

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

*Cálculo de Integrais de Trajetória em
Mecânica Estatística e Teoria de Campos
através de Técnicas Variacionais*

Cristiane Moura Lima de Aragão

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Eugenio Imbassahy Carneiro

C. E. I. Carneiro

SBI-IFUSP



305M810T3680

Tese de Doutorado
apresentada ao Instituto
de Física da Universidade
de São Paulo

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3680
ex. 1

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Antônio José Accioly (IFT-UNESP)

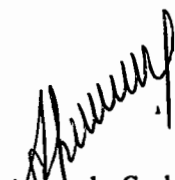
Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar (IFT-UNESP)

Prof. Dr. Carlos Eugenio Imbassahy Carneiro (IFUSP)

Prof. Dr. Josif Frenkel (IFUSP)

Prof. Dra. Maria Teresa Clímaco dos Santos Thomaz (UFF)

São Paulo
2002


Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

530.14

A 637c

D

ex 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Aragão, Cristiane Moura Lima de

Cálculo de Integrais de Trajetória em Mecânica
Estatística e Teoria de Campos através de Técnicas
Variacionais. São Paulo 2002.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física – Departamento de Física Geral

Orientador: Prof. Dr. Carlos E. Imbassahy Carneiro
Área de Concentração: Teoria Geral de Partículas e
Campos

Unitermos: 1. Teoria de Campos;
2. Métodos Variacionais; 3. Renormalização;
4. Teoria $\lambda\phi^4$.

USP/IF/SBI-022/2002

ABSTRACT

We have extended the Kleinert variational technique to field theory. This method was first used in quantum mechanics and provides a convergent cumulant expansion that is extremely accurate. Its extension to field theory is non-trivial because of the ultraviolet divergences that appear when the space dimension is greater than 2. Due to these divergences the theory has to be regularized and renormalized. In addition to the usual difficulties associated with renormalization, one has to decide whether one calculates the optimum value of the variational parameter before or after renormalization. In this thesis we deal with the renormalization of the variational effective potential. Firstly, we show that the zero temperature regularized variational potential coincides with the post-Gaussian effective potential introduced by Stancu and Stevenson. Secondly, we present a renormalization scheme that enables one to renormalize the theory *before* calculating the optimum variational parameter. Using this scheme we show that the usual 1-loop effective potential can be obtained from the Kleinert variational scheme by iterating only once the equation that determines the variational parameter. In this sense, the 1-loop expansion is contained within the variational scheme. For the 2-loop effective potential the same approximation is not so good. The renormalization of the theory before the calculation of the variational parameter allows one to study the variational effective potential numerically and in a non-perturbative way, as it was done in quantum mechanics by Kleinert.

RESUMO

Estendemos para a teoria de campos o método variacional de Kleinert. Este método foi primeiramente usado na mecânica quântica e fornece uma expansão em cumulantes convergente. Sua extensão para a teoria de campos não é trivial devido às divergências ultravioletas que aparecem quando a dimensão do espaço é maior que 2. Devido a estas divergências, a teoria deve ser regularizada e renormalizada. Além das dificuldades usuais associadas com a renormalização, devemos decidir se calculamos o valor ótimo do parâmetro variacional antes ou depois da renormalização. Nesta tese abordamos o problema da renormalização do potencial efetivo variacional. Primeiramente, mostramos que o potencial efetivo variacional em temperatura zero coincide com o “potencial efetivo pós-gaussiano” introduzido por Stancu e Stevenson. Em seguida, apresentamos um esquema de renormalização que permite que renormalizemos a teoria *antes* de calcular o parâmetro variacional ótimo. Usando este esquema mostramos que o potencial efetivo usual, calculado em ordem *1-loop*, pode ser obtido a partir do esquema variacional de Kleinert iterando uma única vez a equação que determina o parâmetro variacional. Para o potencial efetivo em ordem *2-loops* esta aproximação não é tão boa. A renormalização da teoria antes do cálculo do parâmetro variacional permite que estudemos o potencial efetivo variacional numericamente e de forma não-perturbativa, como foi feito por Kleinert para a mecânica quântica.

Dedicatória

Dedico este trabalho ao maravilhoso Deus Pai,
por seu grande amor por todos nós,
e aos meus pais maravilhosos:
Vilma e Humberto.

Agradecimentos

- A Deus, razão da minha fé, por me dar inteligência e capacidade para concluir mais esta fase da minha vida.
- Aos meus pais, Vilma e Humberto, pelo amor e por compartilharem comigo os desafios e as vitórias.
- Aos meus irmãos Humberto e Rodrigo por conviverem comigo.
- À minha irmã Solange, pela amizade e pela criteriosa revisão da minha tese.
- Ao professor Carlos Eugenio, pelo entusiasmo e pela perseverança constantes durante todo o meu doutorado.
- Ao querido Raphael, pelos bons momentos e pelas vitórias que temos compartilhado. Também, pelo carinho e pela prontidão em me auxiliar nos preparativos para a defesa.
- Às amigas Márcia Emi, Lídia, Regina, Eliane e Patrícia pela amizade desde os tempos de graduação.
- Aos amigos Maurício, Eliezer, Amaury, Cilaine e Sílvia pela amizade e agradáveis conversas.
- Ao professor e amigo Accioly, pela valiosa contribuição para a minha vida acadêmica.
- Ao professor Frenkel, pelas exemplares aulas de Eletrodinâmica e pela estima.
- Ao professor Jorge de Lyra, por resolver os problemas com o micro-computador.
- À amiga Ana, pela grande amizade desde os tempos de colegial.
- À amiga Roberta, pela grande amizade desde os tempos da infância.
- Aos amigos do “Pará”: Akira, Alexandre e Cléber, pelos momentos de descontração.

- Aos amigos da turma de italiano: Priscila, Oscar e Carlos. *Grazie Mille!*
- Às amigas Bertha, Meire, Catherine, por compartilhar experiências e alegrias.
- Aos amigos do grupo de Mecânica Estatística: Kelly, Carlos e Nara pela agradável convivência.
- Ao amigo Masayuki, também do grupo de Mecânica Estatística, pela preciosa ajuda nos preparativos da tese.
- À Judith, pelas aulas de piano, que me proporcionam momentos de “relaxamento” musical.
- Ao Dr. Walter e sua homeopatia.
- À dona Ida, e às crianças Luísa, Débora, Lucas, Marcos, Iverson, Morgana, Leandro, Bruno, Luís, Nataly e Alyne, pelo carinho recíproco.
- Aos funcionários do IFUSP, em especial, à Dirce, à Silvana e ao Sr. Wilson.
- À FAPESP, pelo apoio financeiro durante todo este período.
- Enfim, a todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram para que eu chegasse até aqui.

Sumário

Introdução	3
1 O Método de Feynman-Kleinert em Mecânica Quântica	6
1.1 O potencial efetivo clássico	6
1.2 O método	8
1.3 Uma expansão perturbativa que produz resultados melhores .	13
1.4 Oscilador anarmônico	16
1.5 Obtenção de W_2	19
1.5.1 Limite termodinâmico	21
2 Generalização do Método de Feynman-Kleinert em Teoria de Campos	26
3 Generalização do Método de Kleinert em Teoria de Campos	32
4 Métodos de Renormalização de W_1	41
4.1 Sobre a renormalização	41
4.2 Primeiro estudo para W_1	42
4.2.1 Obtenção da equação de estado e dos expoentes críticos	43
4.3 Segundo estudo para W_1	48
4.3.1 Forma implícita da equação de estado	53
4.3.2 O potencial em 1-loop com o nosso reescalonamento . .	55
5 Métodos de Renormalização de W_2	57
5.1 Diferenças em relação a W_1	57
5.2 Primeiro estudo para W_2	57
5.3 Segundo estudo para W_2	61
5.3.1 Cálculo aproximado de $ \alpha ^{-2}A_3$ e de $ \alpha ^{-3}A_4$	63

5.4	O potencial em 2-loops com o nosso reescalonamento	68
5.4.1	Comparação com W_2 reescalado	69
5.4.2	Comparação de H obtido a partir do potencial em 2-loops com o obtido a partir de W_2 aproximado	70
6	Conclusões e Perspectivas	72
A	Apêndice	74
A.1	Obtenção dos diagramas de Feynman	74
A.1.1	Cálculo analítico dos diagramas de Feynman	79
A.2	Cálculo das integrais	86
A.3	Relações matemáticas úteis	88

Introdução

O potencial efetivo foi introduzido em Teoria Quântica de Campos com o objetivo de estudar a quebra espontânea de simetria induzida por campos escalares. Usualmente, ele é obtido por meio de uma expansão em loops [1], [2].

No contexto de Fenômenos Críticos, a partir do potencial se obtém a equação de estado e alguns dos expoentes críticos da teoria. Encontrando-se dois deles, todos os demais são obtidos por meio das relações de escala [1].

Por outro lado, o poder de métodos variacionais em Mecânica Quântica é bem conhecido [3] – [6]. Suas aplicações em Teoria Quântica de Campos são estudadas desde o início da década de 60 e, nos últimos anos, têm sido de grande interesse.

As integrais de trajetória, introduzidas por Feynman [7], descrevem estruturas lineares que apresentam flutuações, tais como: órbitas no espaço-tempo, polímeros em solução, linhas de vórtices em superfluidos, linhas de defeitos em cristais, cristais líquidos, etc. As flutuações podem ser de origem quântica, termodinâmica ou estatística e as integrais de trajetória levam a uma formulação unificada para todos estes fenômenos. Entretanto, quase todas as integrais de trajetória não podem ser calculadas exatamente. Faz-se necessário, então, o desenvolvimento de técnicas de aproximação que nos permitam calcular estas integrais com o grau de precisão desejado. A expansão perturbativa usual, na constante de acoplamento, bem como a expansão semi-clássica são divergentes. Uma abordagem alternativa, desenvolvida por Kleinert [8], [9] e aplicada à Mecânica Quântica, fornece uma expansão em cumulantes do potencial efetivo. O primeiro termo desta expansão reproduz uma aproximação variacional, desenvolvida anteriormente pelo próprio Kleinert e por Feynman [10] para o potencial efetivo, que foi aplicada com sucesso para um grande número de sistemas físicos em Mecânica Quântica.

Qualitativamente, o modelo de Ising é um bom modelo para o ferromagnetismo, além de possuir várias características interessantes de fenômenos críticos. Seu comportamento crítico é descrito pela teoria $\lambda\phi^4$, que também descreve o comportamento crítico de outros sistemas que pertencem à mesma classe de universalidade [11].

Além disto, é através da quebra espontânea de simetria no setor $\lambda\phi^4$ do modelo padrão que os bósons W^\pm e Z adquirem massa (mecanismo de Higgs).

Por outro lado, existe uma forte evidência de que a teoria $\lambda\phi^4$ é trivial em 4 dimensões [12] - [14]. Como conciliar estes dois fatos? Consoli e Stevenson apresentaram uma solução para o problema [15]. Sua solução utiliza um tipo não-convencional de renormalização, onde a componente de Fourier com momento zero do campo é renormalizada de uma maneira diferente das outras componentes.

O método de Kleinert trata a componente de Fourier com momento zero de modo especial e parece ser adequado para abordar esta questão de um outro ângulo. Não pretendemos resolver, aqui, um problema tão complexo, mas contribuir com outro modo de ver a questão.

Estes fatos nos motivaram a generalizar o método de Kleinert para uma teoria de campos $\lambda\phi^4$, a temperatura zero. O análogo unidimensional em Mecânica Quântica é o oscilador anarmônico, estudado por Kleinert [16]. Sempre que necessário, é a ele que vamos nos reportar para verificar se os nossos resultados estão corretos.

Algumas dificuldades aparecem quando estudamos a generalização para teoria de campos. Inserimos o parâmetro variacional Ω na ação para, depois, obter a expansão em cumulantes, que é truncada na ordem N , $N = 1$ e $N = 2$, no nosso caso. Então, precisamos minimizar o potencial efetivo em relação a Ω para obter a expressão que mais se aproxima da exata. Entretanto, quando trabalhamos em $d > 2$, os diagramas de Feynman provenientes da expansão são divergentes. Desta forma, é necessário responder a questão: *o que deve ser feito antes: tornar finita a teoria, para depois obter $\Omega_{\text{ótima}}$; ou, encontrar $\Omega_{\text{ótima}}$ e só então renormalizar a teoria?* Veremos duas formas diferentes de abordar esta questão.

Apresentaremos neste trabalho um novo esquema de renormalização diferente dos esquemas usuais na literatura. Mostraremos, também, que a expansão em loops pode ser entendida como um caso particular do método variacional exposto.

Trabalharemos com teorias de campos euclidianas e, quando necessário, utilizaremos a regularização dimensional (RD).

No capítulo 1, introduziremos o método proposto por Feynman-Kleinert, em Mecânica Quântica, bem como a expansão proposta, posteriormente, por Kleinert. Como exemplo, apresentaremos o oscilador anarmônico unidimensional e seu potencial efetivo no limite termodinâmico.

No capítulo 2, apresentaremos nossa generalização do método de Feynman-Kleinert em teoria de campos. Em seguida, no capítulo 3, estudaremos a generalização do método de Kleinert. Com agradável surpresa, mostraremos

que o nosso potencial coincide com o obtido por Stevenson [17] por meio de uma técnica variacional diferente da apresentada aqui.

No capítulo 4, mostraremos dois esquemas diferentes de renormalização para o potencial obtido na generalização do método de Feynman-Kleinert. Obteremos, também, a equação de estado, sua forma implícita, e os expoentes críticos da teoria.

No capítulo 5, faremos os mesmos estudos para o potencial encontrado com a generalização do método de Kleinert. Discutiremos as novas dificuldades.

No capítulo 6, faremos uma exposição das nossas conclusões e perspectivas.

O apêndice contém a obtenção dos propagadores $G_{\tau\tau'}$ e os cálculos analíticos dos diagramas de Feynman para o oscilador anarmônico unidimensional, em Mecânica Quântica.

Capítulo 1

O Método de Feynman-Kleinert em Mecânica Quântica

1.1 O potencial efetivo clássico

Para familiarizar o leitor com o método variacional de Feynman-Kleinert, apresentaremos um resumo da exposição contida no livro de Kleinert [16].

No decorrer da exposição vamos usar as seguintes notações: $\beta \equiv 1/k_B T$, \sum_k' é a soma sobre todos os momentos k não-nulos, e vamos trabalhar apenas com ações euclidianas.

Consideremos a integral de trajetória de uma partícula puntual quântica de massa M em um potencial unidimensional

$$Z = \oint \mathcal{D}x e^{-\mathcal{A}[x]/\hbar} \quad (1.1)$$

onde a medida de integração é definida por

$$\oint \mathcal{D}x \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0}{\sqrt{2\pi\hbar^2\beta/M}} \prod_{m=1}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_m^r dx_m^i}{\pi/\beta M \omega_m^2} \right], \quad (1.2)$$

com a notação: $x_m^r \equiv \text{Re } x_m$, $x_m^i \equiv \text{Im } x_m$, e cuja a ação euclidiana é dada por

$$\mathcal{A} = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left[\frac{M}{2} \dot{x}^2(\tau) + V(x(\tau)) \right]. \quad (1.3)$$

Vamos decompor as trajetórias $x(\tau)$ numa série de Fourier

$$x(\tau) = x_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (x_m e^{-i\omega_m \tau} + x_m^* e^{i\omega_m \tau}), \quad (1.4)$$

onde $x_{-m} \equiv x_m^*$, pois x é real, e $\omega_m = \frac{2\pi m}{\hbar\beta}$ são as frequências de Matsubara. Note que, com estas frequências, $x(\tau)$ obedece a condições de contorno periódicas, ou seja, $x(0) = x(\hbar\beta)$. Usando a medida de integração (1.2) a função de partição pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} Z &\equiv e^{-F\beta} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0}{\sqrt{2\pi\hbar^2\beta/M}} \prod_{m=1}^{\infty} \left[\int \frac{dx_m^r dx_m^i}{\pi/\beta M \omega_m^2} \right] \exp \left[-M\beta \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 |x_m|^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\hbar} \int_0^{\hbar\beta} d\tau V \left(x_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (x_m e^{-i\omega_m \tau} + x_m^* e^{i\omega_m \tau}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Suponhamos que, para um dado potencial, fôssemos capazes de integrar sobre todas as componentes reais e imaginárias de x_m , com $m \neq 0$. Teríamos, então, uma única integral sobre a componente de frequência zero

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0}{\sqrt{2\pi\hbar^2\beta/M}} e^{-\beta V^{ec}(x_0)}, \quad (1.6)$$

com alguma função $V^{ec}(x_0)$. A componente x_0 coincide com a posição média da trajetória flutuante no intervalo de tempo $\tau \in [0, \beta]$:

$$x_0 = \bar{x} \equiv \frac{1}{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau x(\tau). \quad (1.7)$$

A função $V^{ec}(x_0)$ é denominada potencial efetivo clássico do sistema, pois podemos comparar a equação (1.6) com a função de partição clássica

$$Z_{cl} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0}{\sqrt{2\pi\hbar^2\beta/M}} e^{-\beta V(x_0)}. \quad (1.8)$$

O potencial efetivo clássico $V^{ec}(x_0)$ leva em conta todas as flutuações quânticas do sistema e é definido por

$$e^{-\beta V^{ec}(x_0)} \equiv \int \mathcal{D}x \bar{\delta}(\bar{x} - x_0) e^{-A/\hbar} \quad (1.9)$$

em que $\bar{\delta} \equiv \sqrt{2\pi\hbar^2\beta/M} \delta(\bar{x} - x_0)$ é a função δ modificada, que restringe as trajetórias àquelas com uma posição média específica x_0 .

1.2 O método

Em geral, é impossível calcular $V^{ec}(x_0)$ exatamente. Entretanto, não é difícil obter uma aproximação simples, mas boa para $V^{ec}(x_0)$, que se aproxima do potencial verdadeiro sempre por cima. A aproximação é feita comparando a integral de trajetória em questão com outra de solução conhecida, que chamamos de integral teste.

A integral de trajetória teste consiste em uma superposição de integrais de trajetória de oscilador harmônico local, centradas em posições médias x_0 , cada uma com frequência própria $\Omega(x_0)$. Os coeficientes da superposição e as frequências são escolhidos de tal modo que o potencial efetivo clássico do sistema teste seja um limite superior ótimo do verdadeiro potencial efetivo clássico. Em sistemas com um potencial suave ou pelo menos não muito singular, a precisão da aproximação é muito boa.

A ação teste local é a de um oscilador harmônico centrada em torno do ponto x_0 :

$$\mathcal{A}_\Omega^{x_0} = \int_0^{\hbar\beta} d\tau M \left[\frac{\dot{x}^2}{2} + \Omega^2(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2} \right], \quad (1.10)$$

com uma frequência teste local $\Omega(x_0)$ que chamaremos, para simplificar a notação, simplesmente de Ω , inicialmente desconhecida, a qual é também o parâmetro variacional do método.

A função de partição teste local associada, na representação de integrais de trajetória, é dada por

$$\begin{aligned} Z_\Omega^{x_0} &\equiv \int \mathcal{D}x(\tau) \delta(\bar{x} - x_0) e^{-\mathcal{A}_\Omega^{x_0}/\hbar} = \\ &\prod_{m=1}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_m^r dx_m^i}{\pi/\beta M \omega_m^2} \right] \exp \left[-M\beta \sum_{m=1}^{\infty} (\omega_m^2 + \Omega^2) |x_m|^2 \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$= \prod_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\omega_m^2}{\omega_m^2 + \Omega^2} \right]. \quad (1.12)$$

Como $\omega_m \equiv \frac{2\pi m}{\hbar\beta}$, usando a relação¹

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} \right) = \frac{\sinh x}{x}, \quad (1.13)$$

¹Gradsteyn [18], p. 44, fórmula 1.431.1

obtemos²

$$Z_{\Omega}^{x_0} = \prod_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\omega_m^2}{\omega_m^2 + \Omega^2} \right] = \frac{\hbar\beta\Omega/2}{\sinh(\hbar\beta\Omega/2)}. \quad (1.14)$$

A energia livre local correspondente é dada por

$$F_{\Omega}^{x_0} \equiv -\frac{1}{\beta} \ln Z_{\Omega}^{x_0} = \frac{1}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \ln \frac{\omega_m^2 + \Omega^2}{\omega_m^2} \quad (1.15)$$

$$= \frac{1}{\beta} \ln \frac{\sinh(\hbar\beta\Omega/2)}{\hbar\beta\Omega/2}. \quad (1.16)$$

Somando e subtraindo a ação teste $\mathcal{A}_{\Omega}^{x_0}$, dada na equação (1.10), em (1.9) e utilizando a seguinte definição de valor esperado de um funcional arbitrário $F[x(\tau)]$

$$\langle F[x(\tau)] \rangle_{\Omega}^{x_0} \equiv [Z_{\Omega}^{x_0}]^{-1} \int \mathcal{D}x \bar{\delta}(\bar{x} - x_0) e^{-\mathcal{A}_{\Omega}^{x_0}/\hbar} F[x(\tau)], \quad (1.17)$$

reexpressamos o potencial efetivo clássico desejado como

$$\begin{aligned} e^{-V^{ec}(x_0)\beta} = Z^{x_0} &= \int \mathcal{D}x \bar{\delta}(\bar{x} - x_0) e^{-\mathcal{A}/\hbar} \\ &= \int \mathcal{D}x \bar{\delta}(\bar{x} - x_0) e^{-\mathcal{A}_{\Omega}^{x_0}/\hbar} e^{-(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{\Omega}^{x_0})/\hbar} \\ &= [Z_{\Omega}^{x_0}] \langle e^{-(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{\Omega}^{x_0})/\hbar} \rangle_{\Omega}^{x_0}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Por outro lado, o valor esperado no lado direito possui um limite inferior que pode ser obtido através da desigualdade de Jensen-Peierls³:

$$\langle e^{-(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{\Omega}^{x_0})/\hbar} \rangle_{\Omega}^{x_0} \geq e^{-\langle (\mathcal{A} - \mathcal{A}_{\Omega}^{x_0})/\hbar \rangle_{\Omega}^{x_0}}. \quad (1.19)$$

Ou seja, o potencial efetivo clássico tem um limite superior

$$V^{ec}(x_0) \leq F_{\Omega}^{x_0}(x_0) + \frac{1}{\beta} \langle (\mathcal{A} - \mathcal{A}_{\Omega}^{x_0})/\hbar \rangle_{\Omega}^{x_0}. \quad (1.20)$$

²Em seu livro, Kleinert obtém esta relação a partir da teoria discretizada, tomando o limite do contínuo no final dos cálculos.

