

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Decaimentos radiativos de mésons pesados exóticos

Rafael Fernandes Luiz

Orientador: Prof. Dr. Renato Higa

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de
Física para a obtenção do título de Mestre em Ciências

Banca examinadora:

Prof. Dr. Renato Higa - IF/USP

Prof. Dr. Ricardo D'Elia Matheus - IFT/UNESP

Prof^a. Dr^a. Tereza Cristina da Rocha Mendes - IFSC/USP

São Paulo
2016

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Luiz, Rafael Fernandes

Decaimentos radiativos de mésons pesados exóticos.
São Paulo, 2016.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto
de Física. Depto. de Física Nuclear

Orientador: Prof. Dr. Renato Higa

Área de Concentração: Física de Hádrons

Unitermos: 1. Física de hádrons; 2. Hádrons exóticos; 3. Teorias
efetivas.

USP/IF/SBI-094/2016

University of São Paulo
Institute of Physics

Radiative decays of exotic heavy mesons

Rafael Fernandes Luiz

Advisor: Prof. Dr. Renato Higa

A thesis submitted in fulfillment of the requirements for the degree
of Master of Science in the Institute of Physics of University of São Paulo

Examining committee:

Prof. Dr. Renato Higa - IF/USP

Prof. Dr. Ricardo D'Elia Matheus - IFT/UNESP

Prof. Dr. Tereza Cristina da Rocha Mendes - IFSC/USP

São Paulo
2016

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, irmãos e demais familiares, pelo apoio que me deram no decorrer de todos esses anos.

Agradeço ao pessoal do Instituto de Física, em especial ao Renato, por seus ensinamentos e sua dedicação como orientador, e ao Daniel, que foi um importante colaborador no que diz respeito aos cálculos envolvendo a modelagem do X(3872).

Agradeço aos professores Ricardo e Tereza por tudo referente à sua participação na banca examinadora.

Agradeço também ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Luiz, R. F. **Decaimentos radiativos de mésons pesados exóticos**. Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Nessa dissertação expomos uma abordagem teórica para lidar com decaimentos radiativos de moléculas mesônicas. Trata-se de um caminho promissor para descrever hádrons que se encontram próximos dos limiares de produção dos mésons D e B , e que não se encaixam no modelo tradicional de quarks. Aplicamos essa abordagem especificamente para o méson $X(3872)$: considerando-o um composto molecular $D\bar{D}^*$, abordamos seus decaimentos radiativos $X \rightarrow J/\psi\gamma$ e $X \rightarrow \psi(2S)\gamma$. Contrariando afirmações anteriores, constatamos que o modelo molecular é compatível com os dados experimentais a respeito desses decaimentos. Em nossa modelagem usamos teorias efetivas e a chamada *power-divergence subtraction* (PDS). O esquema PDS é um método de renormalização que se contrapõe à popular subtração mínima e é especialmente designado para tratar fenômenos não-perturbativos, como estados ligados e ressonâncias. Verificamos que as físicas de longo e curto alcance do X são igualmente importantes naqueles decaimentos. Nossos cálculos estabelecem um limite mínimo para as larguras de decaimento, o que poderia em princípio ser testado experimentalmente. Além disso, nossos resultados podem auxiliar a construção de modelos para a estrutura de curto alcance do X . Essa dissertação também apresenta uma revisão sobre espalhamento quântico e teorias efetivas, arcabouços teóricos constantemente presentes em nossa abordagem.

Palavras-chave: $X(3872)$, moléculas mesônicas, hádrons exóticos, decaimentos radiativos, teorias efetivas, espalhamento quântico, power-divergence subtraction.

Abstract

Luiz, R. F. **Radiative decays of exotic heavy mesons**. Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

In this dissertation we present a theoretical approach to deal with radiative decays of meson molecules. This is a promising framework to understand mesons that lie near the production threshold of D and B mesons, and don't fit in the traditional quarkonia predictions. We apply this approach specifically to the meson $X(3872)$: considering it a $D\bar{D}^*$ molecule, we deal with its radiative decays $X \rightarrow J/\psi\gamma$ and $X \rightarrow \psi(2S)\gamma$. Contrary to previous claims, we demonstrate that the molecular model is compatible with the experimental radiative decay data. We use effective field theory techniques and the so called power-divergence subtraction (PDS) scheme. Based on the popular dimensional regularization and minimal subtraction scheme, PDS is designed to handle non-perturbative phenomena such as bound states and resonances. We find that short and long-distance physics are equally important in these decays. Our calculations set a lower limit to the corresponding decay widths, which can in principle be tested experimentally. Our results also may be used as guide to build models for the short-distance structure of the $X(3872)$. Furthermore, this dissertation presents a review about quantum scattering and effective field theories, theoretical tools constantly present in our approach.

Keywords: $X(3872)$, mesonic molecules, exotic hadrons, radiative decays, effective field theories, quantum scattering, power-divergence subtraction.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Introdução aos modelos hadrônicos	2
1.1.1	Espectroscopia de quarkonia pesados	6
1.2	X(3872)	8
2	Espalhamento quântico	13
2.1	Equação de Schrödinger de duas partículas	13
2.2	A equação de onda no espaço de configuração	14
2.3	A equação de onda no espaço de momento e o operador de transição	15
2.4	Simetrias do espalhamento	16
2.5	A matriz S e os ângulos de defasagem	17
2.6	Seção de choque	18
2.7	Estado ligado	19
2.8	Espalhamento em teoria quântica de campos	21
2.9	Análise numérica	23
2.9.1	Aspectos gerais	23
2.9.2	Exemplos de simulações	25
3	Teorias efetivas	29
3.1	Aspectos gerais	29
3.2	QCD	32
3.3	Lagrangiana quirál	33
3.4	Quebra espontânea de simetria	34
3.5	Lagrangianas efetivas quirais	37
3.6	Heavy quark	40
3.7	Lagrangianas efetivas pesadas	44
3.7.1	Lagrangianas efetivas bariônicas	44

3.7.2	Lagrangianas efetivas mesônicas	45
3.8	Lagrangianas efetivas eletromagnéticas	50
4	Modelagem do X(3872)	53
4.1	Diagramas de Feynman	53
4.2	Métodos de regularização e subtração	58
4.3	Resultados	61
4.4	Conclusões e perspectivas	67
5	Apêndice	69
5.1	Integração	69
5.2	Tensores úteis	71
5.3	Resultado da integração	74
5.4	Renormalização da integral	76
5.5	Demonstração de (5.6)	77
5.6	Demonstração de (5.24)-(5.26)	78
5.7	Parametrização de Feynman	80
	Referências Bibliográficas	83

Capítulo 1

Introdução

O modelo de quarks, proposto em 1964 por Gell-Mann e Zweig, postulava que os hádrons eram formados por quarks que se combinavam de forma bem específica, e com isso mostrou-se muito bem sucedido em descrever economicamente os hádrons e suas propriedades. Esse sucesso pavimentou o caminho para a Cromodinâmica Quântica, teoria que rege a interação forte entre os quarks. Apesar disso, a Cromodinâmica Quântica não oferece nenhuma justificativa para que os quarks constituíssem os hádrons apenas na combinação específica que o modelo tradicional de quarks propõe. Pelo contrário, estruturas que fugiam desse padrão — os chamados hádrons exóticos — têm sua existência permitida ou até mesmo sugerida por essa teoria. Dentre essas estruturas incluem-se as glueballs (mésons constituídos apenas de glúons interagentes) e os multiquarks (estruturas com mais de três quarks), em especial as moléculas mesônicas.

A discussão sobre essas estruturas era calcada em terreno meramente teórico até os anos 2000, quando fortes candidatos a mésons exóticos passaram a ser descobertos no contexto da espectroscopia de quarks pesados. O $X(3872)$ foi o primeiro desses hádrons, sendo um méson descoberto em 2003 e bastante análogo a um charmônio, mas cujas propriedades oferecem sérias dificuldades em serem explicadas com o modelo tradicional de quarks. A despeito de ter sido descoberto há mais de uma década atrás, a discussão sobre sua composição ainda não atingiu um consenso. Essas dificuldades realçam o quão complexa a força forte é no regime não-perturbativo, e o estudo desses problemas promete aumentar nosso conhecimento sobre esse regime, especialmente no que concerne ao fenômeno do confinamento de quarks, propriedade tão essencial na física hadrônica e ainda assim tão pouco compreendida.

Essa dissertação tem como objetivo expor um método que explora os decaimentos radiativos de mésons pesados exóticos, visando obter informações sobre a sua natureza. Aplicamos esse método especificamente ao $X(3872)$, descrevendo sua estrutura de longo alcance como uma molécula mesônica constituída de um par de mésons D . A descrição molecular do $X(3872)$ é complementada, do ponto de vista de uma teoria efetiva, por termos de contato, que representam a física de curtas distâncias da partícula. Nesse sentido, em nosso trabalho buscamos realizar uma análise mais apropriada do grupo de renormalização dos decaimentos, complementando [GHK⁺15] ao levar em conta a estrutura de curtas distâncias do X . Um aspecto mais original de nossa abordagem é empregar para tanto a renormalização PDS (do inglês, *power-divergence subtraction*), método de renormalização que se contrapõe à subtração mínima, renormalização esta mais comumente aplicada na literatura.

No texto a seguir expomos uma revisão qualitativa e histórica da física hadrônica, revisão que foca na construção de modelos a respeito da composição dos hádrons, o que fornecerá ao leitor uma introdução ao assunto e uma boa percepção da posição que os mésons exóticos ocupam na física hadrônica. Logo em seguida abordamos especificamente o $X(3872)$, expondo os principais dados experimentais a respeito e um resumo do debate sobre sua composição.

Já nos capítulos seguintes apresentamos dois arcabouços teóricos úteis para explorar a estrutura

dos hádrons, visto que a Cromodinâmica Quântica mostra-se difícil de ser diretamente aplicada aos problemas de estados ligados. O primeiro desses arcabouços é a teoria de espalhamento quântico, em que focamos no espalhamento não-relativístico, ainda que também introduzamos a situação relativística sob a ótica de teoria quântica de campos. Ao final do capítulo também oferecemos um pequeno resumo dos métodos numéricos úteis ao nosso trabalho, e algumas modelagens rudimentares da interação via píons entre mésons D , interação que ocorreria no interior do $X(3872)$. O segundo arcabouço são as teorias efetivas. Nos focamos nas teorias quirais e de heavy quark, teorias que obtiveram grande sucesso em explorar rigorosamente aspectos da QCD em certos regimes cinemáticos.

Por fim, no capítulo 4, expomos a modelagem do $X(3872)$ na qual, utilizando lagrangianas efetivas, calculamos as larguras de decaimento $\Gamma(X(3872) \rightarrow \gamma J/\psi)$ e $\Gamma(X(3872) \rightarrow \gamma \psi')$. Em especial apresentamos com mais detalhes a renormalização PDS, justificando seu uso para o problema de nosso interesse. Ao final seguem os resultados, as informações que essa modelagem oferece a respeito da estrutura do $X(3872)$, e as perspectivas que esse trabalho oferece para outros problemas correlacionados. No apêndice, apresentamos de maneira mais minuciosa o trato das integrais que decorrem da modelagem, e em especial a aplicação do esquema PDS.

1.1 Introdução aos modelos hadrônicos

Uma das modelagens mais primitivas da interação forte ocorreu nos anos 30 através do méson π de Yukawa. O méson π , ou pión, foi previsto tendo em mente a necessidade de uma partícula mediadora da força forte, força que seria necessária para manter o núcleo de um átomo coeso, a despeito da força elétrica repulsiva entre os prótons. O pión foi detectado em 1947 por Powell, Lattes e outros, através de experimentos com raios cósmicos. Pouco tempo depois, porém, descobriu-se um grande número de novas partículas que, assim como o pión e os núcleons, interagem fortemente. Essas partículas, denominadas hádrons, aumentaram em muito o número de partículas conhecidas, sendo motivo de perplexidade para os físicos da época.

O conceito de isospin teve um importante papel no entendimento desses hádrons. Trata-se de um conceito utilizado por Heisenberg para entender o núcleo atômico, tendo em vista a descoberta do nêutron, ainda em 1932. Heisenberg, observando a acentuada semelhança entre prótons e nêutrons no que diz respeito ao seu comportamento sob interações fortes, propôs que eles fossem interpretados como diferentes orientações de uma mesma partícula de isospin $1/2$. O isospin foi definido como uma grandeza com as mesmas propriedades matemáticas do spin, de forma que uma partícula de isospin I admitiria $2I + 1$ orientações possíveis. Eventuais distinções entre o próton e o nêutron, como a diferença entre suas cargas e a pequena diferença entre suas massas, seriam pouco relevantes para a interação forte e estariam fundamentadas em razões alheias a essa interação. No contexto da descoberta dos novos hádrons após 1947, o conceito de isospin passou por novas aplicações. Nesse sentido, por exemplo, os píons π^+, π^0, π^- foram considerados um tripleto de isospin 1, os bárions $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$ um multipletto de isospin $3/2$, etc. Como estabelecido por Heisenberg, uma característica fundamental da força forte seria sua invariância sob rotações no espaço de isospin, a partir da qual se estabelece a conservação de isospin nesse tipo de interação. Com esses pressupostos pôde-se entender muitos aspectos da interação forte entre os hádrons então recém-descobertos.

Mas somente através do chamado *Eightfold Way*, método de classificação dos hádrons criado por Gell-Man e Ne'eman nos anos 60, foi dado um ordenamento mais completo a esse crescente número de hádrons. O *Eightfold Way* divide as partículas em multipletos até certo ponto análogos aos multipletos de isospin — em linguagem moderna, assim como os multipletos de isospin são estabelecidos através de representações do grupo $SU(2)$, os multipletos de Gell-Man são estabelecidos através de representações do grupo $SU(3)$. Os multipletos tão logo identificados foram o octeto fundamental (ou pseudoescalar) de mésons, o noneto vetorial de mésons, o octeto de fundamental de bárions, e o decupletto de bárions de momento angular total $3/2$ (fig. 1.1).

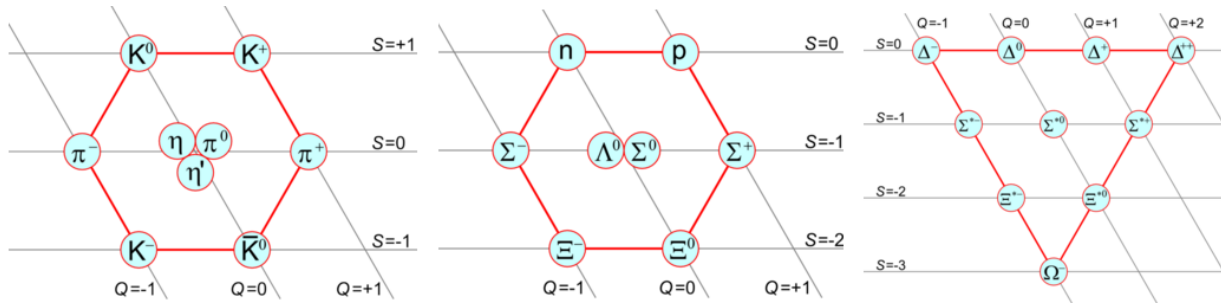


Figura 1.1: À esquerda temos o noneto fundamental de mésons (número quântico de momento angular total $J = 0$), ao centro o octeto fundamental de bárions ($J = 1/2$), e à direita o decuplete de bárions de spin total $J = 3/2$. As linhas horizontais definem a estranheza S dos hádrons e as linhas diagonais definem a carga Q . Cada antipartícula tem carga, isospin e estranheza de sinal contrário à sua partícula correspondente. Para cada multipletto bariônico há um multipletto análogo antibariônico, mas para o caso mesônico cada par partícula-antipartícula está contido no mesmo multipletto.

Os multipletos permitiam melhor organizar e prever as propriedades dos hádrons, como massa, carga, spin, isospin e estranheza¹. De fato, a partir dessa organização, Gell-man pôde prever a existência e propriedades do bárion Ω^- . Mas, diferentemente de como Heisenberg pensava o isospin, já não era possível conjecturar que membros de um mesmo multipletto fossem diferentes manifestações de uma mesma partícula: se temos de um lado uma pequena diferença de massa entre o próton e o nêutron, ou entre os píons, por outro lado temos que, por exemplo, os káons (K^+ , K^- , K^0 , \bar{K}^0) são cerca de 3.5 vezes mais massivos que os píons, o que torna implausível a hipótese de constituírem orientações distintas de uma mesma partícula apenas pelo fato de participarem de um mesmo octeto de mésons.

Ainda que o *Eightfold Way* tenha esclarecido os hádrons em muitos aspectos, pouco era entendido sobre as fundamentações físicas desse método. Isso começou a mudar em 1964, quando o modelo de quarks foi proposto por Gell-Mann e Zweig. Segundo esse modelo, os hádrons são constituídos de partículas elementares de spin 1/2 denominadas quarks. Os quarks existem em certos sabores, isto é, tipos (que até então eram três: up, down, strange), e cada sabor possui grandezas como carga e estranheza bem determinadas (fig. 1.2). Para cada quark há também um antiquark correspondente, de carga e estranheza opostas. Os hádrons são interpretados como estados ligados de quarks em combinações bastante específicas: os bárions são formados por três quarks, os antibárions por três antiquarks, e os mésons por um par quark-antiquark (fig. 1.3). Com esses pressupostos almejou-se descrever todos os hádrons até então conhecidos, e obteve-se grande sucesso. Os hádrons de um dado multipletto são entendidos como estados ligados com números quânticos radiais e angulares iguais, mas constituídos de quarks de sabores diversos. Com isso explica-se com bastante sucesso o padrão de carga e estranheza no interior dos diversos multipletos, simplesmente somando apropriadamente essas grandezas de seus quarks constituintes.

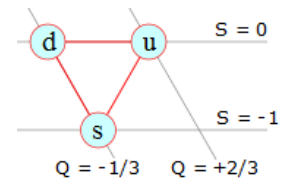


Figura 1.2: Carga e estranheza dos quarks. Os quarks possuem spin $s = 1/2$.

A simetria de isospin observada por Heisenberg, que equiparava os núcleons ou os píons do ponto de vista da força forte, no modelo de quarks é justificada como uma simetria aproximadamente respeitada devido à pouquíssima diferença entre as massas dos quarks up e down. Membros de um mesmo multipletto de isospin são partículas iguais com respeito à composição de quarks, exceto pela troca de um quark down por up ou vice-versa — sendo pequena a diferença entre esses quarks,

¹A estranheza foi uma propriedade definida pelo próprio Gell-Mann anos antes de estabelecer o *Eightfold Way*. Ela tem esse nome porque os hádrons com estranheza, quando descobertos, de fato pareceram estranhos aos físicos da época. Essa é uma grandeza conservada em decaimentos fortes, mas não é conservada em decaimentos fracos. Ambos tipos de decaimentos já na época eram diferenciados pelo tempo de vida médio que as partículas possuíam até decair (cerca de 10^{-13} s para os decaimentos fracos e 10^{-20} s para os decaimentos fortes).

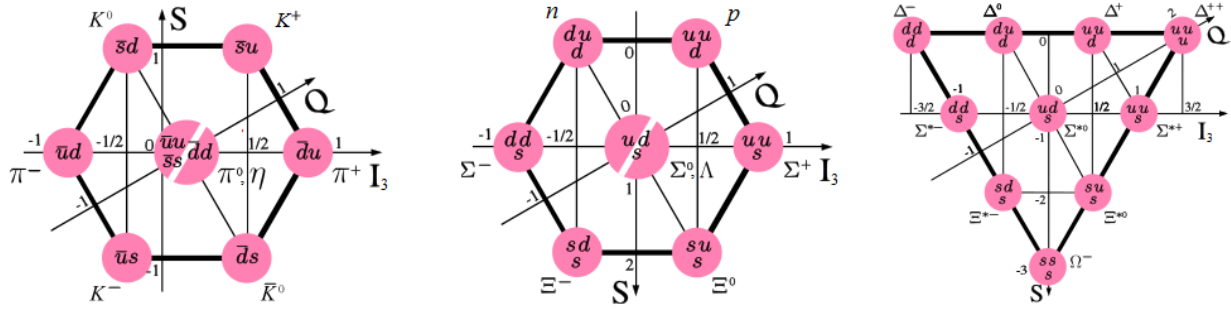


Figura 1.3: Reprodução dos multipletos dados na fig. 1.1. Aqui são adicionadas linhas verticais, que fornecem a orientação ou projeção I_z do isospin I dos hádrons. Nos círculos rosas encontra-se indicado o conteúdo de quarks de cada um dos hádrons. No modelo de quarks, esses três multipletos, e o noneto vetorial de mésons ($J = 1$), são interpretados como estados ligados de números quânticos principais mínimos. O restante dos números quânticos são obtidos somando-se apropriadamente os números quânticos de seus quarks constituintes. Nesse sentido, por exemplo, os nonetos fundamental e vetorial diferem entre si através do número quântico de spin total S obtido pela soma dos spins intrínsecos aos quarks ($S = 0$ quando spins alinham-se como um singlete, e $S = 1$ quando alinham-se como um tripleto). Em princípio há uma infinidade de multipletos com números quânticos diversos.

partículas de um mesmo multipletto de isospin são bastante semelhantes entre si e a simetria $SU(2)$ é respeitada em boa aproximação. Nesse entendimento temos em mente a propriedade de que os diversos sabores de quarks são equivalentes do ponto de vista da interação forte, isto é, se os diversos sabores tivessem massas iguais, os hádrons seriam completamente degenerados no que diz respeito à interação forte. Já em relação aos multipletos de Gell-Mann, os hádrons eventualmente diferem pelo número de quarks strange. Esse quark é sensivelmente diferente do up e down em massa, de forma os hádrons no interior desses multipletos não são simétricos sequer aproximadamente. A partir disso o modelo de quarks explica a importância da estranheza, que reflete o conteúdo de quarks strange na estrutura do hádron.

Dessa forma o entendimento dos hádrons entrelaçou-se com o estudo de estados ligados. Porém a teoria quântica de campos (QFT, do inglês *quantum field theory*), tão bem sucedida no estudo da interação eletromagnética através da eletrodinâmica quântica (QED, do inglês *quantum electrodynamics*), apresentava dificuldades em ser aplicada em estados desse tipo, pois em um estado ligado a interação entre os constituintes é sobretudo não-perturbativa, e os grandes sucessos da QFT estavam até então fundamentados no caráter perturbativo das interações. As perspectivas começaram a mudar com os experimentos realizados no *Stanford Linear Accelerator Center* no final dos anos 60, envolvendo choques profundamente inelásticos entre prótons e elétrons. Esses experimentos visavam sondar a estrutura do próton e seguiam em essência os mesmos princípios que Rutherford aplicou para sondar a estrutura do átomo. Tratavam-se, porém, de experimentos bem mais energéticos para que houvesse a capacidade de sondar estruturas de dimensões sub-nucleares. A partir desses experimentos foi confirmado o chamado *scaling* de Bjorken, propriedade que foi explicada por Feynman em seu modelo de pártons. Esse modelo descrevia o próton como constituído de pártons, partículas pontuais e aproximadamente livres. Que os pártons em energias muito altas fossem aproximadamente livres no interior do hádron, isso é, interagem fracamente em curtas distâncias, era um fato bastante anti-intuitivo para a época. Fortunadamente essa propriedade, denominada liberdade assintótica, foi na mesma época verificada como uma propriedade inerente das chamadas teorias de gauge não-abelianas, e ela permitia que em curtas distâncias a interação fosse perturbativa.

Nesse cenário a cromodinâmica quântica (QCD, do inglês *quantum chromodynamics*) emergiu naturalmente como a teoria das interações fortes. Mesmo porque, além da liberdade assintótica, a QCD era facilmente acomodável à outra importante característica dos quarks: a cor. A cor, assim como o sabor, é uma propriedade que permite diferenciar os quarks uns dos outros. A necessidade dessa propriedade foi primeiramente pontuada quando notou-se que certos hádrons, como os bárions

ons Δ^{++} ou Σ^- , eram formados por quarks de mesmo sabor e demais números quânticos até então conhecidos, e isso parecia ferir o princípio de exclusão de Pauli, princípio que implica que férmions indistinguíveis não podem possuir os mesmos números quânticos em um estado ligado. Para resolver essa questão, era necessário postular um novo número quântico, e havia a necessidade de que esse número admitisse no mínimo três possibilidades para serem aplicadas aos três quarks constituintes dos bárions acima mencionados, permitindo distinguir esses quarks uns dos outros. Que cada sabor de quark deveria ter três versões de si mesmo também mostrou-se necessário para entender quantitativamente certos espalhamentos e decaimentos, em especial os espalhamentos $e^-e^+ \rightarrow$ hádrons. A propriedade de cor não era observada diretamente, de forma que não poderia ser relevante na escala hadrônica ou superior: todos hádrons teriam que ser neutros do ponto de vista da cor.

Desse modo, além do sabor, cada quark está associado a uma cor (*red*, *blue*, ou *green*), e cada antiquark a uma anticor (*antired*, *antiblue* ou *antigreen*). Como formalizaremos na seção 3.1, a simetria de cor é a simetria de gauge sobre a qual é fundamentada a QCD. Assim, a QCD é invariante sob uma rotação nesse espaço de cor — essa simetria, sendo uma simetria perfeita da interação, adota um papel semelhante ao que o isospin exercia na antiga teoria de Heisenberg, e é análoga à simetria de gauge na eletrodinâmica. Com essa terminologia pode-se resumir duas propriedades dos quarks difíceis de serem justificadas diretamente a partir da QCD: a restrição das maneiras possíveis que os quarks podem combinar-se para formar estados ligados e constituir hádrons, e a existência do confinamento, isto é, a ausência de quarks livres, mesmo frente a inúmeras tentativas experimentais de isolá-los (o que colocou em xeque a própria existência dos quarks). Essas duas propriedades são implicadas quando é dito que partículas livres são neutras do ponto de vista de cor. As únicas maneiras dos quarks formarem partículas neutras seriam (1) quando ocorresse a soma de uma cor e anti-cor, analogamente ao que ocorre com cargas elétricas positivas e negativas, mas também (2) quando ocorresse a soma de três cores ou de três anticolors distintas, possibilidade esta não presente nas cargas elétricas tradicionais e que inspira o nome “cor” para a carga forte (esquemáticamente, $red + green + blue = 'white' = 0$). Desse modo somente a combinação de três quarks, três antiquarks, ou um par quark-antiquark seria branca (neutra do ponto de vista da carga de cor), e poderia existir como uma partícula livre.

Com o estabelecimento da QCD e de seu regime perturbativo em altas energias, abriu-se caminho para diversas aplicações bem-sucedidas da QCD nesse regime energético, pois a propriedade perturbativa da interação nesse regime é bastante conveniente para cálculos. Em baixas energias, porém, a QCD é não-perturbativa — isso está relacionado ao fato de que a constante de acoplamento entre quarks e glúons é acentuadamente decrescente com o aumento da energia típica da interação, o que fundamenta a liberdade assintótica em altas energias, mas rompe com a propriedade perturbativa em baixas energias. Dessa forma a QCD é de difícil aplicação no estudo da estrutura dos hádrons, o que torna necessário o uso de métodos diversos para abordar o regime não-perturbativo. Além de modelagens mais fenomenológicas, destacam-se a (1) *lattice QCD*, (2) regras de soma da QCD e (3) teorias efetivas, que abordaremos com mais atenção no capítulo 3.

Em 1974 foi descoberto o méson J/ψ , méson pesado e de vida muito longa, descoberta esta que iniciou uma série de mudanças em física de partículas que ficou conhecida como Revolução de Novembro. A partir disso a realidade dos quarks estabeleceu-se mesmo entre os mais céticos, pois o modelo de quarks acomodou a descoberta desse méson bastante naturalmente ao interpretá-lo como um méson formado por um quark e antiquark ambos de um novo sabor, o charm (fig. 1.4). Logo inúmeros novos hádrons também foram encontrados e explicados satisfatoriamente como constituídos de charm. Os sabo-

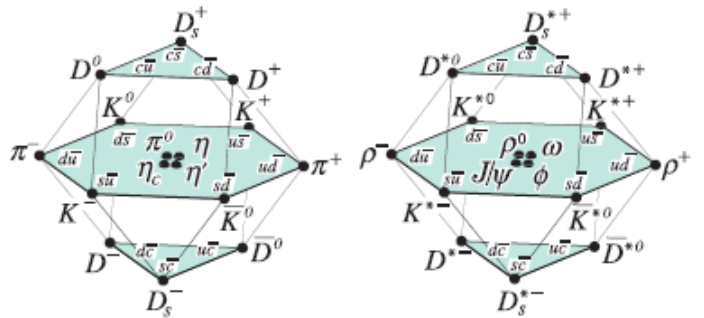


Figura 1.4: Com a adição do quark charm, os multipletos são representações do grupo SU(4) e tornam-se mais complexos. À esquerda, temos os mésons pseudoescalares ($J = S = 0$) e à direita os mésons vetoriais ($J = S = 1$). Figura retirada de [eaPDG14].

res bottom e top foram descobertos mais tarde, e com isso o modelo atual de quarks possui seis sabores.

1.1.1 Espectroscopia de quarkonia pesados

Os mésons formados por um quark e seu próprio antiquark são denominados quarkonia (singular: quarkonium), nome dado em comparação ao positrônio, que é composto pelo elétron e sua antipartícula. Os quarkonia constituídos de charm e anticharm são denominados charmônios (os charmônios mais leves são η_c e J/ψ , e fazem parte dos multipletos dados na fig. 1.4) e os constituídos de bottom e antibottom são denominados bottomônios. Esses dois tipos de quarkonia mostraram-se especialmente favoráveis a previsões teóricas porque a presença de dois quarks pesados torna o sistema receptivo a um tratamento não-relativístico. Assim o espectro da ligação entre os quarks pode ser abordado de forma análoga à abordagem do espectro do átomo de hidrogênio ou do positrônio. O espectro dos quarkonia preserva em grande parte, em relação ao hidrogênio, o ordenamento energético entre as diversas excitações, porém a ordem de grandeza das energias relativas é muito maior, sendo da ordem de centenas de MeV e comparáveis às massas dos próprios mésons. Dessa forma as diferentes excitações são encaradas naturalmente como mésons distintos, mesmo porque não há uma distinção tão clara entre níveis fundamentais, finos ou hiperfinos, como há no hidrogênio. Ora, essas diferenças não são espantosas, já que a interação entre os quarks é outra: a interação forte. Esperamos que em curtas distâncias essa interação seja próxima da interação eletromagnética, devido à semelhança entre a interação forte e eletromagnética em curtas distâncias (ambas são interações mediada pela troca de um único mediador sem massa e de spin 1). Porém, para que tenhamos previsões bem-sucedidas utilizando mecânica quântica não-relativística, é necessário que já no nível do potencial efetivo seja levado em conta o confinamento. Um dos modelos mais simples e ainda assim bastante bem-sucedido em explicar os quarkonia é o potencial de Cornell:

$$V(r) = \frac{4}{3} \frac{a_s}{r} + b_s r.$$

Trata-se de um potencial coulombiano tradicional (o que diz respeito aos aspectos da força forte que são análogos à força eletromagnética) acrescido de um termo linear, que leva em conta o confinamento. O termo linear é eventualmente substituído por um termo quadrático ou mesmo logarítmico — é crucial porém que o potencial cresça sem limite superior, indicando que não é possível atingir um estado livre, isto é, um estado de força nula entre as partículas, o que caracteriza o confinamento.

Adotando a mesma notação de excitações positrônicas, podemos classificar os diversos charmônios através de seus números quânticos $n^{2S+1}L_J$, em que n é o número quântico principal, L é o número quântico azimutal, S é o número quântico de spin total, e J é o número quântico de momento angular total². L é escrito em notação espectroscópica: $L \in \{S, P, D, F, \dots\}$. Os estados n^1S_0 são denominados η_c , os estados n^3S_1 são denominados ψ , os estados n^1P_1 são denominados h_c e os estados n^3P_J são denominados χ_{cJ} — o sub-índice J é necessário pois não é determinado univocamente de L e S . Especialmente com respeito às partículas com $n > 1$ ou $L > 2$, podem ser também escritos $n - 1$ apóstrofes, o valor numérico da massa (em MeV) entre parênteses ou os números quânticos nL entre parênteses. Por exemplo, o estado 2^3S_1 é denominado ψ' , $\psi(3686)$ ou $\psi(2S)$. O estado 1^3S_1 é denominado $\psi(3097)$, $\psi(1S)$ ou por razões históricas J/ψ . No caso do bottomônio a notação usada é análoga, meramente fazendo as substituições $c \rightarrow b$ e $\psi \rightarrow \Upsilon$. Segue na fig. 1.5 o espectro de partículas detectadas e identificadas com sucesso como excitações de quarkonia.

²Como usual em mecânica quântica, $L \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$, $J \in \{|L - S|, |L - S| + 1, \dots, L + S\}$, e $S \in \{0, 1\}$, pois é obtido da soma dos spins s intrínsecos aos quarks ($s = 1/2$).

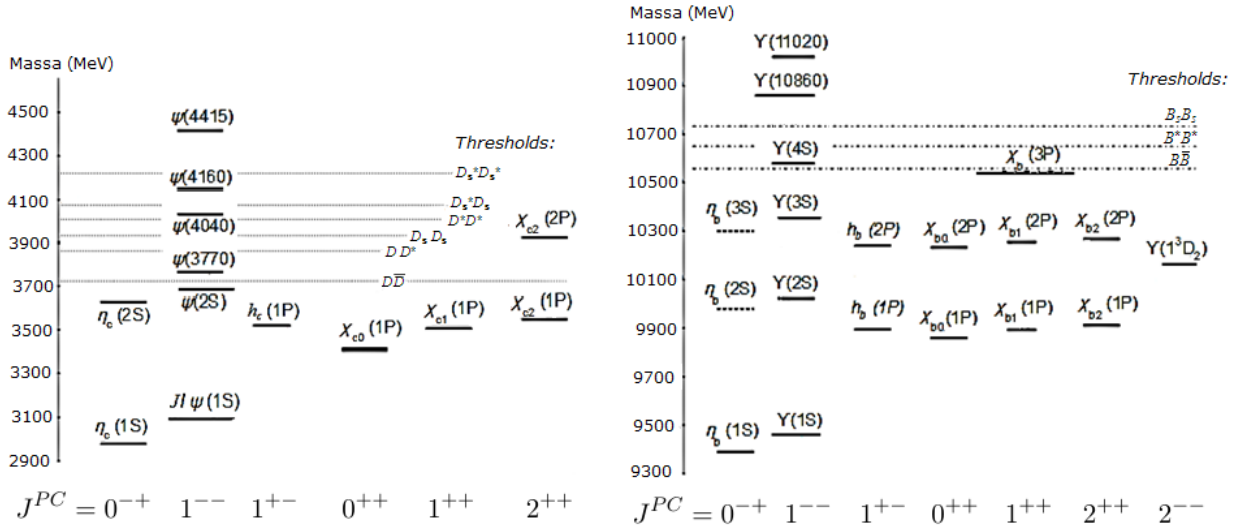


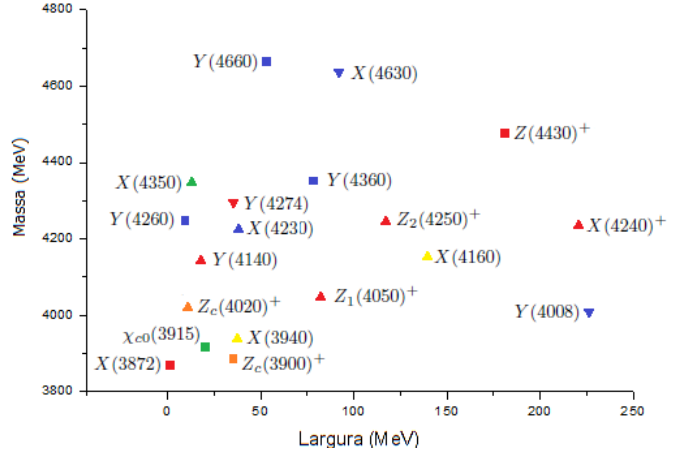
Figura 1.5: À esquerda temos o espectro experimental de charmônios e à direita o espectro experimental de bottomônios. Os chamados *thresholds* são limiares de produção dos mésons D ou B diversos — se o quarkonium é mais massivo que algum desses limiares, o canal de decaimento nesses mésons é possibilitado e o quarkonium possui uma vida média muito curta. A linha tracejada indica mésons previstos mas não detectados experimentalmente. Os números quânticos P e C referem-se às simetrias discretas de paridade e de conjugação de carga: $P = (-1)^{L+1}$ e $C = (-1)^{L+S}$. Figura fortemente baseada em gráficos fornecidos por [eaPDG14].

A espectroscopia de charmônios mostrou-se bastante desafiadora a partir de 2003, quando passaram a ser observados diversos mésons que, embora tenham os números quânticos, canais típicos de produção e decaimento, e massas condizentes com charmônios em geral, apresentam dificuldades para serem identificados como alguma excitação específica, e por isso são denominados X , Y , Z . Segue na fig. 1.6 uma exposição esquemática desses mésons. Em vermelho, temos listados mésons Y produzidos em decaimentos de mésons B ($B \rightarrow Y + K$), e em azul, mésons de número quântico $J^{PC} = 1^{++}$ produzidos em reações de aniquilação elétron-pósitron ($e^+e^- \rightarrow Y + \gamma$). Ambos tipos de mésons decaem tipicamente em $c\bar{c} + \pi^0/\omega/\phi$ ³. Em amarelo temos dois mésons produzidos em reações do tipo $e^+e^- \rightarrow Y + J/\psi$ e que decaem em um par de mésons D . Em verde, temos mésons produzidos em reações de fusão de fótons ($\gamma\gamma \rightarrow Y$), mésons que chegaram a ser identificados como charmônios χ'_J , mas que tiveram dificuldades em manter-se nessa posição. Eles decaem em $J/\Psi + \omega/\phi$ ou em $\gamma\gamma$. Os mésons Z^\pm em laranja são produzidos através de outros mésons X, Y, Z , em especial em processos $Y(4260) \rightarrow Z^\pm + \pi^\mp$, e decaem em um par de D mésons ou em $c\bar{c} + \pi^\pm$. Esses mésons parecem possuir versões análogas no espectro do bottomônio: $Z_b(10610)^+$ e $Z_b(10650)^+$, que são produzidos em decaimentos do $\Upsilon(10860) \rightarrow Z^\pm + \pi^\mp$ e decaem em um par de B mésons ou em $b\bar{b} + \pi^\pm$. Versões neutras $Z_b(10650)^0$ e $Z_c(3900)^0$ também foram identificadas [Liu14, eaPDG14].

Dada a dificuldade em explicar esses hádrons através de métodos tradicionais, houve muitas tentativas de descrevê-los como hádrons exóticos, isto é, hádrons que seguem modelos não-tradicionais de quarks, modelos que desviam daquela combinação bastante específica de quarks proposta por Gell-Mann e que fundamenta os multipletos que expomos na seção anterior. De fato, quais são as combinações de quarks (e glúons) fisicamente viáveis é algo que deve estar determinado, em última instância, pela QCD, mas essa determinação ainda é pouco entendida — não é demonstrado diretamente a partir da QCD que o modelo tradicional de quarks é o único viável fisicamente, e sequer que apenas hádrons brancos o são. Pelo contrário, a QCD parece sugerir, por exemplo, a existência de glueballs, estados constituídos apenas de glúons, o que é plausível devido à carga de cor dos

³Exceções são o $Y(4630)$, que decai em um par bárion-antibárion $\Lambda_c\bar{\Lambda}_c$, e os mésons $Y(4260)$ e (conforme veremos) o $X(3872)$, que possuem uma gama maior de decaimentos observados. O méson $Y(4230)$ inclusive decai em outros mésons exóticos, como o $Z(3900)^\pm$ e o $X(3872)$. Além disso, pontuamos por completude que no processo da criação do $X(4230)$ não é liberado um fóton.

Figura 1.6: Largura e massa de diversos mésons *charmonium-like* que apresentam dificuldades ao modelo tradicional de quarks. As cores dizem respeito aos seus canais de produção e decaimento, e estão explicadas no corpo do texto. Mésons marcados com quadrados são mésons considerados confirmados pelo *Particle Data Group* (PDG), e os mésons marcados com triângulos são partículas não confirmadas. Trata-se de uma representação meramente esquemática, e por isso não nos preocupamos em retratar as barras de erro, que podem ser bastante grandes, especialmente nas larguras. Figura construída com dados de [Liu14, eaPDG14].



glúons (o que é uma peculiaridade da QCD em relação à QED, na qual os fótons são eletricamente neutros). O eventual espectro de glueballs, assim como o espectro de charmônios e tantos outros, foi bastante explorado teoricamente na literatura. Outros hádrons exóticos de cor branca plausíveis são os híbridos de quarks e excitações gluônicas ($q\bar{q}g$) e também os tetraquarks $qq\bar{q}\bar{q}$, sejam diquarks-antidiquarks ($[\bar{q}\bar{q}][qq]$), moléculas de mésons ($[\bar{q}q][\bar{q}q]$), etc. Se hádrons exóticos foram de fato detectados, é matéria de bastante discussão, mas até o momento não foi gerado um consenso em torno de algum hádron específico. Na próxima seção abordaremos com mais detalhes a discussão sobre o $X(3872)$, méson bastante emblemático e que foi de especial interesse em nosso trabalho.

