

Versão Simplificada da Tese.

17th October 2007

1 Título:

Correlações e interferência em sistemas atômicos de Bose-Einstein frios

2 Resumo

Este trabalho consiste em um estudo teórico da coexistência de condensados de Bose-Einstein atômicos acoplados. Esta mistura de condensados pode consistir em átomos de um mesmo elemento em vários estados hiperfinos (estado interno). Outra situação em que esta mistura ocorre é quando um átomo em um único estado interno pode ocupar mais de um estados externo. As semelhanças e diferenças entre condensados de Bose-Einstein com vários estados internos e externos serão analisadas cuidadosamente. Somente na aproximação de Bose-Hubbard os estados externos serão tratados como internos.

Condensados envolvendo duas ou mais espécies serão estudados com a aproximação de Thomas-Fermi com estados coerentes. Esta aproximação implica em desprezar o termo de energia cinética.

Muitos resultados analíticos serão exibidos para a condição em que todos os comprimentos de espalhamento são iguais entre si. Esta condição é bastante próxima da observada em um condensado de vários estados internos. Além disso serão apresentados alguns resultados anáiticos onde o comprimento de espalhamento para espécies diferentes é zero. Esta condição é verificada para a aproximação de Bose-Hubbard para misturas de condensados com estados externos. O objetivo principal destes cálculos é estudar o papel da fase relativa entre as funções de onda nas soluções estacionárias e na evolução temporal destes sistemas.

3 Introdução

3.1 Condensação de Bose-Einstein

A condensação de Bose-Einstein é um fenômeno que envolve o ramo da Física tradicionalmente associado à fenômenos microscópicos, a Mecânica Quântica, para descrever um sistema macroscópico, o condensado de Bose-Einstein. Uma

maneira de introduzir este tema é seguir resumidamente os passos históricos que culminaram nos experimentos atuais envolvendo condensados de Bose-Einstein atômicos.

Durante o século XIX, a Termodinâmica foi construída a partir de dados experimentais. Foi só posteriormente que Ludwig Boltzmann interpretou as Leis da Termodinâmica a partir da Mecânica Clássica. Assim a Mecânica Estatística Clássica foi uma ponte construída entre dois ramos da Física bem fundamentados que estavam “separados”. Sabia-se de onde partir e para onde chegar.

Já a Mecânica Estatística Quântica foi construída de modo diferente. Resultados particulares que indicavam um princípio de quantização iam sendo amontoados pelas mentes mais brilhantes da época: espectro de radiação do corpo negro por Max Planck em 1900, efeito fotoelétrico e quantização das ondas eletromagnéticas por Albert Einstein em 1905, quantização do momento angular dos elétrons no átomo por Niels Bohr em 1913, etc.

No ano de 1924 Satyendra Nath Bose desenvolveu uma nova dedução da lei de Planck para a radiação de corpo negro. Para isso ele utilizou o conceito de Einstein de quanta de luz (fóton na nomenclatura moderna) e desenvolveu uma estatística destas “partículas”. Em um gás de fótons o número de partículas não é fixado. Por exemplo, em uma cavidade de um corpo negro, fótons são emitidos e absorvidos pelas paredes do sistema. A expressão para o número médio de fótons com frequência ν para uma cavidade de um corpo negro com temperatura T é:

$$\langle N(\nu) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (1)$$

Ele enviou o trabalho sobre tal estatística para Albert Einstein que traduziu o texto para o alemão e o publicou. No ano seguinte, 1925, Einstein generalizou a aplicação desta estatística para um gás ideal de partículas dotadas de massa. Como partículas massivas não podem ser criadas e nem destruídas, Einstein usou a mesma estatística de Bose acrescentando um vínculo: o número de partículas. A expressão para o número médio de partículas fica sendo:

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{(E-\mu)}{k_B T}} - 1} \quad (2)$$

onde μ é o potencial químico, multiplicador de Lagrange que garante a conservação do número de partículas.

