observar na figura 26. A figura 25 mostra que as separações entre os pacotes calculadas para os dois ramos são próximas e será necessário uma análise mais detalhada para

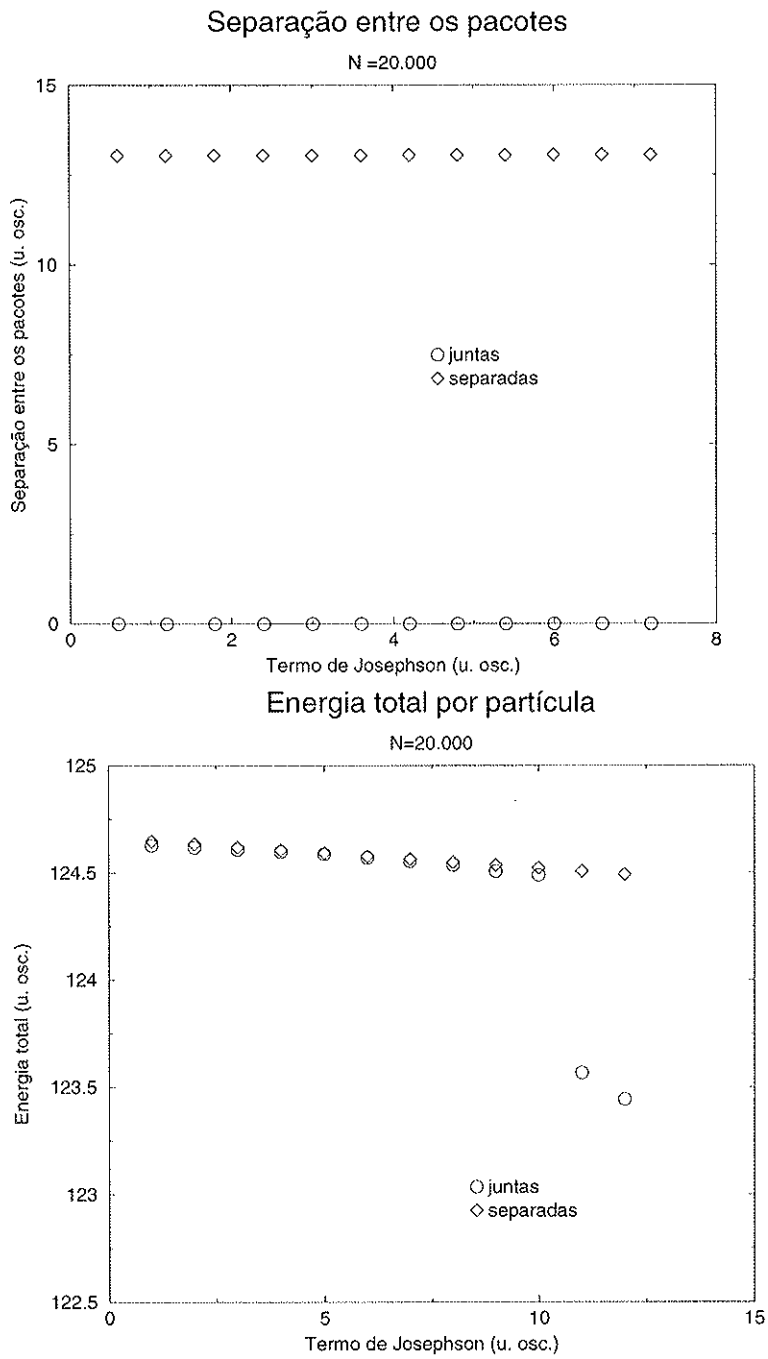
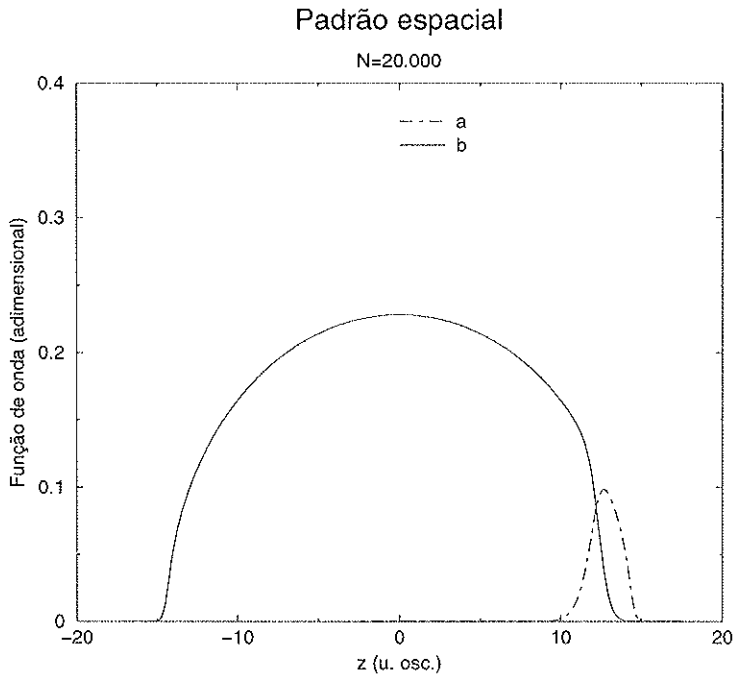


Figura 19: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0$ e $N = 20.000$.



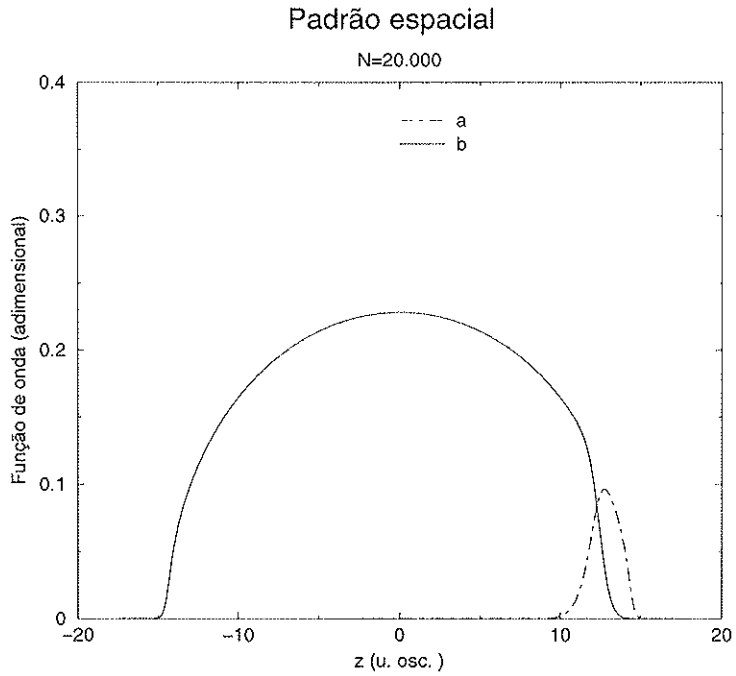


Figura 20: Padrão espacial configuração separada, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0$ e $N = 20.000$.

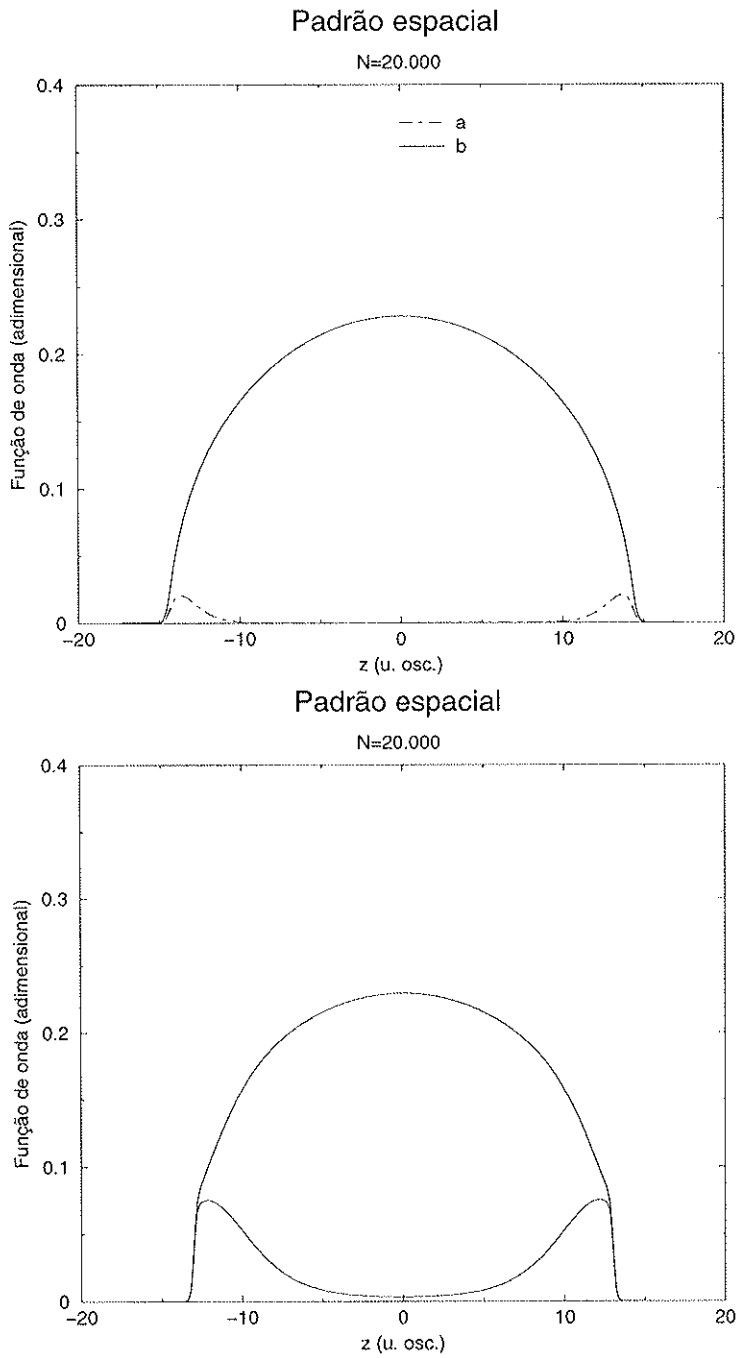


Figura 21: Padrão espacial configuração junta, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0$ e $N = 20.000$.

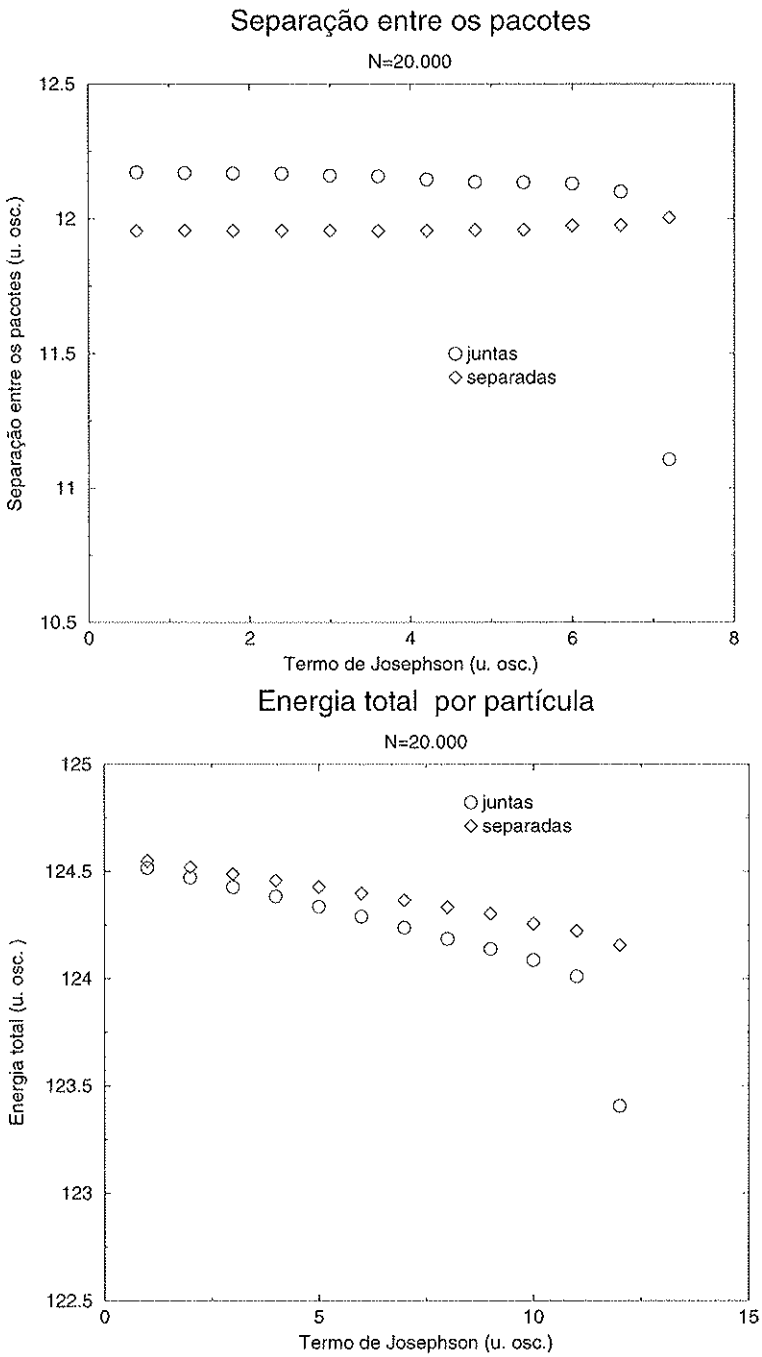


Figura 22: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0.08$ e $N = 20.000$.