1.2 $X(3872)$

Em 2003 a colaboração Belle reportou a descoberta do $X(3872)$, partícula detectada em decaimentos $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^- J/\psi$, tratando-se de uma ressonância estreita verificada na distribuição de massa invariante do setor $\pi^+ \pi^- J/\psi$ [C+03]. Mais tarde a mesma ressonância foi confirmada pelas colaborações CDF e D0 em setor análogo de colisões próton-antipróton $p\bar{p} \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$ [A+04b, A+04a]. O *Particle Data Group* (PDG) fornece uma meta-análise de diversos estudos e informações experimentais a respeito do X [eaPDG14]. Hoje o valor mais acurado de sua massa é considerado

$$M_X = 3871.69 \pm 0.17 \text{ MeV}. \quad (1.1)$$

A largura total de decaimento do X é bastante estreita:

$$\Gamma < 1.2 \text{ MeV}. \quad (1.2)$$

Entre os decaimentos mais proeminentes do X encontram-se $D^0 \bar{D}^0 \pi^0$ ($> 32\%$), $D^0 \bar{D}^0$ ($> 24\%$), $\gamma \psi'$ ($> 3\%$), $\pi^+ \pi^- J/\psi$ ($> 2.6\%$), $\omega J/\psi$ ($> 1.9\%$), $\gamma J/\psi$ ($> 0.6\%$). Decaimentos em $e^+ e^-$, $\rho^0 J/\psi$, $D^0 \bar{D}^0$, $D^+ D^-$, $\gamma \gamma$, $\gamma \chi_{c1}$, $\gamma \chi_{c2}$, $\eta J/\psi$ e $p\bar{p}$ também são observados.

Recentemente a colaboração LHCb estabeleceu de forma mais definitiva os números quânticos do X : $J^{PC} = 1^{++}$ [ABA+13]. Isso dificultou ainda mais as tentativas de interpretá-lo como um charmônio: segundo modelos, χ'_{c0} seria o charmônio mais próximo do X em massa, mas χ'_{c1} é única excitação condizente com seus números quânticos 1^{++} , e é previsto que o χ'_{c1} seja cerca de 50 à 100 MeV mais massivo do que o X . A largura desse charmônio também não ajusta-se naturalmente à largura estreita do X . [BG04, BGS05, Wan12]. Algumas modelagens de charmônio, com escolhas bastante convenientes de parâmetros, podem ser ajustadas à mão para coincidir com a massa e largura do X [BG04] — mesmo se explicássemos ou relevássemos a pouca naturalidade desses parâmetros, ainda assim diversas dificuldades em relação ao charmônio restariam [BG04, ELQ06]:

(1) o méson identificado pelo PDG como χ'_{c2} tem massa 3927 MeV, se essa identificação é correta os mésons χ'_2 e $X = \chi'_{c1}$ seriam excessivamente próximos em massa; (2) $X = \chi'_{c1}$ teria uma largura de decaimento $X \rightarrow D\bar{D}^*$ muito grande, o que é difícil de conciliar com a largura estreita do X ; (3) os decaimentos $X \rightarrow J/\psi\gamma$ e $X \rightarrow J/\Psi\pi^+\pi^-$ por sua vez seriam bastante suprimidos em relação ao que é observado experimentalmente. Dessa forma X como um puro charmônio parece implausível.

Modelagens não-tradicionais do X abundam na literatura: X foi proposto como um híbrido $c\bar{c}g$ [Li05], uma glueball [set], ou mesmo um tetraquark, como o antiquark-antiquark de Maiani [MPPR05]. Esses modelos também encontram dificuldades: cálculos na rede [LM02] indicam para o híbrido uma massa esperada superior a 4000 MeV; as glueballs não são condizentes com os decaimentos $X \rightarrow \omega J/\psi$ e $X \rightarrow \gamma J/\psi$ [Swa06]; o modelo de Maiani e correlacionados preveem um amplo espectro de mésons exóticos, inclusive parceiros carregados do X , que ainda não foram identificados [MPPR05, A+05b, Swa06].

A hipótese do X como um méson molecular é bastante apelativa por conta da proximidade de sua massa e a soma das massas dos mésons D^0 e D^{0*} [Vol08]:

$$M_X - M_{D^0} - M_{D^{0*}} = -0.6 \pm 0.6 \text{ MeV}, \quad (1.3)$$

De forma que é bastante plausível encarar o X como uma molécula de mésons D^0 e \bar{D}^{0*} fracamente ligada, análoga ao deuteron. Essa possibilidade foi bastante explorada na literatura, e de fato foi defendida mesmo antes do X ter sido detectado, em especial por [Tör94]. Swanson analisou a possível ligação entre os mésons D e \bar{D}^* e constatou que a troca de píons não seria suficiente para estabelecer a ligação [Swa04b]. Através de um modelo não-relativístico de quarks, ele reproduziu a eventual ligação por meio de uma interação de curto alcance dada via troca de quarks e glúons. Nesse sentido, Swanson modelou o X como sendo uma mistura de componentes moleculares $D^0\bar{D}^{0*}$ e $D^+\bar{D}^{*-}$ e de componentes $\rho J/\psi$ e $\omega J\psi$ — todas elas possuem números quânticos de charmônio e massas próximas à massa do X , de forma que essa mistura é plausível. Levando em conta o pequeno valor da eventual energia ligação do X , ele observou que o peso da componente $D^0\bar{D}^{0*}$ prevaleceria sobre as demais. Wong, utilizando uma interação de curto alcance análoga (regida por uma hamiltoniana de quatro corpos com interações efetivas pareadas, similarmente obtida por um modelo não-relativístico de quarks), também previu a ligação molecular [Won04].

Esses trabalhos foram criticados por Suzuki, que levantou objeções teóricas à inclusão da interação de curto alcance, e favoreceu o modelo do X como um charmônio [Suz05]. Tais objeções sofreram réplica de Swanson [Swa06]. O modelo molecular também foi criticado por Liu *et al.* [LLDZ08]: tendo em mente que, em relação ao deuteron, a ligação molecular pode ser entendida incluindo-se, além da troca de píons, uma interação modelada através da troca de mésons σ , eles usaram o mesmo método para estudar a interação dos mésons D^0 e \bar{D}^{0*} e concluíram que a formação de uma molécula é bastante improvável. Mais tarde, porém, outro estudo [LLLZ09] mostrou que a hipótese molecular torna-se mais plausível levando-se em conta a influência de mésons pesados mediadores, como ρ e ω . Lee e colaboradores, atentando-se à mistura das ondas S e D , à presença dos mésons D carregados e à quebra de isospin por parte dos mésons D , defenderam que com esses elementos um estado ligado de mésons D surge naturalmente e o X poderia facilmente ser acomodado nesse cenário [LFGL09]. Li e Zhu, considerando esses mesmos elementos e usando potenciais *one-pion-exchange* e *one-boson-exchange*, chegaram à mesma conclusão [LZ12]. Eles pontuaram que os efeitos dos mésons pesados cancelam-se em sua maioria, de forma que a troca de píons domina a interação (ainda que o efeito residual dos mésons pesados mediadores possa estabelecer a existência ou inexistência de ligação). Também observaram que, ainda que a componente de mésons D neutros predomine sobre a componente de mésons D carregados, a presença desta última favorece a ocorrência de ligação, sendo por isso um fator crucial na modelagem. Lee *et al.* apontam que também é pequena a contribuição da mistura de ondas S e D .

O modelo molecular de Swanson foi bem-sucedido em prever que $\Gamma(X \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 J/\psi)$ é da ordem de $\Gamma(X \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi)$ [A+05a]. Ainda que parceiros carregados do X não tenham sido

observados experimentalmente [A⁺05b] (o que poderia indicar que ele fosse um isoescalar), essa relação sinaliza uma quebra de isospin no decaimento do X , o que é um forte indicador de seu caráter molecular. De fato, a C-paridade positiva do X implica que o par de píons no decaimento $X \rightarrow \pi^+\pi^-J/\Psi$ tenha conjuntamente uma C-paridade negativa, de forma que esse par deva ter isospin total $I = 1$. Já ao trio de píons em $X \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0J/\Psi$ só é possibilitado que assuma isospin total $I = 0$ ou $I = 2$. Dessa forma, o isospin do X não só não condiz com o charmônio, como também não é um número quântico bem definido. Essa quebra acomoda-se no modelo molecular especialmente porque uma molécula de mésons D carregados seria cerca de 8 MeV mais pesada que a molécula de mésons D neutros. [Tör04, Vol07, Vol08]. Swanson associou o decaimento de três píons à etapa intermediária $X \rightarrow \omega J/\Psi$, e o decaimento de dois píons à $X \rightarrow \rho J/\Psi$, o que é confirmado experimentalmente através da análise da distribuição de massa invariante dos píons.

Mais tarde, porém, a colaboração Belle estabeleceu a razão [A⁺08]

$$R_B = \frac{\Gamma(B^0 \rightarrow XK^0)}{\Gamma(B^+ \rightarrow XK^+)} = 0.82 \pm 0.22 \pm 0.05, \quad (1.4)$$

o que foi entendido como uma dificuldade para o modelo molecular [LLDZ08]: Suzuki observa que o modelo molecular prevê que $R_B \ll 1$ [Suz05], o que também foi apontando por Braaten e Kusunoki [BK05a], que previu para o modelo molecular $R_b < 0.08$. Os decaimentos radioativos também mostraram-se problemáticos: em 2009 a colaboração BaBar estabeleceu que a razão

$$R = \frac{\Gamma(X \rightarrow \gamma\psi')}{\Gamma(X \rightarrow \gamma J\psi)} \quad (1.5)$$

tem valor experimental $R = 3.4 \pm 1.4$ [A⁺09], o que contraria o modelo de Swanson [Swa04a]. Seu modelo previa que as componentes moleculares do X decairiam no fóton via aniquilação de quarks leves, e as componentes $\rho J/\psi$ e $\omega J\psi$ decairiam no fóton via *vector-meson dominance* — apenas o primeiro mecanismo permite o decaimento $X \rightarrow \psi'\gamma$, de forma que esse decaimento seria fortemente suprimido e teríamos $R \approx 10^{-3}$. Recentemente a colaboração LHCb reportou [A⁺14]

$$R = 2.45 \pm 0.64 \pm 0.29, \quad (1.6)$$

em que a primeira incerteza é estatística e a segunda é sistemática. No próprio artigo eles concluem que o resultado não suporta uma natureza molecular do X .

Porém, essa conclusão baseia-se sobretudo no modelo de Swanson. Dong *et al.* [DFGL08, DFG⁺09], utilizando lagrangianas fenomenológicas e assumindo que X fosse uma molécula $D^0\bar{D}^{*0}$, calcularam a largura $\Gamma(X \rightarrow J/\psi)$ e obtiveram um limite superior de 118.9 keV, o que é compatível com valores obtidos com alguns modelos de quarks (como o modelo de Swanson) e com outras previsões moleculares (como [AMO12]). Seus resultados não são tão sensíveis a uma variação da energia de ligação, mas dependem fortemente de um fator de forma Λ_M relacionado ao tamanho da molécula hadrônica. Mais tarde [DFGL10] eles refinaram o cálculo e abordaram (entre outros) os decaimentos radiativos $X \rightarrow J/\Psi\gamma$ e $X \rightarrow \psi'\gamma$. Como no trabalho de Swanson, foram consideradas componentes $D\bar{D}^*$, $\rho J/\psi$, $\omega J\psi$, e além disso foi também considerada uma componente de charmônio. Eles constataram que o valor de R tal qual obtido por BaBar não permite estabelecer o peso relativo das componentes moleculares ou de charmônio, pois há um delicado balanceamento entre elas: dependendo do peso e até do modelo de charmônio adotado, o valor de R fornecido por BaBar pode ser reproduzido tanto por um X predominantemente molecular quanto por um X que é predominantemente charmônio. Nesse sentido, cerca de 5% de charmônio já foi suficiente para obter o valor experimental de R . Voloshin [Vol08] aponta que esse tipo de contrabalanço permitiria conciliar o entendimento das transições pionicas do X , que seriam dominadas por sua física de longas distâncias (a componente molecular), e a produção do X que, por sua vez, seria dominada por sua física de curtas distâncias e justificaria a razão (1.4).

Guo *et al.* [GHK⁺15] investigaram a estrutura de longo alcance do X em decaimentos radiativos $X \rightarrow \gamma J/\psi$ e $X \rightarrow \gamma \psi'$. Discordando de [Swa04a], eles concluem que esses decaimentos não permitem tirar fortes conclusões a respeito da natureza do X . Porém, a análise que eles empregaram foca-se apenas nas contribuições dos termos de *loop* para a amplitude radiativa, isto é, contribuições da estrutura de longo alcance do X . Não foi explicitamente considerada a contribuição da estrutura de curto alcance, que seria parametrizada em termos de contato na lagrangiana efetiva. O propósito principal do nosso trabalho foi executar uma análise apropriada do grupo de renormalização tanto dos loops quanto dos termos de contato. A necessidade de um contra termo representando a física de curtas distâncias já foi enfatizada em [MS11].

Capítulo 2

Espalhamento quântico

2.1 Equação de Schrödinger de duas partículas

A dinâmica que ocorre no espalhamento de duas partículas é regida em mecânica quântica pela equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\nabla_{\vec{x}_1}^2}{m_1} + \frac{\nabla_{\vec{x}_2}^2}{m_2} \right) \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) + V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t). \quad (2.1)$$

O sistema de duas partículas é descrito pela função de onda $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$, e sua dinâmica é determinada pelo potencial $V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$. m_1 e m_2 definem as massas das partículas, \vec{x}_1 e \vec{x}_2 os vetores de posição associados a elas, e $\nabla_{\vec{y}}^2$ é o operador diferencial laplaciano tomado em função das componentes de um dado \vec{y} . Supomos uma situação de homogeneidade temporal, isso é, a interação não depende explicitamente do tempo: $V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = V(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

Estabelecemos as grandezas

$$M = m_1 + m_2, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{X} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{M}, \quad \vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \quad (2.2)$$

em que M é a massa total do sistema, m é a chamada massa reduzida e \vec{X} é vetor de posição associado ao centro de massa. Realizando uma mudança de coordenadas $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \rightarrow (\vec{X}, \vec{x})$ em (2.1), obtemos [Gri94]

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\vec{X}}^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\vec{x}}^2 \psi + V(\vec{x}) \psi = E \psi. \quad (2.3)$$

Assumimos aqui uma situação de homogeneidade espacial, isto é, $V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = V(\vec{x})$, a interação não depende da posição do centro de massa \vec{X} . Isso significa que o sistema como um todo pode ser transladado sem que haja alteração de suas propriedades físicas. Fazendo a decomposição $\psi = B(\vec{X})A(\vec{x})$, obtemos as equações desacopladas [Gri94]

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\vec{X}}^2 B = E_X B, \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\vec{x}}^2 A + V(\vec{x}) A = E_x A, \quad (2.4)$$

em que $E_x + E_X = E$. A primeira equação é análoga à equação de uma partícula livre de massa M e a segunda equação é análoga à equação de uma partícula de massa m sob a influência de um potencial V . Fica evidente que o essencial da física que ocorre na interação de duas partículas pode ser abordado através do problema de uma única partícula de massa m localizada em uma região

do espaço sob a influência de um potencial externo. Sob essa ótica abordaremos o problema do espalhamento nas próximas seções.

2.2 A equação de onda no espaço de configuração

A equação mais importante na teoria do espalhamento dentro do contexto da mecânica quântica não-relativística é a equação de Lippmann-Schwinger [Sak94]:

$$|\psi_{\vec{p}}^{\pm}\rangle = |\phi_{\vec{p}}\rangle + \frac{1}{E_{\pm} - H_0} V |\psi_{\vec{p}}^{\pm}\rangle. \quad (2.5)$$

$|\psi_{\vec{p}}^{\pm}\rangle$ representa o estado de uma partícula que sofre uma interação descrita pelo operador hamiltoniano $H = V + H_0$, em que V é o operador referente ao potencial da interação e $H_0 = p^2/2m$ é o operador referente à energia cinética. $|\phi_{\vec{p}}\rangle$ representa o estado de uma partícula livre de energia E e momento $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ (de forma que k é tal que $E = \hbar^2 k^2/2m$). Identificamos assim $|\phi_{\vec{p}}\rangle = |\vec{p}\rangle$, em que $|\vec{p}\rangle$ é o autoestado do operador momento linear.

A equação de Lippmann-Schwinger é construída de tal forma que $|\psi_{\vec{p}}^{\pm}\rangle$ obedeça à equação de Schrödinger $H |\psi_{\vec{p}}^{\pm}\rangle = E |\psi_{\vec{p}}^{\pm}\rangle$ e esteja sujeita à condição de contorno $\lim_{V \rightarrow 0} |\psi_{\vec{p}}^{\pm}\rangle = |\phi_{\vec{p}}\rangle$, pois, quando o potencial tender a zero, desejamos obter o estado da partícula como o estado de uma partícula livre de momento \vec{p} . Temos ainda que $E_{\pm} = E \pm i\epsilon$, em que ϵ é um número real bastante pequeno (o limite $\epsilon \rightarrow 0+$ é subentendido), ali colocado para evitar-se uma singularidade no operador.

Multiplicando a equação pelo estado $\langle \vec{x} |$ e estabelecendo a notação $\langle \vec{x} | a_{\vec{p}} \rangle \equiv a_{\vec{p}}(\vec{x})$, obtemos [Sak94]

$$\psi_{\vec{p}}^{\pm}(\vec{x}) = \phi_{\vec{p}}(\vec{x}) + \int d^3\vec{y} G(\vec{x}, \vec{y}) V(\vec{y}) \psi_{\vec{p}}^{\pm}(\vec{y}), \quad (2.6)$$

em que consideramos um potencial local $\langle \vec{x} | V | \vec{y} \rangle = V(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ e ainda

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x} | \frac{1}{E_{\pm} - H_0} | \vec{y} \rangle = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm i \frac{p}{\hbar} |\vec{x} - \vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (2.7)$$

Experimentalmente ocorre que a região em que o potencial não é desprezível é uma região muito pequena se comparada à região onde ocorrem medições experimentais diretas. Esse fato sugere que consideremos $|\vec{x}| \gg |\vec{y}|$. Pode-se mostrar [dTP03] que esse é um procedimento legítimo para os denominados potenciais de curto alcance, potenciais tais que $\lim_{x \rightarrow \infty} xV(\vec{x}) \rightarrow 0$. Nesse caso, analogamente ao que usualmente é feito em ótica ondulatória, é válido utilizar as aproximações $|\vec{x} - \vec{y}|^{-1} \simeq |\vec{x}|^{-1} = x^{-1}$ e $\pm i p |\vec{x} - \vec{y}| \simeq \pm i(p x - \vec{p}' \cdot \vec{y})$, em que definimos $\vec{p}' = p\vec{x}/x = p\hat{x}$. Com isso, mostra-se que [Sak94]

$$\psi_{\vec{p}}^{\pm}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left(e^{i \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{\hbar}} + \frac{e^{\pm i \frac{p}{\hbar} x}}{x} f(\vec{p}', \vec{p}) \right) \equiv \psi_{\text{inc}} + \psi_{\text{esp}}, \quad (2.8)$$

com $f(\vec{p}', \vec{p}) = -(4m\pi^2\hbar) \langle \pm \vec{p}' | V | \psi_{\vec{p}}^{\pm} \rangle$.

Percebemos assim que a onda de probabilidade que rege a partícula no espalhamento é a soma de uma onda plana ψ_{inc} , que interpretamos como a onda incidente, e uma onda esférica ψ_{esp} de amplitude $f(\vec{p}', \vec{p})$, que interpretamos como a onda espalhada. Essa onda é emergente, no caso de $|\psi_{\vec{p}}^{+}\rangle$, ou imergente, no caso de $|\psi_{\vec{p}}^{-}\rangle$. Ora, a ocorrência de uma onda imergente, no contexto do espalhamento, dependeria de condições de contorno bastante artificiais que praticamente não

ocorrem em situações físicas. Dessa forma podemos lidar apenas com $|\psi_{\vec{p}}^{\pm}\rangle$ e simplificar a notação estabelecendo $|\psi_{\vec{p}}\rangle = |\psi_{\vec{p}}^{\pm}\rangle$.

2.3 A equação de onda no espaço de momento e o operador de transição

Para obter a equação de onda no espaço de momento, voltamos à equação de Lippmann-Schwinger e multiplicamos a equação à esquerda por $\langle \vec{q} |$:

$$\langle \vec{q} | \psi_{\vec{p}} \rangle = \langle \vec{q} | \phi_{\vec{p}} \rangle + \int d^3 \vec{s} \frac{\langle \vec{q} | V | \vec{s} \rangle \langle \vec{s} | \psi_{\vec{p}} \rangle}{E_+ - (\vec{q}^2/2m)}, \quad (2.9)$$

$$\psi(\vec{q}, \vec{p}) = \phi(\vec{q}, \vec{p}) + \int d^3 \vec{s} \frac{V(\vec{q}, \vec{s}) \psi(\vec{s}, \vec{p})}{E_+ - (\vec{q}^2/2m)}. \quad (2.10)$$

Na última igualdade estabelecemos uma nova notação para os diversos produtos envolvidos: $\langle \vec{q} | a_{\vec{p}} \rangle \equiv a(\vec{q}, \vec{p})$ e, para um dado operador K , $\langle \vec{q} | K | \vec{p} \rangle \equiv K(\vec{q}, \vec{p})$. Repare que, porém, $\phi(\vec{q}, \vec{p}) = \langle \vec{q} | \phi_{\vec{p}} \rangle = \langle \vec{q} | \vec{p} \rangle = \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$, o que dificulta o estudo numérico dessa equação, devido à singularidade da função delta de Dirac.

É interessante, em teoria do espalhamento, estabelecer um operador T tal que $T | \phi_{\vec{p}} \rangle = V | \psi_{\vec{p}} \rangle$. Esse operador, de certa forma, transforma a partícula livre na partícula espalhada (a menos de um fator V). Obtemos, multiplicando dessa vez a equação de Lippmann-Schwinger pelo operador V ,

$$V | \psi_{\vec{p}} \rangle = T | \phi_{\vec{p}} \rangle = V | \phi_{\vec{p}} \rangle + V \frac{1}{E_+ - H_0} T | \phi_{\vec{p}} \rangle, \quad (2.11)$$

$$T(\vec{q}, \vec{p}) = V(\vec{q}, \vec{p}) + \int d^3 \vec{s} \frac{V(\vec{q}, \vec{s}) T(\vec{s}, \vec{p})}{E_+ - s^2/2m}. \quad (2.12)$$

Vemos assim que vale

$$T = V + V \frac{1}{E_+ - H_0} T \Rightarrow T = \sum_{n=0}^{\infty} \left(V \frac{1}{E_+ - H_0} \right)^n V = \sum_{n=0}^{\infty} T_n, \quad (2.13)$$

e ainda $T(\vec{q}, \vec{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\vec{q}, \vec{p})$, com

$$T_n(\vec{q}, \vec{p}) = \int d^3 \vec{p}_1 \int d^3 \vec{p}_2 \dots \int d^3 \vec{p}_n V(\vec{q}, \vec{p}_1) \frac{1}{E_+ - \vec{p}_1^2/2m} V(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \frac{1}{E_+ - \vec{p}_2^2/2m} V(\vec{p}_2, \vec{p}_3) \dots \frac{1}{E_+ - \vec{p}_n^2/2m} V(\vec{p}_n, \vec{p}). \quad (2.14)$$

Cada termo $T_n(\vec{q}, \vec{p})$ pode ser interpretado como sendo referente a uma interação com $n + 1$ etapas na qual a partícula, inicialmente com momento \vec{q} , passa a ter momentos $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$, para ao final deixar o campo de interação com momento \vec{p} . Assim os termos de forma $\frac{1}{E_+ - \vec{p}_i^2/2m}$ representam propagadores, e dizem respeito à partícula propagando-se livremente com momento \vec{p}_i entre uma interação e outra. Os termos de forma $V(\vec{p}_i, \vec{p}_j)$ dizem respeito à mudança de momento por parte da partícula devido à interação. Fica estabelecida também a integração sobre todas as trajetórias possíveis, o que é um aspecto essencialmente quântico da mecânica que rege o problema.

No espaço de configuração, há uma interpretação bastante análoga:

$$T_n(\vec{q}, \vec{p}) = (2\pi\hbar)^{-3} \int d^3\vec{x}_1 \int d^3\vec{x}_2 \dots \int d^3\vec{x}_{n+1} e^{-i\frac{\vec{q}\cdot\vec{x}_1}{\hbar}} V(x_1)G(\vec{x}_1, \vec{x}_2)V(x_2)G(\vec{x}_2, \vec{x}_3)\dots G(\vec{x}_n, \vec{x}_{n+1})V(x_{n+1})e^{i\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}_{n+1}}{\hbar}}. \quad (2.15)$$

Vemos que os termos de forma $G(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$ propagam a partícula do ponto x_i ao ponto x_j , propagação que termina quando o potencial V atua em um ponto espacial específico (o que caracteriza a chamada localidade da interação). Esse processo eventualmente se repete até que a partícula deixe o campo de interação como uma partícula livre de momento \vec{p} .

2.4 Simetrias do espalhamento

Expandindo o autoestado do operador momento linear em uma base que é simultaneamente diagonal segundo os operadores H , \vec{L}^2 , e L_z (em que \vec{L} é o operador momento angular), obtemos [Sak94]

$$|\vec{p}\rangle = \sum_{l,m} \int dE |E, l, m\rangle \langle E, l, m|\vec{p}\rangle = \sum_{l,m} |E, l, m\rangle \sqrt{1/mp} Y_l^{m*}(\hat{p}). \quad (2.16)$$

Após a última igualdade, E tem o seu valor fixado: $E = p^2/2m$. $Y_l^m(\hat{x})$ é um harmônico esférico de grau l , ordem m e argumento \hat{x} , argumento que pode ser definido pelos ângulos esféricos (ϕ, θ) . Assim sendo, podemos escrever um operador K qualquer sob a forma

$$K(\vec{p}', \vec{p}) = \sum_{l,m,l',m'} (4\pi)k_{l',m',l,m}(p', p) Y_{l'}^{m'}(\hat{p}') Y_l^{m*}(\hat{p}). \quad (2.17)$$

De fato, essa expansão também decorre meramente do fato de que os harmônicos esféricos constituem uma base completa do espaço de funções de domínio (ϕ, θ) , o que nos permite escrever, no formato acima, quaisquer funções dos momentos \vec{p}' e \vec{p} (como, por exemplo, $\psi(\vec{p}', \vec{p})$).

O operador V de um potencial de interação em que ocorre a conservação de momento angular, ou equivalentemente, de um potencial que apresenta simetria esférica, comuta com os operadores \vec{L}^2 e \vec{L} . O mesmo pode-se dizer do operador T , o que é constatado ao analisar-se a forma recursiva (2.13) desse operador. Para operadores K que, como V e T , respeitam essa propriedade, decorre do teorema de Wigner-Eckart que $\langle E', l', m'|K|E, l, m\rangle = K_l(E', E)\delta_{l',l}\delta_{m',m}$ [Sak94]. Logo, podemos escrever

$$K(\vec{p}', \vec{p}) = \sum_{l,m} (4\pi)k_l(p', p) Y_l^m(\hat{p}') Y_l^{m*}(\hat{p}) = \sum_l (2l+1)k_l(p', p) P_l(\cos(\hat{p}' \cdot \hat{p})), \quad (2.18)$$

em que $P_l(x)$ é o polinômio de Legendre de grau l . Pode-se inverter a relação acima, escrevendo $k_l(p', p)$ em função de $K(\vec{p}', \vec{p})$. Aplicando essa inversão em (2.10) e (2.12), demonstra-se que

$$t_l(p', p) = v_l(p', p) + \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{2\pi^2} \frac{v_l(p', q)t_l(q, p)}{E_+ - (q^2/2m)}, \quad (2.19)$$

$$\psi_l(p', p) = \phi_l(p', p) + \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{2\pi^2} \frac{v_l(p', q)\psi_l(q, p)}{E_+ - (p'^2/2m)}. \quad (2.20)$$

Essas equações são especialmente úteis para análises numéricas.

2.5 A matriz S e os ângulos de defasagem

O operador S é um operador que relaciona o estado final ao estado inicial de um processo de espalhamento:

$$S_c \langle \vec{p}' | e^{-iH(t-t_0)} | \vec{p} \rangle_{S_c} = {}_I \langle \vec{p}'(t) | e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0} | \vec{p}(t_0) \rangle_I \equiv {}_I \langle \vec{p}'(t) | S | \vec{p}(t_0) \rangle_I, \quad (2.21)$$

Os limites $t \rightarrow \infty$ e $t_0 \rightarrow -\infty$ encontram-se implícitos. O índice S_c refere-se à representação de Schrödinger e o índice I à representação de interação. O operador S é tal que $\frac{d}{dt} S(t, t_0) = -iV(t)S(t, t_0)$, em que $V(t)$ evolui segundo $V(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}$, como usual de um operador dado na representação de interação [Sak94]. Assim [Bar16]

$$S = \mathcal{T} \left[\exp \left(-i \int_{t_0}^t d\tau V(\tau) \right) \right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t \mathcal{T} [V(t_1)V(t_2)\dots V(t_n)] dt_n dt_{n-1} \dots dt_1, \quad (2.22)$$

em que \mathcal{T} é o operador de ordenação temporal. Manipulando a integral dada acima, e fazendo especialmente

$$\int_0^{\infty} d\tau = e^{i(E_0-H_0)\tau} = \int_0^{\infty} d\tau e^{i(E_0-H_0)\tau} e^{-\epsilon\tau} = \frac{i}{E_0 - H_0 + i\epsilon}, \quad (2.23)$$

prova-se [Sop06] que

$$S(\vec{p}, \vec{q}) = \langle \vec{p} | \vec{q} \rangle - i(2\pi)\delta(E_{\vec{p}} - E_{\vec{q}})T(\vec{p}, \vec{q}), \quad (2.24)$$

com $T(\vec{p}, \vec{q})$ definido via (2.14). $\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle$ é referente à possibilidade de não haver interação, e a parcela seguinte refere-se à interação. Fica evidente a conservação de energia no processo.

Esse resultado também se verifica pelo *ansatz* $S = \langle \psi_{\vec{q}}^- | \psi_{\vec{p}}^+ \rangle$, verificação que pode ser feita em poucas etapas [GY04]. Primeiramente, obtemos uma fórmula análoga à equação de Lippmann-Schwinger:

$$0 = (E - H_0) | \vec{p} \rangle = (E - H) | \vec{p} \rangle + V | \vec{p} \rangle = (E - H) | \vec{p} \rangle - (E - H) | \psi_{\vec{p}}^{\pm} \rangle + V | \vec{p} \rangle, \quad (2.25)$$

$$| \psi_{\vec{p}}^{\pm} \rangle = \left(1 + \frac{1}{E_{\pm} - H} V \right) | \vec{p} \rangle. \quad (2.26)$$

Desse resultado, também obtemos

$$T = V + V \frac{1}{E_+ - H} V. \quad (2.27)$$

Em seguida, verificamos que os estados espalhados estão em certo sentido normalizados:

$$\langle \psi_{\vec{q}}^{\pm} | \psi_{\vec{p}}^{\pm} \rangle = \langle \psi_{\vec{q}}^{\pm} | \left(1 + \frac{1}{E_{\vec{p}\pm} - H} V \right) | \vec{p} \rangle = \langle \psi_{\vec{q}}^{\pm} | \left(1 + \frac{1}{E_{\vec{p}\pm} - E_{\vec{q}\mp}} V \right) | \vec{p} \rangle = \langle \psi_{\vec{q}}^{\pm} | \left(1 - V \frac{1}{E_{\vec{q}\mp} - H_0} \right) | \vec{p} \rangle, \quad (2.28)$$

e ao final podemos estabelecer $\langle \psi_{\vec{q}}^{\pm} | \psi_{\vec{p}}^{\pm} \rangle = \langle \vec{q} | \vec{p} \rangle$ usando a equação de Lippmann-Schwinger propriamente dita. Dessa forma¹

$$\langle \psi_{\vec{q}}^{-} | \psi_{\vec{p}}^{+} \rangle - \langle \psi_{\vec{q}}^{-} | \psi_{\vec{p}}^{-} \rangle = \langle \psi_{\vec{q}}^{-} | \left(\frac{1}{E_{\vec{p}} - H + i\epsilon} V - \frac{1}{E_{\vec{p}} - H - i\epsilon} V \right) | \vec{p} \rangle, \quad (2.31)$$

$$S - \langle \vec{q} | \vec{p} \rangle = \left(\frac{1}{E_{\vec{p}} - E_{\vec{q}} + i\epsilon} - \frac{1}{E_{\vec{p}} - E_{\vec{q}} - i\epsilon} \right) \langle \psi_{\vec{q}}^{-} | V | \vec{p} \rangle = -2\pi i \delta(E_{\vec{p}} - E_{\vec{q}}) \langle \psi_{\vec{q}}^{-} | V | \vec{p} \rangle. \quad (2.32)$$

A equivalência entre (2.30) e (2.32) fica evidente notando-se, via (2.26) e (2.27), que $\langle \psi_{\vec{q}}^{-} | V | \vec{p} \rangle = \langle \vec{q} | V | \psi_{\vec{p}}^{+} \rangle = T(\vec{p}, \vec{q})$ para $E = E_{\vec{p}} = E_{\vec{q}}$, ou meramente calculando $\langle \psi_{\vec{q}}^{+} | \psi_{\vec{p}}^{+} \rangle - \langle \psi_{\vec{q}}^{-} | \psi_{\vec{p}}^{+} \rangle$.

Manipulando a fórmula (2.24), usando (2.16) e o teorema de Wigner-Eckart aplicado ao operador T , pode-se obter

$$\langle E', l', m' | S | E, l, m \rangle = (1 - 2\pi i T_l(E)) \delta_{l', l} \delta_{m', m} \delta(E' - E) \equiv S_l(E) \delta_{l', l} \delta_{m', m} \delta(E' - E), \quad (2.33)$$

em que $T_l(E) \equiv T_l(p, p)$ e $E = p^2/2m$. Da unitariedade da matriz S , evidente pela definição de S em (2.21), é fácil perceber que podemos parametrizar $S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$, com $\delta_l(E)$ real. Essa grandeza, denominada ângulo de espalhamento em onda l , tem uma interpretação física bastante simples [dTP03]: expandindo em ondas parciais a função de onda livre, temos

$$\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = \frac{e^{ik\vec{x}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sum_l (2l+1) i^l P_l(\hat{k} \cdot \hat{p}) j_l(kr) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2} kr} \sum_l (2l+1) i^l P_l(\hat{k} \cdot \hat{p}) \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right), \quad (2.34)$$

em que consideramos x muito grande, de forma análoga ao que fizemos para obter (2.8). A solução da equação de Schrödinger para um potencial de curto alcance apenas troca, na expansão em ondas parciais, o fator $\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)$ pelo fator $c_l \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)$. O potencial acarreta, dessa forma, uma defasagem na função de onda radial, defasagem que é parametrizada pelo ângulo δ_l . Impondo (2.8) como condição de contorno, estabelece-se que $c_l = e^{i\delta_l}$.

2.6 Seção de choque

Consideremos um feixe de partículas que incide em um centro espalhador. Em física clássica, esse feixe (ou uma pequena região desse feixe, aqui abstraída como infinitesimal), caracterizado por um parâmetro de impacto b , é inicialmente restrito a uma seção transversal $d\sigma = b db d\phi$, até que seja espalhado dentro de uma abertura angular $d\Omega = \sin\theta d\phi d\theta$ correspondente (fig. 2.1). A seção de choque diferencial é definida pela relação $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, que depende de (b, ϕ) , ou, analogamente, dos ângulos esféricos (ϕ, θ) .

¹Usamos aqui o resultado

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x \pm i\epsilon} dx = \mp i\pi f(0) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \epsilon} \frac{f(x)}{x} dx, \quad (2.29)$$

resultado que implica que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mp i\pi \delta(x) + \text{p.f.} \frac{1}{x}. \quad (2.30)$$

p.f. refere-se à parte finita ('partie finie') ou principal valor da integrando. Demonstração e melhor explanação das fórmulas (2.29) e (2.30) encontram-se em [Vla71].

Sendo L a luminosidade do feixe de partículas incidentes (isto é, o número de partículas incidentes por unidade de tempo e área), há um número dN de partículas por unidade de tempo que são espalhadas através de um intervalo de ângulo sólido $d\Omega$:

$$dN = Ld\sigma = L \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{L} \frac{dN}{d\Omega}. \quad (2.35)$$

Assim, obtemos uma relação entre a seção de choque, a taxa de eventos e a luminosidade [Gri94], grandezas de grande relevância experimental. A seção de choque total σ é definida naturalmente como

$$\sigma = \int d\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int \frac{dN}{L}. \quad (2.36)$$

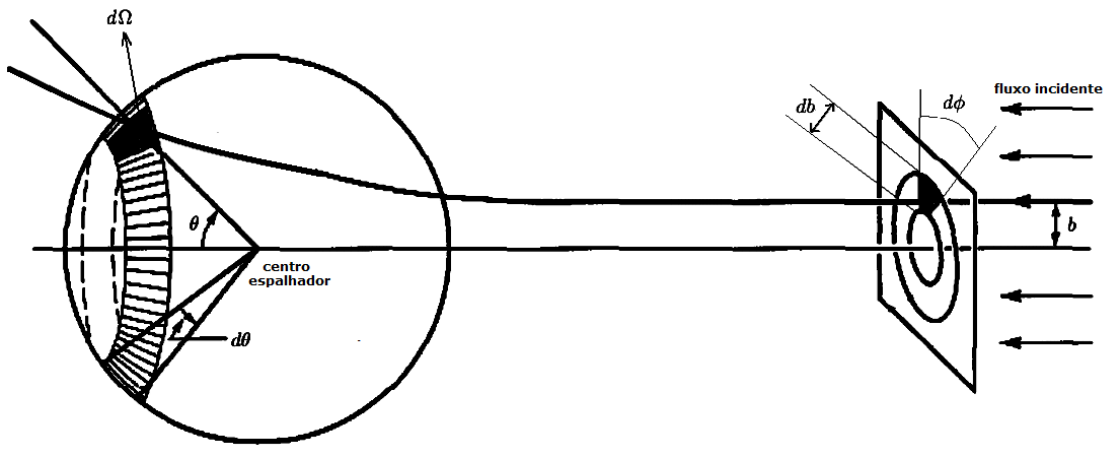


Figura 2.1: Espalhamento de um feixe de partículas por um centro espalhador [CS].

Estendemos esses conceitos para o espalhamento quântico através da chamada corrente de probabilidade. Essa corrente é uma corrente que é conservada por uma função de onda ψ que obedeça à equação de Schrödinger:

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad \rho = |\psi|^2, \quad \vec{j} = (\hbar/m) \text{Im}(\psi \vec{\nabla} \psi), \quad V = V^\dagger. \quad (2.37)$$

Decompomos essa corrente definindo $\vec{j}_{\text{inc}} = (\hbar/m) \text{Im}(\psi_{\text{inc}} \vec{\nabla} \psi_{\text{inc}})$ para a onda incidente e definindo \vec{j}_{esp} de forma análoga para a onda espalhada (ondas estas que são definidas em (2.8)). Podemos estabelecer $L \sim |\vec{j}_{\text{inc}}|$ e $dN \sim \vec{j}_{\text{esp}} \cdot \hat{r} r^2 d\Omega$ [dTP03], e obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\vec{j}_{\text{esp}} \cdot \hat{r} r^2}{|\vec{j}_{\text{inc}}|} = |f(\vec{p}', \vec{p})|^2 = (4m\pi^2 \hbar)^2 |T(\vec{p}', \vec{p})|^2. \quad (2.38)$$

Fica evidente a importância da amplitude de transição $T(\vec{p}', \vec{p})$ — além de ser uma amplitude crucial teoricamente porque rege o grosso da evolução temporal do sistema, justamente a parte da evolução que diz respeito à ocorrência de interação, a amplitude também está ligada diretamente a um observável físico, a seção de choque, como também, conforme vimos, aos ângulos de defasagem.

2.7 Estado ligado

Até aqui lidamos com o problema estritamente do espalhamento, isto é, consideramos $E > 0$. Nesse caso, através da equação de Lippman-Schwinger, fica claro que a mera obediência à equação

de Schrödinger não determina totalmente a solução do problema — tivemos também a liberdade de impor uma condição adicional $\lim_{V \rightarrow 0} |\psi_{\vec{p}}\rangle = |\phi_{\vec{p}}\rangle$, em que $|\phi_{\vec{p}}\rangle$ é um autoestado de H_0 com autovalor E . Mas não existe um autoestado nessas condições se $E < 0$, pois H_0 é positivo definido². Se desejamos obter soluções tais que $B = -E > 0$ aplicando um método análogo ao que utilizamos nas seções anteriores, devemos lidar com uma versão homogênea da fórmula de Lippman-Schwinger:

$$|\psi_B^\pm\rangle = \frac{1}{E_\pm - H_0} V |\psi_B^\pm\rangle, \quad (2.39)$$

versão que não mais fornece a liberdade de impor aquela condição adicional. Isso implica em resolver a versão homogênea da equação (2.10):

$$\langle \vec{q} | \psi_B \rangle = \int d^3 \vec{s} \frac{V(\vec{q}, \vec{s}) \langle \vec{s} | \psi_B \rangle}{E_+ - (\vec{q}^2/2m)}. \quad (2.40)$$

Ocorre que somente para alguns valores de B essa equação apresenta uma solução $\langle \vec{s} | \psi_B \rangle$ (isso ficará claro na discretização dessa integral que realizaremos na seção 2.9). Isto é, o espectro de $E < 0$ é um espectro discreto, somente alguns valores de B são permitidos.

