

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Estados quânticos do campo eletromagnético interagindo com corrente elétrica

Antonio Jorge Dantas Farias Junior

Orientador: Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Guitman

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Guitman (IFUSP)

Prof. Dr. Alexandre Grichkov (IMEUSP)

Prof. Dr. Dmitry Vasilevich (UFABC)

São Paulo

2020

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Farias Junior, Antonio Jorge Dantas

Estados quânticos do campo eletromagnético interagindo com corrente elétrica. São Paulo, 2020.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física Nuclear

Orientador: Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Guitman

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Teoria quântica de campo; 2. Teoria eletromagnética; 3. Teoria quântica relativística; 4. Eletrodinâmica quântica; 5. Física teórica.

USP/IF/SBI-028/2020

University of São Paulo

Physics Institute

Quantum states of the electromagnetic field interacting with electric current

Antonio Jorge Dantas Farias Junior

Supervisor: Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Guitman

Dissertation submitted to the Physics Institute of the
University of São Paulo in partial fulfillment of the
requirements for the degree of Master of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Guitman (IFUSP)

Prof. Dr. Alexandre Grichkov (IMEUSP)

Prof. Dr. Dmitry Vasilevich (UFABC)

São Paulo

2020

*Dedico este trabalho à minha mãe,
Magna Nunes Paiva,
e ao meu pai,
Antônio Jorge Dantas Farias
(este in memoriam)*

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha mais profunda gratidão ao meu orientador Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Guitman, ao meu amigo (em muitos momentos professor) Dr. Aleksei Shishmarev, por toda ajuda, orientação e conhecimento que me foi passado e à minha incrível mãe, Magna Nunes Paiva, que sempre me inspirou, apoiou-me, deu-me forças e esteve presente em minha vida sempre.

Ao meu professor Dr. Andrei Smirnov, por todas lições, conselhos e amizade.

Ao João Luís Meloni Assirati, por todo apoio e ajuda.

Aos professores do Instituto de Física da USP, em especial aos professores Dr. Oscar José Pinto Eboli e Dr. Josif Frenkel, por todo conhecimento passado durante as aulas que foram de suma importância para minha formação.

Aos amigos Carlos Eduardo Goulart Goes, Márcio Cardoso Mendonça, José Napoleão Silva Filho Segundo e a minha namorada Amanda Ingrid dos Santos Barbosa por todo apoio, amizade, paciência e consideração.

Ao Marcelo Meireles dos Santos e à Solange Rosa da Silva Cardoso, por toda amizade e ajuda.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho, consideramos uma abordagem alternativa para o estudo da radiação quântica emitida por uma corrente elétrica. Nesta abordagem, estudamos os estados quânticos do campo eletromagnético interagindo com uma corrente elétrica nos calibres de Coulomb e Lorentz. Analisamos os estados finais criados pela corrente elétrica, em particular, mostramos que quando não há fótons iniciais no sistema, o estado final criado pela corrente é um estado coerente. Analisamos os valores médios dos operadores de campo potencial, campo eletromagnético e vetor de Poynting nesses estados finais. Como consideramos ambos os calibres de Coulomb e Lorentz, demonstramos a invariância de calibre para o valor médio dos operadores de campo eletromagnético e do vetor de Poynting. Estudamos o análogo quântico para o problema de radiação emitida por uma carga elétrica que se move ao longo de uma trajetória arbitrária. Construimos a probabilidade de radiação de um e muitos fótons por uma corrente elétrica arbitrária. Estudando a radiação de um fóton por elétrons movendo-se em uma trajetória circular e em linha reta como exemplos, recuperamos os resultados conhecidos das radiações síncrotron e Cherenkov. Além disso, estudamos as propriedades estatísticas dos estados quânticos do campo eletromagnético com o propósito de analisar a possibilidade de geração de emaranhamento pela corrente elétrica clássica no modelo em consideração.

Palavras-chave: Estados quânticos exatos do campo eletromagnético; Invariância do calibre; Radiação Síncrotron; Radiação Cherenkov; Emaranhamento.

Abstract

In this work we consider an alternative approach to the study of quantum radiation emitted by an electric current. In this approach we studied the states of the quantized electromagnetic field interacting with an electric current in the Coulomb and Lorentz gauges. We analyzed the final states created by the electric current, in particular, we show that in case when there is no initial photons in the system, the final state created by the current is a coherent state. We analyzed the mean values of the potential field, electromagnetic field and Poynting vector operators in these final states. Since we consider both Coulomb and Lorentz gauges, we demonstrate the gauge invariance for the mean value of the electromagnetic field and the Poynting vector operators. We studied the quantum analogue of the radiation problem for an electric charge moving along an arbitrary trajectory. We constructed one- and many-photon radiation probability by an arbitrary electric current. Studying the one-photon radiation by electrons moving in a circular trajectory and in a straight line as examples, we recover the well-known results from the synchrotron and Cherenkov radiations. Furthermore, we also studied the statistical properties of the quantum states of the electromagnetic field in order to analyze the possibility of the entanglement generation by the classical electric current in the framework of the model in consideration.

Keywords: Exact quantum states of the electromagnetic field; Gauge invariance; Synchrotron Radiation; Cherenkov Radiation; Entanglement.

Sumário

Introdução	6
1 Campo eletromagnético interagindo com corrente elétrica. Potenciais de Liénard-Wiechert. Radiação síncrotron e Cherenkov	8
1.1 Eletrodinâmica clássica	8
1.2 Potencias de Liénard-Wiechert no calibre de Lorentz	10
1.3 Potenciais de Liénard-Wiechert no calibre de Coulomb	12
1.3.1 Potencial escalar no calibre de Coulomb	12
1.3.2 Potencial vetor no calibre de Coulomb	13
1.4 Invariância de calibre	14
1.5 Campo eletromagnético correspondente aos potenciais de Liénard-Wiechert	15
1.6 Teorema de Poynting	16
1.7 Radiação síncrotron e Cherenkov	17
2 Campo eletromagnético quantizado interagindo com corrente elétrica	18
2.1 Estados do campo eletromagnético no calibre de Coulomb	18
2.2 Estados do campo eletromagnético no calibre de Lorentz	22
Apêndice: Quantização do campo eletromagnético	26
3 Valores Médios	30
3.1 Estados Iniciais	30
3.2 Valores médios dos operadores de campos potencial, elétrico e magnético	31
3.2.1 Valores médios no calibre de Coulomb	31
3.2.2 Valores médios no calibre de Lorentz	34
3.2.3 Invariância de calibre	36
3.3 Valor médio do operador de Umov-Poynting	38
3.3.1 Valor médio no calibre de Coulomb	38
3.3.2 Valor médio no calibre de Lorentz	40
3.3.3 Invariância de Calibre	41
4 Radiação eletromagnética de uma carga em movimento	43
4.1 Análogo quântico da perda e da emissão de energia	43
4.1.1 Análogo quântico da perda de energia	43
4.1.2 Análogo quântico da taxa de emissão de energia	44
4.2 Energia irradiada via probabilidade de emissão de fótons	46
4.2.1 Probabilidade de emissão de N fótons	46
4.2.2 Energia irradiada	47

4.2.3	Comparação com a fórmula de Schott	48
4.2.4	Comparação com a fórmula de Frank e Tamm	51
5	Estudo da possibilidade de emaranhamento de feixe de fótons por corrente elétrica	54
5.1	Quantização no volume finito	54
5.2	Possibilidade de emaranhamento de fótons por corrente elétrica	55
6	Comentários finais	59
	Apêndice 1	60
	Apêndice 2	63
	Apêndice 3	64
	Apêndice 4	66
	Apêndice 5	71
	Apêndice 6	73

Introdução

Nesta dissertação uma abordagem alternativa para estudar as características quânticas da radiação produzida por uma corrente elétrica é considerada. Esta abordagem é baseada no uso dos vetores de estado do campo eletromagnético quantizado interagindo com uma corrente elétrica. O tratamento mais comum usado na literatura é o tratamento de Sokolov-Ternov [1]. Este tratamento permite calcular a radiação emitida como a radiação durante transições entre níveis de energia. Na teoria quântica, a potência irradiada é definida como a taxa de emissão de energia de uma partícula carregada durante uma transição quântica, e pode ser calculada usando as soluções exatas da equação de Klein-Gordon e Dirac com campo magnético [2, 3]. Devemos notar que a abordagem proposta nesta dissertação é inferior em alguns aspectos ao tratamento de Sokolov-Ternov, pois não consideramos a natureza quântica das partículas emissoras de radiação. Para correntes que são suficientemente fortes para negligenciarmos o efeito de *backreaction* da radiação, a abordagem proposta possui várias vantagens. A principal vantagem nesta abordagem é a relativa simplicidade nos cálculos associados à emissão de um ou mais fótons. Por exemplo, para se realizar os cálculos da radiação síncrotron seguindo o esquema de Sokolov-Ternov, é necessário conhecer a forma exata das funções de onda do elétron em um campo magnético uniforme e o correspondente espectro de energia. Entretanto, em nossa abordagem se faz necessário conhecer apenas a forma explícita da corrente elétrica clássica para calcular a radiação emitida.

Como regra, o movimento de partículas carregadas em campos eletromagnéticos externos, é acompanhado por radiação eletromagnética. Os exemplos mais importantes, ao mesmo tempo relacionados ao presente trabalho, são as radiações síncrotron (RS) e ciclotron de partículas carregadas em um campo magnético. O fenômeno da RS foi descoberto há aproximadamente 70 anos [4]. Um grande número de obras foi dedicado à sua descrição teórica, tanto no âmbito da teoria clássica quanto da teoria quântica. Nos dois casos, vários métodos aproximados e casos limites foram considerados. Na eletrodinâmica clássica, o campo potencial eletromagnético criado por uma corrente elétrica arbitrária, é descrito pelos potenciais de Liénard-Wiechert (LW) [5, 6]. Acontece que a RS pode ser descrita com precisão suficiente no quadro da teoria clássica (usando potenciais LW). Schott foi o primeiro a obter uma fórmula bem sucedida para a distribuição angular de potência emitida na RS, por uma partícula que se move em uma órbita circular [7]. Uma derivação alternativa de fórmulas clássicas que descrevem as propriedades da SR e sua análise profunda, especialmente para elétrons relativísticos de alta energia, foi dada por Schwinger [8]. Entretanto, efeitos quânticos podem desempenhar um papel importante na RS e ciclotron. Em particular, efeitos de *backreaction* relacionado à radiação de fótons, aspectos da estrutura discreta dos níveis de energia dos elétrons no campo magnético e propriedades de rotação de partículas carregadas. A essência das correções quânticas nos resultados clássicos, foi apontada pela primeira vez na Ref. [9]. Na teoria quântica, a taxa de radiação de energia de uma partícula carregada no curso de transições quânticas, foi calculada usando as soluções exatas das equações de Schrödinger (caso não relativístico), Klein-Gordon (caso sem spin) ou Dirac (caso relativístico) com um campo magnético externo [1]. Usando sua teoria das fontes [10], Schwinger apresentou uma derivação original de resultados semelhantes [11]. Além disso, o tratamento quântico revelou um efeito completamente novo da autopolarização de elétrons e pósitrons, movendo-se em campo magnético uniforme e constante [12]. Observamos que, nos últimos trabalhos, apenas a radiação de um fóton no decurso das transições quânticas foi levada em consideração. No entanto, existem muitas evidências de que uma radiação de multi-fótons pode contribuir significativamente para a RS, veja e.g. [13, 14]. Deve-se notar a grande complexidade no cálculo da radiação de um fóton usando soluções das equações quânticas mencionadas acima. Há uma oportunidade de simplificar esses cálculos e também considerar a radiação de multi-fótons de forma

relativamente simples, levando em consideração a natureza quântica do campo irradiado exatamente, mas considerando que a corrente elétrica permanece clássica. O último significa que a *backreaction* da radiação nos feixes de partículas é desprezível, o que ocorre nos feixes de elétrons de alta densidade. Do ponto de vista técnico, isso significa que, ao calcular a radiação eletromagnética induzida por correntes elétricas clássicas, temos que trabalhar com estados quânticos do campo eletromagnético interagindo com correntes clássicas. Essa abordagem é considerada no presente trabalho.

Além da RS, consideraremos também a radiação Cherenkov (RC). A teoria clássica estabelece que uma partícula carregada em movimento uniforme no vácuo não emite radiação. Entretanto, uma carga em movimento uniforme em um meio material pode emitir radiação se sua velocidade for maior que a velocidade da luz neste meio material. Esta radiação foi descoberta por P. A. Cherenkov em 1934. Três anos após a descoberta de Cherenkov, os cientistas Tamm e Frank explicaram teoricamente a RC. O desenvolvimento dessa teoria é descrito em [15]. Por essas descobertas, Tamm, Frank e Cherenkov receberam o prêmio Nobel de física em 1958.

A partir dos estados quânticos do campo eletromagnético interagindo com corrente elétrica, estudamos as propriedades estatísticas dos estados com o propósito de analisar a possibilidade de geração de emaranhamento pela corrente elétrica clássica. Sabemos, veja a Ref. [16], que um campo magnético externo pode interferir no emaranhamento de dois fótons iniciais. A interação entre o campo magnético externo e os fótons iniciais se estabelece via elétrons intermediários, que interagem com os fótons e o campo magnético externo. Neste trabalho investigamos a possibilidade de emaranhamento de dois fótons devido a uma corrente elétrica externa, na aproximação em que os fótons do estado inicial não interagem com o vácuo quântico.

Capítulo 1

Campo eletromagnético interagindo com corrente elétrica. Potenciais de Liénard-Wiechert. Radiação síncrotron e Cherenkov

Neste capítulo lembramos alguns aspectos e definições da teoria eletromagnética clássica para distribuições macroscópicas de cargas e correntes. Uma vez que estamos interessados nos fenômenos eletromagnéticos relacionados à cargas pontuais, se faz necessário o estudo dos potenciais de Liénard-Wiechert. Estes são obtidos no calibre de Lorentz e, seguindo o método apresentado em [17], também no calibre de Coulomb. Ainda seguindo os passos de [17], é demonstrada a invariância de calibre dos campos elétrico e magnético obtidos por meio dos potenciais de LW. Relembramos o teorema de Poynting e os resultados de Schott [1] para a distribuição angular da potência irradiada na radiação síncrotron e de Frank e Tamm [15] para a radiação Cherenkov.

1.1 Eletrodinâmica clássica

No presente trabalho são usadas as unidades racionalizadas de Heaviside, onde a lei de Coulomb no vácuo para duas cargas pontuais q_1 e q_2 , separadas por uma distância r , é escrita na forma (permissividade e permeabilidade magnética no vácuo são iguais a unidade, $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$) $F = q_1 q_2 / 4\pi r^2$. São usadas também as unidades naturais, ou seja, $\hbar = c = 1$ sendo \hbar a constante de Planck dividida por 2π e c a velocidade da luz no vácuo.

Trabalhamos no espaço de Minkowski com a métrica dada por

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad \eta_{\mu\alpha} \eta^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (1.1.1)$$

Denotamos aqui e no que segue os quadri-vetores por 4-vetores, sendo os 4-vetores covariantes (a_{μ}) e contravariantes (a^{μ}) e o produto entre eles definidos como:

$$\begin{aligned} a^{\mu} &= (a^0, a^i) = (a^0, \mathbf{a}), \quad \mathbf{a} = (a^i) = (a^1, a^2, a^3), \quad a_{\mu} = \eta_{\mu\nu} a^{\nu}, \\ a^{\mu} &= \eta^{\mu\nu} a_{\nu}, \quad ab = a_{\mu} b^{\mu} = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b^i = -a_i b^i = -a^i b_i, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

onde os usuais vetores tridimensionais são indicados por letras em negrito (\mathbf{a}). As coordenadas são denotadas por $x = (x^{\mu}) = (x^0 = t, x^i = \mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Os índices gregos (μ, ν etc.) admitem os

valores 0, 1, 2, 3 ao passo que os índices latinos (i, j etc.) admitem apenas os valores 1, 2, 3. A convenção de soma por índices repetidos é empregada ao longo de todo o texto. As derivadas com relação às coordenadas são escritas usando a seguinte notação:

$$\partial_\mu = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z) = (\partial_t, \partial_i), \quad \partial^\mu = (\partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z) = (\partial_t, -\partial_i). \quad (1.1.3)$$

A eletrodinâmica clássica é descrita por duas grandezas vetoriais: o campo elétrico $\mathbf{E}(x)$ e o campo magnético $\mathbf{B}(x)$. Esses campos satisfazem as equações de Maxwell que em nossa escolha de unidades podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \partial_i E^i(x) &= \rho(x), \quad \epsilon_{ijk} \partial_j B^k(x) - \partial_t E^i(x) = J^i(x), \\ \partial_i B^i(x) &= 0, \quad \epsilon_{ijk} \partial_j E^k(x) + \partial_t B^i(x) = 0, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

onde ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita, $\rho(x)$ é a densidade de carga e $J^i(x)$ é a densidade de corrente. É bem conhecido que podemos escrever a eletrodinâmica em uma forma covariante usando os conceitos de 4-vetor densidade de corrente $J^\mu(x)$ e o 4-potencial $A^\mu(x)$. Estes são definidos da seguinte forma

$$J^\mu(x) = (J^0(x), J^i(x)) = (\rho(x), J^i(x)), \quad A^\mu(x) = (A^0(x), A^i(x)) = (\varphi(x), A^i(x)), \quad (1.1.5)$$

onde $\rho(x) = J^0(x)$ é a densidade de carga, $J^i(x)$ são as componentes do vector densidade de corrente, $\varphi(x) = A^0(x)$ é o potencial escalar e $A^i(x)$ são as componentes do potencial vetor. Os campos elétrico e magnético podem ser escritos em termos dos potenciais $A^\mu(x)$ como

$$E^i(x) = -\partial_t A^i(x) - \partial_i A^0(x), \quad B^i(x) = \epsilon_{ijk} \partial_j A^k(x). \quad (1.1.6)$$

A Lagrangiana, invariante de calibre, associada ao campo eletromagnético contendo o termo de interação, [18], é?

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - J_\mu(x) A^\mu(x), \quad F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x). \quad (1.1.7)$$

O termo $F^{\mu\nu}(x)$ é conhecido como tensor eletromagnético. A ação produzida pela Lagrangiana (1.1.7) é construída como:

$$S = \int dt d\mathbf{r} \mathcal{L}(x) = - \int dt d\mathbf{r} \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + J_\mu(x) A^\mu(x) \right]. \quad (1.1.8)$$

Usando as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} \right] = 0, \quad (1.1.9)$$

obtemos as equações de Maxwell na forma covariante:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = J^\nu(x). \quad (1.1.10)$$

A partir das equações de Maxwell (1.1.10) e levando em consideração o fato de que o tensor eletromagnético é antissimétrico, $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, é fácil demonstrar que,

$$\partial_\nu J^\nu(x) = \partial_t J_0(x) + \partial_i J^i(x) = 0, \quad (1.1.11)$$

ou reescrevendo Eq. (1.1.11) em uma forma mais conhecida

$$\frac{\partial J_0(x)}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J}(x) = 0. \quad (1.1.12)$$

A Eq. (1.1.12) é conhecida como equação da continuidade para a 4-corrente $J^\mu(x)$. Note que o 4-potencial $A^\mu(x)$ não é definido univocamente, pois é possível realizar uma transformação de calibre que deixa a ação (1.1.8) inalterada. Em geral, podemos escrever uma transformação de calibre da seguinte forma:

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x), \quad (1.1.13)$$

onde $\Lambda(x)$ é uma função escalar arbitrária. Podemos demonstrar que a transformação (1.1.13) deixa a ação (1.1.8) invariante. É fácil ver que o termo referente ao tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}(x)$ é invariante de calibre. Por outro lado o termo de interação $J_\mu(x)A^\mu(x)$, após uma transformação de calibre, toma a forma

$$J_\mu(x)A'^\mu(x) = J_\mu(x)A^\mu(x) + \partial^\mu [J_\mu(x)\Lambda(x)] - [\partial^\mu J_\mu(x)]\Lambda(x). \quad (1.1.14)$$

Note que o segundo termo no lado direito de Eq. (1.1.14) é uma 4-divergência que não contribui para a ação (1.1.8), i.e., pode ser descartada, enquanto que o terceiro termo desaparece devido à equação da continuidade (1.1.12). Em outras palavras, podemos dizer que os campos elétrico e magnético são invariantes de calibre. Assim, temos uma certa liberdade na escolha do calibre que usamos para descrever os campos potenciais $A^\mu(x)$.

Em termos do 4-potencial $A^\mu(x)$, a Eq. (1.1.10) toma a forma

$$\square A^\nu(x) - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu(x)) = J^\nu(x), \quad \square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (1.1.15)$$

É bem conhecido que a solução geral $A^\mu(x)$, da equação não-homogênea Eq. (1.1.15), pode ser escrita como a soma entre a solução geral da equação homogênea correspondente e a solução particular da equação não-homogênea. Então, a solução geral possui a seguinte estrutura:

$$A^\mu(x) = A_{\text{ret}}^\mu(x) + A_{\text{in}}^\mu(x), \quad (1.1.16)$$

onde $A_{\text{in}}^\mu(x)$ é a solução geral das equações uniforme, determinada pelo campo eletromagnético no instante de tempo inicial. A solução particular $A_{\text{ret}}^\mu(x)$ determina os potenciais retardados, que por sua vez determinam a radiação emitida pelo sistema. Geralmente estamos interessados na radiação emitida por uma carga em movimento arbitrário. Neste caso é conveniente o uso dos potenciais de Liénard-Wiechert que são introduzidos na próxima seção.

1.2 Potencias de Liénard-Wiechert no calibre de Lorentz

Os efeitos eletromagnéticos de uma carga puntiforme que se move em trajetória arbitrária, podem ser descritos a partir dos potenciais de Liénard-Wiechert. Primeiramente consideramos estes potenciais no calibre de Lorentz.

A condição do calibre de Lorentz é expressa pela seguinte equação

$$\partial_\mu A_L^\mu(x) = 0, \quad (1.2.1)$$

onde o subscript L representa o calibre de Lorentz. Substituindo a condição (1.2.1) na Eq. (1.1.15), obtemos a equação de onda não-homogênea,

$$\square A_L^\mu(x) = J^\mu(x). \quad (1.2.2)$$

O 4-potencial $A_L^\mu(x)$ pode ser obtido via ¹

$$A_L^\mu(x) = \int dt' d\mathbf{r}' D_\square(x-x') J^\mu(x'), \quad (1.2.3)$$

onde $D_\square(x-x')$ é a função de Green associada ao operador D'Alembertiano (os detalhes da obtenção de $D_\square(x-x')$ são descritos no Apêndice 1). Explicitamente a função $D_\square(x-x')$ possui a seguinte forma:

$$D_\square(x-x') = \frac{\theta(t-t')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} [\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) - \delta(t-t'+|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)], \quad \theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < 0 \\ 1, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}. \quad (1.2.4)$$

Note que formalmente a segunda função delta desaparece da função $D_\square(x-x')$, mas este termo é necessário para restaurar a invariância de calibre. No calibre de Lorentz é possível usar apenas a parte retardada da função de Green (para uma explicação detalhada veja a Ref. [17]), isto é, usamos apenas,

$$D_\square^{\text{ret}}(x-x') = \frac{\theta(t-t')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|). \quad (1.2.5)$$

A densidade de carga $J^0(x)$ e a densidade de corrente $\mathbf{J}(x)$ de uma carga puntiforme q , cuja posição em função do tempo t é dada por $\mathbf{r}(t)$, podem ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} J^0(x) &= q\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t)), \\ \mathbf{J}(x) &= q\dot{\mathbf{r}}(t)\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t)), \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\partial\mathbf{r}(t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Os potenciais de LW são obtidos via substituição de Eq. (1.2.6) em Eq. (1.2.3), usando apenas a parte retardada da função de Green $D_\square^{\text{ret}}(x-x')$ dada em (1.2.5). Realizando tal substituição, obtemos os potenciais de LW na forma ²

$$\begin{aligned} A_L^0(x) &= \frac{q}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t_{\text{ret}})| - \dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}})[\mathbf{r}-\mathbf{r}(t_{\text{ret}})]}, \quad \dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}}) = \frac{\partial\mathbf{r}(t_{\text{ret}})}{\partial t_{\text{ret}}}, \\ \mathbf{A}_L(x) &= \frac{q}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t_{\text{ret}})| - \dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}})[\mathbf{r}-\mathbf{r}(t_{\text{ret}})]} \dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}}), \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

em que,

$$t_{\text{ret}} - t + |\mathbf{r}-\mathbf{r}(t_{\text{ret}})| = 0. \quad (1.2.8)$$

A Eq. (1.2.7) representa a forma clássica dos potenciais de Liénard-Wiechert no calibre de Lorentz, veja por exemplo [5]. Note que o módulo que estaria no denominador foi omitido, pois o primeiro termo é sempre maior que o segundo desde que

$$\dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}}) < 1, \quad \text{ou } \mathbf{v}(t_{\text{ret}}) < c,$$

ou seja, desde que a velocidade da partícula carregada no momento t_{ret} seja menor que a velocidade da luz c .

¹Aqui e no que segue, implicamos que os limites de integração são infinitos, $\int \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$, a não ser que os limites sejam escritos explicitamente.

²Os cálculos que levam à Eq. (1.2.7) são detalhados no Apêndice 4.

1.3 Potenciais de Liénard-Wiechert no calibre de Coulomb

O calibre de Coulomb é descrito pela seguinte condição,

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(x) = \partial_i A^i(x) = 0. \quad (1.3.1)$$

Sob a condição do calibre de Coulomb, a Eq. (1.1.15) toma a forma

$$\square A_C^\nu(x) - \partial^\nu \left(\frac{\partial A_C^0(x)}{\partial t} \right) = J^\nu(x), \quad (1.3.2)$$

onde o subíndice C representa o calibre de Coulomb. É conveniente reescrever a última equação de forma a separar as partes escalar ($\nu = 0$) e vetorial ($\nu = 1, 2, 3$), ou seja,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 A_C^0(x)}{\partial t^2} - \nabla^2 A_C^0(x) \right) - \frac{\partial^2 A_C^0(x)}{\partial t^2} &= J^0(x), \\ \square \mathbf{A}_C(x) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla A_C^0(x) &= \mathbf{J}(x). \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Na busca de uma solução particular $A_{\text{ret}}^\mu(x)$ da equação não-homogênea (1.3.3) algumas dificuldades se fazem presentes. Primeiramente, embora o potencial escalar no calibre de Coulomb seja bem conhecido e fácil de calcular [6], seu comportamento de ação-a-distância tem intrigado físicos por muito tempo (veja, por exemplo, [19] e [20]). Em segundo lugar, existem grandes dificuldades nos cálculos para a obtenção do potencial vetor. Recentemente, Wundt e Jentschura, vide Ref. [17], apresentaram um método para calcular o potencial vetor. Este método é descrito de forma detalhada no Apêndice 4. A seguir apontamos alguns passos, seguindo o esquema proposto em [17], para a obtenção dos potenciais de LW no calibre de Coulomb.

1.3.1 Potencial escalar no calibre de Coulomb

Decompomos o vetor corrente, $\mathbf{J}(x)$, em suas componentes transversal $\mathbf{J}_\perp(x)$ ($\nabla \mathbf{J}_\perp(x) = 0$) e longitudinal $\mathbf{J}_\parallel(x)$ ($\nabla \times \mathbf{J}_\parallel(x) = 0$), ou seja,

$$\mathbf{J}(x) = \mathbf{J}_\perp(x) + \mathbf{J}_\parallel(x). \quad (1.3.4)$$

Usando essa decomposição é possível reescrever a Eq. (1.3.3) como o seguinte conjunto de equações:

$$\nabla^2 A_C^0(x) = -J^0(x), \quad (1.3.5a)$$

$$\square \mathbf{A}_C(x) = \mathbf{J}_\perp(x), \quad (1.3.5b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla A_C^0(x) = \mathbf{J}_\parallel(x). \quad (1.3.5c)$$

A Eq. (1.3.5a) é a equação diferencial para o potencial escalar e pode ser resolvida via função de Green associada ao operador Laplaciano. Designamos a função de Green associada ao operador Laplaciano por $D_\Delta(x - x')$. Com o auxílio da função $D_\Delta(x - x')$, o potencial escalar pode ser escrito como:

$$A_C^0(x) = \int dt' d\mathbf{r}' D_\Delta(x - x') J^0(x'). \quad (1.3.6)$$

A forma explícita da função $D_\Delta(x - x')$ é dada por³

$$D_\Delta(x - x') = \frac{\delta(t - t')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.3.7)$$

Substituindo Eq. (1.3.7) em Eq. (1.3.6) e usando a densidade de carga $J^0(x)$ dada por Eq. (1.2.6), obtemos o resultado bem conhecido para o potencial escalar $A_C^0(x)$ no calibre de Coulomb,

$$A_C^0(x) = \frac{q}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)|}. \quad (1.3.8)$$

Note que a função delta $\delta(t - t')$ em Eq. (1.3.7), fez do potencial escalar $A_C^0(x)$ uma ação-a-distância, ou seja, instantâneo.