³Esta desigualdade é uma consequência da convexidade da função exponencial pela qual a média de duas exponenciais é sempre maior que a exponencial no ponto médio:

$$\frac{e^{-x_1} + e^{-x_2}}{2} \geq e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}.$$

Além disto,

$$V^{ec}(x_0) \leq F_{\Omega}^{x_0} + \frac{1}{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} \left\langle \left[V(x(\tau)) - M \frac{\Omega^2}{2} (x(\tau) - x_0)^2 \right] \right\rangle_{\Omega}^{x_0}. \quad (1.21)$$

O valor esperado no lado direito é facilmente calculado. Primeiro achamos a extensão da flutuação local $\langle (x(\tau) - x_0)^2 \rangle_{\Omega}^{x_0}$. Inserindo a decomposição de Fourier (1.4), obtemos:

$$\langle (x(\tau) - x_0)^2 \rangle_{\Omega}^{x_0} = \left\langle \sum_m' |x_m|^2 + \sum_{m \neq m'}' x_m x_{m'}^* e^{-i(\omega_m - \omega_{m'})\tau} \right\rangle_{\Omega}^{x_0}, \quad (1.22)$$

com

$$\sum_m' \equiv \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{m=\infty}.$$

Usando a decomposição correspondente da função de partição local (1.11), encontramos para os valores esperados locais (1.17) o produto de integrais

$$\begin{aligned} \langle \dots \rangle_{\Omega}^{x_0} &= [Z_{\Omega}^{x_0}]^{-1} \prod_{m=1}^{\infty} \left[\int \frac{dx_m^r dx_m^i}{\pi/\beta M \omega_m^2} \right] \\ &\exp \left[-M\beta \sum_{m=1}^{\infty} (\omega_m^2 + \Omega^2) |x_m|^2 \right] \dots \end{aligned} \quad (1.23)$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle x_m x_{m'}^* \rangle_{\Omega}^{x_0} &= \\ &\frac{\prod_{m=1}^{\infty} \left[\int \frac{dx_m^r dx_m^i}{\pi/\beta M \omega_m^2} \right] e^{[-M\beta \sum_{m=1}^{\infty} (\omega_m^2 + \Omega^2) |x_m|^2]} x_m x_{m'}^*}{\prod_{m=1}^{\infty} \left[\int \frac{dx_m^r dx_m^i}{\pi/\beta M \omega_m^2} \right] e^{[-M\beta \sum_{m=1}^{\infty} (\omega_m^2 + \Omega^2) |x_m|^2]}}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

o que nos leva às seguintes correlações das variáveis de integração gaussianas:

$$\langle x_m x_{m'}^* \rangle_{\Omega}^{x_0} = \delta_{mm'} \frac{1}{M\beta} \frac{1}{\omega_m^2 + \Omega^2}. \quad (1.25)$$

Somando sobre todos os $m = m'$, obtemos a largura da flutuação local

$$\langle (x(\tau) - x_0)^2 \rangle_{\Omega}^{x_0} = a^2(x_0), \quad (1.26)$$

com

$$a^2(x_0) \equiv 2 \frac{1}{M\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_m^2 + \Omega^2}. \quad (1.27)$$

Utilizando a expressão (1.14), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_m^2 + \Omega^2(x_0)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \Omega^2} \ln \frac{\omega_m^2 + \Omega^2}{\omega_m^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial \Omega^2} \ln \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\omega_m^2 + \Omega^2}{\omega_m^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial \Omega^2} \ln \frac{\sinh(\hbar\Omega\beta/2)}{\hbar\Omega\beta/2}.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
a^2 &= 2 \frac{1}{M\beta} \frac{\partial}{\partial \Omega^2} \ln \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\omega_m^2 + \Omega^2}{\omega_m^2} \\
&= \frac{1}{M\beta} \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial \Omega} \ln \frac{\sinh(\hbar\Omega\beta/2)}{\hbar\Omega\beta/2} \\
&= \frac{1}{M\beta\Omega^2} \left[\frac{\hbar\Omega\beta}{2} \coth \frac{\hbar\Omega\beta}{2} - 1 \right].
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Por outro lado, decompondo $V(x(\tau))$ em componentes de Fourier

$$V(x(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx(\tau)} \tilde{V}(k), \tag{1.30}$$

usando (1.4) e (1.23), escrevemos

$$\begin{aligned}
\langle V(x(\tau)) \rangle_{\Omega}^{x_0} &= \\
&= [Z_{\Omega}^{x_0}]^{-1} \prod_{m=1}^{\infty} \left[\int \frac{dx_m^r dx_m^i}{\pi/\beta M \omega_m^2} \right] e^{[-M\beta \sum_{m=1}^{\infty} (\omega_m^2 + \Omega^2) |x_m|^2]} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{V}(k) e^{ik[x_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (x_m e^{-i\omega_m\tau} + c.c.)]}.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Exceto pela integração em k , que pode ser feita no final, a integração múltipla difere da integral de trajetória para $Z_{\Omega}^{x_0}$ em (1.11) apenas pelos termos

$$ik \sum_{m=1}^{\infty} (x_m e^{-i\omega_m\tau} + c.c.)$$

no expoente. Eles são tratados completando-se os quadrados. Para $z = a + ib$, temos

$$(z e^{-i\alpha} + z^* e^{i\alpha}) = 2(a \cos \alpha + b \sin \alpha). \tag{1.32}$$

Deste modo, o expoente toma a seguinte forma:

$$\exp \left\{ \left[-M\beta \sum_{m=1}^{\infty} (\omega_m^2 + \Omega^2(x_0)) \right] \left[\left(x_m^r - ik \frac{1}{M\beta \omega_m^2 + \Omega^2(x_0)} \cos \omega_m \tau \right)^2 + \left(x_m^i - ik \frac{1}{M\beta \omega_m^2 + \Omega^2(x_0)} \sin \omega_m \tau \right)^2 \right] - \frac{a^2(x_0)}{2} k^2 \right\}. \quad (1.33)$$

As integrais gaussianas em x_m^r , x_m^i produzem um fator $Z_{\Omega}^{x_0}$, que cancela o fator de normalização em (1.31). O resultado é

$$\langle V(x(\tau)) \rangle_{\Omega}^{x_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{V}(k) e^{ikx_0 - a^2(x_0)k^2/2}. \quad (1.34)$$

Reinserindo os coeficientes de Fourier do potencial

$$\tilde{V}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx V(x) e^{-ikx}, \quad (1.35)$$

temos

$$\langle V(x(\tau)) \rangle_{\Omega}^{x_0} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} V(x) e^{-ik(x-x_0) - \frac{a^2(x_0)k^2}{2}} \quad (1.36)$$

e, efetuando a integração em k , novamente completando os quadrados, encontramos

$$\langle V(x(\tau)) \rangle_{\Omega}^{x_0} = V_{a^2}(x_0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'_0}{\sqrt{2\pi a^2(x_0)}} e^{-(x'_0 - x_0)^2/2a^2(x_0)} V(x'_0). \quad (1.37)$$

Então, o valor esperado $\langle V(x(\tau)) \rangle_{\Omega}^{x_0}$ do potencial se expressa por meio de uma integral de convolução do potencial original, com uma distribuição gaussiana da largura $a^2(x_0)$. Além disto, a aproximação explica as flutuações estatísticas quânticas. O valor esperado $\langle (x(\tau) - x_0)^2 \rangle_{\Omega}^{x_0}$ é, obviamente, um caso particular dessa regra geral:

$$(x - x_0)_{a^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-(x' - x_0)^2/2a^2} (x' - x_0)^2 = a^2(x_0). \quad (1.38)$$

Inserindo estes resultados em (1.21), achamos a aproximação para o potencial efetivo clássico

$$W_1(x_0) \equiv F_{\Omega}^{x_0} + V_{a^2}(x_0) - \frac{M}{2} \Omega^2(x_0) a^2(x_0), \quad (1.39)$$

o qual, pela desigualdade de Jensen-Peierls (1.19), permanece sempre acima do potencial verdadeiro:

$$W_1(x_0) \geq V^{ec}(x_0).$$

Para o potencial anarmônico $V(x) = \frac{M\omega^2}{2}x^2 + \frac{g}{4}x^4$, temos

$$V_{a^2}(x_0) = \frac{M\omega^2}{2}x_0^2 + \frac{g}{4}x_0^4 + \frac{M\omega^2}{2}a^2 + \frac{3g}{4}a^4 + \frac{3g}{2}x_0^2a^2, \quad (1.40)$$

e, tomando $M = 1$, obtemos

$$W_1(x_0) = F_{\Omega}^{x_0} + \frac{1}{2}\omega^2x_0^2 + \frac{g}{4}x_0^4 + \frac{a^2}{2} \left[\omega^2 - \Omega^2 + 3gx_0^2 + \frac{3g}{2}a^2 \right]. \quad (1.41)$$

Uma minimização de $W_1(x_0)$ em $\Omega(x_0)$ produz um limite superior ótimo.

Para o potencial harmônico $V(x) = M\omega^2x^2/2$, por exemplo, este processo leva a

$$V_{a^2}(x_0) = \frac{M\omega^2}{2}x_0^2 + \frac{M\omega^2}{2}a^2.$$

O extremo de $W_1(x_0)$ se dá em $\Omega(x_0) \equiv \omega$, de tal forma que o limite superior ótimo é

$$W_1(x_0) = F_{\omega}^{x_0} + \frac{M}{2}\omega^2x_0^2, \quad (1.42)$$

coincidindo com o potencial efetivo clássico exato do oscilador harmônico.

Este é o método original de Feynman-Kleinert para determinar V^{ec} . Kleinert, mais tarde, desenvolveu outro método variacional mais geral que fornece a equação (1.20) como o primeiro termo de uma expansão em cumulantes.

1.3 Uma expansão perturbativa que produz resultados melhores

Como melhorar ainda mais essa aproximação? Em busca de resultados mais precisos, Kleinert [8], [9] desenvolveu uma expansão perturbativa variacional para o potencial efetivo clássico do sistema quântico. Para obtê-la, separamos a ação em duas partes, uma contendo todos os termos clássicos dependentes de x_0 , incluindo $\mathcal{A}_{\Omega}^{x_0}$, e outra com os termos restantes, a qual chamamos de ação de interação $\mathcal{A}_{int}^{x_0}$.

Expandimos a ação euclidiana

$$\mathcal{A} = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left[\frac{M}{2} \dot{x}^2(\tau) + V(x(\tau)) \right] \quad (1.43)$$

em potências dos desvios da trajetória em relação a média $\bar{x} = x_0$ (componente com momento zero da expansão de Fourier de $x(t)$, como no método de Feynman-Kleinert, apresentado na seção anterior):

$$y(\tau) \equiv \delta x(\tau) \equiv x(\tau) - x_0. \quad (1.44)$$

Como $\dot{x}(\tau) = \dot{y}(\tau)$, ao expandir $V(x(\tau))$ em série de Taylor em torno de x_0 [7]

$$V(x(\tau)) = V(x_0) + \frac{dV(x_0)}{dx_0} y + \frac{d^2V(x_0)}{dx_0^2} \frac{y^2}{2!} + \dots \quad (1.45)$$

e somando e subtraindo o termo $\frac{M}{2}\Omega^2(x_0)[y(\tau)]^2$, encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left\{ \frac{M}{2} [\dot{y}(\tau)]^2 + \frac{M}{2} \Omega^2(x_0) [y(\tau)]^2 - \frac{M}{2} \Omega^2(x_0) [y(\tau)]^2 \right. \\ &\quad \left. + V(x_0) + \frac{dV(x_0)}{dx_0} y + \frac{d^2V(x_0)}{dx_0^2} \frac{y^2}{2!} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} &= \hbar\beta V(x_0) + \int_0^{\hbar\beta} d\tau \frac{M}{2} \left\{ \dot{y}^2 + \Omega^2(x_0) y^2 \right\} \\ &\quad + \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left\{ \frac{g_2}{2!} y^2 + \frac{g_3}{3!} y^3 + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

onde

$$g_i(x_0) = V^i(x_0) - M\Omega^2\delta_{i2} \quad (1.48)$$

e

$$V^i(x_0) \equiv \frac{d^i V(x_0)}{dx_0^i} \quad (1.49)$$

com $i = 2, 3, \dots$ pois, a partir de (1.7), verificamos que não aparecem termos lineares em y , uma vez que

$$\int_0^{\hbar\beta} d\tau \frac{dV(x_0)}{dx_0} y = \frac{dV(x_0)}{dx_0} \int_0^{\hbar\beta} d\tau (x(\tau) - x_0) = 0.$$

Observe que um dos termos $\frac{M}{2}\Omega^2(x_0)[y(\tau)]^2$ é incorporado ao propagador e é tratado de forma exata. O outro termo faz parte do vértice g_2 e será tratado de forma aproximada através de uma expansão em cumulantes.

Portanto, a expansão (1.47) leva a

$$\mathcal{A} = \hbar\beta V(x_0) + \mathcal{A}_\Omega^{x_0} + \mathcal{A}'_{int}{}^{x_0}, \quad (1.50)$$

onde $\mathcal{A}_\Omega^{x_0}$ é a ação teste das flutuações $\delta x(\tau)$:

$$\mathcal{A}_\Omega^{x_0} = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \frac{M}{2} [\dot{y}(\tau)]^2 + \Omega^2(x_0)[y(\tau)]^2, \quad (1.51)$$

e $\mathcal{A}'_{int}{}^{x_0}$ é a ação que contém os termos de interação

$$\mathcal{A}'_{int}{}^{x_0} = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left\{ \frac{g_2}{2!} y^2 + \frac{g_3}{3!} y^3 + \frac{g_4}{4!} y^4 + \dots \right\}. \quad (1.52)$$

Usando (1.50), a função de partição pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} Z &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0}{\sqrt{2\pi\hbar^2\beta/M}} e^{-\beta V^{ec}(x_0)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0}{\sqrt{2\pi\hbar^2\beta/M}} \int \mathcal{D}x \bar{\delta}(\bar{x} - x_0) e^{-\mathcal{A}/\hbar} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0}{\sqrt{2\pi\hbar^2\beta/M}} [Z_\Omega^{x_0}] e^{-\beta V(x_0)} < e^{-\mathcal{A}'_{int}{}^{x_0}/\hbar} >_{\Omega}^{x_0}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Anteriormente, usamos a desigualdade de Jensen-Peierls para obter uma aproximação do valor esperado do lado direito de (1.53). Agora, calculamos perturbativamente, expandindo a exponencial numa série de Taylor

$$\begin{aligned} Z^{x_0} &= e^{-\beta V(x_0)} Z_\Omega^{x_0} \left\{ 1 - \frac{1}{\hbar} < \mathcal{A}'_{int}{}^{x_0} >_{\Omega}^{x_0} + \frac{1}{2!\hbar^2} < (\mathcal{A}'_{int}{}^{x_0})^2 >_{\Omega}^{x_0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3!\hbar^3} < (\mathcal{A}'_{int}{}^{x_0})^3 >_{\Omega}^{x_0} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Exponenciando a expansão anterior, ficamos apenas com os valores esperados conexos

$$\begin{aligned} Z^{x_0} &= e^{-\beta V^{ec}(x_0)} \\ &= \exp \left\{ -\beta V(x_0) - \beta F_\Omega^{x_0} - \frac{1}{\hbar} < \mathcal{A}'_{int}{}^{x_0} >_{\Omega}^{x_0} + \frac{1}{2!\hbar^2} < (\mathcal{A}'_{int}{}^{x_0})^2 >_{\Omega,c}^{x_0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3!\hbar^3} < (\mathcal{A}'_{int}{}^{x_0})^3 >_{\Omega,c}^{x_0} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (1.55)$$

e obtemos uma expansão em cumulantes. Esta expressão leva ao potencial efetivo clássico, $V^{ec}(x_0)$, o qual, por construção, é independente do parâmetro variacional Ω . Entretanto, quando a truncamos até ordem N , o resultado depende de Ω , e encontramos o potencial efetivo clássico aproximado

$$W_N(x_0) = V(x_0) + F_\Omega^{x_0} + \frac{1}{\hbar\beta} \langle \mathcal{A}_{int}^{x_0} \rangle_\Omega^{x_0} - \frac{1}{2!\hbar^2\beta} \langle (\mathcal{A}_{int}^{x_0})^2 \rangle_{\Omega,c}^{x_0} \\ + \frac{1}{3!\hbar^3\beta} \langle (\mathcal{A}_{int}^{x_0})^3 \rangle_{\Omega,c}^{x_0} + \dots + \frac{(-1)^N}{N!\hbar^N\beta} \langle (\mathcal{A}_{int}^{x_0})^N \rangle_{\Omega,c}^{x_0}, \quad (1.56)$$

impondo que W_N deve depender minimamente de Ω . O valor de Ω para o qual isto ocorre é obtido minimizando $W_N(x_0)$ em relação a Ω ,

$$\frac{\partial W_N(x_0)}{\partial \Omega(x_0)} = 0. \quad (1.57)$$

Esta equação determina $\Omega_{ótima}$.

Vamos mostrar que $W_1(x_0)$ coincide com o obtido através do método de Feynman-Kleinert. Com a equação (1.50), a aproximação de Feynman-Kleinert para o potencial efetivo clássico (1.21) é reescrita como

$$W_1(x_0) = F_\Omega^{x_0}(x_0) + \frac{1}{\beta} \langle (\hbar\beta V(x_0) + \mathcal{A}_{int}^{x_0})/\hbar \rangle_\Omega^{x_0}. \quad (1.58)$$

Ou seja,

$$W_1(x_0) = V(x_0) + F_\Omega^{x_0}(x_0) + \frac{1}{\beta\hbar} \langle \mathcal{A}_{int}^{x_0} \rangle_\Omega^{x_0}, \quad (1.59)$$

pois

$$\langle V(x_0) \rangle_\Omega^{x_0} = [Z_\Omega^{x_0}]^{-1} \prod_{m=1}^{\infty} \left[\int \frac{dx_m^r dx_m^i}{\pi/\beta M \omega_m^2} \right] e^{[-M\beta \sum_{m=1}^{\infty} (\omega_m^2 + \Omega^2) |x_m|^2]} V(x_0) \\ = V(x_0). \quad (1.60)$$

1.4 Oscilador anarmônico

Um exemplo muito útil de aplicação deste método é o oscilador anarmônico, cuja integral de trajetória não conseguimos calcular exatamente. Ressaltamos que *os termos da expansão gráfica* que vamos obter mais adiante

são típicos de teorias ϕ^4 da teoria quântica de campos que trabalharemos na nossa generalização. Assim, é interessante apresentá-los neste ponto e encerrar a exposição do método de Kleinert para a Mecânica Quântica.

Consideramos o oscilador anarmônico com a ação euclidiana

$$\mathcal{A}_{os}[x] = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left[\frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{M\omega^2}{2} x^2 + \frac{1}{4} g x^4 \right], \quad (1.61)$$

em que

$$V(x) = \frac{M\omega^2}{2} x^2 + \frac{1}{4} g x^4$$

é o potencial do oscilador anarmônico.

Adicionando um termo de fonte

$$\mathcal{A}_f[x] = \int_0^{\hbar\beta} d\tau x(\tau) j(\tau), \quad (1.62)$$

sendo j uma corrente externa, obtemos a função de partição

$$Z[j] = \int \mathcal{D}x(\tau) e^{-\mathcal{A}[j]/\hbar}, \quad (1.63)$$

com

$$\mathcal{A}[j] = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left[\left(\frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{M\omega^2}{2} x^2 + \frac{1}{4} g x^4 \right) - j(\tau) x(\tau) \right]. \quad (1.64)$$

A partir de (1.44) - (1.46), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[j] = & \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left\{ \frac{M}{2} \dot{y}^2 + \frac{M}{2} \Omega^2 y^2 - \frac{M}{2} \Omega^2 y^2 \right. \\ & \left. + V(x_0) + \frac{dV(x_0)}{dx_0} y + \frac{d^2V(x_0)}{dx_0^2} \frac{y^2}{2!} + \dots - jy - jx_0 \right\}. \quad (1.65) \end{aligned}$$

Como $\dot{x}_0^2 = 0$ e $\int_0^{\hbar\beta} d\tau \frac{dV(x_0)}{dx_0} y = 0$, podemos reescrever a ação como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[j] = & \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left\{ \frac{M}{2} \dot{x}_0^2 + V(x_0) - jx_0 \right\} \\ & + \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left\{ \frac{M}{2} \dot{y}^2 + \frac{M}{2} \Omega^2 y^2 - jy \right\} \\ & + \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left\{ \left(\frac{d^2V(x_0)}{dx_0^2} - M\Omega^2 \right) \frac{y^2}{2!} + \frac{d^3V(x_0)}{dx_0^3} \frac{y^3}{3!} + \dots \right\}. \quad (1.66) \end{aligned}$$

Além disto, usando as definições de $g_i(x_0)$ (1.48) e de $V^i(x_0)$ (1.49), temos, para o oscilador anarmônico:

$$\begin{aligned}\frac{d^2V(x_0)}{dx_0^2}\Big|_{x_0} &= M\omega^2 + 3gx_0^2 \Rightarrow g_2(x_0) = M[\omega^2 - \Omega^2] + 3gx_0^2, \\ \frac{d^3V(x_0)}{dx_0^3}\Big|_{x_0} &= 6gx_0 \Rightarrow g_3(x_0) = 6gx_0, \\ \frac{d^4V(x_0)}{dx_0^4}\Big|_{x_0} &= 6g \Rightarrow g_4(x_0) = 6g,\end{aligned}$$

em que g_2 , g_3 e g_4 representam, respectivamente, vértices de duas, três e quatro pernas.

Por outro lado, para simplificar os cálculos, podemos absorver o vértice de duas pernas $\propto g_2$ no propagador

$$\tilde{\Omega}^2 \equiv \Omega^2 + g_2/M, \quad (1.67)$$

e, deste modo, achamos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[j] &= \mathcal{A}_{cl}[x_0] + \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left\{ \frac{M}{2}\dot{y}^2 + \frac{M}{2}\tilde{\Omega}^2 y^2 - jy \right\} \\ &+ \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left\{ \frac{g_3}{3!}y^3 + \frac{g_4}{4!}y^4 \right\},\end{aligned} \quad (1.68)$$

com

$$\mathcal{A}_{cl}[x_0] = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left\{ \frac{M}{2}\dot{x}_0^2 + V(x_0) - jx_0 \right\}.$$

Fazemos todos os cálculos com $\tilde{\Omega}$ e depois expandimos em g_2 . Para W_1 , expandimos até $\mathcal{O}(g_2)$; para W_2 , até $\mathcal{O}(g_2^2)$, e assim por diante.

O procedimento para se obter a expansão em cumulantes e o cálculo dos diagramas de Feynman relacionados com a mesma estão descritos em detalhes no Apêndice A. Expressando os termos da expansão através de diagramas de Feynman, temos um vértice de 3 pernas ($\propto g_3$) e um de 4 pernas ($\propto g_4$). A partir deles, do propagador e das seguintes regras de Feynman:

- a cada termo da expansão associa-se um diagrama de Feynman,

- a cada vértice associam-se fatores g_i , onde i é o número de pernas que saem do mesmo,
- a cada linha interna associa-se um propagador G_{xy} ,

construímos todos os diagramas. Em seguida, conforme explicamos, expandimos em g_2 .

1.5 Obtenção de W_2

Tendo calculado os diagramas de Feynman conexos, obtemos, com a expansão perturbativa variacional até segunda ordem nos cumulantes, o W_2 .

Como

$$Z = e^{-\beta W_2}, \quad (1.69)$$

$$\mathcal{A}_{cl}[x_0] = \hbar\beta V(x_0),$$

$$\int \mathcal{D}y' e^{-\frac{1}{2}y'_r D_{rr'} y'_{r'}} = Z_{\Omega}^{x_0}, \quad (1.70)$$

e

$$\beta F_{\Omega}^{x_0} = -\ln Z_{\Omega}^{x_0},$$

sendo $Z_{\Omega}^{x_0}$ a função de partição do oscilador harmônico com frequência $\Omega(x_0)$, temos, diagramaticamente:

$$\beta W_2 = \beta V(x_0) - \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \tilde{\Omega} \\ \bigcirc \end{array} \right] + \begin{array}{c} \tilde{\Omega} \\ \bigcirc \bigcirc \\ 3 \end{array}$$

$$- \frac{1}{2!} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\Omega} \\ \bigcirc \text{---} \bigcirc \\ 6 \end{array} \right. + \begin{array}{c} \tilde{\Omega} \\ \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \\ 24 \end{array} + \begin{array}{c} \tilde{\Omega} \\ \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \\ 72 \end{array} \left. \right\},$$

em que

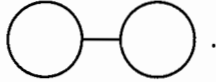
$$-\frac{1}{2} \cdot \textcircled{\tilde{\Omega}}$$

corresponde a $\beta F_{\tilde{\Omega}}^{x_0}$, pois podemos escrever

$$\beta F_{\tilde{\Omega}}^{x_0} = -\frac{1}{2\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \ln G_{\tau\tau}. \quad (1.71)$$

Os fatores escritos abaixo de cada diagrama são os fatores combinatórios provenientes do emparelhamento das derivadas funcionais.

Observe que a expansão perturbativa variacional leva apenas a diagramas conexos e irredutíveis, pois, como a função de correlação não contém frequência nula, os diagramas redutíveis a uma partícula (1PR) não contribuem. É o caso do diagrama correspondente a $G_{\tau\tau}G_{\tau\tau'}G_{\tau'\tau'}$:



Usando as expressões (A.27) e (A.30), temos:

$$\int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau} G_{\tau\tau'} G_{\tau'\tau'} = \left(\frac{\hbar}{\omega x}\right)^2 \left[\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} - 1\right]^2 \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' \frac{\hbar}{\omega} \frac{1}{2x} \frac{1}{\sinh x/2} [x \cosh(\omega|\tau - \tau'| - x/2) - 2 \sinh(x/2)]. \quad (1.72)$$

Porém, através da relação (A.50), verificamos que a expressão anterior é nula.

Vamos usar

$$\tilde{\Omega}^2 = \Omega^2 + g_2, \quad (1.73)$$

com $M = 1$, para expandir os propagadores em potências de g_2 até segunda ordem, no nosso caso. A expansão é feita em cada diagrama de Feynman. Representando a inserção de massa por um ponto na linha, os diagramas de um loop e de dois loops são expandidos como se segue

$$\begin{aligned} \textcircled{\tilde{\Omega}} &= \textcircled{\Omega} - 2 \textcircled{\Omega} + \textcircled{\Omega} \\ \textcircled{\tilde{\Omega}} &= \textcircled{\Omega} - \textcircled{\Omega} \end{aligned}$$

3
3
24

Os outros diagramas permanecem inalterados, pois fomos apenas até a segunda ordem de g_2 . Os fatores $1/n!$, relacionados a cada gráfico, podem ser agrupados com os respectivos fatores combinatórios. Desta forma, a expansão gráfica completa para W_2 , incluindo todos os vértices relacionados com o acoplamento $g_2(x_0)$, é dada por:

$$\begin{aligned} \beta W_2(x_0) = & \beta V(x_0) - \frac{1}{2} \text{ (circulo) } + \left(\frac{1}{2} \text{ (circulo com ponto) } + \frac{1}{8} \text{ (dois circulos) } \right) \\ & - \frac{1}{2!} \left\{ \frac{1}{2} \text{ (dois pontos no circulo) } + \frac{1}{2} \text{ (dois circulos) } + \frac{1}{6} \text{ (circulo com linha) } \right. \\ & \left. + \frac{1}{24} \text{ (dois pontos no circulo com arco) } + \frac{1}{8} \text{ (três circulos) } \right\}. \end{aligned}$$

Nestes gráficos, cada vértice representa os acoplamentos g_n/\hbar , em que n é o número de pernas que saem do mesmo. A expressão analítica para W_2 é:

$$\begin{aligned} W_2(x_0) = & V(x_0) + F_{\Omega}^{x_0} + \left(\frac{g_2}{2} a^2 + \frac{g_4}{8} a^4 \right) \\ & - \frac{1}{2! \hbar \Omega} \left[\frac{g_2^2}{2} a_2^4 + \frac{g_2 g_4}{2} a_2^4 a^2 + \frac{g_3^2}{6} a_2^6 + \frac{g_4^2}{24} a_2^8 + \frac{g_4^2}{8} a_2^4 a^4 \right], \end{aligned} \quad (1.74)$$

na qual os a 's são os obtidos no apêndice. Os índices m e n dos a_m^n representam, respectivamente, m -integrais em τ e o produto de $\frac{n}{2}$ fatores $G_{\tau\tau'}$.

A frequência ótima $\Omega(x_0)$ é tal que

$$\frac{\partial W_2(x_0)}{\partial \Omega(x_0)} = 0 \quad (1.75)$$

e pode ser encontrada numericamente.

1.5.1 Limite termodinâmico

Estamos interessados em trabalhar com uma teoria de campos a temperatura zero. Portanto, é elucidativo estudar este limite no contexto mais simples da Mecânica Quântica.