Olhemos o problema sob outro ponto de vista. Se $E = p^2/2m$ e $E < 0$, p será um número imaginário puro: $p = iw$, em que tomamos w como positivo. Ora, podemos estender a fórmula (2.8) para p imaginário, e essa extensão analítica deve ser solução da equação de Schrödinger com E negativo³:

$$\psi_B(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left(e^{-\frac{\vec{w}\cdot\vec{x}}{\hbar}} + \frac{e^{-\frac{w}{\hbar}x}}{x} f(\vec{p}', \vec{p}) \right). \quad (2.41)$$

Como para o caso $E > 0$, também para um dado $E < 0$ há um conjunto de soluções parametrizadas pelo versor \hat{w} . Mas para qualquer valor de \hat{w} , $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-\frac{\vec{w}\cdot\vec{x}}{a}) = \infty$. Assim (2.41), ainda que defina soluções da equação de Schrödinger, em geral não terá as condições de contorno adequadas para configurar um estado ligado.

Por outro lado, se há um estado ligado de energia $B = B_0 = w_0^2/2m$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{w \rightarrow w_0} \psi_B(\vec{x})$ deve ser finito. Como conciliar esse fato com (2.41)? Isso só é possível se $\lim_{w \rightarrow w_0} f(\vec{p}', \vec{p})$ for singular, o que implica em certa supressão do termo $\exp(-\frac{\vec{w}\cdot\vec{x}}{a})$:

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \psi_B(\vec{x}) = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f(\vec{p}', \vec{p})}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left(\frac{e^{-\frac{\vec{w}\cdot\vec{x}}{\hbar}}}{f(\vec{p}', \vec{p})} + \frac{e^{-\frac{w}{\hbar}x}}{x} \right) = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f(\vec{p}', \vec{p})}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{e^{-\frac{w}{\hbar}x}}{x}. \quad (2.42)$$

Isso é, apenas o termo $e^{-\frac{w}{\hbar}x}$ permanece no limite $w \rightarrow w_0$, o que configura $\lim_{w \rightarrow w_0} \psi_B(\vec{x})$ como a solução da equação homogênea (2.39).

A aparente infinitude para todo \vec{x} por parte de $\lim_{w \rightarrow w_0} \psi_B(\vec{x})$ em (2.42) não é tão problemática quanto parece, pois nesse limite $f(\vec{p}', \vec{p})$ é apenas um fator de normalização. Nesse sentido, a parametrização da função de onda em (2.41) apenas não é a parametrização adequada para a resolução do problema com $w = w_0$, a solução que obtemos da mera substituição $w = w_0$ em (2.41) é espúria.

²Isto é, $\forall |\alpha\rangle$, $\langle \alpha | H_0 | \alpha \rangle \geq 0$, pois $\langle \alpha | H_0 | \alpha \rangle = (2m)^{-1} \langle \alpha | p p | \alpha \rangle = \langle \beta | \beta \rangle \geq 0$, em que $|\beta\rangle = p |\alpha\rangle (2m)^{-1/2}$.

³Podemos escrever $f(\vec{p}', \vec{p}) = -(4m\pi^2\hbar) \langle \pm \vec{p}' | V | \psi_{\vec{p}}^\pm \rangle$ apenas para $E > 0$. Adicionando $1 = \int d^3 \vec{x} |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}|$ à esquerda e à direita de V , chega-se em uma fórmula que pode ser estendida para p imaginário. Também T foi definido inicialmente tendo o espalhamento em mente, mas através de (2.14) e (2.15) pode-se deixar essa definição de lado e estender analiticamente T para $E < 0$. Ambas extensões claramente devem manter a relação $T(\vec{p}', \vec{p}) = -(4m\pi^2\hbar) f(\vec{p}', \vec{p})$.

Um exemplo trivial desse tipo de situação é a primitiva

$$\int dx x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + k, \quad (2.43)$$

solução que, se interpretada ingenuamente, apresentaria para a primitiva de $1/x$ um valor infinito para todo x . Mas evidentemente essa parametrização não vale para $a = -1$, a solução correta é finita: $\int dx 1/x = \ln(|x|) + k$. Assim, se $f(\vec{p}', \vec{p})$ for singular para $E = -B_0$, a solução obtida via (2.41) é espúria, mas somente uma solução espúria de (2.41) abre a possibilidade de obtermos (por outros caminhos, como (2.39)) soluções com condições de contorno adequadas para que seja estabelecido um estado ligado. Dessa forma podemos associar uma singularidade em $f(\vec{p}', \vec{p})$ à solução do estado ligado. Essa singularidade terá origem em um valor singular de $T_l(-B_0)$ para algum l e B_0 .

2.8 Espalhamento em teoria quântica de campos

Abordamos o problema do espalhamento de duas partículas reduzindo-o a um problema de uma única partícula espalhada segundo um centro espalhador, isto é, uma região do espaço que sofre a influência de um potencial externo. Esse procedimento é bastante análogo ao procedimento que usualmente é realizado em mecânica clássica. O problema reduzido retém todas informações relevantes do problema original, ainda que possa obscurecer certos aspectos, como por exemplo a conservação de momento linear — só temos explicitada em (2.24) uma conservação de energia. De fato, pelo teorema de Noether, a conservação de momento linear correlaciona-se à homogeneidade do espaço, isto é, à invariância do sistema sob translações. Mas um potencial externo torna o espaço não-homogêneo, de forma que o problema reduzido, tomado em si mesmo e fora de seu contexto, não apresenta conservação de momento linear — a homogeneidade espacial e a conservação de momento linear só são explicitamente recobradas ao analisar-se em seu todo o problema de dois corpos. Assim sendo, se no problema reduzido uma partícula é defletida por um potencial, no problema de dois corpos correspondente temos duas partículas defletindo-se em sentidos contrários, conservando o momento linear.

Em teoria quântica de campos estamos interessados desde já em uma situação mais geral, em um sistema de N_{in} partículas incidentes e N_{out} partículas espalhadas. Ainda que em algumas situações seja um procedimento frutífero, não desejamos realizar aqui uma redução a um problema de menos corpos, de forma que escolhamos desde o início do formalismo explicitamente respeitar a conservação não só de energia, mas também do quadrimomento. Levando isso em conta, em analogia a (2.24) podemos escrever

$$\langle P' | S | P \rangle = \langle P' | P \rangle - i(2\pi)\delta(\Delta E) \langle P' | T | P \rangle = \langle P' | P \rangle - i\delta^4(\Delta p) \langle P' | \mathcal{M} | P \rangle, \quad (2.44)$$

em que $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{N_{\text{in}}}\}$ são os quadrimomentos das N_{in} partículas incidentes, $P' = \{p'_1, p'_2, \dots, p'_{N_{\text{out}}}\}$ são os quadrimomentos das N_{out} partículas emergentes, e $\Delta p = \sum_{j=1}^{N_{\text{out}}} p'_j - \sum_{j=1}^{N_{\text{in}}} p_j$ é a diferença de quadrimomento entre as partículas incidentes e emergentes. Notação análoga usaremos para outras propriedades das partículas, como por exemplo E_1 sendo a energia da partícula incidente 1, m'_2 sendo a massa da partícula emergente 2, etc.

É de grande interesse a soma de $|\langle P' | \mathcal{M} | P \rangle|^2$ sobre todas configurações de partículas emergentes cinematicamente permitidas. Ela pode ser escrita como

$$\Lambda(N_{\text{in}}) = \frac{1}{f(N_{\text{in}})} \int dP' |\langle P' | \mathcal{M} | P \rangle|^2 (2\pi)^4 \delta^4(\Delta p). \quad (2.45)$$

O delta de Dirac impõe a conservação de quadrimomento no processo e $\int dP'$ meramente seleciona as configurações físicas de partículas emergentes, isto é, partículas que estão na camada de massa e têm energias positivas definidas:

$$\int dP' = \int \prod_{i=1}^{N_{\text{out}}} \frac{d^4 p'_i}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p_i'^2 - m_i'^2 c^2) \theta(p_i'^0) = \int \prod_{i=1}^{N_{\text{out}}} \frac{d^3 \vec{p}'_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}'_i{}^2 + m_i'^2 c^2}}. \quad (2.46)$$

$f(N_{\text{in}})$ é um fator de normalização que depende das propriedades das partículas iniciais, e é especialmente calibrado para dar a $\Lambda(N_{\text{in}})$ maior significado físico.

O caso $N_{\text{in}} = 2$ é referente ao espalhamento de duas partículas, situação que vínhamos tratando nas seções anteriores. Restringindo-se ao caso de feixes de partículas colineares ($\vec{p}_1 // \vec{p}_2$), e fazendo

$$\hbar^2 f(2) = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2} = (2E_1)(2E_2) |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| c^{-3} \stackrel{\vec{p}_1 = -\vec{p}_2}{=} 4(E_1 + E_2) |\vec{p}_1| c^{-1}, \quad (2.47)$$

temos que $\Lambda(2)$ nada mais é do que a seção de choque total σ do processo [QFT].

Repare que o formalismo apresentado nessa seção permite que as partículas incidentes convertam-se em outras partículas — esse é um fenômeno de interesse sobretudo relativístico, e por isso não foi incluído no formalismo que desenvolvemos anteriormente a partir da equação de Schrödinger. Decorrente disso, também é de interesse o caso $N_{\text{in}} = 1$, uma situação em que uma partícula livre decaia em outras partículas. Nesse caso, fazendo $f(1) = 2\hbar m_1$, temos que $\Lambda(1) = \Gamma$ é a amplitude de decaimento da partícula. Essa amplitude é tal que $t_{1/2} \ln 2 = \tau = \Gamma^{-1}$, em que $t_{1/2}$ é a meia-vida e τ é a vida média da partícula [QFT].

Resta-nos assim discutir como calcular $\langle P' | \mathcal{M} | P \rangle$. Obtemos $\langle P' | \mathcal{M} | P \rangle$ a partir das chamadas regras de Feynman. Essas regras provém essencialmente das fórmulas (2.21) e (2.22). Ao invés do termo "potencial de interação", agora usamos o termo "hamiltoniano de interação", que de qualquer forma ainda é o termo que, uma vez somado ao hamiltoniano livre, constituirá o hamiltoniano total. Mas diferentemente do caso não-relativístico, e assim como em teoria clássica de campos, os hamiltonianos regem aqui propriedades de campos, e para tanto devem ser integrais espaciais de densidades de hamiltoniano:

$$H = H_0 + V \stackrel{TQC}{\rightleftharpoons} H = H_0 + H_I = \int d^3 \vec{x} \mathcal{H}_0 + \int d^3 \vec{x} \mathcal{H}_I, \quad (2.48)$$

em que as densidades de hamiltoniano dependem apenas de campos (e suas derivadas). As propriedades dos campos livres são estabelecidas pelos hamiltonianos livres, que definem as propriedades das partículas livres, como spin e massa (assim como, por exemplo, o hamiltoniano de uma onda clássica define propriedades dessa onda, como a velocidade de propagação). Já os hamiltonianos de interação estabelecem interações entre os campos (de forma análoga que é descrita, por exemplo, a interação entre os campos elétrico e magnético em teoria clássica de campos). Diferentemente do caso clássico, porém, esses campos são quantizados, o que significa que eles são tratados como operadores, e sujeitos a regras de comutação diversas. Por isso os cálculos que se seguiram da fórmula (2.22) não mais valem, e não é possível obter um propagador tão geral como foi obtido no caso não-relativístico.

De qualquer forma muitos aspectos qualitativos são mantidos — ainda que aqui tenhamos partículas de múltiplos tipos interagindo e dando origem umas às outras, cada tipo de partícula livre será regida por um propagador (seja no espaço de momento ou no espaço de configuração) até que atinja um ponto em que a interação ocorra. Esse ponto de interação será descrito pelo chamado vértice, que é definido pela densidade de hamiltoniano \mathcal{H}_I — essencialmente, cada parcela

do hamiltoniano de interação definirá um tipo de vértice, e o número e tipos de partículas que interagem no vértice será dado pelo número e tipos de campos que estão presentes na parcela⁴. No espaço de momento, o quadrimomento é conservado no interior do vértice. Repare também que cada enésima parcela da somatória em (2.22) tem n integrais temporais, aos quais se juntarão n integrais espaciais de cada um dos n hamiltonianos H_I da parcela. Cada enésima parcela terá, assim, n integrais espaço-temporais, e cada integral varrerá a quadriposição de um dos n vértices. Logo, também como anteriormente, é preciso somar todos números possíveis de vértices/interações, e integrar sobre todos pontos espaço-temporais possíveis nos quais essas interações podem ocorrer. Dessa forma, o integrando será uma composição de propagadores livres, vértices e termos que representam partículas externas, em uma situação bastante correlata à (2.15). Uma interpretação análoga no espaço de momento (como em (2.14)) também é possível. Essas são as propriedades que fundamentam a construção dos diagramas de Feynman.

Repare que (2.22), donde surgem as regras de Feynman, trata de S , mas em geral, devido a (2.46), só se deseja informações de \mathcal{M} . Assim, eventualmente, é necessário filtrar do cálculo das regras de Feynman termos que não dizem respeito a \mathcal{M} , mas a $\langle P'|P\rangle$ ou mesmo ao delta de Dirac em (2.44). Pode-se mostrar que o único critério não-trivial a ser observado é que se deve dispensar da integração as trajetórias em que há grupos disjuntos de partículas, isso é, grupos de partículas que não interagem entre si [tQFT95].

No caso em que $N_{\text{out}} = 2$, a fórmula (2.46) pode ser simplificada sem que sejam necessárias informações adicionais de \mathcal{M} [Gri04]:

$$\Gamma = \frac{|\vec{p}'|}{8\pi\hbar m_1^2 c} |\mathcal{M}|^2 \quad (N_{\text{in}} = 1), \quad (2.49)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} |\mathcal{M}|^2 \quad (N_{\text{in}} = 2), \quad (2.50)$$

em que $|\vec{p}'|$ ($|\vec{p}|$) é o módulo do momento linear, no referencial de centro de massa, de qualquer uma das duas partículas emergentes (incidentes), e depende basicamente das massas das partículas envolvidas no processo. $(E_1 + E_2)$ também é tomado no centro de massa.

2.9 Análise numérica

2.9.1 Aspectos gerais

Para abordar a fórmula (2.19) numericamente, pode-se fazer a aproximação

$$t_l(p', p) = v_l(p', p) + \sum_{k=1}^N \frac{q_k^2 w_k}{2\pi^2} \frac{v_l(p', q_k) t_l(q_k, p)}{E - (q_k^2/2m)}, \quad (2.51)$$

em que os valores de q_k e w_k são determinados dependendo da quadratura a ser escolhida. Uma quadratura mais simples e intuitiva poderia ser construída utilizando pontos igualmente espaçados entre os limites de integração a e b , de forma que teríamos $q_k = a + k\Delta q$ e $w_k = \Delta q$, em que $\Delta q = (b - a)/N$. Ocorre que a chamada quadratura de Gauss é preferível do ponto de vista da eficiência, isso é, do número N de pontos necessários para obter na soma um valor satisfatoriamente

⁴Uma "receita de bolo" para obter o vértice no espaço de momento referente a uma dada parcela de $\mathcal{L}_I \approx -\mathcal{H}_I$ é [Gri04] (1) substituir $i\hbar\partial^\mu$ por p^μ , o quadrimomento da partícula descrita pelo campo no qual a derivada atua, (2) eliminar os campos da parcela, (3) multiplicar a parcela por i . Assim, por exemplo, se a interação entre três partículas é regida por $\mathcal{L}_I = g\phi_1\phi_2\partial^\mu\phi_3\partial_\mu\phi_4$, o vértice correspondente seria $-i(g/\hbar^2)k_3^\mu k_{4\mu}$, em que k_3 e k_4 são os momentos das partículas 3 e 4 ao incidir no vértice (partículas que emergem do vértice receberiam um sinal negativo). Contudo, essa receita não é um procedimento exato, e pode dar resultados incorretos para interações mais peculiares.

próximo da integral. Essa quadratura é construída de tal forma que $\int_a^b dx W(x) f(x) = \sum_{k=1}^N w_k f(q_k)$ seja uma igualdade exata se $f(x)$ for um polinômio de grau menor ou igual a $2N - 1$. Isso só é possível e útil quando se permite que os pontos q_k sejam pontos especialmente escolhidos e não sejam necessariamente igualmente espaçados. $W(x)$ é a função peso da quadratura, e os N pontos q_k entre a e b , como também os pesos w_k , dependem dessa função $W(x)$. Usamos a função $W(x)$ meramente igual a 1, o que constitui a quadratura de Gauss-Legendre. Uma discussão mais detalhada a esse respeito e códigos de programação para implementar esses métodos encontram-se em [PTWTV02].

Selecionando valores diversos de p' e fixando p , podemos abordar a fórmula (2.51) como uma equação matricial escrevendo-a na forma

$$t_l(p'_i, p) = v_l(p'_i, p) + \sum_k K_l(p'_i, q_k) t_l(q_k, p), \quad K_l(q_i, q_k) = \frac{q_k^2 w_k}{2\pi^2} \frac{v_l(q_i, q_k)}{E - (q_k^2/2m)}. \quad (2.52)$$

Repare que $t_l(p'_i, p)$ e $v_l(p'_i, p)$ podem ser encarados como elementos de T e V , matrizes colunas de N termos. Já a somatória pode ser encarada como referente à multiplicação da matriz K (de $N \times N$ termos) pela matriz T . Para tanto é preciso impor $p'_i = q_i$, isto é, p'_i também fica definido pelo algoritmo da quadratura de Gauss. Fica estabelecida assim a equação matricial

$$T = V + KT \rightarrow (1 - K)T = V. \quad (2.53)$$

Vemos que para obter T são necessárias técnicas para resolver sistemas lineares. Para tanto, utilizamos a decomposição LU [PTWTV02].

Em consequência do que foi discutido na seção 2.7, um eventual estado ligado deve ser regido pela versão homogênea de (2.20), isto é, por essa equação uma vez considerado $\phi_l(p', p) = 0$. Como o operador V é hermitiano, temos que $\langle \vec{p} | V | \vec{q} \rangle^* = \langle \vec{q} | V | \vec{p} \rangle$, logo

$$\psi_l(p'_i, p) = \sum_k K_l^*(q_k, p'_i) \psi_l(q_k, p). \quad (2.54)$$

Estabelecendo uma matriz coluna Ψ de N termos, pode-se escrever (2.54) matricialmente:

$$\Psi = K^\dagger \Psi \Rightarrow (1 - K^\dagger) \Psi = 0^{(c)} \Rightarrow \det(1 - K^\dagger) = 0 \Rightarrow \det(1 - K) = 0, \quad (2.55)$$

em que $0^{(c)}$ é o vetor coluna nulo, e \dagger refere-se à matriz transposta conjugada. É evidente que apenas determinados valores de $B = -E > 0$ podem anular o determinante de $(1 - K)$. Dessa forma, deve-se investigar valores de B que anulem esse determinante para identificar ali estados ligados⁵.

Observe que, no nosso caso de interesse, em princípio teríamos $a = 0$ e b infinito. Esse valor de b é uma complicação adicional. Na discussão feita acima implicitamente consideramos um b grande mas finito, truncando a integral. Outra estratégia é realizar uma mudança de variáveis $q(x) = \alpha x / (1 - x)$ na integral da equação (2.19) a ser trabalhada numericamente:

$$\int_0^1 dx \frac{\alpha + q(x)}{(1 - x)} \frac{q(x)^2}{2\pi^2} \frac{v_l(p', q(x)) t_l(q(x), p)}{E - (q^2/2m)}. \quad (2.56)$$

Trata-se de uma outra maneira de calcular a integral ao invés de simplesmente truncá-la, pois os

⁵Outra consequência da nulidade de $\det(1 - K)$ em um dado $E = -B_0$ é que (2.53) não terá solução bem definida para esse valor de E , o que é um indicativo de que $\lim_{E \rightarrow -B_0} T$ seja singular. Isso vai ao encontro do que concluímos na seção 2.7 sobre o operador T .

critérios da quadratura de Gauss escolherão, no intervalo entre 0 e 1, os pontos mais adequados numericamente, e todos os valores possíveis de $q(x)$ (que varia de zero até infinito) estarão disponíveis, o que não ocorreria truncando desde o início a integral. Porém, esse critério tende a escolher valores de q_k progressivamente mais espaçados, o que pode atrapalhar a convergência do método numérico.

Assim sendo, pode ser preferível não realizar essa mudança de variável, mas sim manter um *cutoff* Λ na integral, desde que conjuntamente introduza-se um contratermo Ω no potencial para contrabalanceá-lo:

$$t_l(p', p) = (v_l(p', p) + \Omega(\Lambda)) + \int_0^\Lambda \frac{q^2 dq}{2\pi^2} \frac{(v_l(p', p) + \Omega(\Lambda)) t_l(q, p)}{E - (q^2/2m)}. \quad (2.57)$$

Um método de estabelecer esse contratermo é considerando, para cada *cutoff*, um contratermo tal que a energia de ligação de um dado potencial seja uma energia de ligação tomada como conhecida. Uma vez fixada a função $\Omega(\Lambda)$ para esse potencial, essa função assume o papel de delimitar o comportamento do sistema em altas energias.

Outro detalhe adicional são os canais acoplados. Tomemos como exemplo a partícula $X(3872)$, considerando-a como composta de dois estados degenerados — mais especificamente, $X = (D^{0*}\bar{D}^0 + D^0\bar{D}^{0*})/\sqrt{2}$. Nesse caso, a descrição do X deverá ser repartida em quatro canais: uma interação via troca de píons, por exemplo, ocorre somente entre $D^{0*}\bar{D}^0$ e $D^0\bar{D}^{0*}$ ou vice-versa, mas não entre $D^{0*}\bar{D}^0$ e $D^{0*}\bar{D}^{0*}$ (veja fig. 2.2). Já uma eventual reação de contato poderá ocorrer entre os quatro canais. Esse tipo de degenerescência requer um formalismo analítico e numérico diferenciado para lidar com os estados ligado e de espalhamento.

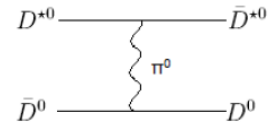


Figura 2.2: Diagrama da interação entre D^{0*} e D^0 via troca de píons.

2.9.2 Exemplos de simulações

Estão expostos abaixo cálculos numéricos em que exploramos dois potenciais. O primeiro deles é o potencial de Amado. Esse potencial é um potencial separável, isto é, um potencial de forma $v_l(p', p) = \alpha_l f_l(p') g_l(p)$. Potenciais desse tipo são especialmente simples, e por isso as funções $t_l(p', p)$ e $\psi_l(p', p)$ podem ser obtidas analiticamente, o que é útil para testar o bom funcionamento de códigos numéricos. O potencial de Amado é tal que $f_l(q) = 1/(q^2 + \Lambda^2)$ e $g_l(q) = 1/(q^2 + \Sigma^2)$. Se $\alpha_l < 0$ para uma dada componente l , há a presença de um estado ligado em $-E = B_l = \gamma_l^2/2m$, em que $\alpha_l = -(2\pi/m)(\Sigma + \Gamma)(\Sigma + \gamma_l)(\Gamma + \gamma_l)$.

O outro potencial é o potencial de Yukawa. A interação de Yukawa é um tipo de interação entre bósons escalares e férmions de spin 1/2. Essa interação foi modelada por Yukawa para entender a interação entre núcleons, e com esse modelo ele pôde prever a existência e massa do píon, entendido então como o mediador da interação forte entre os núcleons. Essa interação é regida não-relativisticamente pelo potencial [tQFT95]

$$V(\vec{p}', \vec{p}) = \frac{-g^2}{(\vec{p}' - \vec{p})^2 + m_\pi^2}, \quad V(x) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{x} e^{-m_\pi x}. \quad (2.58)$$

Ainda que os mésons D_0 e D_0^* sejam bósons, esse mesmo tipo de potencial pode ser tomado como uma primeira aproximação da interação dos mésons D_0 e D_0^* mediada por píons, pois esse potencial também descreve não-relativisticamente a interação regida pela lagrangiana

$$\mathcal{L}_{gD_0D_0^*} = g'(D_0\bar{D}_{0\mu}^* + \bar{D}_0D_{0\mu}^*)\partial^\mu\pi_0. \quad (2.59)$$

Lagrangiana que justifica o diagrama da fig. 2.2. Essa lagrangiana é dada no interior da lagrangiana

(3.67) que, conforme veremos no próximo capítulo, pode ser obtida utilizando-se teorias efetivas.

$v_0(p', p)$, definido via (2.18), é a componente em onda S do potencial. Essa componente é de maior interesse porque o potencial sofre uma resistência crescente em l por parte de uma barreira centrífuga, barreira cuja existência fica clara na equação radial de Schrödinger (e também em equações radiais na mecânica clássica). Dessa forma, para valores altos de l , a dinâmica da partícula é dominada pela barreira e aproxima-se da dinâmica de uma partícula livre. Isto posto, $v_0(p', p)$ pode ser isolado na fórmula (2.18) usando-se a ortogonalidade dos polinômios de Legendre. Dessa maneira obtém-se, para a troca de píons,

$$v_0(p', p) = \int_{-1}^1 d(\hat{p}' \cdot \hat{p}) V(\vec{p}', \vec{p})/2 = \frac{-g^2}{4pp'} \ln \left(\frac{d+1}{d-1} \right), \quad \text{com } d = \frac{p^2 + p'^2 + m_\pi^2}{2pp'}. \quad (2.60)$$

Seguem abaixo alguns cálculos numéricos preliminares, colocados aqui como ilustração didática. Na fig. 2.3 temos o cálculo de uma energia de ligação para a troca de píons, em que se calcula B tal que $\det(1 - K) = 0$. O valor obtido é um tanto quanto espúrio porque a interação não se encontra normalizada — é preciso levar em conta o contratermo $\Omega(\Lambda)$, e para obtê-lo impomos a energia de ligação 0.6 MeV, valor mais provável da energia de ligação do X (vide figs. 2.5 e 2.6). Repare que a função $\Omega(\Lambda)$ dada na fig. 2.6 é obtida na fig. 2.5 pela abscissa do cruzamento do eixo $y = \det(1 - K) = 0$ e a reta referente ao *cutoff* Λ . Realizamos o mesmo procedimento para o potencial de Amado (figs. 2.7 e 2.8), e calculamos os ângulos de espalhamento para esse potencial (fig. 2.4). Todos os cálculos são realizados em onda S . O potencial de Amado que usamos é tal que $\Lambda = \Sigma = 2000$ MeV e $B_0 = 0.6$ MeV (grandezas dadas em unidades naturais).

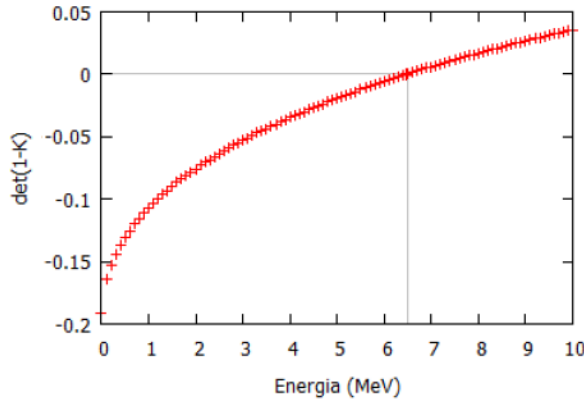


Figura 2.3: Determinante da matriz $(1 - K)$ em função da energia do sistema $B = -E > 0$ para o potencial de trocas de píons. A energia B tal que $\det(1 - K) = 0$ é a energia de ligação B_0 obtida ($B_0 \cong 6.48$ MeV).

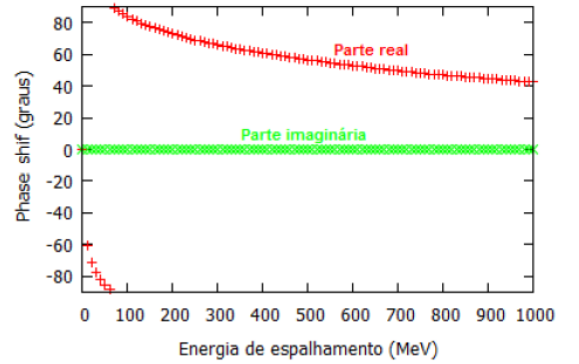


Figura 2.4: Ângulos de espalhamento (*phase shifts*) como função da energia de espalhamento para o potencial de Amado. Vemos que os ângulos são reais, como esperado devido à unitariedade do operador S de espalhamento.

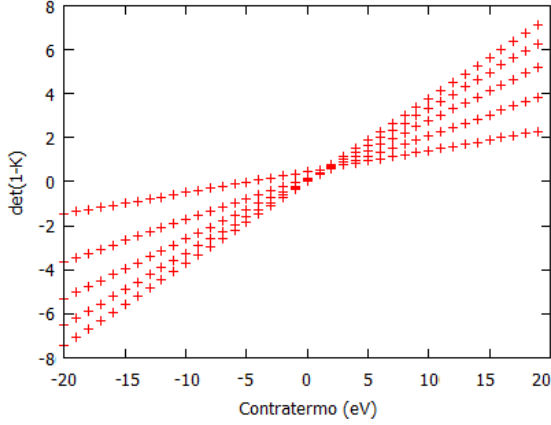


Figura 2.5: $\det(1 - K)$ em função do contratermo Ω para o potencial de Amado. São visíveis cinco retas, cada uma com os seguintes valores de cutoff Λ : 1000, 2000, 3000, 4000 e 5000 MeV. O coeficiente angular é crescente com os cutoffs.

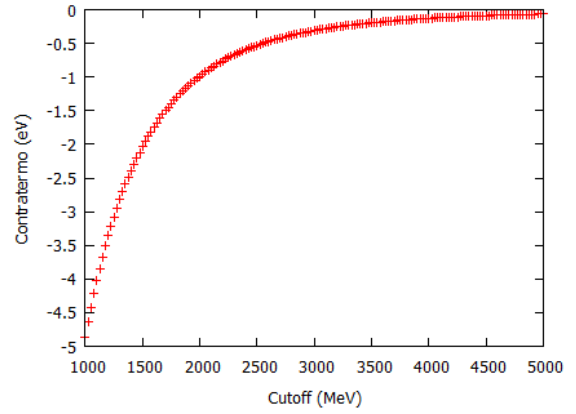


Figura 2.6: Contratermo Ω em função do cutoff Λ para o potencial de Amado. A função $\Omega(\Lambda)$ delimita a interação em altas energias.

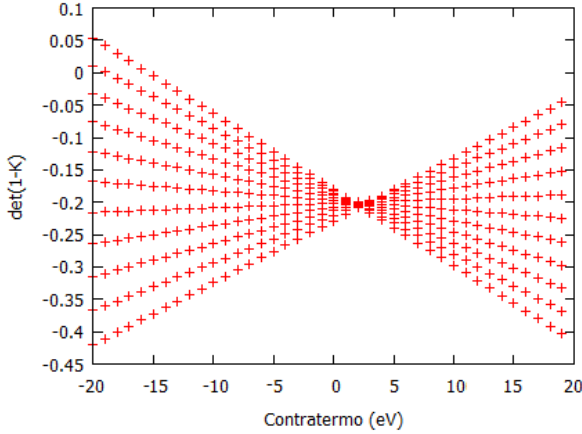


Figura 2.7: $\det(1 - K)$ em função do contratermo Ω para a troca de píons. São visíveis onze retas, cada uma com os seguintes valores de cutoff Λ : 1000, 1110, 1200, (...), 2000 MeV. O coeficiente angular é decrescente com os cutoffs.

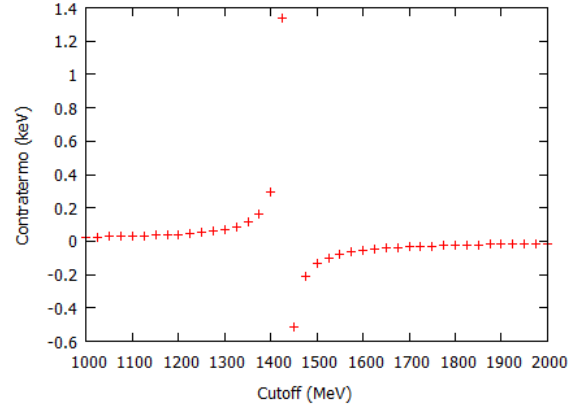


Figura 2.8: Contratermo Ω em função do cutoff Λ para a troca de píons.

⁵A linearidade em Ω da função $\det(1 - K(\Omega, \Lambda))$, linearidade observada nas figs. (2.5) e (2.7), pode ser mostrada matematicamente em poucas etapas. Seja K_0 a matriz K definida em (2.52) e (2.53) sem a presença do contratermo somado ao potencial, e seja K_Ω essa matriz com a soma do contratermo realizada. Estalecendo as matrizes colunas v e u , podemos escrever:

$$\det(1 - K_\Omega) = \det(1 - K_0 + uv^T), \quad \text{com } u_i = -1_i^{(c)} = -1, \quad v_i = \Omega Q_i, \quad Q_i = \frac{q_i^2 w_i}{2\pi^2} \frac{1}{E - (q_i^2/2m)}. \quad (2.61)$$

Utilizando o chamado *matrix determinant lemma*, a linearidade fica evidente:

$$\det(1 - K_\Omega) = (1 + v^T(1 - K_0)^{-1}u) \det(1 - K_0) = (1 - \Omega Q^T(1 - K_0)^{-1}1^{(c)}) \det(1 - K_0). \quad (2.62)$$

Capítulo 3

Teorias efetivas

3.1 Aspectos gerais

Uma teoria de campos efetiva é uma teoria que lida com fenômenos físicos que têm uma limitada escala de energia (isto é, fenômenos com energias típicas E tais que, para um dado Λ , $E \ll \Lambda$). Essa teoria é construída através da identificação dos graus de liberdade que são relevantes para a física nessa escala. Essa identificação é a essência do problema, pois uma vez que é realizada, a teoria efetiva é construída de forma bastante geral — não são impostas pressuposições fenomenológicas, a teoria efetiva é a teoria mais geral possível que, em termos daqueles graus de liberdade, respeita as simetrias da interação [VKARC02, Bai13]. Detalhes da teoria mais geral (isto é, da teoria que englobaria energias mais altas, teoria que muitas vezes é desconhecida ou de difícil aplicação) influenciam a teoria efetiva de forma bem limitada, determinando o valor de seus parâmetros, parâmetros que de qualquer forma podem ser ajustados experimentalmente [Pic98, Har01, Bai13].

Teorias efetivas permeiam toda física, embora o conceito de teoria efetiva tenha sido elaborado de forma mais distinta apenas no final dos anos 70 [Har01]. Teorias efetivas podem ser construídas tendo já em mente o seu escopo limitado do ponto de vista energético, como a teoria de Euler-Heisenberg para o espalhamento fóton-fóton ou a teoria do decaimento beta de Fermi, ambas desenvolvidas ainda nos anos 30 frente à carência de teorias mais completas que regessem essas interações (que só seriam obtidas a contento com a QED e com a teoria eletrofraca) [Man77, Pic98, Har01]. Esse é essencialmente o mesmo cenário das recentes modelagens de gravitação quântica [Har01, Bur04]. Outro caso em que teorias efetivas desempenham um papel importante é quando a teoria mais geral é conhecida, mas de difícil aplicação prática no regime energético de interesse — essa é a situação de teorias efetivas como a teoria de perturbação quiral e a teoria de heavy quark, teorias construídas para descrever interações pertencentes ao regime não-perturbativo da QCD, fazendo-o por meio da identificação dos graus de liberdade relevantes para a interação forte nessa escala de energia (bósons de Goldstone, hádrons em geral, campos pesados, etc). A rigor, mesmo teorias bastante consagradas e gerais da física, como a teoria da gravitação de Newton, a teoria da Relatividade Geral e o próprio Modelo Padrão, podem ser encaradas como teorias efetivas [Har01, VKARC02], teorias cujas limitações (isto é, seu caráter como teoria efetiva) só foram percebidas *a posteriori*, frente à necessidade de sofrerem correções.

O conceito de teoria de campos efetiva pode ser formalizado de maneira mais esquemática e geral considerando uma interação regida pela ação

$$S = \int d^D x \mathcal{L}(\phi_L, \phi_H). \quad (3.1)$$

ϕ_L são os campos que parametrizam os graus de liberdade relevantes para o regime de baixas energias, campos denominados leves, enquanto ϕ_H são os campos relevantes apenas para interações

com energias maiores do que Λ , campos denominados pesados. Podemos escrever esquematicamente uma teoria efetiva para o regime de baixas energias integrando os graus de liberdade pesados, fazendo-o no contexto de um formalismo de integral de trajetória [Pic98, VKARC02]:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_L \int \mathcal{D}\phi_H e^{iS} = \int \mathcal{D}\phi_L e^{iS_{\text{eff}}}, \quad (3.2)$$

em que fica definida implicitamente uma lagrangiana efetiva dependente apenas dos campos leves, via [VKARC02]

$$S_{\text{eff}} = \int d^D x \mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi_L) = -i \ln \int \mathcal{D}\phi_H e^{iS}. \quad (3.3)$$

Essa lagrangiana efetiva é uma lagrangiana não-local, visto que partículas altamente energéticas, partículas que seriam propagadas no decorrer de uma distância típica $\Delta x \sim 1/\Lambda$, não estão presentes na lagrangiana, o que seria necessário para conferir-lhe localidade. De qualquer forma, podemos redefinir a lagrangiana efetiva como uma soma de infinitos operadores \mathcal{O}_i dependentes apenas dos campos leves [Geo93, Neu94, VKARC02, Bai13]:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi_L) \equiv \sum_i c_i(\Lambda) \mathcal{O}_i(\phi_L). \quad (3.4)$$

Nesse ponto temos em mente o chamado princípio de Weinberg, que *grosso modo* afirma que a lagrangiana efetiva mais geral compatível com uma dada simetria conduz à matriz S mais geral compatível com aquela simetria e com certas propriedades mais universais, como a analiticidade e unitariedade dessa matriz (embora seja por vezes chamado de "teorema", esse princípio só foi provado verdadeiro para casos bem específicos, de qualquer forma é um princípio bastante plausível e contraexemplos são desconhecidos) [VKARC02, Sch03, Wei16]. Com isso, somos autorizados a escrever a lagrangiana efetiva como a soma de todos os operadores possíveis construídos a partir dos campos leves e que respeitam as simetrias da interação. Nessa construção, a teoria efetiva não deixa de ser uma teoria distinta da teoria mais geral, visto que descartamos os graus de liberdade pesados. Dessa distinção é recuperada a localidade das interações, mesmo porque os operadores dados em (3.4) são operadores calculados na mesma coordenada espaço-temporal, tratando-se portanto de operadores locais. De qualquer modo, ambas teorias são equivalentes em um regime de baixas energias, a diferença fica restrita a um regime energético fora do escopo da teoria efetiva [Geo93, VKARC02].

Esse procedimento leva ao surgimento de um número infinito de operadores em (3.4), o que torna necessário organizá-los. Para tanto, consideremos o conjunto de operadores \mathcal{O}_i que têm dimensão $[\mathcal{O}_i] = \delta^1$. Eles definem uma lagrangiana $\mathcal{L}_{\text{eff}}^\delta$ e seus coeficientes têm dimensão $[c_i] = D - \delta$. Em termos de grandezas adimensionais λ_i , podemos definir $c_i = \lambda_i \Lambda^{D-\delta}$ e escrever [Geo93, Pic98, Bai13]

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \sum_\delta \mathcal{L}_{\text{eff}}^\delta, \quad S_{\text{eff}} = \sum_\delta S_{\text{eff}}^\delta, \quad S_{\text{eff}}^\delta = \int d^D x \mathcal{L}_{\text{eff}}^\delta \approx \sum_j \lambda_j \left(\frac{E}{\Lambda} \right)^{\delta-D}, \quad (3.5)$$

em que E é a escala de energia típica da interação que é abordada. Desde que nos mantenhamos em um regime de energias muito abaixo de Λ , vemos que $(E/\Lambda)^{\delta-D}$, com δ suficientemente grande, será um termo desprezível. Assim, se desejamos resultados com uma dada precisão ϵ , apenas é necessário empregar operadores com dimensão de no máximo δ_m , pois basta considerar operadores

¹Usamos nesse capítulo um sistema de unidades naturais: $\hbar = c = 1$. Dessa forma, todas grandezas têm dimensões de alguma potência de energia, potência que define a dimensão da grandeza em questão. Assim, por exemplo, [energia] = [massa] = 1, [posição] = [tempo] = -1, $[\hbar] = [c] = 0$, etc. Nesse capítulo empregamos também a chamada notação de Einstein: índices gregos que se repetem em um mesmo termo são entendidos como índices covariantes ou contravariantes e são somados. Por exemplo, $p^\mu p_\mu = \sum_{\mu=0}^3 p^\mu p_\mu = p^2$.

que satisfaçam [Geo93, Pic98]

$$(E/\Lambda)^{\delta-D} > \epsilon, \quad \delta < D + \frac{\ln(1/\epsilon)}{\ln(\Lambda/E)} \equiv \delta_m. \quad (3.6)$$

Se almejásemos que a teoria efetiva descrevesse interações em regimes de energias arbitrariamente grandes, operadores com $\delta > D$ seriam problemáticos, pois divergem no limite $E \rightarrow \infty$ (sendo por isso não-renormalizáveis). Mas desejamos apenas que a teoria efetiva descreva interações com energias típicas $E \ll \Lambda$. Nesse regime energético de interesse apenas um número finito de operadores \mathcal{O}_i contribuirão para dada precisão ϵ desejada, e contribuirão com acréscimos finitos. Nesse sentido fica evidente o poder preditivo da teoria. Isso abala a posição privilegiada que teorias renormalizáveis tiveram no decorrer da física — posição que em última instância estava calcada no objetivo de descrever em uma única teoria fundamental níveis de energia arbitrários, ou escrever uma única teoria que fornecesse resultados com infinita precisão. Mas nenhum desses objetivos provêm de requerimentos experimentais: qualquer experimento tem uma acurácia finita e é limitado energeticamente. Dessa forma a diferença entre teorias renormalizáveis e não-renormalizáveis não é tão radical, mesmo porque uma eventual melhora na precisão experimental ϵ pode revelar a necessidade de operadores em (3.4) com dimensão $\delta \gg D$ [Geo93, MW07, Bai13].