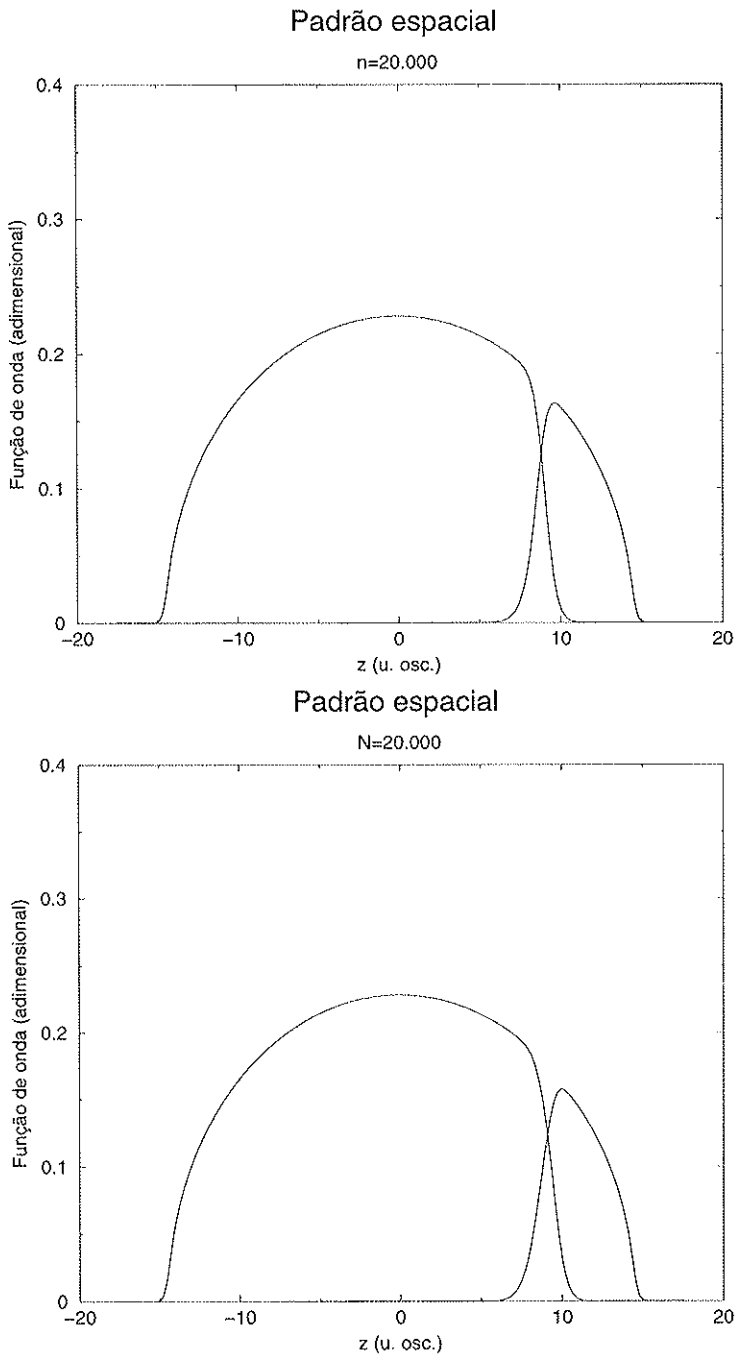


Figura 23: Padrão espacial configuração separada, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0.08$ e $N = 20.000$.

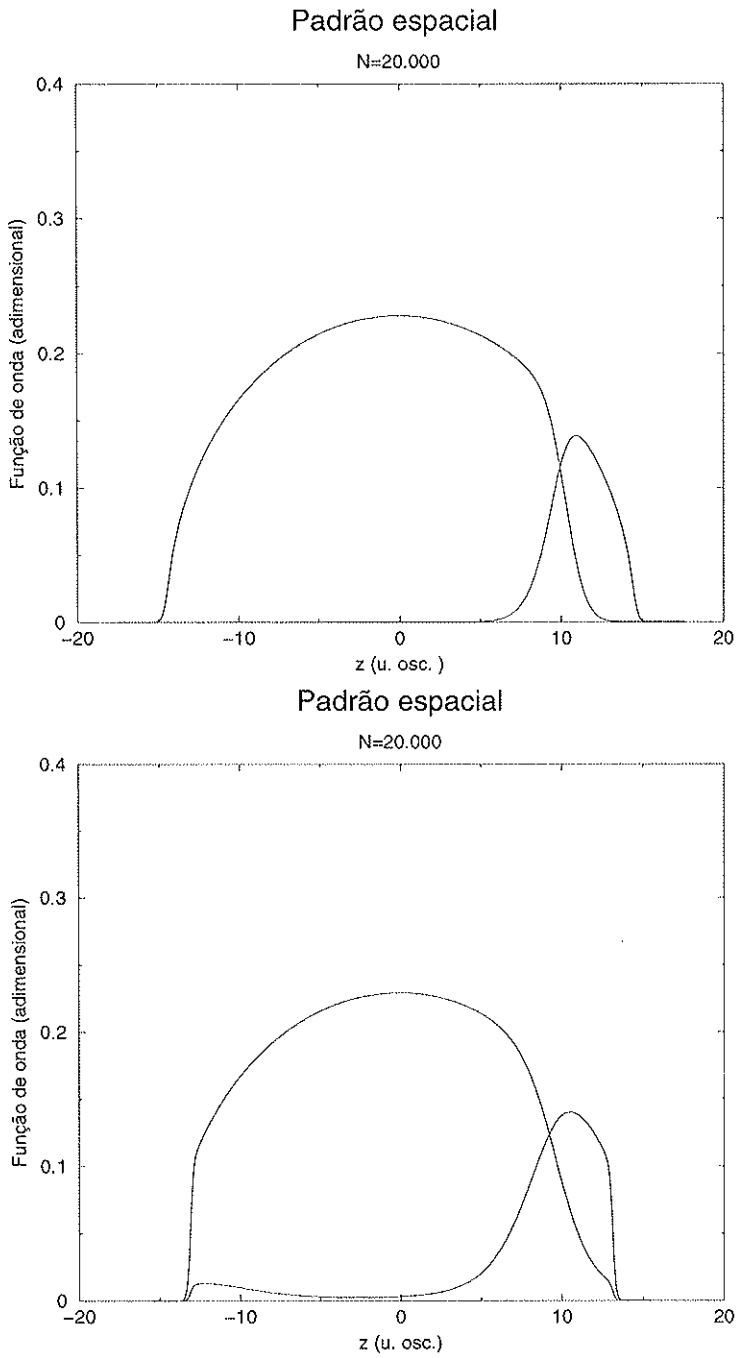


Figura 24: Padrão espacial configuração junta, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0.08$ e $N = 20.000$.

determinar o número de soluções, o que está exposto na próxima seção.

A figura 27 mostra a separação entre os pacotes como função do termos de Josephson para $z_0 = 1$. Observando a figura 28 que traz os padrões espaciais para as soluções juntas e separadas para termo de Josephson igual a 7.2 concluímos que os padrões espaciais são muito parecidos e portanto podem corresponder a um mesmo estado. É necessário uma discussão quantitativa do erro numérico a fim de determinar como o número de mínimos do funcional de energia varia como função de z_0.

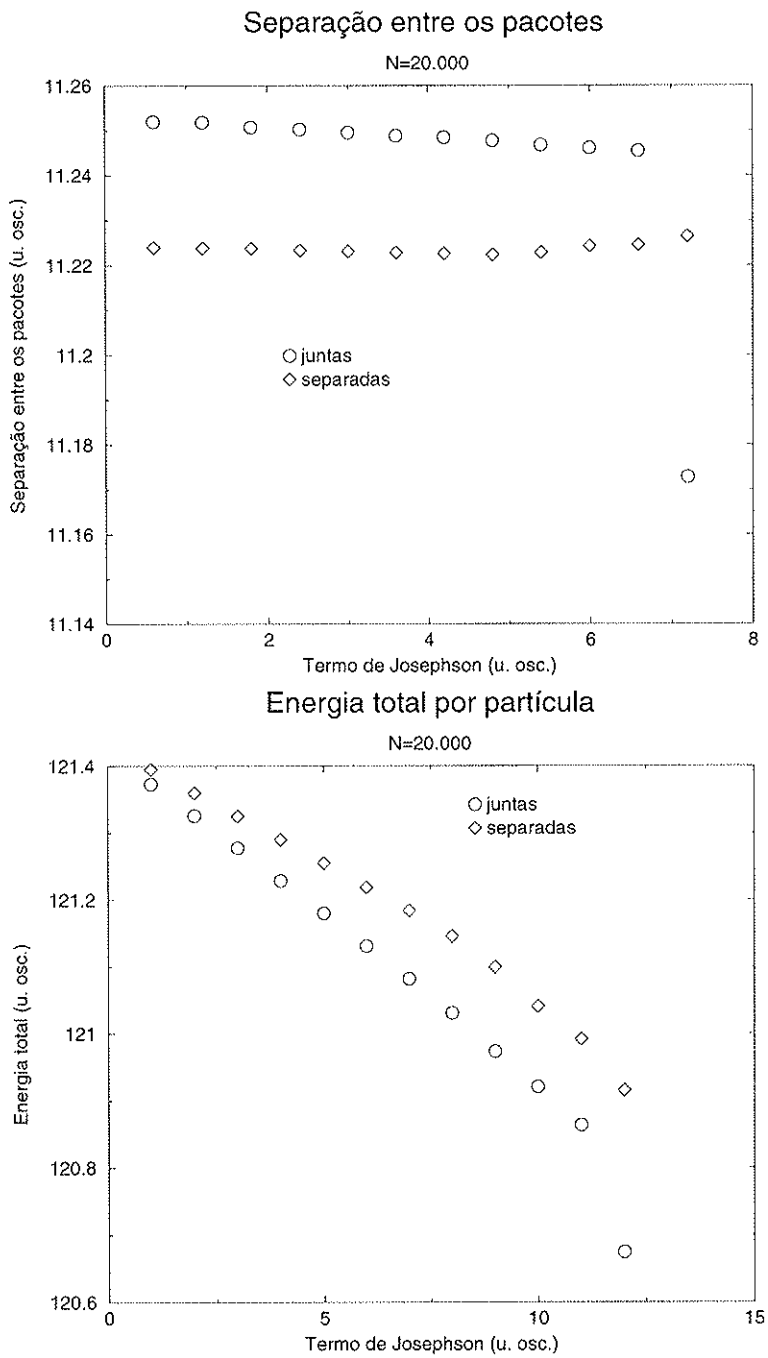


Figura 25: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0.5$ e $N = 20.000$.

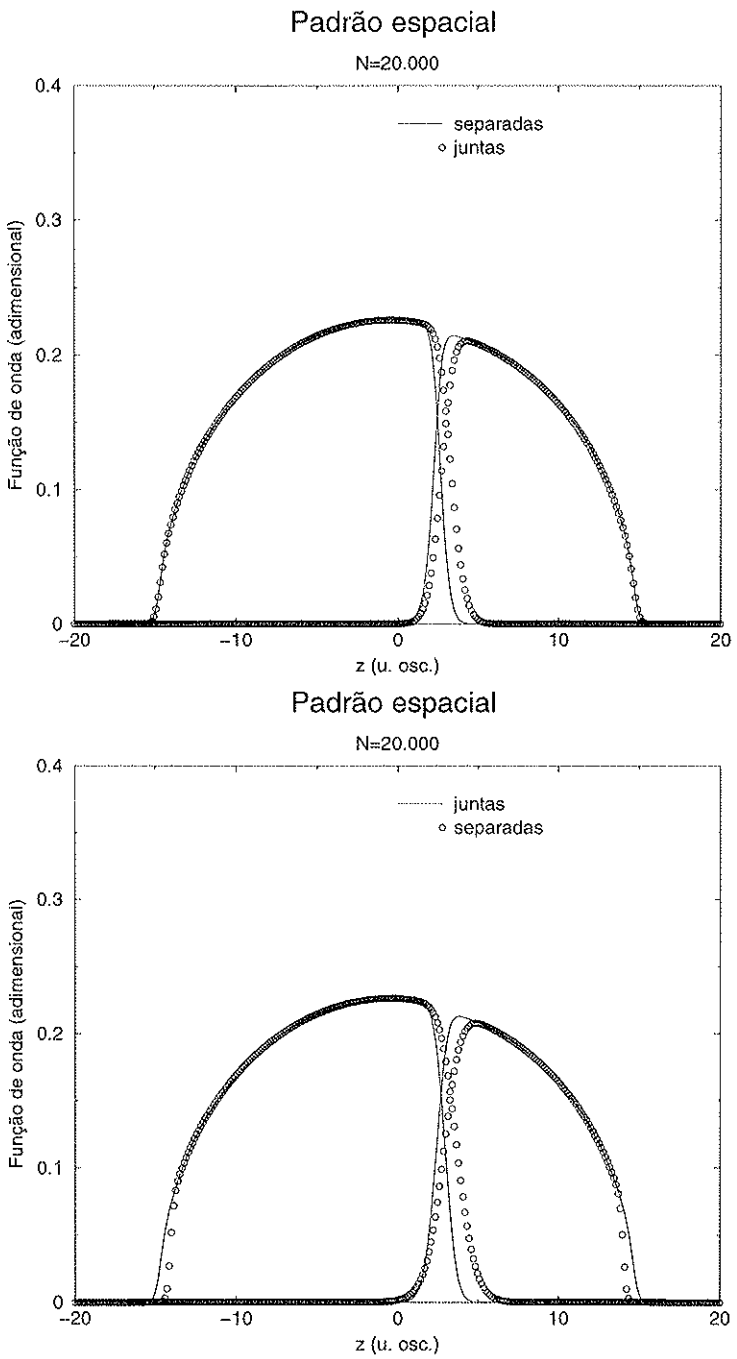


Figura 26: Padrão espacial comparado configurações junta e separada, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0.5$ e $N = 20.000$.

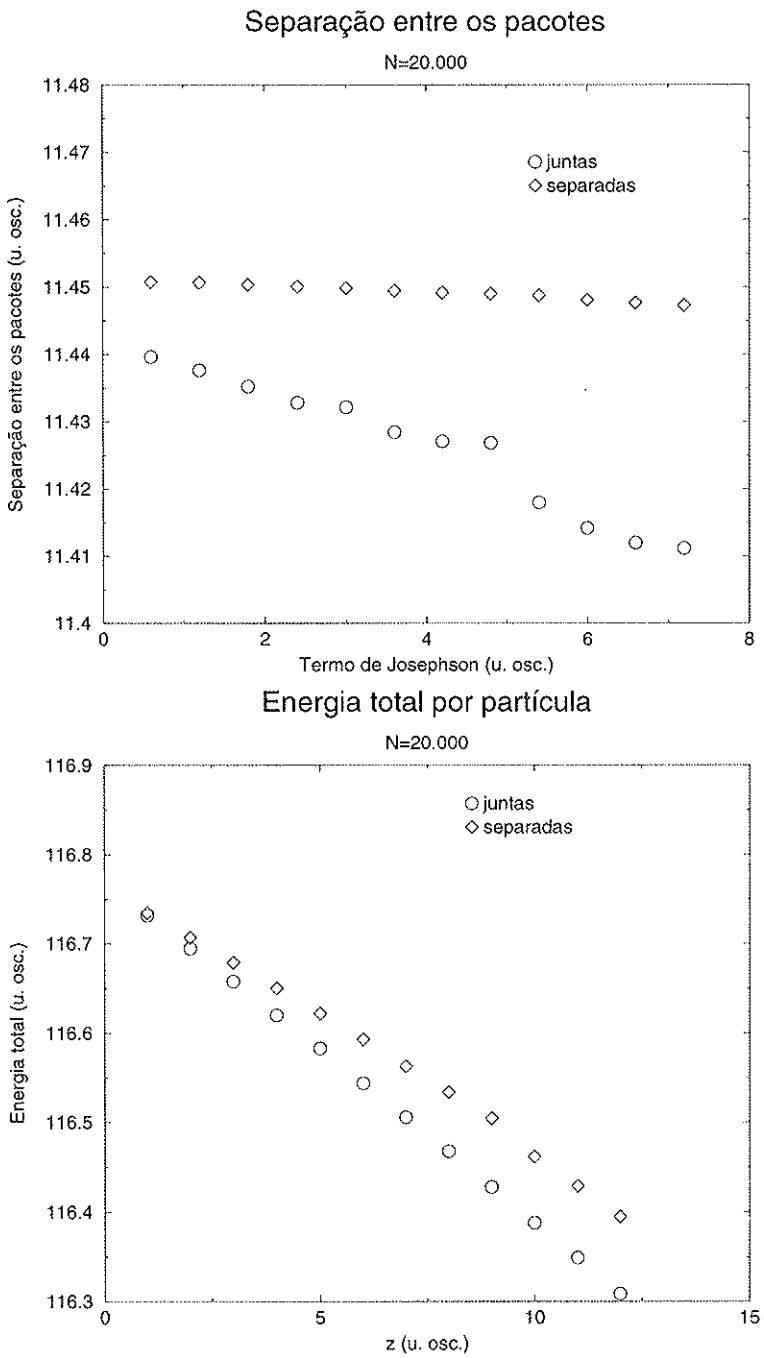


Figura 27: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 1$ e $N = 20.000$.