No limite de temperatura zero, temos $x = \omega\hbar\beta \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow 0$). Então, podemos fazer a seguinte aproximação:

$$\frac{1}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \rightarrow \hbar \int_{\frac{2\pi}{\hbar\beta}}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \approx \hbar \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi}, \quad (1.76)$$

com a qual reescrevemos (1.27) e (1.15)

$$a^2(x_0) = G_{\tau\tau} = \frac{2\hbar}{M} \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{k^2 + \Omega^2} = \frac{\hbar}{2M\Omega}, \quad (1.77)$$

e

$$F_{\Omega}^{x_0} = \hbar \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \ln \frac{k^2 + \Omega^2}{k^2} = \frac{\hbar\Omega}{2}. \quad (1.78)$$

Por outro lado, a função de Green é dada por

$$G_{\tau\tau'} = \frac{1}{M\beta} \sum'_m \frac{1}{\omega_m^2 + \Omega^2} e^{-i\omega_m(\tau-\tau')}, \quad (1.79)$$

então,

$$\begin{aligned} \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau'}^2 &= 2\hbar\beta \frac{\hbar^2}{M^2} \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{(k^2 + \Omega^2)^2} \\ &= \frac{\hbar\beta}{\Omega} (a^2)^2 \\ &= \frac{\hbar\beta}{\Omega} a_2^4, \end{aligned} \quad (1.80)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau'}^3 &= \frac{\hbar\beta}{\Omega} \frac{\hbar^3}{M^3\Omega^3} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{k^2 + 1} \right]^3 \\ &= \frac{\hbar\beta}{\Omega} \frac{2}{3} (a^2)^3 \\ &= \frac{\hbar\beta}{\Omega} a_2^6, \end{aligned} \quad (1.81)$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau'}^4 &= \frac{\hbar\beta}{\Omega} \frac{\hbar^4}{M^4\Omega^4} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{k^2 + 1} \right]^4 \\ &= \frac{\hbar\beta}{\Omega} \frac{1}{2} (a^2)^4 \\ &= \frac{\hbar\beta}{\Omega} a_2^8. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Assim, no limite $T = 0$, os a_m^n 's estão relacionados com a^2 da seguinte forma

$$\begin{aligned} a_2^4 &= a^4, \\ a_2^6 &= \frac{2}{3}a^6, \text{ e} \\ a_2^8 &= \frac{1}{2}a^8. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Deste modo, W_2 , no limite $T = 0$, é reescrito como

$$\begin{aligned} W_2(x_0) &= V(x_0) + F_\Omega^{x_0} + \left(\frac{g_2}{2}a^2 + \frac{g_4}{8}a^4 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2!\hbar\Omega} \left[\frac{g_2^2}{2}a^4 + \frac{g_2g_4}{2}a^6 + \frac{g_3^2}{6}\frac{2a^6}{3} + \frac{g_4^2}{24}\frac{7a^8}{2} \right]. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Utilizando unidades naturais ($\hbar = 1$) e tomando $M = 1$, temos

$$\begin{aligned} V(x_0) &= \frac{\omega^2}{2}x_0^2 + \frac{1}{4}gx_0^4, \\ F_\Omega^{x_0} &= \frac{\Omega}{2}, \\ a^2(x_0) &= \frac{1}{2\Omega}, \\ g_2(x_0) &= (\omega^2 - \Omega^2) + 3gx_0^2, \\ g_3(x_0) &= 6gx_0, \text{ e} \\ g_4(x_0) &= 6g, \end{aligned} \quad (1.85)$$

o que leva a [16]

$$\begin{aligned} W_2(x_0) &= \frac{\omega^2}{2}x_0^2 + \frac{1}{4}gx_0^4 + F_\Omega^{x_0} + \frac{a^2}{2} \left(g_2 + \frac{g_4}{4}a^2 \right) \\ &\quad - \frac{a^4}{4\Omega} \left[\left(g_2 + \frac{g_4}{4}a^2 \right)^2 + \frac{2g_3^2}{9}a^2 + \frac{g_4^2}{24}a^4 \right]. \end{aligned} \quad (1.86)$$

A solução para $\Omega_{\text{ótima}}$ pode ser obtida graficamente. Como exemplo, apresentamos o gráfico para W_1 (linha pontilhada) e W_2 (linha contínua) em função de Ω para os valores $\omega = 1$, $x_0 = 0$ e $g = 0, 4$. Observando-o percebe-se dois aspectos interessantes. O primeiro é que W_2 não tem um extremo, mas depende minimamente de Ω com a condição [19]

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial \Omega^2} = 0, \quad (1.87)$$

ou seja, no ponto de inflexão. O segundo aspecto é que os valores de $\Omega_{\text{ótima}}$ nos dois casos são muito próximos. Kleinert cita em um de seus trabalhos [20] que há várias soluções para $\Omega_{\text{ótima}}$, mas que a correta é a que mais se aproxima da solução encontrada na ordem mais baixa. Além disto, segundo ele, a dependência em Ω diminui rapidamente conforme aumentamos a ordem em W_N , já que a soma completa é independente de Ω .

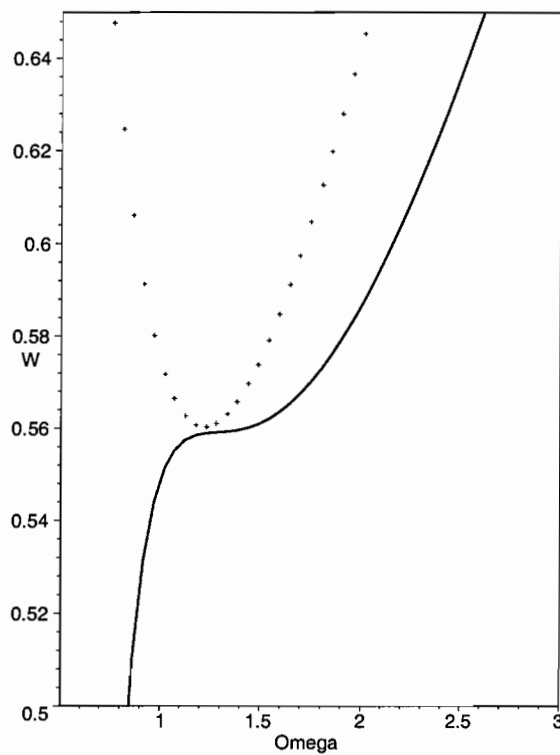


Figura 1.1: W_1 e W_2 para $\omega = 1$, $x_0 = 0$ e $g = 0, 4$.

Substituindo os valores de $F_{\Omega}^{x_0}$, g_2 , g_3 e g_4 na expressão de W_1 e fazendo $\frac{\partial W_1}{\partial \Omega} = 0$, obtemos a seguinte equação para $\Omega_{\text{ótima}}$:

$$\Omega^2 = \omega^2 + 3\lambda(x_0^2 + a^2), \quad (1.88)$$

cuja solução foi obtida por Kleinert numericamente.

Capítulo 2

Generalização do Método de Feynman-Kleinert em Teoria de Campos

Para uma teoria de campos em d -dimensões, a função de partição é dada por

$$Z = e^{-L^d F[h=0]} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{A}}, \quad (2.1)$$

sendo que L^d é o volume do hiper-cubo d -dimensional, o qual corresponde ao volume do sistema. A ação euclidiana é

$$\mathcal{A} = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi) \right], \quad (2.2)$$

em que $V(\phi) = \frac{\mu^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4$ é o potencial e $\mu^2 \propto T - T_c$ é o termo de massa, o qual é proporcional à distância que estamos da temperatura crítica T_c (de campo médio) [1].

Adotaremos a seguinte notação: \sum_k' é a soma sobre todos os k 's não-nulos. Utilizaremos unidades naturais ($\hbar = 1$) e $M = 1$ nos cálculos a seguir.

Vamos decompor o campo ϕ , $\phi_k = \phi_{-k}^*$, numa série de Fourier¹

$$\phi(x) = \phi_0 + \frac{1}{2} \sum_k' (e^{-ikx} \phi_k + e^{ikx} \phi_k^*) \quad (2.3)$$

¹Nossa normalização difere da escolhida por Kleinert [21], pois estamos em teoria de campos a $T = 0$.

e tomar a medida de integração (a partir de (1.2), com $\hbar = M = 1$)

$$\int \mathcal{D}\phi_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi_0}{\sqrt{2\pi L^d}} \prod_k^+ \int \frac{d\phi_k^r d\phi_k^i}{\pi/(L^d k^2)}, \quad (2.4)$$

na qual, o espaço dos momentos foi dividido em duas partes C^+ e C^- , tais que para cada $k \in C^+$ existe um correspondente $-k \in C^-$ (que equivale a somar apenas sobre os $k's > 0$ em uma dimensão). O índice + na soma indica que estamos nos restringindo aos $k \in C^+$. Observe que, se $f(k)$ é uma função par de k , então, $2\sum_k^+ f(k) = \sum_k f(k)$. Os índices r e i indicam as partes real e imaginária do campo, respectivamente. Com isso, a função de partição é reescrita como

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi_0}{\sqrt{2\pi L^d}} e^{-L^d V^{ec}(\phi_0)}, \quad (2.5)$$

na qual chamamos V^{ec} de potencial efetivo clássico do sistema, pois a expressão anterior é análoga a da função de partição clássica. Comparando a expressão (2.1) com a (2.5), definimos o potencial efetivo clássico como sendo

$$e^{-L^d V^{ec}(\phi_0)} \equiv \int \mathcal{D}\phi \bar{\delta}(\bar{\phi} - \phi_0) e^{-\mathcal{A}}, \quad (2.6)$$

em que $\bar{\delta} \equiv \sqrt{2\pi L^d} \delta(\bar{\phi} - \phi_0)$ é a função δ modificada que restringe os campos ϕ_0 àqueles que têm a média

$$\bar{\phi} = \int \phi(x) dx$$

igual a ϕ_0 .

Somando e subtraindo a ação teste $\mathcal{A}_\Omega^{\phi_0}$, dada por

$$\mathcal{A}_\Omega^{\phi_0} = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{\Omega^2(\phi_0)}{2} (\phi - \phi_0)^2 \right], \quad (2.7)$$

em que Ω é o parâmetro variacional, em (2.6), e usando a seguinte definição de valor esperado de um funcional arbitrário $F[\phi]$

$$\langle F[\phi] \rangle_\Omega^{\phi_0} \equiv [Z_\Omega^{\phi_0}]^{-1} \int \mathcal{D}\phi \bar{\delta}(\bar{\phi} - \phi_0) e^{-\mathcal{A}_\Omega^{\phi_0}} F[\phi], \quad (2.8)$$

obtemos

$$e^{-L^d V^{ec}(\phi_0)} = [Z_\Omega^{\phi_0}] \langle e^{-(\mathcal{A} - \mathcal{A}_\Omega^{\phi_0})} \rangle_\Omega^{\phi_0}. \quad (2.9)$$

O valor esperado no lado direito possui um limite que pode ser calculado por meio da desigualdade de Jensen-Peierls [8]:

$$\langle e^{-(\mathcal{A}-\mathcal{A}_\Omega^{\phi_0})} \rangle_\Omega^{\phi_0} \geq e^{-\langle (\mathcal{A}-\mathcal{A}_\Omega^{\phi_0}) \rangle_\Omega^{\phi_0}}. \quad (2.10)$$

A energia livre é dada por

$$F_\Omega^{\phi_0} = -\frac{1}{L^d} \ln Z_\Omega^{\phi_0}. \quad (2.11)$$

Como

$$\begin{aligned} Z_\Omega^{\phi_0} &= \prod_k^+ \left[\frac{k^2}{k^2 + \Omega^2} \right] \\ &= \left[e^{\frac{1}{2} \sum_k' \ln \frac{k^2 + \Omega^2}{k^2}} \right]^{-1}, \end{aligned}$$

temos

$$F_\Omega^{\phi_0} = \frac{1}{2L^d} \sum_k' \ln \frac{k^2 + \Omega^2}{k^2}. \quad (2.12)$$

Ou seja, o potencial efetivo clássico tem um limite superior

$$V^{ec}(\phi_0) \leq F_\Omega^{\phi_0}(\phi_0) + \frac{1}{L^d} \langle (\mathcal{A} - \mathcal{A}_\Omega^{\phi_0}) \rangle_\Omega^{\phi_0} \equiv W_1(\phi_0). \quad (2.13)$$

Ressaltamos que $W_1(\phi_0)$ permanece sempre acima do potencial verdadeiro procurado. Uma minimização de $W_1(\phi_0)$ em $\Omega(\phi_0)$ produz um limite superior ótimo. Por outro lado,

$$V^{ec}(\phi_0) \leq F_\Omega^{\phi_0}(\phi_0) + \frac{1}{L^d} \int \langle \left[V(\phi) - \frac{\Omega^2(\phi_0)}{2} (\phi - \phi_0)^2 \right] \rangle_\Omega^{\phi_0} d^d x. \quad (2.14)$$

Com a relação (2.3) e a decomposição

$$\langle \dots \rangle_\Omega^{\phi_0} = [Z_\Omega^{\phi_0}]^{-1} \prod_k^+ \left[\int \frac{d\phi_k^r d\phi_k^i}{\pi/L^d k^2} \right] e^{[-L^d \sum_k^+ (k^2 + \Omega^2) |\phi_k|^2]} \dots, \quad (2.15)$$

calculamos os valores esperados $\langle V(\phi) \rangle_\Omega^{\phi_0}$ e $\langle (\phi - \phi_0)^2 \rangle_\Omega^{\phi_0}$, obtendo

$$\langle (\phi - \phi_0)^2 \rangle_\Omega^{\phi_0} = \frac{1}{L^d} \sum_k' \frac{1}{k^2 + \Omega^2} \equiv a^2(\phi_0). \quad (2.16)$$

Podemos reescrever a^2 na forma

$$a^2(\phi_0) = \frac{1}{L^d} \frac{\partial}{\partial \Omega^2} \ln \left\{ \exp \left[\sum'_k \ln \frac{k^2 + \Omega^2}{k^2} \right] \right\}. \quad (2.17)$$

Para encontrar o termo $\langle V(\phi) \rangle_{\Omega}^{\phi_0}$, utilizamos a transformada de Fourier de $V(\phi)$, no espaço dos momentos

$$V(\phi) = \int \frac{dq}{2\pi} e^{iq\phi} \tilde{V}(q), \quad (2.18)$$

e a equação (2.15). Deste modo, reescrevemos

$$\begin{aligned} \langle V(\phi) \rangle_{\Omega}^{\phi_0} = & [Z_{\Omega}^{\phi_0}]^{-1} \prod_k^+ \left[\int \frac{d\phi_k^r d\phi_k^i}{\pi/(L^d k^2)} \right] e^{[-L^d \sum_k^+ (k^2 + \Omega^2) |\phi_k|^2]} \\ & \times \int \frac{dq}{2\pi} \tilde{V}(q) e^{iq[\phi_0 + \frac{1}{2} \sum_k' (e^{-ikx} \phi_k + e^{ikx} \phi_k^*)]}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

na qual usamos a relação (2.3). Calculamos primeiro a integral múltipla, completando os quadrados nos termos do expoente que são proporcionais a ϕ_k . Para isso, reescrevemos

$$e^{-ikx} \phi_k + e^{ikx} \phi_k^* = 2(\phi_k^r \cos kx + \phi_k^i \sin kx). \quad (2.20)$$

Lembrando que, para uma função par em k , temos $\sum_k' = 2 \sum_k^+$, encontramos

$$e^{[-L^d \sum_k^+ (k^2 + \Omega^2) |\phi_k|^2] + 2iq \sum_k^+ (\phi_k^r \cos kx + \phi_k^i \sin kx) + iq\phi_0}. \quad (2.21)$$

Completando os quadrados, chegamos a

$$\begin{aligned} \langle V(\phi) \rangle_{\Omega}^{\phi_0} = & [Z_{\Omega}^{\phi_0}]^{-1} \prod_k^+ \left[\int \frac{d\phi_k^r d\phi_k^i}{\pi/(L^d k^2)} \right] \int \frac{dq}{2\pi} \tilde{V}(q) e^{iq\phi_0 - q^2 \frac{a^2}{2}} \\ & e^{[-L^d \sum_k^+ (k^2 + \Omega^2)] \left\{ \left[\phi_k^r - \frac{q \cos kx}{L^d (k^2 + \Omega^2)} \right]^2 + \left[\phi_k^i - \frac{q \sin kx}{L^d (k^2 + \Omega^2)} \right]^2 \right\}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Redefinindo as variáveis de integração

$$\bar{\phi}_k^r \equiv \phi_k^r - \frac{q \cos kx}{L^d (k^2 + \Omega^2)},$$

e

$$\bar{\phi}_k^i \equiv \phi_k^i - \frac{q \sin kx}{L^d(k^2 + \Omega^2)},$$

podemos reescrever as integrais gaussianas como

$$\prod_k^+ \left[\int \frac{d\bar{\phi}_k^r d\bar{\phi}_k^i}{\pi/(L^d k^2)} e^{-L^d(k^2 + \Omega^2(\phi_0))|\bar{\phi}_k|^2} \right] = Z_\Omega^{\phi_0}. \quad (2.23)$$

Reinserindo (2.18) e completando os quadrados no expoente, achamos

$$\langle V(\phi) \rangle_\Omega^{\phi_0} \equiv V_{a^2}(\phi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi a^2}} V(\phi) e^{-(\phi - \phi_0)^2/2a^2}. \quad (2.24)$$

Na teoria $\lambda\phi^4$, $V(\phi) = \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$, assim, encontramos

$$V_{a^2}(\phi_0) = \frac{\mu^2}{2}a^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{3}{4}\lambda a^4 + \frac{3}{2}\lambda a^2\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_0^4. \quad (2.25)$$

Logo, o potencial efetivo clássico aproximado obtido na nossa generalização do método de Feynman-Kleinert,

$$W_1(\phi_0) = F_\Omega^{\phi_0} + V_{a^2}(\phi_0) - \frac{\Omega^2(\phi_0)}{2}a^2(\phi_0), \quad (2.26)$$

possui todos os termos dependentes de $\sum_k' \ln \frac{k^2 + \Omega^2}{k^2}$ que, na verdade, é uma soma múltipla, pois estamos trabalhando em d -dimensões. Para que esta expressão faça sentido, é necessário regularizá-la e depois renormalizar a teoria, como faremos em capítulo posterior. Neste ponto, passamos para o limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$), que é o que nos interessa numa teoria de campos a temperatura zero. Neste limite, limite de $T = 0$ no caso unidimensional, como abordamos apenas funções pares em k , podemos fazer a substituição

$$\frac{2}{L^d} \sum_k^+ = \frac{1}{L^d} \sum_k' \approx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \equiv \int_k. \quad (2.27)$$

Incluimos na integral o ponto $k = 0$, porque a mesma não apresenta nenhuma singularidade neste ponto. Logo,

$$a^2 = \frac{\partial}{\partial \Omega^2} \int_k \ln \frac{k^2 + \Omega^2}{k^2} \quad (2.28)$$

e

$$F_{\Omega}^{\phi_0} = \frac{1}{2} \int_k \ln \frac{k^2 + \Omega^2}{k^2}. \quad (2.29)$$

Inserindo (2.25) em (2.26), reescrevemos

$$\begin{aligned} W_1(\phi_0) &= F_{\Omega}^{\phi_0} + \frac{\mu^2}{2} \phi_0^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_0^4 \\ &+ \frac{a^2(\phi_0)}{2} \left[\mu^2 - \Omega^2 + 3\lambda \phi_0^2 + \frac{3\lambda}{2} a^2(\phi_0) \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Capítulo 3

Generalização do Método de Kleinert em Teoria de Campos

Neste capítulo, generalizaremos o método de Kleinert para a teoria de campos.

Para uma teoria de campos em d -dimensões, a função de partição é dada por

$$Z = e^{-L^d F[h=0]} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{A}}, \quad (3.1)$$

onde L^d é o volume do hiper-cubo d -dimensional, o qual corresponde ao volume do sistema. A ação euclidiana é dada por

$$\mathcal{A}[j] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi) - j\phi \right], \quad (3.2)$$

onde $V(\phi) = \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$ é o potencial, $\mu^2 \propto T - T_c$ é o termo de massa, o qual é proporcional à distância que estamos da temperatura crítica T_c (de campo médio), e $-j\phi$ é um termo de fonte adicionado à ação.

Expandimos o potencial em torno de $\varphi \equiv \delta\phi = \phi - \phi_0$

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{dV(\phi_0)}{d\phi_0} \varphi + \frac{d^2V(\phi_0)}{d\phi_0^2} \frac{\varphi^2}{2!} + \dots$$

e introduzimos o parâmetro variacional $\Omega^2(\phi_0) \equiv \Omega^2$, somando e subtraindo o termo $\frac{\Omega^2}{2}\varphi^2$ à ação. Assim,

$$\mathcal{A}[j] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{\Omega^2}{2} \varphi^2 - \frac{\Omega^2}{2} \varphi^2 \right.$$

$$\begin{aligned}
& + V(\phi_0) + \frac{dV(\phi_0)}{d\phi_0}\varphi + \frac{d^2V(\phi_0)}{d\phi_0^2}\frac{\varphi^2}{2!} \\
& + \left. \frac{d^3V(\phi_0)}{d\phi_0^3}\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{d^4V(\phi_0)}{d\phi_0^4}\frac{\varphi^4}{4!} - j\varphi - j\phi_0 \right\}. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Por outro lado, o termo $\frac{dV(\phi_0)}{d\phi_0}\varphi$ não contribui na integração, $\partial_\mu\varphi = \partial_\mu\phi$, e $\partial_\mu\phi_0 = 0$. Além disso, para o potencial $V(\phi) = \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$, temos

$$\left. \frac{d^2V(\phi_0)}{d\phi_0^2} \right|_{\phi_0} = \mu^2 + 3\lambda\phi_0^2,$$

$$\left. \frac{d^3V(\phi_0)}{d\phi_0^3} \right|_{\phi_0} = 6\lambda\phi_0,$$

e

$$\left. \frac{d^4V(\phi_0)}{d\phi_0^4} \right|_{\phi_0} = 6\lambda.$$

Definimos

$$g_i(\phi_0) \equiv \frac{d^iV(\phi_0)}{d\phi_0^i} - \Omega^2\delta_{i2}$$

e renomeamos o parâmetro variacional

$$\tilde{\Omega}^2 \equiv \Omega^2 + g_2. \quad (3.4)$$

Deste modo, a ação é reescrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[j] &= \mathcal{A}_{cl}[\phi_0] + \int d^d x \left\{ \frac{1}{2}\varphi(-\partial_\mu^2 + \tilde{\Omega}^2)\varphi - j\varphi \right\} \\
&+ \int d^d x \left\{ \frac{g_3}{3!}\varphi^3 + \frac{g_4}{4!}\varphi^4 \right\}, \quad (3.5)
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{A}_{cl}[\phi_0] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_0)^2 + V(\phi_0) - j\phi_0 \right\}.$$

Definimos também a matriz funcional

$$D_{xx'} = D(x, x') \equiv (-\partial_x^2 + \tilde{\Omega}^2)\delta^d(x - x'); \quad (3.6)$$

com $x - x' \in$ à "caixa" de lado L , cuja inversa funcional é a função de Green euclidiana

$$G_{xx'} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + \Omega^2} e^{-ik(x-x')}. \quad (3.7)$$

Assim, a função de partição correspondente é reescrita como

$$\begin{aligned} Z[j] &= \int \mathcal{D}\varphi e^{-\mathcal{A}_{cl}[\phi_0]} e^{-\int d^d x \left\{ \frac{g_3}{3!} \varphi^3 + \frac{g_4}{4!} \varphi^4 \right\}} \\ &\times e^{-\int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \varphi D_{xx'} \varphi - j\varphi \right\}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Podemos fazer a substituição

$$e^{-\int d^d x \left\{ \frac{g_3}{3!} \varphi^3 + \frac{g_4}{4!} \varphi^4 \right\}} \longrightarrow e^{-\int d^d x \left\{ \frac{g_3}{3!} \frac{\delta^3}{\delta j^3(x)} + \frac{g_4}{4!} \frac{\delta^4}{\delta j^4(x)} \right\}} \quad (3.9)$$

e adotando a seguinte notação:

$$\begin{aligned} j_x &\equiv j(x), \\ \frac{\delta}{\delta j_x} &\equiv \frac{\delta}{\delta j(x)}, \\ j_x G_{xx'} j_{x'} &\equiv \int d^d x j(x) G(x, x') j(x'), \\ \int_k &\equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}, \end{aligned}$$

em que todas as integrações em $d^d x$ ficam implícitas, após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned} Z[j] = e^{-L^d W_2} &= \int \frac{d\phi_0}{\sqrt{2\pi L^d}} e^{-\mathcal{A}_{cl}[\phi_0]} \int \mathcal{D}\varphi' e^{-\frac{1}{2} \varphi'_x D_{xx'} \varphi'_{x'}} \\ &\times e^{-\left\{ \frac{g_3}{3!} \frac{\delta^3}{\delta j_x^3} + \frac{g_4}{4!} \frac{\delta^4}{\delta j_x^4} \right\}} e^{\frac{1}{2} j_{x_1} G_{x_1 x_2} j_{x_2}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde

$$\varphi'_x \equiv \varphi_x - G_{xy} j_y, \quad (3.11)$$

e os dois primeiros termos levam, respectivamente, à $e^{-L^d V_{cl}(\phi_0)}$, onde $V_{cl}(\phi_0) = \frac{\mu^2}{2} \phi_0^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_0^4$, e à função de partição da teoria livre com massa $\tilde{\Omega}$.