A análise que realizamos em (3.5) mostra-se simplista quando são levados em conta diagramas de *loop* limitados pelo *cutoff* energético Λ — lagrangianas que classificamos como tendo ordem δ poderão fornecer contribuições diferentes de $(E/\Lambda)^{\delta-D}$ [MW07, Geo93, Pic98]. Isso pode ser resolvido estabelecendo uma dimensão anômala $\delta \rightarrow \delta - \delta'$ para os operadores, o que reclassificaria os diversos operadores, e implicaria que para dada precisão ϵ teríamos infinitos operadores \mathcal{O}_i de interesse. De qualquer forma isso não altera em essência o que delineamos acima, apenas torna as aplicações práticas menos triviais [MW07, Bai13].

Essa dificuldade também pode ser contornada adotando-se um esquema de regularização *mass-independent*, como a regularização dimensional (que definiremos e aplicaremos na seção 4.2, no contexto da modelagem do X). Esquemas desse tipo mantêm a mesma classificação não-anômala em nível de árvore que estabelecemos inicialmente, logo o número finito de operadores de interesse para dada precisão desejada. No lugar de um *cutoff* energético Λ , esses esquemas introduzem uma escala μ — em princípio esses esquemas, porém, não só alteram a física de altas energias, mas também deformam a física de baixas energias, e os graus de liberdade leves e pesados encontram-se novamente acoplados. Esses efeitos podem ser corrigidos à mão através de um chamado *matching*, que trata-se de ajustar a teoria efetiva na escala $\mu = \Lambda$ para que apresente os mesmos resultados que a teoria mais geral contendo campos pesados ϕ_H . Ainda assim esse processo é bastante conveniente, por vantagens inerentes à regularização dimensional, e pelo fato do *matching* automaticamente eliminar divergências infravermelhas, e também ajustar a teoria efetiva para condizer com a teoria mais geral em baixas energias [Geo93, Neu94, Pic98, MW07].

Essas questões motivaram Georgi a criar uma abordagem do conceito de teorias efetivas um tanto quanto diferente da que apresentamos em (3.2)-(3.4), abordagem denominada *continuum EFT* (teoria de campos efetiva contínua), para melhor conciliar as teorias efetivas com esquemas *mass-independent* de regularização [Geo93, Bai13]. De qualquer forma não nos adentraremos nessas nuances que, embora de grande interesse físico, dizem mais respeito às teorias efetivas de forma genérica e não especificamente às teorias de nosso maior interesse, a teoria de perturbação quiral e a teoria de heavy quark, teorias que são bem estabelecidas em si mesmas e que passamos a abordar no restante do capítulo.

3.2 QCD

A lagrangiana da Cromodinâmica Quântica, lagrangiana que rege a interação entre quarks e glúons, é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_f \bar{q}_f (i\mathcal{D} - m_f) q_f - \sum_a \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a} G_a^{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

A soma em f ocorre sobre os diversos sabores de quarks, cada sabor está associado a uma massa m_f , e q_f é um vetor coluna de três componentes q_f^c ($c \in \{R, B, G\}$), cada componente sendo referente a uma carga de cor. Como próprio de partículas elementares de spin 1/2, cada componente de cor q_f^c também é, por sua vez, um spinor de quatro componentes no espaço de Dirac, sobre as quais atuam as matrizes γ^μ de Dirac (como, por exemplo, a matriz implícita em $\mathcal{D} = \gamma^\mu D_\mu$). Temos ainda $\bar{q}_f = q_f^\dagger \gamma_0$. Toda essa estrutura pode, evidentemente, ser entendida interpretando os campos dos quarks como um objeto de três índices $q_{f,c,i}$, em que f é o índice de sabor, c é o índice de cor, e i é o índice de Dirac.

As partículas livres de spin 1/2 são regidas pela lagrangiana de Dirac. Com respeito aos quarks, com seus diversos sabores e cores, podemos escrevê-la como

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \sum_{f,c} \bar{q}_f^c (i\mathcal{D} - m_f) q_f^c = \sum_f \bar{q}_f (i\mathcal{D} - m_f) q_f. \quad (3.8)$$

Para que seja obtida a lagrangiana da interação forte \mathcal{L}_{QCD} , a simetria global $SU(3)$ de cor da lagrangiana livre $\mathcal{L}_{\text{free}}$ é promovida a uma simetria local. Ou seja, é imposto à lagrangiana de interação que seja invariante sob transformações que, nos campos dos quarks, atuam como

$$q_f \rightarrow q'_f = \exp \left[-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a(x) \frac{\lambda_a^c}{2} \right] q_f = U[x] q_f. \quad (3.9)$$

$U[x]$ é a forma geral de matrizes $SU(3)$ (matrizes unitárias de determinante 1) cujas componentes são funções das coordenadas espaço-temporais. λ_a^c é a a -ésima das oito matrizes de Gell-Mann, matrizes que aqui atuam sobre os índices de cor c dos campos dos quarks. Se para dada transformação $\Theta_a(x) = \Theta_a$, isto é, as componentes não dependem das coordenadas, então a transformação é global e $\mathcal{L}_{\text{free}}$ é invariante sob tal transformação. Porém, se essa transformação é promovida a uma transformação local, para que a lagrangiana mantenha-se invariante sob tal transformação, a derivada parcial ∂_μ deve ser substituída por uma derivada covariante definida como

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \sum_{a=1}^8 A_{\mu,a} \frac{\lambda_a^c}{2}, \quad (3.10)$$

em que são definidos oito campos de gauge $A_{\mu,a}$ necessários para que $D_\mu q_f \rightarrow U[x] D_\mu q_f$ e que consequentemente $\sum_f \bar{q}_f (i\mathcal{D} - m_f) q_f$ seja invariante sob a transformação local. Para tanto, esses campos devem se transformar segundo

$$A_{\mu,a} \frac{\lambda_a^c}{2} \rightarrow U[x] A_{\mu,a} \frac{\lambda_a^c}{2} U^\dagger[x] - \frac{i}{g} \partial_\mu U[x] U^\dagger[x]. \quad (3.11)$$

Cada campo de gauge é associado a um tipo de glúon, e g é a constante de acoplamento da QCD, constante que faz um papel análogo à carga elementar e no eletromagnetismo. A necessidade de

uma lagrangiana livre para os campos de gauge justifica o segundo termo de (3.7), com

$$G_{\mu\nu,a} = \partial_\mu A_{\nu,a} - \partial_\nu A_{\mu,a} + gf_{abc}A_{\mu,b}A_{\nu,c}. \quad (3.12)$$

A forma desse termo é assim imposta para que ele seja invariante sob a operação definida em (3.11).

3.3 Lagrangiana quiral

Estabelecendo os projetores de mão direita P_R e de mão esquerda P_L tais que

$$P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2}, \quad P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad P_R P_R = P_R, \quad P_L P_L = P_L, \quad P_R P_L = P_L P_R = 0, \quad P_R + P_L = 1, \quad (3.13)$$

podemos definir um vetor coluna q com componentes q_f ($f \in \{u, d, s\}$), e suas projeções de mão direita q_R e mão esquerda q_L :

$$q \equiv \begin{pmatrix} q_u \\ q_d \\ q_s \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \quad q_R \equiv P_R q = \begin{pmatrix} P_R u \\ P_R d \\ P_R s \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

e q_L segue analogamente. Consideramos aqui, por simplicidade, apenas os chamados quarks leves (up, down, strange), mesmo porque a teoria efetiva quiral que é exposta nesse capítulo atua em um regime de energias em que somente hádrons formados por esses quarks são produzidos. Sendo M a matriz $\text{diag}(m_u, m_d, m_s)$, matriz que define as massas dos quarks e que atua sobre os índices de sabor, podemos escrever \mathcal{L}_{QCD} como

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{q}_R i \not{D} q_R + q_L i \not{D} q_L - \bar{q}_R M q_L - \bar{q}_L M q_R - \sum_a \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a} G_a^{\mu\nu}. \quad (3.15)$$

A lagrangiana quiral é definida como $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \mathcal{L}_{\text{QCD}}|_{m_f=0}$, isto é, trata-se da lagrangiana da interação forte uma vez que as massas dos quarks são consideradas nulas. Essa lagrangiana é invariante sob as transformações

$$q_R \rightarrow U_R q_R = R e^{-i\Theta_0^R} q_R = \exp \left[-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a^R \frac{\lambda_a}{2} \right] e^{-i\Theta_0^R} q_R \quad (3.16)$$

e $q_L \rightarrow U_L q_L$, com U_L e L definidos de forma análoga. Repare que se tratam de transformações globais que atuam sobre os índices de sabor (diferentemente de (3.9), transformações locais que atuam sobre os índices de cor)². Dessa forma, temos uma simetria global $U(3)_L \times U(3)_R$ e, segundo o teorema de Noether, $2 \times (8 + 1) = 18$ correntes conservadas no campo quiral clássico:

$$L^{\mu,a} = \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L, \quad R^{\mu,a} = \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R, \quad (3.17)$$

² λ_a são as mesmas matrizes de Gell-Mann, que agora atuam sobre os índices de sabor, e por isso não mais possuem o índice c (um índice f é subentendido). Se estivéssemos considerando os seis quarks, as matrizes seriam outras, mas de qualquer forma seriam geradores do grupo $SU(6)$, assim como as matrizes de Gell-Mann são geradores do grupo $SU(3)$.

ou equivalentemente

$$V^{\mu,a} = R^{\mu,a} + L^{\mu,a} = \bar{q}\gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q, \quad A^{\mu,a} = R^{\mu,a} - L^{\mu,a} = \bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} q, \quad (3.18)$$

com $a \in \{0, 1, \dots, 8\}$, visto que aqui definimos $\lambda^0/2 = I$, em que I é a matriz identidade. As correntes $V^{\mu,a}$ estão associadas às transformações tais que $\Theta_0^R = \Theta_0^L \equiv \Theta_0$ e $R = L \equiv V$, isto é, as componentes de mão esquerda e direita são transformadas sob mesmos ângulos de fase. $A^{\mu,a}$, por sua vez, estão associadas às transformações tais que $\Theta_0^R = -\Theta_0^L$ e $R = L^\dagger \equiv A$, isto é, tratam-se de transformações sob ângulos de fase de sinais contrários.

Porém, $A^{\mu,0}$ só é conservada classicamente, visto que, devido à imposição de regras de comutação decorrentes da quantização dos campos, $[H_{\text{QCD}}, A^{0,a}] \neq 0$ e logo a carga não é conservada. Esse tipo de situação (uma corrente não conservada quanticamente ainda que o seja classicamente) é conhecida como anomalia. Dessa forma, a simetria de sabor inerente à lagrangiana quirral quântica $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$ é reduzida a $SU(3)_V \times SU(3)_A \times U(1)_V$, ou equivalentemente $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$. As correntes conservadas são dadas por (3.17) e (3.18), com $a \in \{1, \dots, 8\}$, e $V^\mu \equiv V^{\mu,0}$. Essas correntes são referentes à invariância da lagrangiana quirral sob transformações $q_L \rightarrow Lq_L$, $q_R \rightarrow Rq_R$ e $q \rightarrow e^{-i\Theta_0} q$.

Essas transformações não mantêm \mathcal{L}_{QCD} invariante, pois com sua atuação o termo

$$\sum_f m_f \bar{q}_f q_f = \bar{q}_R M q_L + \bar{q}_L M q_R \quad (3.19)$$

é modificado. Dessa forma, esse termo quebra explicitamente a simetria $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ — o termo "explicitamente" é aqui empregado pois é uma quebra proveniente das leis que regem o sistema, o que contrapõe a quebra espontânea que trataremos na seção 3.4. Assim as correntes que são conservadas pelos campos quirais não são conservadas em uma dinâmica regida pela QCD: nesse caso essas correntes têm divergências não-nulas, divergências que dependem de M e anulam-se apenas quando $M \rightarrow 0$. Exceção é a corrente V^μ , que tem divergência nula mesmo quando $M \neq 0$. Isto é fácil de perceber ao notar-se que $V^\mu = \sum_f V_f^\mu$, em que $V_f^\mu = \bar{q}_f \gamma^\mu q_f$ é a corrente de sabor f , corrente que é associada às transformações $q_f \rightarrow e^{-i\Theta_0^f} q_f$. Essas transformações também deixam o termo (3.19) invariante, o que implica na conservação de sabor por parte da QCD.

3.4 Quebra espontânea de simetria

Quando as leis que regem um sistema são invariantes segundo uma dada transformação, temos estabelecida uma simetria dessas leis. Apesar disso, pode ocorrer que o estado físico em si mesmo, ainda que seja regido por essas leis, não possua tal simetria, o que configura a chamada quebra espontânea de simetria. Um exemplo simples e intuitivo é o caso de uma vareta que é pressionada pelas extremidades (fig. 3.1). Ainda que inicialmente a vareta apresente uma simetria axial em relação ao eixo que passa por suas extremidades, e que as forças que atuam sobre ela também se mantenham na direção desse eixo, para uma pressão suficientemente grande a vareta se curvará para uma dada direção, perdendo aquela simetria. No primeiro caso temos um equilíbrio estável e simétrico, mas com o aumento da pressão tal configuração torna-se instável, e o sistema passa a apresentar diversos estados fundamentais equivalentes (a curvatura da vareta em uma das infinitas direções perpendiculares ao eixo) e que quebram a simetria axial. Qual desses estados fundamentais o sistema assumirá (isto é, para qual direção a vareta se curvará) soa arbitrário ao observador, pois depende de pequenas perturbações agindo sobre o sistema.

Um dos primeiros casos em que esse tipo de situação recebeu maior atenção na literatura científica ocorreu no séc. XIX, nas tentativas de determinar as configurações de equilíbrio que um fluido

incompreensível pode assumir sob a influência de seu próprio campo gravitacional, problema de grande interesse para estabelecer os formatos possíveis de corpos celestes. Impondo que tal fluido assumia a forma de um esferoide (fig. 3.1), ocorre que, se o momento angular do fluido for suficientemente baixo, a forma do esferoide é dada por apenas um tipo de solução: os esferoides de Maclaurin, que são axialmente simétricos em relação ao eixo de rotação. Há, porém, certo limiar de momento angular acima do qual os esferoides de Maclaurin tornam-se soluções instáveis, e surgem como soluções os esferoides de Jacobi, soluções estáveis e de menor energia que os esferoides de Maclaurin, mas sem a simetria axial em torno do eixo de rotação [Fit, BCM⁺00, BM09].

Outro exemplo importante de quebra espontânea de simetria ocorre no estudo de materiais ferromagnéticos. Acima de sua temperatura de Curie um dado material não apresenta magnetização própria, pois, devido à alta agitação térmica, os momentos magnéticos das partículas do material encontram-se alinhados aleatoriamente. Macroscopicamente não há direção privilegiada: a magnetização média $\langle \vec{M} \rangle$ em qualquer região macroscópica é nula. Assim, o sistema apresenta uma simetria $SO(3)$, pois uma rotação sobre qualquer eixo deixa o sistema macroscopicamente invariante. Se a temperatura é colocada abaixo da temperatura de Curie, porém, os momentos magnéticos serão capazes de estabilizar-se e apontarão conjuntamente para uma dada direção, o que configurará um momento magnético macroscópico do material nessa direção ($\langle \vec{M} \rangle \neq \vec{0}$), direção que não é determinada *a priori*. Nesse caso, somente sobre um eixo definido nessa direção é que o sistema será invariante por rotações. O sistema, portanto, assumirá uma simetria menor, $SO(2)$ [Sch03, dO05, Qui13].

Em todos esses casos que envolvem quebra espontânea de simetria, temos um problema físico que, dependendo do comportamento de algum parâmetro, ora apresenta um estado de mínima energia (isto é, um estado fundamental) estável e que respeita essa simetria, ora esse estado fundamental simétrico torna-se instável, e concomitantemente surge um conjunto de estados fundamentais equivalentes entre si e estáveis, mas que individualmente não respeitam àquela simetria. A passagem de uma situação para outra ocorre com a variação de algum parâmetro e uma bifurcação das soluções em um dado valor crítico desse parâmetro. A quebra espontânea de simetria ocorre na seleção um tanto quanto arbitrária de um estado de mínima energia particular dentre um conjunto de estados fundamentais equivalentes. Nesse sentido, ao invés do termo "quebra espontânea de simetria", alguns autores privilegiam o termo "simetria escondida", por entender que a simetria em certo sentido não é "quebrada", pois ainda existe na física do problema (ainda que não se manifeste em um estado físico específico).

No contexto de física das partículas e de matéria condensada, o conceito de quebra espontânea de simetria assumiu um papel central. O teorema de Goldstone prevê a emergência dos chamados bósons de Goldstone com esse tipo de fenômeno. Inspirado pela descoberta desses bósons por Nambu dentro do contexto da teoria BCS de supercondutividade, Goldstone elucidou esse fenômeno de forma mais geral, sob o prisma de teoria quântica de campos [Lai81]. Os bósons de Goldstone são partículas (ou quasipartículas) de massa nula e, em uma teoria quântica, são relacionados aos números quânticos e ao comportamento sob transformações das cargas que, devido à quebra de simetria, não são conservadas. O número de bósons que emergem da quebra é definido pelo número de geradores da simetria escondida [Sch03]. Da quebra de simetria em materiais magnéticos surgem bósons de Goldstone como mágnons, em problemas de matéria condensada bósons de Goldstone podem surgir como fônons, etc [Leu96, KMW05]. Em física das partículas o conceito de quebra espontânea de simetria é crucial no mecanismo de Higgs, mecanismo que permite que bósons de gauge adquiram massa, o que é essencial para modelar a força eletrofraca. Esse mecanismo alia a

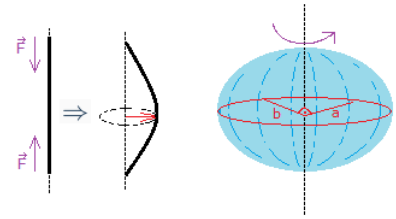


Figura 3.1: À esquerda, temos uma representação esquemática de uma vareta que, pressionada pelas extremidades, curva-se para uma dada direção. À direita, temos um fluido que, sob a influência da gravidade, assume a forma de um esferoide e gira ao redor de um de seus eixos. Se o momento angular do fluido for suficientemente alto, $a \neq b$ e a simetria axial é perdida.

invariância de gauge à quebra espontânea de simetria — basicamente os bósons de Goldstone são reabsorvidos nos campos de gauge via reparametrizações dos campos, e dessa reabsorção é que as partículas mediadoras da interação de gauge podem adquirir massa [Lai81, Gri04].

Sem levar em conta a quebra espontânea de simetria, esperaríamos que, como a lagrangiana quiral $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$ é simétrica segundo uma transformação $SU(3)_V \times SU(3)_A \times U(1)_V$, os estados fundamentais fossem organizados em multipletos degenerados possuindo a dimensionalidade de representações irredutíveis desse grupo em questão [Sch03]. Porém, isso levaria a um espectro de partículas bastante diferente do que observamos: é conhecido desde o *Eightfold Way* de Gell-Mann que bárions e mésons organizam-se segundo representações irredutíveis do grupo $SU(3)$ (em especial nos chamados octetos e decupletos), ou seja, não é o grupo $SU(3) \times SU(3)$ que serve como base (sequer aproximada) para a organização dos hádrons. Em especial, a conservação da corrente axial $A^{\mu,a}$ ($a \in \{1, \dots, 8\}$) implicaria que as partículas estivessem divididas em pares de grupos análogos, exceto pela paridade oposta, o que não é observado [Sch03, Bor08]. Nesse sentido, certos tipos de partículas deveriam formar grupos cujas massas fossem aproximadamente iguais — entre esses grupos, por exemplo, estão os mésons ρ e a_1 , mas empiricamente é constatado que esses mésons possuem massas da ordem de 700 MeV e 1200 MeV, respectivamente [Koc97]. Somando-se a tudo isso, anteriormente à QCD já existiam evidências da chamada corrente axial parcialmente conservada (PCAC, do inglês *partially conserved axial current*), obtidas a partir de estudos de álgebra de correntes. A PCAC fundamenta importantes propriedades das interações fortes, como a relação de Goldberger-Treiman [Koc97].

Pode-se conciliar todos esses fatos considerando que a simetria $SU(3)_A$ seja espontaneamente quebrada, ou seja, que o vácuo (*i.e.*, o estado fundamental) da QCD quiral não respeite tal simetria. Isto posto, como o grupo que define essa simetria possui oito geradores, o teorema de Goldstone prevê que a QCD quiral detenha oito bósons de Goldstone. Esses bósons não têm massa e possuem números quânticos e comportamento sob transformações que emulam as cargas $A^{0,a}$ ($a \in \{1, \dots, 8\}$). Em especial, eles possuem paridade negativa e transformam-se como um octeto sob transformações $SU(3)_V$. Os mésons do octeto pseudoescalar de mésons (píons, káons e η^3) são os candidatos ideais para exercer esse papel, mesmo porque eles possuem massas de ordem de magnitude consideravelmente abaixo das massas dos demais hádrons — que ainda assim eles possuam massas não-nulas pode ser explicado pela quebra explícita de simetria dada pelo termo de massa (3.19) (por causa disso são ocasionalmente denominados pseudobósons de Goldstone). A quebra espontânea também explica a organização dos hádrons em representações meramente de $SU(3)$ e a ausência da bipartição das partículas em dois grupos análogos de paridades distintas (mais especificamente, por exemplo, pode-se explicar quantitativamente a diferença de massa entre os mésons ρ e a_1). Nesse cenário também é esperado que a corrente axial seja apenas parcialmente conservada — pode-se mostrar que as divergências das correntes axiais $A^{\mu,a}$ são proporcionais a operadores relacionados aos campos dos bósons de Goldstone, e que, devido à baixa massa desses bósons, existe uma conservação parcial [Koc97, Sch03, Bor08].

Usando o teorema de Goldstone aliado a um formalismo de teoria de grupos, é possível mostrar que há um mapeamento isomórfico entre os bósons de Goldstone e o grupo $SU(3)$ [Sch03, Bor08]. Assim, é possível parametrizar esses bósons segundo

$$U(x) = \exp\left(i\frac{\phi(x)}{F_0}\right), \quad (3.20)$$

³Esse octeto é dado na fig. 1.1. Repare que η' não é considerado parte do octeto — esse méson seria um bóson de Goldstone apenas se a simetria ligada à corrente $A^{\mu,0}$ fosse uma simetria escondida da lagrangiana quiral. Essa simetria, porém, é quebrada pela própria lagrangiana quântica, o que configura a anomalia que discutimos na seção 3.3. Dessa forma, η' possui massa consideravelmente maior do que a massa dos mésons do octeto pseudoescalar [Qui83].

$$\phi(x) = \sum_{a=1}^8 \phi_a(x) \lambda_a = \begin{pmatrix} \phi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_8 & \phi_1 - i\phi_2 & \phi_4 - i\phi_5 \\ \phi_1 + i\phi_2 & -\phi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_8 & \phi_6 - i\phi_7 \\ \phi_4 + i\phi_5 & \phi_6 + i\phi_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\phi_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

$\phi_a(x)$ deve ser um campo escalar para que $U(x) \in SU(3)$. F_0 é uma constante livre que pode ser associada ao decaimento fraco do pión via teorias efetivas e calibrada experimentalmente, e assim é estabelecido que $F_0 \cong 93$ MeV.

A transformação sob $SU(3)_L \times SU(3)_R$ realiza-se nessa parametrização como $U \rightarrow LUR^\dagger$. O vácuo da QCD quiral é associado à $U = 1$ (ou seja, ao anulamento dos campos dos bósons), e vemos que de fato ele é invariante sob $SU(3)_V$ (isto é, $R = L \equiv V$), mas não é invariante sob $SU(3)_A$ (isto é, $R = L^\dagger \equiv A$), como esperamos do vácuo da QCD quiral. A transformação dos bósons sob $SU(3)_V$ é dada por $U \rightarrow VUV^\dagger$, e assim também $\phi(x) \rightarrow V\phi(x)V^\dagger$, com o que pode-se provar que $[V^{0,a}, \phi_b] = if_{abc}\phi_c$. Isto é, os bósons de Goldstone transformam-se como um octeto sob $SU(3)_V$, e nisso emulam o comportamento das cargas $A^{0,a}$ [Sch03].

3.5 Lagrangianas efetivas quirais

A teoria de perturbação quiral (ChPT, do inglês *chiral perturbation theory*) é uma teoria efetiva que visa tratar a dinâmica da QCD em baixas energias. O regime de interesse é, a princípio, um regime em que os graus de liberdade assintóticos hadrônicos constituem-se apenas dos bósons de Goldstone. Para tanto, os processos abordados com essa teoria devem estar limitados a energias típicas inferiores à massa m_ρ do méson ρ ($m_\rho \simeq 770$ MeV), o hádron mais leve para além daqueles bósons. No entanto, conforme será exposto nas seções 3.6 e 3.7, a ChPT pode ser estendida e aplicada a processos nos quais outros graus de liberdade são relevantes, como bárions, mésons pesados, mésons vetoriais, etc. Ainda assim, aquele limite energético não é drasticamente mudado: estima-se que o regime de validade da ChPT são processos com energias típicas de até $\Lambda_{\text{ChPT}} = 4\pi F_0 \cong 1$ GeV, constante que faz o papel do *cutoff* Λ definido na seção 3.1. Desta maneira, o conceito de "perturbação" aqui usado não é o conceito que utiliza-se quando, por exemplo, é dito que a QED é uma teoria perturbativa, isto é, uma teoria em que se realiza uma expansão baseada na constante de acoplamento da interação (expansão que é convergente e pode ser truncada, pois termos de ordem suficientemente alta são desprezíveis). Nesse sentido estrito do termo, a ChPT é uma teoria não-perturbativa, pois na mera geração do pión estão inclusas influências de infinitas ordens perturbativas da constante de acoplamento da QCD. Em vez disso, a expansão sobre a qual são realizados cálculos perturbativos na ChPT ocorre em função das massas e momentos dos bósons de Goldstone [Koc97]. Isso é coerente com o fato de que a interação entre esses bósons tende a zero no limite de momento nulo — o que também ocorre na interação com núcleons, fato que fundamentou historicamente, por exemplo, a substituição do modelo de Yukawa $\mathcal{L} \propto \bar{N}\gamma\pi N$ pelo modelo de acoplamento gradiente $\mathcal{L} \propto \bar{N}\gamma^\mu\partial_\mu\pi N$ para a interação pión-núcleon.

Como dito na seção 3.1, a lagrangiana efetiva mais geral compatível com uma dada simetria, lagrangiana esta que possui infinitos termos, conduz à matriz S mais geral compatível com aquela simetria. No caso da ChPT, a simetria em questão é a simetria quiral $SU(3)_V \times SU(3)_A \times U(1)_V$ (ainda que $SU(3)_A$ seja uma simetria escondida) e os infinitos termos da lagrangiana efetiva podem ser organizados segundo o método de contagem de potências de Weinberg. Esse método consiste em ponderar cada diagrama de Feynman proveniente da lagrangiana segundo os momentos e as massas envolvidos no diagrama, ponderamento que atribui a cada diagrama uma dada ordem quiral $\mathcal{O}(p^n)$ ($n \in \{0, 1, 2, \dots\}$). Como procura-se uma teoria que descreva o sistema em baixas energias, essa expansão é apropriada e os diagramas de ordens mais baixas são os mais importantes. É atribuída ordem $\mathcal{O}(p^n)$ a cada termo da lagrangiana que origina diagramas de ordem $\mathcal{O}(p^n)$ ou superior (o

acrécimo de *loops* em um diagrama tende a aumentar sua ordem quiral). Uma derivada parcial ∂^μ em um termo da lagrangiana, por exemplo, tende a originar um termo p^μ no vértice da interação, e assim acrescenta uma ordem p ao termo no qual aparece na lagrangiana — dessa forma, um termo com seis derivadas parciais terá, no mínimo, ordem $\mathcal{O}(p^6)$. $\mathcal{L}^{(n)}$, a lagrangiana efetiva de ordem quiral $\mathcal{O}(p^n)$, é definida como a lagrangiana efetiva contendo todos termos de ordem $\mathcal{O}(p^n)$. A rigor as lagrangianas efetivas quirais não são renormalizáveis, mas a ChPT é renormalizável ordem a ordem, no sentido em que, para dada ordem $\mathcal{O}(p^n)$ de interesse, todas divergências provenientes de diagramas dessa ordem podem ser absorvidas em parâmetros da lagrangiana $\mathcal{L}^{(n)}$ [Sch03].

Para a construção de teorias efetivas, é útil estender a lagrangiana da QCD para uma lagrangiana $\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 + \mathcal{L}_{\text{ext}}$, em que \mathcal{L}_{ext} envolve campos externos [Pic95, Sch03, Bor08]. Uma maneira como \mathcal{L}_{ext} pode ser definida é

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = \bar{q}\gamma_\mu \left(v^\mu + \frac{1}{3}v_{(s)}^\mu + \gamma_5 a^\mu \right) q - \bar{q}(s + i\gamma_5 p)q. \quad (3.22)$$

Com exceção de $v_{(s)}^\mu$, os campos externos têm índices de cor: $v^\mu = \sum_a \frac{\lambda_a}{2} v_a^\mu$, $a^\mu = \sum_a \frac{\lambda_a}{2} a_a^\mu$, $s = \sum_a \lambda_a s_a$, $p = \sum_a \lambda_a p_a$. A lagrangiana original da QCD (3.7) pode ser recobrada definindo $s = M$ e anulando os demais campos externos. Também podemos escrever

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = \bar{q}_L \gamma_\mu \left(l^\mu + \frac{1}{3}v_{(s)}^\mu \right) q_L + \bar{q}_R \gamma_\mu \left(r^\mu + \frac{1}{3}v_{(s)}^\mu \right) q_R - \bar{q}_R(s - ip)q_L - \bar{q}_L(s + ip)q_R, \quad (3.23)$$

com $v_\mu = \frac{1}{2}(r_\mu + l_\mu)$, $a_\mu = \frac{1}{2}(r_\mu - l_\mu)$.

Para que essa lagrangiana respeite a simetria quiral, os campos devem transformar-se adequadamente:

$$r_\mu \rightarrow R r_\mu R^\dagger + iR \partial_\mu R^\dagger, \quad l_\mu \rightarrow L l_\mu L^\dagger + iL \partial_\mu L^\dagger, \quad v_\mu^{(s)} \rightarrow v_\mu^{(s)} - \partial_\mu \Theta, \quad (3.24)$$

$$\chi \equiv s + ip \rightarrow L(s + ip)R^\dagger, \quad s - ip \rightarrow R(s - ip)L^\dagger, \quad (3.25)$$

em que agora permitimos que as transformações parametrizadas por R , L e Θ sejam transformações locais. De fato, embora simetrias globais ofereçam restrições importantes a um sistema, elas não são suficientes para determinar o seu comportamento em baixas energias. Para tanto, é preciso analisar as identidades de Ward satisfeitas pelas funções de Green do sistema. Pode-se provar que todas essas identidades são equivalentes à imposição de uma invariância sob transformações locais por parte do funcional gerador (3.2) da interação. Essas identidades ficam codificadas e podem ser recuperadas a partir desse funcional. Daí advém a conveniência de construir lagrangianas com simetria local [Sch03].

A partir desse formalismo também é possível reproduzir lagrangianas de interações não-fortes definindo apropriadamente os campos externos. Por exemplo, é possível reproduzir a lagrangiana da interação eletromagnética entre quarks e fótons definindo $r_\mu = l_\mu = -eQ A_\mu$, em que A_μ é o campo eletromagnético e $Q = \text{diag}(2/3, -1/3, -1/3)$ estabelece a carga dos quarks leves em unidades da carga elementar $e = |e|$. Outro exemplo é em relação às interações fracas: para que seja reproduzida a lagrangiana que rege a interação entre quarks mediada pelo bóson W , basta definir $r_\mu = 0$ e $l_\mu = -\frac{g'}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ T_+ + h.c.)$, em que T_+ é a matriz CKM e g' é uma constante de acoplamento relacionada ao Modelo Padrão. Incluir a interação mediada pelo bóson Z também é possível, definindo apropriadamente r_μ , l_μ , $v_\mu^{(s)}$.

Para construir uma teoria efetiva que envolve os bósons de Goldstone, é bastante conveniente

utilizar a parametrização (3.11). Para tanto, deve-se construir uma derivada covariante que reproduza o comportamento de U sob transformações $SU(3)_R \times SU(3)_L$ ⁴:

$$U \rightarrow LUR^\dagger, \quad D_\mu = \partial_\mu + ir_\mu - il_\mu, \quad \Rightarrow \quad D_\mu U \rightarrow LD_\mu UR^\dagger. \quad (3.26)$$

A lagrangiana efetiva quirral mais geral de ordem dominante é

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] + \frac{F_0^2 B_0}{2} \text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger). \quad (3.27)$$

Anulando os campos externos, temos uma lagrangiana que rege a dinâmica dos bósons de Goldstone entre si:

$$\mathcal{L}_G^{(2)} = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}[\partial_\mu U (\partial^\mu U)^\dagger] = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (3.28)$$

em que \mathcal{L}_{int} descreve a interação de diferentes bósons de Goldstone entre si. Vemos que esses bósons são, de fato, partículas sem massa, e fica claro que a escolha de $F_0^2/4$ como constante multiplicativa é fixada para que seja reproduzida a lagrangiana livre de campos escalares. As oito correntes de Noether $J_A^{\mu,a}(x)$ associadas às transformações $R = L^\dagger \equiv A$ podem ser calculadas, e mostra-se que

$$\langle 0 | J_A^{\mu,a}(x) | \phi^b(p) \rangle \cong -F_0 \langle 0 | \partial^\mu \phi_a(x) | \phi^b(p) \rangle = ip^\mu F_0 \exp(-ip \cdot x) \delta^{ab}, \quad (3.29)$$

$$\langle 0 | \partial_\mu J_A^{\mu,a}(x) | \phi^b(p) \rangle \cong m_a^2 F_0 \exp(-ip \cdot x) \delta^{ab}, \quad (3.30)$$

relações estas que fundamentam a PCAC na teoria quirral. Fica evidente que nessa teoria a corrente axial não é conservada — nesse sentido F_0 é uma condição necessária e suficiente de quebra de simetria. De qualquer forma há uma conservação parcial da corrente axial, devido à baixa massa dos bósons de Goldstone [Koc97, Sch03, Bor08].

O termo de massa (3.19) a rigor não é invariante sob transformações quirais. Para levar em consideração as massas não-nulas dos quarks, é necessário somar à lagrangiana quirral de interesse (por exemplo, (3.28)) termos que reproduzam o comportamento de (3.19) sob transformações quirais. Isso pode ser feito estabelecendo que $M \rightarrow LMR^\dagger$. Se isso é estabelecido, (3.19) torna-se invariante sob transformações quirais, e a presença das massas dos quarks em dada ordem quirral pode ser recobrada levando-se em consideração a existência de um *building block* M que transforma-se dessa maneira, isto é, construindo-se lagrangianas com simetria quirral em função de U , M e demais graus de liberdade de interesse. Dessa forma, definindo $\chi = M$ em (3.27), pode-se recuperar a influência das massas dos quarks na lagrangiana quirral de ordem dominante [Wis93]. Expandindo a lagrangiana apropriadamente, é possível identificar as massas adquiridas pelos bósons de Goldstone, o que permite confirmar a relação de Gell-Mann-Okubo:

$$4M_K^2 = 3M_\eta^2 + M_\pi^2 = 4B_0(m + m_s), \quad (3.31)$$

em que na fórmula é considerado $m_u = m_d \equiv m$. Daqui tiramos uma interpretação da constante B_0 , constante que também surge na relação $3B_0 F_0^2 = -\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$. $\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \neq 0$ é uma condição suficiente

⁴ Outras derivadas covariantes poderiam ser definidas, dependendo do comportamento de um campo A que deseja-se reproduzir:

$$\begin{aligned} A \rightarrow RAL^\dagger, \quad D_\mu &\equiv \partial_\mu - ir_\mu + il_\mu &\Rightarrow & D_\mu A \rightarrow RD_\mu L^\dagger \\ A \rightarrow RAR^\dagger, \quad D_\mu &\equiv \partial_\mu - ir_\mu + ir_\mu &\Rightarrow & D_\mu A \rightarrow RD_\mu R^\dagger \\ A \rightarrow LAL^\dagger, \quad D_\mu &\equiv \partial_\mu - il_\mu + il_\mu &\Rightarrow & D_\mu A \rightarrow LD_\mu L^\dagger \end{aligned}$$

de quebra espontânea de simetria, representando algo parecido com o que a magnetização média $\langle \vec{M} \rangle$ representa perante os materiais ferromagnéticos discutidos na seção 3.4. Utilizando os valores empíricos das massas dos bósons de Goldstone, a lagrangiana em ordem dominante permite estimar as proporções entre as massas dos quarks [Bor08, Pic95]:

$$m_u : m_d : m_s = 0.55 : 1 : 20, \quad (3.32)$$

proporções que, ainda que estejam sujeitas a correções provenientes de lagrangianas de maior ordem quiral, são condizentes com os valores atualmente estimados para essas massas [eaPDG14].

Em teorias efetivas também é conveniente definir o campo ξ tal que $U = \xi\xi$. Assim:

$$\xi = \exp\left(i\frac{\phi(x)}{2F_0}\right), \quad \xi \rightarrow \sqrt{LUR^\dagger} \equiv K\xi R^\dagger. \quad (3.33)$$

$K(R, L, U) \in SU(3)$ é tal que $K = \sqrt{LUR^\dagger}R\xi^\dagger$. Repare que K depende dos campos dos bósons de Goldstone. Decorre também que $\xi \rightarrow L\xi K^\dagger$ e, na medida em que os bósons de Goldstone transformam-se como $\phi(x) \rightarrow V\phi(x)V^\dagger$ sob rotações $SU(3)_V$ ($R = L \equiv V$), $K = V$ para esse subgrupo.

Especialmente úteis são os elementos

$$\Gamma_\mu^V = \frac{1}{2} \left(\xi^\dagger (\partial_\mu - ir_\mu) \xi + \xi (\partial_\mu - il_\mu) \xi^\dagger \right), \quad \Gamma_\mu^A = \frac{i}{2} \left(\xi^\dagger (\partial_\mu - ir_\mu) \xi - \xi (\partial_\mu - il_\mu) \xi^\dagger \right), \quad (3.34)$$

que transformam-se segundo

$$\Gamma_\mu^V \rightarrow K\Gamma_\mu^V K^\dagger + K\partial_\mu K^\dagger, \quad \Gamma_\mu^A \rightarrow K\Gamma_\mu^A K^\dagger. \quad (3.35)$$

Anulando os campos externos em Γ_μ^V e Γ_μ^A , obtemos [Cho92]

$$\mathcal{V}_\mu = \frac{1}{2} \left(\xi^\dagger \partial_\mu \xi + \xi \partial_\mu \xi^\dagger \right) = \frac{1}{2(2F_0)^2} [\phi, \partial_\mu \phi] - \frac{1}{24(2F_0)^4} [\phi, [\phi, [\phi, \partial_\mu \phi]]] + \mathcal{O}(\phi^6), \quad (3.36)$$

$$\mathcal{A}_\mu = \frac{i}{2} \left(\xi^\dagger \partial_\mu \xi - \xi \partial_\mu \xi^\dagger \right) = -\frac{1}{(2F_0)} \partial_\mu \phi + \frac{1}{6(2F_0)^3} [\phi, [\phi, \partial_\mu \phi]] + \mathcal{O}(\phi^5). \quad (3.37)$$

\mathcal{V}_μ possui um número par de bósons em cada termo, enquanto \mathcal{A}_μ possui um número ímpar. Tais elementos são úteis em teorias efetivas envolvendo objetos pesados.

3.6 Heavy quark

A simetria de heavy quark ocorre em um limite de certa forma oposto ao limite quiral, pois ela é obtida quando considera-se que a massa m_Q de um dado quark tende ao infinito. Essa é uma consideração razoável para os quarks charm e bottom⁵, pois as energias limiares para a produção desses quarks encontram-se além do regime de baixas energias relevante em muitos processos estudados

⁵O quark top também é um quark pesado, mas as aplicações da simetria de heavy quark para esse quark são bem mais limitadas, pois a vida média do quark top é tão curta que não permite que ele participe de um estado ligado: sendo o único quark mais pesado que o bóson W , ele sofre o decaimento $t \rightarrow W + b$ antes que um processo de hadronização possa ocorrer [eaPDG14].

em física hadrônica, e por isso são denominados quarks pesados [Sch03]. Esse limite é mais tratável analiticamente basicamente porque $m_Q \gg \Lambda_{\text{QCD}} \simeq 0.2 \text{ GeV}$, em que Λ_{QCD} é a escala da QCD. Λ_{QCD} é um limiar natural entre o regime de altas energias da QCD, regime este perturbativo, e o regime de baixas energias, regime este não-perturbativo. Assim um quark pesado $m_Q \gg \Lambda_{\text{QCD}}$ será um objeto compacto (de tamanho típico $R \ll \Lambda_{\text{QCD}}^{-1}$) e seu campo de cor, devido ao seu caráter perturbativo, será qualitativamente similar ao campo eletromagnético. A complicação maior estará nas componentes leves do hádron, que formarão um chamado *brown muck* e serão responsáveis pela estrutura não-perturbativa do hádron [Geo91, Neu94].