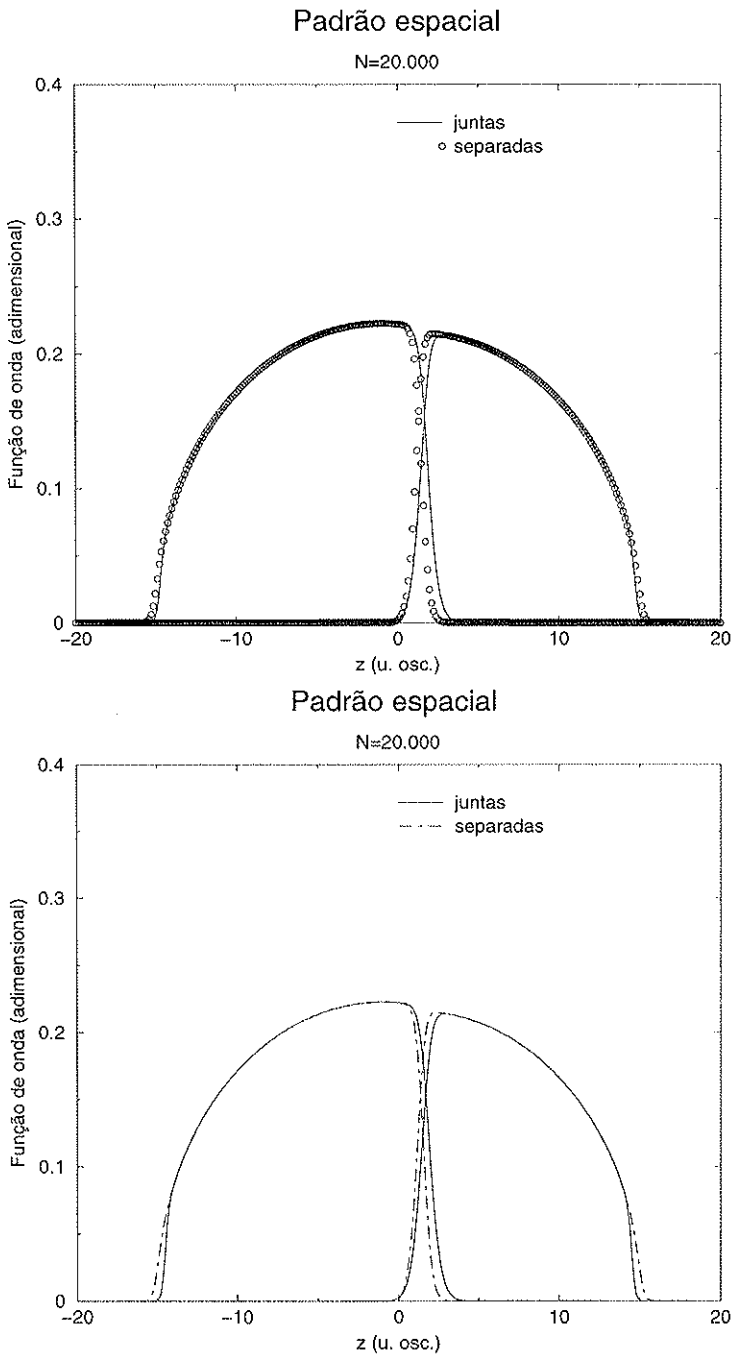


Figura 28: Comparação entre os padrões espaciais, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 1$ e $N = 20.000$

5.2.3 Discussão dos erros

Para tornar a discussão do número de soluções como função do deslocamento das armadilhas mais quantitativa, invertemos o processo e inicializamos o programa com gaussianas separadas para termo de Josephson alto (igual a 7.2, alta atração) e gaussianas sobrepostas para termo de Josephson igual a 0.6 (pouca atração) que é o contrário do que vínhamos fazendo. Apresentamos na figura 29 os padrões espaciais obtidos a partir de gaussianas superpostas e termo de Josephson igual a 0.6, para $z_0 = 0$ e os padrões espaciais obtidos a partir de gaussianas separadas e termo de Josephson igual a 7.2. Comparando tais resultados com os que foram expostos na seção anterior, vemos que a simetria da função tentativa inicial determina para qual mínimo a função vai convergir. Assim, mesmo com um termo de Josephson alto ($\Omega = 7.2$), ao inicializarmos o programa com gaussianas separadas o mesmo converge para a solução separada espacialmente, ou seja, não encontramos a solução simétrica, apesar desta ser o estado fundamental. Por outro lado, apesar da pouca atração ($\Omega = 0.6$), se inicializamos com gaussianas sobrepostas, o programa convergirá para a solução junta e simétrica. Na tabela a seguir apresentamos as frações parciais de cada condensado, bem como os valores obtidos para a separação média entre os pacotes da maneira tradicional, descrita na seção anterior (Δz) comparada com a mesma quantidade obtida da forma descrita nesta seção (Δz_f), A partir dos dados da

Ω	fração de partículas a	fração de partículas b	Δz	Δz_f
0.6	0.0013	0.9987	1.9E-20	5.3E-20
7.2	0.0160	0.9840	13.1	12.5

Tabela 1: Comparação entre as soluções obtidas para $z_0 = 0$ e $N = 20.000$ com duas funções tentativa iniciais diferentes.

tabela 1 podemos obter um valor máximo para o erro da variável Δz e comparar os dois valores da separação entre os pacotes obtidas nos dois diferentes ramos para um mesmo valor de Ω, a fim de determinar quantitativamente se estes correspondem a uma mesma solução ou a soluções diferentes. Neste caso específico que estamos analisando, $z_0 = 0$, não seria tão necessária tal análise pois os dois ramos apresentam padrões espaciais distintos e portanto correspondentes a soluções visivelmente diferentes. Porém, para $z_0 \neq 0$, tal distinção não pode ser feita apenas examinando os padrões espaciais e

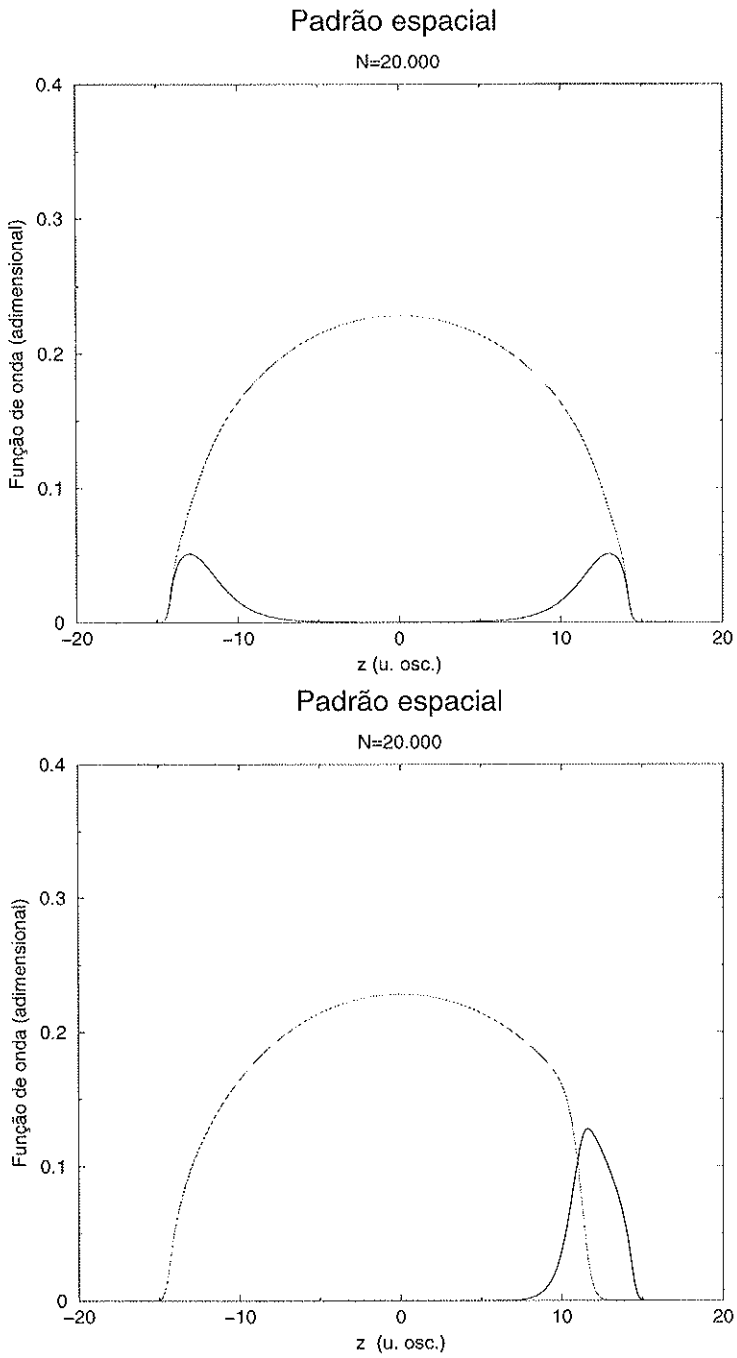


Figura 29: Padrão espacial obtido a partir de gaussianas unidas (acima) e separadas (abaixo), $z_0 = 0$.

uma análise quantitativa dos erros torna-se necessária se quizermos responder a pergunta de quantos mínimos o funcional da energia de Gross-Pitaevski apresenta para cada valor de z_0. A tabela 2 mostra as separações entre os

Ω	Δz	$\delta(\Delta z_t)$	(Δz_o)
0.6	1.9E-20	3.4E-20	1.9
7.2	13.1	0.6	1.8E-19

Tabela 2: Comparação entre as separações obtidas para os diferentes ramos e o erro correspondente, $z_0 = 0$ e $N = 20.000$.

pacotes obtidas para os diferentes ramos para um mesmo Ω. Nota-se que nesse método utilizado para definir os erros, determinamos o erro na solução junta para $\Omega = 0.6$ e na solução separada para $\Omega = 7.2$. Assim, a última coluna da tabela 2 (Δz_o) corresponde à separação entre os pacotes para a outra solução a saber: a separada para $\Omega = 0.6$ e a junta para $\Omega = 7.2$, para as quais não foi determinado o erro. Apesar dos erros serem grandes, podemos concluir que existem duas soluções distintas, dois mínimos para o potencial de Gross-Pitaevski para $N = 20.000$ e $z_0 = 0$. Façamos o mesmo tipo de análise para $z_0 = 0.08$. A figura 30 mostra o padrão espacial obtido a partir de gaussianas superpostas e $\Omega = 0.6$ e o padrão espacial obtido a partir de gaussianas separadas e $\Omega = 7.2$.

Se lembrarmos dos resultados expostos na seção anterior, vemos que mesmo para um pequeno deslocamento entre os centros das armadilhas, não observamos mais a solução superposta. A figura 30 confirma tal resultado. Mesmo quando inicializamos com as gaussianas superpostas e simétricas, a função de onda converge para uma configuração separada (note que para $z_0 = 0$ isto não acontecia). Da mesma forma que para $z_0 = 0$, se inicializamos o programa com gaussianas separadas, mesmo para um valor elevado da atração de Josephson, a função de onda converge para uma configuração separada (figura 30), bastante distinta da solução obtida para o mesmo valor de Ω com tentativa inicial simétrica. A tabela abaixo faz a comparação entre os valores obtidos para Δz, para $N = 20.000$ e $z_0 = 0.08$

Concluímos examinando a tabela 4 que para $z_0 = 0.08$ existem dois mínimos para o funcional de Gross-Pitaevski para $\Omega = 7.2$, porém existe apenas um mínimo para $\Omega = 0.6$. A figura 31 mostra os padrões espaciais obtidos para $z_0 = 0.5$, para $\Omega = 0.6$ e $\Omega = 7.2$ respectivamente. A tabela 5 faz a comparação entre os valores obtidos para Δz, para $N = 20.000$ e $z_0 = 0.5$

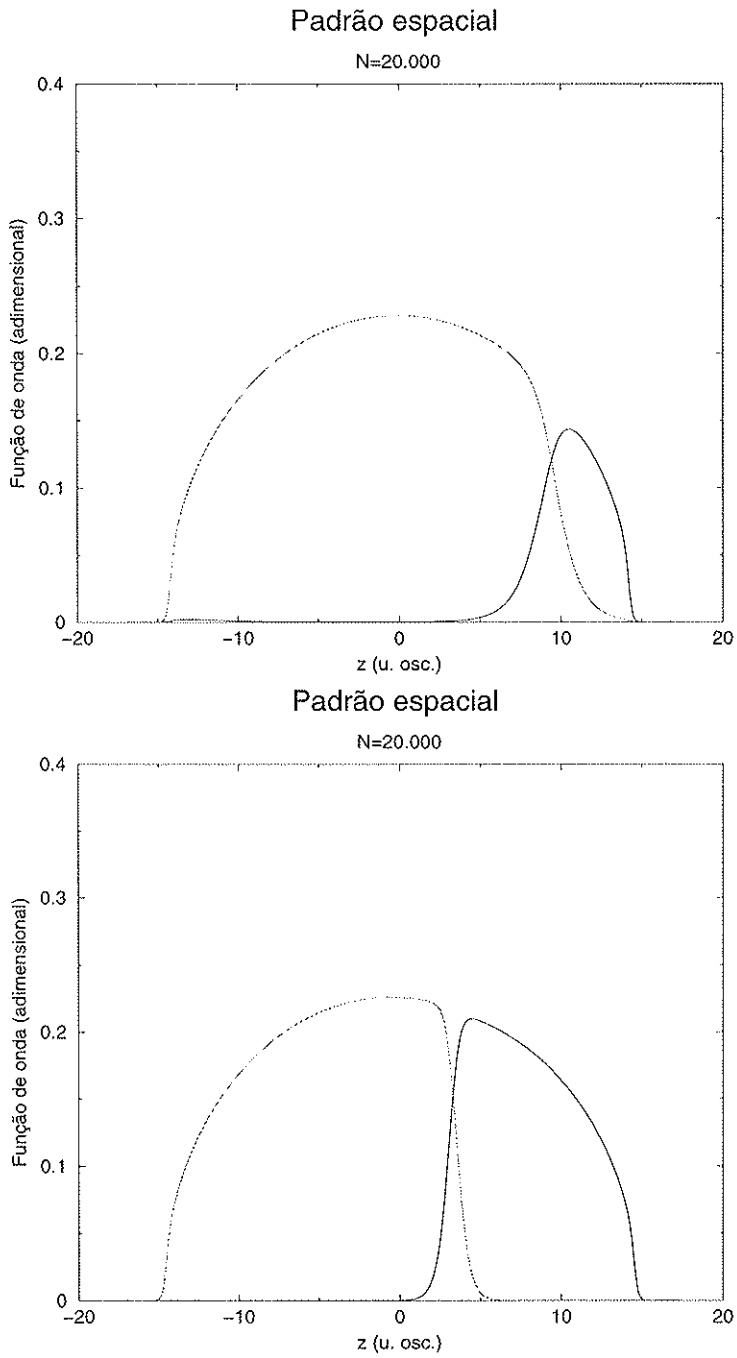


Figura 30: Padrão espacial obtido a partir de gaussianas unidas (acima) e separadas (abaixo), $z_0 = 0.08$.