Expandindo as duas últimas exponenciais, obtemos

$$\begin{aligned}
 & e^{-\left\{ \frac{g_3}{3!} \frac{\delta^3}{\delta j_x^3} + \frac{g_4}{4!} \frac{\delta^4}{\delta j_x^4} \right\}} e^{\frac{1}{2} j_{x_1} G_{x_1 x_2} j_{x_2}} = \\
 & 1 - \frac{g_4}{4!} \frac{\delta^4}{\delta j_x^4} \frac{1}{2} \frac{1}{4} j_1 G_{12} j_2 j_3 G_{34} j_4 \\
 & + \frac{1}{2} \frac{g_3^2}{3!3!} \frac{\delta^6}{\delta j_{x_1}^3 \delta j_{x_2}^3} \frac{1}{3!} \frac{1}{8} j_1 G_{12} j_2 j_3 G_{34} j_4 j_5 G_{56} j_6 \\
 & + \frac{1}{2} \frac{g_4^2}{4!4!} \frac{\delta^8}{\delta j_{x_1}^4 \delta j_{x_2}^4} \frac{1}{4!} \frac{1}{16} j_1 G_{12} j_2 j_3 G_{34} j_4 j_5 G_{56} j_6 j_7 G_{78} j_8 + \dots \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Reagrupamos estes termos numa exponencial, o que nos leva a uma expansão em cumulantes na qual temos apenas diagramas conexos. Conforme estudamos anteriormente, no caso unidimensional (oscilador anarmônico), a cada termo associamos um diagrama de Feynman. Assim, aplicamos as mesmas regras de emparelhamento de derivadas e descartamos os diagramas redutíveis. A cada vértice associamos fatores $\frac{g_i}{i!}$ onde i é o número de pernas que saem daquele. Além disso, no limite termodinâmico, temos

$$a^2 \equiv G_{xx} = \int_k \frac{1}{k^2 + \Omega^2} \equiv I_0 \quad (3.13)$$

e

$$F_{\tilde{\Omega}}^{\phi_0} = \frac{1}{2} \int_k \ln \frac{k^2 + \tilde{\Omega}^2}{k^2} \equiv I_1. \quad (3.14)$$

Assim, chegamos a uma expressão para o potencial efetivo clássico aproximado, W_2 , que é equivalente à do caso unidimensional, na sua forma. Diagramaticamente, encontramos:

$$\begin{aligned}
 W_2 = V_{cl} & - \frac{1}{2L^d} \text{ (diagrama 1) } + \frac{1}{L^d} \text{ (diagrama 2) } \\
 & - \frac{1}{2L^d} \{ \text{diagrama 3} + \text{diagrama 4} + \text{diagrama 5} \},
 \end{aligned}$$

3
6
24
72

onde

$$-\frac{1}{2L^d} \textcircled{\tilde{\Omega}} \equiv \frac{1}{2} \int_k \ln \frac{k^2 + \tilde{\Omega}^2}{k^2} \equiv I_1(\tilde{\Omega}),$$

$$\frac{1}{L^d} \textcircled{\tilde{\Omega}}_3 = \frac{g_4}{4!L^d} \int d^d x \, 3 (G_{xx})^2 = \frac{g_4}{8} \left[\int_k \frac{1}{k^2 + \tilde{\Omega}^2} \right]^2 \equiv \frac{g_4}{8} (I_0(\tilde{\Omega}))^2,$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^d} \textcircled{\tilde{\Omega}}_1 &= \frac{g_2}{2L^d} \int d^d x \, G_{xx} \\ &= \frac{g_2}{2} \int_k \frac{1}{k^2 + \tilde{\Omega}^2} \equiv \frac{g_2}{2} I_0(\tilde{\Omega}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^d} \textcircled{\tilde{\Omega}}_6 &= \frac{g_3^2}{3!3!L^d} \int \int d^d x \, d^d x' \, 6 (G_{xx'})^3 \\ &= \frac{g_3^2}{6} \int_k \int_q \frac{1}{k^2 + \tilde{\Omega}^2} \frac{1}{q^2 + \tilde{\Omega}^2} \frac{1}{(k+q)^2 + \tilde{\Omega}^2} \equiv \frac{g_3^2}{6} I_3(\tilde{\Omega}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^d} \textcircled{\tilde{\Omega}}_{24} &= \frac{g_4^2}{4!4!L^d} \int \int d^d x \, d^d x' \, 24 (G_{xx'})^4 \\ &= \frac{g_4^2}{24} \int_k \int_q \int_p \frac{1}{k^2 + \tilde{\Omega}^2} \frac{1}{q^2 + \tilde{\Omega}^2} \frac{1}{p^2 + \tilde{\Omega}^2} \frac{1}{(k+q+p)^2 + \tilde{\Omega}^2} \equiv \frac{g_4^2}{24} I_4(\tilde{\Omega}), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^d} \textcircled{\tilde{\Omega}}_{72} &= \frac{g_4^2}{4!4!L^d} \int \int d^d x \, d^d x' \, 72 G_{xx} (G_{xx'})^2 G_{x'x'} \\ &= \frac{g_4^2}{8} \left[\int_k \frac{1}{(k^2 + \tilde{\Omega}^2)^2} \right] \left[\int_q \frac{1}{q^2 + \tilde{\Omega}^2} \right]^2 \equiv \frac{g_4^2}{8} I_2(\tilde{\Omega}) (I_0(\tilde{\Omega}))^2, \end{aligned}$$

pois

$$\frac{1}{2L^d} \circlearrowleft = \frac{g_2^2}{2L^d} \int \int d^d x d^d x' (G_{xx'})^2 = \frac{g_2^2}{2} \int_k \frac{1}{(k^2 + \Omega^2)^2} \equiv \frac{g_2^2}{2} I_2(\Omega).$$

Observe que o fator $\frac{1}{L^d}$ é cancelado com uma $\int d^d x$ em cada um dos diagramas.

O problema com estas expressões é que elas divergem em $d = 3$. Portanto, precisamos regularizar a teoria antes de prosseguir com os cálculos. Usaremos em todo este trabalho o método de *regularização dimensional* (RD), desenvolvido por Bollini e Giambiagi [22] e por 't Hooft e Veltman [23] (Veja também o livro de Amit [1] para uma introdução mais didática).

Como é feito usualmente em fenômenos críticos [1], trabalharemos em dimensão $4 - \epsilon$, [24]. As divergências encontradas na teoria não-regularizada aparecem como pólos da forma $(\frac{1}{\epsilon})^n$ na teoria regularizada. Precisaremos, mais tarde, achar um procedimento para eliminar estes pólos. Ou seja, precisaremos renormalizar a teoria. Este importante ponto será abordado no capítulo seguinte.

Em termos das integrais, o potencial W_2 é escrito como:

$$W_2 = V_{cl}(\phi_0) + I_1(\tilde{\Omega}) + \frac{g_4}{8} (I_0(\tilde{\Omega}))^2 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{g_3^2}{6} I_3(\tilde{\Omega}) + \frac{g_4^2}{24} I_4(\tilde{\Omega}) + \frac{g_4^2}{8} I_2(\tilde{\Omega}) (I_0(\tilde{\Omega}))^2 \right\}. \quad (3.15)$$

Os três primeiros termos da expressão de W_2 coincidem, obviamente, com a generalização feita para o método de Feynman-Kleinert.

Para recuperar os diagramas com vértices g_2 , expandimos os termos em potências de g_2 , no nosso caso, até segunda ordem. Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} \circlearrowleft &= \circlearrowleft - 2 \circlearrowleft + \circlearrowleft \\ \tilde{\Omega} \circlearrowleft \circlearrowleft &= \circlearrowleft \circlearrowleft - \circlearrowleft \circlearrowleft \end{aligned}$$

$\frac{2}{2}$
 $\frac{3}{3}$
 $\frac{3}{24}$

Ou seja,

$$I_1(\tilde{\Omega}) = I_1(\Omega) + \frac{g_2}{2} I_0(\Omega) - \frac{g_2^2}{4} I_2(\Omega) \quad (3.16)$$

e

$$(I_0(\tilde{\Omega}))^2 = (I_0(\Omega))^2 - 2g_2 I_0(\Omega) I_2(\Omega). \quad (3.17)$$

Deste modo, reescrevemos o potencial (3.15) em função de Ω :

$$\begin{aligned} W_2(\phi_0) = & \frac{\mu^2}{2} \phi_0^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_0^4 + I_1(\Omega) + \frac{I_0(\Omega)}{2} \left[g_2 + \frac{g_4}{4} I_0(\Omega) \right] \\ & - \left\{ \frac{I_2(\Omega)}{4} \left[g_2 + \frac{g_4}{2} I_0(\Omega) \right]^2 + \frac{g_3^2}{2} \frac{I_3(\Omega)}{6} + \frac{g_4^2}{2} \frac{I_4(\Omega)}{24} \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para $d = 1$, reobtemos os resultados de Kleinert (1.86), com $I_0 = a^2$, $I_1 = F_{\Omega}^{x_0}$, $I_2 = \frac{a^4}{\Omega}$, $I_3 = \frac{2}{3} \frac{a^6}{\Omega}$, e $I_4 = \frac{1}{2} \frac{a^8}{\Omega}$. (Veja [16], p. 276, $T = 0$, até $\mathcal{O}(\lambda^2)$). Neste caso, todos os termos de W_2 são reescritos em função de $a^2 = \frac{1}{2\Omega}$.

Observe que $\frac{1}{2} I_0 = \frac{dI_1}{d\Omega^2}$ e $I_2 = -\frac{dI_0}{d\Omega^2}$. Substituindo os g_i 's, encontramos

$$\begin{aligned} W_2(\phi_0) = & \frac{\mu^2}{2} \phi_0^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_0^4 + I_1(\Omega) + \frac{I_0(\Omega)}{2} \left[\mu^2 - \Omega^2 + 3\lambda\phi_0^2 \right. \\ & \left. + \frac{6\lambda}{4} I_0(\Omega) \right] - \left\{ \frac{I_2(\Omega)}{4} \left[\mu^2 - \Omega^2 + 3\lambda\phi_0^2 + \frac{6\lambda}{2} I_0(\Omega) \right]^2 \right. \\ & \left. + \frac{36\lambda^2 \phi_0^2}{2} \frac{I_3(\Omega)}{6} + \frac{36\lambda^2}{2} \frac{I_4(\Omega)}{24} \right\}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

ou, em forma diagramática,

$$\begin{aligned} \beta W_2(x_0) = & \beta V(x_0) - \frac{1}{2} \text{ (diagrama: círculo)} + \left(\frac{1}{2} \text{ (diagrama: círculo com ponto)} + \frac{1}{8} \text{ (diagrama: dois círculos)} \right) \\ & - \frac{1}{2!} \left\{ \frac{1}{2} \text{ (diagrama: círculo com dois pontos)} + \frac{1}{2} \text{ (diagrama: dois círculos com pontos)} + \frac{1}{6} \text{ (diagrama: círculo com linha)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{24} \text{ (diagrama: círculo com duas linhas)} + \frac{1}{8} \text{ (diagrama: três círculos)} \right\}. \end{aligned}$$

Neste ponto, tivemos a agradável surpresa de verificar que o potencial efetivo, obtido com a generalização do método de Kleinert, coincide com o

obtido por Stevenson [17], encontrado através de uma técnica superficialmente bem diferente.

Fazendo as seguintes mudanças: $I_i = \frac{1}{i!} I_i^s$, com $i = 2, 3$ e 4 , onde o índice s indica as integrais definidas por Stevenson [17], $\mu^2 = m_B^2$, $\frac{\lambda}{4} = \lambda_B$, e $\phi_0^2 = \varphi^2$, obtemos a mesma expressão encontrada por Stevenson em [17], com $\delta = 1$. No método proposto por Stevenson, a partir da ação euclidiana

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int d^d x \left[\frac{1}{2} \phi(x) (-\partial^2 + m^2) \phi(x) + \lambda \phi^4(x) \right] \\ &= \int d^d x \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi] \end{aligned} \quad (3.20)$$

e $\hat{\phi}(x) = \phi(x) - \phi_0$, define-se

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int})_{\delta=1}$$

em que \mathcal{L}_0 é a lagrangeana da teoria livre com massa Ω para o campo $\hat{\phi}$,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \hat{\phi}(x) (-\partial^2 + \Omega^2) \hat{\phi}(x),$$

e a lagrangeana de interação é

$$\mathcal{L}_{int} = \delta(v_0 + v_1 \hat{\phi} + v_2 \hat{\phi}^2 + v_3 \hat{\phi}^3 + v_4 \hat{\phi}^4),$$

com

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{2} m_B^2 \phi_0^2 + \lambda_B \phi_0^4, \\ v_1 &= (m_B^2 + 4\lambda_B \phi_0^2) \phi_0, \\ v_2 &= \frac{1}{2} (m_B^2 - \Omega^2) + 6\lambda_B \phi_0^2, \\ v_3 &= 4\lambda_B \phi_0, \\ v_4 &= \lambda_B, \end{aligned}$$

e δ é um parâmetro de expansão introduzido em \mathcal{L}_{int} para tornar evidente a ordem da aproximação. Os v_i são chamados por Stevenson de “constantes de acoplamento”, dependentes de ϕ_0 , e são equivalentes ao $V_{cl}(x_0)$ e aos g_i definidos por Kleinert. Faz-se um cálculo perturbativo em δ , colocando $\delta = 1$

ao final, mas não há nenhuma expansão em λ [17]. A expressão do potencial efetivo em segunda ordem, obtido por Stevenson [17] é:

$$\begin{aligned}
 V^{(2)}(\phi, \Omega) = & I_1(\Omega) + \delta \left\{ \frac{1}{2} m_B^2 \phi^2 + \lambda_B \phi^4 + \frac{1}{2} I_0(\Omega) [m_B^2 - \Omega^2 + 12\lambda_B \phi^2 \right. \\
 & \left. + 6\lambda_B I_0(\Omega)] \right\} - \delta^2 \left\{ \frac{1}{8} I_2(\Omega) [m_B^2 - \Omega^2 + 12\lambda_B \phi^2 \right. \\
 & \left. + 12\lambda_B I_0(\Omega)]^2 + 8\lambda_B^2 \phi^2 I_3(\Omega) + \frac{1}{2} \lambda_B^2 I_4(\Omega) \right\}, \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

fazendo $\delta = 1$ e usando as relações já estabelecidas entre as nossas definições e as de Stevenson, verificamos que o nosso potencial efetivo coincide com o de Stevenson e, por conseguinte, com o de Okopinska [3], obtido através de uma terceira técnica (expansão otimizada) e citado por Stevenson em [17].

Observe que o método de Kleinert é “mais natural”, no sentido de que não é necessário introduzir à mão nenhum parâmetro.

Assim, como o nosso W_2 produz o limite correto em $d = 1$ e coincide com o de Stevenson em teoria de campos, garantimos que os nossos resultados estão corretos e passamos para os próximos passos da generalização: renormalizar as integrais de W_2 , que são divergentes para $d \geq 2$, e obter $\Omega_{\text{ótima}}$. Discutiremos adiante qual destes dois passos deve ser feito primeiro.

Capítulo 4

Métodos de Renormalização de W_1

4.1 Sobre a renormalização

O que torna a generalização da teoria de Kleinert não-trivial é a necessidade de renormalizar a teoria. Este ponto foi abordado de várias maneiras, tendo em vista duas importantes questões que precisam ser examinadas:

1. Uma vez obtido o potencial efetivo aproximado, o que deve ser feito antes:
 - Obter $\Omega_{\text{ótima}}$ com a teoria regularizada e, só então, renormalizá-la, ou
 - Tornar finitos os parâmetros da teoria e, depois, obter $\Omega_{\text{ótima}}$ finita?
2. Qual esquema usar?

Apresentamos aqui dois esquemas diferentes de renormalização que obedecem a ordens inversas da questão 1.

Do nosso ponto de vista, seria mais interessante renormalizar a teoria **antes** de determinar $\Omega_{\text{ótima}}$. Conforme vimos no final do capítulo 1, Kleinert

obtem $\Omega_{\text{ótima}}$ numericamente, mesmo para $d = 1$. Se primeiro obtemos uma teoria finita, temos a possibilidade de abordá-la numericamente.

4.2 Primeiro estudo para W_1

Nesta seção vamos primeiramente substituir o valor de $\Omega_{\text{ótima}}$ na expressão de W_1 para, depois, renormalizá-lo.

Vamos considerar apenas os termos de $W_1(\phi_0)$ da expressão (3.19), ou seja,

$$W_1(\phi_0) = \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_0^4 + I_1(\Omega) + \frac{I_0(\Omega)}{2} \left[\mu^2 - \Omega^2 + 3\lambda\phi_0^2 + \frac{6\lambda}{4}I_0(\Omega) \right]. \quad (4.1)$$

Fazendo-se $\frac{\partial W_1}{\partial \Omega}$, verifica-se que as soluções para $\Omega_{\text{ótima}} \equiv \Omega^*$ são $\Omega^* = 0$ (solução trivial) e

$$(\Omega^*)^2 = \mu^2 + 3\lambda\phi_0^2 + 3\lambda I_0(\Omega^*). \quad (4.2)$$

Substituindo na equação de W_1 , obtemos

$$W_1^*(\phi_0) = \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_0^4 + I_1^* - \frac{3\lambda}{4}[I_0^*]^2, \quad (4.3)$$

na qual definimos $W_1^* \equiv W_1(\Omega^*)$, $I_1^* \equiv I_1(\Omega^*)$, e $I_0^* \equiv I_0(\Omega^*)$.

Com (4.2), encontramos

$$\frac{\partial \Omega^*}{\partial \phi_0} = \frac{3\lambda\phi_0}{\Omega^*(1 + 3\lambda I_0^*)}, \quad (4.4)$$

que é utilizado para o cálculo de $H = \frac{\partial W_1^*(\phi_0)}{\partial \phi_0}$, após o qual temos

$$H = [\Omega^*(\phi_0)]^2\phi_0 - 2\lambda\phi_0^3. \quad (4.5)$$

Ressaltamos que até este ponto não foi feita nenhuma aproximação.

A forma como tratamos Ω^* é que determinará nossos resultados. Fazendo-se uma expansão de Ω^* em torno de $\phi_0 = 0$, encontra-se uma expressão de campo médio para H .

Por outro lado, se iteramos uma vez a equação para Ω^* (4.2), temos

$$(\Omega^*)^2 = \mu^2 + 3\lambda\phi_0^2 + 3\lambda \int_k \frac{1}{k^2 + \mu^2 + 3\lambda\phi_0^2}. \quad (4.6)$$

Verifica-se que a integral de (4.6), em $d = 4 - \epsilon$, é dada por (através da relação de [1], p. 223)

$$\int_k \frac{1}{k^2 + \mu^2 + 3\lambda\phi_0^2} = -\frac{1}{\epsilon} [\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2] \left[1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2) \right]. \quad (4.7)$$

Colocando este resultado e (4.2) em (4.5), temos

$$\begin{aligned} H &= \mu^2\phi_0 + \lambda\phi_0^3 - \frac{3\lambda}{\epsilon}\phi_0 [\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2] \\ &+ \frac{3\lambda\phi_0}{2} [\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2] \ln(\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Utilizando a subtração minimal, ou seja, definindo a massa e a constante de acoplamento renormalizadas, respectivamente, como sendo

$$t = \mu^2 \left(1 - \frac{3}{\epsilon}\lambda \right), \quad (4.9)$$

e

$$g = \lambda \left(1 - \frac{9}{\epsilon}\lambda \right), \quad (4.10)$$

encontramos a equação de estado

$$H = t\phi_0 + g\phi_0^3 + \frac{3g\phi_0}{2} [t + 3g\phi_0^2] \ln(t + 3g\phi_0^2). \quad (4.11)$$

A seguir, verificaremos que esta é a expressão obtida em 1-loop, no livro de Amit [1].

4.2.1 Obtenção da equação de estado e dos expoentes críticos

Como dividimos a constante de acoplamento por 4 e Amit por 4!, temos $\lambda = \frac{\lambda_{\text{amit}}}{6}$. Para facilitar a comparação com os resultados da teoria de campos,

utilizaremos a convenção de Amit nos cálculos a seguir. O potencial usual em 1-loop na convenção de Amit é dado por ([1], p. 110):

$$U(\phi_0) = \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_0^4 + \frac{1}{2} \int dq \ln \left(q^2 + \mu^2 + \frac{\lambda\phi_0^2}{2} \right). \quad (4.12)$$

A equação de estado é a relação entre o campo magnético H , a magnetização $M = \phi_0$ e a temperatura, proporcional a μ^2 . Assim,

$$H = \frac{\partial U}{\partial \phi_0} = \mu^2 \phi_0 + \frac{\lambda}{6}\phi_0^3 + \frac{\lambda\phi_0}{2} \int dq \frac{1}{q^2 + \mu^2 + \frac{\lambda\phi_0^2}{2}}. \quad (4.13)$$

Usando a relação (ver [1], p. 223)

$$\int dq \frac{1}{(q^2 + 2kq + m^2)^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}d)\Gamma(\alpha - \frac{1}{2}d)}{\Gamma(\alpha)} (m^2 - k^2)^{\frac{d}{2} - \alpha} \quad (4.14)$$

e colocando $d = 4 - \epsilon$, temos

$$\int dq \frac{1}{q^2 + \mu^2 + \frac{\lambda\phi_0^2}{2}} = \frac{1}{2} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \left[\mu^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2\right]^{1 - \frac{\epsilon}{2}}. \quad (4.15)$$

Expandindo a expressão anterior até $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ e substituindo em (4.13), obtemos

$$\begin{aligned} H &= \mu^2 \phi_0 + \frac{\lambda}{6}\phi_0^3 - \frac{\lambda}{2\epsilon} \phi_0 \left[\mu^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2\right] \\ &+ \frac{\lambda\phi_0}{4} \left[\mu^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2\right] \ln \left(\mu^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2\right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Vamos renormalizar os parâmetros de H , utilizando a subtração minimal. Ou seja, vamos considerar

$$\mu^2 = t(1 + ag),$$

e

$$\lambda = g(1 + bg),$$

sendo t e g os parâmetros renormalizados da teoria, e a e b parâmetros que cancelam os pólos em ϵ . Deste modo, fazendo as substituições em H , obtemos $b = \frac{3}{2\epsilon}$ e $a = \frac{1}{2\epsilon}$, até $\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon})$. Isto é,

$$\mu^2 = t \left(1 + \frac{1}{2\epsilon}g\right), \quad (4.17)$$

e

$$\lambda = g \left(1 + \frac{3}{2\epsilon} g \right). \quad (4.18)$$

Logo,

$$\begin{aligned} H &= t\phi_0 + \frac{g}{6}\phi_0^3 + \frac{g\phi_0}{4} \left[t + \frac{g}{2}\phi_0^2 \right] \ln \left(t + \frac{g}{2}\phi_0^2 \right) \\ &= \phi_0 \left[\left(t + \frac{g}{6}\phi_0^2 \right) + \frac{g}{4} \left(t + \frac{g}{2}\phi_0^2 \right) \ln \left(t + \frac{g}{2}\phi_0^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.19)$$

que, a menos do fator da constante de acoplamento, é a mesma expressão (4.11) que encontramos a partir do nosso W_1 com $\Omega_{\text{ótima}}$ aproximado. O ponto fixo é um zero da função $\beta(u)$ [25] e é determinado por meio da equação

$$\beta(u) = -\epsilon \left(\frac{\partial \ln u_0}{\partial u} \right)^{-1} = 0. \quad (4.20)$$

No nosso caso,

$$u_0 = u \left(1 + \frac{3}{2\epsilon} u \right), \quad (4.21)$$

então, o ponto fixo encontrado é

$$u^* = \frac{2}{3}\epsilon.$$

Fazendo $g\phi_0^2 \equiv y$ e $\phi_0 \equiv M$, e usando u^* em (4.19), obtemos

$$H = M \left[\left(t + \frac{y}{6} \right) + \frac{\epsilon}{6} \left(t + \frac{y}{2} \right) \ln \left(t + \frac{y}{2} \right) \right]. \quad (4.22)$$

A equação de estado deve ter a forma [26], [27]

$$H(t, M) = M^\delta h(CtM^{-\frac{1}{\beta}}, u^*).$$

Fazendo $x = ty^{-1/2\beta}$, escrevendo H em termos de x e y , reagrupando os termos convenientemente e considerando-os até $\mathcal{O}(\epsilon)$, obtemos

$$H = My^{1+\frac{\epsilon}{2}} \left\{ xy^{\frac{1}{2\beta}-1-\frac{\epsilon}{3}} + \frac{1}{6} + \frac{\epsilon}{6} \left(x + \frac{1}{2} \right) \ln \left(x + \frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (4.23)$$

Isto nos leva aos seguintes expoentes críticos corrigidos

$$\begin{aligned} \delta &= 3 + \epsilon, \\ \beta &= \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{6}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde δ é o expoente que indica a relação entre a magnetização, M , e H , no ponto crítico para campos magnéticos fracos:

$$M \sim H^{1/\delta}, \quad (4.25)$$

e onde β é o expoente relacionado com a magnetização M , que indica seu comportamento para a região próxima da temperatura crítica T_c . Ou seja [28],

$$M \sim (T_c - T)^\beta. \quad (4.26)$$

Deste modo, a equação de estado é reescrita como

$$H = My^{\frac{1}{2}(\delta-1)} \left\{ \left(x + \frac{1}{6} \right) + \frac{\epsilon}{6} \left(x + \frac{1}{2} \right) \ln \left(x + \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad (4.27)$$

que é a expressão fornecida no livro de Amit.