1.3.2 Potencial vetor no calibre de Coulomb

A solução da Eq. (1.3.5b) para o potencial \mathbf{A}_C pode ser escrita em termos da função de Green $D_\square(x - x')$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_C(x) &= \int dt' d\mathbf{r}' D_\square(x - x') \mathbf{J}_\perp(x') \\ &= \int dt' d\mathbf{r}' D_\square(x - x') \mathbf{J}(x') - \int dt' d\mathbf{r}' D_\square(x - x') \mathbf{J}_\parallel(x'), \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

onde a última igualdade se justifica pela decomposição (1.3.4). Identificamos a primeira integral com o potencial vetor no calibre de Lorentz $\mathbf{A}_L(x)$ e a segunda integral como sendo a diferença entre os potenciais em seus respectivos calibres,

$$\mathbf{A}_S(x) = \mathbf{A}_C(x) - \mathbf{A}_L(x) = - \int dt' d\mathbf{r}' D_\square(x - x') \mathbf{J}_\parallel(x'). \quad (1.3.10)$$

Assim, podemos escrever o potencial vetor no calibre de Coulomb como:

$$\mathbf{A}_C(x) = \mathbf{A}_L(x) + \mathbf{A}_S(x), \quad (1.3.11)$$

onde $\mathbf{A}_L(x)$ foi obtido em Eq. (1.2.7). Com a ajuda das equações (1.3.5c) e (1.3.8), a corrente longitudinal $\mathbf{J}_\parallel(x)$ pode ser escrita na forma,

$$\mathbf{J}_\parallel(x) = \frac{q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)|} \right]. \quad (1.3.12)$$

Substituindo a Eq. (1.3.12) na equação (1.3.10) e após uma integração por partes com respeito às componentes espaciais \mathbf{r}' , podemos reescrever $\mathbf{A}_S(x)$ como:

$$\mathbf{A}_S(x) = -\frac{q}{4\pi} \nabla \int dt' d\mathbf{r}' D_\square(x - x') \left[\frac{\partial}{\partial t'} \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t')|} \right]. \quad (1.3.13)$$

Wundt e Jentschura na Ref. [17], demonstraram que é necessário manter os dois termos da função de Green $D_\square(x - x')$, dada na equação (1.2.4), para obter a resposta correta. Após alguns cálculos extensos, descritos no apêndice 4 e omitidos aqui por conveniência, chegamos à seguinte equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_S(x) &= -\frac{q}{4\pi} \nabla \int_{-\infty}^t dt' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} \int_0^{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} dR [\delta(R - t + t') + \delta(R + t - t')], \\ R &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

³Os detalhes para a obtenção de $D_\Delta(x - x')$ são descritos no Apêndice 2.

Nesse momento é possível descartar a segunda função delta, sendo que o limite de integração em t' garante que $t' \leq t$. Por outro lado, a primeira função delta vai a zero para qualquer $t' < t_{\text{ret}}$ (veja a equação (1.2.8)), devido ao limite superior de integração em R , logo, a única contribuição efetiva acontece quando $t' = t_{\text{ret}}$. Assim, o efeito total da integração em R é que os limites de integração para t' são restritos ao intervalo $t' \in (t_{\text{ret}}, t)$, ou seja,

$$\mathbf{A}_S(x) = -\frac{q}{4\pi} \nabla \int_{t_{\text{ret}}}^t dt' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}. \quad (1.3.15)$$

Então, o potencial vetor no calibre de Coulomb produzido por uma carga q em movimento arbitrário toma a forma,

$$\mathbf{A}_C(x) = \frac{q}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})| - \dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}}) [\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})]} - \frac{q}{4\pi} \nabla \int_{t_{\text{ret}}}^t \frac{dt'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}, \quad (1.3.16a)$$

onde t_{ret} é a solução da equação (1.2.8).

O potencial vetor (1.3.16a) possui um termo compensatório que fornece uma resposta ao termo de ação-a-distância, respeitando o princípio da relatividade e o princípio da casualidade [17].

1.4 Invariância de calibre

Após a obtenção dos potenciais de LW em ambos os calibres, se faz necessário demonstrar que os campos $\mathbf{E}_C(x)$ e $\mathbf{B}_C(x)$ obtidos a partir dos potenciais de LW no calibre de Coulomb, coincidem com os campos $\mathbf{E}_L(x)$ e $\mathbf{B}_L(x)$ obtidos via potenciais de LW no calibre de Lorentz. Mantemos a maioria dos cálculos apresentados em Ref. [17] para conveniência do leitor.

Iniciamos com o campo elétrico no calibre de Coulomb. A relação entre o campo elétrico e o potencial eletromagnético é dada em Eq. (1.1.6) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{E}_C(x) = -\nabla A_C^0(x) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_C(x). \quad (1.4.17)$$

Substituindo a expressão (1.3.11) para \mathbf{A}_C e usando a forma explícita de \mathbf{A}_S dada por Eq. (1.3.15), obtemos,

$$\mathbf{E}_C(x) = -\nabla A_C^0(x) + \nabla \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t dt' \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} - \int_0^{t_{\text{ret}}} dt' \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_L(x), \quad (1.4.18)$$

onde a integral original foi dividida em dois termos. O primeiro termo entre colchetes é apenas o potencial escalar $A_C^0(x)$ que, após a ação do operador ∇ , se cancela com o primeiro termo $-\nabla A_C^0(x)$. No segundo termo entre colchetes usamos a regra da cadeia para transformar a derivada com respeito a t em uma derivada com respeito a t_{ret} , obtendo assim:

$$\mathbf{E}_C(x) = -\nabla \left[\frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}} \left(\int_0^{t_{\text{ret}}} dt' \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} \right) \frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_L(x). \quad (1.4.19)$$

O termo $\partial t_{\text{ret}}/\partial t$ pode ser calculado partir de Eq. (1.2.8) e resulta em,

$$\frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t} = \left[1 - \dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}}) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})|} \right]^{-1}, \quad (1.4.20)$$

o que permite escrever $\mathbf{E}_C(x)$ como:

$$\mathbf{E}_C(x) = -\nabla \left\{ \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})|} \left[1 - \dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}}) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})|} \right]^{-1} \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_L(x). \quad (1.4.21)$$

Lembrando da expressão (1.2.7) para $A_L^0(x)$, obtemos a resposta final,

$$\mathbf{E}_C(x) = -\nabla A_L^0(x) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_L(x) = \mathbf{E}_L(x). \quad (1.4.22)$$

Para o campo magnético os cálculos são triviais,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_C(x) &= [\nabla \times \mathbf{A}_C(x)] = [\nabla \times \mathbf{A}_L(x)] + [\nabla \times \mathbf{A}_S(x)] \\ &= [\nabla \times \mathbf{A}_L(x)] + q [\nabla \times \nabla] \int_{t_{\text{ret}}}^t \frac{dt'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}, \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

produzindo o resultado

$$\mathbf{B}_C(x) = [\nabla \times \mathbf{A}_L(x)] = \mathbf{B}_L(x). \quad (1.4.24)$$

As equações (1.4.22) e (1.4.24) mostram que a escolha do calibre de fato não afeta o campo eletromagnético, que por sua vez carrega a informação física da radiação, enquanto que os potenciais são simples descrições matemáticas.

1.5 Campo eletromagnético correspondente aos potenciais de Liénard-Wiechert

Os campos elétrico e magnético produzidos por uma carga pontual em movimento arbitrário são obtidos a partir dos potenciais de LW. Conhecendo os campos elétrico e magnético podemos analisar os fenômenos eletromagnéticos relacionados à carga em movimento.

Os campos são obtidos de forma mais conveniente usando os potenciais de LW no calibre de Lorentz. Reescrevemos tais potenciais, dados na equação (1.2.7), na forma,

$$\begin{aligned} A_L^0(x) &= \frac{q}{4\pi} \frac{1}{(1 - \mathbf{n}\mathbf{v})R}, \quad \mathbf{A}_L(x) = \frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{v}}{(1 - \mathbf{n}\mathbf{v})R}, \\ \mathbf{R} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}}), \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})|, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}(t_{\text{ret}})}{\partial t_{\text{ret}}} = \dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}}), \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

onde t_{ret} é dado em (1.2.8). A relação entre campo elétrico e os potenciais foi apresentada na Eq. (1.4.17). O primeiro termo de $\mathbf{E}(x)$ é dado por:

$$-\nabla A_L^0(x) = \frac{q}{4\pi} \frac{\nabla [(1 - \mathbf{n}\mathbf{v})R]}{(1 - \mathbf{n}\mathbf{v})^2 R^2}. \quad (1.5.2)$$

Sendo que $\nabla \mathbf{n} = 0$ e usando o resultado (1.4.20), junto com,

$$\nabla t_{\text{ret}} = -\frac{\mathbf{n}}{1 - \mathbf{n}\mathbf{v}}, \quad (1.5.3)$$

é possível reescrever a Eq. (1.5.2) na seguinte forma:

$$-\nabla A_L^0(x) = \frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{n}(1 - \mathbf{v}^2 + \mathbf{R}\mathbf{a}) - \mathbf{v}(1 - \mathbf{n}\mathbf{v})}{(1 - \mathbf{n}\mathbf{v})^3 R^2}, \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}}) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}(t_{\text{ret}})}{\partial (t_{\text{ret}})^2}. \quad (1.5.4)$$

Similarmente temos que,

$$\frac{\partial \mathbf{A}_L(x)}{\partial t} = \frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{a}(1 - \mathbf{nv})R + \mathbf{v}(\mathbf{nv} - \mathbf{v}^2 + \mathbf{aR})}{[1 - \mathbf{nv}]^3 R^2}. \quad (1.5.5)$$

A partir dos resultados (1.5.4) e (1.5.5), vemos que o campo elétrico $\mathbf{E}(x)$ produzido por uma carga pontual em movimento arbitrário é dado por:

$$\mathbf{E}(x) = \frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{v}R)(1 - \mathbf{v}^2)}{(R - \mathbf{vR})^3} + \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}]}{(1 - \mathbf{vn})^2 (R - \mathbf{vR})} \right\}, \quad (1.5.6)$$

onde foi usada a relação vetorial

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}. \quad (1.5.7)$$

O campo magnético é obtido de forma análoga e pode ser escrito como (veja, por exemplo, [6])

$$\mathbf{B}(x) = \nabla \times \mathbf{A}(x) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}(x). \quad (1.5.8)$$

Note que os campos elétrico e magnético apresentados em (1.5.6) e (1.5.8), respectivamente, possuem um termo que depende apenas da velocidade \mathbf{v} , e outro termo que depende também da aceleração \mathbf{a} . O último é o responsável pela radiação emitida pela carga em movimento. É importante lembrar que todas grandezas no lado direito das equações (1.5.6) e (1.5.8) são avaliadas no tempo t_{ret} .

1.6 Teorema de Poynting

O teorema de Poynting relaciona a energia armazenada no campo eletromagnético, o trabalho feito em uma distribuição de carga e o flux de energia. Na Ref. [1] a equação que relaciona as grandezas mencionadas é escrita na forma

$$\partial_t \int_V \left(\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} \right) d\mathbf{r} + \int_V \mathbf{J}\mathbf{E} d\mathbf{r} = - \oint_{\partial V} \mathbf{E} \times \mathbf{B} d\mathbf{A}, \quad (1.6.1)$$

onde V é um volume limitado por uma superfície ∂V e $d\mathbf{A}$ é o elemento de área multiplicado pelo vetor normal à superfície ∂V . O primeiro termo da Eq. (1.6.1) é a taxa de variação da energia total do campo eletromagnético

$$\partial_t E^{\text{field}} = \partial_t \int_V \left(\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} \right) d\mathbf{r}. \quad (1.6.2)$$

O segundo termo representa a energia perdida pelo elétron em movimento

$$W^{\text{loss}} = - \int_V \mathbf{J}\mathbf{E} d\mathbf{r}. \quad (1.6.3)$$

Finalmente o terceiro termo é a taxa de emissão de energia

$$W^{\text{rad}} = \oint_{\partial V} \mathbf{S} d\mathbf{A}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (1.6.4)$$

onde definimos o vetor de Poynting \mathbf{S} . A integral de superfície do vetor de Poynting fornece a energia por unidade de tempo emitida pelo sistema.

Calculando o vetor \mathbf{S} utilizando os campo apresentados nas equações (1.5.6) e (1.5.8), obtemos a potência por unidade de área e tempo irradiada por uma carga em trajetória arbitrária. A seguir consideramos duas situações interessantes sobre a radiação emitida por uma carga em movimento.

1.7 Radiação síncrotron e Cherenkov

Para calcular a potência da radiação síncrotron consideramos uma carga em movimento circular. Schott [7] usou as equações de Maxwell para obter a lei de conservação de energia para um elétron se movendo em trajetória helicoidal. Para um elétron em trajetória helicoidal a energia do campo é constante, isto é, $\partial_t E^{\text{field}} = 0$. Assim, a partir de Eq. (1.6.1) temos que,

$$W^{\text{loss}} = W^{\text{rad}}. \quad (1.7.1)$$

Então, calculando a quantidade W^{loss} para um elétron em trajetória circular obtemos a potência da radiação síncrotron. De acordo com a Ref. [1] a potência irradiada para um elétron em trajetória circular é:

$$W_{\text{Schott}} = \frac{q^2 \omega^2}{c} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \left\{ \cot^2 \theta \, j_{\nu}^2(\xi) + \beta^2 j_{\nu}'^2(\xi) \right\}, \quad \xi = \nu \beta \sin \theta, \quad (1.7.2)$$

onde q é a carga do elétron, ω é a frequência de movimento do elétron, j_{ν} é a função de Bessel de ordem inteira e j_{ν}' é a derivada da função de Bessel com respeito ao seu argumento. O resultado (1.7.2) é conhecido como fórmula de Schott.

A radiação Cherenkov acontece quando a velocidade v de uma carga se movendo em um dielétrico, é maior que a velocidade de propagação da luz c_n no dielétrico. Frank e Tamm [15] consideraram um elétron se movendo com velocidade constante em um meio dielétrico com índice de refração n . Eles escreveram a potência irradiada em termos do fluxo de energia através de uma superfície cilíndrica de comprimento l , ou seja,

$$W_{\text{F,T}} = 2\pi\rho l \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S} \, dt = 2\pi\rho l \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \, dt, \quad (1.7.3)$$

onde ρ é o raio da superfície cilíndrica e l é o eixo da mesma que coincide com o caminho percorrido pelo elétron no dielétrico. A partir dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} para uma carga em movimento uniforme, Frank e Tamm chegaram à seguinte expressão para a potência total irradiada,

$$W_{\text{F,T}} = \frac{q^2 l}{c^2} \int_{\beta n > 1} d\omega \, \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right), \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (1.7.4)$$

onde q é a carga elétrica e ω é a frequência da radiação emitida. Note que a faixa de integração em ω é tal que a condição $\beta n > 1$ seja satisfeita. Esta condição é necessária já que o índice de refração n depende da frequência ω , i.e., $n = n(\omega)$ e para a radiação Cherenkov ocorrer é necessário que $v > \frac{c}{n}$ ou $\beta n(\omega) > 1$. O resultado (1.7.4) é conhecido como fórmula de Frank e Tamm.

Capítulo 2

Campo eletromagnético quantizado interagindo com corrente elétrica

No presente capítulo construímos os estados do campo eletromagnético quantizado interagindo com uma corrente elétrica externa. Os estados do campo eletromagnético são construídos em dois calibres, sendo o primeiro calibre considerado o de Coulomb e em seguida consideramos o calibre de Lorentz.

2.1 Estados do campo eletromagnético no calibre de Coulomb

Consideramos um sistema que consiste do campo eletromagnético quantizado interagindo com uma corrente elétrica externa. Assumimos que a corrente externa $J_\mu(x)$ atua no tempo t , sendo $t > 0$. Um sistema deste tipo é descrito pelo operador hamiltoniano $\hat{H}^{(C)}$ que é composto por dois termos: a Hamiltoniana de fótons transversais livres $\hat{H}_\gamma^{(C)}$ e a Hamiltoniana de interação $\hat{H}_{\text{int}}^{(C)}$,

$$\begin{aligned}\hat{H}^{(C)} &= \hat{H}_\gamma^{(C)} + \hat{H}_{\text{int}}^{(C)}, \\ \hat{H}_\gamma^{(C)} &= \sum_{\lambda=1,2} \int k_0 \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} d\mathbf{k}, \quad \hat{H}_{\text{int}}^{(C)} = \int \left[J_i(x) \hat{A}_C^i(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} J_0(x) A_C^0(x) \right] d\mathbf{r}.\end{aligned}\quad (2.1.1)$$

Os $\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ e $\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}$ são os operadores de criação e aniquilação, respectivamente, de fótons com momento \mathbf{k} e polarização λ que pode assumir os valores $\lambda = 1, 2$. O potencial escalar $A_C^0(x)$ pode ser escrito como:

$$A_C^0(x) = \int \frac{J^0(\mathbf{r}', t)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (2.1.2)$$

O operador de campo potencial $\hat{A}_C^i(\mathbf{r})$, o qual está escrito na representação de Schrödinger¹, tem a forma explícita,

$$\begin{aligned}\hat{A}_C^i(\mathbf{r}) &= \sum_{\lambda=1}^2 \int \left[\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} f_{\mathbf{k}\lambda}^i(\mathbf{r}) + \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger f_{\mathbf{k}\lambda}^{i*}(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{k}, \\ f_{\mathbf{k}\lambda}^i(\mathbf{r}) &= \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{\sqrt{2k_0(2\pi)^3}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^i, \quad k_0 = |\mathbf{k}|,\end{aligned}\quad (2.1.3)$$

¹Os detalhes da conexão entre a representação de interação e a de Schrödinger são descritos no Apêndice 5.

em que $\epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^i$ é o vetor polarização. No que segue, escolhemos a seguinte realização dos 4-vetores $\epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^\mu$, veja e.g.[21],

$$\begin{aligned}\epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^\mu &= (0, \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda}), \quad \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{k} = 0, \quad \lambda = 1, 2, \\ \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda}^* \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\sigma} &= \delta_{\lambda\sigma}, \quad \lambda, \sigma = 1, 2, \\ \epsilon_{\mathbf{k}0}^\mu &= (1, 0), \quad \epsilon_{\mathbf{k}3}^\mu = (0, \mathbf{k}/|\mathbf{k}|).\end{aligned}\tag{2.1.4}$$

Além disso, os 4-vetores $\epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^\mu$ satisfazem às seguintes relações,

$$[\epsilon_{\mathbf{k}\lambda}]^\mu [\epsilon_{\mathbf{k}\lambda'}^*]_\mu = \eta_{\lambda\lambda'}, \quad \sum_{\lambda=0}^3 [\epsilon_{\mathbf{k}\lambda}]_\mu \eta_{\lambda\lambda} [\epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^*]_\nu = \eta_{\mu\nu}.\tag{2.1.5}$$

Note que, tendo em vista que trabalharemos também com o calibre de Lorentz, incluímos os resultados com $\mu = 0$ e $\lambda = 0, 3$. Os detalhes da quantização do campo eletromagnético no calibre de Coulomb estão exibidos no apêndice ao final deste capítulo.

Denotamos o vetor de estado do sistema considerado, no instante de tempo t , por $|\Psi^{(C)}(t)\rangle$. A evolução temporal do vetor de estado $|\Psi^{(C)}(t)\rangle$ é governada pela equação de Schrödinger,

$$i\partial_t |\Psi^{(C)}(t)\rangle = \hat{H}^{(C)} |\Psi^{(C)}(t)\rangle = \left[\hat{H}_\gamma^{(C)} + \hat{H}_{\text{int}}^{(C)} \right] |\Psi^{(C)}(t)\rangle.\tag{2.1.6}$$

A solução geral da equação (2.1.6) pode ser escrita na seguinte forma²,

$$|\Psi^{(C)}(t)\rangle = U^{(C)}(t) |\Psi^{(C)}(0)\rangle,\tag{2.1.7}$$

$$U^{(C)}(t) = \exp \left[-i\hat{H}_\gamma^{(C)} t \right] \exp \left[-i\hat{B}^{(C)}(t) \right],\tag{2.1.8}$$

$$\hat{B}^{(C)}(t) = \int_0^t dt' \int \left\{ J_i(x') \left[\hat{A}_C^i(x') + \frac{1}{2} \tilde{A}_C^i(x') \right] + \frac{1}{2} J_0(x') A_C^0(x') \right\} d\mathbf{r}',\tag{2.1.9}$$

$$\tilde{A}_C^i(x) = \int_0^t dt' \int D_0(x-x') \delta_\perp^{ik} J^k(x') d\mathbf{r}',\tag{2.1.10}$$

$$\hat{A}_C^i(x) = \sum_{\lambda=1}^2 \int \left[\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) + \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger f_{\mathbf{k}\lambda}^{i*}(x) \right] d\mathbf{k},\tag{2.1.11}$$

$$f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) = \frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2k_0(2\pi)^3}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^i, \quad k_0 = |\mathbf{k}|.\tag{2.1.12}$$

O termo $U^{(C)}(t)$ é um operador de evolução temporal no calibre de Coulomb, $|\Psi^{(C)}(0)\rangle$ é o estado inicial do campo eletromagnético quantizado no instante de tempo $t = 0$ e $D_0(x-x')$ é a função do campo eletromagnético que pode ser obtida via função de permutação de Pauli-Jordan com $m = 0$, veja [24]. A forma explícita da função $D_0(x-x')$ é:

$$D_0(x-x') = i \int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0(2\pi)^3} \left[e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')} \right], \quad \square D_0(x-x') = 0.\tag{2.1.13}$$

O projetor δ_\perp^{ik} é proveniente da comutação entre as componentes dos campos potenciais $\hat{A}_C^i(x)$ e os correspondentes momentos conjugados $\hat{\pi}_C^k(x')$ (veja a Eq. (CC.12) no Apêndice ao final deste capítulo) e possui forma explícita,

$$\delta_\perp^{ik} = \delta^{ik} - \Delta^{-1} \partial^i \partial^k.$$

²Veja as Refs. [22] e [23].

Verificamos diretamente que o vetor de estado (2.1.7) é de fato solução da Eq. (2.1.6). Sendo que o operador $\hat{H}_\gamma^{(C)}$ é independente do tempo, temos que,

$$i\partial_t \left\{ \exp \left[-i\hat{H}_\gamma^{(C)}t \right] \right\} = \hat{H}_\gamma^{(C)} \exp \left[-i\hat{H}_\gamma^{(C)}t \right]. \quad (2.1.14)$$

Entretanto, a derivada $\partial_t \hat{A}_C^i(x)$ não comuta com $\hat{A}_C^i(x')$. Nesse caso, para calcular a derivada temporal do segundo expoente no lado direito da equação (2.1.8), se faz necessário usar o método de Feynman de desembaraçar operadores, [25], que está descrito no Apêndice 6. Usando o método de Feynman, encontramos

$$\begin{aligned} i\partial_t \exp \left[-i\hat{B}^{(C)}(t) \right] &= \hat{K}^{(C)}(t) \exp \left[-i\hat{B}^{(C)}(t) \right], \\ \hat{K}^{(C)}(t) &= \int_0^1 e^{-is\hat{B}^{(C)}(t)} \left[\partial_t \hat{B}^{(C)}(t) \right] e^{is\hat{B}^{(C)}(t)} ds, \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

onde

$$\partial_t \hat{B}^{(C)}(t) = \int \left\{ J_i(x) \left[\hat{A}_C^i(x) + \frac{1}{2} \tilde{A}_C^i(x) \right] + \frac{1}{2} J_0(x) A_C^0(x) \right\} d\mathbf{r}. \quad (2.1.16)$$

Com o auxílio da bem conhecida relação de operadores

$$e^{\hat{A}} \hat{M} e^{-\hat{A}} = \hat{M} + \left[\hat{A}, \hat{M} \right] + \frac{1}{2!} \left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{M} \right] \right] + \dots, \quad (2.1.17)$$

é possível apresentar o integrando no lado direito da equação (2.1.15) como se segue,

$$\begin{aligned} e^{-is\hat{B}^{(C)}(t)} \left[\partial_t \hat{B}^{(C)}(t) \right] e^{is\hat{B}^{(C)}(t)} &= \partial_t \hat{B}^{(C)}(t) + \left[-is\hat{B}^{(C)}(t), \partial_t \hat{B}^{(C)}(t) \right] \\ &+ \frac{1}{2!} \left[-is\hat{B}^{(C)}(t), \left[-is\hat{B}^{(C)}(t), \partial_t \hat{B}^{(C)}(t) \right] \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

O primeiro comutador da série fornece

$$\left[\hat{B}^{(C)}(t), \partial_t \hat{B}^{(C)}(t) \right] = \int_0^t dt' \int \int \left\{ J_i(x') \left[\hat{A}_C^i(x'), \hat{A}_C^j(x) \right] J_j(x) \right\} d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \quad (2.1.19)$$

O comutador do lado direito da Eq. (2.1.19), é o comutador entre as componentes dos operadores de campos potenciais $\hat{A}_C^i(x')$ para temos arbitrários e resulta em,

$$\left[\hat{A}_C^i(x), \hat{A}_C^j(x') \right] = i\delta_{\perp}^{ij} D_0(x - x'). \quad (2.1.20)$$

Substituindo o comutador (2.1.20) na equação (2.1.19) e assumindo que as correntes em consideração desaparecem no infinito, ou seja,

$$\int J_i(x') \delta_{\perp}^{ij} D_0(x - x') d\mathbf{r}' = \int D_0(x - x') \delta_{\perp}^{ij} J_i(x') d\mathbf{r}', \quad (2.1.21)$$

chegamos a,

$$\left[\hat{B}^{(C)}(t), \partial_t \hat{B}^{(C)}(t) \right] = -i \int J_i(x) \tilde{A}_C^i(x) d\mathbf{r}. \quad (2.1.22)$$

Sendo que o comutador (2.1.22) resulta em uma função que não contém operadores, vemos que apenas os dois primeiros termos da série (2.1.18) sobrevivem. Assim, a quantidade $\hat{K}^{(C)}(t)$ da equação (2.1.15) toma a forma:

$$\hat{K}^{(C)}(t) = \int \left[J_i(x) \hat{A}_C^i(x) + \frac{1}{2} J_0(x) A_C^0(x) \right] d\mathbf{r}, \quad (2.1.23)$$

após a integração da variável s . Usando o seguinte resultado, apresentado no Apêndice 5,

$$\hat{A}_C^i(\mathbf{r}) = \exp \left(-i \hat{H}_\gamma^{(C)} t \right) \hat{A}_C^i(x) \exp \left(i \hat{H}_\gamma^{(C)} t \right), \quad (2.1.24)$$

podemos escrever,

$$\exp \left[-i \hat{H}_\gamma^{(C)} t \right] \hat{K}^{(C)}(t) = \int \left[J_i(x) \hat{A}_C^i(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} J_0(x) A_C^0(x) \right] d\mathbf{r} \exp \left[-i \hat{H}_\gamma^{(C)} t \right]. \quad (2.1.25)$$

Então, é fácil ver que,

$$i \partial_t |\Psi^{(C)}(t)\rangle = \left\{ \hat{H}_\gamma^{(C)} + \int \left[J_i(x) \hat{A}_C^i(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} J_0(x) A_C^0(x) \right] d\mathbf{r} \right\} |\Psi^{(C)}(t)\rangle, \quad (2.1.26)$$

ou seja, provamos que o vetor de estado (2.1.7) satisfaz a equação (2.1.6).

É conveniente reescrever o operador evolução $U^{(C)}(t)$ na seguinte forma:

$$\begin{aligned} U^{(C)}(t) &= \exp \left[i \phi^{(C)}(t) \right] \exp \left[-i \hat{H}_\gamma^{(C)} t \right] \mathcal{D}^{(C)}(y), \\ \mathcal{D}^{(C)}(y) &= \exp \left\{ \sum_{\lambda=1}^2 \int \left[y_{\mathbf{k}\lambda}(t) \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger - y_{\mathbf{k}\lambda}^*(t) \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} \right] d\mathbf{k} \right\}, \\ \phi^{(C)}(t) &= -\frac{1}{2} \int_0^t dt' \int \left[J_i(x') \hat{A}_C^i(x') + J_0(x') A_C^0(x') \right] d\mathbf{r}', \\ y_{\mathbf{k}\lambda}(t) &= -i \int_0^t dt' \int J_i(x') f_{\mathbf{k}\lambda}^{i*}(x') d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Assim, o vetor de estado $|\Psi^{(C)}(t)\rangle$ pode ser escrito como:

$$|\Psi^{(C)}(t)\rangle = \exp \left[i \phi^{(C)}(t) \right] \exp \left[-i \hat{H}_\gamma^{(C)} t \right] \mathcal{D}^{(C)}(y) |\Psi^{(C)}(0)\rangle. \quad (2.1.28)$$

Podemos ver que $\mathcal{D}^{(C)}(y)$ é o operador de deslocamento que é comumente utilizado no tratamento de estados coerentes [26, 27]. Ressaltamos, a seguir, algumas propriedades do operador $\mathcal{D}^{(C)}$ no calibre de Coulomb:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(C)\dagger}(\alpha) &= \mathcal{D}^{(C)-1}(\alpha), \quad |\alpha\rangle^{(C)} = \mathcal{D}^{(C)}(\alpha)|0\rangle^{(C)}, \quad \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}|\alpha\rangle^{(C)} = \alpha_{\mathbf{k}\lambda}|\alpha\rangle^{(C)}, \\ \mathcal{D}^{(C)\dagger}(\alpha) \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} \mathcal{D}^{(C)}(\alpha) &= \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}, \quad \mathcal{D}^{(C)\dagger}(\alpha) \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \mathcal{D}^{(C)}(\alpha) = \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*. \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

Vamos considerar apenas a parte que contém operadores no Hamiltoniano de interação $\hat{H}_{\text{int}}^{(C)}$, isto é,

$$\hat{H}' = \int J_i(x) \hat{A}_C^i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (2.1.30)$$

Usando a representação (2.1.4) dos vetores de polarização $\epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^i$, é fácil verificar que a relação

$$\hat{A}_C^i(\mathbf{r}) = \delta_{\perp}^{ij} \hat{A}_C^j(\mathbf{r}) = \hat{A}_{\perp}^i(\mathbf{r}) \quad (2.1.31)$$

é verdadeira. Substituindo a expressão (2.1.31) em \hat{H}' e movendo as derivadas do operador $\hat{A}_C^i(\mathbf{r})$ para a corrente $J_i(x)$, via integração por partes, obtemos:

$$\hat{H}' = \int \delta_{\perp}^{ij} J_j(x) \hat{A}_C^i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (2.1.32)$$

Como é de prática usual, ignoramos os termos de contorno assumindo que a corrente $J_i(x)$ desaparece no infinito. Com o auxílio da equação da continuidade (1.1.12), introduzimos a corrente transversal $J_{\perp}^i(x) = \delta_{\perp}^{ij} J_j(x)$ na forma,

$$J_{\perp}^i(x) = J^i(x) + \Delta^{-1} \partial_i \partial_t J_0(x), \quad \Delta = \nabla^2. \quad (2.1.33)$$

No calibre de Coulomb, a densidade de carga $J_0(x)$ e a função $A_C^0(x)$, são conectadas por (veja as equações (CC.7) e (CC.8) do Apêndice ao final deste capítulo)

$$\Delta A_C^0(x) = -J_0(x), \quad A_C^0(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{J_0(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (2.1.34)$$

Substituindo a expressão (2.1.34) na equação (2.1.33) chegamos a,

$$J_{\perp}^i(x) = J^i(x) - \frac{\partial_i}{4\pi} \partial_t \int \frac{J_0(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (2.1.35)$$

Assim, vemos que no calibre de Coulomb o campo eletromagnético quantizado interage apenas com a parte transversal da corrente clássica, dado que a corrente desaparece nos limites de integração.