Fazendo $\mu = 0$ e considerando a energia do fóton como $E = h\nu$ a expressão 1 aparece como um caso particular de 2 (exceto pelo fato de que em 1 a média do número de partículas é escrita como função de ν no lugar de E). Assim a expressão 2 vale para qualquer partícula, com ou sem massa. Hoje em dia esta estatística e as partículas que a seguem são denominadas respectivamente estatística de Bose-Einstein e bósons.

A expressão 2 já impõe a condição $(E - \mu) \geq 0$ para que a média $\langle N(E) \rangle$ não seja negativa. Usando uma escala onde a energia mínima de um bóson é 0, é suficiente que $\mu \leq 0$. Levando-se em conta que E é uma grandeza contínua

o cálculo do número total de partículas do sistema com temperatura T é dado por:

$$N_{tot} = \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \langle N(E) \rangle dE + \langle N(0) \rangle \quad (3)$$

Para um gás de fótons μ é nulo. Assim $\langle N(0) \rangle$ diverge (ver expressão §\ref{eq-2.2}). Mas isso não constitui problema algum porque não existe um fóton com $E = 0$ (pois neste caso $\nu = 0$). Para um gás de bósons massivos, a condição $\mu < 0$ garante que $\langle N(0) \rangle$ não diverge. Uma vez que o número total de partículas se conserva, o decréscimo de T deve ser acompanhado de um aumento de μ . Caso contrário todas as médias $\langle N(E) \rangle$ (incluindo $\langle N(0) \rangle$) crescem e N_{tot} não se conserva. Isto faz com que para uma certa temperatura crítica T_c , μ chegue a zero. Esta temperatura crítica é de:

$$T_c = \left(\frac{\rho}{\zeta(\frac{3}{2})} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{2\pi m k_B} \quad (4)$$

onde $\zeta(\frac{3}{2})$ é a função zeta de Riemann e vale aproximadamente 2.6124.

Diminuindo a temperatura abaixo de T_c , μ não pode diminuir (pois isso violaria a conservação do número) e nem aumentar (porque $\mu > 0$ viola a positividade da média do número de partículas). Assim, para $T \leq T_c$, $\mu = 0$. A condição $\mu = 0$ corresponde a uma divergência em $\langle N(0) \rangle$ e conseqüentemente em N_{tot} . Como o número de partículas é conservado, o que deve ser calculada é a fração $f = \frac{\langle N(0) \rangle}{N_{tot}}$. Para $T > T_c$, $\langle N(0) \rangle \ll N_{tot}$ de modo que $f \approx 0$. Mas para $T \leq T_c$, $f = (1 - \frac{T}{T_c})$. Esta mudança de comportamento do sistema é denominada condensação de Bose-Einstein e as partículas com energia mínima de condensados de Bose-Einstein.

No mesmo ano que Bose postulou sua estatística (1924), Wolfgang Pauli concluiu a partir de dados experimentais da Física atômica da época que dois elétrons não podem ter simultaneamente a mesma energia, mesmo momento angular, etc. Este princípio é denominado princípio da exclusão de Pauli.

Em 1926, Louis de Broglie se inspirou na idéia de Einstein de que a luz era uma onda que podia se comportar como uma partícula para postular que toda partícula poderia se comportar como uma onda. Para isso ele usou a relação entre comprimento de onda e momento válida para fótons $p = \frac{h}{\lambda}$ para definir o comprimento de onda de cada partícula dado por $\lambda = \frac{h}{p}$, onde p é o momento da partícula. Este comprimento de onda é denominado “comprimento de onda de de Broglie” e sua idéia “dualidade partícula-onda”.

Paralelamente à tudo isso, Werner Heisenberg (1925) e Erwin Schrödinger (1926) fundamentaram a Mecânica Quântica com abordagens matemáticas diferentes mas com conseqüências físicas equivalentes. A abordagem de Heisenberg era bastante abstrata ao passo que a de Schrödinger, inspirado nas idéias de Broglie, associava todo sistema físico com uma onda. A equação desta onda é chamada “equação de Schrödinger”¹. Foi o próprio Schrödinger que no mesmo

¹A interpretação física da onda de de Broglie no contexto da abordagem de Schrödinger da

ano de 1926 provou a equivalência das duas abordagens. Todos os resultados que indicavam um princípio de quantização deixaram de ser vistos como casos bizarros que apareciam a toda hora para se tornarem consequências naturais da nova abordagem teórica. O preço a se pagar era a renúncia da descrição clássica de uma partícula como tendo posição e momento bem definidos.