A equação (4.6) pode ser reescrita como

$$(\Omega^*)^2 = \mu^2 + 3\lambda\phi_0^2 - \frac{3A\lambda}{\epsilon} [(\Omega^*)^2]^{1-\epsilon/2}, \quad (4.28)$$

na qual definimos $A(\epsilon) \equiv -\epsilon \frac{1}{2} \Gamma \left(2 - \frac{\epsilon}{2} \right) \Gamma \left(\frac{\epsilon}{2} - 1 \right)$. Para simplificar a nossa notação, definimos

$$X \equiv \mu^2 + 3\lambda\phi_0^2. \quad (4.29)$$

Iterando a equação (4.28), obtemos

$$(\Omega^*)^2 = X - \frac{3A\lambda}{\epsilon} \left[X - \frac{3A\lambda}{\epsilon} X^{1-\epsilon/2} \right]^{1-\epsilon/2}. \quad (4.30)$$

Substituindo este resultado na equação (4.5), que determina H , chegamos a

$$H = \mu^2\phi_0 + \lambda\phi_0^3 - \frac{3A\lambda\phi_0}{\epsilon} \left[X - \frac{3A\lambda}{\epsilon} X^{1-\epsilon/2} \right]^{1-\epsilon/2}. \quad (4.31)$$

A expansão em ϵ desta equação é problemática devido ao termo $\propto 1/\epsilon$ dentro do parênteses. Se ignoramos o pólo e expandimos de uma maneira ingênua, obtemos

$$H = \mu^2\phi_0 + \lambda\phi_0^3 - \frac{3A\lambda\phi_0}{\epsilon} \left[X \left(1 - \frac{3A\lambda}{\epsilon} + \frac{3A\lambda}{2} \ln X \right) \right] + \frac{3A\lambda\phi_0}{2} \\ \times \left[X \left(1 - \frac{3A\lambda}{\epsilon} + \frac{3A\lambda}{2} \ln X \right) \right] \ln \left[X \left(1 - \frac{3A\lambda}{\epsilon} + \frac{3A\lambda}{2} \ln X \right) \right]. \quad (4.32)$$

Note que o pólo $-\frac{9A^2\lambda^2\phi_0^2}{2\epsilon} \ln x$ não pode ser eliminado através da renormalização de μ^2 , λ ou ϕ_0 .

Isso tudo parece levar a um paradoxo: em princípio deveríamos iterar a equação (4.2) infinitas vezes para chegar a obter $\Omega_{\text{ótima}}$. A cada iteração, deveríamos obter uma aproximação melhor. Entretanto, apenas a primeira iteração funciona. A partir da segunda iteração aparecem problemas sérios com a renormalização da teoria.

Aparentemente, este problema pode ser contornado com a renormalização utilizada por Stevenson e Tarrach [29] para dar sentido a uma nova fase da teoria $\lambda\phi^4$ por eles denominada de fase autônoma [30] - [32]. Esta renormalização consiste em supor que

$$A\lambda = \epsilon\hat{\lambda} \quad (4.33)$$

e em definir

$$\varphi = \sqrt{\epsilon}\phi_0, \quad (4.34)$$

para que o termo $3\lambda\phi_0^2$, que aparece em x , seja finito. Stevenson e Tarrach não estavam interessados em calcular expoentes críticos, mas em investigar questões como a trivialidade da teoria $\lambda\phi^4$. É interessante observar que o ansatz $A\lambda = \epsilon\hat{\lambda}$ faz sentido em fenômenos críticos, nos quais interessam as funções de Green no ponto fixo $u^* \propto \epsilon$. De qualquer forma, como esta renormalização é bastante não-convencional, voltamos para a equação de H , (4.19), obtida com apenas *uma* iteração e para a qual foi obtida a equação de estado convencional.

Usando o ansatz de Stevenson e Tarrach, encontramos

$$\begin{aligned} H_R &= \mu^2\varphi + \hat{\lambda}\varphi^3 - 3\hat{\lambda}\varphi [\mu^2 + 3\hat{\lambda}\varphi^2] \\ &+ \frac{3\epsilon\hat{\lambda}\varphi}{2} [\mu^2 + 3\hat{\lambda}\varphi^2] \ln (\mu^2 + 3\hat{\lambda}\varphi^2), \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde $H_R = H\sqrt{\epsilon}$. Observe que aparece um ϵ multiplicando o termo logarítmico. Em analogia ao que fizemos anteriormente, definimos

$$t = \mu^2 (1 - 3\hat{\lambda}), \quad (4.36)$$

e

$$\hat{g} = \hat{\lambda} (1 - 9\hat{\lambda}). \quad (4.37)$$

Assim,

$$H_R = t\varphi + \hat{g}\varphi^3 + \frac{3\epsilon\hat{g}\varphi}{2}(t + 3\hat{g}\varphi^2) \ln(t + 3\hat{g}\varphi^2). \quad (4.38)$$

Como fica o ponto fixo? Para isto precisamos lembrar que o ponto fixo é a raiz da função

$$\beta(u) = -\frac{\epsilon}{\left(\frac{\partial \ln u_0}{\partial u}\right)_\lambda}, \quad (4.39)$$

na qual $u \equiv k^{-\epsilon}g$ e $u_0 \equiv k^{-\epsilon}\lambda$. Podemos rederivar a função β em termos de variáveis $\hat{\lambda}$ e \hat{g} , obtidas de λ e de g , extraíndo-se um fator ϵ . O resultado é que o ponto fixo, que é dado, na teoria usual, por $u^* = \frac{\epsilon}{9}$, passa a ser $\hat{u}^* = \frac{1}{9}$. O ϵ que falta em \hat{u}^* aparece explicitamente na nova equação para H , (4.35). Desta forma reobtemos os expoentes críticos usuais.

Uma vez convencidos de que a renormalização proposta por Stevenson e Tarrach se constitui em uma alternativa viável, voltamos para a equação de H com duas iterações (4.32) que, com a nova renormalização, é reescrita como

$$H_R = \mu^2\varphi + \hat{\lambda}\varphi^3 - 3\hat{\lambda}\varphi \left[X_R \left(1 - 3\hat{\lambda} + \frac{3\hat{\lambda}\epsilon}{2} \ln X_R \right) \right] + \frac{3\epsilon\hat{\lambda}\varphi}{2} \left[X_R \left(1 - 3\hat{\lambda} + 3\hat{\lambda} \ln X_R \right) \right] \ln \left[X_R \left(1 - 3\hat{\lambda} + \frac{3\hat{\lambda}}{2} \ln X_R \right) \right]. \quad (4.40)$$

O problema com o pólo logarítmico foi resolvido. A partir desta nova expressão os novos expoentes críticos podem ser obtidos.

4.3 Segundo estudo para W_1

Nesta seção, vamos primeiramente tornar W_1 finito para, então, substituir o valor de $\Omega_{\text{ótima}}$ na expressão resultante.

O potencial efetivo clássico aproximado, obtido na nossa generalização do método de Feynman-Kleinert,

$$W_1(\phi_0) = F_\Omega^{\phi_0} + V_{a^2}(\phi_0) - \frac{\Omega^2(\phi_0)}{2} a^2(\phi_0), \quad (4.41)$$

pode ser reescrito em termos de $F_\Omega^{\phi_0}$. Assim,

$$a^2 = \frac{\partial}{\partial \Omega^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln \frac{k^2 + \Omega^2}{k^2} \quad (4.42)$$

e

$$F_{\Omega}^{\phi_0} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln \frac{k^2 + \Omega^2}{k^2}. \quad (4.43)$$

Antes de efetuar a integral, fazemos uma mudança de variável, de tal modo que

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln \frac{k^2 + \Omega^2}{k^2} = \Omega^d \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \ln \frac{q^2 + 1}{q^2}. \quad (4.44)$$

Para $0 < d < 2$, basta colocar a integral em termos de coordenadas esféricas (sendo r o raio da esfera d -dimensional) [23] e usar a relação 4.295.40 do Gradshteyn [18]. O resultado obtido é:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \ln \frac{q^2 + 1}{q^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{\frac{1}{2}d+1}}{d\Gamma(d/2)} \csc \frac{d\pi}{2}. \quad (4.45)$$

Esta expressão nos permite definir um prolongamento analítico do lado esquerdo da equação (4.45) para outras dimensões além de 1 (regularização dimensional).

Vamos denotar

$$\alpha \equiv \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \ln \frac{q^2 + 1}{q^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{\pi^{\frac{1}{2}d+1}}{d\Gamma(d/2)} \csc \frac{d\pi}{2} = \frac{1}{d(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right), \quad (4.46)$$

pois $\frac{\pi}{\sin \nu\pi} = \Gamma(\nu)\Gamma(1 - \nu)$, e prosseguir com os cálculos. Assim,

$$a^2(\phi_0) = \alpha \Omega^{d-2} d \quad (4.47)$$

e

$$F_{\Omega}^{\phi_0} = \alpha \Omega^d. \quad (4.48)$$

Logo, a expressão generalizada do potencial efetivo clássico, em d -dimensões, é dada por

$$\begin{aligned} W_1(\phi_0) &= \left(1 - \frac{d}{2}\right) \alpha \Omega^d + 3\lambda \left(\frac{d\alpha \Omega^{d-2}}{2}\right)^2 + (\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2) \frac{d}{2} \alpha \Omega^{d-2} \\ &+ \frac{\mu^2}{2} \phi_0^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_0^4. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Prosseguindo, como α muda de sinal no intervalo $0 < d < 4$, sendo $\alpha > 0$ para $0 < d < 2$ e $\alpha < 0$ para $2 < d < 4$, é mais conveniente trabalhar com $|\alpha|$:

$$W_1(\phi_0) = \pm \left(\frac{d}{2} - 1 \right) |\alpha| \Omega^d + \frac{3}{4} d^2 \lambda (|\alpha| \Omega^{d-2})^2 \mp (\mu^2 + 3\lambda \phi_0^2) \frac{d}{2} |\alpha| \Omega^{d-2} + \frac{\mu^2}{2} \phi_0^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_0^4 - h \phi_0. \quad (4.50)$$

Para eliminar os α 's das expressões anteriores, escolhemos o seguinte reescalonamento dos parâmetros:

$$\begin{aligned} \Omega_R &= |\alpha|^{1/d} \Omega, \\ \phi_{0R} &= |\alpha|^{-1/d} \phi_0, \\ \mu_R^2 &= |\alpha|^{2/d} \mu^2, \\ g &= |\alpha|^{4/d} \lambda. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Então, para $\alpha > 0$, ou $0 < d < 2$:

$$W_1(\phi_0) = \left(1 - \frac{d}{2} \right) \Omega_R^d + \frac{3}{4} d^2 g \Omega_R^{2d-4} + (\mu_R^2 + 3g\phi_{0R}^2) \frac{d}{2} \Omega_R^{d-2} + \frac{\mu_R^2}{2} \phi_{0R}^2 + \frac{g}{4} \phi_{0R}^4, \quad (4.52)$$

e, para $\alpha < 0$, ou $2 < d < 4$,

$$W_1(\phi_0) = - \left(1 - \frac{d}{2} \right) \Omega_R^d + \frac{3}{4} d^2 g \Omega_R^{2d-4} - (\mu_R^2 + 3g\phi_{0R}^2) \frac{d}{2} \Omega_R^{d-2} + \frac{\mu_R^2}{2} \phi_{0R}^2 + \frac{g}{4} \phi_{0R}^4. \quad (4.53)$$

A partir daqui, as quantidades reescaladas são escritas sem o índice R , para não sobrecarregar a notação.

Para $d = 1$, usando a expressão (4.52), temos

$$W_{1,d=1}(\phi_0) = \frac{1}{2} \Omega + \frac{3}{4} g \Omega^{-2} + (\mu_R^2 + 3g\phi_{0R}^2) \frac{\Omega^{-1}}{2} + \frac{\mu^2}{2} \phi_0^2 + \frac{g}{4} \phi_0^4. \quad (4.54)$$

Por outro lado, no capítulo 1, encontramos a equação (1.86) para $W_2(x_0)$, no limite termodinâmico, com a qual, usando as relações (1.85) podemos obter

W_1 . Assim, para o caso unidimensional, tínhamos

$$W_1(x_0) = \frac{\omega^2}{2}x_0^2 + \frac{g}{4}x_0^4 + \frac{\Omega}{4} + 3g\frac{1}{16\Omega^2} + \frac{1}{4\Omega}(\omega^2 + 3gx_0^2). \quad (4.55)$$

Escolhendo-se as seguintes mudanças de variáveis para W_1 , com $d = 1$, reescalado (4.54)

$$\begin{aligned} \Omega_R &= \frac{\Omega}{2}, \\ g &= \frac{g}{16}, \\ \mu_R &= \frac{\omega}{2}, \\ \phi_{0R} &= 2x_0, \end{aligned} \quad (4.56)$$

chegamos à expressão (4.55) para W_1 não-reescalado. Tendo verificado que o nosso reescalamento leva ao W_1 correto no caso $d = 1$, vamos estudar agora o caso $2 < d < 4$.

Tomando $\frac{\partial W_1}{\partial \Omega}$ em (4.53) e igualando o resultado a zero, obtemos a equação que determina $\Omega_{\text{ótima}} \equiv \Omega^*$:

$$\frac{d(d-2)}{2}\Omega^{d-3}[\Omega^2 - (\mu^2 + 3g\phi_0^2) + 3dg\Omega^{d-2}] = 0, \quad (4.57)$$

cujas soluções são $\Omega^* = 0$ (solução trivial) e

$$(\Omega^*)^2 - (\mu^2 + 3g\phi_0^2) + 3dg(\Omega^*)^{d-2} = 0. \quad (4.58)$$

Usando a solução não-trivial (4.58), encontramos

$$\frac{\partial \Omega^*}{\partial \phi_0} = \frac{6g\phi_0}{2\Omega^* + 3gd(d-2)(\Omega^*)^{d-3}}. \quad (4.59)$$

A equação de estado, dada por $H = \frac{\partial W_1}{\partial \phi_0}$, é obtida a partir de (4.53), usando-se as relações (4.58) e (4.59). Deste modo,

$$H = \mu^2\phi_0 + g\phi_0^3 - 3dg\phi_0(\Omega^*)^{d-2}. \quad (4.60)$$

Da equação (4.58), encontramos

$$3dg(\Omega^*)^{d-2} = \mu^2 + 3g\phi_0^2 - (\Omega^*)^2, \quad (4.61)$$

que é inserida em (4.60). Assim, temos

$$H = (\Omega^*)^2 \phi_0 - 2g\phi_0^3. \quad (4.62)$$

Para eliminar o fator d em (4.58), redefinimos $\phi_0 = \sqrt{d}\phi'_0$, $g = \frac{g'}{d}$ e $H = \sqrt{d}H'$. Omitindo as linhas, encontramos

$$H = (\Omega^*)^2 \phi_0 - 2g\phi_0^3, \quad (4.63)$$

e

$$(\Omega^*)^2 = \mu^2 + 3g\phi_0^2 - 3g(\Omega^*)^{d-2}, \quad (4.64)$$

que coincidem, respectivamente, com as equações (4.5) e (4.2). Observe que o sinal no último termo de (4.64) surge quando colocamos a expressão de W_1 em termos de $|\alpha|$ e reescalamos em seguida. Ou seja, o último termo de (4.2) é negativo para $2 < d < 4$ e, portanto, é equivalente ao de (4.64).

Fazendo $(\Omega^*)^2 \equiv Y$ e $\mu^2 + 3g\phi_0^2 \equiv X$, reescrevemos (4.63) e (4.64) como

$$H = Y\phi_0 - 2g\phi_0^3, \quad (4.65)$$

e

$$Y - X + 3gY^{\frac{d}{2}-1} = 0. \quad (4.66)$$

Tomando $d = 4 - \epsilon$ na equação (4.66), encontramos

$$Y = \frac{X}{1 + 3gY^{-\frac{\epsilon}{2}}} = X[1 - 3gY^{-\frac{\epsilon}{2}}] + \mathcal{O}(g^2). \quad (4.67)$$

Expandindo $Y^{-\frac{\epsilon}{2}}$ até ordem ϵ^2 , temos

$$Y = X - 3gX \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln Y + \frac{\epsilon^2}{8} \ln Y \right). \quad (4.68)$$

Considerando $\ln Y \approx \ln X$, pois os mesmos são multiplicados por g , substituindo este resultado em (4.65), e colocando $X = \mu^2 + 3g\phi_0^2$, obtemos

$$\begin{aligned} H &= \mu^2(1 - 3g)\phi_0 + g(1 - 9g)\phi_0^3 + \frac{3\epsilon}{2}g\phi_0(\mu^2 + 3g\phi_0^2) \ln(\mu^2 + 3g\phi_0^2) \\ &\quad - 3g\phi_0 \frac{\epsilon^2}{8}(\mu^2 + 3g\phi_0^2) \ln^2(\mu^2 + 3g\phi_0^2). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Observe que podemos encontrar um valor aproximado para Ω^* de outra forma. Iterando a equação (4.64), temos

$$(\Omega^*)^2 = \mu^2 + 3g\phi_0^2 - 3g(\mu^2 + 3g\phi_0^2)^{\frac{d-2}{2}}. \quad (4.70)$$

Para $d = 4 - \epsilon$, expandindo até $\mathcal{O}(\epsilon)$, obtemos

$$(\Omega^*)^2 = X - 3gX \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln X\right), \quad (4.71)$$

que é inserida na expressão de H .

Até $\mathcal{O}(\epsilon)$, fazendo a renormalização finita:

$$t = \mu^2(1 - 3g), \quad (4.72)$$

e

$$g_R = g(1 - 9g), \quad (4.73)$$

chegamos a

$$H = t\phi_0 + g_R\phi_0^3 + \frac{3g_R\phi_0}{2}\epsilon(t + 3g_R\phi_0^2) \ln(t + 3g_R\phi_0^2), \quad (4.74)$$

que é a expressão (4.38) obtida anteriormente através do ansatz de Stevenson e Tarrach. Portanto, reobtemos também os valores para os expoentes críticos (4.24).

4.3.1 Forma implícita da equação de estado

Vamos mostrar, nesta seção, como obter a forma implícita da equação de estado sem nenhuma aproximação de Ω .

A partir de W_1 reescalado, encontramos a equação de estado

$$H = \mu^2\phi_0 + g\phi_0^3 - 3dg\phi_0(\Omega^*)^{d-2}, \quad (4.75)$$

e a equação para $\Omega_{\text{ótima}}$

$$(\Omega^*)^2 - (\mu^2 + 3g\phi_0^2) + 3dg(\Omega^*)^{d-2} = 0. \quad (4.76)$$

Para eliminar o fator d , redefinimos $\phi_0 = \sqrt{d}\phi'_0$, $g = \frac{g'}{d}$ e $H = \sqrt{d}H'$. Omitindo as linhas, encontramos

$$H = \mu^2\phi_0 + g\phi_0^3 - 3g\phi_0(\Omega^*)^{d-2}, \quad (4.77)$$

e

$$(\Omega^*)^2 - (\mu^2 + 3g\phi_0^2) + 3g(\Omega^*)^{d-2} = 0. \quad (4.78)$$

Por meio da equação (4.77), temos

$$3g\phi_0(\Omega^*)^{d-2} = \mu^2\phi_0 + g\phi_0^3 - H, \quad (4.79)$$

que é substituída na expressão (4.78), levando a

$$\phi_0(\Omega^*)^2 = H + 2g\phi_0^3, \quad (4.80)$$

com a qual podemos reescrever a equação (4.77) e obter a forma implícita da equação de estado:

$$\left(\frac{H}{\phi_0} + 2g\phi_0^2\right) = \mu^2 + 3g\phi_0^2 - 3g\left(\frac{H}{\phi_0} + 2g\phi_0^2\right)^{d/2-1}. \quad (4.81)$$

Colocando $d = 4 - \epsilon$ e expandindo em ϵ , encontramos

$$\begin{aligned} \frac{H}{\phi_0} &= \frac{\mu^2}{1+3g} + \frac{(g-6g^2)}{1+3g}\phi_0^2 \\ &+ \left(\frac{\mu^2 + 3g\phi_0^2}{1+3g}\right)\epsilon \frac{3g}{2+6g} \ln\left(\frac{\mu^2 + 3g\phi_0^2}{1+3g}\right). \end{aligned} \quad (4.82)$$

Definindo as grandezas renormalizadas

$$t \equiv \frac{\mu^2}{1+3g} \quad (4.83)$$

e

$$g_R \equiv \frac{g(1-6g)}{1+3g} \quad (4.84)$$

reobtemos a expressão (4.38)

$$H = t\phi_0 + g_R\phi_0^3 + \frac{3g_R\phi_0}{2}\epsilon(t + 3g_R\phi_0^2) \ln(t + 3g_R\phi_0^2), \quad (4.85)$$

sem ter sido necessário obter o valor $\Omega_{\text{ótima}}$.

4.3.2 O potencial em 1-loop com o nosso reescalonamento

Um aspecto muito interessante é que podemos usar o nosso reescalonamento diretamente no potencial usual em 1-loop [1]. Neste caso, o potencial, escrito em termos da nossa constante de acoplamento λ , é dado por

$$U(\phi_0) = \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_0^4 + \frac{1}{2} \int_k \ln \left(\frac{k^2 + \mu^2 + 3\lambda\phi_0^2}{k^2} \right). \quad (4.86)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$k^2 \rightarrow q^2(\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2) \quad (4.87)$$

e usando a definição (4.46) de α , de modo análogo ao que foi feito anteriormente, encontramos

$$U(\phi_0) = \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_0^4 + (\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2)^{\frac{d}{2}}\alpha, \quad (4.88)$$

em termos de $|\alpha|$, se $0 < d < 2$ ($\alpha > 0$)

$$U(\phi_0) = \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_0^4 + (\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2)^{\frac{d}{2}}|\alpha|, \quad (4.89)$$

e, se $2 < d < 4$ ($\alpha < 0$),

$$U(\phi_0) = \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_0^4 - (\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2)^{\frac{d}{2}}|\alpha|. \quad (4.90)$$

Usando o reescalonamento (4.51) dos parâmetros μ , ϕ_0 e λ , obtemos, para $2 < d < 4$ (omitindo, para simplificar a notação, o índice R nos parâmetros reescalonados):

$$U(\phi_0) = \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{g}{4}\phi_0^4 - (\mu^2 + 3g\phi_0^2)^{\frac{d}{2}}, \quad (4.91)$$

cuja equação de estado é dada por

$$\begin{aligned} H &= \mu^2\phi_0 + g\phi_0^3 - 3gd\phi_0(\mu^2 + 3g\phi_0^2)^{\frac{d}{2}-1} \\ &= \mu^2\phi_0 + g\phi_0^3 - 3gd\phi_0 X^{\frac{d}{2}-1}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Observe que esta expressão se iguala a (4.60), se consideramos $(\Omega^*)^2 \approx \mu^2 + 3g\phi_0^2$ naquela.

Colocando $d = 4 - \epsilon$ e expandindo até $\mathcal{O}(\epsilon)$, obtemos

$$H = \mu^2\phi_0 + g\phi_0^3 - 12g\phi_0(\mu^2 + 3g\phi_0^2) + 6g\phi_0\epsilon(\mu^2 + 3g\phi_0^2) \left[\ln(\mu^2 + 3g\phi_0^2) + \frac{1}{2} \right]. \quad (4.93)$$

Fazendo a mudança de variáveis $g \rightarrow \eta^2 g$ e $\phi_0 \rightarrow \eta^{-1}\phi_0$, que mantém $g\phi_0^2$ constante, e redefinindo $H \rightarrow \frac{1}{\eta}H$, encontramos

$$H = \mu^2\phi_0 + g\phi_0^3 - 12\eta^2 g\phi_0 X + 6\eta^2 g\epsilon\phi_0 X \left(\ln X + \frac{1}{2} \right). \quad (4.94)$$

Como queremos reescrever H na forma (4.35), consideramos $\eta^2 = a + b\epsilon$. Comparando as duas expressões, verificamos que, para $a = \frac{1}{4}$ e $b = \frac{1}{16}$,

$$H = \mu^2\phi_0 + g\phi_0^3 - 3g\phi_0(\mu^2 + 3g\phi_0^2) + \frac{3\epsilon g\phi_0}{2}(\mu^2 + 3g\phi_0^2) \ln(\mu^2 + 3g\phi_0^2), \quad (4.95)$$

que é a expressão (4.35). Por outro lado, para $a = \frac{1}{4}$ e $b = -\frac{1}{16}$, obtemos

$$H = \mu^2\phi_0 + g\phi_0^3 - 3g\phi_0(\mu^2 + 3g\phi_0^2) + \frac{3\epsilon g\phi_0}{2}(\mu^2 + 3g\phi_0^2)[\ln(\mu^2 + 3g\phi_0^2) + 1], \quad (4.96)$$

que é a forma encontrada no livro de Amit [1], primeira edição.

Já vimos que a expressão para a equação de estado é a mesma se partimos do nosso potencial W_1 ou se partimos do potencial usual em 1-loop. Mostraremos aqui que, com a aproximação $(\Omega^*)^2 \approx \mu^2 + 3g\phi_0^2$, W_1 torna-se igual a $U_{1\text{-loop}}$. A partir da equação (4.57) para Ω^* , encontramos

$$3d^2 g\Omega^{2d-4} = -d\Omega^d + d(\mu^2 + 3g\phi_0^2)\Omega^{d-2}, \quad (4.97)$$

a qual, inserida na expressão (4.53) para W_1 , leva a

$$W_1(\phi_0) = \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{g}{4}\phi_0^4 + \left(\frac{d}{4} - 1 \right) \Omega^d - \frac{d}{4}(\mu^2 + 3g\phi_0^2)\Omega^{d-2}. \quad (4.98)$$

Para $(\Omega^*)^2 \approx \mu^2 + 3g\phi_0^2$, temos

$$W_1(\phi_0) = \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{g}{4}\phi_0^4 - (\mu^2 + 3g\phi_0^2)^{\frac{d}{2}}, \quad (4.99)$$

que coincide com (4.91).

Capítulo 5

Métodos de Renormalização de W_2

5.1 Diferenças em relação a W_1

Neste capítulo, apresentaremos os dois estudos para W_2 , como fizemos para W_1 . Entretanto, até o momento, não foi possível repetir o estudo da equação de estado para obter os expoentes críticos corrigidos até $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, como mostraremos adiante.

Para $d = 1$, Kleinert mostrou que W_2 tem um ponto de inflexão e que, portanto, é necessário obter a equação para $\Omega_{\text{ótima}}$, a partir de $\frac{\partial^2 W_2}{\partial \Omega^2} = 0$. Veremos que, para $2 < d < 4$, W_2 passa a ter um máximo e um mínimo e deixa de ter um ponto de inflexão. Então, podemos fazer $\frac{\partial W_2}{\partial \Omega} = 0$ para obtê-la.