Nesse limite de massa infinita a quadrivelocidade v do heavy quark é uma grandeza bem definida durante todo o processo, isto é, há uma regra de superseleção de velocidade [Geo90, Geo91, Neu94, CDDB⁺97]: como sua massa tende ao infinito, pode-se grosso modo dizer que é requerida uma infinita variação de momento para alterar sua velocidade. Logo, ela será aproximadamente constante durante o processo de interação. Em especial, os quarks com diversas velocidades não se acoplarão, um dado heavy quark de velocidade v_1 estará associado a um campo distinto e desacoplado do campo de um heavy quark de velocidade v_2 . Isso pode ser intuído considerando um heavy quark de momento P^μ que, devido a uma interação, adquira momento $P^{\mu'} = P^\mu + \Delta P^\mu$:

$$P^\mu = m_Q v^\mu + k^\mu, \quad P^{\mu'} = m_Q v^{\mu'} + k^{\mu'}, \quad \frac{\Delta P^\mu}{m_Q} = v^{\mu'} - v^\mu + \frac{k^{\mu'} - k^\mu}{m_Q}. \quad (3.38)$$

Como usual em relatividade, as quadrivelocidades têm módulo unitário: $v^2 = 1$. Estivesse o heavy quark em sua camada de massa, teríamos $P^2 = m_Q^2$ e $k^\mu = 0$, mas aqui permitimos a existência de um k^μ não-nulo ainda que residual (da ordem de Λ_{QCD}), representando um desvio da camada de massa por parte do heavy quark. Se quisermos impor $\Delta P/m_Q \rightarrow 0$, isso é, trabalharmos em um regime de baixas energias em que a energia transferida é muito menor do que a massa do heavy quark (e esse é o tipo de situação que desejamos estudar ao considerarmos m_Q infinita), temos que impor $v^{\mu'} \rightarrow v^\mu$. Dessa forma, a regra de superseleção acima exposta só ocorre quando a interação é mediada pelos chamados *soft gluons*, glúons de baixa energia, isto é, glúons que carregam quadrimento ΔP^μ tal que $\Delta P^\mu \ll m_Q$.

O limite de heavy quark pode ser explorado a partir da decomposição do campo da partícula $q(x)$ em suas chamadas componente pesada $H_v(x)$ e componente leve $h_v(x)$ [Geo91, Neu94, CDDB⁺97, Sch03]:

$$q(x) \equiv \exp(im_Q v \cdot x) q_v(x) = \exp(im_Q v \cdot x) (P_{v+} + P_{v-}) q_v(x) \equiv h_v(x) + H_v(x), \quad (3.39)$$

em que

$$h_v(x) = \exp(im_Q v \cdot x) P_{v+} q_v, \quad H_v(x) = \exp(im_Q v \cdot x) P_{v-} q_v, \quad (3.40)$$

e P_{v+} e P_{v-} são tais que

$$P_{v\pm} = \frac{1 \pm \not{v}}{2}, \quad P_{v\pm} P_{v\pm} = P_{v\pm}, \quad P_{v\pm} P_{v\mp} = 0, \quad P_{v+} + P_{v-} = 1. \quad (3.41)$$

Aplicando a decomposição (3.39) em lagrangianas de interesse, pode-se procurar organizá-las, separando-as em termos de diferentes ordens em m_Q . Aplicando essa decomposição na lagrangi-

ana da QCD (3.7), chega-se a [Neu94]

$$\mathcal{L}_{\text{QCD (HQ)}} = \bar{h}_v i v \cdot D h_v - \bar{H}_v (i v \cdot D + 2m_Q) H_v + \bar{h}_v i \not{D}_\perp H_v + \bar{H}_v i \not{D}_\perp h_v, \quad (3.42)$$

com $D_\perp = D^\mu - v^\mu v \cdot D$. Utilizando as equações de Euler-Lagrange e manipulando as equações, percebe-se que $H_v = \mathcal{O}(1/m_Q) h_v$. De fato [Neu94],

$$H_v = \frac{1}{i v \cdot D + 2m_Q - i\epsilon} i \not{D}_\perp h_v = \frac{1}{2m_Q} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i v \cdot D}{2m_Q} \right)^n i \not{D}_\perp h_v, \quad (3.43)$$

logo somente o primeiro termo da lagrangiana (3.42) possui ordem superior a $\mathcal{O}(1/m_Q)$, o que acarreta um desacoplamento dos campos h_v e H_v nessa ordem. Via (3.43) também é possível obter lagrangianas com tal desacoplamento em ordens $\mathcal{O}(1/m_Q)$, $\mathcal{O}(1/m_Q^2)$, etc. Assim obtemos, no limite de heavy quark, a lagrangiana da QCD em ordem dominante [Geo91, Neu94, CDDB+97]:

$$L_{\text{QCD (HQ)}}^{(0)} = \bar{h}_v i v \cdot D h_v. \quad (3.44)$$

Um procedimento bastante análogo também é realizado em reduções não-relativísticas [Sch03]. No referencial de repouso do heavy quark, $v = (1, 0, 0, 0)$, $\not{v} = \gamma_0$, e assim $P_{v\pm}$ tornam-se análogos aos projetores das componentes leves e pesadas usuais nesse tipo de redução. Como também ocasionalmente é feito em reduções não-relativísticas, a exponencial inserida em (3.39) permite que obtenhamos lagrangianas de ordens $\mathcal{O}(1/m_Q^i)$ com $i \geq 0$, assim são lagrangianas especialmente apropriadas para o limite de heavy quark $1/m_Q \rightarrow 0$. Além do mais, a presença da exponencial implica que derivadas agindo em h_v produzirão potências de $k \ll m_Q$ ao invés de p , assim múltiplas derivadas tendem a ser suprimidas via expansão em k/m_Q [Neu94, Sch03]. É importante notar, porém, que não é realizada nesse formalismo de heavy quark uma redução não-relativística propriamente dita. Em especial, é permitido que o quark pesado atinja velocidades próximas de $c = 1$ [Neu94].

O campo $q(x)$ ($\bar{q}(x)$) descrito pela lagrangiana da cromodinâmica quântica, quando quantizado, pode ser escrito como uma integral de operadores que aniquilam quarks (antiquarks) e criam antiquarks (quarks). Por outro lado, no limite de heavy quark, a ação de $\exp(-im_Q v \cdot x) P_{v\pm}$ sobre $q(x)$ acarreta que o campo h_v apenas aniquile um quark pesado de velocidade v , enquanto H_v apenas crie um antiquark pesado de velocidade v . Assim sendo, o procedimento delineado acima é adequado apenas para a descrição de teorias com quarks pesados. Uma teoria com antiquarks pesados pode ser construída substituindo v por $-v$ no formalismo apresentado nessa seção [Geo91, Neu94], de forma que, nesse caso, h_{-v} seria responsável por aniquilar antiquarks. A regra de superseleção de velocidade implica que campos associados a diferentes velocidades são desacoplados fortemente, de modo que eventuais acoplamentos só poderão ocorrer por mecanismos não-fortes, como por exemplo via correntes fracas. Ainda nesse sentido, todos princípios que aqui expomos têm aplicações mais diretas apenas para hádrons com um único quark (ou antiquark) pesado. Aplicações desses procedimentos para mésons com quark e antiquark que são ambos pesados (como charmônios) são menos intuitivas — nesse caso não esperamos *a priori* que os quarks pesados tenham uma velocidade bem definida, ou que interajam fortemente apenas via *soft gluons* [CDDB+93, Neu94, CDDB+97].

O campo regido pela lagrangiana (3.44) é independente de m_Q , de forma que os dois sabores de quarks pesados são equivalentes nessa ordem da lagrangiana. Com isso, pode-se estabelecer uma simetria $SU(2)$, em que a rotação sob a qual a lagrangiana é invariante é uma rotação que atua sobre os índices de sabores pesados (analogamente ao que é feito em teoria quiral, na qual estabelece-se rotações sobre os índices de sabores leves). Além disso, a lagrangiana também é invariante sob rotações $h_v \rightarrow S h_v$, sendo S o operador usual de rotação de spinores. No referencial de repouso do

heavy quark, podemos escrever

$$S = \exp\left(-i\theta_i S^i\right), \quad S^i = \frac{\epsilon_{ijk}}{2} \frac{\sigma^{jk}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma^0 \gamma^i, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (3.45)$$

$$B = \exp\left(-i\eta_i B^i\right), \quad B^i = \frac{\sigma^{0i}}{2} = \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^i, \quad D_\Lambda = \exp\left(-i\eta_i B^i - i\theta_i S^i\right), \quad (3.46)$$

em que σ^i são as matrizes de Pauli, S define rotações, B *boosts* e D_Λ é uma forma geral de operador que executa transformações de Lorentz. Porém, estando o heavy quark em uma velocidade qualquer, esses operadores devem ser redefinidos para que S mantenha sua identidade como gerador de rotações do spin do heavy quark. Tomando quadrivetores e_μ^i ($i \in \{1, 2, 3\}$) perpendiculares à quadrivelocidade v^μ , perpendiculares entre si e com norma $e^{i2} = -1$, temos

$$S^i = \frac{1}{2} \gamma_5 \psi \not{e}^i = \frac{i}{2} \gamma_5 e_\mu^{(i)} \sigma^{\mu\nu} v_\nu \equiv e_\mu^{(i)} S_\nu^\mu, \quad B^i = \frac{i}{2} \psi \not{e}^i = i e_\mu^{(i)} \gamma_5 S_\nu^\mu. \quad (3.47)$$

Com isso $[S, P_{v\pm}] = 0$ e, sob rotações,

$$h_v \rightarrow \exp(im_Q v \cdot x) P_{v+} S q(x) = S h_v \quad \bar{h}_v \rightarrow \bar{h}_v S^{-1}, \quad L_{\text{QCD (HQ)}}^{(0)} \rightarrow L_{\text{QCD (HQ)}}^{(0)}. \quad (3.48)$$

Essa invariância fundamenta uma segunda simetria $SU(2)$, dessa vez no espaço de spin. Dessa forma temos tanto uma simetria de sabor quanto uma simetria de spin por parte da lagrangiana em questão, e ambas conjuntamente definem uma simetria $SU(2N_{\text{hf}})$ (em que N_{hf} é o número de sabores pesados) [Geo91, Neu94, CDDB⁺97]. Porém, analogamente ao que ocorre no caso da simetria quiral, essa simetria é explicitamente quebrada quando considera-se termos de ordem $\mathcal{O}(1/m_Q)$ ou superior, isto é, $1/m_Q$ não-nulo. Por exemplo, considerando a lagrangiana da QCD em ordem $\mathcal{O}(1/m_Q)$ [Neu94, CDDB⁺97],

$$L_{\text{QCD (HQ)}}^{(1)} = \frac{1}{2m_Q} \left(\bar{h}_v (iD_\perp)^2 h_v + \frac{g}{2} \bar{h}_v \sigma_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} h_v \right), \quad (3.49)$$

ocorre que ambos os termos da lagrangiana quebram a simetria de sabor (via $1/m_Q$) e o segundo termo quebra a simetria de spin (via $\sigma^{\mu\nu}$). A segunda parcela pode ser escrita como $-\frac{g}{m_Q} \bar{h}_v \vec{S} \cdot \vec{B}_c h_v$, com $B_c^i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} G^{jk}$ [Neu94]. Este é um termo análogo ao termo magnético que descreve a interação spin-órbita obtido na redução não-relativística da QED, sendo por isso denominado termo cromomagnético.

A simetria $SU(2N_{\text{hf}})$ implica na equivalência entre, por exemplo, os mésons D , D^* , B e B^* : a simetria de spin correlaciona os mésons D e D^* ou B e B^* , e a simetria de sabor correlaciona os mésons D e B ou D^* e B^* . Isso é de certa forma análogo à situação do átomo de hidrogênio: isótopos têm uma química semelhante, pois a eletrosfera só é sensível à carga do núcleo e não aos diferentes sabores de seus núcleons. Também no caso do átomo de hidrogênio o spin do núcleo é irrelevante no limite $1/m_N \rightarrow 0$, só sendo relevante quando $1/m_N$ não é desprezível, daí advindo as correções hiperfinas do espectro do átomo. É claro que, com a quebra de simetria, aquela equivalência não é mantida em seu todo, mesmo porque temos empiricamente

$$m_B^* - m_B = 46 \text{ MeV} = 0.008 m_B, \quad m_D^* - m_D = 142 \text{ MeV} = 0.08 m_D. \quad (3.50)$$

Essa discrepância pode ser abordada procurando-se calcular ordens superiores da lagrangiana de heavy quark. Em ordem $\mathcal{O}(1/m_Q)$ é previsto que $m_D^{*2} - m_D^2 \cong m_B^{*2} - m_B^2$, resultado que com aproximação ainda mais razoável é respeitado: $m_D^{*2} - m_D^2 \cong 0.49 \text{ GeV}^2$ e $m_B^{*2} - m_B^2 \cong 0.55 \text{ GeV}^2$. Curiosamente, valores bem parecidos são observados em relação às versões estranhas desses mésons (D_s, B_s^* , etc), indicando que correções hiperfinas são independentes do sabor do *brown muck* que circunda o quark pesado [Neu94].

A lagrangiana (3.44) define um propagador P_{HQ} e um vértice V_{HQ} em substituição aos vértices e propagadores usuais da QCD [Geo91, Neu94]:

$$P_{HQ} = \frac{i}{\not{P}_Q - m_q} = \frac{i}{v \cdot k} \frac{\not{v} + 1}{2} + \mathcal{O}(k/m_Q) \rightarrow \frac{i}{v \cdot k} P_{v+}, \quad (3.51)$$

$$V_{HQ} = P_{v+} V_{\text{QCD}} P_{v+} = P_{v+} i g \lambda_a \gamma^\mu P_{v+} = i g \lambda_a v^\mu. \quad (3.52)$$

No propagador fica novamente evidente a importância de que $k^\mu = P^\mu - m v^\mu$ seja verdadeiramente um acréscimo residual ao momento do heavy quark ($k^\mu \ll m_Q$), o que só será verdade se a interação for mediada por *soft gluons*. Podemos entender isso qualitativamente em termos do comprimento de onda das partículas envolvidas: se m_Q é muito grande, o comprimento de onda Compton do quark pesado é muito pequeno, e somente glúons energéticos conseguirão sondar o quark. Glúons pouco energéticos serão pouco sensíveis à massa ou ao spin do quark, sondando apenas seu campo de cor — nessa situação, portanto, é que esperamos ter respeitada a simetria de heavy quark. Dessa forma os chamados *hard gluons* também atuam como um fator de quebra de simetria de heavy quark. Essa quebra é calculável em teoria de perturbação, e em geral tende a renormalizar os coeficientes da lagrangiana efetiva — em ordem $\mathcal{O}(1/m_Q)$, por exemplo, ela acarreta a renormalização da constante multiplicativa do termo cromo-magnético: $g \rightarrow gC(\mu)$ [Neu94, CDDDB⁺97]. Dessa forma é importante notar que a simetria de heavy quark não é uma simetria aproximada da lagrangiana da QCD como o é a simetria quiral, mas sim uma simetria da lagrangiana efetiva que é uma aproximação da lagrangiana da QCD em certo regime cinemático, ou mesmo uma simetria da matriz S em tal regime. Isso fica evidente ao notar-se que as lagrangianas de heavy quark não são invariantes sob *boosts* de Lorentz [Neu94].

3.7 Lagrangianas efetivas pesadas

3.7.1 Lagrangianas efetivas bariônicas

Um modo de parametrizar o octeto fundamental de bárions é

$$B(x) = \sum_{a=1}^8 b_a(x) \lambda_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \Lambda \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Diferentemente do caso dos mésons em (3.21), esses bárions têm spin 1/2, e portanto são representados por espinores. Além disso, $b_a(x)$ não é um campo real, de forma que $B_{ij}(x) \neq B_{ji}(x)^*$.

Impomos que $B \rightarrow K B K^\dagger$ sob $SU(3)_R \times SU(3)_L$ (com K definido em (3.33)). De fato, essa escolha de regra de transformação por parte dos bárions é um tanto quanto arbitrária, pois apenas o comportamento $B \rightarrow V B V^\dagger$ sob o subgrupo $SU(3)_V$ é bem definido [MW07] — desde que isso seja respeitado, poderia-se impor outras regras de transformação, mas de qualquer forma ocorre que as diversas opções possíveis podem ser convertidas umas nas outras via redefinições de campos (para tanto a presença dos bósons de Goldstone na teoria é fundamental) e os observáveis físicos são invariantes sob tais redefinições. A regra $B \rightarrow K B K^\dagger$ é a escolha mais usual na literatura

e considerada a mais conveniente para construção de lagrangianas efetivas (vide discussões em [JM91, Geo09]).

Assim sendo, podemos estabelecer a interação entre o octeto fundamental de bárions e octeto pseudoescalar de mésons (isto é, os bósons de Goldstone) através de lagrangianas invariantes sob rotações quirais. A lagrangiana de ordem dominante é [Sch03]

$$\mathcal{L}_{\text{BG}}^{(1)} = \text{Tr} \left[\bar{B} (i \not{D}^{(B)} - M_0) B \right] + D \text{Tr} \left(\bar{B} \gamma^\mu \gamma_5 \{ \Gamma_\mu^A, B \} \right) + F \text{Tr} \left(\bar{B} \gamma^\mu \gamma_5 [\Gamma_\mu^A, B] \right), \quad (3.54)$$

com $D_\mu^{(B)} B = \partial_\mu B + [\Gamma_\mu^V, B]$ e $\bar{B}_{ij} = B_{ji}^\dagger \gamma_0$. O traço é tomado nos índices de sabor. M_0 é a massa do octeto de bárions no limite quiral, e D e F são constantes que podem ser calibradas experimentalmente. Usando decaimentos em nível de árvore $B \rightarrow B' + e^- + \bar{\nu}_e$, estabelece-se que $D = 0.80$ e $F = 0.50$ [JM91, Sch03].

Ainda que o octeto de bárions seja constituído apenas de quarks leves, pode-se aplicar um procedimento análogo ao que usamos na seção 3.6 para construir \mathcal{L}_{HQ} a partir da \mathcal{L}_{QCD} , pois o momento ΔP transferido entre os bárions via troca de píons usualmente é pequeno se comparado à sua própria massa m_N , de forma que também com eles é razoável impor $\Delta P/m_N \rightarrow 0$ e concluir que sua velocidade seja efetivamente conservada. Decompondo o campo B tal que $b_v \propto P_{v+B}$ e $B_v \propto P_{v-B}$, obtemos [JM91]

$$\mathcal{L}_{\text{BG (HQ)}}^{(0)} = i \text{Tr} \left[\bar{b}_v (v \cdot \not{\mathcal{D}}) b_v \right] + 2D \text{Tr} \left[\bar{b}_v S_v^\mu \{ \mathcal{A}_\mu, b_\nu \} \right] + 2F \text{Tr} \left(\bar{b}_v S_v^\mu [\mathcal{A}_\mu, b_\nu] \right), \quad (3.55)$$

em que se usa $\bar{b}_v \gamma^\mu b_v = v^\mu \bar{b}_v b_v$ e $\bar{b}_v \gamma^\mu \gamma_5 b_v = 2 \bar{B}_v S_v^\mu b_v$. Definimos $\mathcal{D}_\mu B = \partial_\mu B + [\mathcal{V}_\mu, B]$.

Na literatura encontra-se derivações de (3.55) sem o uso explícito de (3.54), pois em ordem dominante essa é a lagrangiana escrita em termos de b_v mais geral consistente com a simetria quiral. Correções de ordem superiores (inclusive correções devido às massas não-nulas dos quarks leves) são obtidas de forma análoga [JM91, Sch03].

Os mésons do noneto vetorial de mésons também podem ser abordados dessa maneira. Esses mésons têm spin 1, sendo portanto representados por campos que possuem um índice de Lorentz. Como foi feito com o noneto pseudoescalar, o noneto vetorial é repartido em um octeto e um singlete. O singlete é constituído de uma partícula invariante sob rotações quirais (a partícula ϕ), e o octeto, constituído das partículas ρ , K^* e ω , é parametrizado como uma matriz $\mathcal{O}^\mu = \sum_{a=1}^8 \phi_a^\mu \lambda_a$, de forma análoga a (3.21) ou (3.53). Sob rotações quirais estipula-se que $\mathcal{O}^\mu \rightarrow K \mathcal{O}^\mu K^\dagger$. Estabelecidos esses *building blocks*, as lagrangianas efetivas de dada ordem podem ser construídas. Inclusive, como no caso dos bárions dessa seção, é possível fazê-lo através de campos pesados de quadrivelocidade v^μ bem determinada [JMW95].

3.7.2 Lagrangianas efetivas mesônicas

Constatamos que a simetria de heavy quark implica em uma correlação entre mésons e suas excitações. As excitações diferem essencialmente no que diz respeito à configuração de spin, e a dinâmica de quarks pesados é pouco sensível a essa configuração. Dessa forma, os mésons que diferem apenas no número quântico de spin total S estarão fortemente correlacionados e podem ser encarados como constituintes de um multipletto. Esse fato pode ser explorado utilizando um formalismo matricial [FGGW90, Geo91, MW07]. Atentando-se aos mésons de número quântico orbital $l = 0$ (onda S), eles integrarão um dubleto (P, P^*) , em que P está relacionado aos números quânticos $J^P = 0^-$ e P^* aos números quânticos $J^P = 1^-$. Considerando os mésons formados por

um quark pesado e um antiquark leve, podemos parametrizá-los como [Hpa]

$$H_v^{i(Q)} = P_{v+}(P_\mu^{i(Q)*}\gamma^\mu - P_v^{i(Q)}\gamma_5). \quad (3.56)$$

O índice Q diz respeito ao quark pesado (b ou c), o índice i diz respeito ao antiquark leve (\bar{u} , \bar{d} ou \bar{s}), e v à quadrivelocidade do heavy quark. Explicitamos acima todos esses índices, mas a partir daqui eles serão deixados implícitos quando possível. Assim sendo, tomando por exemplo $Q = c$, temos $(P^1, P^2, P^3) = (P^{\bar{u}}, P^{\bar{d}}, P^{\bar{s}}) = (D^0, D^+, D_s^+)$, e P_μ^{i*} segue analogamente. A parametrização (3.56) é especialmente apropriada porque se P_μ^* é um vetor e P um pseudoescalar, a ação das matrizes γ_μ e γ_5 converterá H em um objeto de comportamento espinorial. Nesse sentido, sob transformações de Lorentz e transformações de paridade, H_v comporta-se respectivamente como [Geo91, MW07]

$$H_v(x) \rightarrow D_\Lambda H_{\Lambda^{-1}v}(\Lambda^{-1}x)D_\Lambda^{-1}, \quad H_v(x) \rightarrow \gamma_0 H_{(v_0, -\vec{v})}(x_0, -\vec{x})\gamma_0. \quad (3.57)$$

Vemos que $H_v^{(Q)}$ emula o comportamento do produto de spinores $h_v \bar{q}_i$, em que q_i é um espinor de um quark de sabor i [Geo91]. De fato, atentando-se especificamente às rotações de spin dentre as transformações de Lorentz, podemos identificar [MW07]

$$H \rightarrow S_Q H S_{\bar{q}}, \quad (3.58)$$

em que S_Q refere-se à rotação de spin do quark pesado e $S_{\bar{q}}$ à rotação de spin do *brown muck*. Esperamos que a interação forte seja simétrica sob a ação unicamente de S_Q , com exceção de efeitos de ordem $\mathcal{O}(1/m_Q)$ ou superior.

Dessa forma, podemos naturalmente estabelecer a parametrização de mésons formados por um antiquark pesado e um quark leve, fazendo-o através da operação de conjugação de carga [GJM⁺92]:

$$H^{(Q)} \rightarrow C H^{(Q)T}(x) C^{-1} \equiv H^{(\bar{Q})}. \quad (3.59)$$

T refere-se à transposição dos índices de Dirac e $C = i\gamma_0\gamma_2\mathcal{C}$, em que \mathcal{C} apenas define a convenção que correlaciona os campos:

$$\mathcal{C}P_\mu^{(Q)*}\mathcal{C}^{-1} = -P_\mu^{(\bar{Q})*}, \quad \mathcal{C}P^{(Q)}\mathcal{C}^{-1} = P^{(\bar{Q})}. \quad (3.60)$$

Assim sendo, podemos escrever [GJM⁺92, AGP06]

$$H^{(\bar{Q})} = (P_\mu^{(\bar{Q})*}\gamma^\mu - P^{(\bar{Q})}\gamma_5)P_{v-}. \quad (3.61)$$

Com respeito aos mésons formados por quark e antiquark que são ambos pesados, em princípio não pareceria possível aplicar a eles o formalismo de heavy quark, pois suas partículas constituintes não mantêm uma velocidade bem definida: ao redor da partícula pesada orbita outra partícula pesada que difere em muito do *brown muck* leve que tratamos até então. Entretanto, pode-se identificar um regime cinemático em que as partículas pesadas interajam via *soft gluons*, regime este denominado SEA, do inglês *soft-exchange-approximation regime*. Modelos de potenciais baseados na QCD indicam que, com o aumento da massa m_Q dos quarks, suas velocidades relativas decrescem progressivamente, de forma que um quark suficientemente pesado terá uma velocidade pequena o bastante para que seu efeito seja desprezível. Mas esse decréscimo não pode ocorrer indefinidamente: aumentando a massa suficientemente, o par quark-antiquark será bastante compacto e a interação forte será predominantemente coulombiana. Mostra-se que, nessa situação, a velocidade aumenta de forma linear com a massa. Dessa forma o SEA é um regime de partículas pesadas, mas que ainda assim encontram-se no regime dominado pelo caráter não-coulombiano, isto é, *string like*, da

interação da QCD. Nesse regime pode-se considerar em aproximação razoável que a interação forte seja mediada por *soft gluons* e que a regra de superseleção de velocidade seja respeitada. Nesse sentido a simetria de spin é preservada, mas evidentemente a simetria de sabor não o é, devido a essa dependência de m_Q por parte da dinâmica. O limite superior de validade do SEA é da ordem de 80 GeV, de forma que os quarks charm e bottom encontram-se confortavelmente nesse regime [CDDB+93].

Isso posto, podemos parametrizar os mésons de quark e antiquark pesados de forma bastante análoga ao que expomos em (3.56) e (3.61). Utilizaremos aqui uma notação referente às excitações de charmônio ($c\bar{c}$), mas mésons de estrutura $c\bar{b}$ e $b\bar{b}$ são parametrizados identicamente. Tomando os mésons em onda S, podemos parametrizá-los como [CDDB+93, CDFP04, GHL+11]

$$S_{Q\bar{Q}} = P_{v+}(\psi^\mu \gamma_\mu - \eta_c \gamma_5)P_{v-}, \quad (3.62)$$

em que ψ^μ está relacionado aos números quânticos $J^{PC} = 1^{--}$ e η_c aos números quânticos $J^{PC} = 0^{-+}$. Tomando os mésons de número orbital $l = 1$ (onda P), temos $J^{PC} \in \{2^{++}, 1^{++}, 0^{++}, 1^{+-}\}$, que, no caso do charmônio, são os números quânticos relacionados às partículas $\chi_{c2}, \chi_{c1}, \chi_{c0}, h_c$ (veja fig. 1.5). Elas são conjuntamente parametrizadas como [CDDB+93, CDFP04, GHL+11]

$$P_{Q\bar{Q}}^\mu = P_{v+} \left(\chi_{c2}^{\mu\alpha} \gamma_\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} v_\alpha \gamma_\beta \chi_{c1\nu} + \frac{1}{\sqrt{3}} (\gamma^\mu - v^\mu) \chi_{c0} + h_c^\mu \gamma_5 \right) P_{v-}. \quad (3.63)$$

Sob rotações de spin do quark pesado $S_Q \in SU(2)_Q$, rotações de spin do antiquark pesado $S_{\bar{Q}} \in SU(2)_{\bar{Q}}$ e rotações quirais $SU(3)_R \times SU(3)_L$, as parametrizações que estabelecemos transformam-se como [Hpa]

$$H_i^{(Q)} \rightarrow S_Q(H^{(Q)}K^\dagger)_i, \quad \bar{H}_i^{(Q)} \rightarrow (K\bar{H}^{(Q)})_i S_Q^\dagger, \quad H_i^{(\bar{Q})} \rightarrow (KH^{(\bar{Q})})_i S_{\bar{Q}}^\dagger, \quad (3.64)$$

$$\bar{H}_i^{(\bar{Q})} \rightarrow S_{\bar{Q}}(\bar{H}^{(\bar{Q})}K^\dagger)_i, \quad S_{Q\bar{Q}} \rightarrow S_Q S_{Q\bar{Q}} S_{\bar{Q}}^\dagger, \quad P_{Q\bar{Q}}^\mu \rightarrow S_Q P_{Q\bar{Q}}^\mu S_{\bar{Q}}^\dagger, \quad (3.65)$$

com $\bar{H}_i^{(Q)} = \gamma^0 H_i^{(Q)\dagger} \gamma^0$ (e analogamente para $\bar{H}_i^{(\bar{Q})}$). O comportamento sob transformações quirais dado em (3.64) está sujeito à mesma arbitrariedade que discutimos no caso bariônico: apenas o comportamento sob o subgrupo $SU(3)_V$ é bem determinado; fora isso, diversos comportamentos sob transformações podem ser obtidos uns dos outros via redefinições dos campos. A regra dada acima é especialmente apropriada porque mantém invariante o comportamento (3.57) sob transformações de paridade [MW07].

Todas partículas descritas por campos $C^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ são tais que $C^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}v_{\mu_1} = 0$, por fixação de gauge. Temos ainda que, conforme usual na literatura, cada campo contém um fator multiplicativo de normalização \sqrt{m} , em que m é a massa da partícula associada ao campo (esses fatores encontram-se implícitos nas fórmulas acima). Esse fator correlaciona as unidades de um campo relativístico C e as unidades do campo não-relativístico correspondente C_{nr} : $[C_{\text{nr}}] = [\sqrt{m}]C$. Dessa forma, constantes de acoplamento relativísticas e não-relativísticas encontram-se também correlacionadas. É importante notar também que as parametrizações acima não dependem do número quântico principal n , ou, em outras palavras, comportam diversas partículas de mesmos números quânticos J^{PC} e estrutura de quarks. Assim, por exemplo, ψ^μ e n_c em (3.62) podem referir-se tanto às partículas $J/\psi = \psi(3096)$ e $n_c = n_c(2983)$ quanto à $\psi' = \psi(3686)$ e $n'_c = n_c(3639)$ (veja fig. 1.5).

Com respeito à interação entre os bósons de Goldstone e os mésons com um quark pesado, a lagrangiana mais geral que respeita a simetria de heavy quark e a simetria quiral é [GJM+92, BG95,

CDDB⁺97, MW07]

$$\mathcal{L}_{\text{MG}} = i \text{Tr} \left[H_b^{(Q)} (v \cdot D_{ab}^{(M)}) \bar{H}_a^{(Q)} \right] + g_1 \text{Tr} \left[\bar{H}_a^{(Q)} H_b^{(Q)} \gamma_\nu \gamma_5 \mathcal{A}_{ba}^\nu \right], \quad (3.66)$$

com $D_{ab}^{\mu(M)} = \delta_{ab} \partial^\mu + \mathcal{V}_{ab}^\mu$. Aplicando nessa lagrangiana apenas o termo de ordem $\mathcal{O}(1/F_0)$ da expansão (3.37), obtemos [CDDB⁺97]

$$\mathcal{L}_{\text{MG}g_1} = g_1 \frac{\sqrt{2}}{F_0} \left(P_i^{\mu*} \partial_\mu \phi_{ij} P_j^\dagger + \text{h.c.} \right) + i g_1 \frac{\sqrt{2}}{F_0} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} P_i^{*\beta} \partial^\mu \phi_{ij} P_j^{*\alpha\dagger} v^\nu. \quad (3.67)$$

Caso deseja-se computar a influência das massas não-nulas dos quarks leves (parametrizados pela matriz diagonal M), deve-se recorrer às correções dadas por [GJM⁺92, BG95, CDDB⁺97, MW07]

$$\mathcal{L}_{\text{MG}\lambda_1} = \lambda_1 \text{Tr} \left[\bar{H}_a H_b \mathcal{M}_{ba} \right] + \lambda_1' \text{Tr} \left[\bar{H}_a H_a \right] \text{Tr} \left[MU + MU^\dagger \right], \quad (3.68)$$

$$\mathcal{L}_{\text{MG}\lambda_3} = i\lambda_3 \text{Tr} \left[H_a \gamma_\mu \gamma_5 \mathcal{A}_{bc}^\mu \mathcal{M}_{bc} \bar{H}_a \right] + i\lambda_3' \text{Tr} \left[H_a \bar{H}_a \gamma_\mu \gamma_5 \right] \text{Tr} \left[\mathcal{A}^\mu \mathcal{M} \right], \quad (3.69)$$

com $\mathcal{M} = \xi M \xi + \xi^\dagger M \xi^\dagger$. Nos limitamos a expor correções que contribuem para processos com apenas um bóson de Goldstone [CDDB⁺97]. O termo proporcional a λ_1 fornece massas diferentes aos mésons P e P^* , enquanto o termo proporcional a λ_1' acarreta um *shift* geral nessas massas [MW07].

As correções de ordem $\mathcal{O}(1/m_Q)$ são dadas por [GJM⁺92, BG95, CDDB⁺97, MW07]

$$\mathcal{L}_{\text{MG (HQ)}}^{(1)} = \frac{\lambda_2}{m_Q} \text{Tr} \left[\bar{H}_a \sigma^{\mu\nu} H_a \sigma_{\mu\nu} \right] + i \frac{g_1'}{m_Q} \text{Tr} \left[H_b \gamma_\mu \gamma_5 \mathcal{A}_{ab}^\mu \bar{H}_a \right] + i \frac{g_2'}{m_Q} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \gamma_5 \mathcal{A}_{ba}^\mu \bar{H}_a \right]. \quad (3.70)$$

O termo cinético em (3.66) define os propagadores das partículas P e P^* . Esses propagadores respectivamente são [BG95, CDDB⁺97, MW07]

$$\frac{i\delta_{ab}}{2(v \cdot k + 3\Delta^{(Q)}/4 + i\epsilon)}, \quad \frac{-i\delta_{ab}(g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu)}{2(v \cdot k - \Delta^{(Q)}/4 + i\epsilon)}, \quad (3.71)$$

em que $\Delta^{(Q)} = m_{P^*} - m_P = -2\lambda_2/m_Q$ é uma correção provinda do primeiro termo de (3.70). Os dois últimos termos, por sua vez, renormalizam as constantes de acoplamento, que assumem a forma [BG95, CDDB⁺97]

$$g_{P^*P^*} = g + (1/m_Q)(g_1' + g_2'), \quad g_{P^*P} = g + (1/m_Q)(g_1' - g_2'). \quad (3.72)$$

Por fim, temos a lagrangiana que descreve a interação entre os mésons com um único quark (ou anti-quark) pesado e os mésons com quark e anti-quark que são ambos pesados [CDFP04, GHL⁺11]:

$$\mathcal{L}_{MQ} = i \frac{g_2}{2} \text{Tr} \left[S_{Q\bar{Q}} \bar{H}^{(\bar{Q})} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \bar{H}^{(Q)} \right] + i \frac{g_3}{2} \text{Tr} \left[P_{Q\bar{Q}}^\mu \bar{H}^{(\bar{Q})} \gamma_\mu \bar{H}^{(Q)} \right] + (Q \leftrightarrow \bar{Q}) + \text{h.c.}, \quad (3.73)$$

Essa é a lagrangiana mais geral que respeita as simetrias quirais e de heavy quark.

Na modelagem do X nos foi útil obter a interação entre os mésons ψ e ψ' , ambos parametrizados em (3.62), e os mésons D neutros ($D^0, \bar{D}^0, D^{0*}, \bar{D}^{0*}$) e carregados (D^+, D^-, D^{+*}, D^{-*}), parametrizados em (3.56) e (3.61). Essa interação está dada no interior de \mathcal{L}_{MQ} . Manipulando essa

lagrangiana e retirando somente os termos interessantes à interação, temos⁶ [DFGL10, GHL⁺11]

$$\mathcal{L}_{\psi DD} = ig_{\psi DD} \psi_\mu (\partial^\mu DD^\dagger - D\partial^\mu D^\dagger), \quad (3.74)$$

$$\mathcal{L}_{\psi DD^*} = g_{\psi DD^*} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \psi_\nu (D_\alpha^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\beta D^\dagger - D \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\beta D_\alpha^{*\dagger}) \quad (3.75)$$

$$\mathcal{L}_{\psi D^* D^*} = ig_{\psi D^* D^*} \psi^\mu (D^{*\nu} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu D_\nu^{*\dagger} - D^{*\nu} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu D_\mu^{*\dagger} + \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu D_\mu^* D^{*\nu\dagger}), \quad (3.76)$$

com

$$\frac{g_{\psi DD}}{m_D} = \frac{g_{\psi D^* D^*}}{m_{D^*}} = \frac{g_{\psi D^* D}}{\sqrt{m_D/m_{D^*}}} = g_2 \sqrt{m_\psi}. \quad (3.77)$$

Podemos escrever (3.75) como

$$\mathcal{L}_{\psi DD^*} = 2g_{\psi DD^*} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \psi_\nu (\partial_\mu D \partial_\beta D_\alpha^{*\dagger} - \partial_\mu D_\alpha^* \partial_\beta D^\dagger). \quad (3.78)$$

Como já foi dito, o campo ψ_μ nas fórmulas acima pode ser referente tanto ao charmônio J/ψ quanto ao charmônio ψ' . Para cada um desses casos há constantes de acoplamento específicas, isto é, podemos definir $g_2 = g_{J/\psi}$ para a interação envolvendo o J/ψ e $g_2 = g_{\psi'}$ para a interação envolvendo o ψ' . Conforme discutimos na seção 3.1, os valores dessas constantes não são determinados pela teoria efetiva em si mesma, deve-se procurar determiná-los experimentalmente ou através de outras abordagens teóricas. Nesse sentido, com respeito à interação entre o charmônio J/ψ e os mésons D , os trabalhos [MM98, LK00, Hag00, OSL01, OSLW03] utilizam uma teoria efetiva diferente da teoria que nós utilizamos⁷, mas de qualquer forma estabelecem uma lagrangiana idêntica a (3.74) e, empregando *vector-meson dominance*, obtêm valores entre 7.64 e 7.71 para a constante de acoplamento $g_{\psi DD}$. Esses cálculos têm uma margem de erro considerável (por exemplo, [MM98] estima uma margem de erro de 20%). Deandrea *et al.* [DDBG⁺98, DNP03], por sua vez, fazem uso de uma teoria efetiva alternativa, e preveem que $g_{\psi DD} = 8.0 \pm 0.5$. Esses trabalhos, porém, discordam levemente entre si e conosco em relação à forma das lagrangianas (3.75) e (3.76), e também discordam entre si com respeito ao valor de $g_{\psi DD^*}$. Deandrea *et al.* obtêm $g_{\psi DD^*} = 4.05 \pm 0.6 \text{ GeV}^{-1}$ [DNP03], o que é condizente com a nossa relação (3.77). Além disso, esses trabalhos negligenciam a quebra de degenerescência entre os mésons D e D^* , de forma que consideram $g_{\psi D^* D^*} = g_{\psi DD}$. Em vista de tudo isso, podemos estabelecer o valor

$$g_2 = g_{J/\psi} = 2.34 \text{ GeV}^{-3/2} \quad (3.79)$$

em (3.77), para obter

$$g_{\psi DD} = 7.69, \quad g_{\psi D^* D^*} = 8.27, \quad g_{\psi DD^*} = 3.97 \text{ GeV}^{-1}, \quad (3.80)$$

o que melhor concilia (3.77) com os resultados de Deandrea e das demais teorias efetivas que mencionamos. Esses são os valores que adotamos em nossa modelagem do X .

⁶As constantes de acoplamento têm unidades de energia $[g_{\psi DD}] = [g_{\psi D^* D^*}] = 0$, $[g_{\psi D^* D}] = -1/2$ e $[g_2] = -3/2$.

⁷Esses trabalhos estendem a simetria quiral SU(3) para uma simetria SU(4), isto é, incluem o quark charm na simetria quiral. Nesse sentido, o octeto pseudoescalar (3.21) e octeto vetorial (que parametrizamos em θ^μ ao final da seção 3.7.1) são estendidos para multipletos maiores, parametrizados em função dos geradores do grupo SU(4), e incluem todos os mésons dados na fig. 1.4 (com exceção de η' e ϕ , que são singletos). O quark charm é bastante massivo, de forma que a simetria quiral SU(4) é radicalmente quebrada. É evidente que isso limita consideravelmente o poder preditivo desse tipo de abordagem, o que foi uma das motivações de Deandrea *et al.* para trabalharem com uma teoria efetiva alternativa. Essa teoria, denominada *constituent quark meson model*, estabelece, através das simetrias quirais e de heavy quark, uma lagrangiana efetiva de interação entre quarks e mésons.