No ano de 1926 Enrico Fermi aplicou a descrição quântica em um sistema de partículas idênticas. Ele descobriu que havia uma conexão entre spin das partículas e a estatística que elas seguiam. O spin só podia ser inteiro ou semi-inteiro. Se o spin fosse semi-inteiro, duas partículas distintas não podiam ser associadas à mesma função de onda. Assim ele pôde generalizar o princípio da exclusão de Pauli para qualquer partícula com spin semi-inteiro (batizadas de férmions). No mesmo ano, Paul Dirac formulou a estatística dos férmions que foi denominada estatística de Fermi-Dirac. Em contrapartida, partículas de spin inteiro não seguiam o princípio da exclusão de Pauli: um número qualquer de partículas poderiam ter a mesma função de onda. O comportamento estatístico destas partículas coincidia com a estatística de Bose-Einstein.

Nas décadas seguintes, todas as partículas descobertas e que eram dotadas de massa eram férmions. Por exemplo, as partículas que constituíam a estrutura da matéria, prótons, neutrons e elétrons, eram férmions. Assim parecia não haver um bóson massivo na natureza. A condensação de Bose-Einstein parecia ser um resultado puramente teórico. Mas ainda que houvessem bósons massivos na natureza, as conclusões de Einstein foram obtidas para um gás ideal clássico com a imposição da estatística de Bose-Einstein. No tratamento quântico de um sistema de partículas, a estatística de Bose-Einstein aparece de forma natural, mas a implementação de interações entre as partículas correlaciona as funções de onda e tornam o problema muito mais complicado do que na Mecânica Clássica. E quanto à temperatura crítica de condensação? Será que ela poderia ser atingida com a tecnologia disponível na época? Estes problemas (que são tanto de ordem teórica como de ordem experimental) só puderam ser solucionados a medida que aparatos experimentais e os métodos matemáticos da Física foram se desenvolvendo para o tratamento de outras questões.

Em 1937 os físicos Pyotr Leonidovich Kapitsa, John F. Allen e Don Misener descobriram que considerando efeitos puramente quânticos um gás pode sofrer uma transição de fase e se comportar como um fluido de viscosidade nula: era o fenômeno da superfluidez. No ano seguinte, baseado nos experimentos de liquefação do hélio, Fritz London sugeriu que a estatística deste sistema era determinada pelo spin total de cada átomo, como se eles não “sentissem” a estrutura interna dos vizinhos. Como o ${}^4\text{He}$ tem spin total inteiro, ele seria tratado

Mecânica Quântica não é tão simples quanto parece. O simples cálculo do comprimento de onda de Broglie pressupõe que o momento seja bem determinado. Comparando a relação de deBroglie $\lambda p = h$ e o princípio da incerteza de Heisenberg $\sigma_x \sigma_p \geq h$, é possível interpretar o comprimento de onda de deBroglie como sendo a escala da incerteza das partículas σ_x quando o momento da partícula é da ordem de sua própria incerteza σ_p . É neste sentido que o comprimento de onda de deBroglie é uma estimativa da localizibilidade da partícula. Se a escala espacial em que ocorre um fenômeno é da ordem do comprimento de onda de deBroglie, então é necessário usar uma descrição quântica do sistema. Caso contrário, o sistema pode ser tratado classicamente.

como um bóson. Tendo massa, ele seria um candidato natural a bóson massivo e portanto o fenômeno da condensação de Bose-Einstein poderia ocorrer. A temperatura crítica prevista para a condensação de um gás ideal de ${}^4\text{He}$ é de $T_c = 3.13\text{K}$ e a temperatura crítica experimental para a superfluidez do mesmo é de $T = 2.19\text{K}$. Assim a superfluidez estava relacionada com o fato de que uma fração das partículas estavam no estado fundamental. Em um gás ideal de ${}^4\text{He}$ nesta temperatura haveria uma fração de $f = (1 - \frac{2.19}{3.13}) \approx 0.3$ partículas no estado fundamental. Porém, as correlações entre as partículas no hélio líquido não podem ser negligenciadas de forma que a descrição do sistema como um gás pouco interagente de bósons é extremamente ruim. As conclusões de London foram endossadas por Laszlo Tisza que descreveu o hélio líquido como sendo uma mistura de um fluido normal com um superfluido composto pelas partículas com energia mínima.