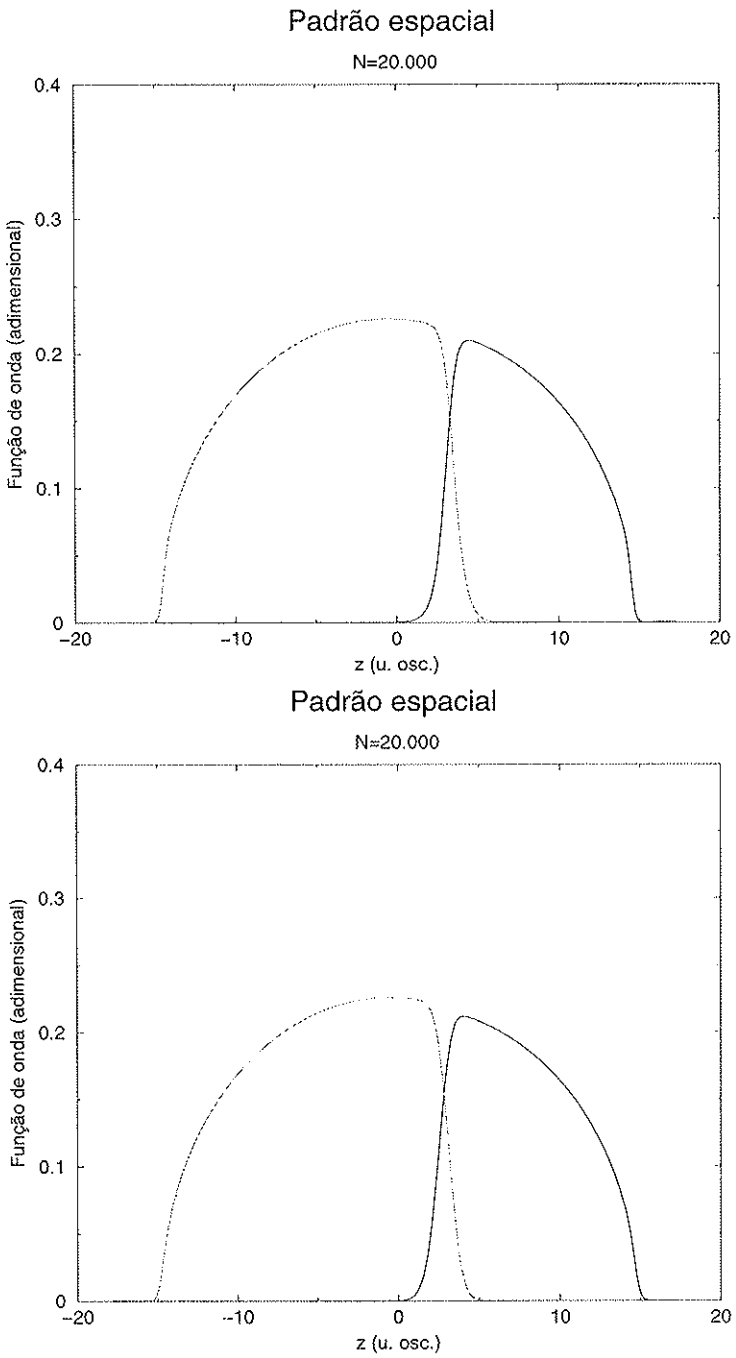


Figura 31: Padrão espacial obtido a partir de gaussianas unidas (acima) e separadas (abaixo), $z_0 = 0.5$.

Ω	fração de partículas a	fração de partículas b	Δz	Δz_f
0.6	0.0659	0.9341	12.2	11.9
7.2	0.0886	0.9114	12.0	11.9

Tabela 3: Comparação entre as separações obtidas para $z_0 = 0.08$ e $N = 20.000$ com duas funções tentativa iniciais diferentes.

Ω	Δz	$\delta(\Delta z_t)$	(Δz_o)
0.6	12.2	0.3	12.0
7.2	12.0	0.1	11.1

Tabela 4: Comparação entre as separações obtidas para os diferentes ramos e o erro correspondente, $z_0 = 0.08$ e $N = 20.000$

Concluímos que para $z_0 = 0.5$ existem dois mínimos para o funcional de Gross-Pitaevski para $\Omega = 7.2$ e apenas um mínimo para $\Omega = 0.6$, como no caso anterior de $z_0 = 0.08$. Nota-se, porém, que os mínimos estão mais próximos se comparamos os Δz para cada um deles. Finalmente, os padrões espaciais para $z_0 = 1.0$: $\Omega = 0.6$ e $\Omega = 7.2$ são mostrados na figura 32. A comparação entre os valores obtidos para Δz, para $N = 20.000$ e $z_0 = 1.0$ é mostrada na tabela 7. Como podemos observar na tabela 8, novamente existe um mínimo para o funcional de Gross-Pitaevski para $\Omega = 0.6$ e dois para $\Omega = 7.2$. Ainda, se compararmos os erros obtidos para os diferentes valores de z_0, notamos que quanto maior for z_0, maior a acurácia do método empregado.

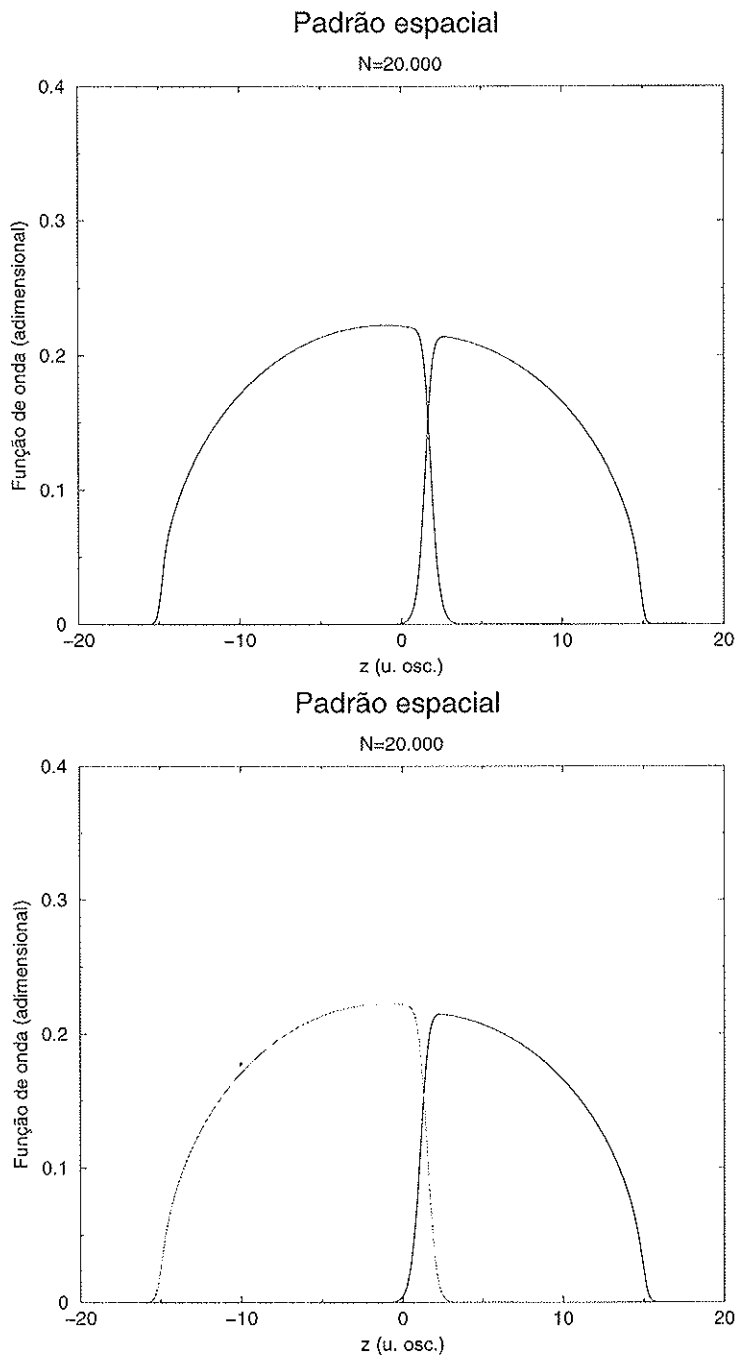


Figura 32: Padrão espacial obtido a partir de gaussianas unidas (acima) e separadas (abaixo), $z_0 = 1.0$.

Ω	fração de partículas a	fração de partículas b	Δz	Δz_f
0.6	0.3372	0.6628	11.25	11.27
7.2	0.3541	0.6459	11.226	11.231

Tabela 5: Comparação entre as separações obtidas para $z_0 = 0.5$ e $N = 20.000$ com duas funções tentativa iniciais diferentes.

Ω	Δz	$\delta(\Delta z_t)$	(Δz_o)
0.6	11.25	0.02	11.22
7.2	11.226	0.005	11.173

Tabela 6: Comparação entre as separações obtidas para os diferentes ramos e o erro correspondente, $z_0 = 0.5$ e $N = 20.000$

5.2.4 Dependência com o número total de partículas

Passamos então a examinar o dependência dos resultados como função do número total de partículas. É bom lembrar que as equações de Gross-Pitaevski são derivadas de uma teoria de campo médio e portanto tem um limite de validade. É fato, porém, que todos os resultados dependem apenas da combinação λN. Ou seja, para a teoria de Gross-Pitaevski, diminuir o número de partículas tem o mesmo efeito de diminuir a constante de interação de dois corpos. Posto isso, passamos a mostrar os resultados para $N = 10.000$ e $N = 5.000$.

Como podemos observar na figura 33 para $N = 10.000$ e $z_0 = 0$ existem duas soluções que obedecem ao mesmo padrão observado no caso anterior: uma solução junta quase simétrica e uma solução separada assimétrica por reflexão. Porém, vemos que neste caso a solução separada assimétrica corresponde ao estado fundamental. Apenas para o valor do termo de Josephson

Ω	fração de partículas a	fração de partículas b	Δz	Δz_f
0.6	0.4072	0.5927	11.43	11.46
7.2	0.4215	0.5785	11.447	11.441

Tabela 7: Comparação entre as separações obtidas para $z_0 = 1.0$ e $N = 20.000$ com duas funções tentativa iniciais diferentes.

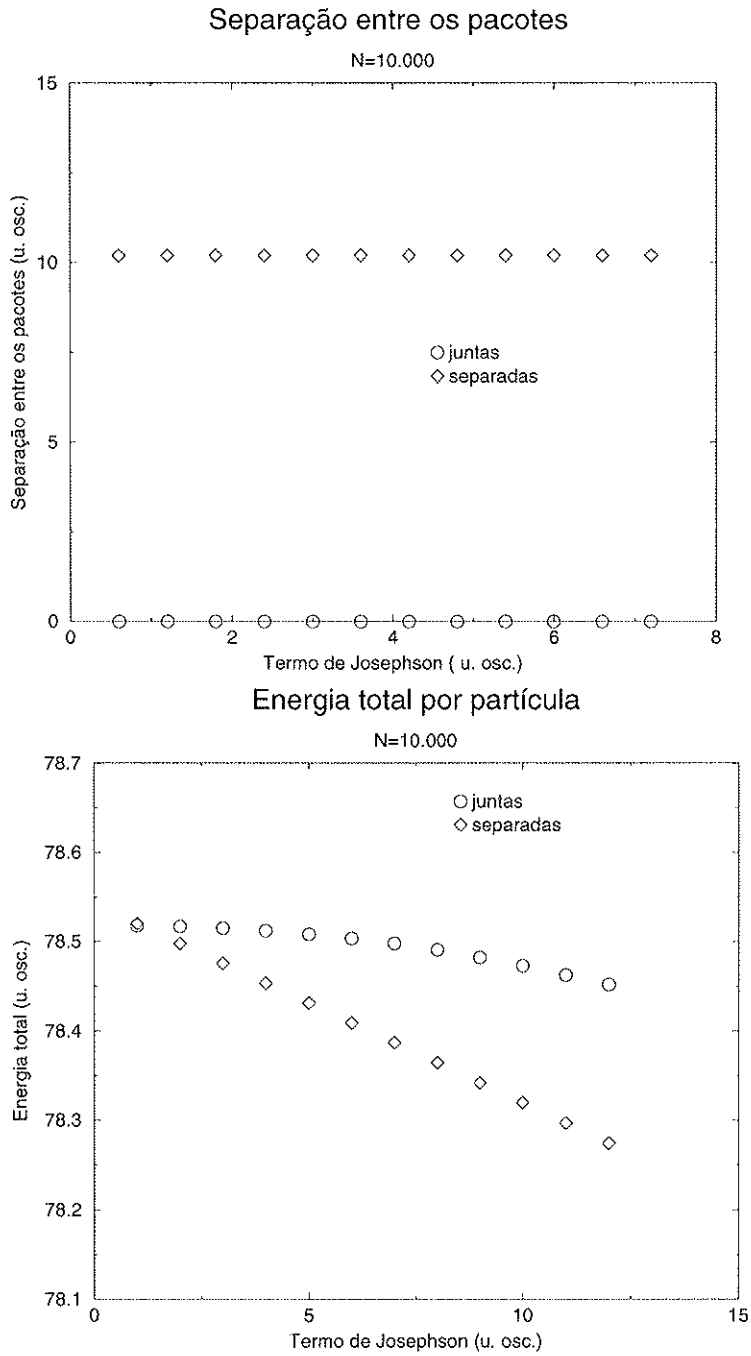


Figura 33: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0$ e $N = 10.000$.