2.2 Estados do campo eletromagnético no calibre de Lorentz

A Hamiltoniana que descreve o campo eletromagnético quantizado interagindo com uma corrente clássica $J_{\mu}(x)$ no calibre de Lorentz pode ser escrita na forma,

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(L)} &= \hat{H}_{\gamma}^{(L)} + \hat{H}_{\text{int}}^{(L)}, \\ \hat{H}_{\gamma}^{(L)} &= - \sum_{\lambda=0}^3 \eta_{\lambda\lambda} \int k_0 \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} d\mathbf{k}, \quad \hat{H}_{\text{int}}^{(L)} = \int J_{\mu}(x) \hat{A}_L^{\mu}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

A métrica $\eta_{\mu\nu}$ (1.1.1) e os $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$ são os operadores de criação e aniquilação, respectivamente, de fótons com momento \mathbf{k} e polarização λ , que pode assumir os valores $\lambda = 0, 1, 2, 3$. O operador $\hat{A}_L^{\mu}(\mathbf{r})$ possui a forma explícita,

$$\begin{aligned} \hat{A}_L^{\mu}(\mathbf{r}) &= \sum_{\lambda=0}^3 \int \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} f_{\mathbf{k}\lambda}^{\mu}(\mathbf{r}) + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} f_{\mathbf{k}\lambda}^{\mu*}(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{k}, \\ f_{\mathbf{k}\lambda}^{\mu}(\mathbf{r}) &= \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{\sqrt{2k_0(2\pi)^3}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^{\mu}, \quad k_0 = |\mathbf{k}|, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

e assumimos que a corrente externa $J_\mu(x)$ atua apenas no tempo $t > 0$.

Denotamos os vetores de estado do sistema considerado, no instante de tempo t , por $|\Psi^{(L)}(t)\rangle$. A evolução temporal destes estados é governada pela equação de Schrödinger,

$$i\partial_t |\Psi^{(L)}(t)\rangle = \hat{H}^{(L)} |\Psi^{(L)}(t)\rangle = \left[\hat{H}_\gamma^{(L)} + \hat{H}_{\text{int}}^{(L)} \right] |\Psi^{(L)}(t)\rangle. \quad (2.2.3)$$

A solução geral da equação (2.2.3) pode ser escrita como:

$$|\Psi^{(L)}(t)\rangle = U^{(L)}(t) |\Psi^{(L)}(0)\rangle, \quad (2.2.4)$$

$$U^{(L)}(t) = \exp \left[-i\hat{H}_\gamma^{(L)} t \right] \exp \left[-i\hat{B}^{(L)}(t) \right], \quad (2.2.5)$$

$$\hat{B}^{(L)}(t) = \int_0^t dt' \int J_\mu(x') \left[\hat{A}_L^\mu(x') + \frac{1}{2} \tilde{A}_L^\mu(x') \right] d\mathbf{r}', \quad (2.2.6)$$

$$\tilde{A}_L^\mu(x) = \int_0^t dt' \int D_0(x-x') J^\mu(x') d\mathbf{r}', \quad (2.2.7)$$

$$\hat{A}_L^\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} f_{\mathbf{k}\lambda}^\mu(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger f_{\mathbf{k}\lambda}^{\mu*}(x) \right] d\mathbf{k}, \quad (2.2.8)$$

$$f_{\mathbf{k}\lambda}^\mu(x) = \frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2k_0(2\pi)^3}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^\mu, \quad k_0 = |\mathbf{k}|. \quad (2.2.9)$$

O operador $U^{(L)}(t)$ é o operador de evolução no calibre de Lorentz e $|\Psi^{(L)}(0)\rangle$ é o estado inicial do campo eletromagnético quantizado.

Verificamos diretamente que o vetor de estado (2.2.4) é de fato solução da equação (2.2.3). Sendo que $\hat{H}_\gamma^{(L)}$ é independente do tempo, temos que:

$$i\partial_t \left\{ \exp \left[-i\hat{H}_\gamma^{(L)} t \right] \right\} = \hat{H}_\gamma^{(L)} \exp \left[-i\hat{H}_\gamma^{(L)} t \right]. \quad (2.2.10)$$

Para calcular a derivada temporal do segundo expoente no lado direito da equação (2.2.5), precisamos usar novamente o método de Feynman. Calculando a derivada encontramos,

$$\begin{aligned} i\partial_t \exp \left[-i\hat{B}^{(L)}(t) \right] &= \hat{K}^{(L)}(t) \exp \left[-i\hat{B}^{(L)}(t) \right], \\ \hat{K}^{(L)}(t) &= \int_0^1 \exp \left[-is\hat{B}^{(L)}(t) \right] \left[\partial_t \hat{B}^{(L)}(t) \right] \exp \left[is\hat{B}^{(L)}(t) \right] ds, \\ \partial_t \hat{B}^{(L)}(t) &= \int J_\mu(x) \left[\hat{A}_L^\mu(x) + \frac{1}{2} \tilde{A}_L^\mu(x) \right] d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Usando a relação (2.1.17) escrevemos o integrando do operador $\hat{K}^{(L)}(t)$ na Eq. (2.2.11) como:

$$\begin{aligned} e^{-is\hat{B}^{(L)}(t)} \partial_t \hat{B}^{(L)}(t) e^{is\hat{B}^{(L)}(t)} &= \partial_t \hat{B}^{(L)}(t) + \left[-is\hat{B}^{(L)}(t), \partial_t \hat{B}^{(L)}(t) \right] \\ &+ \frac{1}{2!} \left[-is\hat{B}^{(L)}(t), \left[-is\hat{B}^{(L)}(t), \partial_t \hat{B}^{(L)}(t) \right] \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

O comutador $\left[\hat{B}^{(L)}(t), \partial_t \hat{B}^{(L)}(t) \right]$ pode ser facilmente calculado e resulta em,

$$\left[\hat{B}^{(L)}(t), \partial_t \hat{B}^{(L)}(t) \right] = \int \left[\hat{B}^{(L)}(t), \left(\hat{A}_L^\mu(x) + \frac{1}{2} \tilde{A}_L^\mu(x) \right) \right] J_\mu(x) d\mathbf{r}. \quad (2.2.13)$$

Como o termo $\tilde{A}_L^\mu(x)$ não é um operador, o comutador $[\hat{B}_L(t), \tilde{A}_L^\mu(x)]$ é zero. Então, a equação (2.2.13) toma a forma,

$$[\hat{B}^{(L)}(t), \partial_t \hat{B}^{(L)}(t)] = \int [\hat{B}^{(L)}(t), \hat{A}_L^\mu(x)] J^\mu(x) d\mathbf{r}. \quad (2.2.14)$$

Por sua vez, o comutador

$$[\hat{B}^{(L)}(t), \hat{A}_L^\mu(x)] = - \int_0^t dt' \int [\hat{A}_L^\mu(x), \hat{A}_L^\nu(x')] J_\nu(x') d\mathbf{r}', \quad (2.2.15)$$

pode ser reescrito, com a ajuda do comutador entre os operadores $\hat{A}_L^\mu(x)$ para termos arbitrários

$$[\hat{A}_L^\mu(x), \hat{A}_L^\nu(x')] = i\eta^{\mu\nu} D_0(x - x'), \quad (2.2.16)$$

como:

$$[\hat{B}^{(L)}(t), \hat{A}_L^\mu(x)] = -i\tilde{A}_L^\mu(x). \quad (2.2.17)$$

Substituindo o último resultado no comutador (2.2.14) obtemos:

$$[\hat{B}^{(L)}(t), \partial_t \hat{B}^{(L)}(t)] = -i \int J_\mu(x) \tilde{A}_L^\mu(x) d\mathbf{r}. \quad (2.2.18)$$

Sendo que o lado direito da equação (2.2.18) é uma função, a série (2.2.12) contém apenas dois termos e resulta em,

$$e^{-is\hat{B}^{(L)}(t)} \partial_t \hat{B}^{(L)}(t) e^{is\hat{B}^{(L)}(t)} = \int J_\mu(x) \left[\hat{A}_L^\mu(x) + \frac{1}{2} \tilde{A}_L^\mu(x) - s\tilde{A}_L^\mu(x) \right] d\mathbf{r}. \quad (2.2.19)$$

Substituindo o resultado (2.2.19) na equação (2.2.11) e realizando a integral em s , recebemos o operador $\hat{K}^{(L)}$ na forma,

$$\hat{K}^{(L)}(t) = \int J_\mu(x) \hat{A}_L^\mu(x) d\mathbf{r}. \quad (2.2.20)$$

Usando um resultado análogo ao apresentado na Eq. (2.1.24), é fácil ver que:

$$\exp[-i\hat{H}_\gamma^{(L)}t] \hat{K}^{(L)}(t) = \left[\int J_\mu(x) \hat{A}_L^\mu(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right] \exp[-i\hat{H}_\gamma^{(L)}t]. \quad (2.2.21)$$

Então, usando as relações (2.2.10), (2.2.11), (2.2.20) e (2.2.21), podemos claramente demonstrar que o vetor de estado (2.2.4) satisfaz a equação (2.2.3).

O operador de evolução $U^{(L)}(t)$ pode ser apresentado na seguinte forma:

$$\begin{aligned} U^{(L)}(t) &= \exp[i\phi^{(L)}(t)] \exp[-i\hat{H}_\gamma^{(L)}t] \mathcal{D}^{(L)}(z), \\ \phi^{(L)}(t) &= -\frac{1}{2} \int_0^t dt' \int J_\mu(x') \tilde{A}_L^\mu(x') d\mathbf{r}', \\ \mathcal{D}^{(L)}(z) &= \exp \left\{ \sum_{\lambda=0}^3 \int [z_{\mathbf{k}\lambda}(t) \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger - z_{\mathbf{k}\lambda}^*(t) \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}] d\mathbf{k} \right\}, \\ z_{\mathbf{k}\lambda}(t) &= -i \int_0^t dt' \int J_\mu(x') f_{\mathbf{k}\lambda}^{\mu*}(x') d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Assim, podemos escrever o vetor de estado $|\Psi^{(L)}(t)\rangle$ como:

$$|\Psi^{(L)}(t)\rangle = \exp\left[i\phi^{(L)}(t)\right] \exp\left[-i\hat{H}_\gamma^{(L)}t\right] \mathcal{D}^{(L)}(z) |\Psi^{(L)}(0)\rangle. \quad (2.2.23)$$

Note que $\mathcal{D}^{(L)}(z)$ é o operador de deslocamento para estados coerentes [27]. Lembramos algumas propriedades importantes do operador $\mathcal{D}^{(L)}(\beta)$ no calibre de Lorentz:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(L)\dagger}(\beta) &= \mathcal{D}^{(L)-1}(\beta), \quad |\beta\rangle^{(L)} = \mathcal{D}^{(L)}(\beta)|0\rangle^{(L)}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\lambda}|0\rangle^{(L)} = \beta_{\mathbf{k}\lambda}|0\rangle^{(L)}, \\ \mathcal{D}^{(L)\dagger}(\beta)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\lambda}\mathcal{D}^{(L)}(\beta) &= \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\lambda} - \eta_{\lambda\lambda}\beta_{\mathbf{k}\lambda}, \quad \mathcal{D}^{(L)\dagger}(\beta)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger\mathcal{D}^{(L)}(\beta) = \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger - \eta_{\lambda\lambda}\beta_{\mathbf{k}\lambda}^*. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Demonstramos que apesar do operador $\mathcal{D}^{(L)}(z)$ conter fótons virtuais, $\lambda = 0, 3$, o estado formado por uma corrente arbitrária $J_\mu(x')$ é um estado físico admissível. De acordo com o formalismo de Gupta-Bleuler [28], os estados físicos devem satisfazer à condição,

$$\partial_\mu \hat{A}^{(+)\mu} \mathcal{D}^{(L)}(z) |\Psi^{(L)}(0)\rangle = 0, \quad \partial_\mu \hat{A}_L^{(+)\mu}(x) = -i \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{k_\mu \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^\mu e^{-ikx}}{\sqrt{2k_0} (2\pi)^3} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\lambda} d\mathbf{k}. \quad (2.2.25)$$

Usando a representação (2.1.4) é fácil ver que:

$$\sum_{\lambda=0}^3 k_\mu \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^\mu \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\lambda} = k_0 [\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}0} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}3}], \quad (2.2.26)$$

e com o auxílio das propriedades (2.2.24) obtemos:

$$\partial_\mu \hat{A}_L^{(+)\mu} \mathcal{D}^{(L)}(z) |\Psi^{(L)}(0)\rangle = i \mathcal{D}^{(L)}(z) \int \frac{d\mathbf{k} k_0 e^{-ikx}}{\sqrt{2k_0} (2\pi)^3} [z_{\mathbf{k}0}(t) + z_{\mathbf{k}3}(t)] |\Psi^{(L)}(0)\rangle = |L\rangle, \quad (2.2.27)$$

onde foi usado que $|\Psi^{(L)}(0)\rangle$ é um estado físico admissível. Substituindo a forma explícita de $z_{\mathbf{k}\lambda}(t)$, dada na equação (2.2.22), na última equação recebemos,

$$|L\rangle = \mathcal{D}^{(L)}(z) \int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0 (2\pi)^3} \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' [J_0(x')k_0 - J^j(x')k^j] e^{-ik(x-x')} |\Psi^{(L)}(0)\rangle. \quad (2.2.28)$$

Os fatores k_0 e k^j podem ser substituídos por derivadas que agem na exponencial $e^{-ik(x-x')}$, ou seja, podemos reescrever a equação (2.2.28) na forma,

$$|L\rangle = -i \mathcal{D}^{(L)}(z) \int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0 (2\pi)^3} \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' [J_0(x')\partial'_t + J^j(x')\partial'_j] e^{-ik(x-x')} |\Psi^{(L)}(0)\rangle. \quad (2.2.29)$$

Realizando duas integração por partes, uma em t' e outra em \mathbf{r}' , recebemos,

$$|L\rangle = i \mathcal{D}^{(L)}(z) \int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0 (2\pi)^3} \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' [\partial'_t J_0(x') + \partial'_j J^j(x')] e^{-ik(x-x')} |\Psi^{(L)}(0)\rangle = 0, \quad (2.2.30)$$

onde o resultado nulo se justifica pela equação da continuidade (1.1.12). Note que para a equação (2.2.30) ser válida, devemos impor que o termo de contorno na integração em t' seja zero, i.e.,

$$J_0(t, \mathbf{r}') = J_0(0, \mathbf{r}') = 0. \quad (2.2.31)$$

Sendo que a corrente externa age apenas no tempo $0 < t'$, vemos que $J_0(0, \mathbf{r}') = 0$. Por outro lado a condição $J_0(t, \mathbf{r}') = 0$ pode ser interpretada da seguinte forma: os estados e quantidades físicas medidas no tempo t , não sofrem influência da corrente avaliada no tempo $t' = t$. De fato este é o caso, tendo em vista que as quantidades na eletrodinâmica clássica medidas no tempo t , como os campos elétrico e magnético, são influenciadas apenas pela corrente avaliada no tempo $t_{\text{ret}} < t$ (veja, por exemplo, as equações (1.5.6) e (1.5.8)).

Apêndice do capítulo 2: Quântização do campo eletromagnético

Quântização do campo eletromagnético no calibre de Coulomb

Nesta seção trabalhamos apenas com o calibre de Coulomb, por este motivo não usaremos índices para diferenciar calibres aqui. Seguimos o esquema de quantização no calibre de Coulomb que é apresentado na Ref. [29]. A partir da Lagrangiana (1.1.7) passamos para o formalismo Hamiltoniano, onde é necessário introduzir o momento generalizado,

$$\pi_0(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0(x))} = 0, \quad \pi_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^i(x))} = \partial_i A_0(x) - \partial_0 A_i(x) = F_{i0}(x). \quad (\text{CC.1})$$

A Hamiltoniana correspondente é definida como,

$$H = \int \mathcal{H} d\mathbf{r}, \quad \mathcal{H} = \pi_i(x) \partial_0 A^i(x) - \mathcal{L}. \quad (\text{CC.2})$$

Com o uso da relação,

$$\partial_i A_0(x) = \pi_i(x) + \partial_0 A_i(x), \quad (\text{CC.3})$$

que segue da expressão (CC.1) e escrevendo a forma explícita do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}(x)$, podemos apresentar a densidade Hamiltoniana \mathcal{H} da equação (CC.2) como:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \pi_i(x) \pi^i(x) + \pi_i(x) \partial^i A_0(x) + \frac{1}{4} F_{ij}(x) F^{ij}(x) + J_\mu(x) A^\mu(x). \quad (\text{CC.4})$$

O sistema considerado possui uma restrição primária,

$$\Phi = \pi_0(x). \quad (\text{CC.5})$$

A condição de conservação da restrição primária no tempo, produz o seguinte vínculo,

$$\dot{\Phi} = \{\Phi, H\}_{\text{PB}} = J_0(x) + \partial_i \pi_i(x) = 0, \quad (\text{CC.6})$$

onde $\{A, B\}_{\text{PB}}$ designa os colchetes de Poisson. Sob a condição do calibre de Coulomb (1.3.1), o vínculo (CC.6) se transforma em,

$$\partial_i \partial^i A_0(x) = J_0(x), \quad (\text{CC.7})$$

o que permite obter $A_0(x)$ explicitamente na forma

$$A_0(x) = \int \frac{J^0(\mathbf{r}', t)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (\text{CC.8})$$

No processo de quantização a componente $A_0(x)$ não é quantizada, e o operador correspondente não é introduzido. A condição de calibre (1.3.1), impõe que as componentes do potencial vetor sejam transversais, isto é, $A^i(x) = A_\perp^i(x)$. Introduzimos o correspondente momento generalizado transversal $\pi_\perp^i(x)$,

$$\pi_\perp^i(x) = -\partial_0 A_\perp^i(x). \quad (\text{CC.9})$$

Então, a expressão (CC.4) toma a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \pi_\perp^i(x) \pi_\perp^i(x) + \frac{1}{4} F_\perp^{ij} F_\perp^{ij} + \frac{1}{2} J_0(x) A_0(x) + J_i(x) A_\perp^i(x), \\ F_\perp^{ij} &= \partial^i A_\perp^j(x) - \partial^j A_\perp^i(x). \end{aligned} \quad (\text{CC.10})$$

Na equação (CC.10) omitimos o termo $\partial_i [A_0(x)\partial^i A_0(x)]$ pois é uma divergência espacial e não contribui para a Hamiltoniana (CC.2). Agora estamos em posição de realizar uma quantização do operador de Dirac [29]. Todas as variáveis são assumidas operadores. A restrição (CC.5), do ponto de vista de operadores, é colocada como zero. As relações de comutação são construídas usando os colchetes de Dirac [30]. O operador densidade Hamiltoniana $\hat{\mathcal{H}}$ é construído a partir da densidade Hamiltoniana \mathcal{H} e toma a forma,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= \hat{\mathcal{H}}_\gamma + \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}, \quad \hat{\mathcal{H}}_\gamma = \frac{1}{2}\hat{\pi}_\perp^i(x)\hat{\pi}_\perp^i(x) + \frac{1}{4}\hat{F}_\perp^{ij}\hat{F}_\perp^{ij}, \\ \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} &= \frac{1}{2}J_0(x)A_0(x) + J_i(x)\hat{A}_\perp^i(x).\end{aligned}\tag{CC.11}$$

As relações de comutação simultâneas para os operadores $\hat{A}_\perp^i(x)$ e $\hat{\pi}_\perp^j(x')$ são apresentadas como:

$$\begin{aligned}\left[\hat{A}_\perp^i(x), \hat{\pi}_\perp^j(x')\right]\Big|_{x_0=x'_0} &= i\delta_\perp^{ij}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \delta_\perp^{ij} = \delta^{ij} - \Delta^{-1}\partial^i\partial^j, \\ \left[\hat{A}_\perp^i(x), \hat{A}_\perp^j(x')\right]\Big|_{x_0=x'_0} &= \left[\hat{\pi}_\perp^i(x), \hat{\pi}_\perp^j(x')\right]\Big|_{x_0=x'_0} = 0.\end{aligned}\tag{CC.12}$$

Na representação de interação (Dirac) a evolução temporal dos operadores de campos potenciais $\hat{A}_\perp^i(x)$, depende apenas da Hamiltoniana livre \hat{H}_γ

$$\hat{H}_\gamma = \int \hat{\mathcal{H}}_\gamma d\mathbf{r},$$

ou seja, os operadores $\hat{A}_\perp^i(x)$ devem satisfazer as equações de movimento com $J^i(x) = 0$. Neste caso, podemos fazer uma expansão em ondas planas de $\hat{A}_\perp^i(x)$. Lembrando que apenas os modos de campo transversais existem no calibre de Coulomb, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\hat{A}_\perp^i(x) &= \sum_{\lambda=1}^2 \int \left[\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) + \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger f_{\mathbf{k}\lambda}^{i*}(x) \right] d\mathbf{k}, \\ f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) &= \frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2k_0(2\pi)^3}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^i, \quad k_0 = |\mathbf{k}|.\end{aligned}\tag{CC.13}$$

Os coeficientes $\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ e $\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}$ são os operadores de criação e aniquilação, respectivamente, de fótons com momento \mathbf{k} e polarização λ , que pode assumir os valores $\lambda = 1, 2$. Os $\epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^i$ são os vetores de polarização que satisfazem a seguinte relação,

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^{i*} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^j = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\mathbf{k}^2} = \delta_\perp^{ij}.\tag{CC.14}$$

As relações de comutação (CC.12), impõem as seguintes relações de comutação entre os operadores de criação e aniquilação,

$$\left[\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{c}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger\right] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad \left[\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{c}_{\mathbf{k}'\lambda'}\right] = \left[\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger, \hat{c}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger\right] = 0.\tag{CC.15}$$

Para tempos arbitrários, as relações de comutação dos operadores $\hat{A}_\perp^i(x)$ são escritas como:

$$\left[\hat{A}_\perp^i(x), \hat{A}_\perp^j(x')\right] = i\delta_\perp^{ij}D_0(x - x'),\tag{CC.16}$$

onde a função $D_0(x - x')$ foi apresentada na Eq. (2.1.13). Em termos dos operadores $\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}$ e $\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$, a Hamiltoniana de fótons livres \hat{H}_γ toma a forma

$$\hat{H}_\gamma = \sum_{\lambda=1}^2 \int k_0 \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} d\mathbf{k}, \quad (\text{CC.17})$$

onde omitimos o termo que representa a energia do vácuo.

Quântização do campo eletromagnético no calibre de Lorentz

Similarmente ao feito na seção anterior, não usaremos índices para diferenciar calibres, uma vez que nesta seção trabalharemos apenas com o calibre de Lorentz. Quantizamos o campo eletromagnético no calibre de Lorentz de acordo com as Refs. [31] e [18]. Durante o processo de quantização é necessário obter o momento canonicamente conjugado,

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu(x))}. \quad (\text{CL.1})$$

Usando a Lagrangiana na forma dada na Eq. (1.1.7), vemos que o momento canonicamente conjugado ao campo potencial A_0 é identicamente zero, $\pi_0(x) = 0$. Este resultado impossibilita o postulado das relações de comutação entre os campos A^μ e seus correspondentes momentos conjugados π^μ . Para evitar essa complicação, modificamos a Lagrangiana (1.1.7) adicionando o termo $\frac{1}{2} [\partial_\mu A^\mu(x)]^2$, que resulta na seguinte Lagrangiana invariante relativística,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} [\partial_\mu A^\mu(x)]^2 - J_\mu(x) A^\mu(x). \quad (\text{CL.2})$$

Escrevendo o tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ em termos dos campos potenciais A_μ , e desprezando uma 4-divergência é possível reescrever a Lagrangiana (CL.2) na forma conveniente,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - J_\mu(x) A^\mu(x). \quad (\text{CL.3})$$

A Lagrangiana (CL.3) fornece o seguinte momento canonicamente conjugado,

$$\pi^\mu(x) = -\partial_0 A^\mu. \quad (\text{CL.4})$$

A Hamiltoniana clássica correspondente é escrito na forma:

$$\begin{aligned} H &= \int \mathcal{H} d\mathbf{r}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_\gamma + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad \mathcal{H}_{\text{int}} = J_\mu(x) A^\mu(x), \\ \mathcal{H}_\gamma &= -\frac{1}{2} \pi^\mu(x) \pi_\mu(x) + \frac{1}{2} \partial_i A_\nu(x) \partial^i A^\nu(x). \end{aligned} \quad (\text{CL.5})$$

Seguindo o procedimento de quantização canônica, introduzimos os operadores de campos potenciais $\hat{A}^\mu(x)$ e os respectivos momentos canonicamente conjugados $\hat{\pi}^\mu(x) = -\partial_0 \hat{A}^\mu(x)$. Impomos as seguintes relações de comutação para tempos iguais:

$$\begin{aligned} \left[\hat{A}^\mu(x), \hat{\pi}^\nu(x') \right] \Big|_{x_0=x'_0} &= \left[\partial_0 \hat{A}^\mu(x), \hat{A}^\nu(x') \right] \Big|_{x_0=x'_0} = i\eta^{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \left[\hat{A}^\mu(x), \hat{A}^\nu(x') \right] \Big|_{x_0=x'_0} &= \left[\hat{\pi}^\mu(x), \hat{\pi}^\nu(x') \right] \Big|_{x_0=x'_0} = 0. \end{aligned} \quad (\text{CL.6})$$

Na representação de interação, os operadores $\hat{A}_L^\mu(x)$ são expandidos em ondas planas como:

$$\begin{aligned}\hat{A}^\mu(x) &= \sum_{\lambda=0}^3 \int \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} f_{\mathbf{k}\lambda}^\mu(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger f_{\mathbf{k}\lambda}^{\mu*}(x) \right] d\mathbf{k}, \\ f_{\mathbf{k}\lambda}^\mu(x) &= \frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2k_0(2\pi)^3}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^\mu, \quad k_0 = |\mathbf{k}|,\end{aligned}\tag{CL.7}$$

onde $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação, respectivamente, de fótons com momento \mathbf{k} e polarizações $\lambda = 0, 1, 2, 3$ correspondentes. As relações de comutação (CL.6) implicam nas seguintes relações de comutação para os operadores de criação e aniquilação de fótons,

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger \right] = -\eta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'} \right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger \right] = 0.\tag{CL.8}$$

O operador hamiltoniano \hat{H} , é construído a partir da Hamiltoniana clássica (CL.5) via substituição de $\pi^\mu(x)$ e $A^\mu(x)$ pelos operadores $\hat{\pi}^\mu(x)$ e $\hat{A}^\mu(x)$. A Hamiltoniana de fótons livres \hat{H}_γ pode ser escrita em termos dos operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$, usando a expressão (CL.4), na forma,

$$\hat{H}_\gamma = - \sum_{\lambda=0}^3 \eta_{\lambda\lambda} \int k_0 \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} d\mathbf{k},\tag{CL.9}$$

onde novamente omitimos a energia do vácuo. As relações de comutação para tempos arbitrários dos operadores $\hat{A}^\mu(x)$ são escritas como:

$$\left[\hat{A}^\mu(x), \hat{A}^\nu(x') \right] = i\eta^{\mu\nu} D_0(x - x'),\tag{CL.10}$$

onde a função $D_0(x - x')$ foi apresentada na Eq. (2.1.13).

Experimentalmente, apenas os fótons transversais ($\lambda = 1, 2$) são observados, ou seja, os fótons longitudinais e escalares, ($\lambda = 0, 3$), são apenas construções matemáticas que não devem estar presentes nos cálculos de grandezas físicas. Devido a este fato, no processo de quantização no calibre de Lorentz, se faz necessário usar o formalismo de Gupta-Bleuler [28]. Com esse formalismo, o subespaço físico de estados admissíveis é descrito pela condição,

$$\partial_\mu \hat{A}^{(+)\mu}(x) |\Psi(t)\rangle = 0, \quad \hat{A}^{(+)\mu} = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{e^{-ikx} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^\mu}{\sqrt{2k_0(2\pi)^3}} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} d\mathbf{k},\tag{CL.11}$$

que é equivalente a,

$$(\hat{a}_{\mathbf{k}0} - \hat{a}_{\mathbf{k}3}) |\Psi(t)\rangle = 0.\tag{CL.12}$$

Quando as condições (CL.12) e (CL.11) são satisfeitas, o valor médio do operador $\partial_\mu \hat{A}^\mu(x)$ é zero,

$$\langle \Psi(t) | \partial_\mu \hat{A}^\mu(x) | \Psi(t) \rangle = 0,\tag{CL.13}$$

satisfazendo a condição do calibre de Lorentz.