3.8 Lagrangianas efetivas eletromagnéticas

A inclusão da interação eletromagnética na dinâmica de mésons pesados e bósons de Goldstone também pode ser realizada dentro do contexto de teorias efetivas⁸. A interação eletromagnética é fundamentada na invariância dos campos sob transformações locais

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \lambda, \quad q_i \rightarrow e^{iQ_i \lambda} q_i, \quad (3.81)$$

em que $\lambda = \lambda(x)$ parametriza as transformações locais, q_i é um espinor de um quark de sabor i e carga Q_i (em unidades de $e = |e|$, a carga elementar) e A_μ é o campo do fóton. Para estender esses conceitos aos mésons, estabelecemos naturalmente que sob essa mudança de gauge os bósons de Goldstone e os mésons pesados transformam-se como

$$\xi \rightarrow e^{iQ\lambda} \xi e^{-iQ\lambda}, \quad P^i(Q) = e^{iQ'\lambda} P^i(Q) e^{-iQ_i \lambda}, \quad (3.82)$$

em que $Q = \text{diag}(Q_1, Q_2, Q_3) = \text{diag}(2/3, -1/3, -1/3)$ determina a carga dos quarks leves e Q' é a carga do quark pesado. Podemos definir as derivadas covariantes⁹

$$D_\mu^{(G\gamma)} \xi = \partial_\mu \xi + ie A_\mu [Q, \xi], \quad D_\mu^{(M\gamma)} P = \partial_\mu P + ie A_\mu (Q' - Q) P + \mathcal{V}_\mu^{*\dagger} P, \quad (3.83)$$

com \mathcal{V}_μ' e \mathcal{A}_μ' tais que¹⁰

$$\mathcal{V}_\mu' = \frac{1}{2} \left(\xi^\dagger D_\mu \xi + \xi (D_\mu \xi)^\dagger \right) = \mathcal{V}_\mu - ie Q A_\mu + ie A_\mu \mathcal{Q}_+, \quad (3.84)$$

$$\mathcal{A}_\mu' = \frac{i}{2} \left(\xi^\dagger D_\mu \xi - \xi (D_\mu \xi)^\dagger \right) = \mathcal{A}_\mu - e A_\mu \mathcal{Q}_-, \quad (3.85)$$

e $\mathcal{Q}_\pm = (1/2)(\xi^\dagger Q \xi \pm \xi Q \xi^\dagger)$. As derivadas covariantes, como usual, comportam-se segundo transformações de gauge do mesmo modo que os campos nos quais atuam. Com esses ingredientes podemos estabelecer lagrangianas invariantes sob transformações de gauge. A lagrangiana de primeira ordem $\mathcal{L}_{(MG\gamma)}^{(1)}$ é a soma dos termos

$$\mathcal{L}_{(MG\gamma)}^{(1a)} = D_\mu P D^\mu P^\dagger - m^2 P P^\dagger - \frac{1}{2} P^{*\mu\nu} P_{\mu\nu}^{*\dagger} + m_*^2 P^{*\mu} P_\mu^{*\dagger}, \quad (3.86)$$

$$\mathcal{L}_{(MG\gamma)}^{(1b)} = f \sqrt{m m_*} P \mathcal{A}^{\mu'} P_\mu^{*\dagger} + \frac{f}{4} \epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} P^{*\mu\nu} \mathcal{A}^{\lambda'} P^{*\kappa\dagger} + \text{h.c.}, \quad (3.87)$$

enquanto a lagrangiana de segunda ordem $\mathcal{L}_{(MG\gamma)}^{(2)}$ é a soma de

$$\mathcal{L}_{(MG\gamma)}^{(2a)} = (\sqrt{m m_*}/2) \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^\alpha P^{*\beta} (d \mathcal{Q}_+ + d' Q') F^{\mu\nu} P^\dagger + \text{h.c.}, \quad (3.88)$$

$$\mathcal{L}_{(MG\gamma)}^{(2b)} = i e m_* F_{\mu\nu} P^{*\mu\dagger} (b \mathcal{Q}_+ - b' Q') P^{*\nu}, \quad (3.89)$$

⁸Para o formalismo apresentado nessa seção, temos como referência [ABJ⁺92].

⁹A partir daqui empregamos certo abuso de notação: há uma soma implícita nos índices de sabores leves, de forma que P ou P^* , quando ausente o índice de sabor i , poderá ser encarado ora como vetor coluna e ora como vetor linha dependendo de sua posição na equação matricial. Assim, por exemplo, $P \mathcal{A}^{\mu'} P_\mu^{*\dagger} = \sum_{ij} P^i \mathcal{A}_{ij}^{\mu'} P_\mu^{j*\dagger}$, $D_\mu P D^\mu P^\dagger = \sum_i D_\mu P^i D^\mu P^{i\dagger}$, etc.

¹⁰Deixamos implícita a definição da derivada covariante através do elemento no qual ela atua: $D_\mu P = D_\mu^{(M\gamma)} P$ e $D_\mu \xi = D_\mu^{(G\gamma)} \xi$.

com $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, $P^{\mu\nu} = D^\mu P^\nu - D^\nu P^\mu$ e $P^{\mu\nu*}$ segue analogamente. Essa lagrangiana é denominada lagrangiana magnética, pois descreve um acoplamento magnético entre o campo do fóton e os mésons pesados. De fato, considerando o potencial de repouso dos mésons pesados ($v = (1, \vec{0})$), temos que, por exemplo,

$$F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^\alpha P^{*\beta} = -\epsilon_{\beta\mu\nu 0} F^{\mu\nu} P^{*\beta} \rightarrow 2\vec{B} \cdot \vec{e}, \quad (3.90)$$

em que \vec{e} é o vetor de polarização da partícula P^* e \vec{B} é o campo magnético. Utilizando um modelo de quarks não-relativístico que descreve acoplamentos magnéticos, podemos identificar as constantes que aparecem na lagrangiana magnética como

$$d' = b' = \frac{1}{m_u} \equiv \alpha, \quad d = b = \frac{1}{m_p} \equiv \beta, \quad (3.91)$$

em que m_p é a massa do quark pesado e m_u a massa do quark up. Ocorre que a massa de um quark é de difícil definição, devido ao confinamento dos quarks. Como usual em cálculos desse tipo, as massas dos quarks são massas efetivas, e no interior do hádron a massa de um quark parece maior do que a sua chamada *bare mass*, a massa que *grosso modo* figuraria na lagrangiana (3.7) [Gri04]. Um ajuste com dados experimentais provenientes de decaimentos do tipo $D^* \rightarrow D\gamma$ fornece [HM06]

$$\beta^{-1} = 379 \text{ MeV}, \quad \alpha^{-1} = 1863 \text{ MeV}. \quad (3.92)$$

Nesse caso, evidentemente, o quark pesado de interesse é o quark charm.

Na modelagem do X tivemos interesse no acoplamento puramente eletromagnético dos mésons P e P^* , isto é, no acoplamento desses mésons ao fóton sem a presença dos bósons de Goldstone. Nesse caso em primeira ordem apenas a lagrangiana (3.86) é relevante, e a derivada covariante D_μ é equivalente ao acoplamento mínimo

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieQ_P A_\mu, \quad (3.93)$$

em que $Q_P = Q' - Q_i$ é a carga do méson $P^{i(Q)}$. Assim, em primeira ordem, a interação entre os mésons P (P^*) e o fóton é descrito pela equação de Klein-Gordon (Proca) acoplada minimamente ao campo eletromagnético. Esse acoplamento mínimo é empregado para fundamentar a interação eletromagnética de partículas elementares de carga Q_P , de forma que nessa ordem os mésons são eletromagneticamente análogos a partículas pontuais carregadas. A lagrangiana de interação obtida pode ser escrita como (3.74) e (3.76) fazendo as substituições $\psi^\mu \rightarrow A^\mu$ e $g \rightarrow -eQ_P$. Evidentemente mésons sem carga não se acoplam ao fóton, de forma que essa interação ocorre apenas com mésons carregados.

Esse acoplamento mínimo pode ser aplicado em outras lagrangianas. Por exemplo, aplicando esse acoplamento em (3.78), obtemos

$$\mathcal{L}_{\psi DD^* \gamma} = 2i Q_P e g_{\psi DD^*} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \psi_\nu A_\mu (D \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\beta D_\alpha^\dagger + \text{h.c.}), \quad (3.94)$$

lagrangiana que fornece o vértice de ordem dominante entre D , D^* , ψ e o fóton.

Mas o hádron não é uma partícula elementar, de forma que essa lagrangiana não descreve completamente o seu comportamento segundo interações eletromagnéticas, e lagrangianas de ordem maior também podem ser relevantes. Em segunda ordem a lagrangiana que rege a interação entre os mésons P e P^* e o fóton é (3.88) e (3.89), com $\mathcal{Q}_+ \rightarrow Q$. Essa lagrangiana é relevante também para mésons neutros, e ela é a lagrangiana de mais baixa ordem que correlaciona eletromagneticamente mésons de diferentes spins.

Capítulo 4

Modelagem do $X(3872)$

Expusemos na seção 1.2 as dificuldades que o hádron $X(3872)$ oferece ao modelo tradicional de quarks, como também o debate ainda em curso sobre sua composição. Nesse capítulo 4 oferecemos uma contribuição para essa discussão. Encarando o X como um estado ligado dos mésons D e D^* , apresentamos as previsões teóricas que, através dos arcabouços teóricos expostos nos capítulos 2 e 3, obtivemos para os decaimentos radiativos desse estado molecular. Mais especificamente, vimos na seção 1.2 que o valor experimental da razão R entre as larguras dos decaimentos $X(3872) \rightarrow \psi'\gamma$ e $X(3872) \rightarrow J/\psi\gamma$, razão dada em (1.5)-(1.6), oferece dificuldades para o retrato do X como uma molécula mesônica. Através de nossa modelagem procuramos verificar se de fato esse valor experimental impossibilita ou não o modelo molecular.

Na seção 4.1 abordamos o mecanismo que a estrutura de longo alcance, a estrutura propriamente molecular, oferece para os decaimentos radiativos, fazendo-o através de um tratamento não-perturbativo baseado em lagrangianas efetivas. Uma importante aspecto desse tratamento é a renormalização do problema — a renormalização, como usual em teoria quântica de campos, é realizada através do uso de um termo de contato, que parametriza a física de curto alcance do X . Nesse sentido, trazemos na seção 4.2 uma pequena discussão sobre métodos de regularização e renormalização. Em especial discorremos sobre a chamada redução PDS, redução que, conforme argumentamos, é a mais adequada para o trato de problemas não-perturbativos, e por isso é aplicada em nossa modelagem. Na seção 4.3 expomos os resultados propriamente ditos, extraindo informações sobre os decaimentos radiativos do X , e também delimitando sua física de curto alcance. Na seção 4.4, por fim, expomos as conclusões que esse modelo permite tirar sobre a estrutura da partícula, assim como as perspectivas para o refinamento desse cálculo e para aplicações em outros problemas correlacionados.

4.1 Diagramas de Feynman

O mecanismo que utilizamos para descrever os decaimentos $X(3872) \rightarrow J/\psi\gamma$ e $X(3872) \rightarrow \psi'\gamma$ é definido pelos diagramas de Feynman dados na fig. 4.1. Os diagramas (a)-(e) descrevem a física de longo alcance dos decaimentos. Ocorre que, como frequente em teoria quântica de campos, esses diagramas fornecem valores infinitos de amplitude. Esses valores devem-se aos *loops* quânticos no interior dos diagramas, e são provenientes de processos com mésons D virtuais altamente energéticos. Esses processos, entretanto, não dizem respeito à física de longo alcance dos decaimentos, e são processos que fogem do âmbito de nossa modelagem. De fato, nossa modelagem é uma teoria efetiva, de forma que não esperamos que ela descreva partículas (reais e virtuais) altamente energéticas — mesmo porque, para tanto, seria necessário computar uma série de graus de liberdade que aqui não levamos em conta. Tais efeitos não são considerados em nossos cálculos, pois esperamos que a física descrita nos diagramas (a)-(e) ofereça o grosso necessário para compreender suficientemente bem o decaimento do X no regime energético em que ele é produzido. Assim sendo, para lidar com a

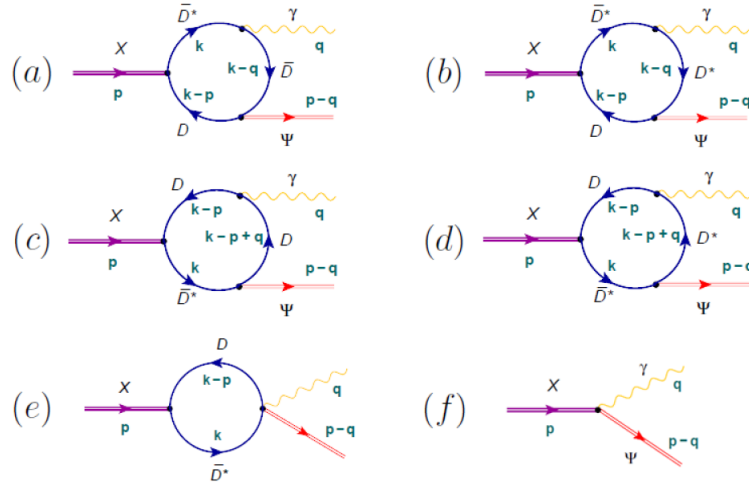


Figura 4.1: Diagramas de Feynman que descrevem o decaimento $X(3872) \rightarrow \psi\gamma$, em que ψ representa tanto o J/ψ quanto o ψ' .

divergência proveniente desses diagramas de *loop*, definimos o diagrama de contato (f), diagrama referente à física de altas energias do problema — física essa que não temos interesse em modelar, mas que devemos levar em consideração para renormalizar apropriadamente a amplitude de longo alcance. Dessa forma, como habitual em problemas de renormalização, a divergência dos diagramas de *loop* é reabsorvida na constante de acoplamento definida pelo diagrama (f), de modo que a amplitude estabelecida pelos diagramas (a)-(f) seja finita.

Por ora, porém, nos concentraremos nos diagramas de longas distâncias (a)-(e). Como ilustrado na fig. 4.1, estabelecemos que p é o momento do X , que decai em um fóton de momento q e um charmônio de momento $p - q$. Todas essas partículas são bósons vetoriais de spin 1, sendo portanto polarizadas. Parametrizamos as polarizações de cada partícula com os quadrivetores $\epsilon_{(X)}^\sigma(p)$, $\epsilon_{(\lambda)}^\mu(q)$ e $\epsilon_{(\psi)}^\eta(p - q)$. Os propagadores dos mésons internos são os propagadores usuais de partículas de spin 0 e de spin 1:

$$S(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad S_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2 - m_*^2 + i\epsilon} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m_*^2} \right). \quad (4.1)$$

O propagador $S(p)$ à esquerda é o propagador de uma partícula escalar de massa m e momento p , e o propagador $S_{\mu\nu}(p)$ à direita é o propagador de uma partícula vetorial de massa m^* não-nula e momento p . O primeiro propagador é o propagador ideal para os mésons D^0 , \bar{D}^0 , D^+ , D^- e o segundo é o propagador ideal para as versões excitadas desses mésons, isto é, D^{0*} , \bar{D}^{0*} , D^{+*} , D^{-*} . Quando desnecessário fazer maior diferenciação, esses mésons são referidos como mésons D ou D^* , enquanto ambos charmônios de interesse (J/ψ e ψ') são referidos como ψ . Nesse sentido cada diagrama de *loop* na fig. 4.1 é em princípio referente a quatro processos: um primeiro processo em que os mésons no *loop* são mésons neutros, um segundo processo em que esses mésons são carregados, e outros dois processos em que os *loops* são obtidos através da conjugação de carga dos *loops* dos dois primeiros processos. Não desenhamos um diagrama para cada um desses processos, deixando-os implícitos.

A maioria dos vértices são obtidos através das lagrangianas efetivas trabalhadas no capítulo anterior. Para obter os vértices que correlacionam os mésons D , D^* e os charmônios ψ , utilizamos as lagrangianas de heavy quark (3.74)-(3.78). Já para obter os vértices que correlacionam os mésons D , D^* e o fóton, recorreremos, dependendo dos mésons envolvidos, às lagrangianas elétricas (3.86) e (3.94) ou às lagrangianas magnéticas (3.88)-(3.89). Os vértices elétricos descrevem interações em que mésons carregados preservam o seu spin ao emitir ou absorver fótons (isto é, vértices de forma $D^\pm \rightarrow D^\pm\gamma$ ou $D^{\pm*} \rightarrow D^{\pm*}\gamma$) e os vértices magnéticos só se aplicam quando há a presença de um méson de spin 1 (isto é, $D^* \rightarrow D^*\gamma$ ou $D^* \rightarrow D\gamma$). Dessa forma, quando o vértice do fóton

é elétrico não será possível a existência de um *loop* de mésons neutros no interior do diagrama. O diagrama (b) admite tanto o vértice elétrico quanto o magnético, as duas possibilidades devendo ser computadas.

A interação entre o X e os mésons D e D^* não provém de nenhuma teoria efetiva fundamentada diretamente na QCD. Como foi feito nos trabalhos [DFG⁺09, GHK⁺15], por simplicidade parametrizamos essa interação através da lagrangiana

$$\mathcal{L}_X = \frac{x_0}{\sqrt{2}} X_\sigma^\dagger (D^{*\sigma} \bar{D}^0 + D^0 \bar{D}^{*0\sigma}) + \frac{x_c}{\sqrt{2}} X_\sigma^\dagger (D^{*\sigma} D^- + D^+ D^{*- \sigma}) + \text{h.c.} \quad (4.2)$$

Essa lagrangiana é a mais simples possível interligando dois mésons vetoriais e um méson escalar. Ela pode ser vista como a versão covariante de uma lagrangiana frequentemente usada no tratamento não-relativístico de compostos moleculares (veja, por exemplo, [Kap97, GHM⁺13]). Analogamente ao caso dos campos pesados da seção 3.7, podemos correlacionar as constantes de acoplamento relativística e não-relativística através de um fator de normalização $\sqrt{m'}$ proveniente de cada campo de massa m' . Assim $x_0 = x_c = x_{nr} \sqrt{m_X m_* m}$, em que x_{nr} é a constante de acoplamento não-relativística entre as partículas [GHK⁺15]. Repare que, além da massa do X , apenas distinguimos outras duas massas: m e m_* , referente respectivamente aos mésons D e D^* . Dessa forma supomos uma simetria de isospin, isto é, consideramos os estados neutros e carregados degenerados em massa. Com base nessa simetria impomos $x_0 = x_c$.

A partir dessas lagrangianas, obtemos os vértices dados na fig. 4.2. Esses vértices, conjuntamente com os propagadores (4.1) e os vetores de polarização, são os elementos necessários para calcular, via regras de Feynman, a amplitude \mathcal{M}_L de longo alcance referente aos diagramas (a)-(e) da fig. 4.1. Essa amplitude é dada por:

$$\mathcal{M}_L = \sum_{\mathcal{D}=a}^e \mathcal{M}_{\mathcal{D}} = \epsilon_{(\psi)}^\eta \epsilon_{(X)}^\sigma \epsilon_{(\gamma)}^\lambda M_{\eta\sigma\lambda}, \quad (4.3)$$

com

$$M_{\eta\sigma\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_X g_2 m \sqrt{m_x m_\psi} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S_\sigma^\nu(k) S(k-p) J_{\eta\nu\lambda}(k), \quad (4.4)$$

$$J_{\eta\nu\lambda}(k) = J_{\eta\nu\lambda}^{(a)m}(k) + J_{\eta\nu\lambda}^{(b)e}(k) + J_{\eta\nu\lambda}^{(b)m}(k) + J_{\eta\nu\lambda}^{(c)e}(k) + J_{\eta\nu\lambda}^{(d)m}(k) + J_{\eta\nu\lambda}^{(e)e}(k). \quad (4.5)$$

É possível escrever (4.4) dessa forma porque todos os diagramas de *loop* possuem mésons D e D^* emergindo do X , e os seus momentos são parametrizados com as mesmas variáveis, o que estabelece os fatores $S_\sigma^\nu(k)$ e $S(k-p)$ comuns a esses diagramas. k é um quadrimomento indeterminado (isto é, não tem o seu valor fixado pela lei de conservação de quadrimomento) e portanto é integrado. As funções $J_{\eta\nu\lambda}^{(\mathcal{D})}$ dizem respeito à porção restante de cada diagrama \mathcal{D} , porção que é distinta para cada diagrama. Essas porções são somadas, resultando no termo $J_{\eta\nu\lambda}(k)$ que aparece em $M_{\eta\sigma\lambda}$. Tal termo depende de k , mas implicitamente também depende dos momentos externos p e q . A expressão explícita de (4.5) é dada via [GHK⁺15]

$$J_{\eta\nu\lambda}^{(a)m}(k) = \frac{1}{3} m \left(\beta + \frac{4}{m_c} \right) \epsilon_{\nu\lambda\alpha\beta} p^\alpha q^\beta \frac{(2k-p-q)_\eta}{(k-q)^2 - m^2}, \quad (4.6)$$

$$J_{\eta\nu\lambda}^{(b)e}(k) = 2\epsilon_{\eta\rho\alpha\beta} \frac{(k-p)^\alpha (k-q)^\beta}{(k-q)^2 - m_*^2} [(2k-q)_\lambda g_\nu^\rho - (k-q)_\nu g_\lambda^\rho - k^\rho g_{\nu\lambda}], \quad (4.7)$$

$$J_{\eta\nu\lambda}^{(b)m}(k) = \frac{2}{3}m_* \left(\beta - \frac{4}{m_c} \right) \epsilon_{\eta\rho\alpha\beta} \frac{(k-p)^\alpha (k-p)^\beta}{(k-q)^2 - m_*^2} [q_\nu g_\lambda^\rho - q^\rho g_{\nu\lambda}], \quad (4.8)$$

$$J_{\eta\nu\lambda}^{(c)e}(k) = 2\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (k-p+q)^\alpha k^\beta \frac{(2k-2p+q)_\lambda}{(k-p+q)^2 - m^2}, \quad (4.9)$$

$$J_{\eta\nu\lambda}^{(d)m}(k) = \frac{1}{3}m_* \left(\beta + \frac{4}{m_c} \right) [(2k-p+q)_\mu g_{\beta\nu} - (2k-p+q)_\beta g_{\mu\nu} - (2k-p+q)_\nu g_{\beta\mu}], \quad (4.10)$$

$$J_{\eta\nu\lambda}^{(e)e}(k) = -2\epsilon_{\eta\nu\lambda\alpha} p^\alpha. \quad (4.11)$$

Desejamos obter a largura de decaimento, observável físico de interesse no que diz respeito ao decaimento de partículas. A relação entre a largura e a amplitude é dada por (2.49). Mas é importante notar que não computamos um processo determinado por um único estado inicial e um único estado final, pois o valor de spin 1 das partículas implica em três (duas) polarizações independentes possíveis para cada partícula massiva (sem massa). Isso configura um conjunto de estados iniciais e finais que devem ser levados em conta, de forma que é necessário somar a amplitude de todas configurações finais independentes, e fazer a média sobre todas configurações iniciais independentes. Sendo que as configurações iniciais são determinadas pelas três polarizações possíveis do X , temos

$$\Gamma = \frac{1}{3} \sum_i \sum_f \frac{m_X^2 - m_\psi^2}{16\pi m_X^3} |\mathcal{M}|^2, \quad (4.12)$$

em que a soma em i refere-se à soma sobre as polarizações possíveis da partícula inicial, e a soma em f à soma sobre as polarizações possíveis das partículas finais. A forma simplificada de (4.12) em relação a (2.49) deve-se ao fato de que a massa de uma das partículas emergentes, o fóton, é nula.

Em relação a uma dada partícula ϕ de spin 1 e de massa m_ϕ , temos [tQFT95]

$$\sum_{i,f} \epsilon_{(\phi)}^\alpha(r) \epsilon_{(\phi)}^{\alpha'*}(r) = \frac{r^\alpha r^{\alpha'}}{m_\phi^2} - g_{\alpha\alpha'} \quad (\text{se } m_\phi \neq 0), \quad \sum_{i,f} \epsilon_{(\phi)}^\alpha(r) \epsilon_{(\phi)}^{\alpha'*}(r) = -g_{\alpha\alpha'} \quad (\text{se } m_\phi = 0). \quad (4.13)$$

Dessas relações, obtemos

$$\sum_{i,f} |\mathcal{M}|^2 = \sum_{i,f} M_{\eta\sigma\eta} M_{\eta'\sigma'\lambda'}^* \epsilon_{(\psi)}^\eta(p') \epsilon_{(X)}^\sigma(p) \epsilon_{(\gamma)}^\lambda(q) \epsilon_{(\psi)}^{\eta'*}(p') \epsilon_{(X)}^{\sigma'*}(p) \epsilon_{(\gamma)}^{\lambda'*}(q), \quad (4.14)$$

$$\sum_{i,f} |\mathcal{M}|^2 = M_{\eta\sigma\eta} M_{\eta'\sigma'\lambda'}^* \left(\frac{p^\sigma p^{\sigma'}}{m_X^2} - g_{\sigma\sigma'} \right) \left(\frac{(p-q)^\eta (p-q)^{\eta'}}{m_\psi^2} - g_{\eta\eta'} \right) (-g_{\lambda\lambda'}). \quad (4.15)$$

Aplicando (4.15) em (4.12), calcula-se a largura de decaimento.

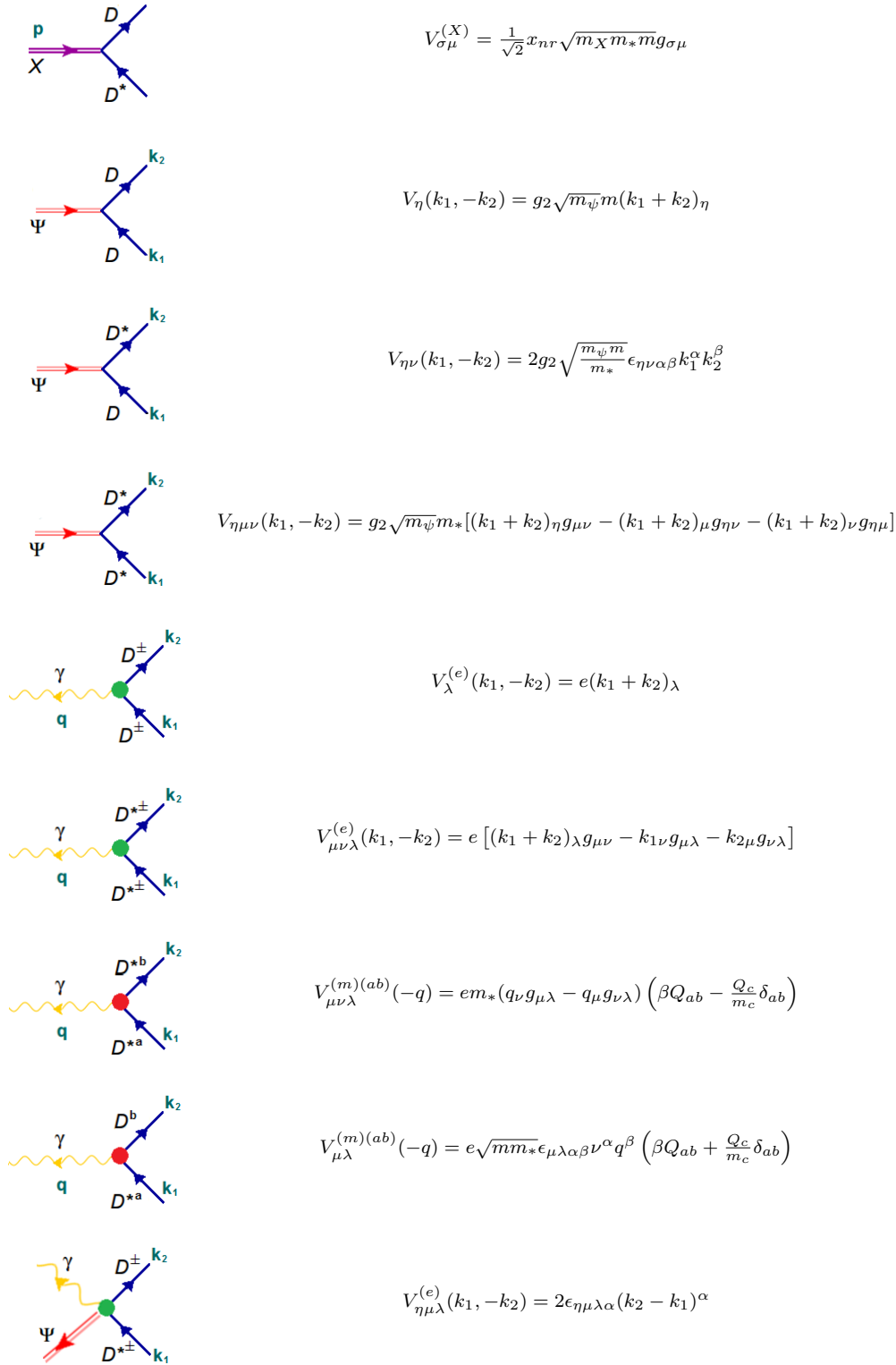


Figura 4.2: Vértices necessários para o cálculo dos diagramas da figura (4.1). Cada partícula vetorial envolvida em um dado vértice fornecerá a esse vértice um índice de Lorentz. Ao computar-se as regras de Feynman, cada índice é acoplado ao propagador de sua respectiva partícula (caso a partícula seja uma partícula virtual) ou à sua polarização (caso a partícula seja uma partícula incidente ou emergente do processo). Como fizemos anteriormente com as polarizações, os índices σ , η e λ são especialmente designados para o $X(3872)$, o charmônio e o fóton, respectivamente. Os índices μ e ν , quando presentes, estão associados aos mésons D^* de respectivos momentos k_1 e k_2 . As demais constantes que aqui aparecem provêm e estão definidas nas lagrangianas originárias dos vértices. É importante atentar-se à convenção dada nas figuras a respeito da direção desses momentos. Temos em verde os vértices elétricos, e em vermelho os vértices magnéticos.

4.2 Métodos de regularização e subtração

Analisando (4.4)-(4.11), verifica-se que $M_{\mu\sigma\lambda}$ será um tensor com diversos termos, e o número de termos será ainda maior ao realizar-se o produto dado em (4.15). De qualquer forma, uma vez realizada a distributiva nos termos do numerador, $M_{\mu\sigma\lambda}$ pode ser escrito como

$$M_{\mu\sigma\lambda} = \sum_{\mathcal{D}=a}^e \sum_{N=0}^5 F(\mathcal{D}, N)_{\mu\sigma\lambda}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}\dots k_{\mu_N}}{D_1D_2\dots D_{\ell(\mathcal{D})}}. \quad (4.16)$$

A soma em \mathcal{D} refere-se à soma sobre os diagramas. $\ell(\mathcal{D})$ é o número de fatores multiplicativos no denominador de cada diagrama \mathcal{D} : basicamente cada propagador fornecerá um fator multiplicativo no formato $D_i = q'^2 - m'^2$, sendo m' a massa da partícula propagada e q' o seu momento. Assim $\ell = 3$ para os diagramas (a)-(d) e $\ell = 2$ para o diagrama (e).

Fica evidente que boa parte da resolução matemática do problema reside no trato de integrais do tipo

$$I_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}\dots k_{\mu_N}}{D_1D_2\dots D_{\ell(\mathcal{D})}}. \quad (4.17)$$

Essas integrais eventualmente são infinitas no regime ultravioleta, isto é, podem apresentar divergências nas regiões de integração em que as componentes k^μ são muito grandes. Um modo de tratar esse tipo de divergência é impor $k^\mu < \Lambda$, a introdução de um *cutoff* Λ exclui quadrimomentos k^μ altamente energéticos, o que torna a integral finita. Esse procedimento tem uma interpretação física clara: ao impor o *cutoff*, desprezamos a física de altas energias do problema. Porém o valor de Λ é um tanto arbitrário, e de fato a introdução do *cutoff* rompe certas simetrias da interação, como a invariância de Lorentz, a simetria de translação e eventuais simetrias de gauge. Um método alternativo para tratar essas divergências é empregar-se a regularização dimensional, método que apesar de pouco significado físico, preserva essas simetrias, além de fornecer um critério menos arbitrário para a identificação e subtração das divergências [KSF01, Bai13, tQFT95, DAPV97, Sie79]. Esse método consiste em estender o cálculo da integral (5.1) para d dimensões

$$I_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} = \lim_{d \rightarrow 4} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}\dots k_{\mu_N}}{D_1D_2\dots D_{\ell(\mathcal{D})}}, \quad (4.18)$$

em que a escala de energia μ é inserida para manter as unidades dimensionais corretas de $I_{\mu_1\mu_2\mu_3\dots\mu_N}$. Repare que, ao estendermos a integral para d dimensões, a variável d é considerada uma variável contínua, caso contrário o limite $d \rightarrow 4$ não estaria bem definido. Ainda que $\int d^d k$ só esteja definido para d natural, ocorre que, ao calcular-se a integral para valores naturais arbitrários de d , chega-se em uma função matemática que pode ser estendida analiticamente para valores complexos dessa variável. É nessa função estendida analiticamente em que o limite $d \rightarrow 4$ é tomado.

Dedicaremos um apêndice para a obtenção, regularização e renormalização explícitas dessas integrais. Adiantamos aqui que o resultado é algo no formato

$$I_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} = \sum_j \mathcal{I}_j R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[j]}. \quad (4.19)$$

$R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[j]}$ é um tensor de N índices construído apenas a partir do tensor de métrica e dos tensores que descrevem a interação (na nossa modelagem, os tensores p e q), e a somatória em j percorre todos tensores possíveis que obedeçam a essas características. \mathcal{I}_j é uma integral numérica infinita mas regularizada. A regularização dimensional é especialmente conveniente porque a parte divergente

da integral fica parametrizada em um termo

$$L = \lim_{d \rightarrow 4} \frac{1}{\epsilon(d)} + \ln(4\pi) - \gamma_e, \quad (4.20)$$

em que $\gamma_e \cong 0.577$ é a constante de Euler-Mascheroni e $2\epsilon(d) = 4 - d$. \mathcal{I}_j depende linearmente de L , $\ln \mu$ e 1. Os fatores multiplicativos dessas grandezas são integrais finitas e escalares. No nosso caso, esses fatores dependem apenas das massas das partículas envolvidas no processo, mesmo porque os tensores p e q só podem atuar em \mathcal{I}_j através de grandezas escalares, e

$$p^2 = m_X^2, \quad q^2 = 0, \quad 2p \cdot q = -(p - q)^2 + p^2 + q^2 = m_X^2 - m_\psi^2. \quad (4.21)$$

Para que obtenhamos observáveis finitos, é necessário converter as integrais \mathcal{I}_j em grandezas finitas. O modo de fazê-lo dependerá do método de subtração utilizado. Os métodos mais usuais são a redução MS (do inglês, *minimal subtraction*), que consiste em fazer $1/\epsilon = 0$, e a redução $\overline{\text{MS}}$, que consiste em fazer $L = 0$. Como no caso do *cutoff*, essa subtração é realizada tendo em mente que essa divergência é referente à física de altas energias do problema, física que não modelamos em nossa teoria efetiva e que será parametrizada no diagrama (f).

Como explicamos, essas integrais são trabalhadas interpretando-as como uma função analítica de variável d . Além de um pólo na dimensão física $d = 4$ (de onde provém a divergência que tratamos até aqui), essa função eventualmente apresenta outros pólos, pólos em valores diferentes de d . Nesse sentido o esquema MS ou $\overline{\text{MS}}$ consiste em subtrair o pólo localizado em $d = 4$, indo aparentemente à fonte do problema. Mas poderíamos considerar critérios que, além disso, subtraíam outros pólos. Do ponto de vista da teoria quântica de campos, não é dado nenhum motivo *a priori* para privilegiar a redução mínima e preservar outros pólos, reduções mínimas e não-mínimas acarretam alterações igualmente drásticas na função analítica.

Podemos tentar intuir via um argumento de plausibilidade que a mera redução mínima possa ser incompleta. Considerando um caso simples da integral (5.1), o caso com $\ell = 1$ e $N = 0$, temos

$$I_0 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2}. \quad (4.22)$$

Podemos calcular de modo estimado essa integral:

$$I_0 \sim \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{k^2 - m^2} = \int_0^\infty \frac{k(k^2 - m^2 + m^2) dk}{k^2 - m^2} \sim \int_0^\infty k dk + m^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k}. \quad (4.23)$$

Assim, esperamos divergências logarítmicas e quadráticas — mas na redução mínima, conforme já expomos, apenas uma dependência logarítmica é observada. De fato, essa redução suprime qualquer dependência que seja dada por leis de potência.

A redução PDS (do inglês, *power-divergence subtraction*) [KSW98a, KSW98b] requer que, além de efetuarmos o cálculo delineado acima, calculemos o análogo de $I_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N}$ para dimensões $D \neq 4$:

$$I_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N}^D = \lim_{d \rightarrow D} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_N}}{D_1 D_2 \dots D_{\ell(d)}}. \quad (4.24)$$

Conforme será mostrado no apêndice, o resultado é algo no formato

$$I_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N}^D = \dots + \left(\lim_{d \rightarrow D} \frac{\mu^{4-D}}{\epsilon^D(d)} \right) \sum_j \mathcal{A}_j^D R_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N}^{[j]}, \quad (4.25)$$

em que $2\epsilon^D(d) = D - d$ também retém toda a divergência da integral, as reticências indicam termos finitos. O método PDS implica que, além da subtração mínima (subtração do pólo em $D = 4$), seja subtraído de $I_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^D$ pólos localizados em outros valores de D . Uma vez feito isso, $I_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^D$ é calculado em $D = 4$. Assim, a integral (já devidamente renormalizada segundo o método PDS) é dada por

$$I_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} = \sum_j \left(\mathcal{I}_j|_{L=0} - \sum_{D'} \frac{\mu^{4-D'}}{\epsilon^{D'}(4)} \mathcal{A}_j^{D'} \right) R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[j]}. \quad (4.26)$$

Repare que os termos que acarretam divergências em $D \neq 4$ são finitos na dimensão física, pois $\epsilon^D(4)$ é não-nulo.

Veremos no cálculo explícito realizado no apêndice que só dimensões pares (incluindo não-positivas) eventualmente apresentam divergências, e que para dado N é necessário subtrair apenas um número finito de pólos localizados em $D \leq 4$, dimensões muito baixas apresentarão divergências apenas para valores muito altos de N . Como fica claro em (4.26), além da dependência logarítmica $\ln \mu$ (embutida em \mathcal{I}_j), obtemos dependências dadas por leis de potência. Em especial, será confirmado o que estimamos em (4.22) e (4.23).

Ainda que para cálculos perturbativos seja possível demonstrar a equivalência entre as subtrações PDS e $\overline{\text{MS}}$ [Wil73], essa equivalência não necessariamente ocorre em interações não-perturbativas. Nesse sentido, Phillips *et al.* [DRP] argumentam que a regularização dimensional é equivalente à regularização via *cutoff* em regimes perturbativos basicamente porque, nesses regimes, é a combinação linear de divergências e contratermos que geram observáveis físicos. Já para estudar problemas não-perturbativos, eles aplicam a equação de Lippmann-Schwinger para alguns potenciais simples — como vimos na seção 2.3, essa equação computa o efeito de diagramas com número arbitrariamente grande de *loops*, tratando-se portanto de um cálculo não-perturbativo. Eles mostram que, nesse caso, a relação linear entre divergências e contratermos em geral não é mantida, e quando isso ocorre os métodos não são mais equivalentes. Além disso, é argumentado que a regularização dimensional, como dispensa divergências dadas por leis de potência, já contém em si uma renormalização implícita, e é mostrado que isso pode provocar uma alteração indevida na física de curtas distâncias de certos problemas estudados. Nesse sentido, a redução PDS é necessária para garantir propriedades não-triviais do grupo de renormalização que são características de estados fracamente ligados [DRP, BMR99], como o limite de escala e o efeito Efimov [Ham05].

Por causa dessa discrepância entre os métodos, desde que o PDS foi proposto como um meio de tratar aspectos não-perturbativos da interação núcleon-núcleon [KSW98a, KSW98b], criou-se espaço para que ele se firmasse como um método alternativo para problemas não-perturbativos (como por exemplo nas áreas de átomos frios, mésons exóticos, aglomerados nucleares, etc) [Ham05, BK05b, RH11, FHR12, FVR15]. De qualquer forma esperamos que outros métodos sejam tão válidos quanto o PDS como ferramentas de renormalização, desde que mesmo que implicitamente levem em conta divergências provenientes de pólos em $D \neq 4$, divergências que são dadas por leis de potência. Nesse sentido o uso do *cutoff* também poderia ser adequado — pode-se mostrar, por exemplo, que para uma teoria efetiva simples com apenas termos de contato, PDS e *cutoff* são intercambiáveis, μ sendo bastante análogo a Λ [PBB99, VK99]. De qualquer forma, como tratamos aqui de decaimentos radiativos, o uso do PDS é mais conveniente, por preservar a simetria de gauge e pelas facilidades próprias da regularização dimensional. O PDS alia assim as vantagens do *cutoff* e das reduções MS e $\overline{\text{MS}}$.

4.3 Resultados

Conforme explicado anteriormente, calculamos as larguras $\Gamma(X \rightarrow J/\psi\gamma)$ e $\Gamma(X \rightarrow \psi'\gamma)$ segundo o mecanismo dado na fig. 4.1, utilizando em suma as fórmulas (4.3)-(4.15) e os resultados analíticos (4.19) e (4.26) que estão expostos com mais detalhes no apêndice. Para manipular os diversos tensores, em especial colocá-los na forma (4.16) e realizar o produto (4.15), usamos o *software* Mathematica, mais especificamente o pacote FeynCalc. Os resultados (4.19) e (4.26) são incluídos no programa, e as integrais numéricas são calculadas usando quadratura de Gauss-Legendre (vide seção 2.9). Os valores numéricos que serviram de entrada para nossos cálculos computacionais estão dados na tabela 4.1.