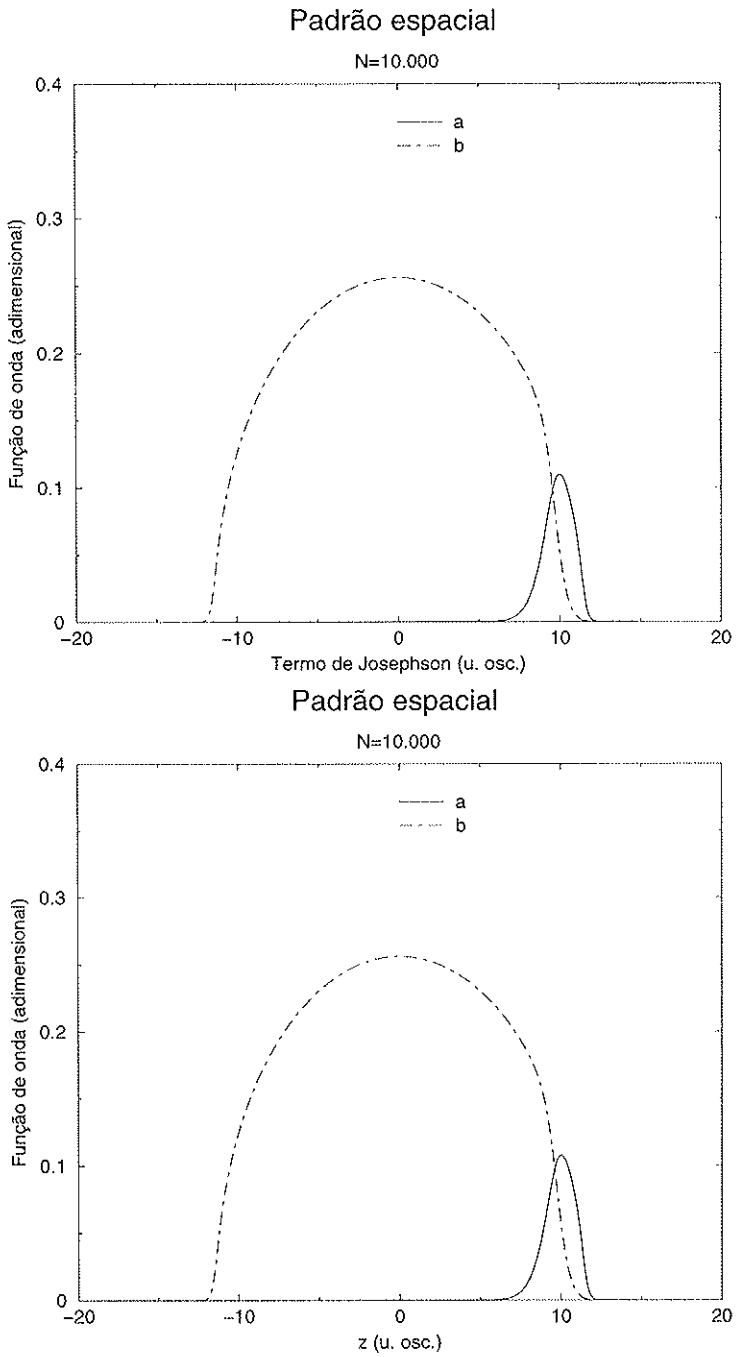


Figura 34: Padrão espacial configuração separada, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0$ e $N = 10.000$.

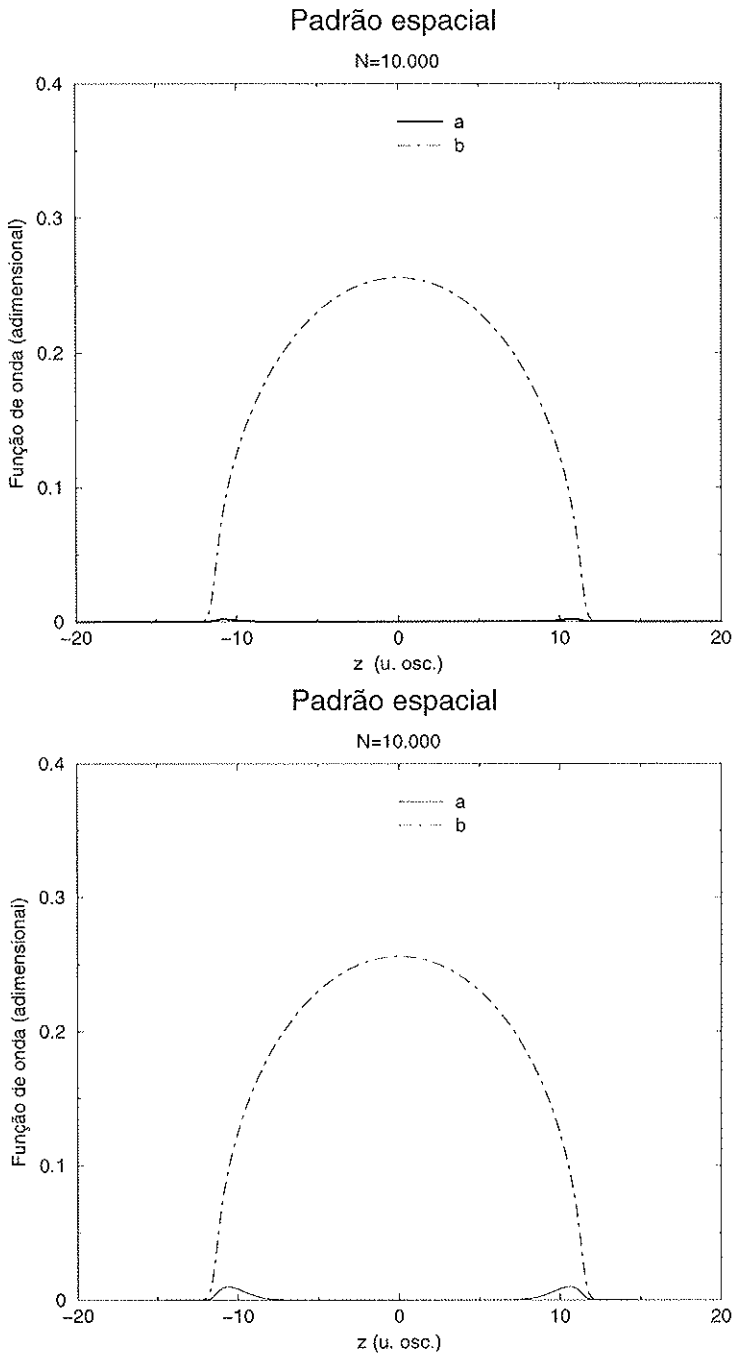


Figura 35: Padrão espacial configuração junta , termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0$ e $N = 10.000$.

Ω	Δz	$\delta(\Delta z_t)$	(Δz_o)
0.6	11.44	0.03	11.45
7.2	11.447	0.006	11.411

Tabela 8: Comparação entre as separações obtidas para os diferentes ramos e o erro correspondente, $z_0 = 1.0$ e $N = 20.000$

pequeno as duas soluções são praticamente degeneradas. Esse ponto pode ser diretamente comparado ao artigo [34], pois corresponde a situação onde o termo de Josephson é fraco, porém há um efeito da interação pois é permitida troca de partícula entre os níveis. Em outras palavras, o problema aqui tratado é qualitativamente diferente do problema sem interação de Josephson, onde cada condensado deve manter o número de partículas e são portanto introduzidos dois multiplicadores de Lagrange e não apenas um, como no nosso modelo com interação de Josephson. Concluímos que para $N = 10.000$ e $z_0 = 0$, para um acoplamento de Josephson diferente de zero, o estado assimétrico é o estado fundamental, enquanto o simétrico corresponde ao estado metaestável. Comparando as figuras mostradas em (34) vemos que conforme Ω varia não há mudança significativa na relação entre as ocupações dos diferentes estados, o que não acontece com a solução junta (metaestável) cuja população do estado mais repulsivo é praticamente nula para $\Omega = 0.6$ e pequena para $\Omega = 7.2$ (figura 35).

Mostramos nas figuras restantes os resultados para a separação entre os pacotes, energia total por partícula e padrões espaciais para $N = 10.000$ ($z_0 = 0, 08$, 0.5 e 1.0) e para $N = 5.000$ ($z_0 = 0$ e 1.0). Não há mudança qualitativa no comportamento de tais grandezas. Não foi feito um estudo detalhado dos erros para esses valores de N. Apresentaremos somente, na figura 48 os padrões espaciais obtidos para $z_0 = 0$ a partir de gaussianas superpostas e $\Omega = 0.6$, a fim de evidenciar a existência da solução espacialmente simétrica para $N = 10.000$ e $N = 5.000$.

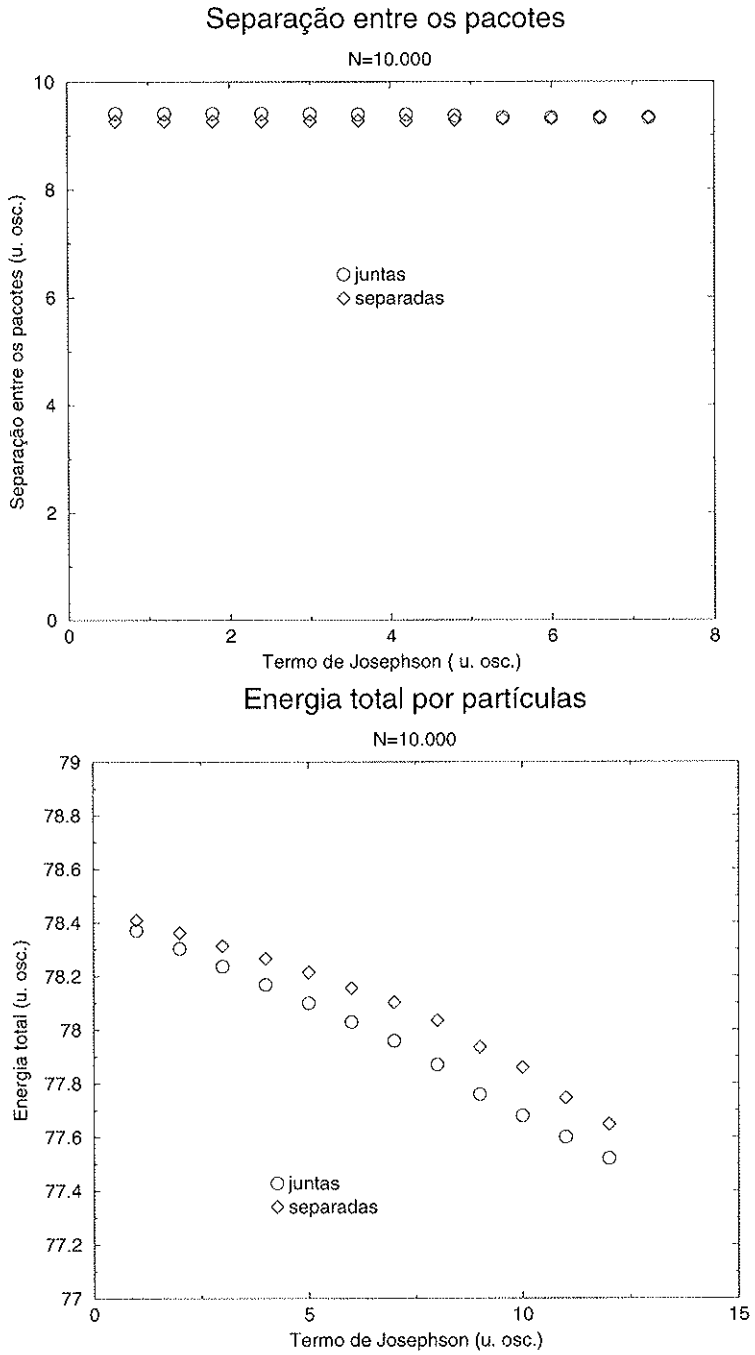


Figura 36: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0.08$ e $N = 10.000$.

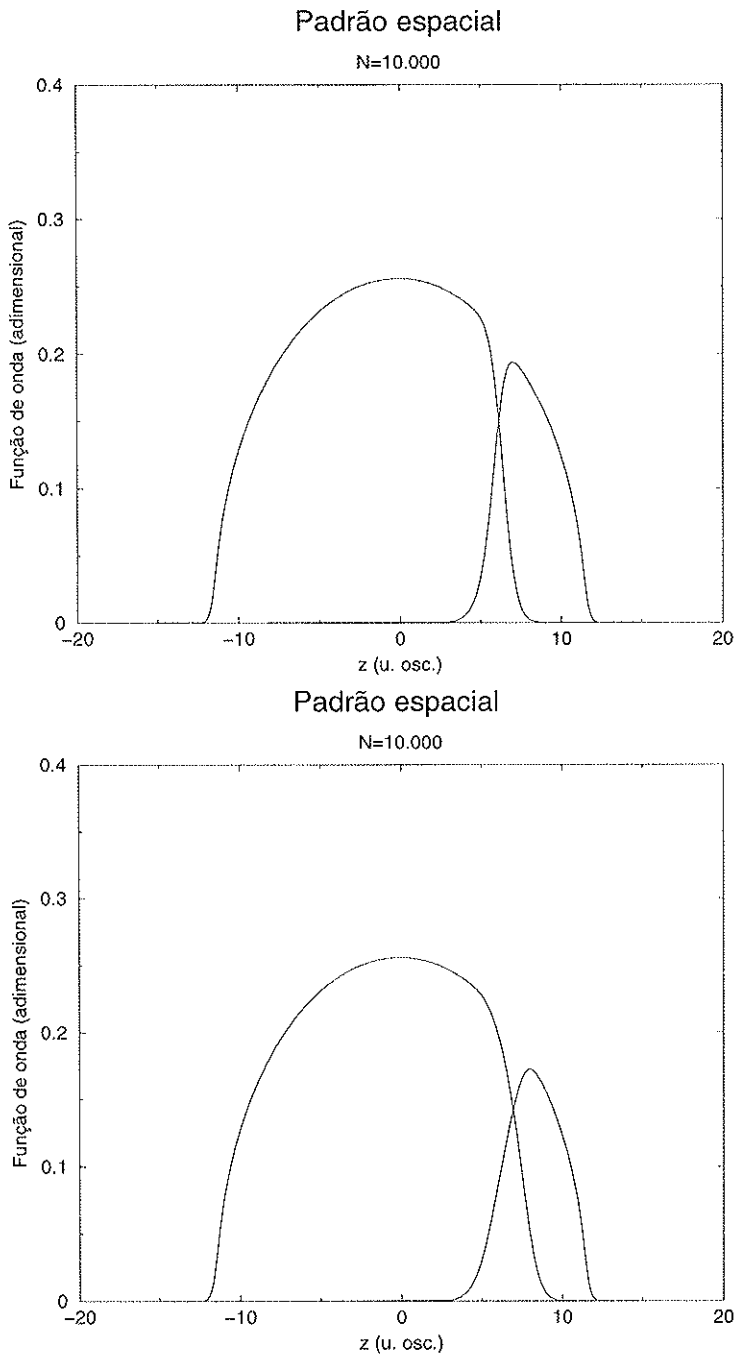
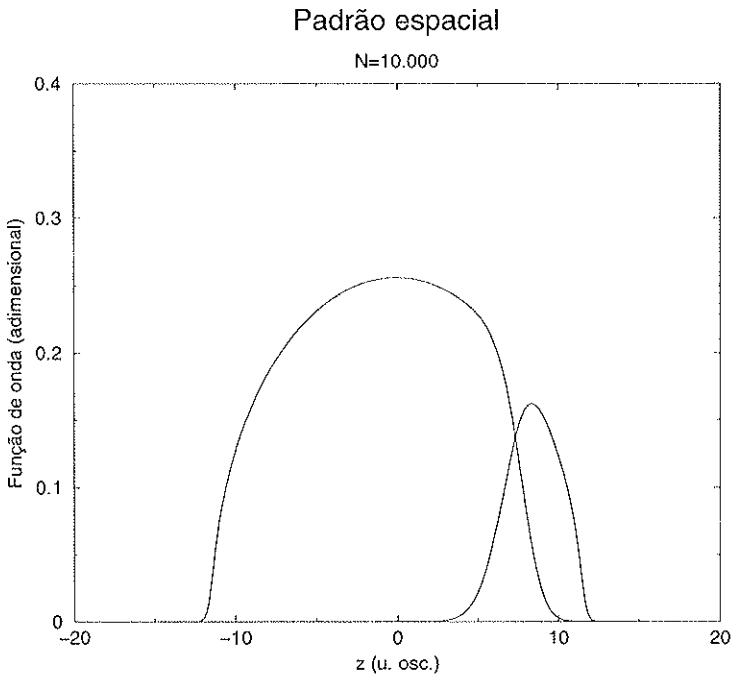