5.2 Primeiro estudo para W_2

No último capítulo, encontramos a equação que determina Ω^* para W_1 . Vimos que ela pode ser substituída em W_1 , levando à equação de estado a ser renormalizada. Neste capítulo estudaremos o potencial W_2 , dado, diagramaticamente, por

$$\begin{aligned}
\beta W_2(x_0) = & \beta V(x_0) - \frac{1}{2} \text{ (single circle) } + \left(\frac{1}{2} \text{ (circle with dot) } + \frac{1}{8} \text{ (two overlapping circles) } \right) \\
& - \frac{1}{2!} \left\{ \frac{1}{2} \text{ (two dots) } + \frac{1}{2} \text{ (two overlapping circles) } + \frac{1}{6} \text{ (circle with line) } \right. \\
& \left. + \frac{1}{24} \text{ (circle with two lines) } + \frac{1}{8} \text{ (three overlapping circles) } \right\},
\end{aligned}$$

ou, por (3.19):

$$\begin{aligned}
W_2(\phi_0) = & \frac{\mu^2}{2} \phi_0^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_0^4 + I_1(\Omega) + \frac{I_0(\Omega)}{2} [\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2 - \Omega^2 \\
& + \frac{3\lambda}{2} I_0(\Omega)] - \left\{ \frac{I_2(\Omega)}{4} [\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2 - \Omega^2 + 3\lambda I_0(\Omega)]^2 \right. \\
& \left. + 3\lambda^2 \phi_0^2 I_3(\Omega) + \frac{3\lambda^2}{4} I_4(\Omega) \right\}, \tag{5.1}
\end{aligned}$$

com

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_k \ln \frac{k^2 + \Omega^2}{k^2} = \pm |\alpha| \Omega^d, \tag{5.2}$$

$$I_0 = \int_k \frac{1}{k^2 + \Omega^2} = \pm |\alpha| \Omega^{d-2} d, \tag{5.3}$$

(onde $|\alpha|$ foi definido na equação (4.46))

$$I_2 = \int_k \frac{1}{(k^2 + \Omega^2)^2} = \Omega^{d-4} \int_k \frac{1}{(k^2 + 1)^2}, \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
I_3 = & \int_k \int_q \frac{1}{k^2 + \Omega^2} \frac{1}{q^2 + \Omega^2} \frac{1}{(k+q)^2 + \Omega^2} \\
= & \Omega^{2d-6} \int_k \int_q \frac{1}{k^2 + 1} \frac{1}{q^2 + 1} \frac{1}{(k+q)^2 + 1} \\
= & \Omega^{2d-6} A_3, \tag{5.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_k \int_q \int_p \frac{1}{k^2 + \Omega^2} \frac{1}{q^2 + \Omega^2} \frac{1}{p^2 + \Omega^2} \frac{1}{(k+q+p)^2 + \Omega^2} \\
&= \Omega^{3d-8} \int_k \int_q \int_p \frac{1}{k^2 + 1} \frac{1}{q^2 + 1} \frac{1}{p^2 + 1} \frac{1}{(k+q+p)^2 + 1} \\
&= \Omega^{3d-8} A_4.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Logo,

$$\frac{\partial I_1}{\partial \Omega} = \Omega I_0, \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial I_0}{\partial \Omega} = -2\Omega I_2, \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \Omega} = \Omega^{-1}(d-4)I_2, \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \Omega} = \Omega^{-1}(2d-6)I_3, \tag{5.10}$$

e

$$\frac{\partial I_4}{\partial \Omega} = \Omega^{-1}(3d-8)I_4. \tag{5.11}$$

Fazendo $\frac{\partial W_2}{\partial \Omega} = 0$, obtemos a seguinte equação para Ω^* :

$$\begin{aligned}
&\frac{(d-4)}{4} I_2 (\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2 - \Omega^2 + 3\lambda I_0)^2 \\
&- 3\lambda\Omega^2 (I_2)^2 (\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2 - \Omega^2 + 3\lambda I_0) \\
&+ (2d-6)3\lambda^2\phi_0^2 I_3 + \frac{3}{4}(3d-8)\lambda^2 I_4 = 0,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

relativamente complexa para prosseguir com os cálculos analíticos. Porém, com ela, podemos escrever I_4 em termos das outras integrais. Ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}\lambda^2 I_4 &= -\frac{(d-4)}{4(3d-8)} I_2 [\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2 - \Omega^2 + 3\lambda I_0]^2 \\
&+ \frac{3\lambda\Omega^2}{(3d-8)} I_2^2 [\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2 - \Omega^2 + 3\lambda I_0] \\
&- \frac{(2d-6)}{(3d-8)} 3\lambda^2\phi_0^2 I_3
\end{aligned} \tag{5.13}$$

a qual é substituída em (5.1), levando a

$$\begin{aligned}
W_2(\phi_0) = & \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_0^4 + I_1(\Omega) + \frac{I_0(\Omega)}{2} [\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2 - \Omega^2 \\
& + \frac{3\lambda}{2}I_0(\Omega)] - \left\{ \left[\frac{1}{4} - \frac{(d-4)}{4(3d-8)} \right] I_2(\Omega) [\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2 - \Omega^2 \right. \\
& + 3\lambda I_0(\Omega)]^2 + 3\lambda^2\phi_0^2 I_3(\Omega) \left[1 - \frac{(2d-6)}{(3d-8)} \right] \\
& \left. + \frac{3\lambda\Omega^2}{(3d-8)} [I_2(\Omega)]^2 [\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2 - \Omega^2 + 3\lambda I_0(\Omega)] \right\}. \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Como foi mencionado no final do capítulo 1, o valor de $\Omega_{\text{ótima}}$ para W_N deve ser aquele que mais se aproxima do valor de $\Omega_{\text{ótima}}$ encontrado na ordem mais baixa, isto é, para W_1 . Baseados nesta propriedade, vamos tomar a seguinte aproximação:

$$\Omega^2 \approx \mu^2 + 3\lambda\phi_0^2, \quad (5.15)$$

e substituí-la na expressão (5.14). Observe que, com esta escolha, a equação (5.12) não é satisfeita. Apesar disto, obtemos

$$\begin{aligned}
W_2 = & \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_0^4 + I_1 + \frac{3}{4}\lambda I_0^2 \\
& - 3\lambda^2\phi_0^2 I_3 \left(\frac{d-2}{3d-8} \right). \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Fazendo $\Omega^2 = \mu^2 + 3\lambda\phi_0^2$ nas integrais da equação (5.16) e escrevendo-as por extenso, achamos

$$\begin{aligned}
W_2 = & \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_0^4 + \frac{1}{2} \int_k \ln \left[\frac{k^2 + \mu^2 + 3\lambda\phi_0^2}{k^2} \right] \\
& + \frac{3}{4}\lambda \left[\int_k \frac{1}{k^2 + \mu^2 + 3\lambda\phi_0^2} \right]^2 - \left(\frac{d-2}{3d-8} \right) 3\lambda^2\phi_0^2 \\
& \times \int_k \int_q \frac{1}{k^2 + \mu^2 + 3\lambda\phi_0^2} \frac{1}{q^2 + \mu^2 + 3\lambda\phi_0^2} \frac{1}{(k+q)^2 + \mu^2 + 3\lambda\phi_0^2}, \quad (5.17)
\end{aligned}$$

ou, lembrando que $\lambda = \frac{\lambda_{\text{mit}}}{6}$, temos

$$W_2 = \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_0^4 + \frac{1}{2} \int_k \ln \left[\frac{k^2 + \mu^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2}{k^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda}{8} \left[\int_k \frac{1}{k^2 + \mu^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2} \right]^2 - \left(\frac{d-2}{3d-8} \right) \frac{\lambda^2}{12} \phi_0^2 \\
& \times \int_k \int_q \frac{1}{k^2 + \mu^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2} \frac{1}{q^2 + \mu^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2} \frac{1}{(k+q)^2 + \mu^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2}. \quad (5.18)
\end{aligned}$$

Contudo, a expressão não-renormalizada para o potencial usual em 2-loops é dada por [33]

$$\begin{aligned}
U_2(\phi_0) &= \frac{\mu^2}{2} \phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_0^4 + \frac{1}{2} \int_k \ln \left[\frac{k^2 + \mu^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2}{k^2} \right] + \frac{\lambda}{8} \left[\int_k \frac{1}{k^2 + \mu^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2} \right]^2 \\
& - \frac{\lambda^2}{12} \phi_0^2 \int_k \int_q \frac{1}{k^2 + \mu^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2} \frac{1}{q^2 + \mu^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2} \frac{1}{(k+q)^2 + \mu^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2}. \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Comparando as expressões (5.18) e (5.19), observamos que W_2 difere do potencial U_2 apenas pelo fator numérico $\left(\frac{d-2}{3d-8}\right)$ que multiplica o último termo. Observe que, para $d = 3$, as duas expressões coincidem. Assim, interrompemos o primeiro estudo para passar para o segundo.

5.3 Segundo estudo para W_2

Repetiremos aqui o procedimento do segundo estudo para W_1 . Lembrando que as equações (5.2) e (5.3) mostram que $I_1 = \alpha\Omega^d$, e $I_0 = \alpha\Omega^{d-2}d$, respectivamente; e usando (5.8) para verificar que $I_2 = -\frac{d}{2}(d-2)\alpha\Omega^{d-4}$, assim como as equações (5.5) e (5.6), a expressão (5.1) é reescrita como

$$\begin{aligned}
W_2(\phi_0) &= \frac{\mu^2}{2} \phi_0^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_0^4 + \left[1 + \frac{d}{8}(d-6) \right] \alpha\Omega^d - \frac{3}{4}d^2(d-3)\lambda\alpha^2\Omega^{2d-4} \\
& + \frac{d}{4}(4-d)(\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2)\alpha\Omega^{d-2} + \frac{d}{8}(d-2)(\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2)^2\alpha\Omega^{d-4} \\
& + \frac{9}{8}d^3(d-2)\lambda^2\alpha^3\Omega^{3d-8} - \frac{3}{4}\lambda^2A_4\Omega^{3d-8} \\
& + \frac{3}{4}d^2(d-2)(\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2)\alpha^2\Omega^{2d-6} - 3\lambda^2\phi_0^2A_3\Omega^{2d-6}. \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Conforme foi feito para W_1 , vamos trabalhar com $|\alpha|$. Logo, para $0 < d < 2$, ou seja, para $\alpha > 0$, temos

$$W_2(\phi_0) = \frac{\mu^2}{2} \phi_0^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_0^4 + \left[1 + \frac{d}{8}(d-6) \right] |\alpha|\Omega^d$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d}{4}(4-d)(\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2)|\alpha|\Omega^{d-2} + \frac{d}{8}(d-2)(\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2)^2|\alpha|\Omega^{d-4} \\
& - \frac{3}{4}d^2(d-3)\lambda|\alpha|^2\Omega^{2d-4} + \frac{3}{4}\lambda^2|\alpha|^3\Omega^{3d-8} \left[\frac{3}{2}d^3(d-2) - |\alpha|^{-3}A_4 \right] \\
& + 3\lambda|\alpha|^2\Omega^{2d-6} \left[\frac{d^2}{4}(d-2)(\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2) - \lambda\phi_0^2|\alpha|^{-2}A_3 \right]. \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Para $2 < d < 4$, ou seja, para $\alpha < 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
W_2(\phi_0) & = \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_0^4 - \left[1 + \frac{d}{8}(d-6) \right] |\alpha|\Omega^d \\
& - \frac{d}{4}(4-d)(\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2)|\alpha|\Omega^{d-2} - \frac{d}{8}(d-2)(\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2)^2|\alpha|\Omega^{d-4} \\
& - \frac{3}{4}d^2(d-3)\lambda|\alpha|^2\Omega^{2d-4} + \frac{3}{4}\lambda^2|\alpha|^3\Omega^{3d-8} \left[-\frac{3}{2}d^3(d-2) - |\alpha|^{-3}A_4 \right] \\
& + 3\lambda|\alpha|^2\Omega^{2d-6} \left[\frac{d^2}{4}(d-2)(\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2) - \lambda\phi_0^2|\alpha|^{-2}A_3 \right]. \quad (5.22)
\end{aligned}$$

Eliminamos os α 's utilizando o mesmo reescalonamento dos parâmetros apresentado no capítulo 4:

$$\begin{aligned}
\Omega_R & = |\alpha|^{1/d} \Omega, \\
\phi_{0R} & = |\alpha|^{-1/d} \phi_0, \\
\mu_R^2 & = |\alpha|^{2/d} \mu^2, \\
g & = |\alpha|^{4/d} \lambda, \quad (5.23)
\end{aligned}$$

Assim, omitindo o índice R , temos, para $\alpha > 0$ ($0 < d < 2$):

$$\begin{aligned}
W_2(\phi_0) & = \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{g}{4}\phi_0^4 + \left[1 + \frac{d}{8}(d-6) \right] \Omega^d \\
& + \frac{d}{4}(4-d)(\mu^2 + 3g\phi_0^2)\Omega^{d-2} + \frac{d}{8}(d-2)(\mu^2 + 3g\phi_0^2)^2\Omega^{d-4} \\
& - \frac{3}{4}d^2(d-3)g\Omega^{2d-4} + \frac{3}{4}g^2\Omega^{3d-8} \left[\frac{3}{2}d^3(d-2) - |\alpha|^{-3}A_4 \right] \\
& + 3g\Omega^{2d-6} \left[\frac{d^2}{4}(d-2)(\mu^2 + 3g\phi_0^2) - g\phi_0^2|\alpha|^{-2}A_3 \right]. \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Para $\alpha < 0$ ($2 < d < 4$), encontramos

$$W_2(\phi_0) = \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{g}{4}\phi_0^4 - \left[1 + \frac{d}{8}(d-6) \right] \Omega^d$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{d}{4}(4-d)(\mu^2 + 3g\phi_0^2)\Omega^{d-2} - \frac{d}{8}(d-2)(\mu^2 + 3g\phi_0^2)^2\Omega^{d-4} \\
& - \frac{3}{4}d^2(d-3)g\Omega^{2d-4} + \frac{3}{4}g^2\Omega^{3d-8} \left[-\frac{3}{2}d^3(d-2) - |\alpha|^{-3}A_4 \right] \\
& + 3g\Omega^{2d-6} \left[\frac{d^2}{4}(d-2)(\mu^2 + 3g\phi_0^2) - g\phi_0^2|\alpha|^{-2}A_3 \right]. \quad (5.25)
\end{aligned}$$

5.3.1 Cálculo aproximado de $|\alpha|^{-2}A_3$ e de $|\alpha|^{-3}A_4$

Nesta seção apresentamos um cálculo aproximado para os termos $a_3 \equiv |\alpha|^{-2}A_3$ e $a_4 \equiv |\alpha|^{-3}A_4$. A aproximação consiste em calcular apenas os pólos das integrais A_3 e A_4 , já que não encontramos o cálculo exato destas integrais na literatura. Ainda nesta seção, discutiremos a qualidade desta aproximação. Calcularemos as integrais para d -dimensões, sempre levando em conta a mudança de sinal de α para $d > 2$. Em seguida, colocaremos $d = 1$ e compararemos os resultados com os exatos, calculados por Kleinert para o caso unidimensional.

No apêndice de seu artigo [17], Stevenson obtém expressões regularizadas para as integrais $I_3(\Omega)$ e $I_4(\Omega)$ no espaço das coordenadas. Observe que $A_3 = I_3(1)$ e $A_4 = I_4(1)$, pois extraímos Ω das nossas integrais. Neste espaço, as integrais I_3 e I_4 são escritas como

$$I_n(\Omega) \equiv \int_x G^n(x) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dx x^{d-1} G^n, \quad (5.26)$$

onde x é a distância radial da origem e $n = 3$ ou $n = 4$. O propagador $G(x)$ pode ser escrito em termos da função de Bessel modificada:

$$G(x) = \frac{\Omega^{d-2}}{(2\pi)^{d/2}(\Omega x)^{d/2-1}} K_{d/2-1}(\Omega x). \quad (5.27)$$

Para $d = 4 - \epsilon$, Stevenson, usando resultados de Collins [34], faz uma expansão para x pequeno no propagador, que é reescrito como

$$G(x) = \frac{A(x)}{x^2} + \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} B_k(x), \quad (5.28)$$

em que

$$A(x) \equiv \frac{\Gamma(1 - \epsilon/2)}{4\pi^{2-\epsilon/2}} x^\epsilon, \quad (5.29)$$

e

$$B_k(x) = \frac{1}{4\pi^{2-\epsilon/2}} \left(-\frac{\Omega^2}{4}\right)^{k+1} \frac{1}{k!} \left[\frac{x^\epsilon}{k+1} \Gamma(-k - \epsilon/2) - \left(\frac{2}{\Omega}\right)^\epsilon \Gamma(-1 - k + \epsilon/2) \right]. \quad (5.30)$$

Ele analisa quais termos da expressão de $G(x)$ contêm pólos e faz uma expansão em ϵ das funções gamma. Preferimos calcular as integrais mantendo a função gamma até o final dos cálculos. Ou seja, para I_3 , temos

$$\begin{aligned} I_3(\Omega) &= \frac{2\pi^{2-\epsilon/2}}{\Gamma(2-\epsilon/2)} \int_0^\infty dx x^{3-\epsilon} \left[\frac{3A^2 B_0}{x^4} \right] \\ &= \frac{3\Omega^2}{64\pi^{4-\epsilon}} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\Gamma^2(1-\epsilon/2)}{2\epsilon(1-\epsilon/2)} - \left(\frac{2}{\Omega}\right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon/2)\Gamma(1+\epsilon/2)}{\epsilon(1-\epsilon/2)^2} \right], \end{aligned} \quad (5.31)$$

e

$$\begin{aligned} I_4(\Omega) &= \frac{4\pi^{2-\epsilon/2}}{\Gamma(2-\epsilon/2)} \int_0^\infty dx x^{-1-\epsilon} (2A^3 B_1 + 3A^2 B_0^2) \\ &= \frac{1}{(4\pi^{2-\epsilon/2})^3} \frac{\Omega^4}{8} \frac{1}{\epsilon^3} \frac{\Gamma(1-\epsilon/2)}{(1-\epsilon/2)} \left\{ \frac{\epsilon}{3} \frac{\Gamma^2(1-\epsilon/2)}{(1+\epsilon/2)} \right. \\ &\quad - \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{2}{\Omega}\right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon/2)\Gamma(1+\epsilon/2)}{(1-\epsilon/2)(1-\epsilon/4)} + 2\Gamma^2(1-\epsilon/2) \\ &\quad \left. - 6 \left(\frac{2}{\Omega}\right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon/2)\Gamma(1+\epsilon/2)}{(1-\epsilon/2)} + 6 \left(\frac{2}{\Omega}\right)^{2\epsilon} \frac{\Gamma^2(1+\epsilon/2)}{(1-\epsilon/2)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Fazendo $\epsilon = 4 - d$ e $\Omega = 1$ nas expressões anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} A_3 &= I_3(1) = \frac{3}{64\pi^4} \frac{1}{4-d} \\ &\quad \left[\frac{\Gamma^2(d/2-1)}{2(4-d)(d/2-1)} - 2^{4-d} \frac{\Gamma(d/2-1)\Gamma(3-d/2)}{(4-d)(d/2-1)^2} \right], \end{aligned} \quad (5.33)$$

e

$$\begin{aligned} A_4 &= I_4(1) = \frac{1}{(4\pi^{d/2})^3} \frac{1}{8} \frac{1}{(4-d)^3} \frac{\Gamma(d/2-1)}{(d/2-1)} \left\{ \frac{(4-d)}{3} \frac{\Gamma^2(d/2-1)}{(3-d/2)} \right. \\ &\quad - \frac{(4-d)}{2} \frac{(2)^{(4-d)} \Gamma(d/2-1)\Gamma(3-d/2)}{(d/2-1)(d/4)} + 2\Gamma^2(d/2-1) \\ &\quad \left. - 6(2)^{4-d} \frac{\Gamma(d/2-1)\Gamma(3-d/2)}{(d/2-1)} + 6(4)^{4-d} \frac{\Gamma^2(3-d/2)}{(d/2-1)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Por outro lado, no capítulo 4 encontramos a equação (4.46):

$$\alpha = \frac{1}{d(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right), \quad (5.35)$$

através da qual escrevemos

$$|\alpha|^{-2} = d^2(4\pi)^d \frac{1}{\Gamma^2\left(1 - \frac{d}{2}\right)}, \quad (5.36)$$

e

$$|\alpha|^{-3} = d^3(4\pi)^{3d/2} \frac{1}{\Gamma^3\left(1 - \frac{d}{2}\right)}. \quad (5.37)$$

Deste modo, $a_3 \equiv |\alpha|^{-2}A_3$ e $a_4 \equiv |\alpha|^{-3}A_4$ são dados por

$$a_3 = \frac{3}{2} \frac{4^{(d-4)}d^2\Gamma^2(d/2 - 1)}{\Gamma^2(3 - d/2)} \left\{ \frac{d}{2} - 1 - \frac{2^{5-d}\Gamma(3 - d/2)}{\Gamma(d/2 - 1)} \right\} \quad (5.38)$$

e

$$\begin{aligned} a_4 = & -d^3 4^{(3d/2-6)} \frac{\Gamma^2(d/2 - 1)}{\Gamma^2(3 - d/2)} \left\{ \frac{(4-d)}{3(3-d/2)} \frac{\Gamma(d/2 - 1)(d/2 - 1)^2}{\Gamma(3 - d/2)} \right. \\ & - (4-d)(d/2 - 1) \frac{2^{5-d}}{d} + 2(d/2 - 1)^2 \frac{\Gamma(d/2 - 1)}{\Gamma(3 - d/2)} \\ & \left. - 2^{4-d} 6(d/2 - 1) + 4^{4-d} 6 \frac{\Gamma(3 - d/2)}{\Gamma(d/2 - 1)} \right\}. \quad (5.39) \end{aligned}$$

Observe que, para $0 < d < 2$, o sinal de a_4 muda, pois o sinal de $|\alpha|^{-3}$ é alterado.

As equações (5.38) e (5.39) são finitas em $d = 3$ e dão uma boa aproximação para W_2 , calculado por Kleinert, quando $d = 1$. Substituindo-as na expressão (5.25) e tomando $\mu = 1$, $\phi_0 = 0$, $g = 0, 1$ e $d = 3$, obtemos o gráfico de W_2 em função de Ω (linha pontilhada). No mesmo gráfico, colocamos W_1 reescalado (4.53) em função de Ω (linha contínua).

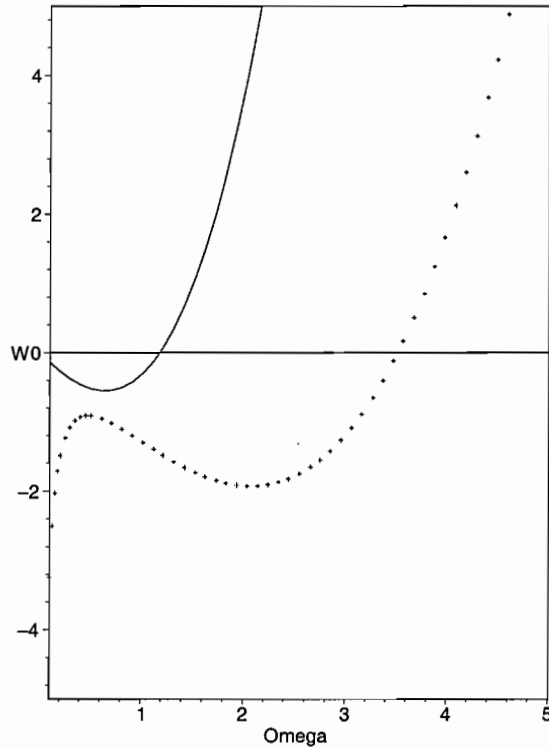


Figura 5.1: W_1 e W_2 para $\mu = 1$, $\phi_0 = 0$, $g = 0, 1$ e $d = 3$

Examinando o gráfico para W_2 em $d = 3$, constatamos que não há mais um ponto de inflexão. Para este caso e também para outros valores de d entre 2 e 4, W_2 tem um ponto de máximo e um ponto de mínimo, sendo o de máximo o que mais se aproxima do ponto de mínimo de W_1 . Então, este é o que leva à $\Omega_{\text{ótima}}$, segundo mencionamos anteriormente.

Vamos analisar a qualidade das expressões (5.38) e (5.39), comparando nosso W_2 para $d = 1$ com o de Kleinert ($W_{2,d=1}$). Para o caso $d = 1$, a partir da expressão (5.24), lembrando que a_4 muda de sinal e que as nossas variáveis reescaladas relacionam-se com as não-reescaladas de Kleinert através de (4.56), construímos o gráfico para W_2 com a_3 e a_4 aproximados (linha pontilhada), e para $W_{2,d=1}$ (linha contínua), obtido diretamente para $d = 1$ (veja equação (1.86)), em função de Ω , no qual tomamos $\mu = 1$, $\phi_0 = 0$ e $g = 0, 4$.