Capítulo 3

Valores Médios

Uma vez que os estados do campo eletromagnético quantizado foram obtidos, discutiremos brevemente os diferentes estados iniciais $|\Psi^{(C)}(0)\rangle$ e $|\Psi^{(L)}(0)\rangle$. Em seguida avaliamos os valores médios dos operadores de campos potencial $\langle A^i(x) \rangle$, elétrico $\langle E^i(x) \rangle$ e magnético $\langle B^i(x) \rangle$ nos estados correspondentes aos dois calibres. Demonstramos que $\langle E^i(x) \rangle$ e $\langle B^i(x) \rangle$ são invariantes de calibre, ou seja, os valores médios dos operadores de campo, em seus respectivos calibres, calculados em seus correspondentes estados, coincidem. A partir dos valores médios $\langle E^i(x) \rangle$ e $\langle B^i(x) \rangle$, construímos uma expressão correspondente ao vetor de Umov-Poynting clássico e, usando os operadores de campos, definimos um operador correspondente ao vetor de Umov-Poynting. Demonstramos a invariância de calibre também para o valor médio do operador de Umov-Poynting e obtemos o valor médio deste operador explicitamente.

3.1 Estados Iniciais

No calibre de Coulomb, assumimos que os estados iniciais são formados a partir dos operadores de criação de fótons transversais. Entretanto, no calibre de Lorentz, existem duas formas de construir os estados iniciais. A primeira forma é usar apenas os operadores de criação de fótons transversais. A segunda forma é construir os estados iniciais usando não apenas os operadores de criação de fótons transversais, mas também os operadores de criação de fótons longitudinais e escalares. No segundo caso, para satisfazer a condição de Gupta-Bleuler (CL.11), os estados iniciais devem conter o mesmo número de fótons longitudinais e escalares. No que se segue consideramos os seguintes estados iniciais:

1. Estado de vácuo $|0\rangle^{(C)}$ no calibre de Coulomb e $|0\rangle^{(L)}$ no calibre de Lorentz, esses estados são aniquilados pela ação dos correspondentes operadores de aniquilação, isto é,

$$\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}|0\rangle^{(C)} = 0, \quad \forall \mathbf{k}, \lambda = 1, 2; \quad \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}|0\rangle^{(L)} = 0, \quad \forall \mathbf{k}, \lambda = 0, 1, 2, 3. \quad (3.1.1)$$

2. Estados puros com n fótons. Estes são estados na forma $|n\rangle^{(C)}$ no calibre de Coulomb e $|n\rangle^{(L)}$ no calibre de Lorentz, tal que,

$$|n\rangle^{(C)} = \frac{\left(\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle^{(C)}, \quad \forall \mathbf{k}, \lambda = 1, 2, \quad (3.1.2)$$

$$|n\rangle^{(L)} = \frac{\left(\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle^{(L)}, \quad \forall \mathbf{k}, \lambda = 0, 1, 2, 3. \quad (3.1.3)$$

3. Estados coerentes $|\alpha\rangle^{(C)}$ no calibre de Coulomb, e $|\beta\rangle^{(L)}$ no calibre de Lorentz [26, 27],

$$|\alpha\rangle^{(C)} = \mathcal{D}^{(C)}(\alpha) |0\rangle^{(C)}, \quad \mathcal{D}^{(C)}(\alpha) = \exp \left\{ \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} \left[\alpha_{\mathbf{k}\lambda} \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger - \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^* \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} \right] \right\}, \quad (3.1.4)$$

$$|\beta\rangle^{(L)} = \mathcal{D}^{(L)}(\beta) |0\rangle^{(L)}, \quad \mathcal{D}^{(L)}(\beta) = \exp \left\{ \sum_{\lambda=0}^3 \int d\mathbf{k} \left[\beta_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger - \beta_{\mathbf{k}\lambda}^* \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \right] \right\}. \quad (3.1.5)$$

Os operadores de deslocamento $\mathcal{D}^{(C)}(\alpha)$ e $\mathcal{D}^{(L)}(\beta)$, satisfazem as propriedades (2.1.29) e (2.2.24), respectivamente. Diferentemente de $y_{\mathbf{k}\lambda}(t)$ e $z_{\mathbf{k}\lambda}(t)$, os c -números $\alpha_{\mathbf{k}\lambda}$ e $\beta_{\mathbf{k}\lambda}$ são arbitrários. É pertinente mencionar que a condição de estados físicos (CL.11) [veja também a Eq. (CL.12)] em conjunto com a representação (2.1.4), implicam na seguinte restrição para os c -números $\beta_{\mathbf{k}\lambda}$,

$$\int k_0 (\beta_{\mathbf{k}0} - \beta_{\mathbf{k}3}) d\mathbf{k} = 0. \quad (3.1.6)$$

4. Em adição aos estados coerentes, consideramos também os estados semicoerentes [32, 33]. Esses estados possuem a forma,

$$|\alpha, n\rangle^{(C)} = \mathcal{D}^{(C)}(\alpha) |n\rangle^{(C)}, \quad (3.1.7)$$

$$|\beta, n\rangle^{(L)} = \mathcal{D}^{(L)}(\beta) |n\rangle^{(L)}. \quad (3.1.8)$$

3.2 Valores médios dos operadores de campos potencial, elétrico e magnético

3.2.1 Valores médios no calibre de Coulomb

Iniciamos pelo cálculo do valor médio do operador $\hat{A}_C^i(x)$ nos estados (2.1.28). Note que os estados em questão são escritos na representação de Schrödinger, logo, devemos usar os operadores na mesma representação. Os operadores em questão são dados na Eq. (2.1.3), e denotamos seu valor esperado por¹,

$$\langle A_C^i(x) \rangle = \langle \Psi^{(C)}(t) | \hat{A}_C^i(\mathbf{r}) | \Psi^{(C)}(t) \rangle. \quad (3.2.1)$$

Usando a Eqs. (2.1.27) junto com as propriedades (2.1.29), obtemos;

$$\langle A_C^i(x) \rangle = \langle \Psi^{(C)}(0) | \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} \{ f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) [\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} + y_{\mathbf{k}\lambda}(t)] + \text{h.c.} \} | \Psi^{(C)}(0) \rangle, \quad (3.2.2)$$

onde a notação h.c. denota o Hermitiano conjugado do primeiro termo. Separando os termos que possuem operadores de criação e aniquilação dos termos que não possuem operadores, chegamos à expressão:

$$\langle A_C^i(x) \rangle = \langle \Psi^{(C)}(0) | \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} [f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} + \text{h.c.}] | \Psi^{(C)}(0) \rangle + \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} 2 \text{Re} [f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) y_{\mathbf{k}\lambda}(t)], \quad (3.2.3)$$

em que

$$2 \text{Re} [f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) y_{\mathbf{k}\lambda}(t)] = f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) y_{\mathbf{k}\lambda}(t) + f_{\mathbf{k}\lambda}^{i*}(x) y_{\mathbf{k}\lambda}^*(t). \quad (3.2.4)$$

¹Veja Apêndice 5.

O primeiro termo da Eq. (3.2.3) é o valor esperado do operador $\hat{A}_C^i(x)$ no estado inicial $|\Psi^{(C)}(0)\rangle$. Escrevendo a forma explícita das funções $f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x)$ e $y_{\mathbf{k}\lambda}(t)$, exibidas nas equações (CC.13) e (2.1.27), obtemos o segundo termo do lado direito de (3.2.3) na forma,

$$\sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} 2 \operatorname{Re} [f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) y_{\mathbf{k}\lambda}] = \int_0^t dt' \int D_0(x-x') \delta_{\perp}^{ik} J^k(x') d\mathbf{r}', \quad (3.2.5)$$

onde foi usada a relação (CC.14). Assim, vemos que o valor médio (3.2.2) possui a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \langle A_C^i(x) \rangle &= \langle A_C^i(x) \rangle_{\text{in}} + \tilde{A}_C^i(x), \\ \langle A_C^i(x) \rangle_{\text{in}} &= \langle \Psi^{(C)}(0) | \hat{A}_C^i(x) | \Psi^{(C)}(0) \rangle, \quad \tilde{A}_C^i(x) = \int_0^t dt' \int D_0(x-x') \delta_{\perp}^{ik} J^k(x') d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

O termo $\langle A_C^i(x) \rangle_{\text{in}}$ pode ser tratado como o campo potencial eletromagnético livre que obedece à certas condições iniciais, definidas pelo estado inicial $|\Psi^{(C)}(0)\rangle$. O termo $\tilde{A}_C^i(x)$ pode ser tratado como o potencial eletromagnético criado pela corrente clássica $J^i(x')$. De acordo com o resultado (C.11) do Apêndice 3, podemos escrever $\tilde{A}_C^i(x)$ na forma,

$$\tilde{A}_C^i(x) = \int_0^t dt' \int D_{\square}(x-x') J_{\perp}^i(x') d\mathbf{r}', \quad (3.2.7)$$

i.e., $\tilde{A}_C^i(x)$ é o campo potencial clássico apresentado na Eq. (1.3.9). Note que o intervalo de integração de t' , garante que $t' < t$. É fácil ver que $\langle A_C^i(x) \rangle_{\text{in}}$ desaparece se o estado inicial $|\Psi^{(C)}(0)\rangle$ for o vácuo (3.1.1) ou um estado puro com n fótons (3.1.2). Se $|\Psi^{(C)}(0)\rangle$ for um estado coerente (3.1.4) ou semicoerente (3.1.7), o termo $\langle A_C^i(x) \rangle_{\text{in}}$ toma a forma,

$$\langle A_C^i(x) \rangle_{\text{in}} = \sum_{\lambda=1}^2 \int 2 \operatorname{Re} [\alpha_{\mathbf{k}\lambda} f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x)] d\mathbf{k}. \quad (3.2.8)$$

Os operadores de campos elétrico e magnético no calibre de Coulomb são definidos como:

$$\hat{E}_C^i(x) = -\partial_t \hat{A}_C^i(x), \quad \hat{B}_C^i(x) = \epsilon_{ijk} \partial_j \hat{A}_C^k(x), \quad (3.2.9)$$

onde ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita. Substituindo a forma explícita de $\hat{A}_C^i(x)$, dada na Eq. (2.1.11), na última equação, obtemos,

$$\hat{E}_C^i(x) = i \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} k_0 [f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} - \text{h.c.}], \quad \hat{B}_C^i(x) = i \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} \epsilon_{ilm} k^l [f_{\mathbf{k}\lambda}^m(x) \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} - \text{h.c.}]. \quad (3.2.10)$$

Na representação de Schrödinger os operadores de campos elétrico $\hat{E}_C^i(\mathbf{r})$ e magnético $\hat{B}_C^i(\mathbf{r})$ são escritos na forma,

$$\hat{E}_C^i(\mathbf{r}) = i \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} k_0 [f_{\mathbf{k}\lambda}^i(\mathbf{r}) \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} - \text{h.c.}], \quad \hat{B}_C^i(\mathbf{r}) = i \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} \epsilon_{ilm} k^l [f_{\mathbf{k}\lambda}^m(\mathbf{r}) \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} - \text{h.c.}]. \quad (3.2.11)$$

Denotamos os valores médios dos operadores (3.2.11) nos estados $|\Psi^{(C)}(t)\rangle$ por,

$$\langle E_C^i(x) \rangle = \langle \Psi^{(C)}(t) | \hat{E}_C^i(\mathbf{r}) | \Psi^{(C)}(t) \rangle, \quad \langle B_C^i(x) \rangle = \langle \Psi^{(C)}(t) | \hat{B}_C^i(\mathbf{r}) | \Psi^{(C)}(t) \rangle. \quad (3.2.12)$$

Os valores médios (3.2.12) podem ser escritos explicitamente como:

$$\begin{aligned}\langle E_C^i(x) \rangle &= \langle \Psi^{(C)}(0) | i \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} k_0 [f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) \tilde{c}_{\mathbf{k}\lambda} - \text{h.c.}] | \Psi^{(C)}(0) \rangle, \\ \langle B_C^i(x) \rangle &= \langle \Psi^{(C)}(0) | i \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} \epsilon_{ilm} k^l [f_{\mathbf{k}\lambda}^m(x) \tilde{c}_{\mathbf{k}\lambda} - \text{h.c.}] | \Psi^{(C)}(0) \rangle,\end{aligned}\quad (3.2.13)$$

em que $\tilde{c}_{\mathbf{k}\lambda} = \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} + y_{\mathbf{k}\lambda}(t)$. De forma análoga ao feito para o valor médio $\langle A_C^i(x) \rangle$, podemos reescrever a equação (3.2.13) como segue:

$$\begin{aligned}\langle E_C^i(x) \rangle &= E_{C,0}^i(x) + \tilde{E}_C^i(x), \quad E_{C,0}^i(x) = \langle \Psi^{(C)}(0) | \hat{E}_C^i(x) | \Psi^{(C)}(0) \rangle, \\ \tilde{E}_C^i(x) &= - \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' J^j(x') \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k_0}{2k_0} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\mathbf{k}^2} \right) \left[e^{-ik(x-x')} + e^{ik(x-x')} \right], \\ \langle B_C^i(x) \rangle &= B_{C,0}^i(x) + \tilde{B}_C^i(x), \quad B_{C,0}^i(x) = \langle \Psi^{(C)}(0) | \hat{B}_C^i(x) | \Psi^{(C)}(0) \rangle, \\ \tilde{B}_C^i(x) &= \epsilon_{ilm} \partial_l \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' J^m(x') D_0(x-x').\end{aligned}\quad (3.2.14)$$

Para obter a forma explícita de $\tilde{B}_C^i(x)$ foram usados os seguintes resultados:

$$\epsilon_{ilm} k^l \left(\delta^{jm} - \frac{k^j k^m}{\mathbf{k}^2} \right) = \epsilon_{ilm} k^l \delta^{jm}, \quad k^l \left[e^{-ik(x-x')} + e^{ik(x-x')} \right] = -i \partial_l \left[e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')} \right]. \quad (3.2.15)$$

Os valores médios de ambos campos elétrico e magnético consistem de dois termos: $\tilde{E}_C^i(x)$, $\tilde{B}_C^i(x)$ que são criados pela corrente elétrica externa e as componentes $E_{C,0}^i(x)$, $B_{C,0}^i(x)$ que se desenvolvem a partir do estado inicial $|\Psi^{(C)}(0)\rangle$ sem sofrer influência da corrente $J^i(x')$. Note que a expressão final da função $\tilde{E}_C^i(x)$ pode ser simplificada se cancelarmos o fator k_0 no numerador e denominador. Entretanto, para demonstrarmos a invariância de calibre dos valores médios é conveniente manter o fator k_0 .

Para o estado inicial sendo o vácuo (3.1.1) ou um estado puro com n fótons (3.1.2), é fácil ver que,

$$E_{C,0}^i(x) = B_{C,0}^i(x) = 0. \quad (3.2.16)$$

Considerando o estado inicial sendo coerente (3.1.4) ou semicoerente (3.1.7), obtemos;

$$\begin{aligned}E_{C,0}^i(x) &= i \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} 2i \text{Im} [k_0 f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) \alpha_{\mathbf{k}\lambda}] d\mathbf{k}, \\ B_{C,0}^i(x) &= i \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} \epsilon_{ilm} 2i \text{Im} [k^l f_{\mathbf{k}\lambda}^m(x) \alpha_{\mathbf{k}\lambda}] d\mathbf{k},\end{aligned}\quad (3.2.17)$$

em que

$$2i \text{Im} [f_{\mathbf{k}\lambda}^m(x) \alpha_{\mathbf{k}\lambda}] = f_{\mathbf{k}\lambda}^m(x) \alpha_{\mathbf{k}\lambda} - f_{\mathbf{k}\lambda}^{m*}(x) \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*. \quad (3.2.18)$$

3.2.2 Valores médios no calibre de Lorentz

Iniciamos com os cálculos do valor médio do operador de potencial eletromagnético (2.2.2) avaliado nos estados (2.2.23),

$$\langle A_L^\mu(x) \rangle = \langle \Psi^{(L)}(t) | \hat{A}_L^\mu(\mathbf{r}) | \Psi^{(L)}(t) \rangle. \quad (3.2.19)$$

Usando a Eq. (2.2.22) junto com as propriedades (2.2.24), chegamos à,

$$\langle A_L^\mu(x) \rangle = \langle \Psi^{(L)}(0) | \sum_{\lambda=0}^3 \int d\mathbf{k} \{ f_{\mathbf{k}\lambda}^\mu(x) [\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} - \eta_{\lambda\lambda} z_{\mathbf{k}\lambda}(t)] + \text{h.c.} \} | \Psi^{(L)}(0) \rangle. \quad (3.2.20)$$

De forma semelhante ao feito anteriormente para o calibre de Coulomb, separamos os termos que contém operadores dos termos funcionais e obtemos,

$$\langle A_L^\mu(x) \rangle = \langle \Psi^{(L)}(0) | \sum_{\lambda=0}^3 \int d\mathbf{k} [f_{\mathbf{k}\lambda}^\mu(x) \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} + \text{h.c.}] | \Psi^{(L)}(0) \rangle - \sum_{\lambda=0}^3 \eta_{\lambda\lambda} \int 2 \text{Re} [f_{\mathbf{k}\lambda}^\mu(x) z_{\mathbf{k}\lambda}(t)] d\mathbf{k}. \quad (3.2.21)$$

O primeiro termo é o valor médio do operador $\hat{A}_L^\mu(x)$, dado na Eq. (CL.7), no estado $|\Psi^{(L)}(0)\rangle$. Usando as formas explícitas de $f_{\mathbf{k}\lambda}^\mu(x)$ e $z_{\mathbf{k}\lambda}(t)$, podemos reescrever o segundo termo do lado direito da equação (3.2.21) como:

$$- \sum_{\lambda=0}^3 \eta_{\lambda\lambda} \int 2 \text{Re} [f_{\mathbf{k}\lambda}^\mu(x) z_{\mathbf{k}\lambda}(t)] d\mathbf{k} = \int_0^t dt' \int D_0(x-x') J^\mu(x') d\mathbf{r}'. \quad (3.2.22)$$

Então, o valor médio (3.2.20) possui a seguinte estrutura:

$$\langle A_L^\mu(x) \rangle = \langle A_L^\mu(x) \rangle_{\text{in}} + \tilde{A}_L^\mu(x), \quad (3.2.23)$$

$$\langle A_L^\mu(x) \rangle_{\text{in}} = \langle \Psi^{(L)}(0) | \hat{A}_L^\mu(x) | \Psi^{(L)}(0) \rangle, \quad \tilde{A}_L^\mu(x) = \int_0^t dt' \int D_0(x-x') J^\mu(x') d\mathbf{r}'. \quad (3.2.24)$$

O termo $\langle A_L^\mu(x) \rangle_{\text{in}}$ pode ser tratado como o campo eletromagnético livre que obedece à certas condições iniciais, definidas pelo estado inicial $|\Psi^{(L)}(0)\rangle$. O termo $\tilde{A}_L^\mu(x)$ pode ser interpretado como o potencial eletromagnético criado pela corrente elétrica $J^\mu(x')$. Usando o resultado (C.11) podemos reescrever $\tilde{A}_L^\mu(x)$ como,

$$\tilde{A}_L^\mu(x) = \int_0^t dt' \int D_\square(x-x') J^\mu(x') d\mathbf{r}'. \quad (3.2.25)$$

É fácil ver que o termo $\langle A_L^\mu(x) \rangle_{\text{in}}$ desaparece se o estado inicial for o vácuo (3.1.1) ou um estado puro com n fótons (3.1.3). Se $|\Psi^{(L)}(0)\rangle$ for um estado coerente (3.1.5) ou um estado semicoerente (3.1.8), o termo $\langle A_L^\mu(x) \rangle_{\text{in}}$ toma a forma,

$$\langle A_L^\mu(x) \rangle_{\text{in}} = - \sum_{\lambda=0}^3 \eta_{\lambda\lambda} \int 2 \text{Re} [\beta_{\mathbf{k}\lambda} f_{\mathbf{k}\lambda}^\mu(x)] d\mathbf{k}. \quad (3.2.26)$$

Os operadores dos campos elétrico e magnético no calibre de Lorentz são definidos por,

$$\hat{E}_L^i(x) = -\partial_i \hat{A}_L^0(x) - \partial_t \hat{A}_L^i(x), \quad \hat{B}_L^i(x) = \epsilon_{ijk} \partial_j \hat{A}_L^k(x). \quad (3.2.27)$$

Substituindo a forma explícita do operador $\hat{A}_L^\mu(x)$, dada na Eq. (CL.7), na equação (3.2.27) obtemos a forma explícita dos operadores $\hat{E}_L^i(x)$ e $\hat{B}_L^i(x)$

$$\begin{aligned} \hat{E}_L^i(x) &= i \sum_{\lambda=0}^3 \int d\mathbf{k} \{ [k_0 f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) - k^i f_{\mathbf{k}\lambda}^0(x)] \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} - \text{h.c.} \}, \\ \hat{B}_L^i(x) &= i \sum_{\lambda=0}^3 \int d\mathbf{k} \epsilon_{ilm} k^l [f_{\mathbf{k}\lambda}^m(x) \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} - \text{h.c.}]. \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Na representação de Schrödinger os operadores $\hat{E}_L^i(\mathbf{r})$ e $\hat{B}_L^i(\mathbf{r})$ tomam as formas:

$$\begin{aligned}\hat{E}_L^i(\mathbf{r}) &= i \sum_{\lambda=0}^3 \int d\mathbf{k} \{ [k_0 f_{\mathbf{k}\lambda}^i(\mathbf{r}) - k^i f_{\mathbf{k}\lambda}^0(\mathbf{r})] \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} - \text{h.c.} \}, \\ \hat{B}_L^i(\mathbf{r}) &= i \sum_{\lambda=0}^3 \int d\mathbf{k} \epsilon_{ilm} k^l [f_{\mathbf{k}\lambda}^m(\mathbf{r}) \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} - \text{h.c.}].\end{aligned}\quad (3.2.29)$$

Denotamos os valores médios dos operadores $\hat{E}_L^i(\mathbf{r})$ e $\hat{B}_L^i(\mathbf{r})$ no estado $|\Psi^{(L)}(t)\rangle$ por,

$$\langle E_L^i(x) \rangle = \langle \Psi^{(L)}(t) | \hat{E}_L^i(\mathbf{r}) | \Psi^{(L)}(t) \rangle, \quad \langle B_L^i(x) \rangle = \langle \Psi^{(L)}(t) | \hat{B}_L^i(\mathbf{r}) | \Psi^{(L)}(t) \rangle. \quad (3.2.30)$$

Explicitamente os valores médios (3.2.30) podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}\langle E_L^i(x) \rangle &= \langle \Psi^{(L)}(0) | i \sum_{\lambda=0}^3 \int d\mathbf{k} \{ [k_0 f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) - f_{\mathbf{k}\lambda}^0(x) k^i] \tilde{a}_{\mathbf{k}\lambda}(t) - \text{h.c.} \} | \Psi^{(L)}(0) \rangle, \\ \langle B_L^i(x) \rangle &= \langle \Psi^{(L)}(0) | i \sum_{\lambda=0}^3 \int d\mathbf{k} \epsilon_{ilm} k^l [f_{\mathbf{k}\lambda}^m(x) \tilde{a}_{\mathbf{k}\lambda}(t) - \text{h.c.}] | \Psi^{(L)}(0) \rangle,\end{aligned}\quad (3.2.31)$$

onde $\tilde{a}_{\mathbf{k}\lambda}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} - \eta_{\lambda\lambda} z_{\mathbf{k}\lambda}(t)$. Primeiramente focamos no valor médio $\langle E_L^i(x) \rangle$. Separando os termos contendo os operadores de criação e aniquilação dos termos que não possuem operadores, podemos reescrever $\langle E_L^i(x) \rangle$ como segue,

$$\begin{aligned}\langle E_L^i(x) \rangle &= \langle \Psi^{(L)}(0) | E_L^i(x) | \Psi^{(L)}(0) \rangle + \tilde{E}_L^i(x), \\ \tilde{E}_L^i(x) &= -i \sum_{\lambda=0}^3 \eta_{\lambda\lambda} \int d\mathbf{k} \{ [k_0 f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) - f_{\mathbf{k}\lambda}^0(x) k^i] z_{\mathbf{k}\lambda}(t) - \text{h.c.} \}.\end{aligned}\quad (3.2.32)$$

Escrevendo a forma explícita das funções $f_{\mathbf{k}\lambda}^\mu(x)$ e $z_{\mathbf{k}\lambda}(t)$ e com o auxílio das realizações (2.1.4) e da relação (2.1.5), podemos simplificar o termo $\tilde{E}_L^i(x)$

$$\tilde{E}_L^i(x) = - \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \int \frac{d\mathbf{k} [J^i(x') k_0 - J_0(x') k^i]}{2k_0(2\pi)^3} \left[e^{-ik(x-x')} + e^{ik(x-x')} \right]. \quad (3.2.33)$$

Podemos substituir os termos k_0 e k^i por derivadas usando o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}k_0 \left[e^{-ik(x-x')} + e^{ik(x-x')} \right] &= i \partial_t \left[e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')} \right], \\ k^i \left[e^{-ik(x-x')} + e^{ik(x-x')} \right] &= -i \partial_i \left[e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')} \right].\end{aligned}\quad (3.2.34)$$

Lembrando da definição (2.1.13) da função $D_0(x-x')$ e usando os resultados (3.2.34) é fácil ver que a expressão (3.2.33) resulta em,

$$\tilde{E}_L^i(x) = -\partial_t \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' D_0(x-x') J^i(x') - \partial_i \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' D_0(x-x') J_0(x'). \quad (3.2.35)$$

O valor médio $\langle B_L^i(x) \rangle$ é obtido de forma similar. Assim, os valores médios (3.2.31) podem ser apresentados na forma:

$$\begin{aligned}
\langle E_L^i(x) \rangle &= E_{L,0}^i(x) + \tilde{E}_L^i(x), \quad E_{L,0}^i(x) = \langle \Psi^{(L)}(0) | \hat{E}_L^i(x) | \Psi^{(L)}(0) \rangle, \\
\tilde{E}_L^i(x) &= -\partial_t \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' D_0(x-x') J^i(x') - \partial_i \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' D_0(x-x') J_0(x'), \\
\langle B_L^i(x) \rangle &= B_{L,0}^i(x) + \tilde{B}_L^i(x), \quad B_{L,0}^i(x) = \langle \Psi^{(L)}(0) | \hat{B}_L^i(x) | \Psi^{(L)}(0) \rangle, \\
\tilde{B}_L^i(x) &= \epsilon_{ilm} \partial_l \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' D_0(x-x') J^m(x').
\end{aligned} \tag{3.2.36}$$

Novamente os valores médios dos campos elétrico e magnético possuem dois termos: os termos $\tilde{E}_L^i(x)$, $\tilde{B}_L^i(x)$ que são criados pela corrente elétrica externa e os termos $E_{L,0}^i(x)$, $B_{L,0}^i(x)$ que se desenvolvem a partir do estado inicial $|\Psi^{(L)}(0)\rangle$ sem sofrerem influência da corrente externa.

Para o estado inicial sendo o vácuo (3.1.1) ou um estado com n fótons (3.1.3), é fácil ver que,

$$E_{L,0}^i(x) = B_{L,0}^i(x) = 0. \tag{3.2.37}$$

Para o estado inicial sendo um estado coerente (3.1.5) ou semicoerente (3.1.8), temos:

$$\begin{aligned}
E_{L,0}^i(x) &= i \sum_{\lambda=0}^3 \int 2i \operatorname{Im} \{ [k_0 f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) - f_{\mathbf{k}\lambda}^0(x) k^i] \beta_{\mathbf{k}\lambda} \} d\mathbf{k}, \\
B_{L,0}^i(x) &= i \sum_{\lambda=0}^3 \int \epsilon_{ilm} 2i \operatorname{Im} [k^l f_{\mathbf{k}\lambda}^m(x) \beta_{\mathbf{k}\lambda}] d\mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{3.2.38}$$

3.2.3 Invariância de calibre

Demonstramos que os resultados obtido em ambos os calibres são completamente equivalentes, isto é, as expressões para os valores médios dos campos são invariantes de calibre. Quando consideramos os termos definidos pelos estados iniciais $|\Psi^{(L)}(0)\rangle$ no calibre de Lorentz, é preciso lembrar que a condição de Gupta-Bleuler (CL.13) deve ser satisfeita para todos os estados fisicamente admissíveis. Usando esta condição e a representação (2.1.4) dos vetores de polarização $\epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^\mu$, pode ser demonstrado que,

$$\langle \Psi^{(L)}(0) | \hat{E}_L^i(x) | \Psi^{(L)}(0) \rangle = i \sum_{\lambda=1}^2 \langle \Psi^{(L)}(0) | \int d\mathbf{k} k_0 [f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} - \text{h.c.}] | \Psi^{(L)}(0) \rangle. \tag{3.2.39}$$

Alguns cálculos que levam à este resultado são demonstrados explicitamente na Seção 3.5.1. No calibre de Coulomb a expressão (3.2.39) toma a forma,

$$\langle \Psi^{(C)}(0) | \hat{E}_C^i(x) | \Psi^{(C)}(0) \rangle = i \sum_{\lambda=1}^2 \langle \Psi^{(C)}(0) | \int d\mathbf{k} k_0 [f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} - \text{h.c.}] | \Psi^{(C)}(0) \rangle. \tag{3.2.40}$$

Então, provido que os estados iniciais $|\Psi^{(C)}(0)\rangle$ e $|\Psi^{(L)}(0)\rangle$ possuem a mesma estrutura em relação aos fótons transversais, i.e.,

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} | \Psi^{(L)}(0) \rangle = \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} | \Psi^{(C)}(0) \rangle, \quad \lambda = 1, 2, \tag{3.2.41}$$

concluimos que,

$$E_{L,0}^i(x) = E_{C,0}^i(x) = E_0^i, \quad B_{L,0}^i(x) = B_{C,0}^i(x) = B_0^i. \quad (3.2.42)$$

Agora precisamos comparar os termos $\tilde{E}_L^i(x)$, $\tilde{B}_L^i(x)$ com $\tilde{E}_C^i(x)$, $\tilde{B}_C^i(x)$. Iniciamos da expressão de $\tilde{E}_L^i(x)$,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_L^i(x) &= E_1 + E_2 \\ E_1 &= -\partial_t \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' D_0(x-x') J^i(x'), \quad E_2 = -\partial_i \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' D_0(x-x') J_0(x') \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

Deixando a derivada ∂_t agir na função $D_0(x-x')$ do termo E_1 , obtemos,

$$E_1 = - \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k_0}{2k_0} J^j(x') \delta^{ji} \left[e^{-ik(x-x')} + e^{ik(x-x')} \right]. \quad (3.2.44)$$

Note que E_1 coincide com o primeiro termo da segunda linha da equação (3.2.36). Introduzindo $1 = k_0^2/|\mathbf{k}|^2$ em E_2 e substituindo a multiplicação de k_0^2 na função $D_0(x-x')$ por derivadas, obtemos,

$$E_2 = -i\partial_i \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0(2\pi)^3} \frac{J_0(x')}{|\mathbf{k}|^2} \partial_t \partial'_t \left[e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')} \right]. \quad (3.2.45)$$

Realizamos uma integração por partes em t' e usamos a condição para estados físicos dada na equação (2.2.31) para obtermos,

$$E_2 = i\partial_i \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0(2\pi)^3} \frac{\partial'_t J_0(x')}{|\mathbf{k}|^2} \partial_t \left[e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')} \right]. \quad (3.2.46)$$

Fazendo uso da equação de continuidade (1.1.12) e aplicando a derivada ∂_t chegamos à,

$$E_2 = -\partial_i \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k_0}{2k_0} \frac{\partial'_j J^j(x')}{|\mathbf{k}|^2} \left[e^{-ik(x-x')} + e^{ik(x-x')} \right]. \quad (3.2.47)$$

Realizando mais uma integração por partes em \mathbf{r}' e após a ação das derivadas ∂_i e ∂'_j , vemos que E_2 toma a forma:

$$E_2 = \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k_0}{2k_0} J^i(x') \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2} \left[e^{-ik(x-x')} + e^{ik(x-x')} \right]. \quad (3.2.48)$$

Então, a expressão (3.2.43) resulta em,

$$\tilde{E}_L^i(x) = - \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' J^j(x') \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k_0}{2k_0} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2} \right) \left[e^{-ik(x-x')} + e^{ik(x-x')} \right] = \tilde{E}_C^i(x). \quad (3.2.49)$$

Concluimos que o valor médio do operador de campo elétrico no calibre de Lorentz coincide com o valor médio do operador de campo elétrico no calibre de Coulomb, i.e.,

$$\langle E_L^i(x) \rangle = \langle E_C^i(x) \rangle. \quad (3.2.50)$$

Os cálculos correspondentes ao campo magnético são triviais e levam a,

$$\langle B_L^i(x) \rangle = \langle B_C^i(x) \rangle. \quad (3.2.51)$$

Usando os resultados (3.2.25) e (3.2.36) podemos escrever:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_L^i(x) &= \tilde{E}_C^i(x) = E^i(x) = -\partial_t A_L^i(x) - \partial_i A_L^0(x), \\ \tilde{B}_L^i(x) &= \tilde{B}_C^i(x) = B^i(x) = \epsilon_{ilm} \partial_l A_L^m(x). \end{aligned} \quad (3.2.52)$$

Então, constatamos que os termos $E^i(x)$, $B^i(x)$ são os campos clássicos gerados pela corrente elétrica $J^\mu(x)$.