Figura 37: Padrão espacial configuração separada , termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0.08$ e $N = 10.000$.



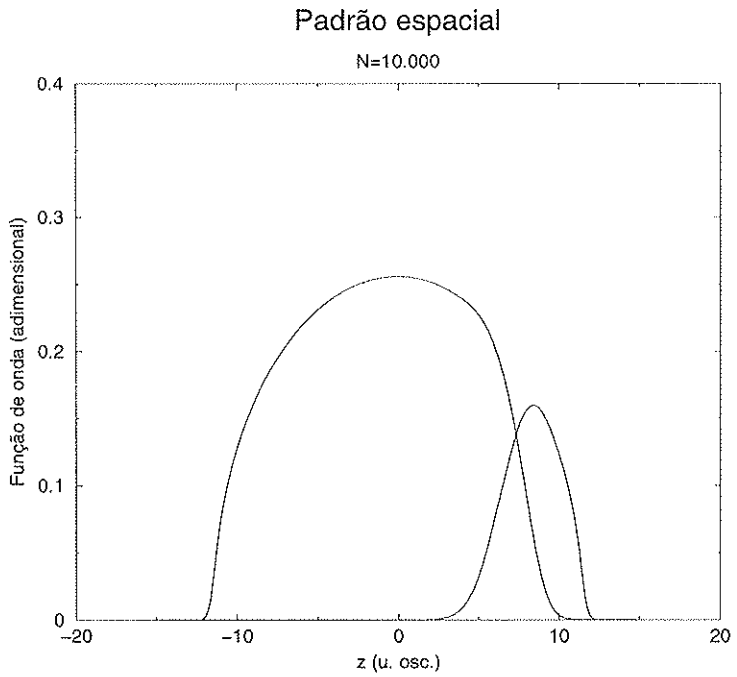


Figura 38: Padrão espacial configuração junta , termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo) , $z_0 = 0.08$ e $N = 10.000$.

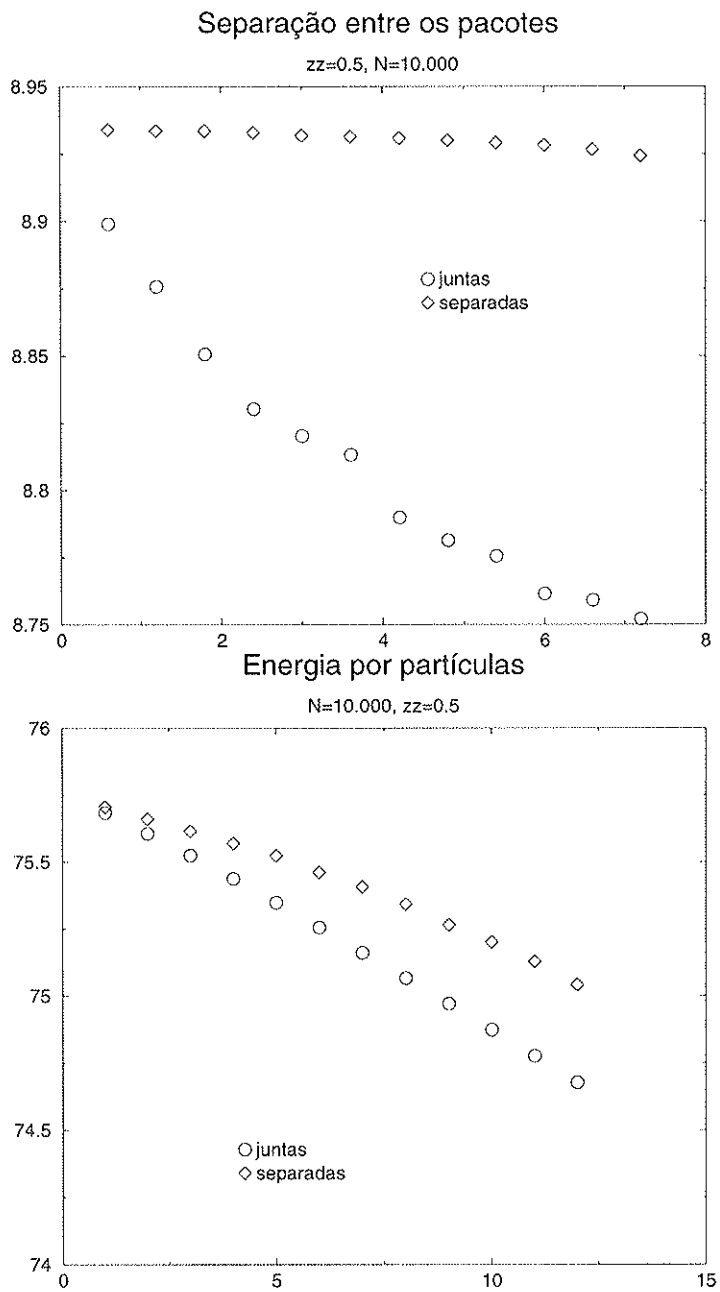


Figura 39: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0.5$ e $N = 10.000$.

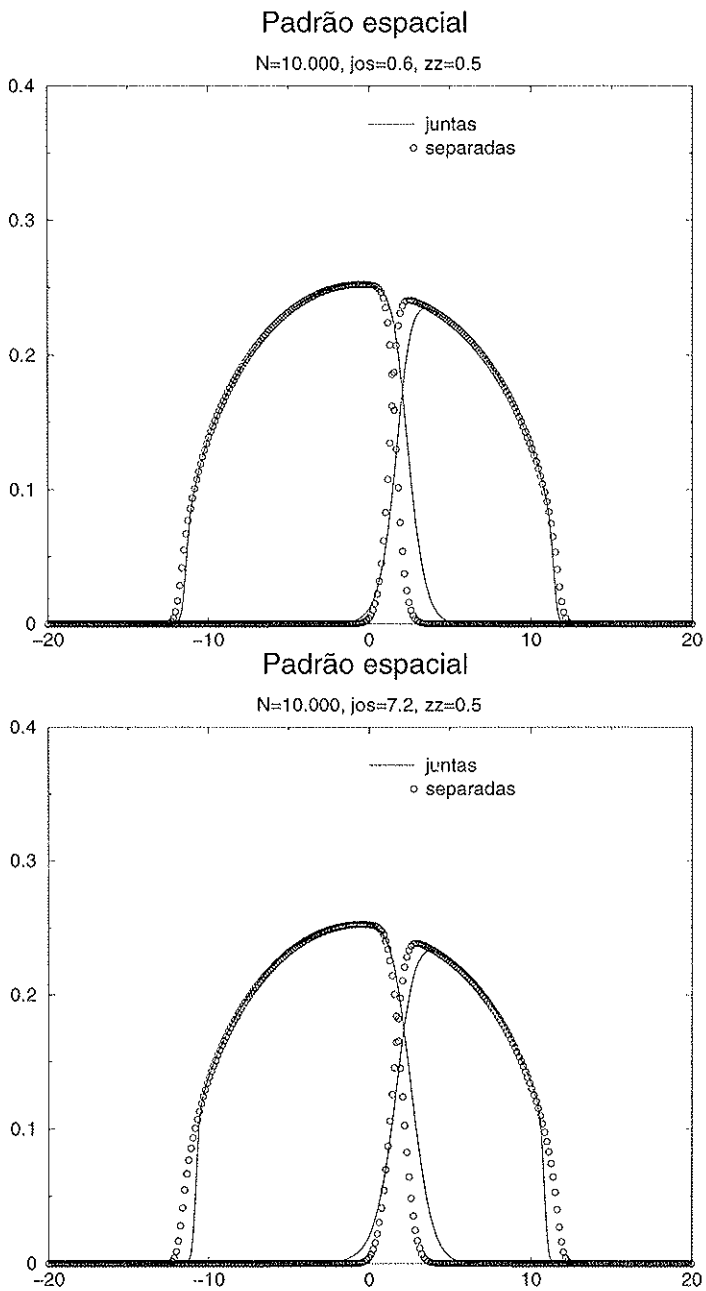


Figura 40: Comparação entre os padrões espaciais, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0.5$ e $N = 10.000$

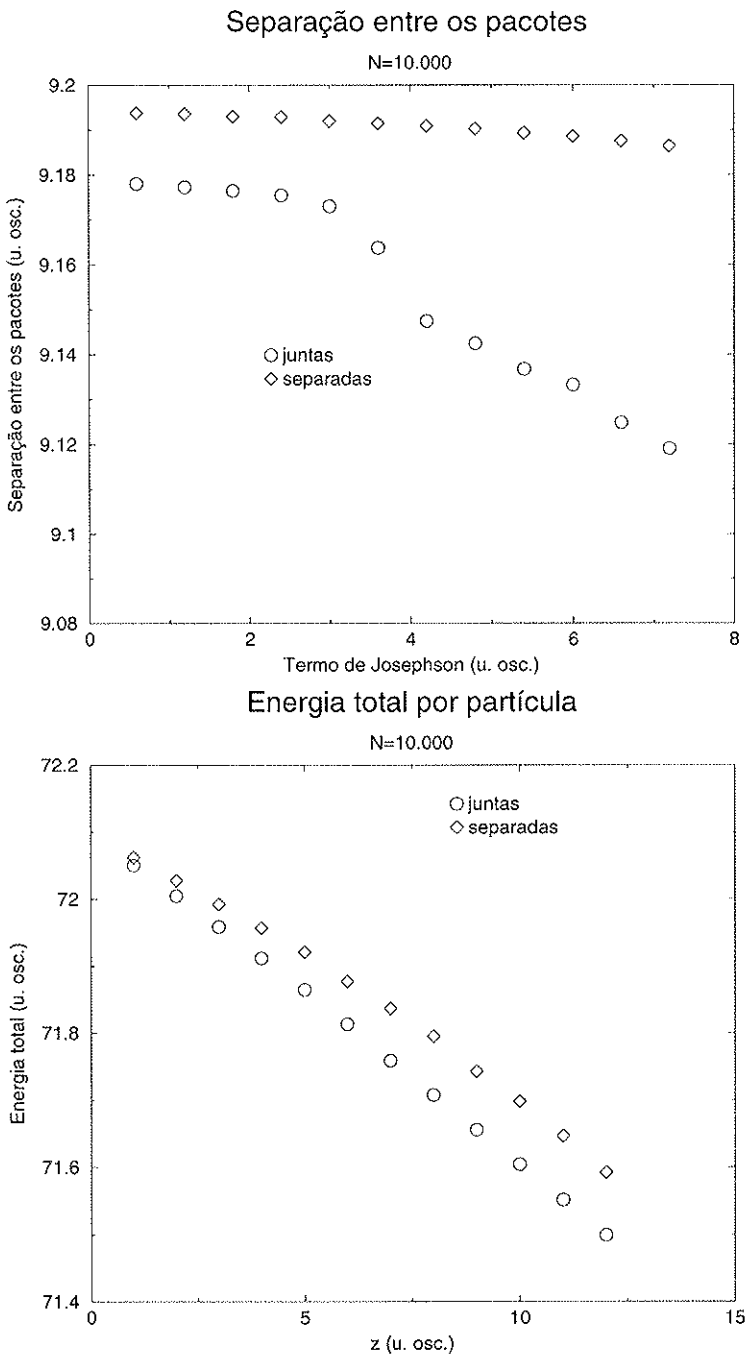
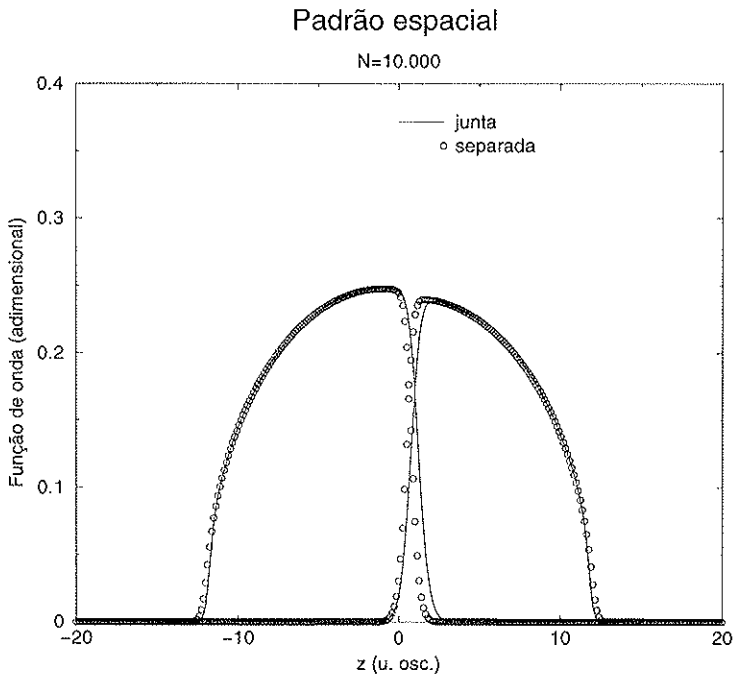


Figura 41: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 1$ e $N = 10.000$.