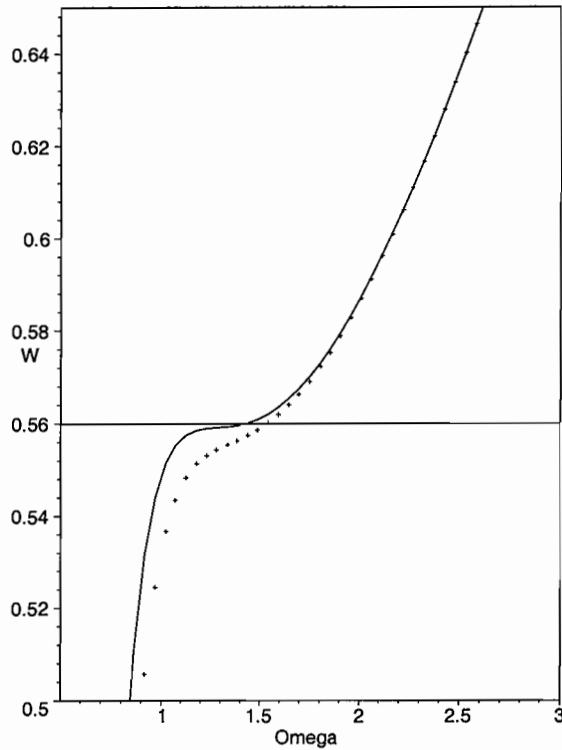


Figura 5.2: W_2 e $W_{2,d=1}$ para $\mu = 1$, $\phi_0 = 0$, $g = 0,4$ e $d = 1$

Observe que, apesar do potencial aproximado não coincidir com $W_{2,d=1}$ para valores de W menores que 0.56, nosso potencial apresenta agora um ponto de inflexão, como o de Kleinert, que dá uma boa estimativa do valor exato para $\Omega_{\text{ótima}}$.

Por outro lado, se consideramos não apenas os termos que contêm pólos para calcular a_3 e a_4 mas os outros termos do propagador (5.28) $G^n(x)$, obtemos melhores resultados. Para isso, escrevemos a soma em B_k até $k = 0$, para a_3 , e até $k = 1$, para a_4 , na equação de $G^n(x)$. Obtemos a expressão *termos finitos + termos com pólos* até ordem k para G^n com o auxílio do Maple. O novo gráfico obtido com as mesmas escolhas anteriores mostra que a aproximação para W_2 (linha pontilhada) fica muito mais próxima do potencial $W_{2,d=1}$ (linha contínua).

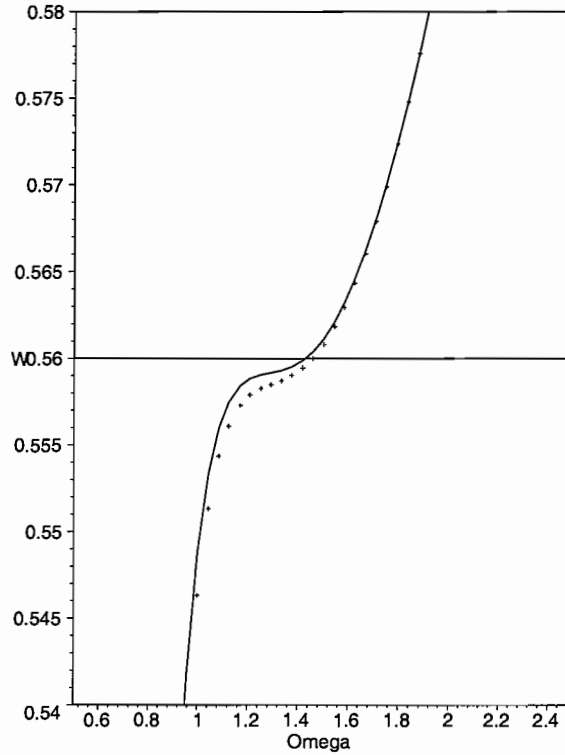


Figura 5.3: W_2 e $W_{2,d=1}$ para $\mu = 1$, $\phi_0 = 0$, $g = 0.4$ e $d = 1$

5.4 O potencial em 2-loops com o nosso reescalonamento

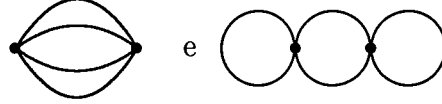
Primeiramente, a expressão (5.19) do potencial efetivo usual em 2-loops é reescalonada da mesma forma que no caso 1-loop (Veja as relações (4.51)). Ou seja, utilizaremos um esquema de reescalonamento análogo ao que usamos no método variacional. Assim, para 2-loops e $2 < d < 4$, obtemos

$$\begin{aligned}
 U(\phi_0) = & \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{g}{4}\phi_0^4 - (\mu^2 + 3g\phi_0^2)^{\frac{d}{2}} + \frac{3g}{4}d^2(\mu^2 + 3g\phi_0^2)^{d-2} \\
 & - 3g^2\phi_0^2(\mu^2 + 3g\phi_0^2)^{d-3}a_3,
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

onde $a_3 = |\alpha|^{-2}A_3$, como foi definido na seção anterior.

5.4.1 Comparação com W_2 reescalado

A expressão de W_2 para o potencial efetivo de Kleinert contém dois termos



proporcionais a Ω^{3d-8} que não aparecem na aproximação em $\mathcal{O}(2\text{-loops})$. Eles podem ser eliminados usando-se a equação que determina Ω ótima, $\frac{\partial W_2}{\partial \Omega} = 0$. A partir dela, escrevemos os termos proporcionais a Ω^{3d-8} em função das demais:

$$\begin{aligned}
 & \frac{3}{4}g^2\Omega^{3d-8} \left[\frac{3}{2}d^3(d-2) - a_4 \right] = -\frac{d}{8} \frac{(d-2)}{(3d-8)}(d-4)\Omega^d \\
 & + \frac{d}{4} \frac{(d-4)}{(3d-8)}(d-2)(\mu^2 + 3g\phi_0^2)\Omega^{d-2} - \frac{3}{4}gd^2 \frac{(d-3)}{(3d-8)}(2d-4)\Omega^{2d-4} \\
 & - \frac{d}{8} \frac{(d-2)}{(3d-8)}(d-4)(\mu^2 + 3g\phi_0^2)^2\Omega^{d-4} - 3 \frac{(2d-6)}{(3d-8)}g^2\phi_0^2 a_3 \Omega^{2d-6} \\
 & + \frac{3}{4}d^2 \frac{(d-2)}{(3d-8)}(2d-6)g(\mu^2 + 3g\phi_0^2)\Omega^{2d-6} \tag{5.41}
 \end{aligned}$$

Inserindo (5.41) na expressão (5.25), obtemos

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{g}{4}\phi_0^4 - \frac{1}{4} \frac{(d-4)}{(3d-8)}(d-2)(d-4)\Omega^d \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{(d-3)}{(3d-8)}(d-4)d(\mu^2 + 3g\phi_0^2)\Omega^{d-2} - \frac{3}{4}gd^2 \frac{(d-4)}{(3d-8)}(d-3)\Omega^{2d-4} \\
 &- \frac{1}{4} \frac{(d-2)^2}{(3d-8)}d(\mu^2 + 3g\phi_0^2)^2\Omega^{d-4} + \frac{3}{4} \frac{(d-2)^2}{(3d-8)}d^2g(\mu^2 + 3g\phi_0^2)\Omega^{2d-6} \\
 &- 3 \frac{(d-2)}{(3d-8)}g^2\phi_0^2 a_3 \Omega^{2d-6}. \tag{5.42}
 \end{aligned}$$

Fazendo a aproximação $\Omega^2 \approx \mu^2 + 3g\phi_0^2$, os termos são reagrupados e encontramos

$$W_2 = \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + \frac{g}{4}\phi_0^4 - (\mu^2 + 3g\phi_0^2)^{\frac{d}{2}} + \frac{3g}{4}d^2(\mu^2 + 3g\phi_0^2)^{d-2}$$

$$- 3 \frac{(d-2)}{(3d-8)} g^2 \phi_0^2 (\mu^2 + 3g\phi_0^2)^{d-3} a_3, \quad (5.43)$$

que difere do potencial (5.40) apenas pelo fator $\frac{(d-2)}{(3d-8)}$ que multiplica o último termo. Observe que, para $d = 3$, as duas expressões coincidem. Além disto, a comparação é feita sem ser preciso obter o valor exato de a_3 , pois já vimos que o mesmo é finito. Ressaltamos que o fator que diferencia os potenciais é o mesmo encontrado no primeiro estudo para W_2 .

5.4.2 Comparação de H obtido a partir do potencial em 2-loops com o obtido a partir de W_2 aproximado

A equação de estado encontrada a partir do potencial usual em 2-loops (5.40) é dada por:

$$\begin{aligned} H_l &= \frac{\partial U}{\partial \phi_0} \\ &= \mu^2 \phi_0 + g\phi_0^3 - 3gd\phi_0(\mu^2 + 3g\phi_0^2)^{\frac{d}{2}-1} + \frac{9}{2}d^2(d-2)g^2\phi_0(\mu^2 + 3g\phi_0^2)^{d-3} \\ &\quad - 6g^2\phi_0 a_3(\mu^2 + 3g\phi_0^2)^{d-3} - 18g^3\phi_0^3(d-3)(\mu^2 + 3g\phi_0^2)^{d-4} a_3, \end{aligned} \quad (5.44)$$

fazendo, como antes, $X = \mu^2 + 3g\phi_0^2$, temos

$$\begin{aligned} H_l &= \mu^2 \phi_0 + g\phi_0^3 - 3gd\phi_0 X^{\frac{d}{2}-1} + \frac{9}{2}d^2(d-2)g^2\phi_0 X^{d-3} - 6g^2\phi_0 a_3 X^{d-3} \\ &\quad - 18g^3\phi_0^3(d-3)X^{d-4} a_3. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Por outro lado, a partir da equação (5.25) para W_2 , usando as definições de a_3 e a_4 , obtemos

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial W_2}{\partial \phi_0} \\ &= \mu^2 \phi_0 + g\phi_0^3 + \frac{3}{2}d(d-4)g\phi_0\Omega^{d-2} - \frac{3}{2}d(d-2)g\phi_0(\mu^2 + 3g\phi_0^2)\Omega^{d-4} \\ &\quad + \frac{9}{2}d^2(d-2)g^2\phi_0\Omega^{2d-6} - 6g^2\phi_0 a_3\Omega^{2d-6}; \end{aligned} \quad (5.46)$$

tomando, como aproximação, $\Omega \approx \mu^2 + 3g\phi_0^2 = X$, achamos

$$H = \mu^2 \phi_0 + g\phi_0^3 - 3gd\phi_0 X^{\frac{d}{2}-1} + \frac{9}{2}d^2(d-2)g^2\phi_0 X^{d-3} - 6g^2\phi_0 a_3 X^{d-3}, (5.47)$$

que não possui o último termo de H_l , equação (5.45). Aqui, o resultado da aproximação parece ser menos satisfatório do que no caso de W_2 , analisado na seção anterior.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, generalizamos o método de Kleinert em Teoria de Campos a temperatura zero. O primeiro resultado interessante consistiu em mostrar que o potencial efetivo de Kleinert coincide com o potencial efetivo variacional usual, por exemplo, com o de Stevenson [17], [35], que é obtido por meio de uma técnica bastante diferente da utilizada por Kleinert. Portanto, várias técnicas variacionais levam ao mesmo potencial [17], [3].

Para a primeira ordem da expansão em cumulantes, verificamos que o potencial usual na aproximação de 1-loop pode ser obtido a partir de uma aproximação do nosso parâmetro variacional Ω no potencial W_1 . Ou seja, a expansão usual pode ser vista como um caso particular do método variacional. Também encontramos uma forma implícita da equação de estado sem fazer nenhuma aproximação de Ω , que leva à forma usual após uma expansão em ϵ .

A segunda ordem demonstrou-se mais complicada, devido a novas integrais divergentes. Entretanto, verificamos que, usando a mesma aproximação para o parâmetro variacional Ω , nosso potencial coincide com o usual em 2-loops, exceto por um fator numérico (que é igual a 1 quando $d = 3$) que multiplica um dos termos de W_2 . Não obtivemos uma concordância exata nem para W_2 , nem para H . Uma possível razão para isto é que, talvez, a expansão em loops não esteja contida na expansão em cumulantes. Este ponto ainda deve ser examinado com mais cuidado. Pode ser que haja uma renormalização finita que elimine o fator numérico extra em W_2 .

Outro resultado que vale a pena ressaltar é o reescalamento empregado. Exatamente como Consoli e Stevenson [15], renormalizamos a componente de

Fourier com momento zero de forma diferente das outras componentes. No nosso caso, este tipo de renormalização surge de uma maneira natural quando decidimos tornar finito o potencial efetivo variacional **antes** de calcular o valor ótimo do parâmetro variacional.

Esta reescalonamento prévio da teoria é um dos resultados novos mais interessantes deste trabalho. Todos os outros autores renormalizam o potencial variacional **após** determinarem o valor ótimo do parâmetro variacional [36], [37], [38]. O fato da teoria ser finita logo de saída abre a possibilidade de um tratamento numérico, não-perturbativo, para determinar $\Omega_{\text{ótima}}$, como é feito por Kleinert para $d = 1$.

Pretendemos dar continuidade ao estudo de W_2 , bem como obter os expoentes críticos corrigidos até $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, que foi uma das motivações iniciais deste trabalho.

Apêndice A

A.1 Obtenção dos diagramas de Feynman

Ao redefinir a frequência na equação (1.67), reduzimos o número de diagramas de Feynman que serão calculados, pois estamos, em princípio, ignorando todos os diagramas que contêm os vértices g_2 . Os diagramas omitidos são reobtidos no final dos cálculos, expandindo os propagadores em $\Omega(x_0)$ até a ordem apropriada em g_2 . Ou seja, para W_N , expandimos até $\mathcal{O}(g_2^N)$.

Como $\dot{y}^2 = \dot{y}\dot{y}$ e $\partial_\tau(y\dot{y}) = \dot{y}\dot{y} + y\ddot{y}$, que, devido às condições de contorno periódicas, na integração implica $\dot{y}^2 = -y\ddot{y}$, obtemos

$$\dot{y}^2 = -y\partial_\tau^2 y.$$

Assim, definimos a matriz funcional:

$$D_{\tau\tau'} = D(\tau, \tau') \equiv (-\partial_\tau^2 + \tilde{\Omega}^2)\delta(\tau - \tau'); \tau, \tau' \in [0, \hbar\beta), \quad (\text{A.1})$$

cuja inversa funcional é a função de Green euclidiana

$$\begin{aligned} G_{\tau\tau'} &= G(\tau, \tau') = G(\tau - \tau') \\ &= D^{-1}(\tau, \tau') = (-\partial_\tau^2 + \tilde{\Omega}^2)^{-1}(\tau, \tau'). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Deste modo, a equação (1.63) é reescrita como

$$\begin{aligned} Z[j] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0}{\sqrt{2\pi\hbar^2\beta/M}} e^{-A_{cl}[x_0]} \int \mathcal{D}y \exp \left\{ - \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left[\frac{g_3}{3!} y^3 + \frac{g_4}{4!} y^4 \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ - \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left[\frac{M}{2} y D_{\tau\tau'} y - jy \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Como

$$\frac{\delta j(\tau')}{\delta j(\tau)} = \delta(\tau - \tau')$$

e

$$\frac{\delta}{\delta j(\tau)} e^{-\int_0^{\hbar\beta} d\tau' j(\tau') y(\tau')} = -y(\tau) e^{-\int_0^{\hbar\beta} d\tau' j(\tau') y(\tau')}, \quad (\text{A.4})$$

podemos fazer a seguinte substituição na equação (A.3):

$$e^{-\int_0^{\hbar\beta} d\tau \left\{ \frac{g_3}{3!} y^3 + \frac{g_4}{4!} y^4 \right\}} \longrightarrow e^{-\int_0^{\hbar\beta} d\tau \left\{ \frac{g_3}{3!} \frac{\delta^3}{\delta j^3(\tau)} + \frac{g_4}{4!} \frac{\delta^4}{\delta j^4(\tau)} \right\}}. \quad (\text{A.5})$$

Além disto, a partir daqui adotamos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} j_i &\equiv j(\tau_i), \\ \frac{\delta}{\delta j_a} &\equiv \frac{\delta}{\delta j(\tau_a)}, \\ \frac{\delta j(\tau_a)}{\delta j(\tau_b)} = \delta(\tau_a - \tau_b) &\Rightarrow \frac{\delta j_a}{\delta j_b} = \delta_{ab}, \\ j_i G_{il} j_l &\equiv \int_0^{\hbar\beta} d\tau_i j(\tau_i) G(\tau_i \tau_l) j(\tau_l), \end{aligned}$$

com a qual a integração em $d\tau$ fica implícita.

Deste modo,

$$\begin{aligned} Z[j] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0}{\sqrt{2\pi\hbar^2\beta/M}} e^{-A_{cl}[x_0]} e^{-\left\{ \frac{g_3}{3!} \frac{\delta^3}{\delta j^3} + \frac{g_4}{4!} \frac{\delta^4}{\delta j^4} \right\}} \\ &\times \int \mathcal{D}y e^{-\left\{ \frac{M}{2} y_\tau D_{\tau\tau'} y_{\tau'} - j_\tau y_\tau \right\}}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Porém,

$$\begin{aligned} \frac{M}{2} y_\tau D_{\tau\tau'} y_{\tau'} - j_\tau y_\tau &= \\ \frac{M}{2} \left(y_\tau D_{\tau\tau'} y_{\tau'} - \frac{2}{M} j_\tau y_\tau + \frac{1}{M^2} j_\tau G_{\tau\tau'} j_{\tau'} - \frac{1}{M^2} j_\tau G_{\tau\tau'} j_{\tau'} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

E, por outro lado, como $D_{\tau_1\tau_2} G_{\tau_2\tau_3} = \delta_{\tau_1\tau_3}$, temos

$$\begin{aligned} y_\tau D_{\tau\tau'} y_{\tau'} - \frac{2}{M} j_\tau y_\tau + \frac{1}{M^2} j_\tau G_{\tau\tau'} j_{\tau'} &= \\ \left(y_\tau - \frac{1}{M} G_{\alpha\tau} j_\alpha \right) D_{\tau\tau'} \left(y_{\tau'} - \frac{1}{M} G_{\beta\tau'} j_\beta \right). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Fazendo

$$y'_\tau \equiv y_\tau - \frac{1}{M} G_{\alpha\tau} j_\alpha, \quad (\text{A.9})$$

chegamos a

$$Z[j] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0}{\sqrt{2\pi\hbar^2\beta/M}} e^{-A_{cl}[x_0]} \int \mathcal{D}y' e^{-\frac{M}{2} y'_\tau D_{\tau\tau'} y'_{\tau'}} \times e^{-\left\{ \frac{g_3}{3!} \frac{\delta^3}{\delta j_\tau^3} + \frac{g_4}{4!} \frac{\delta^4}{\delta j_\tau^4} \right\}} e^{\frac{1}{2M} j_\tau G_{\tau\tau'} j_{\tau'}}. \quad (\text{A.10})$$

Os dois primeiros termos levam, respectivamente, à $e^{-\beta V_{cl}(x_0)}$, com $V_{cl}(x_0) = \frac{M\omega}{2} x_0^2 + \frac{1}{4} g x_0^4$, e à função de partição da teoria livre. Então, a parte de (A.10), dependente de j , é dada por

$$e^{-\left\{ \frac{g_3}{3!} \frac{\delta^3}{\delta j_\tau^3} + \frac{g_4}{4!} \frac{\delta^4}{\delta j_\tau^4} \right\}} e^{\frac{1}{2M} j_\tau G_{\tau\tau'} j_{\tau'}}. \quad (\text{A.11})$$

Faremos a seguir duas aproximações, com as quais obteremos W_2 . Expandindo a primeira exponencial até segunda ordem, encontramos

$$\left[1 - \frac{g_4}{4!} \frac{\delta^4}{\delta j_\tau^4} + \frac{1}{2} \left(\frac{g_3^2}{3!3!} \frac{\delta^6}{\delta j_\tau^3 \delta j_{\tau'}^3} + \frac{g_4^2}{4!4!} \frac{\delta^8}{\delta j_\tau^4 \delta j_{\tau'}^4} \right) \right] e^{\frac{1}{2M} j_\tau G_{\tau\tau'} j_{\tau'}}, \quad (\text{A.12})$$

pois os termos em g_3 e em $g_3 g_4$, quando aplicados em $e^{\frac{1}{2M} j_\tau G_{\tau\tau'} j_{\tau'}}$, não contribuem ao fazer $j = 0$ no final dos cálculos.

Expandindo

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2M} j_\tau G_{\tau\tau'} j_{\tau'}} &= 1 + \frac{1}{2M} j_\tau G_{\tau\tau'} j_{\tau'} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{4M^2} j_1 G_{12} j_2 j_3 G_{34} j_4 \\ &+ \frac{1}{3!} \frac{1}{8M^3} j_1 G_{12} j_2 j_3 G_{34} j_4 j_5 G_{56} j_6 \\ &+ \frac{1}{4!} \frac{1}{16M^4} j_1 G_{12} j_2 j_3 G_{34} j_4 j_5 G_{56} j_6 j_7 G_{78} j_8 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Desta maneira, temos

$$\begin{aligned} e^{-\left\{ \frac{g_3}{3!} \frac{\delta^3}{\delta j_\tau^3} + \frac{g_4}{4!} \frac{\delta^4}{\delta j_\tau^4} \right\}} e^{\frac{1}{2M} j_\tau G_{\tau\tau'} j_{\tau'}} &= \\ 1 - \frac{g_4}{4!} \frac{\delta^4}{\delta j_\tau^4} \frac{1}{2} \frac{1}{4M^2} j_1 G_{12} j_2 j_3 G_{34} j_4 & \end{aligned}$$

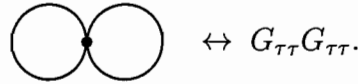
$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{g_3^2}{3!3!} \frac{\delta^6}{\delta j_\tau^3 \delta j_{\tau'}^3} \frac{1}{3!} \frac{1}{8M^3} j_1 G_{12} j_2 j_3 G_{34} j_4 j_5 G_{56} j_6 \\
& + \frac{1}{2} \frac{g_4^2}{4!4!} \frac{\delta^8}{\delta j_\tau^4 \delta j_{\tau'}^4} \frac{1}{4!} \frac{1}{16M^4} j_1 G_{12} j_2 j_3 G_{34} j_4 j_5 G_{56} j_6 j_7 G_{78} j_8, \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

sendo que as outras parcelas não contribuem ao fazer $j = 0$ no final dos cálculos.

A cada termo associamos um diagrama de Feynman. Por exemplo, o termo

$$\frac{\delta^4}{\delta j_\tau^4} j_1 G_{12} j_2 j_3 G_{34} j_4 \quad (\text{A.15})$$

é proporcional a



Para facilitar o cálculo dos outros dois termos, emparelhamos as derivadas duas a duas, sendo que cada par age apenas sobre os j 's de um mesmo $j_\tau G_{\tau\tau'} j_{\tau'}$. Optando pelo emparelhamento, os fatores combinatórios relacionados são obtidos a partir das seguintes regras:

- Como os quatro diagramas calculados são simétricos e não há momentos externos, os vértices são equivalentes, logo, não temos o fator devido à escolha dos vértices;
- Escolhe-se uma (ou quantas forem necessárias) perna deste vértice, verificando de quantas formas diferentes isso pode ser feito; e
- Conta-se as maneiras distintas de se ligar esta perna (ou grupo de pernas) a outra (ou outro grupo). E assim, sucessivamente com as pernas restantes.

Há somente duas maneiras de emparelhar as derivadas de

$$\frac{\delta^6}{\delta j_\tau^3 \delta j_{\tau'}^3} j_1 G_{12} j_2 j_3 G_{34} j_4 j_5 G_{56} j_6,$$

que são:

$$\left[\frac{\delta}{\delta j_\tau} \frac{\delta}{\delta j_\tau} \right] \left[\frac{\delta}{\delta j_\tau} \frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \right] \left[\frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \right],$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta j_\tau} \frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \right] \left[\frac{\delta}{\delta j_\tau} \frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \right] \left[\frac{\delta}{\delta j_\tau} \frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \right]$$

e, após serem aplicadas, levam, respectivamente, a

$$\text{---} \leftrightarrow G_{\tau\tau} G_{\tau\tau'} G_{\tau'\tau'},$$

$$\text{---} \leftrightarrow G_{\tau\tau'} G_{\tau\tau'} G_{\tau\tau'}.$$

No capítulo 1, mostramos que o diagrama correspondente a $G_{\tau\tau} G_{\tau\tau'} G_{\tau'\tau'}$ não contribui, porque, por conservação de momento, o momento que passa pelo propagador que liga os dois círculos é zero. Entretanto, o momento zero foi previamente eliminado da soma \sum_k' . Portanto, o diagrama deve se anular.

Para

$$\frac{\delta^8}{\delta j_\tau^4 \delta j_{\tau'}^4} j_1 G_{12} j_2 j_3 G_{34} j_4 j_5 G_{56} j_6 j_7 G_{78} j_8, \quad (\text{A.16})$$

temos os seguintes modos de emparelhamento:

$$\left[\frac{\delta}{\delta j_\tau} \frac{\delta}{\delta j_\tau} \right] \left[\frac{\delta}{\delta j_\tau} \frac{\delta}{\delta j_\tau} \right] \left[\frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \right] \left[\frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \right],$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta j_\tau} \frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \right] \left[\frac{\delta}{\delta j_\tau} \frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \right] \left[\frac{\delta}{\delta j_\tau} \frac{\delta}{\delta j_\tau} \right] \left[\frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \right],$$

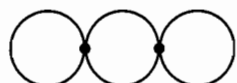
$$\left[\frac{\delta}{\delta j_\tau} \frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \right] \left[\frac{\delta}{\delta j_\tau} \frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \right] \left[\frac{\delta}{\delta j_\tau} \frac{\delta}{\delta j_\tau} \right] \left[\frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \frac{\delta}{\delta j_{\tau'}} \right],$$

que levam, respectivamente, a

$$\text{---} \leftrightarrow G_{\tau\tau} G_{\tau\tau} G_{\tau'\tau'} G_{\tau'\tau'},$$


$$\text{---}$$

que não contribui pois não é conexo,



$$\leftrightarrow G_{\tau\tau'} G_{\tau\tau'} G_{\tau\tau'} G_{\tau'\tau'},$$

e



$$\leftrightarrow G_{\tau\tau'} G_{\tau\tau'} G_{\tau\tau'} G_{\tau\tau'}.$$

A.1.1 Cálculo analítico dos diagramas de Feynman

Como estamos tratando do caso unidimensional, podemos calcular todos os diagramas de Feynman necessários para o nosso estudo sem muita dificuldade. Primeiramente, obtemos a função de Green.