3.3 Valor médio do operador de Umov-Poynting

Obtidos os resultados dos valores médios para os operadores de campo elétrico e campo magnético, avançamos para os cálculos do valor médio do vetor de Umov-Poynting em ambos calibres. O interesse em introduzir o operador correspondente ao vetor de Umov-Poynting, se justifica pelo fato de que o vetor de Umov-Poynting clássico fornece a energia por unidade de área e unidade de tempo, emitida por uma distribuição de corrente elétrica.

3.3.1 Valor médio no calibre de Coulomb

No calibre de Coulomb o vetor de Umov-Poynting $S_C^i(x)$ tem a forma,

$$S_C^i(x) = \epsilon_{ijm} \langle E_C^j(x) \rangle \langle B_C^m(x) \rangle, \quad (3.3.1)$$

ou explicitamente:

$$S_C^i(x) = \epsilon_{ijm} [E_0^j(x) B_0^m(x) + E^j(x) B_0^m(x) + E_0^j(x) B^m(x) + E^j(x) B^m(x)], \quad (3.3.2)$$

onde foi usado $E_0^j = E_{C,0}^j$, $B_0^m = B_{C,0}^m$ e $E^j(x) = \tilde{E}_C^j(x)$, $B^m(x) = \tilde{B}_C^m(x)$. Por outro lado, podemos introduzir o operador $\hat{S}_C^i(\mathbf{r})$ correspondente ao vetor de Umov-Poynting como,

$$\hat{S}_C^i(\mathbf{r}) = \epsilon_{ijm} \hat{E}_C^j(\mathbf{r}) \hat{B}_C^m(\mathbf{r}). \quad (3.3.3)$$

Denotamos o valor médio do operador $\hat{S}_C^i(\mathbf{r})$ no estado $|\Psi^{(C)}(t)\rangle$ por:

$$\langle S_C^i(x) \rangle = \langle \Psi^{(C)}(t) | \hat{S}_C^i(\mathbf{r}) | \Psi^{(C)}(t) \rangle. \quad (3.3.4)$$

Substituindo a forma explícita dos operadores $\hat{E}_C^j(\mathbf{r})$ e $\hat{B}_C^m(\mathbf{r})$, dada na Eq. (3.2.11), na última equação, obtemos,

$$\langle S_C^i(x) \rangle = \epsilon_{ijm} [S_C^{jm}(x) + E^j(x) B_0^m(x) + E_0^j(x) B^m(x) + E^j(x) B^m(x)], \quad (3.3.5)$$

onde S_C^{jm} é o valor esperado do operador quadrático $\hat{E}_C^j(x) \hat{B}_C^m(x)$ no estado inicial $|\Psi^{(C)}(0)\rangle$, isto é,

$$S_C^{jm} = \langle \Psi^{(C)}(0) | \hat{E}_C^j(x) \hat{B}_C^m(x) | \Psi^{(C)}(0) \rangle. \quad (3.3.6)$$

Os termos $E^j(x)$ e $B^m(x)$ são os campos elétrico e magnético gerados pela corrente $J^\mu(x)$. Por outro lado, os termos $E_0^j(x)$ e $B_0^m(x)$ são os valores médios dos operadores de campos elétrico e magnético no estado inicial $|\Psi^{(C)}(0)\rangle$.

Primeiramente vamos considerar o estado inicial sendo o vácuo (3.1.1), $|\Psi^{(C)}(0)\rangle = |0\rangle^{(C)}$. Sendo que usaremos apenas o calibre de Coulomb, omitiremos o índice superior (C) nos vetores de estados. Os valores médios E_0^j e B_0^m são zeros (3.2.16), então,

$$\langle S_C^i(x) \rangle = \epsilon_{ijm} [S_C^{jm}(x) + E^j(x) B^m(x)]. \quad (3.3.7)$$

O único termo quadrático diferente de zero em $S_C^{jm}(x)$ é proveniente de:

$$\langle 0 | \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{c}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger | 0 \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.3.8)$$

ou seja,

$$\epsilon_{ijm} S_C^{jm} = \epsilon_{ijm} \epsilon_{mlp} \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{k_0 d\mathbf{k}}{2k_0 (2\pi)^3} k^l [\epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^j \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^{p*}]. \quad (3.3.9)$$

Com o auxílio do seguinte resultado,

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_{ijm} \epsilon_{mlp} k^l [\epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^j \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^{p*}] = \sum_{\lambda=1}^2 (\delta_{il} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{jl}) k^l [\epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^j \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^{p*}] = 2k^i, \quad (3.3.10)$$

chegamos à:

$$\epsilon_{ijm} S_C^{jm} = \int \frac{k^i}{(2\pi)^3} d\mathbf{k} = S_0^i. \quad (3.3.11)$$

Note que a integral na equação (3.3.11) não é definida formalmente, pois os limites de integração são infinitos. Entretanto, é fácil ver que $\epsilon_{ijn} S_C^{jn}$ desaparece se restringimos o limite superior na energia dos fótons por qualquer valor arbitrariamente grande, porém finito.

Consideramos o estado inicial como sendo um estado com n fótons (3.1.2), sendo os fótons iniciais com momento \mathbf{p} e polarização σ . Novamente os valores médios E_0^j e B_0^m são zero (3.2.37). Os termos diferentes de zero em $\epsilon_{ijm} S_C^{jm}$ são provenientes de,

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{c}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger | n \rangle &= n \delta_{\sigma\lambda'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}') \delta_{\sigma\lambda} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ \langle n | \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}'\lambda'} | n \rangle &= n \delta_{\sigma\lambda'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}') \delta_{\sigma\lambda} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Nesse caso $\epsilon_{ijm} S_C^{jm}$ toma a forma,

$$\epsilon_{ijm} S_C^{jm} = \frac{n p^i}{(2\pi)^3} + S_0^i. \quad (3.3.13)$$

Para o caso do estado inicial ser um estado coerente (3.1.4), os termos que envolvem as quantidades $E_0^j(x)$ e $B_0^m(x)$ são diferentes de zero e são dados na expressão (3.2.17). O termo $\epsilon_{ijm} S_C^{jm}$ é escrito como:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijm} S_C^{jm} &= -\epsilon_{ijm} \langle 0 | \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \int \frac{k_0 d\mathbf{k} d\mathbf{k}'}{2\sqrt{k_0 k_0'} (2\pi)^3} \epsilon_{mlp} k'^l [e^{-ikx} (\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}) \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^j - e^{ikx} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^{j*} \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*] \\ &\quad \times [e^{-ik'x} \alpha_{\mathbf{k}'\lambda'} \epsilon_{\mathbf{k}'\lambda'}^p - e^{ik'x} (\hat{c}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger + \alpha_{\mathbf{k}'\lambda'}^*) \epsilon_{\mathbf{k}'\lambda'}^{p*}] | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

onde foram usadas as propriedades (2.1.29) do operador $\mathcal{D}(\alpha)$. Com o auxílio de alguns resultados anteriores é possível reescrever a equação (3.3.14) na seguinte forma,

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijm} S_C^{jm} &= S_0^i + S_\alpha^i, \\ S_\alpha^i &= \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \int \frac{k_0 d\mathbf{k} d\mathbf{k}'}{\sqrt{k_0 k_0'} (2\pi)^3} \epsilon_{ijm} \epsilon_{mlp} k'^l S_\alpha^{jp}, \quad S_\alpha^{jp} = \{\text{Re}[AB^*] - \text{Re}[AB]\}, \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

em que,

$$\begin{aligned} A &= e^{-ikx} \alpha_{\mathbf{k}\lambda} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^j, \quad B = e^{-ik'x} \alpha_{\mathbf{k}'\lambda'} \epsilon_{\mathbf{k}'\lambda'}^p, \\ A &= A^{\text{re}} + iA^{\text{im}}, \quad B = B^{\text{re}} + iB^{\text{im}}. \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Usando o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} AB^* &= [A^{\text{re}}B^{\text{re}} + A^{\text{im}}B^{\text{im}}] + i [A^{\text{im}}B^{\text{re}} - A^{\text{re}}B^{\text{im}}], \\ AB &= [A^{\text{re}}B^{\text{re}} - A^{\text{im}}B^{\text{im}}] + i [A^{\text{im}}B^{\text{re}} + A^{\text{re}}B^{\text{im}}], \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

vemos que o termo S_α resulta em,

$$S_\alpha^{jp} = A^{\text{re}}B^{\text{re}} + A^{\text{im}}B^{\text{im}} - A^{\text{re}}B^{\text{re}} + A^{\text{im}}B^{\text{im}} = 2A^{\text{im}}B^{\text{im}}, \quad (3.3.18)$$

ou lembrando das definições de A e B ,

$$S_\alpha^{jp} = 2 \text{Im} [e^{-ikx} \alpha_{\mathbf{k}\lambda} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^j] \text{Im} [e^{-ik'x} \alpha_{\mathbf{k}'\lambda'} \epsilon_{\mathbf{k}'\lambda'}^p]. \quad (3.3.19)$$

Se o estado inicial for um estado semicoerente (3.1.7), os cálculos do valor médio do operador de Umov-Poynting são análogos aos do caso do estado coerente. O resultado final é:

$$\epsilon_{ijm} S_C^{jpm} = S_0^i + S_\alpha^i + \frac{n p^i}{(2\pi)^3}, \quad (3.3.20)$$

onde p^i é a componente i do momento dos fótons que compõem o estado inicial semicoerente.

3.3.2 Valor médio no calibre de Lorentz

No calibre de Lorentz o vetor de Poynting $S_L^i(x)$ toma a forma,

$$S_L^i(x) = \epsilon_{ijm} \langle E_L^j(x) \rangle \langle B_L^m(x) \rangle, \quad (3.3.21)$$

ou

$$S_L^i(x) = \epsilon_{ijm} [E_0^j(x) B_0^m(x) + E^j(x) B_0^m + E_0^j B^m(x) + E^j(x) B^m(x)]. \quad (3.3.22)$$

O operador $\hat{S}_L^i(\mathbf{r})$ no calibre de Lorentz é,

$$\hat{S}_L^i(\mathbf{r}) = \epsilon_{ijm} \hat{E}_L^j(\mathbf{r}) \hat{B}_L^m(\mathbf{r}). \quad (3.3.23)$$

O valor médio $\langle S_L^i(x) \rangle$ do operador $\hat{S}_L^i(\mathbf{r})$ no estado $|\Psi^{(L)}(t)\rangle$ é denotado por,

$$\langle S_L^i(x) \rangle = \langle \Psi^{(L)}(t) | \hat{S}_L^i(\mathbf{r}) | \Psi^{(L)}(t) \rangle. \quad (3.3.24)$$

Substituindo a forma explícita dos operadores $\hat{E}_L^j(\mathbf{r})$ e $\hat{B}_L^m(\mathbf{r})$, dada na Eq. (3.2.29), na equação (3.3.24) obtemos;

$$\begin{aligned} \langle S_L^i(x) \rangle &= \epsilon_{ijm} [S_L^{jpm}(x) + E^j(x) B_0^m(x) + E_0^j B^m(x) + E^j(x) B^m(x)], \\ S_L^{jpm}(x) &= \langle \Psi^{(L)}(0) | \hat{E}_L^j(x) \hat{B}_L^m(x) | \Psi^{(L)}(0) \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Os termos $E^j(x)$ e $B^m(x)$ são os campos elétrico e magnético gerados pela corrente $J^\mu(x)$. Por outro lado, os termos $E_0^j(x)$ e $B_0^m(x)$ são os valores médios dos operadores de campos elétrico e magnético no estado inicial $|\Psi^{(L)}(0)\rangle$. Antes de usarmos os estados iniciais descritos na Seção 3.1 deste capítulo, podemos demonstrar a invariância de calibre do valor médio do operador de Umov-Poynting e assumir que os resultados obtidos para o calibre de Coulomb coincidem com os resultados no calibre de Lorentz.

3.3.3 Ivariância de Calibre

De acordo com os resultados apresentados nas equações (3.2.50), (3.2.51) e (3.2.52), para demonstrarmos a invariância de calibre dos valores médios do operador de Umov-Poynting, se faz necessário apenas comprovar a igualdade $S_C^{jm} = S_L^{jm}$, i.e.,

$$\langle \Psi^{(C)}(0) | \hat{E}_C^j(x) \times \hat{B}_C^m(x) | \Psi^{(C)}(0) \rangle = \langle \Psi^{(L)}(0) | \hat{E}_L^j(x) \times \hat{B}_L^m(x) | \Psi^{(L)}(0) \rangle. \quad (3.3.26)$$

Iniciamos da expressão,

$$S_L^{jm} = - \sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \epsilon_{mlp} k^l \langle \Psi_0^{(L)} | \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \tilde{f}_{\mathbf{k}\lambda}^j - \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \tilde{f}_{\mathbf{k}\lambda}^{j*} \right] \left[\hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'} f_{\mathbf{k}'\lambda'}^p - \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger f_{\mathbf{k}'\lambda'}^{p*} \right] | \Psi_0^{(L)} \rangle, \quad (3.3.27)$$

onde omitimos a dependência em x das funções $\tilde{f}_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) = [k_0 f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) - f_{\mathbf{k}\lambda}^0(x) k^i]$, $f_{\mathbf{k}'\lambda'}^p(x)$ e de $S_L^{jm}(x)$ para não carregar em demasia as equações e usamos uma notação simplificada para os estados iniciais, $|\Psi_0^{(L)}\rangle = |\Psi^{(L)}(0)\rangle$. É fácil ver que o termo referente ao campo magnético é o mesmo para os dois calibres, $\hat{B}_L^m(x) = \hat{B}_C^m(x)$. De acordo com a definição (2.1.4) temos que:

$$\epsilon_{mlp} k^l f_{\mathbf{k}'3}^p = \epsilon_{mlp} k^l f_{\mathbf{k}'3}^{p*} = 0, \quad f_{\mathbf{k}'0}^p = f_{\mathbf{k}'0}^{p*} = 0. \quad (3.3.28)$$

Então, a soma em λ' é diferente de zero apenas para $\lambda' = 1, 2$.

No termo referente ao campo elétrico $\hat{E}_L^j(x)$ vamos considerar a soma apenas de $\lambda = 0, 3$, isto é,

$$\sum_{\lambda=0,3} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \tilde{f}_{\mathbf{k}\lambda}^j - \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \tilde{f}_{\mathbf{k}\lambda}^{j*} \right] = \hat{a}_{\mathbf{k}0} \tilde{f}_{\mathbf{k}0}^j + \hat{a}_{\mathbf{k}3} \tilde{f}_{\mathbf{k}3}^j - \left(\hat{a}_{\mathbf{k}0}^\dagger \tilde{f}_{\mathbf{k}0}^{j*} + \hat{a}_{\mathbf{k}3}^\dagger \tilde{f}_{\mathbf{k}3}^{j*} \right). \quad (3.3.29)$$

Usando novamente a Eq. (2.1.4) e a forma explícita das funções $f_{\mathbf{k}\lambda}^j(x)$, vemos que o último termo da expressão (3.3.29) pode ser escrito como:

$$\left(\hat{a}_{\mathbf{k}0}^\dagger \tilde{f}_{\mathbf{k}0}^{j*} + \hat{a}_{\mathbf{k}3}^\dagger \tilde{f}_{\mathbf{k}3}^{j*} \right) = \frac{\exp(ikx) k^j}{\sqrt{2k_0} (2\pi)^3} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}3}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{k}0}^\dagger \right), \quad (3.3.30)$$

logo, a condição (CL.12) nos diz que esse termo desaparece quando ele age no estado $\langle \Psi^{(L)}(0) |$, sobrando apenas os dois primeiros termos da equação (3.3.29). Sendo que $\tilde{f}_{\mathbf{k}0}^j$ e $\tilde{f}_{\mathbf{k}3}^j$ podem ser escritos na forma:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\mathbf{k}0}^j &= \frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2k_0} (2\pi)^3} [k_0 \epsilon_{\mathbf{k}0}^j - k^j \epsilon_{\mathbf{k}0}^0] = -\frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2k_0} (2\pi)^3} k^j, \\ \tilde{f}_{\mathbf{k}3}^j &= \frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2k_0} (2\pi)^3} [k_0 \epsilon_{\mathbf{k}3}^j - k^j \epsilon_{\mathbf{k}3}^0] = \frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2k_0} (2\pi)^3} k^j, \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

vemos que a Eq. (3.3.29) contribuem apenas com,

$$\sum_{\lambda=0,3} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \tilde{f}_{\mathbf{k}\lambda}^j - \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \tilde{f}_{\mathbf{k}\lambda}^{j*} \right] \rightarrow \frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2k_0} (2\pi)^3} k^j [\hat{a}_{\mathbf{k}3} - \hat{a}_{\mathbf{k}0}]. \quad (3.3.32)$$

Lembrando que $\lambda' = 1, 2$ podemos escrever,

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}3} - \hat{a}_{\mathbf{k}0}] \left[\hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'} f_{\mathbf{k}'\lambda'}^p - \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger f_{\mathbf{k}'\lambda'}^{p*} \right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'} f_{\mathbf{k}'\lambda'}^p - \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger f_{\mathbf{k}'\lambda'}^{p*} \right] [\hat{a}_{\mathbf{k}3} - \hat{a}_{\mathbf{k}0}], \quad (3.3.33)$$

que deve desaparecer quando agir em $|\Psi^{(L)}(0)\rangle$ devido à condição (CL.12). Assim, os únicos termos que contribuem para S_L^{jm} , da Eq. (3.3.27), são os termos com $\lambda, \lambda' = 1, 2$. O último passo para demonstrar a invariância de calibre do valor médio do operador de Umov-Poynting, é perceber que,

$$\tilde{f}_{\mathbf{k}\lambda}^j = k_0 f_{\mathbf{k}\lambda}^j, \quad \lambda = 1, 2, \quad (3.3.34)$$

então, finalmente obtemos;

$$S_L^{jm} = - \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' k_0 \epsilon_{mlp} k'^l \left\langle \Psi_0^{(L)} \left| \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} f_{\mathbf{k}\lambda}^j - \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger f_{\mathbf{k}\lambda}^{j*} \right] \left[\hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'} f_{\mathbf{k}'\lambda'}^p - \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger f_{\mathbf{k}'\lambda'}^{p*} \right] \right| \Psi_0^{(L)} \right\rangle. \quad (3.3.35)$$

Assumindo que os estados iniciais $|\Psi^{(C)}(0)\rangle$ e $|\Psi^{(L)}(0)\rangle$ possuem a mesma estrutura em relação aos fótons transversais, como na equação (3.2.41), é fácil ver que,

$$\epsilon_{ijm} S_L^{jm} = \epsilon_{ijm} S_C^{jm}, \quad (3.3.36)$$

i.e.,

$$\langle S_L^i(x) \rangle = \langle S_C^i(x) \rangle. \quad (3.3.37)$$

Tendo provado a invariância de calibre o valor médio do operador de Umov-Poynting, podemos escolher o calibre de Coulomb ou o de Lorentz e estudar as características da radiação emitida por uma distribuição de corrente elétrica. Usaremos os resultados do valor médio $\langle S_C^i(x) \rangle$, obtidos nas equações (3.3.11), (3.3.13), (3.3.15) e (3.3.20) para fazer uma analogia entre a quantidade referente à taxa de emissão de energia por uma corrente (1.6.4) e o seu correspondente quântico, que será construído no próximo capítulo.

Capítulo 4

Radiação eletromagnética de uma carga em movimento

Como é bem conhecido, quando uma carga está em movimento ela pode emitir uma certa radiação. Na teoria eletromagnética clássica, a radiação emitida por uma carga pontual em movimento, pode ser calculada usando o teorema de Poynting (veja a equação (1.6.4)) com o auxílio dos campos apresentados nas equações (1.5.6) e (1.5.6). Neste capítulo analisamos a radiação emitida por uma carga em movimento, levando em conta a natureza quântica do campo irradiado de forma exata, considerando que a corrente elétrica permanece clássica. Para tanto, usamos o modelo quântico do vetor de Umov-Poynting descrito no capítulo anterior e a probabilidade de radiação de fótons que é desenvolvida neste capítulo.

4.1 Análogo quântico da perda e da emissão de energia

Como uma primeira tentativa de analisar as características quânticas da radiação emitida por uma corrente, consideramos um análogo quântico associado ao termo de perda de energia pelo elétron W^{loss} , dado na Eq. (1.6.3), em conjunto com um análogo quântico da taxa de emissão de energia W^{rad} apresentado na expressão (1.6.4).

4.1.1 Análogo quântico da perda de energia

Primeiramente consideramos um análogo quântico associado ao termo de perda de energia pelo elétron W^{loss} para os casos onde o resultado (1.7.1) é válido. Introduzimos o operador de perda de energia \hat{W}^{loss} , substituindo o campo elétrico clássico E^i pelo correspondente operador \hat{E}_C^i , ou seja,

$$\hat{W}^{\text{loss}}(x) = \int_V J_i(x) \hat{E}_C^i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.1.1)$$

O valor médio do operador $\hat{W}^{\text{loss}}(x)$ no estado $|\Psi^{(C)}(t)\rangle$ é dado por,

$$\langle \hat{W}^{\text{loss}} \rangle = \langle \Psi^{(C)}(t) | \hat{W}^{\text{loss}} | \Psi^{(C)}(t) \rangle = \int_V J_i(x) \langle \hat{E}_C^i(x) \rangle d\mathbf{r}. \quad (4.1.2)$$

Lembramos que a forma explícita de $\langle \hat{E}_C^i(x) \rangle$ é apresentada na equação (3.2.14). O valor médio do operador perda de energia $\langle \hat{W}^{\text{loss}}(x) \rangle$, consiste de duas partes:

$$\begin{aligned} \langle \hat{W}^{\text{loss}}(x) \rangle &= W_0^{\text{loss}} + \tilde{W}^{\text{loss}}, \\ W_0^{\text{loss}} &= \int_V J_i(x) E_0^i(x) d\mathbf{r}, \quad \tilde{W}^{\text{loss}} = \int_V J_i(x) E^i(x) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

A função E^i é o campo elétrico clássico criado pela corrente externa J^μ . Assim, o termo \tilde{W}^{loss} reproduz a expressão clássica para a perda de energia. O termo W_0^{loss} depende do estado inicial do sistema.

Com o estado inicial sendo o vácuo (3.1.1) ou um estado puro com n fótons (3.1.2), é fácil ver que W_0^{loss} é zero, ou seja,

$$\langle \hat{W}^{\text{loss}}(x) \rangle = \tilde{W}^{\text{loss}} = \int_V J_i(x) E^i(x) d\mathbf{r}. \quad (4.1.4)$$

Assim, reproduzimos o caso clássico. Por outro lado, se o estado inicial for um estado coerente (3.1.4) ou semicoerente (3.1.7), usamos o resultado (3.2.17) e obtemos,

$$\langle \hat{W}^{\text{loss}}(x) \rangle = i \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} \int_V J_i(x) 2i \text{Im} [k_0 f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) \alpha_{\mathbf{k}\lambda}] d\mathbf{r} + \int_V J_i(x) E^i(x) d\mathbf{r}. \quad (4.1.5)$$

Note que os resultados obtidos reproduzem o resultado clássico (4.1.4) ou um resultado clássico mais um termo que depende do estado quântico inicial (4.1.5). Nesse caso, vemos que a radiação emitida pela corrente sozinha (quando o estado inicial é o vácuo), analisada via valor médio $\langle \hat{W}^{\text{loss}}(x) \rangle$, corresponde ao resultado clássico.

4.1.2 Análogo quântico da taxa de emissão de energia

Consideramos um análogo quântico da taxa de emissão de energia W^{rad} , que foi apresentada na Eq. (1.6.4). Podemos introduzir o operador de emissão de energia \hat{W}^{rad} , da seguinte forma

$$\hat{W}^{\text{rad}} = \oint_S \hat{S}_C^i(x) ds^i, \quad (4.1.6)$$

onde ds^i é $n^i ds$, sendo ds o elemento de superfície e n^i o vetor normal associado ao elemento ds . O valor médio do operador \hat{W}^{rad} no estado $|\Psi^{(C)}(t)\rangle$ é denotado por,

$$\langle W^{\text{rad}} \rangle = \langle \Psi^{(C)}(t) | \hat{W}^{\text{rad}} | \Psi^{(C)}(t) \rangle = \oint_S \langle S_C^i(x) \rangle ds^i. \quad (4.1.7)$$

Substituindo o valor médio $\langle S_C^i(x) \rangle$, exibido na equação (3.3.5), na equação (4.1.7) obtemos:

$$\begin{aligned} \langle W^{\text{rad}} \rangle &= \sum_{n=1}^4 W_n, \\ W_1 &= \oint_S \epsilon_{ijm} S_C^{jm}(x) ds^i, \quad W_2 = \oint_S \epsilon_{ijm} E^j(x) B_0^m(x) ds^i, \\ W_3 &= \oint_S \epsilon_{ijm} E_0^j(x) B^m(x) ds^i, \quad W_4 = \oint_S \epsilon_{ijm} E^j(x) B^m(x) ds^i. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

O valor médio $\langle W^{\text{rad}} \rangle$ inclui a média W_1 sobre os estados iniciais e os termos de correlação W_2 e W_3 , descrevendo a interação dos campos clássicos com os valores médios dos campos no estado inicial. Sendo que o termo W_4 contém apenas os campos clássicos E^j e B^m , que satisfazem as equações de Maxwell, a contribuição proveniente deste termo pode ser calculada como na Ref. [6] ou [34]. As contribuições dos termos W_1 , W_2 e W_3 dependem do estado inicial do sistema.

Considerando o estado inicial como sendo o vácuo (3.1.1), os campos iniciais B_0^i e E_0^i são zeros. Assim, os termos W_2 e W_3 não contribuem para $\langle W^{\text{rad}} \rangle$. Nesse caso o valor médio $\langle W^{\text{rad}} \rangle$ toma a forma,

$$\langle W^{\text{rad}} \rangle = \int \oint_S \frac{k^i}{(2\pi)^3} ds^i d\mathbf{k} + \epsilon_{ijm} \oint_S E^j(x) B^m(x) ds^i, \quad (4.1.9)$$

onde foi usado o resultado (3.3.11). É fácil ver que mesmo não impondo um limite superior para a integral em \mathbf{k} , o primeiro termo do lado direito da expressão (4.1.9) é zero, então,

$$\langle W^{\text{rad}} \rangle = \epsilon_{ijm} \oint_S E^j(x) B^m(x) ds^i. \quad (4.1.10)$$

Assim, vemos que o termo $\langle W^{\text{rad}} \rangle$ reproduz o valor clássico W^{rad} quando o estado inicial é o vácuo. Podemos escrever os campos E^j e B^m como na Eq. (1.5.6) e (1.5.8) e calcular a emissão de radiação para uma determinada escolha da corrente elétrica J^μ . No caso do estado inicial ser um estado puro com n fótons (3.1.2), adicionamos um termo a Eq. (4.1.9). O termo que deve ser adicionado é,

$$\oint_S \frac{n p^i}{(2\pi)^3} ds^i = 0, \quad (4.1.11)$$

ou seja, reproduzimos o resultado (4.1.10).