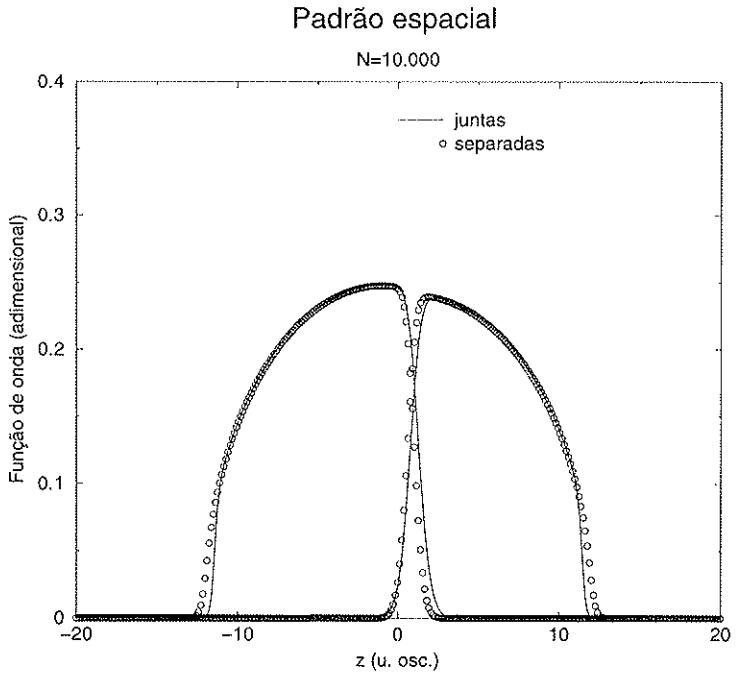


Figura 42: Comparação dos padrões espaciais das funções de onda juntas e separadas, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 1$ e $N = 10.000$.

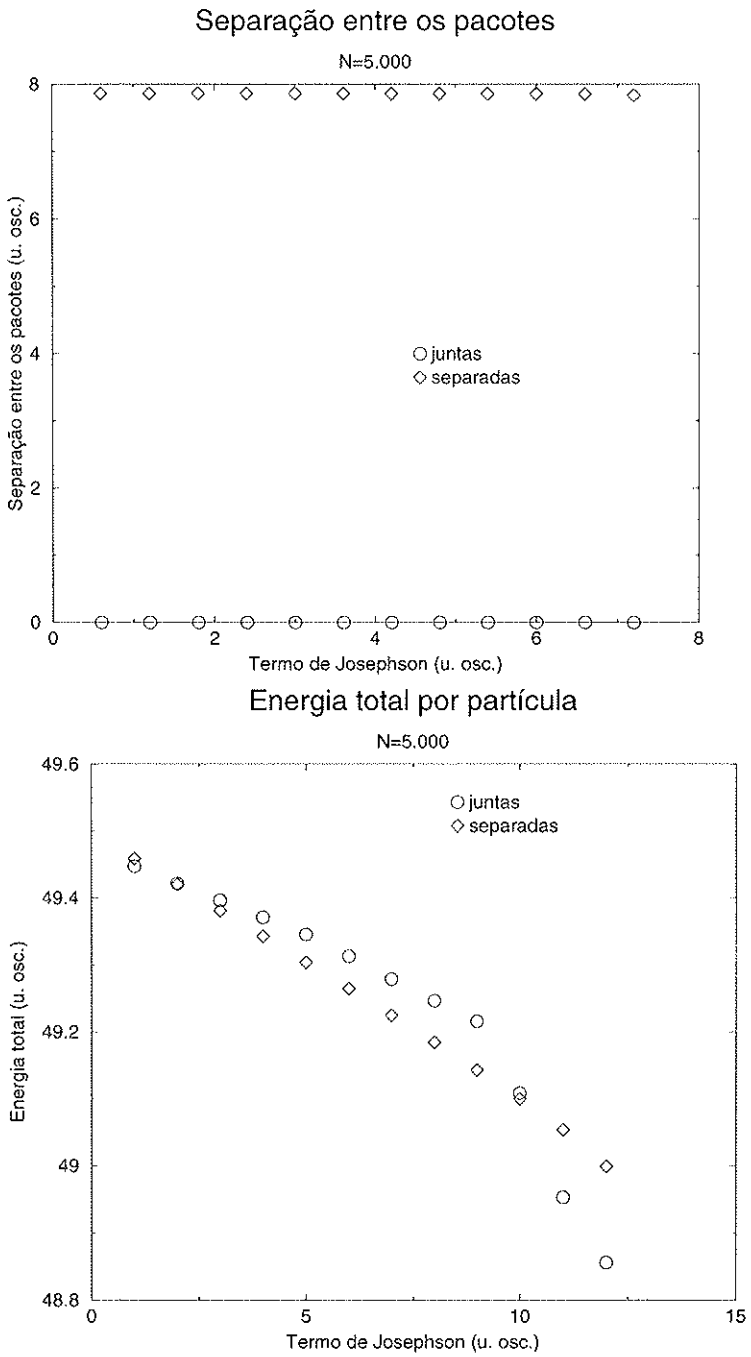


Figura 43: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 0$ e $N = 5.000$.

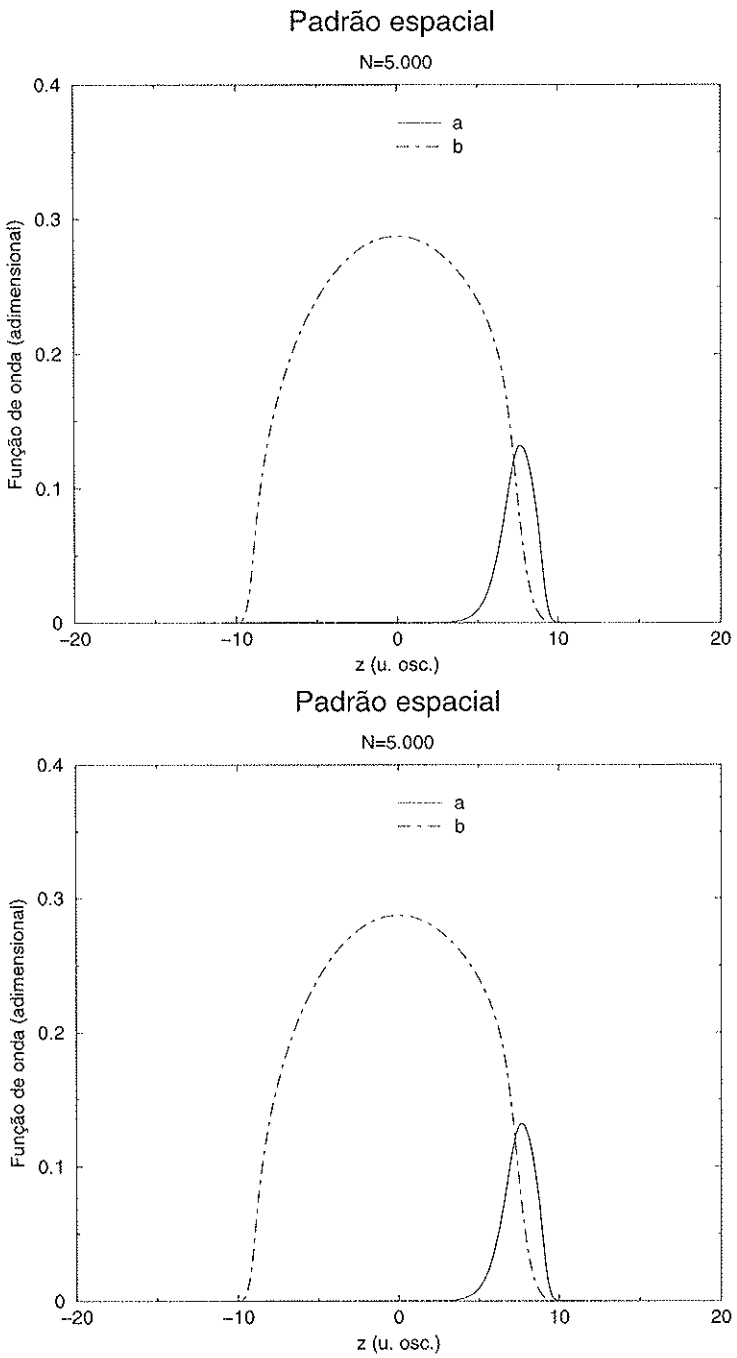


Figura 44: Padrão espacial configuração separada, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0$ e $N = 5.000$.

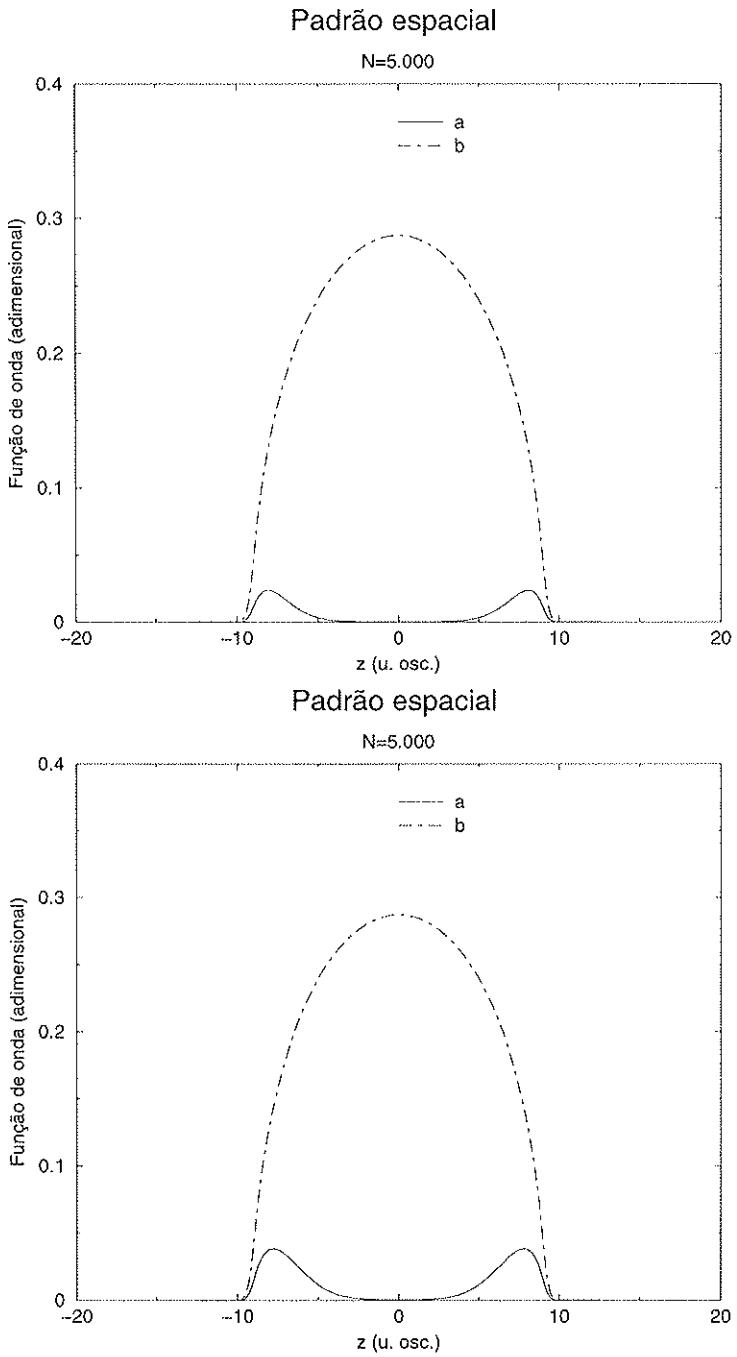


Figura 45: Padrão espacial configuração junta, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 0$ e $N = 5.000$.

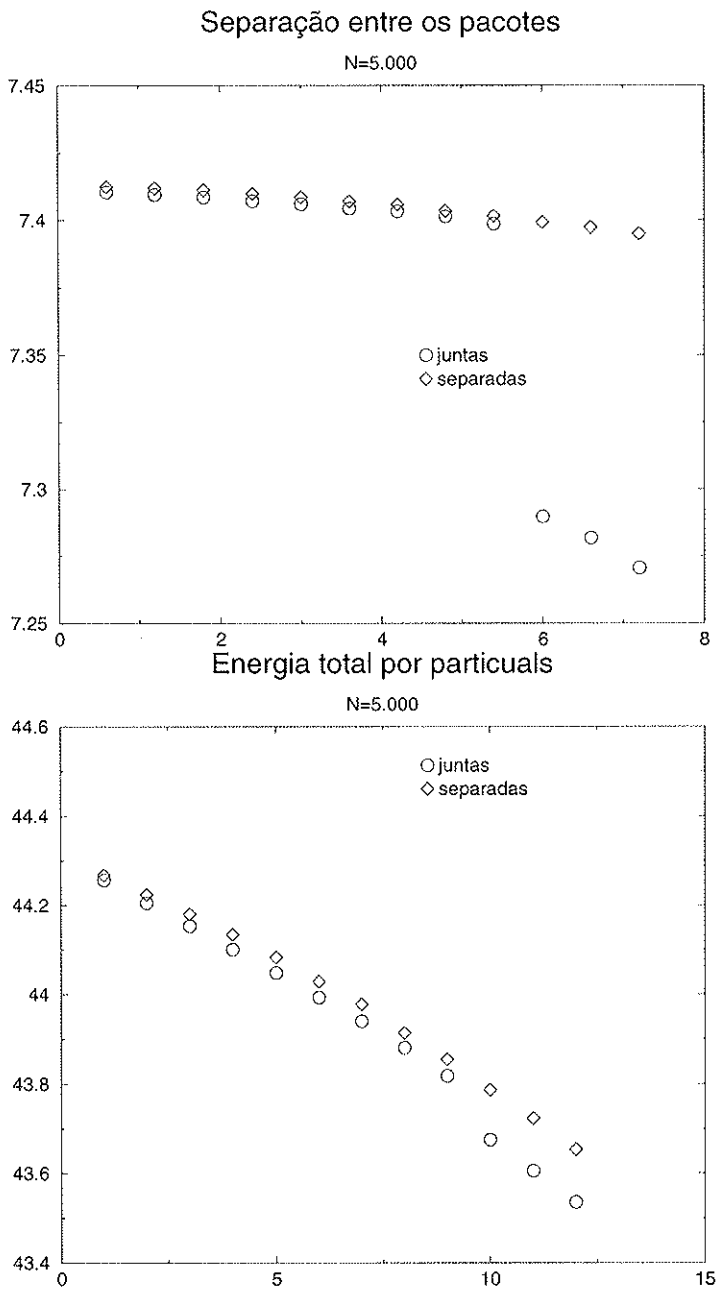


Figura 46: Separação entre os pacotes e energia total por partícula como função do termo de Josephson, $z_0 = 1$ e $N = 5.000$.