Tabela 4.1: Parâmetros utilizados nos cálculos numéricos.

m_X	Massa do X(3872)	3872 MeV
m	Massa dos mésons D	1865 MeV
m_*	Massa dos mésons D^*	2007 MeV
$m_{J/\psi}$	Massa do J/ψ	3097 MeV
$m_{\psi'}$	Massa do ψ'	3686 MeV
α	Constante estabelecida em (3.88)-(3.92)	$(1863 \text{ MeV})^{-1}$ [HM06]
β	Constante estabelecida em (3.88)-(3.92)	$(379 \text{ MeV})^{-1}$ [HM06]
x_{nr}	Constante estabelecida em (4.2)	$0.97 \text{ GeV}^{-1/2}$ [GHM+13]
$g_{J/\psi}$	Constante estabelecida em (3.74)-(3.80)	$2.34 \text{ GeV}^{-3/2}$ (3.94)
$g_{\psi'}$	Constante estabelecida em (3.74)-(3.80)	$1.67g_{J/\psi}$ [DFGL10]

Dessa forma pudemos calcular as larguras de decaimento em função da escala de renormalização μ , aplicando tanto o esquema PDS quanto o esquema $\overline{\text{MS}}$. Variamos μ entre 3 GeV e 5 GeV, cobrindo assim o entorno da massa do X. Os resultados estão expostos na fig. 4.3. Esses resultados, porém, são de difícil comprovação experimental, pois apenas a razão R entre as larguras, razão definida em (1.5), é experimentalmente bem acessível. Na fig. 4.4 expomos os resultados obtidos para essa razão, novamente utilizando os dois métodos de renormalização.

Repare que a razão R não depende da constante x_{nr} , mas é proporcional a $(g_{\psi'}/g_{J/\psi})^2$, que não é bem determinada experimentalmente. Da amplitude dos decaimentos leptônicos dos charmônios J/ψ e ψ' , é obtido em [DFGL10] que $g_{\psi'}/g_{J/\psi} \cong 1.67$. Esse é o valor de referência que adotamos. Permitimos uma variação tal que $1 < g_{\psi'}/g_{J/\psi} < 2.5$, na qual procuramos levar em conta incertezas tanto fenomenológicas quanto no que diz respeito à dependência na constante de renormalização μ por parte de $g_{\psi'}/g_{J/\psi}$.

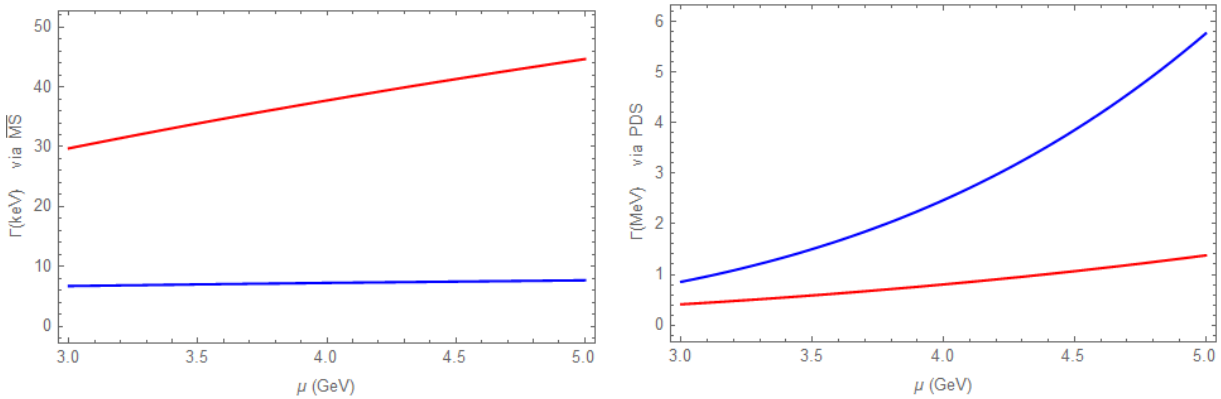


Figura 4.3: Em vermelho, temos a largura de decaimento do processo $X \rightarrow J/\psi\gamma$ em função da escala de renormalização μ , e em azul a largura de decaimento do processo $X \rightarrow \psi'\gamma$ em função da mesma escala. À esquerda o processo é calculado via $\overline{\text{MS}}$, e à direita via PDS.

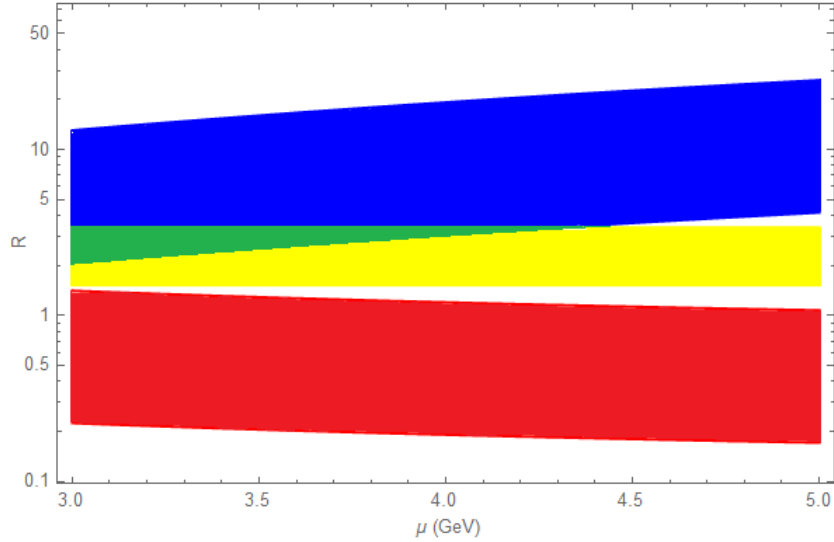


Figura 4.4: Razão R entre as larguras de decaimento. Em vermelho utilizamos o esquema $\overline{\text{MS}}$, e em azul utilizamos o esquema PDS. Em amarelo temos o valor experimental de R obtido no LHCb, conforme dado em (1.6). Em verde temos a intersecção entre o valor obtido via PDS e o valor experimental. Incluímos as incertezas tanto do valor experimental, dada em (1.6), quanto dos cálculos computacionais (definidas como provenientes das incertezas em $g_{\psi'}/g_{J/\psi}$). A escala em R é logarítmica.

A renormalização via PDS parece fornecer um resultado mais acertado em relação ao valor experimental de R , enquanto o cálculo via $\overline{\text{MS}}$ não fornece um valor compatível. Porém, o cálculo via PDS apresenta larguras de decaimento da ordem de dezenas de MeV, enquanto sabemos que tal largura tem limite superior de 1.2 MeV. A dependência de R na variável μ também é mais forte no cálculo via PDS (repare que, na fig. 4.4, a escala em R é logarítmica). Isso é esperado, pois o PDS leva em conta divergências que são anuladas no cálculo via $\overline{\text{MS}}$, divergências dadas por leis de potência. Curiosamente, a maior parte das divergências provém das interações magnéticas, o que significa que tais interações são bastante sensíveis à física de curtas distâncias. Isso também ocorre em estados nucleares fracamente ligados (vide [FHR12, FVR15]).

Além disso, vemos que ambos métodos de subtração dependem acentuadamente da escala de renormalização μ , o que aponta para a necessidade de renormalizar apropriadamente os resultados. Apesar disso e da diferença de valores entre os dois métodos de subtração, estamos aptos desde já a apontar que o modelo molecular é conciliável com o fato de que $R \gg 10^{-3}$, ao contrário do que é afirmado em [Swa04a, A⁺14].

Podemos efetuar a renormalização impondo que as larguras sejam independentes da escala μ . Para tanto, diferentemente do que consideramos até agora, devemos levar em conta explicitamente o diagrama de contato (f) da fig. 4.3. Considerando como exemplo o decaimento $X \rightarrow J/\psi\gamma$, impomos que

$$\frac{d\Gamma_{J/\psi}}{d\mu} = 0, \quad (4.27)$$

isto é,

$$|\mathcal{M}|^2 = \left| \left(\sum_{\mathcal{D}=a}^e \mathcal{M}_{\mathcal{D}} \right) + \mathcal{M}_f(C_{J/\psi}(\mu)) \right|^2 = c_{J/\psi}, \quad (4.28)$$

em que $c_{J/\psi}$ não depende de μ . A amplitude \mathcal{M}_f é parametrizada como

$$\mathcal{M}_f(C_{J/\psi}(\mu)) = \mathcal{M}'_{\eta\sigma\lambda} \epsilon_{(\psi)}^\eta \epsilon_{(X)}^\sigma \epsilon_{(\gamma)}^\lambda, \quad \mathcal{M}'_{\eta\sigma\lambda} = -iC_{J/\psi}(\mu) \epsilon_{\eta\sigma\lambda\alpha} q^\alpha. \quad (4.29)$$

$\mathcal{M}'_{\eta\sigma\lambda}$ é assim definido para que seja respeitada a identidade de Ward $\mathcal{M}'_{\eta\sigma\lambda} q^\lambda = 0$, identidade que decorre da invariância de gauge [Con]. A constante i é ali colocada por conveniência — conforme é exposto com mais detalhes no apêndice, o termo $M_{\eta\sigma\lambda}$ dado em (4.4)-(4.11) é um termo puramente imaginário, o único fator não-real é um fator global i que surge naturalmente da regularização dimensional¹. Dessa forma, a presença explícita do termo i no termo de contato faz com que a equação diferencial seja trivialmente análoga a uma equação diferencial de coeficientes reais.

Diferentemente de (4.29), as amplitudes de longo alcance $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$ ($\mathcal{D} \in \{a, b, \dots, e\}$) dependem da escala μ apenas através da regularização dimensional das integrais de *loop*, pois não consideramos a dependência nessa escala por parte das constantes de acoplamento x_{nr} , $g_{J/\psi}$ ou $g_{\psi'}$ (com exceção da margem de erro que estabelecemos na fig. 4.4). De qualquer forma, as amplitudes de longo alcance dependem da escala μ , e como observáveis físicos não devem variar com essa escala, é necessária a presença de uma amplitude de curto alcance para contrabalancear essa dependência. Dessa maneira, buscamos uma função $C_{J/\psi}(\mu)$ tal que a amplitude encontra-se renormalizada, isto é, $|\mathcal{M}|^2$ seja independente de μ . Em vista disso temos definida uma equação diferencial de primeira ordem (4.27), equação cuja solução $C_{J/\psi}(\mu)$ depende de uma condição de contorno definida por um único parâmetro livre. Esse parâmetro surge naturalmente como $c_{J/\psi}$ em (4.28), mas podemos substituí-lo por um parâmetro com maior significado físico — nesse sentido adotamos como parâmetro livre $\Gamma_{J/\psi} = \Gamma(X \rightarrow J/\psi\gamma)$, a largura de decaimento do processo $X \rightarrow J/\psi\gamma$.

Evidentemente temos uma equação análoga para o decaimento $\Gamma(X \rightarrow \psi'\gamma)$. Portanto temos duas funções de contato $C_{J/\psi}(\mu)$ e $C_{\psi'}(\mu)$, funções que dependem dos parâmetros livres $\Gamma_{J/\psi}$ e $\Gamma_{\psi'}$. Impondo o valor de R obtido experimentalmente, podemos correlacionar os dois parâmetros, de forma que as funções $C_{J/\psi}(\mu)$ e $C_{\psi'}(\mu)$ passam a ter como parâmetro livre apenas a largura $\Gamma_{J/\psi}$ do decaimento $X \rightarrow J/\psi\gamma$.

Além disso, ocorre que a equação diferencial (4.27) é uma equação não-linear, mais especificamente uma equação quadrática (basicamente porque $\Gamma \sim |\mathcal{M}|^2$). Assim, não esperamos que ela apresente uma única solução. De fato, ela apresenta duas soluções que podem ser parametrizadas de forma análoga à fórmula de Báskara: $a_1 \pm a_2\sqrt{\Delta}$. Os parâmetros da fórmula dependem de μ e de $\Gamma_{J/\psi}$. Em especial, temos que impor $\Delta \geq 0$ se desejamos que a função de contato seja real, o que implica em eventuais restrições sobre o valor da largura $\Gamma_{J/\psi}$. Essas restrições dependem do intervalo de μ que é de interesse (no nosso caso, $3 \text{ GeV} < \mu < 5 \text{ GeV}$).

Na fig. 4.5 apresentamos graficamente essas soluções. Na primeira linha, temos $C_{J/\psi}(\mu)$ e na segunda linha $C_{\psi'}(\mu)$, para $\Gamma_{J/\psi}$ de valores 60, 80, 100 e 120 keV. Cada linha possui dois gráficos, correspondente às duas soluções possíveis da equação diferencial. Nessas linhas o cálculo foi feito utilizando PDS. Por completeza expomos nas duas últimas linhas as soluções obtidas utilizando-se $\overline{\text{MS}}$. Vemos que as funções de contato obtidas via $\overline{\text{MS}}$ são subestimadas em relação às funções análogas obtidas via PDS, o que é esperado e similar ao que vimos nas figuras 4.3 e 4.4: o $\overline{\text{MS}}$, como apresenta divergências apenas logarítmicas, subestima a dependência na variável μ por parte dos resultados.

Na fig. 4.6 expomos a largura que cada uma das funções de contato da fig. 4.5 acarretaria caso não houvesse a influência dos diagramas de longo alcance, isto é, a largura obtida ao fazer-se $\Gamma \sim |\mathcal{M}_f|^2$. Tendo em vista essas larguras, as funções de contato do lado direito parecem tratar-se de soluções um tanto quanto espúrias, soam especialmente implausíveis porque oferecem isoladamente uma amplitude da ordem de dezenas de MeV, e sabemos que a largura total do decaimento não

¹ Isso é dito tendo em mente os parâmetros dados na tabela 4.1, e as convenções que estabelecemos para obter os vértices e propagadores — conforme é indicado no apêndice, para massas tais que $m_X > m_* + m$, outros termos não-reais entrariam em cena, mas essa situação não é de interesse para nosso modelo molecular.

deve superar 1.2 MeV. Mas mesmo em relação às soluções do lado esquerdo percebe-se que há, com respeito à determinação da largura de decaimento, um delicado balanço entre os diagramas de longo e curto alcance. Tomando como exemplo a função de contato $C_{J/\psi}(\mu)$ obtida impondo-se $\Gamma_{J/\psi} = 60$ keV: ainda que esteja associada à largura total de 60 keV, vemos na fig. 4.6 que ela isoladamente tenderia a acarretar uma largura de cerca de 200 keV, de forma que os diagramas de longo alcance devem contrabalançar o diagrama de contato para que a largura total seja de fato 60 keV. Essa relação entre as dinâmicas de curto e longo alcance pode estar relacionada a uma simetria subjacente do decaimento. Esse tipo de contrabalanço ocorre de forma ainda mais drástica para o decaimento em ψ' , o que implica que esse decaimento é mais sensível à física de curtas distâncias.

É importante ressaltar que, ao trabalharmos com uma teoria efetiva, a física de curtas distâncias não só é determinada por configurações compactas como o charmônio ou o tetraquark, mas também por outras configurações deixadas de fora da teoria efetiva, como configurações provenientes dos mésons D_s e D_s^* . Que as funções de contato tenham repentinamente um termo imaginário, isso estaria correlacionado à abertura dos limiares de alta energia, efeito que em última instância seria originário da influência de graus de liberdade fora do âmbito da teoria efetiva, o que não esperamos que ocorra no regime energético trabalhado por ela. Dessa forma é justificado impor que os termos de contato sejam reais, o que implica, como dito acima, em certas condições para as larguras de decaimento. Considerando a escala de interesse $3 \text{ GeV} < \mu < 5 \text{ GeV}$, obtemos

$$\Gamma_{J/\psi} > 7.5 \text{ keV}, \quad \Gamma_{\psi'} > 18.5 \text{ keV}. \quad (4.30)$$

Apesar desses valores específicos dependerem do intervalo de μ que tomamos como o regime de validade de nossa teoria efetiva, esses limites podem ser testados experimentalmente².

²Os cálculos usando $\overline{\text{MS}}$ fornecem $\Gamma_{J/\psi} > 15 \text{ keV}$ e $\Gamma_{\psi'} > 40 \text{ keV}$.

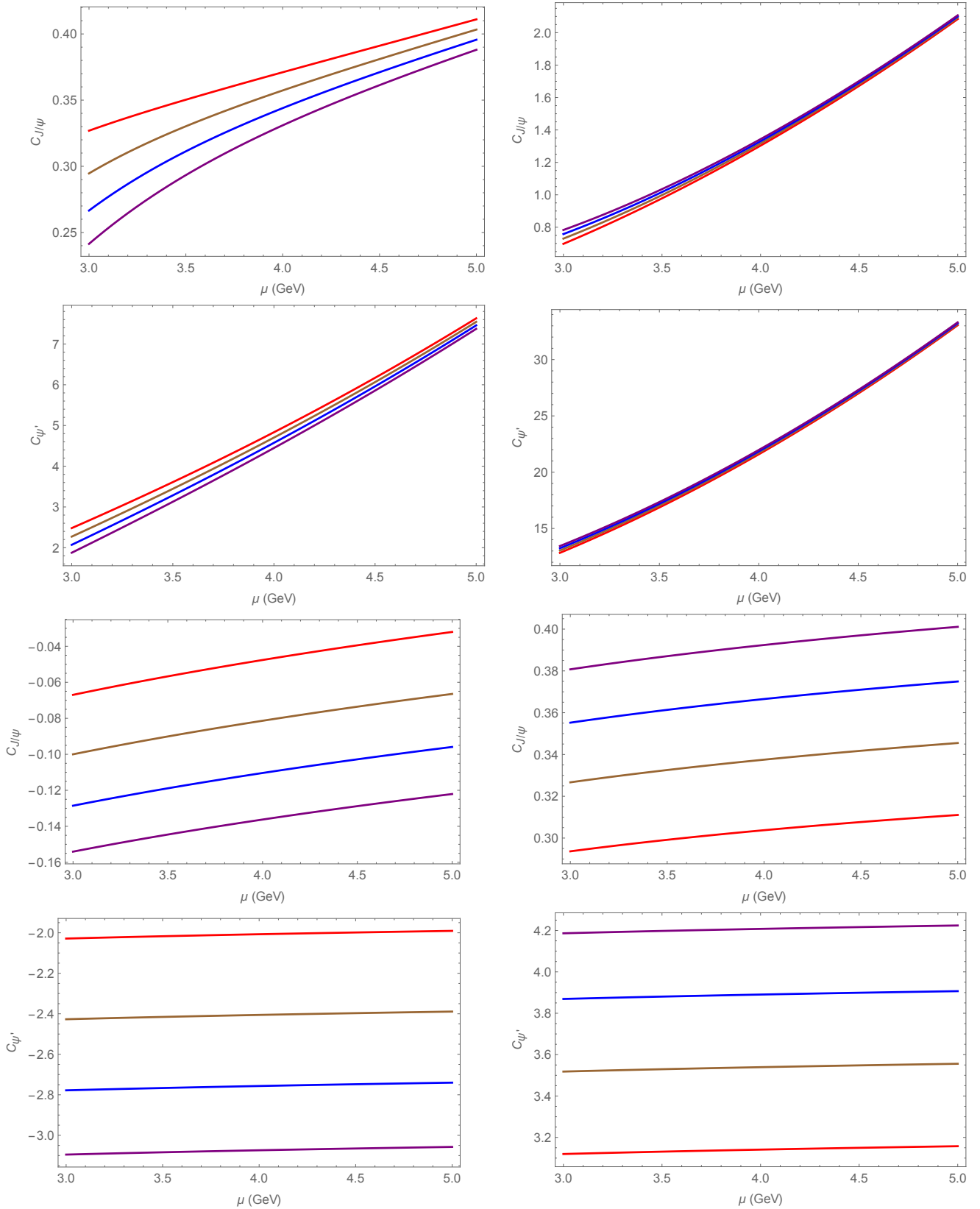


Figura 4.5: Na primeira linha temos os gráficos dos dois conjuntos de funções de contato possíveis para o decaimento $X \rightarrow \gamma J/\psi$, e na segunda linha temos os gráficos dos dois conjuntos análogos para o decaimento $X \rightarrow \gamma \psi'$. Essas soluções foram obtidas utilizando-se renormalização PDS. Em cada um dos conjuntos as funções podem ser parametrizadas segundo o valor da largura total de decaimento do processo correspondente. Nos gráficos acima calculamos as funções de contato tais que $\Gamma_{J/\psi}$ tenha valores 60, 80, 100 e 120 keV, e $\Gamma_{\psi'} = R\Gamma_{J/\psi}$. Nas últimas duas linhas expomos por completeza os resultados obtidos usando os mesmos procedimentos das linhas anteriores, exceto pelo uso da renormalização $\overline{\text{MS}}$.

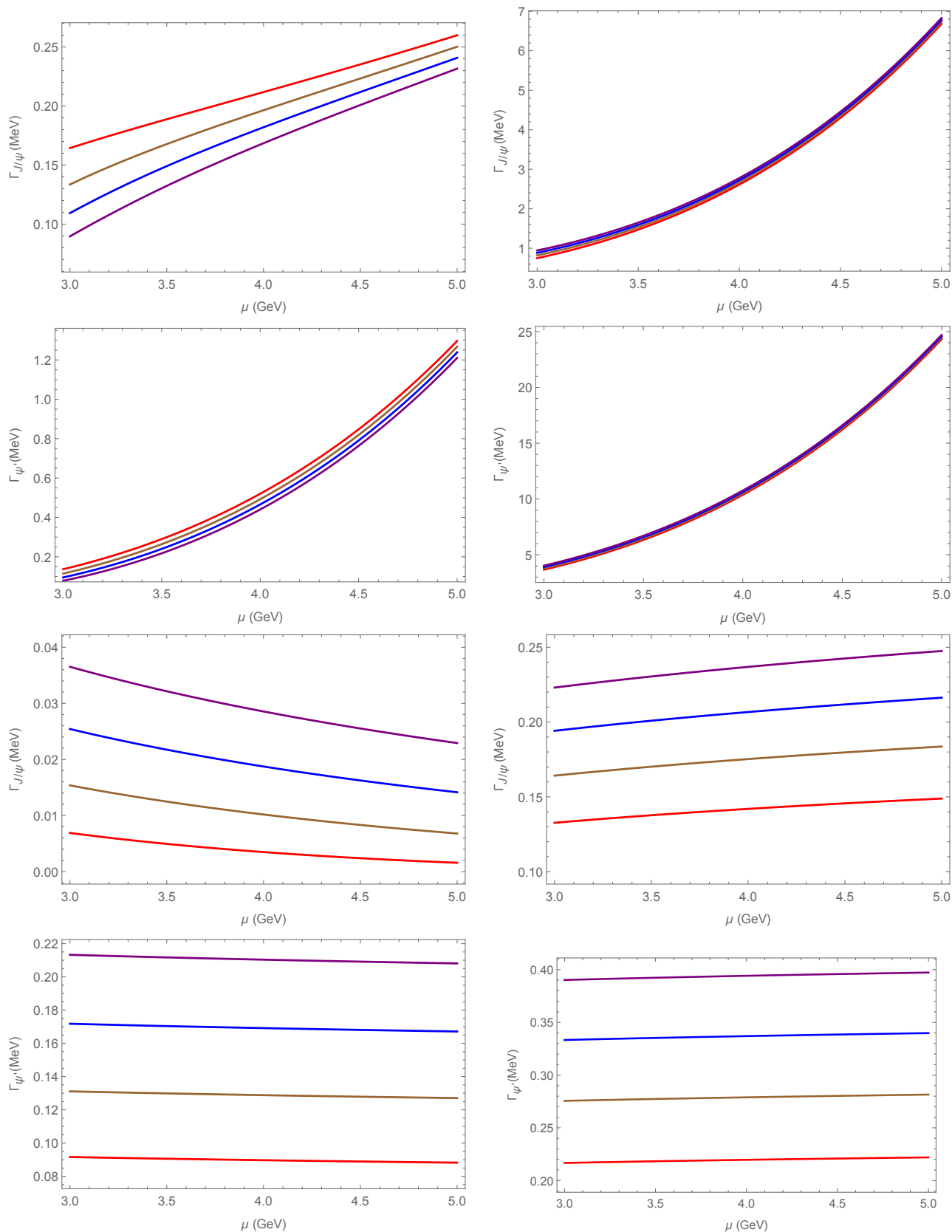


Figura 4.6: Cada gráfico dessa figura está correlacionado ao gráfico de mesma posição no interior da figura (4.5), mostrando a largura de decaimento que as funções de contato correspondentes acarretariam caso elas fossem o único fator determinante para a largura, isto é, não houvesse a influência de diagramas de longo alcance, diagramas de *loop*. Os métodos de renormalização também são correspondentes.

4.4 Conclusões e perspectivas

Em resumo, baseando-se sobretudo em lagrangianas efetivas, calculamos as larguras de decaimento dos processos radiativos $X(3872) \rightarrow J/\psi\gamma$ e $X(3872) \rightarrow \psi'\gamma$. Descrevemos explicitamente a física de longas distâncias desses processos através de um modelo molecular, e consideramos implicitamente a física de curtas distâncias através de termos de contato e da renormalização das integrais de longo alcance. Essas integrais são reguladas com o esquema PDS, esquema mais apropriado para lidar com processos não-perturbativos, e o resultado é restringido com o mais recente valor experimental da razão R entre as larguras, valor este obtido pela colaboração LHCb [A⁺14].

De nossos resultados é possível concluir que as informações experimentais a respeito dos decaimentos radiativos do $X(3872)$ são bem acomodadas dentro de um modelo molecular da partícula. Além disso, nosso modelo prevê limites inferiores para as larguras, previsões que podem ser testadas experimentalmente. Por fim, obtemos funções que delimitam a física de curtas distâncias dos decaimentos. Isso abre caminho para a construção de modelos microscópicos para o $X(3872)$ — por exemplo, pode-se tentar entender e prever essas funções usando um modelo de charmônio.

Outro aspecto dessas questões que pode ser futuramente explorado diz respeito à constante de acoplamento x_{nr} entre o $X(3872)$ e os mésons D e D^* . Nesse trabalho a dependência na escala μ por parte dessa constante não foi considerada, pois estima-se que ela tenha uma dependência muito fraca em uma molécula fracamente ligada. Mas esperamos que ao modelar explicitamente uma ligação molecular na estrutura do $X(3872)$ usando, por exemplo, a troca de píons, alguma dependência possa eventualmente ser obtida e sirva como correção de ordem superior para os resultados que aqui expusemos.

Ademais, o método exposto nessa dissertação pode ser aplicado para o estudo de outros mésons exóticos, em especial, os mésons carregados. Candidatos promissores para essa abordagem molecular são os estados $Z_c(3900)$, $Z_c(4025)$, $Z_b(10610)$ e $Z_b(10650)$, estados que, respectivamente, são próximos dos limiares $D\bar{D}^*$, $D^*\bar{D}^*$, $B\bar{B}^*$ e $B^*\bar{B}^*$. Essa abordagem também pode ser realizada em outros tipos de decaimentos. Por exemplo, um eventual decaimento $X(3872) \rightarrow \gamma\gamma$ pode ser estudado com exatamente o mesmo arcabouço teórico que expusemos aqui. Isso abre caminho para mais previsões teóricas a respeito do $X(3872)$.

Capítulo 5

Apêndice

5.1 Integração

A resolução de integrais do tipo

$$I_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}\dots k_{\mu_N}}{D_1D_2\dots D_\ell} \quad (5.1)$$

é crucial para diversos cálculos envolvendo teoria quântica de campos, em especial para os cálculos que realizamos em nossa modelagem do X(3872). Expor essa integral de forma que a sua resolução numérica seja trivial é, em suma, o objetivo desse apêndice. Nisso também está incluído a aplicação dos métodos de renormalização que discutimos na seção 4.2: MS, $\overline{\text{MS}}$ e PDS.

Por meio da parametrização de Feynman, pode-se unificar os ℓ fatores multiplicativos no denominador em um único fator, concomitantemente com o surgimento de $\ell - 1$ variáveis que são integradas. Conforme mostraremos na seção 5.7, essa técnica permite-nos escrever $I_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}$ na forma

$$I_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} = \int d^{\ell-1}F_{\text{par}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}\dots k_{\mu_N}}{(k^2 - 2k \cdot P - \Sigma^2)^\ell} \equiv \int d^{\ell-1}F_{\text{par}} T_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}, \quad (5.2)$$

com, por exemplo,

$$\int d^2F_{\text{par}} = 2 \int_0^1 da \int_0^1 db, \quad \int d^1F_{\text{par}} = \int_0^1 da. \quad (5.3)$$

P e Σ são quadrivetores que dependem de grandezas que constituem os termos D_i e das variáveis de integração decorrentes da parametrização de Feynman (a , b , etc.), mas não dependem do quadrivetor k . As formas específicas de P e Σ são expostas com mais detalhes na seção 5.7.

Para lidar com os fatores $k_{\mu_1}k_{\mu_2}\dots k_{\mu_N}$ no integrando de $T_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}$, usamos a fórmula

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}k_{\mu_3}\dots k_{\mu_N}}{(k^2 - 2k \cdot P - \Sigma^2)^{n+N}} = \frac{1}{2^N} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+N-1)} \frac{d^N L_n}{dP^{\mu_1}dP^{\mu_2}\dots dP^{\mu_N}}, \quad (5.4)$$

em que L_n é tal que

$$L_n = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot P - \Sigma^2)^n} = \lim_{d \rightarrow D} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - P^2 - \Sigma^2)^n} \equiv \lim_{d \rightarrow D} L_{n,d}. \quad (5.5)$$

Acima meramente completamos quadrados no denominador e, tendo em vista o procedimento de regularização dimensional que foi discutido na seção 4.2, estendemos analiticamente a integral (5.1) para um contexto, *grosso modo*, de dimensões espaço-temporais d contínuas. Assim, permitimos que d assumisse valores nas proximidades de $D = 4$, e computamos o limite $d \rightarrow D$. Estabelecemos aqui uma variável D porque adiante também se mostrará necessário, para aplicar a renormalização PDS, obter pólos de (5.1) em valores $d \rightarrow D \neq 4$.

Conforme veremos na seção 5.5, a integral $L_{n,d}$ pode ser resolvida através de análise complexa, e o resultado é

$$L_{n,d} = \mu^{4-d} i \frac{(-1)^n}{(4\pi)^{d/2}} (P^2 + \Sigma^2)^{d/2-n} \frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)}, \quad (5.6)$$

em que $\Gamma(x)$ é a função gama. Dessa forma,

$$T_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_N} = \lim_{(n,d) \rightarrow (\ell-N, D)} \frac{1}{2^N} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+N-1)} \frac{d^N L_{n,d}}{dP^{\mu_1} dP^{\mu_2} \dots dP^{\mu_N}}. \quad (5.7)$$

É interessante definir variáveis ε , η e τ tais que

$$\varepsilon \equiv n + D/2 - d/2 + N - \ell, \quad \eta \equiv d/2 - n = N - \ell + D/2 - \varepsilon, \quad \tau \equiv \ell - D/2 - 1. \quad (5.8)$$

Em especial, uma vez computado o limite $n \rightarrow \ell - N$, o limite $d \rightarrow D$ será equivalente ao limite $\varepsilon = D/2 - d/2 \rightarrow 0$. Para aplicar o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, é interessante expandir os diversos termos em função de ε . Utilizando a propriedade $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$, podemos expandir a função gama em (5.6) como

$$\Gamma(n-d/2) = \Gamma(\varepsilon + \ell - D/2 - N) = \frac{\Gamma(\varepsilon + \ell - D/2 - N + 1)}{\varepsilon + \ell - D/2 - N} = \frac{\Gamma(\varepsilon + \ell - D/2 - N + 2)}{(\varepsilon + \ell - D/2 - N)(\varepsilon + \ell - D/2 - N + 1)}, \quad (5.9)$$

$$\Gamma(n-d/2) = \frac{\Gamma(\varepsilon + 1)}{(\varepsilon + \ell - D/2 - N)(\varepsilon + \ell - D/2 - N + 1)\dots\varepsilon} = \frac{\Gamma(\varepsilon + 1)}{(\varepsilon + \ell - D/2 - N)^{N-\ell+D/2+1}}, \quad (5.10)$$

$$\Gamma(n-d/2) = \frac{\Gamma(\varepsilon + 1)}{(-\eta)^{N-\tau}} = \frac{\Gamma(\varepsilon + 1)}{\eta^{N-\tau} (-1)^{N-\tau}}. \quad (5.11)$$

Com essa expansão, deixamos a eventual divergência da função gama (no limite $\varepsilon \rightarrow 0$) explícita no denominador. Repare que pressupomos, a partir de (5.10), que D é par. Para D ímpar, (5.9) não é singular. Veremos que só é interessante à renormalização PDS valores pares de D . Aplicamos aqui as operações

$$a^b = a(a-1)\dots(a-b+1), \quad a^{\bar{b}} = a(a+1)\dots(a+b-1), \quad (5.12)$$

com $a, b, c \in \mathbb{N}$. Essas operações respeitam as propriedades

$$a^b = (a-b+1)^{\bar{b}}, \quad a^{\bar{b}} = (a+b-1)^b, \quad a^{\bar{b}} = (-a)^b (-1)^b, \quad a^b = (-a)^{\bar{b}} (-1)^b, \quad (5.13)$$

$$\frac{a^{\overline{b+c}}}{a^{\overline{b}}} = \frac{a(a+1)\dots(a+b-1)(a+b)\dots(a+b+c-1)}{a(a+1)\dots(a+b-1)} = (a+b)^{\overline{c}}, \quad \frac{a^{b+c}}{a^b} = (a-b)^{\underline{c}}, \quad (5.14)$$

$$\frac{a^{\overline{b-c}}}{a^{\overline{b}}} = \frac{a(a+1)\dots(a+b-c-1)}{a(a+1)\dots(a+b-c-1)(a+b-c)\dots(a+b-1)} = \frac{1}{(a+b-c)^{\overline{c}}}, \quad \frac{a^{b-c}}{a^b} = \frac{1}{(a-b+c)^{\underline{c}}}. \quad (5.15)$$

Em relação ao denominador de (5.6)-(5.7), podemos simplificá-lo via

$$\begin{aligned} n(n+1)\dots(n+N-1)\Gamma(n) &= (n+1)\dots(n+N-1)\Gamma(n+1) = (n+2)\dots(n+N-1)\Gamma(n+2) \\ &= (n+N-2)(n+N-1)\Gamma(n+N-2) = (n+N-1)\Gamma(n+N-1) = \Gamma(n+N) \xrightarrow{n \rightarrow \ell-N} (\ell-1)!. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Por fim, aplicando (5.11) e (5.16) em (5.6)-(5.7), e computando o limite $n \rightarrow \ell - N$, obtemos

$$T_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} = \lim_{d \rightarrow D} \frac{\mu^{4-d} i (-1)^{\ell-N}}{(4\pi)^{d/2} 2^N (\ell-1)!} \frac{\Gamma(\varepsilon+1)}{\eta^{N-\tau} (-1)^{N-\tau}} \frac{d^N (P^2 + \Sigma^2)^\eta}{dP^{\mu_1} dP^{\mu_2} \dots dP^{\mu_N}}, \quad (5.17)$$

com

$$\varepsilon = D/2 - d/2, \quad \eta = N - \ell + D/2 - \varepsilon, \quad \tau = \ell - D/2 - 1. \quad (5.18)$$

5.2 Tensores úteis

Dados dois quadrivetores p_μ e q_μ , é útil definir certos tensores que combinam apropriadamente esses quadrivetores. Definimos o tensor $R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[a][b]}$, com $a+b=N$, como

$$\sum_{\sigma} p_{\mu_{\sigma(1)}} p_{\mu_{\sigma(2)}} \dots p_{\mu_{\sigma(a)}} q_{\mu_{\sigma(a+1)}} q_{\mu_{\sigma(a+2)}} \dots q_{\mu_{\sigma(a+b)}}. \quad (5.19)$$

$\sigma(n)$ é uma permutação $\sigma : \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$, a soma varre todas permutações desse tipo restringidas ao fato de que não haja parcelas repetidas na somatória. Vemos que cada parcela de $R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[a][b]}$ terá um número a de fatores p e um número b de fatores q . Assim, por exemplo,

$$R_{\mu_1}^{[1][0]} = p_{\mu_1}, \quad R_{\mu_1\mu_2}^{[1][1]} = p_{\mu_1} q_{\mu_2} + p_{\mu_2} q_{\mu_1},$$

$$R_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{[1][2]} = p_{\mu_1} q_{\mu_2} q_{\mu_3} + p_{\mu_2} q_{\mu_3} q_{\mu_1} + p_{\mu_3} q_{\mu_1} q_{\mu_2},$$

$$R_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{[2][2]} = p_{\mu_1} p_{\mu_2} q_{\mu_3} q_{\mu_4} + p_{\mu_2} p_{\mu_3} q_{\mu_4} q_{\mu_1} + p_{\mu_3} p_{\mu_4} q_{\mu_1} q_{\mu_2} + p_{\mu_4} p_{\mu_1} q_{\mu_2} q_{\mu_3}.$$

Podemos estender esse definição para o caso em que $a+b=N-c$, c maior do que zero e par. Para tanto, completa-se os termos faltantes com $c/2$ tensores de métrica $g_{\alpha\beta}$, isto é,

$$R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[a][b]} = \sum_{\sigma} p_{\mu_{\sigma(1)}} p_{\mu_{\sigma(2)}} \dots p_{\mu_{\sigma(a)}} q_{\mu_{\sigma(a+1)}} q_{\mu_{\sigma(a+2)}} \dots q_{\mu_{\sigma(a+b)}} g_{\mu_{\sigma(a+b+1)} \mu_{\sigma(a+b+2)}} \dots g_{\mu_{\sigma(a+b+c-1)} \mu_{\sigma(a+b+c)}},$$

tendo em conta aquela mesma restrição que evita repetição de termos. Por exemplo,

$$R_{\mu_1\mu_2}^{[0][0]} = g_{\mu_1\mu_2}, \quad R_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{[1][0]} = p_{\mu_1} g_{\mu_2\mu_3} + p_{\mu_2} g_{\mu_3\mu_1} + p_{\mu_3} g_{\mu_1\mu_2}.$$

De forma bastante análoga, também é útil definir um tensor $P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[a]}$, com $a = N - c$, $c \geq 0$ e par, tal que

$$P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[a]} = \sum_{\sigma} P_{\mu_{\sigma(1)}} P_{\mu_{\sigma(2)}} \dots P_{\mu_{\sigma(a)}} g_{\mu_{\sigma(a+1)}\mu_{\sigma(a+2)}} \dots g_{\mu_{\sigma(a+c-1)}\mu_{\sigma(a+c)}}. \quad (5.20)$$

Trata-se de um tensor que, em cada termo, possui a fatores P e $c/2$ tensores de métrica. Se $a = N$, temos trivialmente $P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[N]} = P_{\mu_1} P_{\mu_2} \dots P_{\mu_N}$.

Definindo $P_{\mu} = xp_{\mu} + yq_{\mu}$, com x e y escalares, os tensores $P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[a]}$ e $R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[a][b]}$ relacionam-se via

$$P_{\mu_1} P_{\mu_2} \dots P_{\mu_N} = (xp_{\mu_1} + yq_{\mu_1})(xp_{\mu_2} + yq_{\mu_2}) \dots (xp_{\mu_N} + yq_{\mu_N}) = \sum_{j=0}^N x^{N-j} y^j R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[N-j][j]}, \quad (5.21)$$

e, estendendo esse resultado,

$$P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[a]} = \sum_{j=0}^a x^{a-j} y^j R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[a-j][j]}. \quad (5.22)$$

Conforme será exposto na seção (5.7), essas definições são úteis em nossa modelagem porque P , obtido em (5.2) através da parametrização de Feynman, é tal que $P_{\mu} = xp_{\mu} + yq_{\mu}$, em que p e q são os quadrimomentos das partículas de nossos diagramas. Assim, o termo $P^2 + \Sigma^2$, que aparece no denominador em (5.5) e (5.17), pode ser escrito como

$$A^2 = P^2 + \Sigma^2 = (xp_{\mu} + yq_{\mu})(xp^{\mu} + yq^{\mu}) + \Sigma^2 = x^2 p^2 + 2xy(p \cdot q) + y^2 q^2 + \Sigma^2, \quad (5.23)$$

e aplica-se (4.21).

Por fim, vemos em (5.17) que é necessário calcular

$$\delta^{[N]} \equiv \frac{d^N (P^2 + \Sigma^2)^{\eta}}{dP^{\mu_1} dP^{\mu_2} \dots dP^{\mu_N}}, \quad (5.24)$$

com η dado em (5.18). Provaremos na seção (5.6) que

$$\delta^{[N]} = H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} 2^N \eta^N (P^2 + \Sigma^2)^{\eta-N}, \quad (5.25)$$

$$H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} = \sum_{i=0}^{m(N)} \frac{(P^2 + \Sigma^2)^i}{2^i} \frac{1}{(\eta + i - N)^i} P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[N-2i]}, \quad (5.26)$$

$$m(0) = m(1) = 0, \quad m(2) = m(3) = 1, \quad m(4) = m(5) = 2, \quad m(N) = (N - \mathcal{I}_N)/2, \quad (5.27)$$

com $\mathcal{I}_N = 1$ se N é ímpar e $\mathcal{I}_N = 0$ se N é par. i representa o número de tensores de métrica em $P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[N-2i]}$. $m(N)$ é simplesmente o maior inteiro $m \geq 0$ tal que $N - 2m \geq 0$, o que define o maior número possível de tensores de métrica que $P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[N-2i]}$ pode possuir em cada termo.