Para o estado inicial sendo um estado coerente (3.1.4) ou semicoerente (3.1.7), os termos W_2 e W_3 são diferentes de zero e com o auxílio da Eq. (3.2.17) podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} W_2 &= i \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} \epsilon_{ijm} \epsilon_{mlp} \oint_S E^j(x) 2i \text{Im} [k^l f_{\mathbf{k}\lambda}^p(x) \alpha_{\mathbf{k}\lambda}] ds^i, \\ W_3 &= i \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} \epsilon_{ijm} \oint_S 2i \text{Im} [k_0 f_{\mathbf{k}\lambda}^j(x) \alpha_{\mathbf{k}\lambda}] B^m(x) ds^i. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

A avaliação explícita dos termos W_2 e W_3 requer que especifiquemos os c -números $\alpha_{\mathbf{k}\lambda}$, bem como a corrente elétrica $J^\mu(x)$. De acordo com as equações (3.3.15), (3.3.19) e (3.3.20) podemos escrever,

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \oint_S \frac{k_0 d\mathbf{k} d\mathbf{k}'}{\sqrt{k_0 k_0'} (2\pi)^3} \epsilon_{ijm} \epsilon_{mlp} k'^l S_\alpha^{jp} ds^i, \\ S_\alpha^{jp} &= 2 \text{Im} [e^{-ikx} \alpha_{\mathbf{k}\lambda} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^j] \text{Im} [e^{-ik'x} \alpha_{\mathbf{k}'\lambda'} \epsilon_{\mathbf{k}'\lambda'}^p]. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Note que omitimos os termos S_0^i e $\frac{n p^i}{(2\pi)^3}$, pois, a integral de superfície desses termos desaparece.

Similarmente ao que ocorreu com o valor médio $\langle \hat{W}^{\text{loss}}(x) \rangle$, temos que a radiação emitida por uma corrente sozinha (quando o estado inicial é o vácuo), calculada a partir do valor médio do operador de Umov-Poynting, corresponde ao resultado clássico. Este resultado é devido ao fato de que a interpretação de $\int \mathbf{S} d\mathbf{A}$ como um fluxo de energia foi dada por Schott no âmbito da teoria clássica. De um modo geral, não é necessário que essa interpretação seja preservada durante a transição para a teoria quântica de campos.

4.2 Energia irradiada via probabilidade de emissão de fótons

Nesta seção consideramos a probabilidade de emissão de N fótons, induzida por uma corrente elétrica. A partir da probabilidade de emissão de fótons, analisamos as características quânticas da energia irradiada por uma corrente elétrica.

4.2.1 Probabilidade de emissão de N fótons

No que segue usaremos apenas o calibre de Coulomb, logo, omitimos os índices superiores C de todas as quantidades. Escolhemos o vácuo como estado inicial, $|\Psi(0)\rangle = |0\rangle$. Sob a ação da corrente elétrica externa, o estado inicial evolui como na equação (2.1.28), i.e.,

$$|\Psi(t)\rangle = \exp[i\phi(t)] \exp[-i\hat{H}_\gamma t] \mathcal{D}(y) |0\rangle. \quad (4.2.1)$$

Buscamos a probabilidade $P(N, t)$ de encontrar o estado final consistindo de N fótons com números quânticos \mathbf{k}_i e $\lambda = 1, 2$. Um estado final deste tipo, pode ser escrito na forma,

$$|\text{out}\rangle = \prod_{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j} \frac{(\hat{c}_{\mathbf{k}_i 1}^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} \frac{(\hat{c}_{\mathbf{k}_j 2}^\dagger)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} |0\rangle, \quad (4.2.2)$$

onde separamos as duas polarizações e n_i, n_j representam os números de fótons no modo quântico $\mathbf{k}_i, \lambda = 1$ e $\mathbf{k}_j, \lambda = 2$, respectivamente. Sendo que $|\text{out}\rangle$ é um estado com N fótons, devemos impor a seguinte condição:

$$\sum_{n_i} n_i + \sum_{n_j} n_j = N. \quad (4.2.3)$$

A amplitude de transição da equação (4.2.1) para a (4.2.2) toma a forma,

$$M(n_i, n_j, t) = \exp[i\phi(t)] \langle 0 | \left[\prod_{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j} \frac{(\hat{c}_{\mathbf{k}_i 1})^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} \frac{(\hat{c}_{\mathbf{k}_j 2})^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} \right] \exp[-i\hat{H}_\gamma t] \mathcal{D}(y) |0\rangle. \quad (4.2.4)$$

Usando as propriedades (2.1.29) do operador $\mathcal{D}(y)$, junto com o resultado (E.11), dado no Apêndice 5, podemos reescrever a amplitude de transição $M(n_i, n_j, t)$ como:

$$M(n_i, n_j, t) = \prod_{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j} \exp\{-it[|\mathbf{k}_i| + |\mathbf{k}_j|]\} \frac{(y_{\mathbf{k}_i 1})^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} \frac{(y_{\mathbf{k}_j 2})^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} M(0, 0, t),$$

$$M(0, 0, t) = \exp[i\phi(t)] \langle 0 | \mathcal{D}(y) |0\rangle = \exp[i\phi(t)] \exp\left[-\sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} \frac{|y_{\mathbf{k}\lambda}|^2}{2}\right]. \quad (4.2.5)$$

Note que omitimos e continuaremos a omitir, a dependência em t das funções $y_{\mathbf{k}\lambda}$, para deixar as equações mais compactas. Nesse caso, a probabilidade de emissão de N fótons, induzida por uma corrente elétrica, toma a forma,

$$P(n_i, n_j, t) = \prod_{\mathbf{k}_i} p(\mathbf{k}_i, 1, n_i) \prod_{\mathbf{k}_j} p(\mathbf{k}_j, 2, n_j) P(0, 0, t),$$

$$p(\mathbf{k}_i, 1, n_i) = \frac{|y_{\mathbf{k}_i 1}|^{2n_i}}{n_i!}, \quad P(0, 0, t) = \exp\left[-\sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} |y_{\mathbf{k}\lambda}|^2\right], \quad (4.2.6)$$

onde o fator $P(0, 0, t)$ é a probabilidade de transição vácuo-vácuo, i.e., quando não há emissão de fótons e, $p(\mathbf{k}_i, 1, n_i)$ pode ser interpretada como a probabilidade relativa de emissão de n_i fótons no modo quântico $\mathbf{k}_i, 1$ e similarmente para $p(\mathbf{k}_j, 2, n_j)$.

Para considerar a emissão de infinitos fótons, em todos os modos quânticos, devemos somar todos os n_i e n_j de zero até o infinito,

$$\sum_{n_i} \sum_{n_j} P(n_i, n_j, t) = \prod_{\mathbf{k}_i} \sum_{n_i} p(\mathbf{k}_i, 1, n_i) \prod_{\mathbf{k}_j} \sum_{n_j} p(\mathbf{k}_j, 2, n_j) P(0, 0, t), \quad (4.2.7)$$

ou explicitamente

$$\sum_{n_i} \sum_{n_j} P(n_i, n_j, t) = \prod_{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j} \exp \left[|y_{\mathbf{k}_i, 1}|^2 + |y_{\mathbf{k}_j, 2}|^2 \right] P(0, 0, t). \quad (4.2.8)$$

Sendo que estamos considerando o momento dos fótons com espectro contínuo, é fácil ver que podemos escrever,

$$\prod_{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j} \exp \left[|y_{\mathbf{k}_i, 1}|^2 + |y_{\mathbf{k}_j, 2}|^2 \right] \rightarrow \exp \left[\sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} |y_{\mathbf{k}\lambda}|^2 \right]. \quad (4.2.9)$$

Usando a equação (4.2.9) e a definição de $P(0, 0, t)$, dada na equação (4.2.6), obtemos:

$$\sum_{n_i} \sum_{n_j} P(n_i, n_j, t) = 1. \quad (4.2.10)$$

O resultado (4.2.10) demonstra a consistência da probabilidade de emissão de fótons escrita na equação (4.2.6), pois considerando todas as possibilidades devemos obter a probabilidade como sendo a unidade.

Lembrando da forma explícita das funções $y_{\mathbf{k}\lambda}$ (veja a equação (2.1.27)), obtemos;

$$|y_{\mathbf{k}\lambda}|^2 = \left| \int_0^t dt' \int d\mathbf{x}' \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}'} J_i(x')}{\sqrt{2p_0(2\pi)^3}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^{i*} \right|^2. \quad (4.2.11)$$

Para a realização de cálculos é preciso especificar a forma da corrente externa $J^\mu(x)$ e a forma explícita dos vetores de polarização $\epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^i$. Entretanto, sendo que a corrente $J_i(x')$ é proporcional à carga q , podemos escrever,

$$|y_{\mathbf{k}\lambda}|^2 \propto q^2 \propto \alpha, \quad (4.2.12)$$

onde α é a constante de estrutura fina. Assim, é fácil ver que a probabilidade de emissão, apresentada na equação (4.2.6), depende da quantidade de fótons emitidos e, cada fóton emitido no mesmo modo quântico contribui com uma potência de α .

4.2.2 Energia irradiada

Usando a expressão obtida na Eq. (4.2.6), é possível calcular a energia irradiada por uma corrente \mathbf{J} . Considerando a emissão de um único fóton, a energia média irradiada no intervalo de tempo $\Delta t = t$, é igual à probabilidade de emissão de um único fóton multiplicada pela energia do fóton emitido $k_0 = |\mathbf{k}|$. A probabilidade de emissão de um fóton, é obtida substituindo n_i ou n_j por 1 na equação (4.2.6), i.e.,

$$P(1, t) = |y_{\mathbf{k}\lambda}|^2 P(0, 0, t), \quad (4.2.13)$$

em que \mathbf{k} é o momento do fóton emitido e λ é a sua polarização. A energia média é obtida via multiplicação da equação (4.2.13) pela energia do fóton, ou seja,

$$w_{\mathbf{k},\lambda}^1(t) = |\mathbf{k}| P(1, t). \quad (4.2.14)$$

Somando todas as polarizações e integrando sobre todos os momentos \mathbf{k} na Eq. (4.2.14), obtemos a energia total emitida na forma,

$$W_{\mathbf{k},\lambda}^1(t) = \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} w_{\mathbf{k},\lambda}^1(t) = \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{k} |\mathbf{k}| |y_{\mathbf{k}\lambda}|^2 P(0, 0, t). \quad (4.2.15)$$

A energia irradiada pela emissão de N fótons é dada de forma semelhante. Consideramos a probabilidade de emissão de N fótons, $P(n_i, n_j, t)$, a qual deve ser multiplicada pela energia de cada fóton, $|\mathbf{k}_i|$, então integramos sobre todos os modos quânticos disponíveis, i.e.,

$$W_{\mathbf{k},\lambda}^N(t) = \prod_{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j} \int \int d\mathbf{k}_i d\mathbf{k}_j p(\mathbf{k}_i, 1, n_i) p(\mathbf{k}_j, 2, n_j) P(0, 0, t), \quad (4.2.16)$$

onde assumimos que a equação (4.2.3) é verdadeira.

Durante os estudos da probabilidade de radiação de um único fóton, foi percebido que utilizando a probabilidade relativa de emissão de um fóton, definida como

$$p(\mathbf{k}, \lambda, 1) = |y_{\mathbf{k}\lambda}|^2, \quad (4.2.17)$$

é possível obter a potência irradiada no caso clássico $\partial_t W_{\text{clássica}}$. A potência irradiada $\partial_t W_{\text{clássica}}$ é dada por,

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{\text{clássica}} = \int d\mathbf{k} |\mathbf{k}| \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\lambda=1}^2 |y_{\mathbf{k}\lambda}|^2. \quad (4.2.18)$$

No que segue, usamos a equação (4.2.18) para calcular a potência irradiada em dois casos conhecidos, a radiação síncrotron e a radiação Cherenkov.

4.2.3 Comparação com a fórmula de Schott

Consideramos uma corrente formada por um elétron em movimento circular com velocidade \mathbf{v} . Esta corrente pode ser escrita como, veja e.g. [1],

$$\begin{aligned} J^0(x) &= q\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \quad \mathbf{J}(x) = q\mathbf{v}(t)\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \\ \mathbf{r}(t) &= (R \cos \omega t, R \sin \omega t, z_0), \quad \mathbf{v}(t) = \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial t} = \omega R (-\sin \omega t, \cos \omega t, 0), \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

em que R é o raio da trajetória circular do elétron, q é a carga do elétron, ω é a frequência e z_0 é a posição vertical do plano que contém a corrente. A forma explícita da função $y_{\mathbf{k}\lambda}$, dada na Eq. (2.1.27), para a corrente circular (4.2.19) é,

$$y_{\mathbf{p}\sigma} = iq \int_0^t dt' \frac{[\mathbf{v}(t') \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda}^*]}{\sqrt{2k_0(2\pi)^3}} \exp\{i[k_0 t' - \mathbf{k}\mathbf{r}(t')]\}. \quad (4.2.20)$$

Arbitrariamente podemos escrever o momento e as polarizações do fóton emitido pela corrente (4.2.19) como segue:

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= (k_{\perp} \cos \varphi, k_{\perp} \sin \varphi, k_3), \quad k_{\perp} = \frac{k_0}{c} \sin \theta, \quad k_3 = k_{\parallel} = \frac{k_0}{c} \cos \theta, \\ \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}1} &= (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta), \quad \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}2} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0),\end{aligned}\quad (4.2.21)$$

onde φ é o ângulo entre o eixo x e a projeção do vetor \mathbf{k} no plano xy , θ é o ângulo entre o eixo z e o vetor \mathbf{k} e k_0 é a energia do fóton. Utilizando a forma explícita do momento \mathbf{k} , escrita na equação (4.2.21) com $c = 1$, podemos escrever o expoente $\exp[-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t')]$ como:

$$\exp[-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t')] = \exp(-iz_0 k_{\parallel}) \exp\left[-ik_{\perp} R \sin\left(\omega t' - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (4.2.22)$$

Introduzimos a seguinte mudança de variável de integração:

$$\begin{aligned}\tau &= \omega t' - \varphi + \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^t dt' \rightarrow \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{d\tau}{\omega}, \\ \tau_i &= \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad \tau_f = \omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi.\end{aligned}\quad (4.2.23)$$

Então, a exponencial que é independente do tempo pode ser escrita em termos de τ como segue:

$$\exp(ik_0 t') = \exp\left[i\frac{k_0}{\omega}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] \exp\left(i\frac{k_0}{\omega}\tau\right). \quad (4.2.24)$$

O vetor velocidade $\mathbf{v}(t')$ também é escrito em termos da variável de integração τ ,

$$\mathbf{v}(\tau) = \omega R [\cos(\tau + \varphi), \sin(\tau + \varphi), 0], \quad (4.2.25)$$

onde foi usado que,

$$\begin{aligned}\cos(\tau + \varphi) &= \cos \tau \cos \varphi - \sin \tau \sin \varphi, \\ \sin(\tau + \varphi) &= \sin \tau \cos \varphi + \cos \tau \sin \varphi.\end{aligned}\quad (4.2.26)$$

Dada a forma dos vetores de polarização na Eq. (4.2.21), é fácil ver que,

$$\mathbf{v}(t')\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}1}^* = \omega R \cos \theta \cos \tau, \quad \mathbf{v}(t')\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}2}^* = \omega R \sin \tau, \quad (4.2.27)$$

então a equação (4.2.20) pode ser expressa na forma:

$$\begin{aligned}y_{\mathbf{k}1} &= i \frac{qR}{\sqrt{2k_0}(2\pi)^3} Y_p(\varphi, \theta) \cos \theta \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \exp\left(i\frac{k_0}{\omega}\tau\right) \cos \tau \exp(-ik_{\perp} R \sin \tau), \\ y_{\mathbf{k}2} &= i \frac{qR}{\sqrt{2k_0}(2\pi)^3} Y_k(\varphi, \theta) \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \exp\left(i\frac{k_0}{\omega}\tau\right) \sin \tau \exp(-ik_{\perp} R \sin \tau), \\ Y_k(\varphi, \theta) &= \exp\left[i\frac{k_0}{\omega}\left(\varphi - \frac{\pi}{2} - z_0 \omega \cos \theta\right)\right].\end{aligned}\quad (4.2.28)$$

Agora estamos em posição de utilizar as bem conhecidas expansões em ondas planas (veja, e.g., [1]) das funções de Bessel $j_n(x)$,

$$\begin{aligned}\exp(-ik_{\perp}R \sin \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j_n(k_{\perp}R) \exp(-in\tau), \\ \sin \tau \exp(-ik_{\perp}R \sin \tau) &= i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j'_n(k_{\perp}R) \exp(-in\tau), \\ \cos \tau \exp(-ik_{\perp}R \sin \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{k_{\perp}R} j_n(k_{\perp}R) \exp(-in\tau).\end{aligned}\quad (4.2.29)$$

Aplicando as expressões (4.2.29) na equação (4.2.28) obtemos,

$$\begin{aligned}y_{\mathbf{k}1} &= i \frac{qR}{\sqrt{2k_0(2\pi)^3}} Y_k(\varphi, \theta) \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{k_{\perp}R} j_n(k_{\perp}R) \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \exp\left[i\left(\frac{k_0}{\omega} - n\right)\tau\right], \\ y_{\mathbf{k}2} &= -\frac{qR}{\sqrt{2k_0(2\pi)^3}} Y_k(\varphi, \theta) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j'_n(k_{\perp}R) \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \exp\left[i\left(\frac{k_0}{\omega} - n\right)\tau\right].\end{aligned}\quad (4.2.30)$$

Introduzindo a notação,

$$I_k^n(\varphi, t) = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \exp\left[i\left(\frac{k_0}{\omega} - n\right)\tau\right], \quad (4.2.31)$$

podemos reescrever a equação (4.2.30) na forma;

$$\begin{aligned}y_{\mathbf{k}1} &= \frac{iq \cot \theta}{\sqrt{2k_0(2\pi)^3}} Y_k(\varphi, \theta) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n j_n(k_{\perp}R) I_k^n(\varphi, t), \\ y_{\mathbf{k}2} &= -\frac{qR}{\sqrt{2k_0(2\pi)^3}} Y_k(\varphi, \theta) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j'_n(k_{\perp}R) I_k^n(\varphi, t).\end{aligned}\quad (4.2.32)$$

Assim, as funções $|y_{\mathbf{k}\lambda}|^2$ podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}|y_{\mathbf{k}1}|^2 &= \frac{q^2}{2k_0(2\pi)^3} \cot^2 \theta \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n j_n(k_{\perp}R) I_k^n(\varphi, t) \right|^2, \\ |y_{\mathbf{k}2}|^2 &= \frac{q^2 R^2}{2k_0(2\pi)^3} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j'_n(k_{\perp}R) I_k^n(\varphi, t) \right|^2.\end{aligned}\quad (4.2.33)$$

Para calcular a potência irradiada usamos a equação (4.2.18). Então, a potência irradiada pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{\text{clássica}} = \int d\mathbf{k} |\mathbf{k}| \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} [|y_{\mathbf{k}1}|^2 + |y_{\mathbf{k}2}|^2] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} [w_1 + w_2]. \quad (4.2.34)$$

O primeiro termo w_1 , na Eq. (4.2.34), tem a forma,

$$w_1 = \frac{q^2}{2(2\pi)^3} \int_0^\infty dk_0 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cot^2 \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n j_n(k_\perp R) I_k^n(\varphi, t) \right|^2. \quad (4.2.35)$$

A quantidade $I_k^n(\varphi, t)$, introduzida na expressão (4.2.31), pode ser escrita em termos da variável de integração t' novamente e, usando a bem conhecida representação do delta de Kronecker,

$$\oint d\varphi \exp [i(n - n')\varphi] = 2\pi \delta_{nn'}, \quad (4.2.36)$$

obtemos que o módulo quadrado da soma de n resulta apenas na soma de $n^2 j_n^2(k_\perp R)$. Assim, w_1 toma a forma,

$$w_1 = \frac{q^2 \omega^2}{2(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty dk_0 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \cot^2 \theta n^2 j_n^2(k_\perp R) \left| \int_0^t dt' \exp [i(k_0 - n\omega) t'] \right|^2. \quad (4.2.37)$$

Similarmente o segundo termo da equação (4.2.34) é escrito como:

$$w_2 = \frac{q^2 \omega^2 R^2}{2(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty dk_0 \int_0^\pi \sin \theta d\theta k_0^2 j_n'^2(k_\perp R) \left| \int_0^t dt' \exp [i(k_0 - n\omega) t'] \right|^2. \quad (4.2.38)$$

Com o auxílio do seguinte resultado, encontrado na Ref. [1],

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \left| \int_0^t dt' \exp [-it'(n\omega - k_0)] \right|^2 = 2\pi \delta(k_0 - n\omega), \quad (4.2.39)$$

e observando que a função delta $\delta(k_0 - n\omega)$ desaparece para $n < 0$, podemos reescrever a expressão (4.2.34) como,

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{\text{clássica}} = \frac{q^2 \omega^2}{4\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta [\cot^2 \theta j_n^2(\xi) + \omega^2 R^2 j_n'^2(\xi)], \quad \xi = n\nu \sin \theta. \quad (4.2.40)$$

Note que na Ref. [1] é usado um sistema de unidades diferente do usado nesta dissertação, o que resulta na diferença do fator $(4\pi)^{-1}$. Restaurando o fator c , vemos que o resultado (4.2.40) coincide com a equação (1.7.2) obtida por Schott como a distribuição angular de potência irradiada na RS.

4.2.4 Comparação com a fórmula de Frank e Tamm

A radiação Cherenkov acontece quando a velocidade v de uma carga se movendo em um dielétrico, é maior que a velocidade de propagação da luz c_n no dielétrico. Para simplificar os cálculos, podemos considerar a carga se movendo no vácuo com $v > c$ e no final fazemos a seguinte substituição (veja a Ref. [6]),

$$q \rightarrow \frac{q}{n}, \quad c \rightarrow \frac{c}{n}, \quad (4.2.41)$$

onde q é a carga elétrica da partícula que se move e n é o índice de refração do dielétrico. Consideramos que o movimento da carga é ao longo do eixo z e pode ser parametrizado por,

$$\mathbf{r}(t) = (0, 0, vt). \quad (4.2.42)$$

Neste caso, a densidade de corrente toma a forma,

$$\mathbf{J}(x) = q\mathbf{v}\delta^3[\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)], \quad \mathbf{v} = (0, 0, v). \quad (4.2.43)$$

Utilizando a forma do momento \mathbf{k} e polarizações $\epsilon_{\mathbf{k}\lambda}$, apresentadas na equação (4.2.21), vemos que a probabilidade relativa (4.2.17) é escrita como,

$$\sum_{\lambda=1}^2 p(\mathbf{k}, \lambda, 1) = \frac{q^2 v^2 \sin^2 \theta}{2k_0 (2\pi)^3} \left| \int_0^t dt' \exp[-it'(k_3 v - k_0)] \right|^2. \quad (4.2.44)$$

Usando o resultado (4.2.39) é fácil ver que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\lambda=1}^2 p(\mathbf{k}, \lambda, 1) = \frac{q^2 v^2 \sin^2 \theta}{2k_0 (2\pi)^2} \delta(k_0 - k_3 v). \quad (4.2.45)$$

Lembrando que $k_3 = \frac{k_0}{c} \cos \theta$ e usando a seguinte propriedade da função delta de Dirac,

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}, \quad (4.2.46)$$

é possível reescrever a equação (4.2.45) em uma forma conveniente para integração,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\lambda=1}^2 p(\mathbf{k}, \lambda, 1) = \frac{q^2 v c \sin^2 \theta}{2k_0^2 (2\pi)^2} \delta\left(\frac{c}{v} - \cos \theta\right). \quad (4.2.47)$$

Assim a potência irradiada (4.2.18) toma a forma,

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{\text{clássica}} = \int d\mathbf{k} \frac{q^2 v c \sin^2 \theta}{2k_0 (2\pi)^2} \delta\left(\frac{c}{v} - \cos \theta\right), \quad (4.2.48)$$

ou em coordenadas esféricas,

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{\text{clássica}} = \frac{q^2 v c}{4\pi} \int_0^\infty \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta) \delta\left[\frac{c}{v} - \cos \theta\right] d(\cos \theta) \frac{k^2}{k_0} dk. \quad (4.2.49)$$

Note que a restrição $v > c$ necessária para a RC, aparece naturalmente na função delta na Eq. (4.2.49). Usando que $k_0 = ck = \omega$ (onde usamos $\hbar = 1$) podemos mudar a variável de integração na equação (4.2.49) e após a integração trivial de $\cos \theta$ obtemos;

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{\text{clássica}} = \frac{q^2 v}{4\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \omega \left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right). \quad (4.2.50)$$

Finalmente, fazendo a substituição (4.2.41) chegamos ao resultado final para a potência irradiada da RC,

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{\text{clássica}} = \frac{q^2 v}{4\pi c^2} \int_{\beta n > 1} d\omega \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right), \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (4.2.51)$$

Na última equação os limites de integração foram mudados para o intervalo onde $\beta n > 1$. Essa mudança é justificada pelo fato de que o índice de refração n depende da frequência ω , ou seja, $n = n(\omega)$ e a função delta na Eq. (4.2.49) é diferente de zero apenas para $v > c$, logo, $v > \frac{c}{n}$

ou $\beta n(\omega) > 1$. O resultado (4.2.51) é análogo à fórmula de Frank e Tamm (1.7.4). Note que Frank e Tamm usam unidades diferentes da usada nesta dissertação, por isso temos a diferença no fator $(4\pi)^{-1}$. Além disso, consideramos a probabilidade relativa por unidade de tempo, ou seja, considerando que a carga levou um tempo t para percorrer a distância l , temos;

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} W_{\text{clássica}} dt = W_{\text{F,T}}. \quad (4.2.52)$$

Os resultados apresentados nas equações (4.2.40) e (4.2.51), mostram que o limite clássico é obtido quando consideramos a emissão de um fóton e tomamos o limite $t \rightarrow \infty$, i.e., quando consideramos os termos na probabilidade de emissão que são dependentes da constante de estrutura fina, α , apenas na primeira potência.

Capítulo 5

Estudo da possibilidade de emaranhamento de feixe de fótons por corrente elétrica

A partir da Ref. [16] sabemos que um campo magnético externo pode interferir no emaranhamento de dois fótons iniciais. A interação entre o campo magnético externo e os fótons iniciais se estabelece via elétrons intermediários, que interagem com os fótons e o campo magnético externo. Neste capítulo investigamos a possibilidade de emaranhamento de dois fótons devido a uma corrente elétrica externa. Estudamos o caso com aproximação em que os fótons do estado inicial não interagem com o vácuo quântico.

5.1 Quantização no volume finito

Com o intuito de simplificar os cálculos neste capítulo, usamos uma quantização do campo eletromagnético realizada em um volume finito. No que segue, indicamos algumas modificações necessárias que aparecem nessa quantização.

O volume finito usado é um cubo com volume $V = L^3$. Usando condições de contorno periódicas os autovalores de energia e momento são discretos e obedecem as seguintes equações:

$$k^i = \frac{2\pi}{L}n^i, \quad n^i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad k_0 = \frac{2\pi}{L}\sqrt{(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2}. \quad (5.1.1)$$

Nesse caso, a expansão em ondas planas do operador de campo potencial \hat{A}_C^i , dada na equação (CC.13), toma a forma,

$$\begin{aligned} \hat{A}_C^i(x) &= \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left[\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) + \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger f_{\mathbf{k}\lambda}^{i*}(x) \right], \\ f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) &= \frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2k_0V}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda}^i, \quad k_0 = |\mathbf{k}|. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

A relação de comutação entre os operadores de criação $\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}$ e aniquilação $\hat{c}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger$ (CC.15) são modificadas. Substituímos a função delta de Dirac $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ pelo delta de Kronecker $\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ tal que,

$$\left[\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{c}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger \right] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad \left[\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{c}_{\mathbf{k}'\lambda'} \right] = \left[\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger, \hat{c}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger \right] = 0. \quad (5.1.3)$$

Conseqüentemente, devemos substituir a integral em \mathbf{k} que encontramos na Hamiltoniana livre (CC.17), por uma soma dos valores permitidos \mathbf{k} , assim,

$$\hat{H}_\gamma^{(C)} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} k_0 \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (5.1.4)$$

A última modificação que devemos fazer para a quantização no volume finito acontece no operador de evolução temporal $U^{(C)}(t)$, que foi apresentado na equação (2.1.27), especificamente no operador de deslocamento de estados coerentes $\mathcal{D}(y)$. De forma similar ao que aconteceu com a Hamiltoniana $\hat{H}_\gamma^{(C)}$, vemos que $\mathcal{D}(y)$ deve ser escrito como,

$$\mathcal{D}(y) = \exp \left\{ \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left[y_{\mathbf{k}\lambda}(t) \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger - y_{\mathbf{k}\lambda}^*(t) \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} \right] \right\}. \quad (5.1.5)$$

Agora estamos bem equipados para prosseguir com o estudo da possibilidade de emaranhamento.