A função de Green

A função de Green, definida em (3.7):

$$G_{\tau\tau'} = G(\tau, \tau') = G(\tau - \tau'),$$

está relacionada com

$$G_{\tau\tau'} = \frac{\hbar}{M} \tilde{G}(\tau - \tau'), \quad (\text{A.17})$$

em que \tilde{G} é a função de Green euclidiana simétrica em τ e τ' , com condições de contorno periódicas, que é calculada como se segue. Os auto-valores do operador diferencial $-\partial_\tau^2$ são $e^{-i\omega_m\tau}$, com auto-valores ω_m^2 , e as condições de contorno periódicas restringem ω_m 's às frequências de Matsubara ($\omega_m = \frac{2\pi m}{\hbar\beta}$). Deste modo, temos a expansão de Fourier:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\tau) &= \frac{1}{\hbar\beta} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\omega_m^2 + \omega^2} e^{-i\omega_m\tau} \\ &= \frac{1}{2\omega} \frac{\cosh \omega(\tau - \hbar\beta/2)}{\sinh(\omega\hbar\beta/2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Vamos demonstrar a relação (A.18). Substituindo $\omega_m = \frac{2\pi m}{\hbar\beta}$ e fazendo $a = \frac{2\pi}{\hbar\beta}$, reescrevemos a equação (A.18) como

$$\frac{1}{a^2} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{m^2 + (\omega/a)^2} e^{-iam\tau} = \frac{\pi}{a\omega} \frac{\cosh \omega(\tau - \pi/a)}{\sinh(\omega\pi/a)}. \quad (\text{A.19})$$

Por outro lado,

$$\sum_{m=-\infty}^{m=-1} \frac{1}{m^2 + (\omega/a)^2} e^{-iam\tau} = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^2 + (\omega/a)^2} e^{iam\tau} \quad (\text{A.20})$$

e o termo correspondente a $m = 0$ é $\frac{1}{(\omega/a)^2}$. Assim,

$$\frac{1}{a^2} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{m^2 + (\omega/a)^2} e^{-iam\tau} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{(\omega/a)^2} + 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\cos(a\tau m)}{m^2 + (\omega/a)^2} \right]. \quad (\text{A.21})$$

Usando a relação ¹

$$\sum_{k=1}^{m=\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2 + (\bar{a})^2} = \frac{\pi}{2\bar{a}} \frac{\cosh \bar{a}(\pi - x)}{\sinh(\pi\bar{a})} - \frac{1}{2\bar{a}^2},$$

com $0 \leq x \leq 2\pi$ (A.22)

com $x = a\tau$ e $\bar{a} = \omega/a$, encontramos a relação (A.18). Lembrando que, como $0 \leq x \leq 2\pi$, temos $0 \leq \frac{2\pi}{\hbar\beta}\tau \leq 2\pi$.

Vamos generalizar (A.18) para uma diferença $\tau - \tau'$. Neste caso, como $0 \leq \tau, \tau' \leq 2\pi$, temos duas possibilidades. Se $0 \leq \frac{2\pi}{\hbar\beta}(\tau - \tau') \leq 2\pi$, obtemos o mesmo resultado, trocando apenas τ por $\tau - \tau'$. Por outro lado, se $-2\pi \leq \frac{2\pi}{\hbar\beta}(\tau - \tau') \leq 0$, temos

$$\frac{1}{a^2} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{m^2 + (\omega/a)^2} e^{-iam(\tau - \tau')} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{(\omega/a)^2} + 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\cos[a|\tau - \tau'|m]}{m^2 + (\omega/a)^2} \right]. \quad (\text{A.23})$$

Logo, a generalização da equação (A.18) é:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\tau - \tau') &= \frac{1}{\hbar\beta} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\omega_m^2 + \omega^2} e^{-i\omega_m(\tau - \tau')} \\ &= \frac{1}{2\omega} \frac{\cosh \omega[|\tau - \tau'| - \hbar\beta/2]}{\sinh(\omega\hbar\beta/2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

¹Gradsteyn, p. 40, fórmula 1.445.2

Nos cálculos a seguir, vamos utilizar a função de Green (A.24) sem o modo $m = 0$, para garantir a convergência da teoria. Ou seja,

$$\tilde{G}(\tau - \tau') = \frac{1}{2\omega} \frac{\cosh \omega[|\tau - \tau'| - \hbar\beta/2]}{\sinh(\omega\hbar\beta/2)} - \frac{1}{\hbar\beta\omega^2}. \quad (\text{A.25})$$

Deste modo, como vamos adotar $M = 1$ nos cálculos dos diagramas, temos

$$G_{\tau\tau'} = \frac{\hbar}{2\omega} \frac{\cosh \omega[|\tau - \tau'| - \hbar\beta/2]}{\sinh(\omega\hbar\beta/2)} - \frac{1}{\beta\omega^2}. \quad (\text{A.26})$$

Diagrama de dois loops $\propto g_4$

$$\text{Diagrama} \propto \int_0^{\hbar\beta} d\tau G_{\tau\tau}^2.$$

De (A.26),

$$G_{\tau\tau} = \frac{\hbar}{2\omega} \coth\left(\frac{\hbar\beta\omega}{2}\right) - \frac{1}{\beta\omega^2}. \quad (\text{A.27})$$

Fazendo $x \equiv \hbar\beta\omega$ e usando (1.29), reescrevemos

$$G_{\tau\tau} = \frac{\hbar}{\omega} \frac{1}{x} \left\{ \frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} - 1 \right\} = a^2. \quad (\text{A.28})$$

Logo,

$$\int_0^{\hbar\beta} d\tau G_{\tau\tau}^2 = \hbar\beta(a^2)^2 = \hbar\beta a^4. \quad (\text{A.29})$$

Diagrama de dois loops $\propto g_3^2$

$$\text{Diagrama} \propto \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau'}^3.$$

Reescrevemos a expressão (A.26) em termos de $x \equiv \hbar\beta\omega$, assim, obtemos

$$\begin{aligned} G_{\tau\tau'} &= \frac{\hbar}{2\omega} \frac{\cosh \omega(|\tau - \tau'| - \hbar\beta/2)}{\sinh(\hbar\beta\omega/2)} - \frac{1}{\beta\omega^2} \\ &= \frac{\hbar}{\omega} \frac{1}{2x} \frac{1}{\sinh x/2} [x \cosh(\omega|\tau - \tau'| - x/2) - 2 \sinh(x/2)] \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

e, portanto,

$$G_{\tau\tau'}^3 = \left(\frac{\hbar}{\omega}\right)^3 \frac{1}{[2x \sinh x/2]^3} [x \cosh(\omega|\tau - \tau'| - x/2) - 2 \sinh(x/2)]^3. \quad (\text{A.31})$$

Chamando

$$b \equiv 2 \sinh x/2,$$

encontramos

$$\begin{aligned} \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau'}^3 &= \left(\frac{\hbar}{\omega}\right)^3 \frac{1}{[2x \sinh x/2]^3} \\ &\left\{ x^3 \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' \cosh^3(\omega|\tau - \tau'| - x/2) \right. \\ &- 3x^2 b \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' \cosh^2(\omega|\tau - \tau'| - x/2) \\ &+ 3b^2 x \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' \cosh(\omega|\tau - \tau'| - x/2) \\ &\left. - b^3 \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' \right\}. \quad (\text{A.32}) \end{aligned}$$

As integrais acima estão calculadas na seção A.2. Então, usando as equações (A.50), (A.51) e (A.52), temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau'}^3 &= \left(\frac{\hbar}{\omega}\right)^3 \frac{1}{8x^3 \sinh^3 x/2} x \frac{\hbar\beta}{\omega} \\ &\left\{ \frac{x^2}{6} [\sinh 3x/2 + 9 \sinh x/2] \right. \\ &- 3x \sinh x/2 [\sinh x + x] + 24 \sinh^3 x/2 \\ &\left. - 8 \sinh^3 x/2 \right\}. \quad (\text{A.33}) \end{aligned}$$

Com as equações (A.56) e (A.57), chegamos em

$$\begin{aligned} \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau'}^3 &= \left(\frac{\hbar}{\omega}\right)^3 \frac{1}{24x^2 \sinh^2 x/2} \frac{\hbar\beta}{\omega} \\ &\left\{ \frac{x^2}{2} [\sinh x \coth x/2 - 1] + \frac{x^2}{2} \cosh x \right. \\ &\left. - 4x^2 - 9x \sinh x + 24 \cosh x - 24 \right\} \quad (\text{A.34}) \end{aligned}$$

e, com a equação (A.60), obtemos

$$\int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau'}^3 = \frac{\hbar\beta}{\omega} a_2^6, \quad (\text{A.35})$$

em que

$$a_2^6 = \left(\frac{\hbar}{\omega}\right)^3 \frac{1}{24x^2 \sinh^2 x/2} \left[-24 - 4x^2 + 24 \cosh x + x^2 \cosh x - 9x \sinh x \right]. \quad (\text{A.36})$$

Diagrama de três loops $\propto g_4^2$

$$\text{Diagrama de três loops} \propto \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau} G_{\tau\tau'}^2 G_{\tau'\tau'}.$$

Utilizando (A.27), temos:

$$\int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau} G_{\tau\tau'}^2 G_{\tau'\tau'} = \left(\frac{\hbar}{\omega x}\right)^2 \left[\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} - 1\right]^2 \left(\frac{\hbar}{\omega}\right)^2 \frac{1}{4x^2} \times \frac{1}{\sinh^2 x/2} \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' [x \cosh(\omega|\tau - \tau'| - x/2) - 2 \sinh x/2]^2. \quad (\text{A.37})$$

Por outro lado, usando as equações (A.50) e (A.51), chegamos a

$$\int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau} G_{\tau\tau'}^2 G_{\tau'\tau'} = \left(\frac{\hbar}{\omega x}\right)^2 \left[\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} - 1\right]^2 \times \left(\frac{\hbar}{\omega}\right)^2 \frac{1}{4x^2 \sinh^2 x/2} \frac{x}{2} \frac{\hbar\beta}{\omega} [x(\sinh x + x) - 8 \sinh^2 x/2]. \quad (\text{A.38})$$

Como

$$x(\sinh x + x) - 8 \sinh^2 x/2 = 4 + x^2 - 4 \cosh x + x \sinh x, \quad (\text{A.39})$$

obtemos

$$\int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau} G_{\tau\tau'}^2 G_{\tau'\tau'} = \frac{\hbar\beta}{\omega} a_2^4 (a^2)^2, \quad (\text{A.40})$$

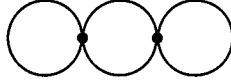
com

$$\int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau'}^2 = \frac{\hbar\beta}{\omega} a_2^4 \quad (\text{A.41})$$

e

$$a_2^4 = \left(\frac{\hbar}{\omega}\right)^2 \frac{1}{8x} \frac{1}{\sinh^2 x/2} [4 + x^2 - 4 \cosh x + x \sinh x]. \quad (\text{A.42})$$

Ou seja, o diagrama



pode ser obtido por meio de

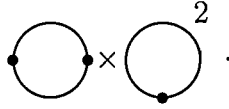


Diagrama de três loops $\propto g_4^2$

$$\text{Diagrama de três loops} \propto \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau'}^4.$$

Fazendo $b = 2 \sinh x/2$ na equação (A.30), obtemos:

$$\begin{aligned} G_{\tau\tau'}^4 &= \left(\frac{\hbar}{\omega}\right)^4 \frac{1}{16x^4} \frac{1}{[\sinh x/2]^4} \left[x^4 \cosh^4(\omega|\tau - \tau'| - x/2) \right. \\ &\quad - 4bx^3 \cosh^3(\omega|\tau - \tau'| - x/2) + 6b^2x^2 \cosh^2(\omega|\tau - \tau'| - x/2) \\ &\quad \left. - 4b^3x \cosh(\omega|\tau - \tau'| - x/2) + b^4 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Utilizando as expressões (A.50), (A.51), (A.52) e (A.53), encontramos

$$\begin{aligned} \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau'}^4 &= \\ &\left(\frac{\hbar}{\omega}\right)^4 \frac{1}{16x^4} \frac{1}{\sinh^4 x/2} \frac{\hbar\beta}{\omega} \left\{ x^4 \left[\frac{3}{8} \hbar\beta\omega + \frac{1}{2} \sinh x + \frac{1}{16} \sinh 2x \right] \right. \\ &\quad - 4bx^3 \left[\frac{1}{6} \sinh 3x/2 + \frac{3}{2} \sinh x/2 \right] + 3b^2x^2 [\sinh x + x] \\ &\quad \left. - 8b^3x \sinh x/2 + b^4 \hbar\beta\omega \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Substituindo $b = 2 \sinh x/2$ na expressão anterior, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau'}^4 &= \frac{\hbar\beta}{\omega} \left(\frac{\hbar}{\omega}\right)^4 \frac{1}{16x^3} \frac{1}{\sinh^4 x/2} \\
&\left\{ \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 \sinh x + \frac{x^3}{16} \sinh 2x \right. \\
&- \frac{4x^2}{3} \sinh x/2 \sinh 3x/2 - 12x^2 \sinh^2 x/2 \\
&+ 12x \sinh x \sinh^2 x/2 + 12x^2 \sinh^2 x/2 \\
&\left. - 64 \sinh^4 x/2 + 16 \sinh^4 x/2 \right\} \\
&= \frac{\hbar\beta}{\omega} \left(\frac{\hbar}{\omega}\right)^4 \frac{1}{16x^3} \frac{1}{\sinh^4 x/2} \left\{ \frac{1}{48} [18x^4 + 24x^3 \sinh x \right. \\
&+ 3x^3 \sinh 2x - 64x^2 \sinh x/2 \sinh 3x/2] \\
&\left. + 12x \sinh x \sinh^2 x/2 - 48 \sinh^4 x/2 \right\}. \tag{A.45}
\end{aligned}$$

Usando as relações (A.65), (A.63) e (A.62), encontramos

$$\int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' G_{\tau\tau'}^4 = \frac{\hbar\beta}{\omega} a_2^8, \tag{A.46}$$

com

$$\begin{aligned}
a_2^8 &= \left(\frac{\hbar}{\omega}\right)^4 \frac{1}{768x^3} \frac{1}{\sinh^4 x/2} \left\{ -864 + 18x^4 + 1152 \cosh x \right. \\
&+ 32x^2 \cosh x - 288 \cosh 2x - 32x^2 \cosh 2x \\
&- 288x \sinh x + 24x^3 \sinh x + 144x \sinh 2x \\
&\left. + 3x^3 \sinh 2x \right\}. \tag{A.47}
\end{aligned}$$

A.2 Cálculo das integrais

Iniciamos calculando

$$\int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' \cosh(\omega|\tau - \tau'| - x/2). \quad (\text{A.48})$$

Para isso, é necessário analisar os casos $\tau - \tau' \geq 0$ e $\tau - \tau' < 0$. Se $\tau - \tau' \geq 0$, integramos nos intervalos $0 \leq \tau \leq \hbar\beta$ e $0 \leq \tau' \leq \tau$, portanto, $|\tau - \tau'| = \tau - \tau'$. Por outro lado, quando $\tau - \tau' < 0$, integramos em $0 \leq \tau \leq \hbar\beta$ e $\tau < \tau' < \hbar\beta$, logo, $|\tau - \tau'| = -\tau + \tau'$.

Ou seja,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' \cosh \omega(|\tau - \tau'| - \hbar\beta/2) = \\ & \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int_0^{\tau} d\tau' \cosh \omega(\tau - \tau' - \hbar\beta/2) \\ & + \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int_{\tau}^{\hbar\beta} d\tau' \cosh \omega(\tau' - \tau - \hbar\beta/2) = \\ & -\frac{1}{\omega} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \sinh \omega(\tau - \tau' - \hbar\beta/2) \Big|_0^{\tau} \\ & + \frac{1}{\omega} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \sinh \omega(\tau' - \tau - \hbar\beta/2) \Big|_{\tau}^{\hbar\beta} = \\ & \frac{2\hbar\beta}{\omega} \sinh \omega \hbar\beta/2. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Fazendo $x \equiv \omega \hbar\beta$, reescrevemos

$$\int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' \cosh(\omega|\tau - \tau'| - x/2) = \frac{2\hbar\beta}{\omega} \sinh x/2.$$

Do mesmo modo, para um dado r , com $r = 2, 3, \dots$, temos

$$\int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' \cosh[r(\omega|\tau - \tau'| - x/2)] = \frac{2\hbar\beta}{r\omega} \sinh x/2. \quad (\text{A.50})$$

Usando as relações (A.55) e (A.50), obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' \cosh^2(\omega|\tau - \tau'| - x/2) = \\ & \frac{1}{2} \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' \cosh 2(\omega|\tau - \tau'| - x/2) + \frac{1}{2} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int_0^{\hbar\beta} d\tau' = \\ & \frac{1}{2} \frac{\hbar\beta}{\omega} \sinh x + \frac{1}{2} (\hbar\beta)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Analogamente, utilizando (A.54) e (A.50), encontramos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' \cosh^3(\omega|\tau - \tau'| - x/2) = \\
& \frac{1}{4} \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' \cosh 3(\omega|\tau - \tau'| - x/2) \\
& + \frac{3}{4} \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' \cosh(\omega|\tau - \tau'| - x/2) = \\
& \frac{\hbar\beta}{6\omega} \sinh 3x/2 + \frac{3\hbar\beta}{2\omega} \sinh x/2.
\end{aligned} \tag{A.52}$$

Finalmente, de (A.61) e (A.50), temos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' \cosh^4(\omega|\tau - \tau'| - x/2) = \\
& \frac{3}{8} \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' + \frac{1}{2} \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' \cosh 2(\omega|\tau - \tau'| - x/2) \\
& + \frac{1}{8} \int_0^{\hbar\beta} \int_0^{\hbar\beta} d\tau d\tau' \cosh 4(\omega|\tau - \tau'| - x/2) = \\
& \frac{3}{8} (\hbar\beta)^2 + \frac{1}{2} \frac{\hbar\beta}{\omega} \sinh x + \frac{1}{16} \frac{\hbar\beta}{\omega} \sinh 2x.
\end{aligned} \tag{A.53}$$

A.3 Relações matemáticas úteis

Apresentamos abaixo as relações que utilizamos em nosso estudo.

$$\cosh^3 y = \frac{1}{4} \cosh 3y + \frac{3}{4} \cosh y, \quad (\text{A.54})$$

$$\cosh^2 y = \frac{1}{2} \cosh 2y + \frac{1}{2}, \quad (\text{A.55})$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \quad (\text{A.56})$$

$$\sinh^2 y = \frac{1}{2}(\cosh 2y - 1), \quad (\text{A.57})$$

$$\sinh y = 2 \sinh y/2 \cosh y/2, \quad (\text{A.58})$$

e

$$\cosh 2y = 2 \cosh^2 y - 1. \quad (\text{A.59})$$

Das equações (A.58) e (A.59), temos

$$\sinh y \coth y/2 - 1 = \cosh y, \quad (\text{A.60})$$

$$\cosh^4 y = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cosh 2y + \frac{1}{8} \cosh 4y, \quad (\text{A.61})$$

e

$$\sinh^4 y = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cosh 2y + \frac{1}{8} \cosh 4y. \quad (\text{A.62})$$

De (A.57) e (A.58):

$$\sinh y \sinh^2 y/2 = \frac{1}{4} \sinh 2y - \frac{1}{2} \sinh y. \quad (\text{A.63})$$

De (A.56):

$$\sinh 3y/2 = \sinh y \cosh y/2 + \cosh y \sinh y/2, \quad (\text{A.64})$$

e, com as relações (A.58) e (A.57), temos:

$$\sinh y/2 \sinh 3y/2 = \frac{1}{2}[\cosh 2y - \cosh y]. \quad (\text{A.65})$$

Referências Bibliográficas

- [1] D.J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena* (World Scientific, 1984, second edition)
- [2] E. Brézin, J.C. Le Guillou e J. Zinn-Justin, *Field Theoretical Approach to Critical Phenomena em Phase Transitions and Critical Phenomena*, editado por C. Domb e M.S. Green (Academic Press, 1976)
- [3] A. Okopinska, *Nonstandard Expansion Techniques for the Effective Potential in $\lambda\phi^4$ Quantum Field Theory*, Phys. Rev. D **35**, 1835 (1987)
- [4] A. Okopinska, *Nonstandard Expansion Techniques for the Finite-Temperature Effective Potential in $\lambda\phi^4$ Quantum Field Theory*, Phys. Rev. D **36**, 2415 (1987)
- [5] N. Tetradis e C. Wetterich, *Critical Exponents from the Effective Average Action*, Nucl. Phys. B **422**, 541 (1994)
- [6] P.M. Stevenson, *Gaussian Effective Potential: Quantum Mechanics*, Phys. Rev. D **30**, 1712 (1984)
- [7] R.P. Feynman e A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill Book Company, 1965)
- [8] H. Kleinert, *Improving the Variational Approach to Path Integrals*, Phys. Lett. B **280**, 251 (1992)
- [9] H. Kleinert, *Systematic Corrections to the Variational Calculation of the Effective Classical Potential*, Phys. Lett. A **173**, 332 (1993)
- [10] R.P. Feynman e H. Kleinert, *Effective Classical Partition Functions*, Phys. Rev. A **34**, 5080 (1986)

- [11] J.M. Yeomans, *Statistical Mechanics of Phase Transitions* (Oxford University Press, 1992)
- [12] R. Fernández, J. Fröhlich e A.D. Sokal, *Random Walks, Critical Phenomena, and Triviality in Quantum Field Theory* (Springer-Verlag, 1992)
- [13] M. Consoli e P.M. Stevenson, “Triviality” and the Perturbative Expansion in $\lambda\phi^4$ Theory, hep-ph/9403299
- [14] M. Consoli e P.M. Stevenson, Landau Poles, Ultraviolet Fixed Points, and “Triviality” in the Perturbative Expansion of $(\lambda\phi^4)_4$, Mod. Phys. Lett. A **11**, 2511 (1996)
- [15] M. Consoli e P.M. Stevenson, “Triviality” Made Easy: the Real $(\lambda\phi^4)_4$ Story, hep-ph/9407334
- [16] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics* (World Scientific, 1995)
- [17] I. Stancu e P.M. Stevenson, Second-Order Corrections to the Gaussian Effective Potential of $\lambda\phi^4$ Theory, Phys. Rev. D **42**, 2710 (1990)
- [18] I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, 1994)
- [19] H. Kleinert, W. Kürzinger e A. Pelster, Smearing Formula for Higher-Order Effective Classical Potentials, quant-ph/9806016, J. Phys. A - Math. Gen. **31**, 8307 (1998)
- [20] H. Kleinert e H. Meyer, Variational Calculation of Effective Classical Potential at $T \neq 0$ to Higher Orders, hep-th/9504078, Phys. Lett. A **184**, 319 (1994)
- [21] H. Kleinert, Effective Classical Potential for Fluctuating Field Systems of Finite Size, Phys. Lett. A **118**, 195 (1986)
- [22] C.G. Bollini, J.J. Giambiagi e A.G. Dominguez, Analytic Regularization + Divergences of Quantum Field Theories, Nuovo Cimento **31**, 550 (1964)
- [23] G.’t Hooft e M. Veltman, Regularization and Renormalization of Gauge Fields, Nucl. Phys. B **44**, 189 (1972)

- [24] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1993, second edition)
- [25] M. Le Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory* (Oxford University Press, 1991)
- [26] J. Zinn-Justin, *Precise Determination of Critical Exponents and Equation of State by Field Theory Methods*, Phys. Rep. **344**, 159 (2001)
- [27] E. Brézin, D.J. Wallace e K.G. Wilson, *Feynman-Graph Expansion for the Equation of State Near the Critical Point*, Phys. Rev. B **7**, 232 (1973)
- [28] M. Kaku, *Quantum Field Theory, a Modern Introduction* (Oxford University Press, 1993)
- [29] P.M. Stevenson e R. Tarrach, *The Return of $\lambda\phi^4$* , Phys. Lett. B **176**, 436 (1986)
- [30] P.M. Stevenson B. Allès e R. Tarrach, *$O(N)$ -Symmetric $\lambda\phi^4$ Theory: The Gaussian-Effective-Potential Approach*, Phys. Rev. D **35**, 2407 (1987)
- [31] P.M. Stevenson, *Dimensional Continuation and the two $(\lambda\phi^4)_4$ theories*, Z. Phys. C **35**, 467 (1987)
- [32] U. Ritschel, *Autonomous Renormalization of ϕ^4 in Finite Geometry*, Phys. Lett. B **318**, 617 (1993)
- [33] M-C. Chang e A. Houghton, *Critical Amplitude Ratio of the Confluent Singular Term for the Specific Heat: Calculations to Order ϵ^2 for Systems with Continuous Symmetry*, Phys. Rev. B **21**, 1881 (1980)
- [34] J. Collins, *Renormalization* (Cambridge University Press, 1984)
- [35] P.M. Stevenson, *Gaussian Effective Potential. II. $\lambda\phi^4$ Field Theory*, Phys. Rev. D **32**, 1389 (1985)
- [36] U. Ritschel, *Renormalization of the Post-Gaussian Effective Potential*, Z. Phys. C **51**, 469 (1991)
- [37] A. Okopinska, *Renormalization of the Scalar Quantum Field Theory in the Optimized Expansion*, Acta Phys. Pol. B **20**, 1033 (1989)

- [38] T. Barnes e G.I. Ghandour, *Renormalization of Trial Wave Functionals Using the Effective Potential*, Phys. Rev. D **22**, 924 (1980)