A partir daí, muitos desenvolvimentos teóricos e experimentais relativos à superfluidez foram feitos por físicos de todo o mundo, sendo que as principais contribuições vieram de Lev Davidovic Landau, Richard Feynman e M. D. Cohen entre outros. Foram os desenvolvimentos teóricos na área de superfluidez que levaram Bogoliobov a tratar de maneira mais rigorosa um gás de bósons com interação fracamente repulsiva. No limite $T \rightarrow 0$ nem todas as partículas ficam no estado fundamental pois a interação repulsiva fornece energia para excitar uma fração das partículas. Paradoxalmente a teoria de Bogoliobov acabou não servindo para descrever o hélio líquido. Neste sistema as interações não são fracas o suficiente para aplicar a teoria de Bogoliobov. Mas por outro lado, abriu-se a perspectiva de “fabricar” um sistema onde quase todas as partículas estão no estado fundamental. O condensado de Bose-Einstein já não parecia tão distante da realidade.

Para produzir um condensado de Bose-Einstein seria necessário um gás de átomos com spin total inteiro, frios o suficiente para estar bem abaixo da temperatura crítica (para que uma fração significativa pudesse permanecer no estado fundamental). Além disso, o gás deveria ser rarefeito o suficiente para que as correlações entre as partículas permitam que as funções de onda de cada átomo se sobreponha de forma quase independente. pudessem ser negligenciadas ou pelo menos tratadas com alguma aproximação conveniente. Uma aproximação onde as funções de onda são consideradas independentes mas a energia de interação é contabilizada é a chamada “aproximação de campo médio”. Ela consiste em substituir a interação de cada par de partículas por um “campo médio” que atue no sistema como um todo. Este campo médio é estimado parametrizando as interações efetivas de contato (sem momento angular) em termos do comprimento de espalhamento a de um par de partículas. O comprimento de espalhamento é uma estimativa do alcance da interação de uma partícula com outra. O sinal positivo ou negativo de a está ligado respectivamente ao caráter atrativo ou repulsivo da interação embora hajam sutilezas nesta interpretação física². Um

²Na verdade, para os átomos alcalinos usados nos experimentos envolvendo condensação de Bose-Einstein, as interações geralmente são atrativas. Sem descrever o potencial correspondente à esta interação, podem ocorrer estados ligados, o que implica que hajam mínimos e máximos locais no módulo quadrado da função de onda. Por isso que os átomos alcalinos

critério para que a rarefação seja suficiente para tal é considerar o produto ρa^3 . Como a^3 pode ser interpretado como o volume em torno do qual a partícula interage, ρa^3 é o número médio de partículas em um cubo de volume de interação a^3 . Para que as partículas não interajam muito entre si, é necessário que elas estejam em média com uma distância muito maior do que a o que implica na condição $\rho a^3 \ll 1$. Assim dizer que o gás é rarefeito é precisamente dizer que $\rho a^3 \ll 1$. Neste caso, o potencial usado como campo médio é de $\frac{4\pi\hbar a \rho N}{m}$. Se $\rho a^3 \approx 1$, como no hélio líquido, a distância entre as partículas é da tal que as correlações entre as partículas não podem ser negligenciadas. Neste caso a aproximação de campo médio não descreve bem o sistema.