5.2 Possibilidade de emaranhamento de fótons por corrente elétrica

Consideramos o estado inicial contendo dois fótons livres. O fóton 1 com números quânticos $\mathbf{p}_1 \lambda_1$ e o fóton 2 com números quânticos $\mathbf{p}_2 \lambda_2$. Um estado deste tipo pode ser escrito na forma,

$$|\Psi^{(C)}(0)\rangle = \hat{c}_{\mathbf{p}_1 \lambda_1}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{p}_2 \lambda_2}^\dagger |0\rangle^{(C)}. \quad (5.2.1)$$

Utilizamos uma medida de emaranhamento proposta por Bennett em Ref. [35], onde é utilizada a entropia de von Neumann E

$$E = -\text{tr} \hat{\rho}_{1 \text{ ou } 2} \ln \hat{\rho}_{1 \text{ ou } 2}, \quad (5.2.2)$$

onde tr designa a operação traço de uma matriz e $\hat{\rho}_{1 \text{ ou } 2}$ é a matriz densidade associada ao subespaço do fóton 1 ou do fóton 2. No que segue omitimos o índice superior C dos estados, tendo em vista que usaremos apenas o calibre de Coulomb. De acordo com Eq. (2.1.28) a evolução temporal do estado $|\Psi(0)\rangle$ é dada por

$$|\Psi(t)\rangle = \exp \left[i\phi^{(C)}(t) \right] \exp \left[-i\hat{H}_\gamma^{(C)} t \right] \mathcal{D}(y) \hat{c}_{\mathbf{p}_1 \lambda_1}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{p}_2 \lambda_2}^\dagger |0\rangle. \quad (5.2.3)$$

Podemos mover o operador $\exp \left[-i\hat{H}_\gamma^{(C)} t \right]$ para a direita da seguinte forma: escrevemos o operador $\mathcal{D}(y)$ como,

$$\mathcal{D}(y) = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} |y_{\mathbf{k}\lambda}|^2 \right] \exp \left[\sum_{\mathbf{k}, \lambda} y_{\mathbf{k}\lambda} \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \right] \exp \left[-\sum_{\mathbf{k}, \lambda} y_{\mathbf{k}\lambda}^* \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} \right], \quad (5.2.4)$$

então expandimos as exponenciais contendo os operadores $\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ e $\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}$ e usamos o resultado (E.11) do Apêndice 5 para obter,

$$\exp \left[-i\hat{H}_\gamma t \right] \mathcal{D}(y) \hat{c}_{\mathbf{p}_1 \lambda_1}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{p}_2 \lambda_2}^\dagger = \exp \{ -it [(p_0)_1 + (p_0)_2] \} \mathcal{D}(y') \hat{c}_{\mathbf{p}_1 \lambda_1}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{p}_2 \lambda_2}^\dagger \exp \left[-i\hat{H}_\gamma^{(C)} t \right], \quad (5.2.5)$$

em que $(p_0)_1$ é a energia do fóton associado ao operador $\hat{c}_{\mathbf{p}_1 \lambda_1}^\dagger$, similarmente para $(p_0)_2$ e ainda,

$$y'_{\mathbf{k}\lambda} = y_{\mathbf{k}\lambda} e^{-ik_0 t}. \quad (5.2.6)$$

Note que mais uma vez omitimos a dependência de t das funções $y_{\mathbf{k}\lambda}$. Usando as propriedades (2.1.29) do operador $\mathcal{D}(y)$ podemos mostrar que,

$$\mathcal{D}(y') \hat{c}_{\mathbf{p}_1 \lambda_1}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{p}_2 \lambda_2}^\dagger = \tilde{c}_{\mathbf{p}_1 \lambda_1}^\dagger \tilde{c}_{\mathbf{p}_2 \lambda_2}^\dagger \mathcal{D}(y'), \quad (5.2.7)$$

onde

$$\tilde{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger = \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger - y_{\mathbf{k}\lambda}'^*. \quad (5.2.8)$$

Assim, o vetor de estado (5.2.3) pode ser reescrito como,

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\{-it[(p_0)_1 + (p_0)_2]\} \exp\left[i\phi^{(C)}(t)\right] \tilde{c}_{\mathbf{p}_1 \lambda_1}^\dagger \tilde{c}_{\mathbf{p}_2 \lambda_2}^\dagger |y'\rangle, \quad (5.2.9)$$

em que $|y'\rangle$ é um estado coerente como o apresentado na equação (3.1.4).

A matriz densidade associada ao estado $|\Psi(t)\rangle$ é definida por,

$$\hat{\rho} = |\Psi(t)\rangle \langle\Psi(t)| = \tilde{c}_{\mathbf{p}_1 \lambda_1}^\dagger \tilde{c}_{\mathbf{p}_2 \lambda_2}^\dagger |y'\rangle \langle y'| \tilde{c}_{\mathbf{p}_1 \lambda_1} \tilde{c}_{\mathbf{p}_2 \lambda_2}. \quad (5.2.10)$$

É importante destacar que o operador deslocamento $\mathcal{D}(y)$, apresentado na Eq. (2.1.27), é relacionado com todos modos quânticos \mathbf{k} e $\lambda = 1, 2$. Então, o estado $\mathcal{D}(y')|0\rangle$ é de fato um estado coerente com todos os possíveis valores de momento e polarização. O operador $\mathcal{D}(y)$ pode ser decomposto em operadores que descrevem os subespaços coerentes para determinados momento e polarização, i.e.,

$$\mathcal{D}(y') = \prod_{\mathbf{k}} [\mathcal{D}(y')]_{\mathbf{k}}, \quad (5.2.11)$$

em que,

$$[\mathcal{D}(y')]_{\mathbf{k}} = \prod_{\lambda=1}^2 \exp\left[y'_{\mathbf{k}\lambda} \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger - y_{\mathbf{k}\lambda}'^* \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}\right]. \quad (5.2.12)$$

Logo, podemos decompor o operador total $\mathcal{D}(y')$ em vários operadores atuantes nos subespaços desejados,

$$\mathcal{D}(y') = [\mathcal{D}(y')]_{\mathbf{p}_1} [\mathcal{D}(y')]_{\mathbf{p}_2} [\mathcal{D}(y')]_{\mathbf{k} \neq \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}. \quad (5.2.13)$$

Dessa forma, a matriz densidade (5.2.10) do sistema completo pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \Gamma_{12} \otimes \Gamma, \\ \Gamma_{12} &= \left[\tilde{c}_{\mathbf{p}_1 \lambda_1}^\dagger \tilde{c}_{\mathbf{p}_2 \lambda_2}^\dagger |y'\rangle \langle y'| \tilde{c}_{\mathbf{p}_2 \lambda_2} \tilde{c}_{\mathbf{p}_1 \lambda_1} \right], \quad \Gamma = \left[|y'\rangle_{\mathbf{k} \neq \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \langle y'|_{\mathbf{k} \neq \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \right], \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

onde usamos a notação,

$$|y'\rangle = |y'\rangle_{\mathbf{p}_1} \otimes |y'\rangle_{\mathbf{p}_2} = [\mathcal{D}(y')]_{\mathbf{p}_1} [\mathcal{D}(y')]_{\mathbf{p}_2} |0\rangle_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} = \prod_{\lambda_1 \lambda_2} |y'\rangle_{\mathbf{p}_1 \lambda_1} \otimes |y'\rangle_{\mathbf{p}_2 \lambda_2}. \quad (5.2.15)$$

Estamos interessados nos subespaços formados por $|y'\rangle$ relacionado com os momentos \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 . Sendo que os operadores de criação e aniquilação com números quânticos diferentes comutam, e dada a forma da matriz densidade $\hat{\rho}$ na Eq. (5.2.14), podemos realizar o traço relativo aos subespaços contendo todos os momentos diferentes de \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 . Assim, tomamos o traço apenas da parte Γ e dessa forma isolamos os subespaços dos fótons 1 e 2. Fixamos um valor de $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, respeitando $\mathbf{k}' \neq \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ e tomamos o traço de $\hat{\rho}$ com respeito à polarização 1,

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\mathbf{k}'1} [\hat{\rho}] &= \Gamma_{12} \otimes \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{k}'1 \langle 0 | \frac{(\hat{c}_{\mathbf{k}1})^l}{\sqrt{l!}} |y'\rangle_{\mathbf{k}'\lambda} \langle y'|_{\mathbf{k}'\lambda} \frac{(\hat{c}_{\mathbf{k}1}^\dagger)^l}{\sqrt{l!}} |0\rangle_{\mathbf{k}'1} \otimes |y'\rangle_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}', \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \langle y'|_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}', \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \\ &= \Gamma_{12} \otimes |y'\rangle_{\mathbf{k}'2} \langle y'|_{\mathbf{k}'2} \otimes |y'\rangle_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}', \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \langle y'|_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}', \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}, \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

onde foi usado,

$$\langle 0 | y' \rangle = \exp \left[-\frac{|y'_{\mathbf{k}\lambda}|^2}{2} \right], \quad \exp \left[|y'_{\mathbf{k}\lambda}|^2 \right] = \sum_l \frac{|y'_{\mathbf{k}\lambda}|^2}{l!}. \quad (5.2.17)$$

Note que o traço $\text{tr}_{\mathbf{k}'1}$ não atua na parte Γ_{12} . O resultado (5.2.16) contém o operador projeção, $|y'\rangle_{\mathbf{k}'2} \langle y'|_{\mathbf{k}'2}$ no subespaço com um valor fixo \mathbf{k}' com polarização $\lambda = 2$. Tomando o traço relativo ao mesmo momento \mathbf{k}' , mas agora com polarização $\lambda = 2$, da equação (5.2.16), recebemos,

$$\text{tr}_{\mathbf{k}'2} \{ \text{tr}_{\mathbf{k}'1} [\hat{\rho}] \} = \Gamma_{12} \otimes |y'\rangle_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}', \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \langle y'|_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}', \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}. \quad (5.2.18)$$

Assim, é fácil ver que tomando o traço sucessivo de todos momentos $\mathbf{k} \neq \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ e todas polarizações $\lambda = 1, 2$, obtemos a matriz densidade relativa aos subespaços de \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 , sem interferência de outros subespaços do sistema total. Então, podemos escrever a matriz densidade associada apenas aos subespaços dos fótons 1 e 2 como,

$$\hat{\rho}_{12} = \tilde{c}_{\mathbf{p}_1 \lambda_1}^\dagger \tilde{c}_{\mathbf{p}_2 \lambda_2}^\dagger |y'\rangle_{\mathbf{p}_2} \langle y'|_{\mathbf{p}_2} \tilde{c}_{\mathbf{p}_2 \lambda_2} \tilde{c}_{\mathbf{p}_1 \lambda_1}. \quad (5.2.19)$$

Agora estamos em posição de reduzir o operador densidade $\hat{\rho}_{12}$. Realizando o traço relativo ao subespaço do primeiro fóton obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\mathbf{p}_1} [\hat{\rho}_{12}] &= \gamma \otimes \tilde{c}_{\mathbf{p}_2 \lambda_2}^\dagger |y'\rangle_{\mathbf{p}_2} \langle y'|_{\mathbf{p}_2} \tilde{c}_{\mathbf{p}_2 \lambda_2}, \\ \gamma &= \sum_{l=0}^{\infty} \langle 0 |_{\mathbf{p}_1} \frac{(\hat{c}_{\mathbf{p}_1 1})^l}{\sqrt{l!}} \tilde{c}_{\mathbf{p}_1 \lambda_1}^\dagger |y'\rangle_{\mathbf{p}_1} \langle y'|_{\mathbf{p}_1} \tilde{c}_{\mathbf{p}_1 \lambda_1} \frac{(\hat{c}_{\mathbf{p}_1 1})^l}{\sqrt{l!}} |0\rangle_{\mathbf{p}_1}. \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

Note que tomamos o traço com relação à polarização 1. Podemos assumir que $\lambda_1 = 1$, ou simplesmente realizar o traço novamente com relação à polarização 2. Considerando que $\lambda_1 = 1$, vemos que γ pode ser escrita como:

$$\gamma = \text{(i)} + \text{(ii)} + \text{(iii)} + \text{(iv)}, \quad (5.2.21)$$

em que,

$$\begin{aligned} \text{(i)} &= \sum_{l=0}^{\infty} \langle 0 |_{\mathbf{p}_1} \frac{(\hat{c}_{\mathbf{p}_1 1})^l}{\sqrt{l!}} \tilde{c}_{\mathbf{p}_1 1}^\dagger |y'\rangle_{\mathbf{p}_1} \langle y'|_{\mathbf{p}_1} \tilde{c}_{\mathbf{p}_1 1} \frac{(\hat{c}_{\mathbf{p}_1 1})^l}{\sqrt{l!}} |0\rangle_{\mathbf{p}_1}, \\ \text{(ii)} &= - \sum_{l=0}^{\infty} \langle 0 |_{\mathbf{p}_1} \frac{(\hat{c}_{\mathbf{p}_1 1})^l}{\sqrt{l!}} \tilde{c}_{\mathbf{p}_1 1}^\dagger |y'\rangle_{\mathbf{p}_1} \langle y'|_{\mathbf{p}_1} y'_{\mathbf{p}_1 1} \frac{(\hat{c}_{\mathbf{p}_1 1})^l}{\sqrt{l!}} |0\rangle_{\mathbf{p}_1}, \\ \text{(iii)} &= - \sum_{l=0}^{\infty} \langle 0 |_{\mathbf{p}_1} \frac{(\hat{c}_{\mathbf{p}_1 1})^l}{\sqrt{l!}} y_{\mathbf{p}_1 1}^* |y'\rangle_{\mathbf{p}_1} \langle y'|_{\mathbf{p}_1} \tilde{c}_{\mathbf{p}_1 1} \frac{(\hat{c}_{\mathbf{p}_1 1})^l}{\sqrt{l!}} |0\rangle_{\mathbf{p}_1}, \\ \text{(iv)} &= \sum_{l=0}^{\infty} \langle 0 |_{\mathbf{p}_1} \frac{(\hat{c}_{\mathbf{p}_1 1})^l}{\sqrt{l!}} y_{\mathbf{p}_1 1}^* |y'\rangle_{\mathbf{p}_1} \langle y'|_{\mathbf{p}_1} y'_{\mathbf{p}_1 1} \frac{(\hat{c}_{\mathbf{p}_1 1})^l}{\sqrt{l!}} |0\rangle_{\mathbf{p}_1}. \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

Usando a relação de comutação (5.1.3) é fácil ver que:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\hat{c}_{\mathbf{p}_1 1})^l}{\sqrt{l!}} \tilde{c}_{\mathbf{p}_1 1}^\dagger = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\tilde{c}_{\mathbf{p}_1 1}^\dagger \frac{(\hat{c}_{\mathbf{p}_1 1})^l}{\sqrt{l!}} + \frac{(l+1)(\hat{c}_{\mathbf{p}_1 1})^l}{\sqrt{(l+1)!}} \right]. \quad (5.2.23)$$

Com o auxílio da última equação, podemos reescrever o termo (i) da equação (5.2.22) na forma,

$$\begin{aligned}
\text{(i)} &= \sum_{l=0}^{\infty} {}_{\mathbf{p}_{11}} \langle 0 | \frac{(l+1) (\hat{c}_{\mathbf{p}_{11}}) ^l}{\sqrt{(l+1)!}} |y'\rangle_{\mathbf{p}_1} {}_{\mathbf{p}_1} \langle y' | \frac{(l+1) (\hat{c}_{\mathbf{p}_{11}}^\dagger) ^l}{\sqrt{(l+1)!}} |0\rangle_{\mathbf{p}_{11}} \\
&= \left[1 + |y'_{\mathbf{p}_{11}}|^2 \right] |y'\rangle_{\mathbf{p}_{12}} {}_{\mathbf{p}_{12}} \langle y'|,
\end{aligned} \tag{5.2.24}$$

onde foi usada a série encontrada na Ref. [36],

$$e^x(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(1+k)}{k!}. \tag{5.2.25}$$

O próximo termo (ii), deve ser analisado com cautela. Note que o primeiro termo do somatório é zero e o resultado final é,

$$\text{(ii)} = - |y'_{\mathbf{p}_{11}}|^2 |y'\rangle_{\mathbf{p}_{12}} {}_{\mathbf{p}_{12}} \langle y'|. \tag{5.2.26}$$

Similarmente a (ii), vemos que (iii) também possui o primeiro termo do somatório nulo e resulta em

$$\text{(iii)} = - |y'_{\mathbf{p}_{11}}|^2 |y'\rangle_{\mathbf{p}_{12}} {}_{\mathbf{p}_{12}} \langle z'|. \tag{5.2.27}$$

Finalmente o último pode ser escrito como,

$$\text{(iv)} = |y'_{\mathbf{p}_{11}}|^2 |y'\rangle_{\mathbf{p}_{12}} {}_{\mathbf{p}_{12}} \langle y'|. \tag{5.2.28}$$

Então, a equação (5.2.21) toma a forma,

$$\gamma = \left\{ \left(1 + |y'_{\mathbf{p}_{11}}|^2 \right) - 2 |y'_{\mathbf{p}_{11}}|^2 + |y'_{\mathbf{p}_{11}}|^2 \right\} \otimes |y'\rangle_{\mathbf{p}_{12}} {}_{\mathbf{p}_{12}} \langle y'| = |y'\rangle_{\mathbf{p}_{12}} {}_{\mathbf{p}_{12}} \langle y'|. \tag{5.2.29}$$

Tomando o traço com relação ao momento \mathbf{p}_1 e polarização 2 recebemos a matriz densidade associada ao subespaço do fóton 2. Sendo que,

$$\text{tr}_{\mathbf{p}_{12}} \gamma = 1, \tag{5.2.30}$$

temos que a matriz referente ao subespaço do fóton 2 é,

$$\hat{\rho}_2 = \text{tr}_{\mathbf{p}_{12}} \{ \text{tr}_{\mathbf{p}_{11}} [\hat{\rho}_{12}] \} = \tilde{c}_{\mathbf{p}_2 \lambda_2}^\dagger |y'\rangle_{\mathbf{p}_2} {}_{\mathbf{p}_2} \langle y'| \tilde{c}_{\mathbf{p}_2 \lambda_2}. \tag{5.2.31}$$

É fácil ver que $\hat{\rho}_2$ descreve um estado puro e satisfaz,

$$(\hat{\rho}_2)^2 = \hat{\rho}_2. \tag{5.2.32}$$

Chegamos à conclusão que o estado total (5.2.9) é um estado não emaranhado, pois os subespaços que o formam consistem apenas de estados puros. Em outras palavras, a entropia de von Neumann (5.2.2) correspondente a $\hat{\rho}_2$ é zero, i.e.,

$$E = -\text{tr} \hat{\rho}_2 \ln \hat{\rho}_2 = 0. \tag{5.2.33}$$

Podemos demonstrar o resultado (5.2.33) simplesmente expandindo $\ln \hat{\rho}_2$ em uma série de Taylor,

$$\hat{\rho}_2 \ln \hat{\rho}_2 = \hat{\rho}_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\hat{\rho}_2 - 1)^n, \tag{5.2.34}$$

e usando o resultado apresentado na equação (5.2.32) obtemos,

$$\hat{\rho}_2 \ln \hat{\rho}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\rho}_2 (\hat{\rho}_2 - 1)}{n} = 0. \quad (5.2.35)$$

Então, concluímos que não existe emaranhamento entre os fótons iniciais, que seja produzido por uma corrente elétrica na aproximação considerada. Para detectar o emaranhamento, é necessário usar uma aproximação mais complexa levando em conta a possibilidade de interação dos fótons via estado de vácuo.

Capítulo 6

Comentários finais

Consideramos uma abordagem alternativa para o cálculo da radiação quântica emitida por uma corrente elétrica, que nos permite realizar os cálculos seguindo um esquema bastante simples, onde não é necessário o conhecimento das funções de onda ou do espectro de energia da partícula carregada em um campo externo. No quadro desta abordagem, consideramos a radiação síncrotron de um partícula carregada se movendo em órbita circular, devido a um campo magnético uniforme e a radiação Cherenkov. Fica claro que o resultado clássico é reproduzido quando consideramos a emissão de um único fóton e somamos todos os possíveis modos quânticos. Usando os vetores de estado do campo eletromagnético quantizado interagindo com uma corrente elétrica, foram estudados os valores médios dos operadores de campos potenciais, campo elétrico, campo magnético e vetor de Poynting, considerando alguns estados iniciais diferentes, onde foi possível observar a estrutura destes valores médios. Demonstramos a invariância de calibre dos valores médios dos operadores mencionados anteriormente. Além disso, estudamos a possibilidade de gerar emaranhamento em um sistema na mais simples aproximação: quando os fótons livres interagem com uma corrente elétrica clássica. Como um resultado deste estudo, foi descoberto que para detectar este efeito é necessário usar uma aproximação mais complexa, primeiramente levando em conta a possibilidade de interação dos fótons através do estado de vácuo e posteriormente levando em conta a presença de um campo magnético externo ao sistema.

Apêndice 1: Funções de Green para o D'Alembertiano

Obtemos a função de Green associada ao operador D'Alembertiano, seguindo o raciocínio apresentado na Ref. [37]. Iniciamos escrevendo as equações de Maxwell na forma,

$$\square A^\mu(x) = J^\mu(x), \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad (\text{A.1})$$

onde as coordenadas x , a 4-corrente $J^\mu(x)$ e o 4-potencial $A^\mu(x)$ são definidos no Capítulo 1.

Usando a função de Green definida por

$$\square D_\square(x - x') = \delta^4(x - x') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t'), \quad (\text{A.2})$$

é possível escrever solução da equação (A.1) na forma,

$$A^\mu(x) = \int dt' d\mathbf{r}' D_\square(x - x') J^\mu(x'). \quad (\text{A.3})$$

Em seguida, utilizamos a transformada de Fourier da função de Green $D_\square(x - x')$ e da função delta de Dirac $\delta^4(x - x')$,

$$D_\square(x - x') = \int \frac{dk_0 d\mathbf{k}}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} D_\square(k), \quad \delta^4(x - x') = \int \frac{dk_0 d\mathbf{k}}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')}. \quad (\text{A.4})$$

Substituindo a expressão (A.4) na equação (A.2), obtemos;

$$\int \frac{dk_0 d\mathbf{k}}{(2\pi)^4} [-k_0^2 + \mathbf{k}^2] e^{-ik(x-x')} D_\square(k) = \int \frac{dk_0 d\mathbf{k}}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')},$$

que leva a,

$$D_\square(k) = \frac{1}{\mathbf{k}^2 - k_0^2} = -\frac{1}{k_\mu k^\mu}, \quad D_\square(x - x') = - \int \frac{dk_0 d\mathbf{k}}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k_\mu k^\mu}. \quad (\text{A.5})$$

A função $D_\square(k)$ possui dois polos simples $k_0 = \pm |\mathbf{k}|$. Podemos calcular $D_\square(x - x')$ usando o teorema de resíduos. É conveniente escolher o contorno de integração C como mostrado em Fig. 1.

Esta escolha de contorno corresponde à condição,

$$\Delta t = (t - t') > 0. \quad (\text{A.6})$$

Consideramos a seguinte integral I ,

$$I = - \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \oint_C \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(t-t')} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{k_\mu k^\mu}. \quad (\text{A.7})$$

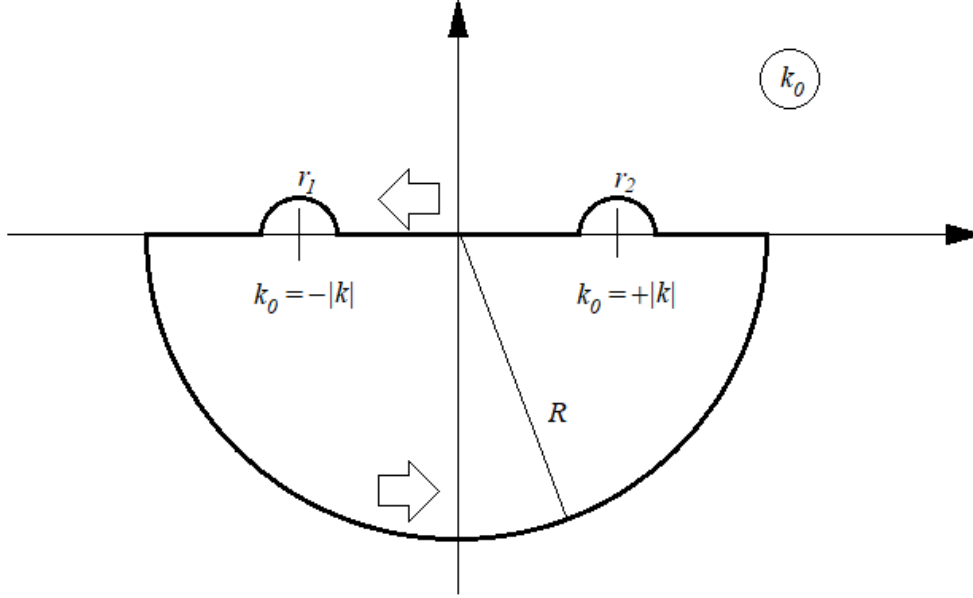


Figure 1: Integration contour C

O contorno da integral por k_0 consiste em 6 partes: três linhas retas em $\text{Im } k_0 = 0$, um arco grande de raio R e dois arcos menores de raios r_1 e r_2 . É fácil ver que as contribuições dos dois arcos menores podem ser desprezadas no limite $r_1, r_2 \rightarrow 0$, e a Eq. (A.7) pode ser escrita como a soma de duas partes (note que o sinal de I_0 é invertido devido à direção do contorno escolhido),

$$\begin{aligned}
 I &= I_R + I_0, \quad I_R = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_R \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(t-t')} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{k_\mu k^\mu}, \\
 I_0 &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0(t-t')} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{1}{k_\mu k^\mu}.
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Não é difícil mostrar que I_R não contribui para a integral I . Primeiramente, fazemos a substituição $k_0 = R \exp[i\varphi]$, obtendo,

$$\begin{aligned}
 I_R &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{iR e^{i\varphi} d\varphi}{2\pi} \frac{\exp[-iR e^{i\varphi} (t-t')] e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{[R^2 e^{2i\varphi} - \mathbf{k}^2]} \\
 &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{iR e^{i\varphi} d\varphi}{2\pi [R^2 e^{2i\varphi} - \mathbf{k}^2]} \exp[-iR \{\cos \varphi + i \sin \varphi\} (t-t')] e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}.
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

O comportamento da integral é definido pelo fator $\exp[R \sin \varphi (t-t')]$. Para o contorno C é claro que $\sin \varphi < 0$, e por consequência da Eq. (A.6) a integral I_R vai a zero no limite $R \rightarrow \infty$. Note que quando $(t-t') < 0$, o contorno deve ser fechado com o arco grande R na metade de cima do plano complexo k_0 , deixando os polos fora do contorno, então a integral I vai a zero. Assim, chegamos a conclusão que,

$$I = I_0 = D_{\square}(x - x'). \tag{A.10}$$

Usando o teorema de resíduos para polos simples e levando em conta a condição (A.6), obtemos,

$$D_{\square}(x - x') = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{\sin |\mathbf{k}|(t-t')}{|\mathbf{k}|} \theta(t-t'), \quad (\text{A.11})$$

onde $\theta(x)$ é a função de Heaviside, definida na equação (1.2.5). A integral em \mathbf{k} é avaliada convenientemente em coordenadas esféricas no espaço \mathbf{k} . Escolhendo k_3 na direção do vetor $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, tal que,

$$\begin{aligned} d^3k &= k^2 \sin \theta \, dk \, d\phi \, d\theta, \quad |\mathbf{k}| = k, \\ \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= k_3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = k \cos \theta |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

chegamos a,

$$D_{\square}(x - x') = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^{\infty} dk \, k \, \sin k(t-t') \theta(t-t') \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d \cos \theta \, \exp(ik \cos \theta |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (\text{A.13})$$

ou, após calcular as integrais em ϕ e $\cos \theta$,

$$D_{\square}(x - x') = \frac{\theta(t-t')}{4\pi^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int_0^{\infty} dk \, \sin k(t-t') \sin k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \quad (\text{A.14})$$

Usando o resultado,

$$\int_0^{\infty} dk \, \sin k(t-t') \sin k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \sin k(t-t') \sin k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad (\text{A.15})$$

e a representação,

$$\sin x = \frac{\exp[ix] - \exp[-ix]}{2i}, \quad (\text{A.16})$$

obtemos:

$$\begin{aligned} D_{\square}(x - x') &= -\frac{\theta(t-t')}{16\pi^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \{ \exp[ik(t-t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)] - \exp[ik(t-t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)] \\ &\quad - \exp[-ik(t-t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)] + \exp[-ik(t-t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)] \}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Após a integração em k , os expoentes resultam em funções delta de Dirac, levando a,

$$D_{\square}(x - x') = \frac{\theta(t-t')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} [\delta(t-t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - \delta(t-t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)]. \quad (\text{A.18})$$

A função de Heaviside elimina a parte avançada da função de Green (segundo termo), deixando apenas a expressão final,

$$D_{\square}^{\text{ret}}(x - x') = \frac{\theta(t-t')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t-t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (\text{A.19})$$

Apêndice 2: Funções de Green para o Laplaciano

Procuramos a solução da seguinte equação,

$$\Delta\varphi(x) = -\rho(x), \quad \nabla^2 = \Delta, \quad (\text{B.1})$$

que pode ser apresentada como,

$$\varphi(x) = \int dt' d\mathbf{r}' D_{\Delta}(x-x') \rho(x'). \quad (\text{B.2})$$

A função de Green $D_{\Delta}(x-x')$ satisfaz a equação,

$$\Delta D_{\Delta}(x-x') = -\delta^{(4)}(x-x'). \quad (\text{B.3})$$

Novamente usamos a transformada de Fourier da função $D_{\Delta}(x-x')$ e da função delta de Dirac $\delta^4(x-x')$,

$$D_{\Delta}(x-x') = \int \frac{dk_0 d\mathbf{k}}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} D_{\Delta}(k), \quad \delta^4(x-x') = \int \frac{dk_0 d\mathbf{k}}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')}, \quad (\text{B.4})$$

e substituindo na Eq. (B.3) recebemos,

$$\int \frac{dk_0 d\mathbf{k}}{(2\pi)^4} \Delta e^{-ik(x-x')} D_{\Delta}(k) = - \int \frac{dk_0 d\mathbf{k}}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')}. \quad (\text{B.5})$$

Comparando o integrando do lado esquerdo com o do lado direito da última equação, concluímos que,

$$D_{\Delta}(k) = \frac{1}{\mathbf{k}^2}, \quad D_{\Delta}(x-x') = \delta(t-t') \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\mathbf{k}^2}. \quad (\text{B.6})$$

Usando coordenadas esféricas, como na equação (A.12), e realizando as integrais em ϕ e $\cos\theta$, obtemos,

$$D_{\Delta}(x-x') = \frac{\delta(t-t')}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk \frac{\sin k |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{k |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (\text{B.7})$$

Fazendo a mudança de variável $z = k |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, e usando o resultado conhecido,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2},$$

finalmente obtemos a função $D_{\Delta}(x-x')$ na forma,

$$D_{\Delta}(x-x') = \frac{\delta(t-t')}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (\text{B.8})$$

Apêndice 3: Funções $D_0(x - x')$

A função de permutação do campo eletromagnético $D_0(x - x')$ é definida pelo comutador,

$$[\hat{A}^\mu(x), \hat{A}^\nu(x')] = i\eta^{\mu\nu} D_0(x - x'), \quad (\text{C.1})$$

tal que,

$$\square D_0(x - x') = 0, \quad D_0(x - x') = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0} [e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')}]. \quad (\text{C.2})$$

A função $D_0(x - x')$ pode ser apresentada ainda na seguinte forma alternativa na representação- k

$$D_0(x - x') = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k e^{-ik(x-x')} \text{sgn}(k_0) \delta(k^2) \quad (\text{C.3})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \sin[(t-t')|\mathbf{k}|], \quad k_0^2 - \mathbf{k}^2 = 0. \quad (\text{C.4})$$

Uma propriedade desta função é:

$$\partial_t D_0(x - x')|_{t=t'} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (\text{C.5})$$

Voltamos nossa atenção agora para as funções de Green, considerando tanto a parte retardada quanto a avançada, isto é,

$$\begin{aligned} \square D_{\square}^{\text{ret}}(x - x') &= \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad \Delta t = (t - t') > 0, \\ \square D_{\square}^{\text{adv}}(x - x') &= \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad \Delta t = (t - t') < 0. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

As funções $D_{\square}^{\text{ret}}(x - x')$ e $D_{\square}^{\text{adv}}(x - x')$ tem a forma explícita,

$$D_{\square}^{\text{ret}}(x - x') = \frac{\theta(t - t')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} [\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - \delta(t - t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)], \quad (\text{C.7})$$

$$D_{\square}^{\text{adv}}(x - x') = -\frac{\theta(t' - t)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} [\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - \delta(t - t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)]. \quad (\text{C.8})$$

Note que, embora em ambas equações (C.7) e (C.8) o segundo termo desaparece na representação- x , estes termos devem ser mantidos para determinar corretamente as contribuições de contorno de funções singulares. Além disso, o segundo termo ajuda a demonstrar explicitamente que,

$$D_{\square}^{\text{ret}}(x - x')|_{t=t'} = D_{\square}^{\text{adv}}(x - x')|_{t=t'} = 0, \quad (\text{C.9})$$

onde foi usada a propriedade de simetria da função delta, $\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \delta(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$. Note que a função $\theta(0)$ não é definida, mas felizmente o resultado (C.9) não depende desse valor.