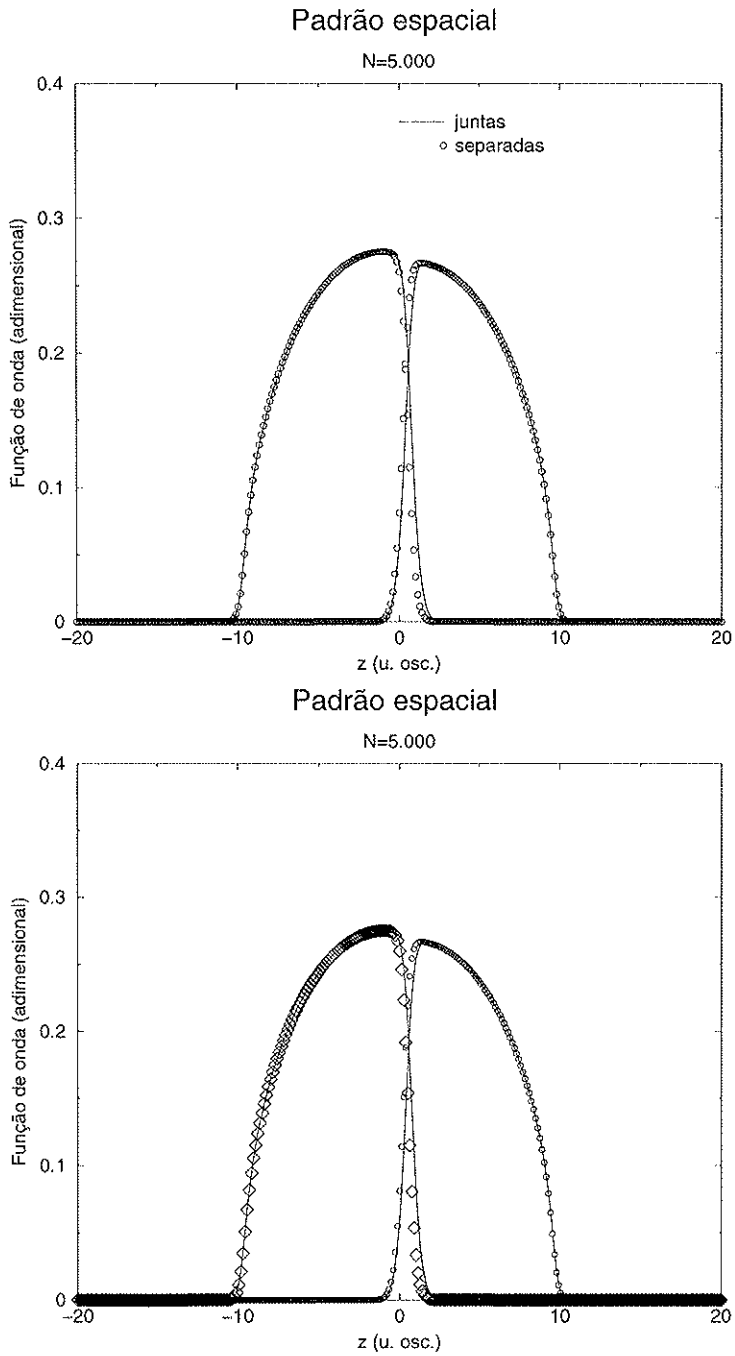


Figura 47: Comparação dos padrões espaciais das funções de onda juntas e separadas, termo de Josephson adimensional igual a 0.6 (acima) e 7.2 (abaixo), $z_0 = 1$ e $N = 5.000$.

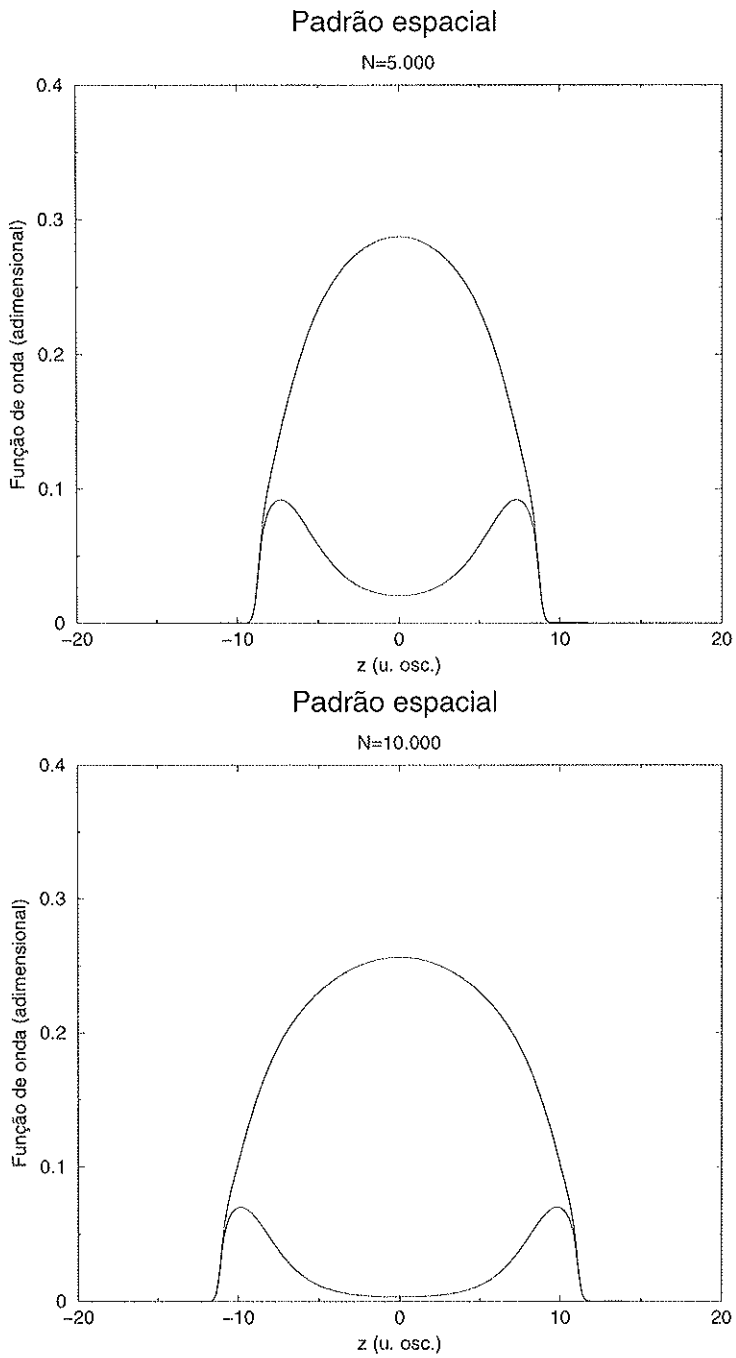


Figura 48: Padrão espacial obtidos a partir de gaussianas superpostas, $\Omega = 0.6$ para $N = 5.000$ (acima) e $N = 10.000$ (abaixo), $z_0 = 0$

5.3 Conclusão

O modelo de dois condensados em diferentes estados hiperfinos do Rubídio numa armadilha em forma de charuto, que foi o caso que estudamos de maneira quantitativa e com mais detalhes, apresenta dois mínimos para o funcional de energia de Gross-Pitaevski para alguns conjuntos de parâmetros. Um corresponde ao estado fundamental e outro a um estado metaestável. Dada a própria natureza do método empregado, para qual dos dois mínimos do funcional a função de onda convergirá depende da função tentativa inicial. Quando inicializamos com gaussianas separadas espacialmente (ímpares por reflexão), encontramos um ramo de solução separadas espacialmente. Quando inicializamos com gaussianas pares, a solução encontrada terá a mesma simetria, no caso de $z_0 = 0$, ou serão "parentes" da solução simétrica. Ou seja, serão modificações da solução simétrica, devido ao efeito do potencial da armadilha externo, que quebra a isotropia do espaço. Assim, o potencial externo determina qual condensado irá para a direita e qual irá para a esquerda. Para $z_0 = 0$ não é trivial determinar para qual lado irá cada condensado, na solução separada. No âmbito do método empregado, fazemos tal escolha quando associamos a cada condensado uma gaussiana, que já ocupa um "lado" determinado.

6 Perspectivas

Esse trabalho propôs-se a ser uma investigação do número de soluções das equações de Gross-Pitaevski estáticas para o sistema de dois condensados de Rubídio com interação de Josephson no espaço de parâmetros. Uma continuação natural do trabalho é incluir a dependência temporal e estudar, por exemplo, se ocorre interferência nesse sistema onde o condensado pode ocupar dois níveis quânticos distinguíveis. Seria interessante também estudar o limite de Ω tendendo a zero e relacioná-lo às soluções conhecidas para o problema sem interação de Josephson. Nesse trabalho estudamos apenas as soluções cuja diferença de fase entre as funções de onda dos condensados é igual a zero. É possível repetir os cálculos para diferença de fase igual a pi, pois para alguns conjuntos de parâmetros tal configuração pode ser a de menor energia [42]. Outra perspectiva é repetir os cálculos para um maior número de valores de N, podendo estudar assim os limites da aproximação de Gross-Pitaevski.

Referências

[1] L. P. Pitaevski, Sov. Phys. JETP **(13)**, 451 (1961); E.P. Gross, Nuovo Cimento **20** 454 (1961).

[2] G. V. Shlyapnikov, J. T. M. Walraven, U. M. Rahmanov, M. W. Reynolds, Phys. Rev. Lett. **73** 3247 (1994).

[3] M. H. Anderson, J.R. Ensher, M. R. Matthews,C. E. Wieman e E. A. Cornell, Science **269** 198 (1995).

[4] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollet e R. G. Hullet, Phys. Rev. Lett. **75** 1687 (1995).

[5] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews *et al*, Phys. Rev. Lett. **75** 3969 (1995).

[6] G. Baym, C.J. Pethick, Phys. Rev. Lett. **76** 6 (1996).

[7] F. Dalfovo, L. Pitaevski, S. Stringari, Physica Scripta **T66** 234 (1996).

[8] F. Dalfovo, S. Stringari, Phys. Rev. A **53** 4, 2477 (1996).

[9] T. L. Ho e V. B. Shenoy, Phys. Rev. Lett. **77** 16, 3276 (1996).

[10] F. Dalfovo e S. Stringari, Phys. Rev. A. **53** 2477 (1996).

[11] B. D. Ersy, C. H. Greene, J. P. Burke e J. L. Bohn, Phys. Rev. Lett. **78** 3594 (1997).

[12] E. P. Bashkin e A. V. Vagov, Phys. Rev. B. **56** 6207 (1997).

[13] E. Timmermans, Phys. Rev. Lett. **81** 26, 5718 (1998).

[14] D. Guéry-Odelin, J. Söding, P. Desbiolles e J. Dalibard, Europhys. Lett. **44** 25 (1998).

[15] S. J. J. M. F. Kokkelmans, B. J. Verhaar e K. Gibble, Phys. Rev. Lett. **81** 951 (1998).

[16] P. Ohberg e S. Stenholm, Phys. Rev. A. **57** 1272 (1998).

[17] H. Pu e P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. **80** 1130 (1998); ibidem **80** 1134 (1998).

[18] D. G. Fried, T. C. Killian, L. Willmann, *et al*, Phys. Rev. Lett. **81** 3811 (1998).

[19] J. I. Cirac, M. Lewenstein, K. Molmer, P. Zoller Phys. Rev A **57** 1208 (1998); ibidem **80** 1134 (1998).

[20] D. Gordon e C. M. Savage, Phys. Rev. A. **58** 1440 (1998).

[21] D. Hall, M. Mathews, C. Wieman e E. Cornell, Phys. Rev. Lett. **81** 1543 (1998).

[22] M. Mathews *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81** 243 (1998).

[23] D. Hall *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81** 1539 (1998).

[24] D. Stamper-Kurn *et al.*, Phys. Rev. Lett. **80** 2027 (1998).

[25] M. T. Depue, D. J. Han, C. McCormick, *et al.*, Bull. Am. Soc. **44** 1008 (1999).

[26] J. Williams, R. Walser, J. Cooper, E. Cornell e M. Holland, Phys. Rev. A **59** (1) (1999).

[27] P.Ao e S. T. Chui, Phys. Rev. A **58** 4836 (1998); ibidem **59** 1473 (1999).

[28] B. D. Esry e C. H. Greene, Phys. Rev. A. **59** 1457 (1999).

[29] P.B. Blake, R. J. Ballagh e C. W. Gardiner, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **1** 378 (1999).

[30] P. Ohberg, Phys. Rev. A. **59** 634 (1999).

[31] M. Prevedelli, F. S. Catalliotti, E.A. Cornell, *et al*, Phys. Rev. A. **59** 1886 (1999).

[32] V. e. g. H. Pu, C.K. Law, S. Raghavan, J.H. Eberly, N. P. Bigelow, Phys. Rev. A **60**, 1463 (1999).

[33] E. Timmermans, P. Tommasini, Mahir Hussein, A. Kerman, Physics Reports **315** , 199 (1999).

[34] E. V. Goldstein, M. G. Moore, H. Pu e P. Meystre, Phys. Rev. Lett. **85** 5030 (2000).

[35] B. Tanatar e K. Erkan, Phys. Rev. A **62**, artigo número 053601 (2000).

[36] Gerton, Strekalov, Prodan e Hulet, Nature**408**, 692 (2000).

[37] H. C. W. Beijerinck, E. D. J. Vredenbregt, R. J. W. Stas, *et al* Phys. Rev. A **61** no. 2 (2000).

[38] S.K. Adhikari, Phys. Rev. E **5** 6704 (2001).

[39] P. W. Courteille, V. S. Bagnato, V. I. Yukalov, Laser Physics **11** (6) 659 (2001).

[40] K. Kasamatsu, Y. Yasui e M. Tsubota, Phys. Rev. A **64** artigo número 053605 (2001).

[41] A.J. Leggett, Reviews of Modern Physics **73** 307 (2001).

[42] Leonardo Sioufi dos Santos, tese de mestrado , IFUSP (2001).

[43] C.Y. Lin, E.J.V. de Passos, M.S. Hussein, D.S. Lee e A.F.R. de Toledo Piza, cond-mat/0202093, (2002).

[44] E.H. Lieb, R. Seiringer, PRL **88** 170409 (2002).

[45] S. T. Chui, V. N.Ryzhov e E. E. Tareyeva, JETP Letters **75** (5) 233 (2002).

[46] S. Giovanazzi, D. O'Dell e G. Kurizki, PRL **88** (13) 130402 (2002).

[47] V. I. Yukalov, E. P. Yukalova e V. S. Bagnato, Phys. Rev. A (2002), artigo aceito para publicação.