Mas há ainda uma complicação extra para a condensação de Bose-Einstein. Se a densidade diminui infinitamente, as distâncias entre as partículas crescem acima do comprimento de deBroglie médio de cada uma delas. O comprimento de onda de deBroglie médio em um gás com temperatura T é denominado comprimento térmico e vale $\lambda_T = \frac{h}{\langle p \rangle} = h\sqrt{\frac{2k_B T}{3m}}$. O volume λ_T^3 é o volume dentro do qual a partícula pode ser localizada. Para que as funções de onda das partículas se sobreponham, é necessário que várias partículas ocupem um volume λ_T^3 . O número de partículas em tal volume é $\rho\lambda_T^3$ de modo é necessária a condição para $\rho\lambda_T^3 \gg 1$. Então a densidade exigida deve estar na faixa $\frac{1}{\lambda_T^3} \ll \rho \ll \frac{1}{a^3}$. Nesta faixa ela é pequena o suficiente para que as funções de onda possam ser tratadas como independentes e grande o bastante para que elas se sobreponham.

Mesmo que todas as dificuldades acima descritas fossem contornadas, a aproximação de campo médio não dá conta da perda de partículas do sistema. Isso porque a colisão de um par de partículas no condensado de Bose-Einstein é elástica. A baixa densidade implicada na aproximação $\rho \ll \frac{1}{a^3}$ torna a probabilidade de uma colisão de três corpos extremamente pequena. Mas este processo pouco provável pode ser inelástico e fornecer energia para que uma partícula “saia” do condensado. Então este processo, embora pouco provável, se acumula ao longo do tempo provocando a diminuição lenta porém ininterrupta da densidade. Em algum momento a condição $\rho \gg \frac{1}{\lambda_T^3}$ deixará de ser satisfeita. Esta é a principal (mas não a única) causa do desaparecimento do condensado.

Paralelamente as técnicas de resfriamento foram se aperfeiçoando. No ano de 1985 Steven Chu desenvolveu técnicas de freamento de átomos através de feixes

acabam formando moléculas diatômicas. Mas a interação efetiva pode ter um caráter repulsivo. Como exemplo, pode-se imaginar a função de onda unidimensional (com máximos e mínimos locais no módulo quadrado) de um par de partículas, com $x = 0$ em uma delas, $\Psi(x) = \text{sen}(|kx + \Delta|)$, onde $\Delta > 0$ (sendo $\Delta = 0$ correspondente à ausência de interação). Δ corresponde a um deslocamento dos picos (localizados em $|x| = \frac{1}{k}(\frac{\pi}{2} + n\pi - \Delta)$ com $n = 1, 2, \dots$ para $0 < \Delta < \frac{\pi}{2}$ e em $|x| = \frac{1}{k}(\frac{\pi}{2} + (n+1)\pi - \Delta)$ para $n = 2, 3, \dots$ para $\frac{\pi}{2} < \Delta < \pi$) em relação à função de onda onde não há interação ($\Psi(x) = \text{sen}(|kx|)$, com os picos em $|x| = \frac{1}{k}(\frac{\pi}{2} + n\pi)$). Se $0 < \Delta < \frac{\pi}{2}$, os picos se aproximarão da origem $x = 0$. Mas caso $\frac{\pi}{2} < \Delta < \pi$, Δ não pode ser interpretado como um deslocamento para a origem porque os picos mais próximos dela se afastam. O que ocorre é um afastamento da origem de $\Delta - \frac{\pi}{2}$. Em um caso mais geral, é a aproximação ou afastamento dos picos de $|\Psi(x)|^2$ da origem que determinará o caráter atrativo ou repulsivo da interação atrativa determinando respectivamente o sinal negativo ou positivo de a .

de laser, reduzindo sua velocidade até cerca de 1km/h (a velocidade típica é da ordem de 4000km/h). Ele, William Daniel Phillips e Claude Cohen-Tannoudji combinaram o método de freamento ótico de partículas com evaporação magnética e em 1995 conseguiram resfriar um gás até temperaturas da ordem de nK .