É possível escrever a função $D_0(x - x')$ em termos das funções $D_{\square}^{\text{ret}}(x - x')$ e $D_{\square}^{\text{adv}}(x - x')$, e vice versa,

$$\begin{aligned} D_0(x - x') &= D_{\square}^{\text{ret}}(x - x') - D_{\square}^{\text{adv}}(x - x'), \\ D_{\square}^{\text{ret}}(x - x') &= \theta(t - t')D_0(x - x'), \\ D_{\square}^{\text{adv}}(x - x') &= -\theta(t' - t)D_0(x - x'), \end{aligned} \tag{C.10}$$

o que permite apresentar $D_0(x - x')$ como,

$$D_0(x - x') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} [\delta(t - t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - \delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)]. \tag{C.11}$$

Apêndice 4: Derivação dos potenciais de Liénard-Wiechert

Primeiramente consideramos os potenciais de LW no calibre de Lorentz. A relação entre os potenciais A_L^μ e a corrente externa J^μ é,

$$A_L^\mu(x) = \int dt' d\mathbf{r}' D_\square(x - x') J^\mu(x') \quad (\text{D.1})$$

Usando a parte retardada da função de Green, $D_\square^{\text{ret}}(x - x')$ dada na Eq. (A.19), e escrevendo a corrente J^μ como,

$$\begin{aligned} J^0(x) &= q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \\ \mathbf{J}(x) &= q\dot{\mathbf{r}}(t)\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

obtemos;

$$\begin{aligned} A_L^0(x) &= \frac{q}{4\pi} \int dt' \frac{\theta(t - t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} \delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|), \\ \mathbf{A}_L(x) &= \frac{q}{4\pi} \int dt' \frac{\theta(t - t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} \delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|) \dot{\mathbf{r}}(t'). \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Note que realizamos a integral espacial trivial e usamos a propriedade $\delta(x) = \delta(-x)$. A função delta de Dirac apresenta também a seguinte propriedade:

$$\delta(f(x)) = \sum_r \frac{\delta(x - x_r)}{\left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_r}}, \quad (\text{D.4})$$

onde x_r são zeros simples de $f(x)$, i.e., $f(x_r) = 0$. A função de Heaviside $\theta(t - t')$ impõe que $t' < t$, logo, a única solução para os zeros do argumento da função delta da Eq. (D.3) é dada pela equação,

$$t_{\text{ret}} - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})| = 0, \quad (\text{D.5})$$

em que designamos a solução desta equação por t_{ret} .

A derivada do argumento da função delta da Eq. (D.3), com respeito a t' , avaliada em t_{ret} é,

$$\left[\frac{d(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|)}{dt'} \right]_{t'=t_{\text{ret}}} = 1 - \dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}}) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})|}. \quad (\text{D.6})$$

Assim, a função delta da Eq. (D.3) pode ser escrita como:

$$\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|) = \frac{\delta(t' - t_{\text{ret}})}{\left|1 - \dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}}) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})|}\right|}. \quad (\text{D.7})$$

Substituindo o último resultado na equação (D.3) e resolvendo a integral trivial em t' , recebemos os potenciais como:

$$\begin{aligned} A_L^0(x) &= \frac{q}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})|} \left|1 - \dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}}) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})|}\right|^{-1}, \\ \mathbf{A}_L(x) &= \frac{q\dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}})}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})|} \left|1 - \dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}}) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})|}\right|^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

É possível ainda reescrever a última equação na forma mais familiar,

$$\begin{aligned} A_L^0(x) &= \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})| - \dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}}) [\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})]}, \\ \mathbf{A}_L(x) &= \frac{q}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})| - \dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}}) [\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})]}. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

A equação (D.9) representa a forma clássica dos potenciais de Liénard-Wiechert no calibre de Lorentz, veja por exemplo [5]. Note que o módulo que estaria no denominador foi omitido já que o primeiro termo é sempre maior que o segundo, desde que,

$$\dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}}) < 1, \text{ ou } \mathbf{v}(t_{\text{ret}}) < c,$$

ou seja, desde que a velocidade da partícula carregada, no momento t_{ret} , seja menor que a velocidade da luz c .

Seguindo os passos encontrados na Ref. [17], obtemos os potenciais de LW no calibre de Coulomb. Iniciamos da seguinte equação,

$$\mathbf{A}_C(x) = \int dt' d\mathbf{r}' D_{\square}(x - x') \mathbf{J}(x') - \int dt' d\mathbf{r}' D_{\square}(x - x') \mathbf{J}_{\parallel}(x'). \quad (\text{D.10})$$

Identificamos a primeira integral com o potencial vetor no calibre de Lorentz $\mathbf{A}_L(x)$, e a segunda integral como sendo a diferença entre os potenciais em seus respectivos calibres $\mathbf{A}_S(x) = \mathbf{A}_C(x) - \mathbf{A}_L(x)$, assim,

$$\mathbf{A}_C(x) = \mathbf{A}_L(x) + \mathbf{A}_S(x). \quad (\text{D.11})$$

O termo $\mathbf{A}_L(x)$ já foi apresentado na Eq. (1.2.7), logo, precisamos calcular apenas o termo,

$$\mathbf{A}_S(x) = - \int dt' d\mathbf{r}' D_{\square}(x - x') \mathbf{J}_{\parallel}(x'). \quad (\text{D.12})$$

Com a ajuda das equações (1.3.5c) e (1.3.8), a corrente longitudinal $\mathbf{J}_{\parallel}(x)$ pode ser escrita na forma,

$$\mathbf{J}_{\parallel}(x) = \frac{q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)|} \right]. \quad (\text{D.13})$$

Substituindo a corrente longitudinal, escrita na Eq. (D.13), na equação (D.12) obtemos;

$$\mathbf{A}_S(x) = -\frac{q}{4\pi} \int dt' d\mathbf{r}' D_{\square}(x-x') \frac{\partial}{\partial t'} \left[\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t')|} \right]. \quad (\text{D.14})$$

Após uma integração por partes com respeito as componentes espaciais, o operador ∇' passa a atuar em $D_{\square}(x-x')$. Usando $\nabla' D_{\square}(x-x') = -\nabla D_{\square}(x-x')$ e tendo em vista que $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t')|^{-1}$ não depende de \mathbf{r} , é possível reescrever $\mathbf{A}_S(x)$ como:

$$\mathbf{A}_S(x) = -\frac{q}{4\pi} \nabla \int dt' d\mathbf{r}' D_{\square}(x-x') \left[\frac{\partial}{\partial t'} \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t')|} \right]. \quad (\text{D.15})$$

Wundt e Jentschura [17] demonstraram que é necessário manter os dois termos na função de Green, obtida na equação (A.18) do Apêndice 1, para obter a resposta correta. Substituindo a forma explícita da função de Green total,

$$D_{\square}(x-x') = \frac{\theta(t-t')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} [\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) - \delta(t-t'+|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)], \quad (\text{D.16})$$

na equação (D.15) e após uma integração por partes, agora com respeito a t' (note que o termo contendo apenas antiderivadas desaparecem nos limites de integração), $\mathbf{A}_S(x)$ se torna,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_S(x) &= \frac{q}{(4\pi)^2} \nabla \int \frac{dt' d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t')| |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &\times \frac{\partial}{\partial t'} \{ \theta(t-t') [\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) - \delta(t-t'+|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)] \}. \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Sendo que $\frac{\partial \theta(t-t')}{\partial t'} = -\delta(t-t')$, é fácil ver que o termo contendo essa derivada desaparece, pois,

$$\delta(t-t') [\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) - \delta(t-t'+|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)] = 0, \quad (\text{D.18})$$

levando a,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_S(x) &= \frac{q}{(4\pi)^2} \nabla \int dt' \theta(t-t') \int \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t')| |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &\times \frac{\partial}{\partial t'} [\delta(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-t+t') - \delta(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|+t-t')]. \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

A partir da seguinte mudança de variável,

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad R = |\mathbf{R}|, \quad d^3x' = -d^3R, \\ \mathbf{z} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}(t'), \quad z = |\mathbf{z}|, \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

e usando que,

$$\frac{\partial}{\partial t'} [\delta(t-t'-R) - \delta(t-t'+R)] = -\frac{d}{dR} [\delta(R-t+t') + \delta(R+t-t')], \quad (\text{D.21})$$

é possível reescrever $A_S(x)$ na forma,

$$A_S(x) = \frac{q}{4\pi} \nabla \int dt' \theta(t-t') \int \frac{d\mathbf{R}}{R|\mathbf{R}-\mathbf{z}|} \frac{d}{dR} [\delta(t-t'-R) - \delta(t-t'+R)]. \quad (\text{D.22})$$

O fator $|\mathbf{R} - \mathbf{z}|^{-1}$ pode ser expandido em termos dos harmônicos esféricos,

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{z}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{\min\{R, z\}^l}{\max\{R, z\}^{l+1}} Y_l^m(\Omega_R) Y_l^{*m}(\Omega_z). \quad (\text{D.23})$$

Substituindo o resultado (D.23) na equação (D.22) e fazendo uso da relação de ortogonalidade,

$$\int d\Omega_R Y_l^m(\Omega_R) = 2\sqrt{\pi} \delta_{l0} \delta_{m0}, \quad Y_0^0(\Omega) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad (\text{D.24})$$

temos que apenas o termo com $l = m = 0$ sobrevive, então o vetor potencial $\mathbf{A}_S(x)$ passa a ser,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_S(x) = & \frac{q}{4\pi} \nabla \int dt' \theta(t-t') \left\{ \frac{1}{z} \int_0^z dR R \frac{d}{dR} [\delta(R-t+t') + \delta(R+t-t')] \right. \\ & \left. + \int_z^{\infty} dR \frac{d}{dR} [\delta(R-t+t') + \delta(R+t-t')] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Integrando o primeiro termo entre chaves por partes e o segundo diretamente, obtemos;

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_S(x) = & \frac{q}{4\pi} \nabla \int dt' \theta(t-t') \left\{ \left[\frac{R}{z} \{\delta(R-t+t') + \delta(R+t-t')\} \right] \Big|_0^z \right. \\ & \left. - \frac{1}{z} \int_0^z dR [\delta(R-t+t') + \delta(R+t-t')] + [\delta(R-t+t') + \delta(R+t-t')] \Big|_z^{\infty} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

Note que o primeiro e o terceiro termo entre chaves se cancelam, produzindo,

$$\mathbf{A}_S(x) = -\frac{q}{4\pi} \nabla \int dt' \theta(t-t') \left\{ \frac{1}{z} \int_0^z dR [\delta(R-t+t') + \delta(R+t-t')] \right\}. \quad (\text{D.27})$$

A função de Heaviside $\theta(t-t')$ restringe o limite superior da integral em t' para ser t . lembrando que $z = |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|$, chegamos a,

$$\mathbf{A}_S(x) = -\frac{q}{4\pi} \nabla \int_{-\infty}^t dt' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} \int_0^{|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')|} dR [\delta(R-t+t') + \delta(R+t-t')]. \quad (\text{D.28})$$

Nesse momento é possível descartar a segunda função delta sendo que o limite de integração em t' garante que $t' \leq t$. Por outro lado, a primeira função delta vai a zero para qualquer $t' < t_{\text{ret}}$, (1.2.8), devido ao limite superior de integração em R , logo, a única contribuição efetiva dar-se-á apenas quando $t' = t_{\text{ret}}$. Assim, o efeito total da integração em R é que os limites de integração para t' são restritos ao intervalo $t' \in (t_{\text{ret}}, t)$:

$$\mathbf{A}_S(x) = -\frac{q}{4\pi} \nabla \int_{t_{\text{ret}}}^t dt' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}. \quad (\text{D.29})$$

Então, o potencial vetor produzido por uma carga q em movimento arbitrário descrito por $\mathbf{r}(t)$, no calibre de Coulomb, é dado por,

$$\mathbf{A}_C(x) = \frac{q\dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}})}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})| - \dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}}) [\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})]} - \frac{q}{4\pi} \nabla \int_{t_{\text{ret}}}^t \frac{dt'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}, \quad (\text{D.30a})$$

onde t_{ret} é a solução de,

$$t_{\text{ret}} - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})| = 0. \quad (\text{D.31})$$

O potencial vetor possui um termo compensatório que fornece uma resposta ao termo de ação-a-distância, respeitando o princípio da relatividade, e o princípio da casualidade [17].

Apêndice 5: Representações de Schrödinger, Heisenberg e Interação

Seguindo os passos da Ref. [18], consideramos um sistema cuja Hamiltoniana total \hat{H} pode ser escrita como a soma de duas parcelas,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (\text{E.1})$$

onde \hat{H}_0 é o operador hamiltoniano livre, que não contém termos de interação, e \hat{H}_{int} é o operador hamiltoniano que contém a interação.

Na representação de Schrödinger, temos que um operador arbitrário \hat{O}^{S} , que representa um observável do sistema, é constante em relação ao tempo. Por outro lado, a evolução temporal de um estado do sistema $|\psi(t)\rangle^{\text{S}}$, é descrita da seguinte forma:

$$i\partial_t |\psi(t)\rangle^{\text{S}} = \hat{H} |\psi(t)\rangle^{\text{S}} = \left(\hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}} \right) |\psi(t)\rangle^{\text{S}}, \quad (\text{E.2})$$

ou seja, a evolução temporal do estado depende do operador hamiltoniano total do sistema.

Em contrapartida, a representação de Heisenberg considera que um operador $\hat{O}^{\text{H}}(t)$ depende do tempo e satisfaz a seguinte equação:

$$i\partial_t \hat{O}^{\text{H}}(t) = \left[\hat{O}^{\text{H}}(t), \hat{H} \right] = \left[\hat{O}^{\text{H}}(t), \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}} \right]. \quad (\text{E.3})$$

Os estados $|\psi\rangle^{\text{H}}$, na representação de Heisenberg, são constantes no tempo.

As duas representações apresentadas são de fato equivalentes e conectadas pelas seguintes relações,

$$\begin{aligned} \hat{O}^{\text{H}}(t) &= \exp(i\hat{H}t) \hat{O}^{\text{S}} \exp(-i\hat{H}t), \\ |\psi\rangle^{\text{H}} &= \exp(i\hat{H}t) |\psi(t)\rangle^{\text{S}}. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Dependendo da forma do operador \hat{H}_{int} , as equações (E.2) e (E.3) podem ficar bastante complicadas. Nesse caso, a representação de interação (Dirac) se torna conveniente. A representação de interação é definida de tal forma que a evolução temporal do operador $\hat{O}^{\text{D}}(t)$ depende apenas da Hamiltoniana livre \hat{H}_0 , enquanto que a evolução temporal dos estados $|\psi(t)\rangle^{\text{D}}$ é governada pela Hamiltoniana de interação \hat{H}_{int} . O operador $\hat{O}^{\text{D}}(t)$ e o estado $|\psi(t)\rangle^{\text{D}}$, satisfazem as seguintes equações:

$$\begin{aligned} i\partial_t \hat{O}^{\text{D}}(t) &= \left[\hat{O}^{\text{D}}(t), \hat{H}_0 \right], \\ i\partial_t |\psi(t)\rangle^{\text{D}} &= \hat{H}_{\text{int}}^{\text{D}} |\psi(t)\rangle^{\text{D}}, \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

em que,

$$\hat{H}_{\text{int}}^{\text{D}} = \exp(i\hat{H}_0 t) \hat{H}_{\text{int}} \exp(-i\hat{H}_0 t). \quad (\text{E.6})$$

A conexão entre as três representações se estabelece por:

$$\begin{aligned}\hat{O}^{\text{D}}(t) &= e^{i\hat{H}_0 t} \hat{O}^{\text{S}} e^{-i\hat{H}_0 t} = e^{i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H} t} \hat{O}^{\text{S}} e^{i\hat{H} t} e^{-i\hat{H}_0 t}, \\ |\psi(t)\rangle^{\text{D}} &= e^{i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle^{\text{S}} = e^{i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H} t} |\psi\rangle^{\text{H}}.\end{aligned}\quad (\text{E.7})$$

É fácil ver que o valor esperado do operador \hat{O} é o mesmo em qualquer representação, i.e.,

$${}^{\text{D}}\langle\psi(t)|\hat{O}^{\text{D}}(t)|\psi(t)\rangle^{\text{D}} = {}^{\text{S}}\langle\psi(t)|\hat{O}^{\text{S}}|\psi(t)\rangle^{\text{S}} = {}^{\text{H}}\langle\psi(t)|\hat{O}^{\text{H}}(t)|\psi(t)\rangle^{\text{H}}. \quad (\text{E.8})$$

Nesta dissertação o operador $\hat{A}_C^i(x)$, apresentado na equação (CC.13),

$$\begin{aligned}\hat{A}_C^i(x) &= \sum_{\lambda=1}^2 \int \left[\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) + \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger f_{\mathbf{k}\lambda}^{i*}(x) \right] d\mathbf{k}, \\ f_{\mathbf{k}\lambda}^i(x) &= \frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2k_0(2\pi)^3}} e^{i(\mathbf{k}, \lambda)}, \quad k_0 = |\mathbf{k}|,\end{aligned}\quad (\text{E.9})$$

está escrito na representação de interação. Para escrever o operador \hat{A}_C^i na representação de Schrödinger, usamos a relação (E.7), com $\hat{H}_0 = \hat{H}_\gamma^{(C)}$ dado na equação (CC.17), i.e.,

$$\hat{A}_C^i(\mathbf{r}) = \exp\left(-i\hat{H}_\gamma^{(C)}t\right) \hat{A}_C^i(x) \exp\left(i\hat{H}_\gamma^{(C)}t\right). \quad (\text{E.10})$$

Com o auxílio do seguinte resultado,

$$e^{-i\hat{H}_\gamma^{(C)}t} \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\hat{H}_\gamma^{(C)}t} = e^{ik_0 t} \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}, \quad e^{-i\hat{H}_\gamma^{(C)}t} \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{i\hat{H}_\gamma^{(C)}t} = e^{-ik_0 t} \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger, \quad (\text{E.11})$$

é fácil ver que,

$$\begin{aligned}\hat{A}_C^i(\mathbf{r}) &= \sum_{\lambda=1}^2 \int \left[\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} f_{\mathbf{k}\lambda}^i(\mathbf{r}) + \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger f_{\mathbf{k}\lambda}^{i*}(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{k}, \\ f_{\mathbf{k}\lambda}^i(\mathbf{r}) &= \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{\sqrt{2k_0(2\pi)^3}} e^{i(\mathbf{k}, \lambda)}, \quad k_0 = |\mathbf{k}|.\end{aligned}\quad (\text{E.12})$$

Para o calibre de Lorentz os resultados são análogos.

Uma vez que os estados do campo eletromagnético foram obtidos via solução da equação de Schrödinger (2.1.6), temos que o estado $|\Psi^{(C)}(t)\rangle$ está escrito na representação Schrödinger. Nesse caso, para calcular o valor médio do operador \hat{A}_C^i , se faz necessário escrever o mesmo também na representação de Schrödinger, ou seja,

$$\langle A_C^i(x) \rangle = \langle \Psi^{(C)}(t) | \hat{A}_C^i(\mathbf{r}) | \Psi^{(C)}(t) \rangle. \quad (\text{E.13})$$

Similarmente para $\hat{E}_C^i(x)$, $\hat{B}_C^i(x)$ e $\hat{S}_C^i(x)$.

Apêndice 6: Método de Feynman de desembaraçar operadores

Considere um operador arbitrário \hat{A} , que depende de um parâmetro λ . Buscamos o resultado da derivada com respeito a λ da expressão $\exp(\hat{A})$. Sendo que a derivada $d\hat{A}/d\lambda$, em geral, não comuta com \hat{A} , as regras usuais de derivação não se aplicam,

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\exp(\hat{A}) \right] \neq \left[\exp(\hat{A}) \right] \frac{d\hat{A}}{d\lambda} \neq \frac{d\hat{A}}{d\lambda} \left[\exp(\hat{A}) \right]. \quad (\text{F.1})$$

Anexamos um índice s ao operador \hat{A} . Nesse caso, o operador \hat{A} é agora uma função de λ e s , mas de fato ele depende apenas de λ . Então, podemos escrever,

$$\exp(\hat{A}) = T_s \exp \left(\int_0^1 \hat{A} ds \right), \quad (\text{F.2})$$

onde T_s é um operador de ordenamento no índice s . Assim, todos operadores podem ser considerados como variáveis ordinárias sob a ação de T_s . Logo, podemos derivar a Eq. (F.2) com respeito a λ para receber,

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\exp(\hat{A}) \right] = T_s \left[\int_0^1 \frac{d\hat{A}}{d\lambda} ds \exp \left(\int_0^1 \hat{A} ds' \right) \right]. \quad (\text{F.3})$$

Aplicando o operador T_s no lado direito da equação (F.3) e lembrando no final que \hat{A} de fato não depende de s , podemos escrever,

$$\begin{aligned} T_s \left[\int_0^1 \frac{d\hat{A}}{d\lambda} ds \exp \left(\int_0^1 \hat{A} ds' \right) \right] &= \int_0^1 \exp \left(\int_s^1 \hat{A} ds' \right) \frac{d\hat{A}}{d\lambda} \exp \left(\int_0^s \hat{A} ds' \right) ds \\ &= \int_0^1 \exp \left[(1-s)\hat{A} \right] \frac{d\hat{A}}{d\lambda} \exp(s\hat{A}) ds = \int_0^1 \exp(s\hat{A}) \frac{d\hat{A}}{d\lambda} \exp \left[(1-s)\hat{A} \right] ds. \end{aligned}$$

Assim, obtemos o resultado final na forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left[\exp(\hat{A}) \right] &= \hat{K}_+ \exp(\hat{A}) = \exp(\hat{A}) \hat{K}, \\ \hat{K}_\pm &= \int_0^1 \exp(\pm s\hat{A}) \frac{d\hat{A}}{d\lambda} \exp(\mp s\hat{A}) ds. \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Bibliography

- [1] A. A. Sokolov, I. M. Ternov, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, **31**, 473 (1956); *Synchrotron Radiation* (Academic Verlag, Berlin, 1968). *Radiation from relativistic electrons* (American Institute of Physics, New York, 1986).
- [2] A. I. Akhiezer and V. B. Berestetskii, *Quantum Electrodynamics* (Science, Moscow, 1981).
- [3] A. A. Sokolov, I. M. Ternov, *Relativistic Electron* (Science, Moscow, 1983).
- [4] F. R. Elder, A. M. Gurevitch, R. V. Langmuir and A. C. Pollock, *Phys. Rev.* **71**, 829 (1947).
- [5] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The classical theory of fields*, (Pergamon Press, Oxford, 1971).
- [6] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd Edition (J. Wiley & Sons, New York, 1998).
- [7] G. A. Schott, *Electromagnetic Radiation* (Cambridge University Press, Cambridge 1907).
- [8] J. Schwinger, *On the Classical Radiation of Accelerated Electrons*, *Phys. Rev.* 75 (12) (1949) 1912-1925
- [9] J. Schwinger, *Quantum correction in the radiation by energetic accelerated electrons*, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S.* **40**, 132 (1954).
- [10] J. Schwinger, *Particles Sources, and Fields*, Vol. 1 (1970) Vol. 2 (1973) (Addison-Wesley).
- [11] J. Schwinger, *Classical Radiation of Accelerated Electrons. II. A Quantum Viewpoint*, *Phys. Rev. D* **7** (6) (1973) 1696-1701.
- [12] A. A. Sokolov, I. M. Ternov, *Proc. Int. Conf. on High Energy Accelerators*, 21 (1963) (in russian); *Dokl. Akad. Nauk USSR* **153**, 1053 (1963).
- [13] A. A. Sokolov, A. M. Voloshenko, V. Ch. Zhukovskii and Yu. G. Pavlenko, *Sov. Phys. Journ.* **9**, 46 (1976).
- [14] A. A. Sokolov, A. M. Voloshenko, V. Ch. Zhukovskii and Yu. G. Pavlenko, *Two-photon synchrotron emission*. *Russ. Phys. Journ.* **19**, 1139 (1976).
- [15] I. Frank, I. Tamm, . 1937 *C.R. Acad. Sci. U.R.S.S.* 14, no. 3, 109.
- [16] A.D. Levin, D.M. Gitman, R.A. Castro, *Eur. Phys. J C* (2014) 74-3068.
- [17] B. J. Wundt and U. D. Jentschura, *Ann.Phys. (N.Y.)* **327** 1217, (2012).
- [18] W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer (1996).

- [19] F. Rohrlich, *Causality, the Coulomb field, and Newtons law of gravitation*, Am. J. Phys. **70**, 411 (2002).
- [20] J. D. Jackson, *From Lorenz to Coulomb and Other Explicit Gauge Transformations*, Am. J. Phys. **70**, 917 (2002).
- [21] E. S. Fradkin, D. M. Gitman, Sh. M. Shvartsman: *Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum*, pp. 1–300 (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York London Paris Hong-Kong Barcelona, 1991).
- [22] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, V. A. Kuchin, *External field in quantum electrodynamics and coherent states*, in *Actual problems of Theoretical physics*, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia (1976), p.334; Sov. Phys. J. **4**, 152 (1974); P. K. Rashevskii, Usp. Mat. Nauk **13**, 3 (1958) (in russian).
- [23] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, A. D. Levin, J. Russ. Laser. Res. **32**, 317 (2011).
- [24] N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, 3-rd ed. (John Wiley & Sons 1980).
- [25] R. P. Feynman, Phys. Rev. **84**, 108 (1951).
- [26] P. K. Rashevsky, *On mathematical grounds of quantum electrodynamics*, Usp. Mat. Nauk **13**, 3 (1958) (in russian).
- [27] R. J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963); **131**, 2766 (1963).
- [28] K. Bleuler, Helv. Phys. Acta **23**, 567 (1950); S. N. Gupta, Proc. Phys. Soc. A **63**, 681 (1950).
- [29] D. M. Gitman, I. V. Tyutin: *Quantization of Fields with Constraints*, pp. 1–291 (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York London Paris Hong-Kong Barcelona, 1990).
- [30] P.A.M. Dirac: *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva university, New York 1964.
- [31] S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory* (Harper & Row, New York, 1961).
- [32] M. Boiteux and A. Levelut, J. Phys. A: Math. Nucl. Gen. **6** 589 (1973).
- [33] V.G. Bagrov, D.M. Gitman and V.A. Kuchin, *External field in quantum electrodynamics and coherent states*, In Actual problems of theoretical physics (Moscow State University, Moscow, 1976) pp. 334-342.
- [34] J. Frenkel, *Prinípios de Eletrodinâmica Cássica*, (Edusp, São Paulo, 1996).
- [35] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu, B. Schumacher, Phys. Rev. A **53** (1996) 2046.
- [36] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Seventh Edition (Academic Press, New York, 2007).
- [37] D. V. Galtsov, Yu. V. Gratz and V. Ch. Zhukovsky, *Classical fields* (in Russian) (Moscow State University Press, Moscow, 1991).