Com todos estes desenvolvimentos teóricos e tecnológicos, no mesmo ano de 1995 Carl Wieman e Eric Cornell produziram o primeiro condensado de Bose-Einstein com um gás diluído e aprisionado em uma armadilha magnética à temperaturas menores do que $170nK$ de aproximadamente 2000 átomos de ^{87}Rb . Ainda no ano de 1995 de forma independente, Wolfgang Ketterle produziu um condensado de Bose-Einstein aprisionado em uma armadilha ótico-magnética com cerca de 6000 átomos de ^{87}Rb . Apenas seis anos mais tarde, 2001, os condensados de Bose-Einstein atômicos renderam o prêmio Nobel de Física para os três. De 1995 para cá inúmeros grupos no mundo inteiro vêm fazendo experimentos de Bose-Einstein atômicos com vários tipos de átomos, principalmente metais alcalinos.

Uma das propriedades mais exploradas do condensado de Bose-Einstein é seu caráter ondulatório macroscópico. Ao se “localizar” uma partícula, as informações relativas ao momento são perdidas. Antes da produção experimental dos condensados de Bose-Einstein, o caráter ondulatório de uma partícula isolada era inferido à partir do comportamento estatístico obtido após a várias repetições de um mesmo experimento. Ainda assim, estes experimentos deveriam ser feitos de modo que as imprecisões dos instrumentos fossem menores do que as incertezas que provêm dos efeitos quânticos. No condensado este problema é superado. Uma vez que todas as partículas estão fracamente relacionadas, pode-se considerar que todos os átomos se sobrepõem em uma única função de onda de uma partícula. O módulo quadrado da função de onda de uma partícula vale para todo o sistema de modo que a densidade do sistema é proporcional a este módulo. Assim uma medição da densidade local em um condensado de Bose-Einstein revela o caráter ondulatório do sistema. Como o momento das partículas é bem determinado (nas proximidades de zero) a indeterminação na posição das partículas é muito maior que a precisão dos instrumentos disponíveis hoje em dia. Experimentos envolvendo o choque entre condensados de Bose-Einstein revelam padrões de interferência e abrem a perspectiva para a construção do “laser atômico” (onde o feixe de fótons é substituído por um feixe de condensados de Bose-Einstein). Estas propriedades ondulatórias dos condensados de Bose-Einstein possuem uma relevância muito grande nas misturas de dois sistemas distintos. É o que veremos a seguir.

4 Condensados de Bose-Einstein com mais de uma espécie

O termo condensado de Bose-Einstein com mais de uma espécie (também chamado de híbrido) refere-se à uma situação geral de dois condensados distintos que in-

teragem de alguma forma. Podem ser dois condensados constituídos por tipos atômicos distintos (sejam dois elementos ou um elemento em dois estados hiperfinos), dois condensados aprisionados em regiões distintas do espaço mas que podem trocar partículas entre si, etc.

O exemplo mais simples de condensado de duas espécies é a mistura em uma mesma região do espaço de átomos de dois elementos químicos distintos. Neste caso as interações entre as partículas não podem ser descritas por uma única interação efetiva. Estão envolvidos três comprimentos de espalhamento: dois associados à interação de um par de átomos do mesmo elemento e um à interação de um par de átomos de elementos distintos. As relações entre estes três comprimentos de espalhamento determinam a relação entre as densidades de átomos de cada elemento no condensado híbrido. No limite em que os três comprimentos de espalhamento são iguais, os átomos de elementos distintos não poderão se misturar.

Um único elemento químico pode existir em mais de um estado hiperfino. Por estarem relacionados a estrutura interna dos átomos estes estados hiperfinos também são denominados estados internos. Um condensado de Bose-Einstein formado por uma mistura de átomos de um mesmo elemento ocupando dois estados hiperfinos distintos é análoga à um condensado composto de dois elementos distintos. Mas se através de um acoplamento tipo Josephson interno induzido por uma transição Raman houver a possibilidade de um átomo mudar seu estado hiperfino, o comportamento do sistema é totalmente diferente. Primeiramente o número de partículas de cada espécie não é constante, sendo que apenas a soma total de partículas é conservada. Além disso, o acoplamento Josephson interno acopla as fases das funções de onda dos dois condensados de modo que a fase relativa torna-se relevante. De forma análoga ao princípio de incerteza posição-momento há o princípio de incerteza número-ângulo. Se o número de partículas de cada espécie fica bem determinado, as informações referentes à fase relativa são perdidas e vice-versa. Juntamente com os comprimentos de espalhamento, as fases relativas determinarão as relações entre as duas densidades. Este tipo de sistema de dois níveis será estudado ao longo deste trabalho e todas estas propriedades serão analisadas cuidadosamente.

Mesmo que todos os átomos de um condensado de Bose-Einstein sejam de um único elemento químico e estejam em apenas um único estado hiperfino, eles ainda podem ocupar diferentes funções de onda de uma partícula. Estes estados são denominados estados externos porque não estão associados a estrutura interna do átomo. Os estados externos apresentam várias analogias com os estados internos. Se o número de partículas em cada estado externo não se conserva, a fase relativa entre as funções de onda de cada estado externo torna-se relevante. Neste caso também é válido o princípio da incerteza número-ângulo. Mas as diferenças entre estados internos e externos nos condensados de Bose-Einstein não podem ser negligenciadas. As diferenças e as semelhanças serão estudadas em pormenores ao longo deste trabalho, mais precisamente, no capítulo 2.

Para condensados com mais de duas espécies estendem-se as analogias. Se há N espécies é necessário descrever as interações entre as partículas com $\frac{N(N-1)}{2} +$

N comprimentos de espalhamento (N relacionados com as interações entre pares da mesma espécie e $\frac{N(N-1)}{2}$ com pares de espécies distintas).

5 Organização da tese

A tese está organizada do seguinte modo:

No capítulo 2 será discutido o problema geral do condensado de Bose-Einstein de várias espécies. Os estados internos (hiperfinos) e externos serão implementados algebricamente através do método de segunda quantização. Para ilustrar as propriedades dos estados internos e externos dois casos particulares serão analisados e comparados em pormenores. Primeiramente será estudado um condensado com apenas dois estados internos. Depois será estudado um condensado com um único estado interno mas com dois estados externos. O objetivo de tal comparação é justificar o tratamento de um estado externo como se fosse um estado interno. Além disso serão discutidas as aproximações de Thomas-Fermi e de estados coerentes nos condensados de duas espécies. Enfim, estes tratamentos serão generalizados para um número qualquer de estados.

No capítulo 3 serão apresentadas as soluções estacionárias para um condensado de duas espécies na aproximação de Thomas-Fermi com estados coerentes. Em particular serão resolvidos analiticamente o condensado de duas espécies com os três comprimentos de espalhamento iguais entre si e com comprimento nulo entre espécies diferentes.

No capítulo 4 serão apresentadas as soluções estacionárias para um condensado de três espécies com as mesmas aproximações do capítulo 3. Em particular será resolvido analiticamente o condensado de três espécies com os três comprimentos de espalhamento iguais entre si, com as diferenças de energia e transições entre os estados 1 e 2 sendo iguais aos dos estados 2 e 3 e não havendo transição entre os estados 1 e 3.

Enfim no capítulo 5 serão apresentadas as soluções estacionárias para um condensado de um número qualquer de espécies com as mesmas aproximações do capítulo 3. Em particular será resolvido analiticamente o condensado de N espécies com todos os comprimentos de espalhamento iguais entre si, com todos os estados no mesmo nível de energia (degenerados) e transições apenas entre estados vizinhos (uma partícula no estado j só pode migrar para $j - 1$ ou para $j + 1$), sendo que todas as taxas de transições são iguais entre si.

Nos capítulos 6, 7 e 8 serão analisadas as dinâmicas de condensados de Bose-Einstein para respectivamente 2, 3 e N espécies. Soluções analíticas para estas evoluções temporais serão obtidas para as mesmas condições dos capítulos 3, 4 e 5.

Enfim no apêndice serão dados alguns exemplos do papel da fase relativa entre condensados de Bose-Einstein na evolução temporal de gases em expansão livre com a aproximação gaussiana. O objetivo deste apêndice é apenas ilustrar a importância da fase relativa discutida ao longo de todo este trabalho.