Aplicando (5.18) em (5.26), obtemos:

$$H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} = \sum_{i=0}^{m(N)} \frac{(P^2 + \Sigma^2)^i}{2^i} \frac{1}{(D/2 - \ell - \varepsilon + i)^i} P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[N-2i]} \equiv \sum_{i=0}^{m(N)} \frac{P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[N-2i]'}}{(-\tau - \varepsilon)^i}. \quad (5.28)$$

Considerando $N = 5$,

$$H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} = P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[N]'} + \frac{P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[N-2]'}}{(-\tau - \varepsilon)} + \frac{P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[N-4]'}}{(-\tau - \varepsilon)(-\tau + 1 - \varepsilon)}. \quad (5.29)$$

Evidentemente, essa fórmula também é válida se $N < 5$, basta para tanto adotar a convenção de que $P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[a]} = 0$ se $c = a - N$ não está incluso em algum dos casos que definimos acima, isto é, se $c < 0$ ou c ímpar. Em especial, tal tensor será nulo se $a < 0$. Convenção análoga adotamos para $R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[a][b]}$.

Vimos que o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ deve ser computado. Assim, é útil expandir o tensor $H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}$ em séries de "Taylor" no entorno de $\varepsilon = 0$:

$$H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} = \sum_i H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[O(\varepsilon^i)]} \varepsilon^i. \quad (5.30)$$

A rigor trata-se de uma série de Laurent, pois eventualmente existe um termo não-nulo com $i = -1$. De (5.28), fica evidente que podemos expandir $H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[O(\varepsilon^i)]}$ como

$$H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[O(\varepsilon^i)]} = \sum_{j=0}^{m(N)} c_{i,j}^\tau P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[N-2j]'}. \quad (5.31)$$

Valores especialmente úteis de $c_{i,j}^\tau$ são dados na tabela (5.1).

Aplicando (5.22) na fórmula acima, obtemos

$$H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[O(\varepsilon^i)]} = \sum_{j=0}^{m(N)} \sum_{k=0}^{N-2j} \frac{(P^2 + \Sigma^2)^j}{2^j} c_{i,j}^\tau x^{N-2j-k} y^k R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[N-2j-k][k]}. \quad (5.32)$$

Definimos $P_\mu = xp_\mu + yq_\mu$ por simplicidade e porque essa é a situação de interesse em nossos cálculos, pois, tendo três partículas externas em um diagrama, restam dois momentos independentes p e q . Em geral, porém, há $\ell - 1$ momentos independentes. Assim, podemos expandir $P = \sum_{i=1}^{\ell-1} x_i p_i$ e definir o tensor $R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[a_1][a_2]\dots[a_{\ell-1}]}$ de forma análoga ao que fizemos acima. Logo, teríamos

$$H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[O(\varepsilon^i)]} = \sum_{j=0}^{m(N)} \sum_a \frac{(P^2 + \Sigma^2)^j}{2^j} c_{i,j}^\tau \left[x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_{\ell-1}^{a_{\ell-1}} \right] R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[a_1][a_2]\dots[a_{\ell-1}]}, \quad (5.33)$$

em que a define o conjunto de variáveis $\{a_1, a_2, \dots, a_{\ell-1}\}$, e a soma $\sum_a = \sum_{a_1, a_2, \dots, a_{\ell-1}}$ é restrita à condição $\sum_{k=1}^{\ell-1} a_k = N - 2j$ (e, claro, $a_k \in \mathbb{N}$).

5.3 Resultado da integração

Aplicando (5.25)-(5.27) em (5.17), obtemos

$$T_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} = \lim_{d \rightarrow D} \frac{\mu^{4-d} i}{(4\pi)^{d/2} 2^N (\ell-1)! \eta^{N-\tau} (-1)^{D/2+1}} \frac{\Gamma(\varepsilon+1)}{H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}} 2^N \eta^N (P^2 + \Sigma^2)^{\eta-N}, \quad (5.34)$$

com τ e η definidos em (5.18).

Utilizando (5.13)-(5.15), podemos escrever

$$\frac{\eta^N}{\eta^{N-\tau}} = (\eta - N + \tau)^\tau = (-\varepsilon - 1)^\tau = (-1)^\tau (1 + \varepsilon)^\tau \quad (\tau \geq 0), \quad (5.35)$$

$$\frac{\eta^N}{\eta^{N-\tau}} = \frac{1}{(\eta - N)^{-\tau}} = \frac{1}{(-\tau - 1 - \varepsilon)^{-\tau}} = \frac{1}{(-\varepsilon)^{-\tau}} = \frac{1}{(-\varepsilon) (1 - \varepsilon)^{-\tau-1}} \quad (\tau < 0). \quad (5.36)$$

Nos interessa realizar uma expansão em séries de Taylor no entorno de $\varepsilon = 0$. Assim, isolamos o termo singular $-\varepsilon^{-1}$ em (5.36), e definimos as séries de Taylor v_τ tais que

$$(1 + \varepsilon)^\tau \equiv \tau! v_\tau = \tau! \sum_{i=0}^{\infty} v_{\tau,i} \varepsilon^i = \tau! \left[1 + \varepsilon \sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{i} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \quad (\tau \geq 0), \quad (5.37)$$

$$\frac{1}{(1 - \varepsilon)^{-\tau-1}} \equiv \frac{v_\tau}{(-\tau - 1)!} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} v_{\tau,i} \varepsilon^i}{(-\tau - 1)!} = \frac{1}{(-\tau - 1)!} \left[1 + \varepsilon \sum_{i=1}^{-\tau-1} \frac{1}{i} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \quad (\tau < 0). \quad (5.38)$$

Escrevendo D e η em função de ε via (5.18), e aplicando (5.35)-(5.36), obtemos para $\tau \geq 0$

$$T_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i\mu^{4-D}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\tau! v_\tau}{(\ell-1)! (-1)^\ell} \left(\frac{4\pi\mu^2}{P^2 + \Sigma^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(\varepsilon+1)}{(P^2 + \Sigma^2)^{\ell-D/2}} H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}. \quad (5.39)$$

Para regularizar a divergência dessa integral, deve-se realizar uma expansão em ε nos diversos termos que aparecem em (5.39). Para $\tau \geq 0$, apenas o tensor (5.28) oferece contribuições proporcionais a ε^{-1} . Explicitando apenas as grandezas que contribuem para termos não-nulos no limite $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$T_{\mu_1\mu_2\mu_3\dots\mu_N} = i\mu^{4-D} \frac{(1 + \varepsilon v_{\tau,1} + \dots)(1 + \varepsilon \ln M + \dots)(1 + \varepsilon \Gamma'(1) + \dots)}{(4\pi)^{D/2} (\ell-1)! (-1)^\ell (P^2 + \Sigma^2)^{\ell-D/2} / \tau!} \left(H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[O(\varepsilon^{-1})]} \varepsilon^{-1} + H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[O(\varepsilon^0)]} + \dots \right). \quad (5.40)$$

$v_{\tau,1}$ está definindo implicitamente em (5.3)-(5.3), e estabelecemos ainda

$$M = \frac{4\pi\mu^2}{P^2 + \Sigma^2}, \quad L = \lim_{d \rightarrow D} \frac{1}{\varepsilon(d)} + \ln(4\pi) - \gamma_e, \quad (5.41)$$

em que $\gamma_e = -\Gamma'(1) \cong 0.577$ é a constante de Euler-Mascheroni. Assim:

$$T_{\mu_1\mu_2\mu_3\dots\mu_N} = i \frac{\mu^{4-D}}{F_l} \left(\left[L + \ln \left(\frac{\mu^2}{P^2 + \Sigma^2} \right) + v_{\tau,1} \right] H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[O(\varepsilon^{-1})]} + H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[O(\varepsilon^0)]} \right), \quad (5.42)$$

com

$$F_l = (4\pi)^{D/2} (\ell - 1)! (P^2 + \Sigma^2)^{\ell-D/2} f_\tau, \quad f_\tau = (-1)^\ell / \tau!, \quad (\text{para } \tau \geq 0). \quad (5.43)$$

Já para $\tau < 0$, a contribuição proporcional a ε^{-1} virá não do tensor (5.28), mas de (5.36). O resultado é:

$$T_{\mu_1\mu_2\mu_3\dots\mu_N} = i \frac{\mu^{4-D}}{F_l} \left(\left[L + \ln \left(\frac{\mu^2}{P^2 + \Sigma^2} \right) + v_{\tau,1} \right] H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[O(\varepsilon^0)]} + H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[O(\varepsilon^1)]} \right), \quad (5.44)$$

com F_l ainda dado em (5.43), mas $f_\tau = (-1)^{D/2} (-\tau - 1)!$ para $\tau < 0$.

Repare que a divergência das integrais (5.42) e (5.44) é parametrizada em L . Podemos unificar essas duas fórmulas definindo l_o como o índice do termo de ordem dominante em (5.30), isso é, o menor índice i tal que $H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[O(\varepsilon^i)]}$ é não-nulo. Assim, $l_o = 0$ se $\tau < 0$ e $l_o = -1$ se $\tau \geq 0$. Estabelecendo ainda uma escala de energia r de interesse (em nossa modelagem, consideramos $r = m_X$, em que m_X é a massa do X(3872)), podemos fazer

$$\ln \left(\frac{\mu^2}{P^2 + \Sigma^2} \right) = \ln \left(\frac{\mu^2}{r^2} \right) - \ln \left(\frac{P^2 + \Sigma^2}{r^2} \right), \quad (5.45)$$

isso é, separar a escala de renormalização μ dos parâmetros de Feynman dados implicitamente em P e Σ . Dessa forma, usando (5.2) e (5.33), obtemos finalmente

$$I_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} = i \mu^{4-D} \sum_{j=0}^{m(N)} \sum_a \mathcal{I}_{ja}^D R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[a_1][a_2]\dots[a_{\ell-1}]}, \quad (5.46)$$

em que a define o conjunto de variáveis $\{a_1, a_2, \dots, a_{\ell-1}\}$, e a soma $\sum_a = \sum_{a_1, a_2, \dots, a_{\ell-1}}$ é restrita à condição $\sum_{k=1}^{\ell-1} a_k = N - 2j$. Temos, ainda,

$$\mathcal{I}_{ja}^D = \left[L + \ln \left(\frac{\mu^2}{r^2} \right) \right] \mathcal{A}_{ja}^D + \mathcal{B}_{ja}^D, \quad (5.47)$$

$$\mathcal{A}_{ja}^D = c_{l_o, j}^\tau \int d^{\ell-1} F_{\text{par}} \mathcal{J}_{ja}^D, \quad (5.48)$$

$$\mathcal{B}_{ja}^D = \int d^{\ell-1} F_{\text{par}} \mathcal{J}_{ja}^D \left[c_{l_o+1, j}^\tau + c_{l_o, j}^\tau v_{\tau,1} - c_{l_o, j}^\tau \ln \left(\frac{P^2 + \Sigma^2}{r^2} \right) \right], \quad (5.49)$$

Tabela 5.1: Parâmetros úteis para determinados valores de τ

τ	-2	-1	0	1	2
$c_{-1,0}^\tau$	0				
$c_{0,0}^\tau$	1				
$c_{1,0}^\tau$	0				
$c_{-1,1}^\tau$	0	0	-1	0	0
$c_{0,1}^\tau$	1/2	1	0	-1	-1/2
$c_{1,1}^\tau$	1/4	1	0	1	1/4
$c_{-1,2}^\tau$	0	0	-1	1	0
$c_{0,2}^\tau$	1/6	1/2	-1	-1	1/2
$c_{1,2}^\tau$	5/36	3/4	-1	1	-3/4
$c_{-1,3}^\tau$	0	0	-1/2	1	-1/2
$c_{0,3}^\tau$	1/24	1/6	-3/4	1	3/4
$c_{1,3}^\tau$	13/288	11/36	-7/8	0	-7/8
l_o	0	0	-1	-1	-1
$v_{\tau,1}$	1	0	0	1	3/2
f_τ	$(-1)^{D/2}$	$(-1)^{D/2}$	$(-1)^\ell$	$(-1)^\ell$	$(-1)^\ell/2$

Tabela 5.2: Definição dos parâmetros l_o , $v_{\tau,1}$ e f_τ

	$\tau < 0$	$\tau \geq 0$
l_o	0	-1
$v_{\tau,1}$	$\sum_{i=1}^{-\tau-1} \frac{1}{i}$	$\sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{i}$
f_τ	$(-1)^{D/2}(-\tau-1)!$	$(-1)^\ell/\tau!$

$$\mathcal{J}_{ja}^D = \frac{(P^2 + \Sigma^2)^{j-\ell+D/2}}{(4\pi)^{D/2}(\ell-1)!2^j f_\tau} \left[x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_{\ell-1}^{a_{\ell-1}} \right]. \quad (5.50)$$

5.4 Renormalização da integral

Na redução MS ou $\overline{\text{MS}}$, apenas o limite $d \rightarrow D = 4$ é considerado, de forma que a única dependência de (5.46) por parte da escala μ é a dependência logarítmica dada em (5.47), pois $\mu^{4-D} = 1$. Isto é, a integral é calculada na dimensão física $D = 4$, e a única subtração é realizada fazendo $L = 0$, tratando-se da subtração do pólo localizado exatamente em $D = 4$. Assim, para a renormalização $\overline{\text{MS}}$,

$$I_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} = I_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}|_{L=0,D=4}. \quad (5.51)$$

Mas a redução PDS também subtrai, de $I_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}$, pólos dessa função localizados em $D \neq 4$. De (5.9) e (5.28)-(5.29), percebe-se que, para valores ímpares de D , $I_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}$ não apresenta pólo, pois $D/2$ é fracionário. Para D par, o tensor só apresenta pólo ε^{-1} para um valor suficientemente alto de N . Isso fica claro através do denominador de (5.28), no qual vemos que, para dado D , o tensor só apresenta pólos para valores de N tais que

$$D/2 + 1 - l + m(N) - 1 \geq 0, \quad N - \mathcal{I}_N \geq 2\ell - D. \quad (5.52)$$

Assim, por exemplo, para $\ell = 3$ e $D = 4$, apenas termos com $N \geq 2$ serão divergentes. Analogamente, para dado N , apenas dimensões tais que $D \geq 2\ell - N + \mathcal{I}_N \equiv D_N$ apresentarão divergências.

A regularização PDS requer que também se subtraia de (5.51) os pólos localizados nessas dimensões. No fim das contas, a renormalização PDS subtrai termos de \mathcal{I}_{ja}^D . Mais exatamente, ela redefine \mathcal{I}_{ja}^D como

$$\mathcal{I}_{ja}^D = \left[L + \ln \left(\frac{\mu^2}{r^2} \right) \right] \mathcal{A}_{ja}^D + \mathcal{B}_{ja}^D - \sum_{D'=D_N}^2 \mu^{4-D'} \frac{\mathcal{A}_{ja}^{D'}}{\epsilon(4)}, \quad 2\epsilon(d) = D' - d, \quad (5.53)$$

com D' par. Em suma, subtraímos de $I_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}|_D$ os pólos localizados em $D \neq 4$. Feita essa subtração, basta aplicar (5.51) — o pólo em $D = 4$ é subtraído quando é feito $L = 0$, e a função é calculada na dimensão física $D = 4$. Dessa forma, a renormalização PDS subtrai todos os pólos de $I_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}|_D$, sendo em certo sentido um método de "máxima subtração", contrapondo as chamadas subtrações mínimas MS ou $\overline{\text{MS}}$. Com isso, ela recupera a dependência em leis de potência por parte da escala. Por exemplo, para $\ell = 3$ e $N \geq 4$, há a presença de um fator proporcional a μ^2 , como também para o caso $\ell = 1$ e $N = 0$, conforme nosso argumento de plausibilidade indicou em (4.22) e (4.23).

5.5 Demonstração de (5.6)

Podemos escrever

$$L_{n,d} \equiv \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - P^2 - \Sigma^2 + i\delta)^n} = \mu^{4-d} \int \frac{d^{d-1} k}{(2\pi)^{d-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{(k_0^2 - W^2)^n}, \quad (5.54)$$

com $\delta \rightarrow 0+$ e $w^2 = \sum_{i=1}^{d-1} k_i^2 + P^2 + \Sigma^2 - i\delta$. Em W só aparecem as componentes espaciais de k . A integral de variável k_0 pode ser calculada através de uma extensão analítica. Considerando o contorno complexo dado na fig. (5.1), e aplicando o teorema de Cauchy, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{(k_0^2 - W^2)^n} = - \int_{C_1+C_2} \frac{dz}{2\pi} \frac{1}{(z^2 - W^2)^n} - \int_{i\infty}^{-i\infty} \frac{dz}{2\pi} \frac{1}{(z^2 - W^2)^n}, \quad (5.55)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{(k_0^2 - W^2)^n} = - \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_0^{\pi/2} + \int_{\pi}^{3\pi/2} \right] \frac{iRe^{i\theta} d\theta}{2\pi} \frac{1}{R^{2n}(e^{2i\theta} - W^2/R^2)^n} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{1}{(-1)^n (\kappa^2 + W^2)^n}. \quad (5.56)$$

Na fórmula acima, a primeira integral é nula. Aplicando a segunda integral em (5.54), obtemos

$$L_{n,d} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - P^2 - \Sigma^2 + i\delta)^n} = \mu^{4-d} i(-1)^n \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k_E^2 + P^2 + \Sigma^2 - i\delta)^n}, \quad (5.57)$$

em que $k_E^2 = \sum_{i=1}^d k_i^2$ é agora o produto definido em um espaço euclidiano. Esse procedimento no qual, em certo sentido, o espaço de Minkowski é convertido no espaço euclidiano, é denominado rotação de Wick.

Temos ainda

$$\int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^{\infty} l^{d-1} dl \int d\Omega = \frac{2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \int_0^{\infty} l^{d-1} dl \quad (5.58)$$

e

$$2 \int_0^\infty \frac{l^{d-1} dl}{(l^2 + P^2 + \Sigma^2)^n} = (P^2 + \Sigma^2)^{d/2-n} \frac{\Gamma(d/2)\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)}. \quad (5.59)$$

Uma vez aplicadas essas fórmulas em (5.57), a relação (5.6) fica evidente.

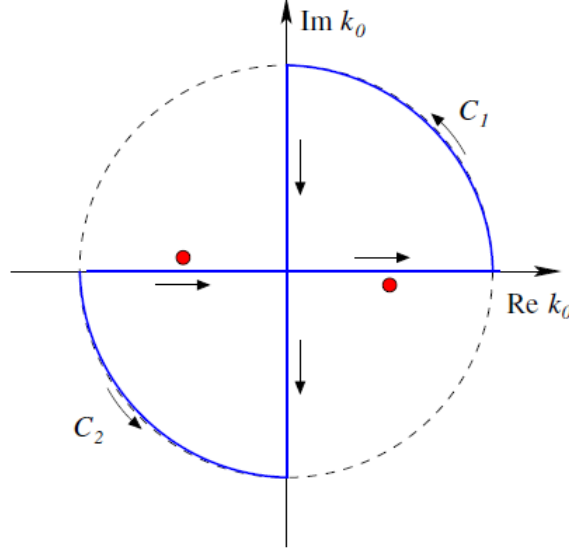


Figura 5.1: Contorno complexo.

5.6 Demonstração de (5.24)-(5.26)

Estabeleçamos que $P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[a](g)}$ é a soma de permutações definidas em $P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[a]}$ com a restrição de que se mantenha o último índice μ_N junto a um tensor de métrica. $P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}^{[a](p)}$, por sua vez, restringe o último índice de forma que ele deva ser posto junto a um termo P_{μ_N} . Assim:

$$P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_a}^{[a]} = P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_a}^{[a](g)} + P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_a}^{[a](p)}, \quad (5.60)$$

$$\frac{dP_{\mu_a\mu_b\dots\mu_z}^{[a]}}{dP^{\mu_{m'}}} = P_{\mu_a\mu_b\dots\mu_z\mu_{m'}}^{[a-1](g)}, \quad (5.61)$$

$$P_{\mu_a\mu_b\dots\mu_z}^{[a]} P_{\mu_{m'}} = P_{\mu_a\mu_b\dots\mu_z\mu_{m'}}^{[a+1](p)}. \quad (5.62)$$

(5.24)-(5.26) foram fórmulas muito convenientes, pois permitiram que escrevêssemos $I_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}$ de forma bastante sintética em (5.46)-(5.50). É simples verificar que (5.24)-(5.26) é verdadeiro para valores baixos de N ($N = 0$, $N = 1$ e $N = 2$). Já para mostrar que essas fórmulas são verdadeiras para qualquer valor de N , podemos construir uma prova por indução. Para construí-la, basta provar que, se (5.24)-(5.26) são verdadeiras para dado N , então segue logicamente que essas fórmulas também são verdadeiras para $N + 1$. Isto é, partindo de

$$\delta^{[N]} \equiv \frac{d^N}{dP^{\mu_1} dP^{\mu_2} \dots dP^{\mu_N}} (P^2 + \Sigma^2)^\eta = H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} 2^N \eta^N (P^2 + \Sigma^2)^{\eta-N} \quad (5.63)$$

deve-se provar que

$$\delta^{[N+1]} = H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}} 2^{N+1} \eta^{N+1} (P^2 + \Sigma^2)^{\eta-N-1}. \quad (5.64)$$

Assim sendo, partindo do pressuposto de que (5.63) é verdadeiro, podemos escrever

$$\delta^{[N+1]} = \frac{d^{N+1} (P^2 + \Sigma^2)^\eta}{dP^{\mu_1} dP^{\mu_2} \dots dP^{\mu_{N+1}}} = \frac{d}{dP^{\mu_{N+1}}} \frac{d^N (P^2 + \Sigma^2)^\eta}{dP^{\mu_1} dP^{\mu_2} \dots dP^{\mu_N}} = \frac{d\delta^{[N]}}{dP^{N+1}}, \quad (5.65)$$

$$\frac{d\delta^{[N]}}{dP^{N+1}} = \frac{dH_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}}{dP^{N+1}} 2^N \eta^N (P^2 + \Sigma^2)^{\eta-N} + H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} P_{\mu_{N+1}} 2^{N+1} \eta^{N+1} (P^2 + \Sigma^2)^{\eta-N-1}, \quad (5.66)$$

$$\frac{dH_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}}}{dP^{N+1}} = B'_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}} + C'_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}}, \quad (5.67)$$

com

$$B'_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}} = \sum_{i=0}^{m(N)} \frac{i}{(\eta + i - N)} \frac{(P^2 + \Sigma^2)^{i-1}}{2^{i-1}} \frac{1}{(\eta + i - 1 - N)^{i-1}} P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}}^{[N+1-2i](p)}, \quad (5.68)$$

$$C'_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}} = \sum_{i=0}^{m(N)} \frac{(P^2 + \Sigma^2)^i}{2^i} \frac{1}{(\eta + i - N)^i} P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}}^{[N-1-2i](g)}. \quad (5.69)$$

Dessa forma, podemos escrever (5.66) como

$$\frac{d[\delta^{[N]}]}{dP^{N+1}} = (A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}} + B_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}} + C_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}}) 2^{N+1} \eta^{N+1} (P^2 + \Sigma^2)^{\eta-N-1}, \quad (5.70)$$

$$A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}} = \sum_{i=0}^{m(N)} \frac{(P^2 + \Sigma^2)^i}{2^i} \frac{1}{(\eta + i - N)^i} P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}}^{[N+1-2i](p)}, \quad (5.71)$$

$$B_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}} = \sum_{i=0}^{m(N)} \frac{i}{(\eta + i - N)} \frac{(P^2 + \Sigma^2)^i}{2^i} \frac{1}{(\eta + i - N - 1)^i} P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}}^{[N+1-2i](p)}, \quad (5.72)$$

$$C_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}} = \sum_{i=0}^{m(N)} \frac{(P^2 + \Sigma^2)^{i+1}}{2^{i+1}} \frac{1}{(\eta + i - N)^{i+1}} P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}}^{[N-1-2i](g)}. \quad (5.73)$$

Prosseguindo:

$$A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}} + B_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}} = \sum_{i=0}^{m(N)} \frac{(P^2 + \Sigma^2)^i}{2^i} \frac{1}{(\eta + i - N - 1)^i} P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}}^{[N+1-2i](p)} \quad (5.74)$$

$$C_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}} = \sum_{i=1}^{m(N)+1} \frac{(P^2 + \Sigma^2)^i}{2^i} \frac{1}{(\eta + i - N - 1)^i} P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}}^{[N+1-2i](g)} \quad (5.75)$$

A prova está praticamente dada, basta ajustar os limites das somatórias. Para somar (5.74) e (5.75) e obter $H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}}$, o limite superior (inferior) de ambas somatórias deve estar ajustado em $i = m(N+1)$ ($i = 0$). Na somatória (5.75), é indicado que a parcela de mais alto valor de i tem um número j_P de quadrivetores P . Usando a definição de $m(N)$ em (5.27), vemos que para essa parcela vale

$$i = m(N) + 1 = (N + 2 - \mathcal{I}_a)/2, \quad j_P = N + 1 - 2i = N + 1 - 2(m(N) + 1) = \mathcal{I}_N - 1. \quad (5.76)$$

Se N é ímpar, $j_P = 0$, o tensor só é composto de tensores de métrica. De qualquer forma, para N ímpar já vale $m(N) + 1 = m(N+1)$. Se N é par, $j_P < 0$, o que segundo nossa convenção anula o tensor $P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}}^{[j_P](g)}$ — de fato, esse termo espúrio é obtido a partir da derivação de um termo que só possuía tensores de métrica. Dessa forma, para N par, podemos simplesmente truncar a integral em $m(N) = m(N+1)$. Concluímos dessa forma que, seja N par ou ímpar, podemos substituir o limite superior da somatória em (5.75) por $m(N+1)$. Notando que $P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}}^{[N+1-2i](g)} = 0$ para $i = 0$, também podemos alterar o limite inferior da somatória para 0. Assim:

$$C_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}} = \sum_{i=0}^{m(N+1)} \frac{(P^2 + \Sigma^2)^i}{2^i} \frac{1}{(\eta + i - N - 1)^i} P_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}}^{[N+1-2i](g)}. \quad (5.77)$$

Quanto à (5.74), também podemos alterar o limite superior da somatória para $m(N+1)$. Se n é par, $m(N) = m(N+1)$ simplesmente. Se N é ímpar, a nova parcela de índice $m(N) + 1 = m(N+1)$, índice este dado em (5.76), é $P^{[N+1-2i](p)} = P^{[\mathcal{I}_N-1](p)} = P^{[0](p)} = 0$, de forma que adicionar essa nova parcela não altera o resultado.

Fica claro que é possível somar (5.77) e (5.74) para obter

$$A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}} + B_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}} + C_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}} = H_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N+1}}. \quad (5.78)$$

Aplicando (5.78) em (5.6), obtemos (5.64), o que conclui a prova.

5.7 Parametrização de Feynman

A parametrização de Feynman permite escrever

$$\frac{1}{D_1 D_2} = \int_0^1 da \frac{1}{Y^2}, \quad \text{com } Y = aD_1 + (1-a)D_2, \quad (5.79)$$

$$\frac{1}{D_1 D_2 D_3} = 2 \int_0^1 da \int_0^1 db \frac{1}{Y^3}, \quad \text{com } Y = (1-a)D_1 + a(1-b)D_2 + abD_3. \quad (5.80)$$

Assim, por exemplo, considerado o diagrama (c) em (4.1), temos

$$\begin{aligned} D_1 &= k^2 - m_*^2, \\ D_2 &= (k-p)^2 - m^2 = k^2 - 2k \cdot p + p^2 - m^2, \\ D_3 &= (k-p+q)^2 - m^2 = k^2 - 2k \cdot (p-q) + (p-q)^2 - m^2. \end{aligned}$$

Logo

$$Y = Y^{(c)} = (1-a)D_1 + a(1-b)D_2 + abD_3 = D_1 - a(D_1 - D_2) - ab(D_2 - D_3),$$

$$Y^{(c)} = k^2 - m_*^2 - a(-m_*^2 + 2k \cdot p - p^2 + m^2) - ab(-2k \cdot q + 2p \cdot q - q^2),$$

$$Y^{(c)} = k^2 - 2k \cdot P^{(c)} - \Sigma^{(c)2},$$

com

$$P^{(c)} = ap - abq,$$

$$\Sigma^{(c)2} = m_*^2(1 - a) + a(m^2 - p^2) + ab(2p \cdot q - q^2),$$

$$P^{(c)2} + \Sigma^{(c)2} = m_*^2(1 - a) + a(m^2 - (1 - a)p^2) + ab(2p \cdot q(1 - a) - (1 - ab)q^2).$$

O mesmo procedimento pode ser realizado em todos diagramas de *loop* da nossa modelagem. Em geral, obtém-se $P = xp + yq$, em que x e y dependem apenas dos parâmetros de Feynman.

Uma última observação: percebe-se que (5.46) será um número imaginário puro, exceto se as próprias integrais originarem outros termos imaginários. Isso pode ocorrer se os integrandos tornarem-se imaginários em certa região de integração. Observamos numericamente que $m_* + m < m_X$ define uma condição em que esse tipo de situação passa a ocorrer.

Referências Bibliográficas

- [A⁺04a] V. M. Abazov et al. Observation and properties of the $X(3872)$ decaying to $J/\psi\pi^+\pi^-$ in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.96$ TeV. *Phys. Rev. Lett.*, 93:162002, 2004. 8
- [A⁺04b] D. Acosta et al. Observation of the narrow state $X(3872) \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.96$ TeV. *Phys. Rev. Lett.*, 93:072001, 2004. 8
- [A⁺05a] Kazuo Abe et al. Evidence for $X(3872) \rightarrow \gamma J/\psi$ and the sub-threshold decay $X(3872) \rightarrow \omega J/\psi$. 2005. 9
- [A⁺05b] Bernard Aubert et al. Search for a charged partner of the $X(3872)$ in the B meson decay $B \rightarrow X^- K$, $X^- \rightarrow J/\psi\pi^-\pi^0$. *Phys. Rev.*, D71:031501, 2005. 9, 10
- [A⁺08] I. Adachi et al. Study of $X(3872)$ in B meson decays. 2008. 10
- [A⁺09] Bernard Aubert et al. Evidence for $X(3872) \rightarrow \psi(2S)\gamma$ in $B^\pm \rightarrow X(3872)K^\pm$ decays, and a study of $B \rightarrow c\bar{c}\gamma K$. *Phys. Rev. Lett.*, 102:132001, 2009. 10
- [A⁺14] Roel Aaij et al. Evidence for the decay $X(3872) \rightarrow \psi(2S)\gamma$. *Nucl. Phys.*, B886:665–680, 2014. 10, 62, 67
- [ABA⁺13] R. Aaij, C. Abellan Beteta, B. Adeva, M. Adinolfi, C. Adrover, A. Affolder, Z. Ajaltouni, J. Albrecht, F. Alessio, M. Alexander et al. Determination of the $X(3872)$ meson quantum numbers. *Physical review letters*, 110(22):222001, 2013. 8
- [ABJ⁺92] James F. Amundson, C. Glenn Boyd, Elizabeth Ellen Jenkins, Michael E. Luke, Anesh V. Manohar, Jonathan L. Rosner, Martin J. Savage e Mark B. Wise. Radiative D^* decay using heavy quark and chiral symmetry. *Phys. Lett.*, B296:415–419, 1992. 50
- [AGP06] Mohammad T. AlFiky, Fabrizio Gabbiani e Alexey A. Petrov. $X(3872)$: Hadronic molecules in effective field theory. *Physics Letters B*, 640(5):238–245, 2006. 46, 86
- [AMO12] F. Aceti, R. Molina e E. Oset. The $X(3872) \rightarrow J/\psi\gamma$ decay in the $D\bar{D}^*$ molecular picture. *Phys. Rev.*, D86:113007, 2012. 10
- [Bai13] Jonathan Bain. Effective field theories. *The Oxford handbook of philosophy of physics*, páginas 224–254, 2013. 29, 30, 31, 58
- [Bar16] João Carlos Alves Barata. Notas para um curso de física-matemática. <http://denebola.if.usp.br/>, versão de 09 de maio de 2016. Seção 13.2. 17
- [BCM⁺00] Maura Barone, G. Calamai, M. Mazzoni, R. Stanga e F. Vetrano. *Experimental Physics of Gravitational Waves*. World Scientific, 2000. Apêndice 2. 35
- [BG95] C. Glenn Boyd e Benjamin Grinstein. Chiral and heavy quark symmetry violation in b decays. *Nuclear Physics B*, 442(1):205–227, 1995. 47, 48, 86

- [BG04] Ted Barnes e Stephen Godfrey. Charmonium options for the $X(3872)$. *Physical Review D*, 69(5):054008, 2004. 8
- [BGS05] T. Barnes, S. Godfrey e E. S. Swanson. Higher charmonia. *Physical Review D*, 72(5):054026, 2005. 8
- [BK05a] Eric Braaten e Masaoki Kusunoki. Exclusive production of the $X(3872)$ in B meson decay. *Physical Review D*, 71(7):074005, 2005. 10
- [BK05b] Eric Braaten e Masaoki Kusunoki. Factorization in the production and decay of the $X(3872)$. *Physical Review D*, 72(1):014012, 2005. 60
- [BM09] Ari Ben-Menahem. *Historical encyclopedia of natural and mathematical sciences*. Springer Science & Business Media, 2009. Capítulo 3. 35
- [BMR99] Michael C. Birse, Judith A. McGovern e Keith G. Richardson. A renormalisation-group treatment of two-body scattering. *Physics Letters B*, 464(3):169–176, 1999. 60
- [Bor08] Bugra Borasoy. Introduction to chiral perturbation theory. Em *The Standard Model and Beyond*, páginas 1–26. Springer, 2008. 36, 38, 39, 40
- [Bur04] Cliff P. Burgess. Quantum gravity in everyday life: General relativity as an effective field theory. *Living Rev. Rel.*, 7(5):3, 2004. 29
- [C⁺03] S. K. Choi et al. Observation of a narrow charmonium-like state in exclusive $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^- J/\psi$ decays. *Phys. Rev. Lett.*, 91:262001, 2003. 8
- [CDDB⁺93] R. Casalbuoni, A. Deandrea, N. Di Bartolomeo, Raoul Gatto, F. Feruglio e G. Nardulli. Effective Lagrangian for quarkonia and light mesons in a soft-exchange-approximation. *Phys. Lett.*, B302:95–102, 1993. 42, 47
- [CDDB⁺97] Roberto Casalbuoni, Aldo Deandrea, N. Di Bartolomeo, Raoul Gatto, Ferruccio Feruglio e G. Nardulli. Phenomenology of heavy meson chiral lagrangians. *Physics Reports*, 281(3):145–238, 1997. 41, 42, 43, 44, 48, 86
- [CDFP04] P. Colangelo, F. De Fazio e T. N. Pham. Nonfactorizable contributions in B decays to charmonium: the case of $B \rightarrow K^- h_c$. *Phys. Rev.*, D69:054023, 2004. 47, 48, 86
- [Cho92] Peter Cho. Chiral perturbation theory for hadrons containing a heavy quark. the sequel. *Physics Letters B*, 285(1):145–152, 1992. 40
- [Con] A parametrização do termo de contato que usamos em nossa modelagem é estabelecida em [GHK⁺15], e de fato respeita a identidade de Ward da QED. Porém, poderíamos considerar outras parametrizações que também respeitam essa identidade: basta considerar qualquer combinação linear de $\varepsilon^{\mu\sigma\lambda\alpha} q_\alpha$, $(p \cdot q) \varepsilon^{\mu\sigma\lambda\alpha} p_\alpha + \varepsilon^{\mu\sigma\alpha\beta} p_\alpha q_\beta p^\lambda$, $\varepsilon^{\sigma\lambda\alpha\beta} p_\alpha q_\beta q^\mu$ e $\varepsilon^{\mu\lambda\alpha\beta} p_\alpha q_\beta q^\sigma$. Através desses tensores adicionais poderíamos estabelecer não só a largura, mas também a amplitude como um invariante em relação à escala de renormalização μ . As implicações disso para a nossa modelagem ainda estão sendo estudadas. 63
- [CS] Imagem construída a partir de pequenas alterações da fig. 3.19 de [GPS01] e da fig. 6.3 de [Gri04]. 19
- [DAPV97] F. Del Aguila e M. Perez-Victoria. Constrained differential renormalization. 1997. 58
- [DDBG⁺98] Aldo Deandrea, N. Di Bartolomeo, Raoul Gatto, G. Nardulli e Antonio Davide Polosa. Constituent quark-meson model for heavy-meson processes. *Physical Review D*, 58(3):034004, 1998. 49

- [DFG⁺09] Yubing Dong, Amand Faessler, Thomas Gutsche, Sergey Kovalenko e Valery E Lyubovitskij. $X(3872)$ as a hadronic molecule and its decays to charmonium states and pions. *Physical Review D*, 79(9):094013, 2009. 10, 55
- [DFGL08] Yubing Dong, Amand Faessler, Thomas Gutsche e Valery E Lyubovitskij. Estimate for the $X(3872) \rightarrow \gamma J/\psi$ decay width. *Physical Review D*, 77(9):094013, 2008. 10
- [DFGL10] Yubing Dong, Amand Faessler, Thomas Gutsche e Valery E Lyubovitskij. $J\psi\gamma$ and $\psi(2s)\gamma$ decay modes of the $X(3872)$. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 38(1):015001, 2010. 10, 49, 61
- [DNP03] A. Deandrea, G. Nardulli e Antonio Davide Polosa. J/ψ couplings to charmed resonances and to π . *Physical Review D*, 68(3):034002, 2003. 49
- [dO05] Mário José de Oliveira. *Termodinâmica*. Editora Livraria da Física, 2005. Capítulo 13. 35
- [DRP] T. D. Cohen D. R. Phillips, S. R. Beane. Nonperturbative regularization and renormalization: Simple examples from nonrelativistic quantum mechanics. 60
- [dTP03] A. F. R. de Toledo Piza. *Mecânica Quântica*. Editora Universidade de São Paulo, 2003. Seção 5.1. 14, 18, 19
- [eaPDG14] K.A. Olive et al. (Particle Data Group). Developments in heavy quarkonium spectroscopy; $X(3872)$; Non-qq mesons; The Charmonium System; The Bottomonium System. *Chin. Phys. C*, 38, 090001, 2014. 5, 7, 8, 40
- [ELQ06] Estia J. Eichten, Kenneth Lane e Chris Quigg. New states above charm threshold. *Physical Review D*, 73(1):014014, 2006. 8
- [FGGW90] Adam F. Falk, Howard Georgi, Benjamin Grinstein e Mark B. Wise. Heavy meson form factors from qcd. *Nuclear Physics B*, 343(1):1–13, 1990. 45, 86
- [FHR12] Lakma Fernando, Renato Higa e Gautam Rupak. Resonance Contribution to Radiative Neutron Capture on Lithium-7. *Eur. Phys. J.*, A48:24, 2012. 60, 62
- [Fit] Richard Fitzpatrick. Theoretical fluid mechanics. <https://farside.ph.utexas.edu/teaching/336L/Fluid.pdf>. Capítulo 2. 35
- [FVR15] Lakma Fernando, Akshay Vaghani e Gautam Rupak. Electromagnetic form factors of one neutron halos with spin $1/2^+$ ground state. 2015. 60, 62
- [Geo90] Howard Georgi. An effective field theory for heavy quarks at low energies. *Physics Letters B*, 240(3):447–450, 1990. 41
- [Geo91] Howard Georgi. Heavy quark effective field theory. *Proceedings Theoretical Advanced Study Institute*, página 589, 1991. 41, 42, 43, 44, 45, 46, 86
- [Geo93] Howard Georgi. Effective field theory. *Annual review of nuclear and particle science*, 43(1):209–252, 1993. 30, 31
- [Geo09] Howard Georgi. *Weak Interactions and Modern Particle Theory, revised and updated*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2009. 45
- [GHK⁺15] Feng-Kun Guo, C. Hanhart, Yu. S. Kalashnikova, Ulf-G. Meißner e A. V. Nefediev. What can radiative decays of the $X(3872)$ teach us about its nature? *Phys. Lett.*, B742:394–398, 2015. 1, 11, 55, 84

- [GHL⁺11] Feng-Kun Guo, Christoph Hanhart, Gang Li, Ulf-G Meissner e Qiang Zhao. Effect of charmed meson loops on charmonium transitions. *Physical Review D*, 83(3):034013, 2011. 47, 48, 49, 86
- [GHM⁺13] Feng-Kun Guo, Christoph Hanhart, Ulf-G Meissner, Qian Wang e Qiang Zhao. Production of the $X(3872)$ in charmonia radiative decays. *Physics Letters B*, 725(1):127–133, 2013. 55, 61
- [GJM⁺92] Benjamin Grinstein, Elizabeth Ellen Jenkins, Aneesh V. Manohar, Martin J. Savage e Mark B. Wise. Chiral perturbation theory for f_{D_S}/f_D and B_{B_S}/B_B . *Nucl. Phys.*, B380:369–376, 1992. 46, 47, 48, 86
- [GPS01] Goldstein, Poole e Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2001. 84
- [Gri94] D. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Professional, 1994. Second Edition. 13, 19
- [Gri04] D. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Wiley-VCH, 2004. Seções 4.3, 6.1, 6.2 e 10.6. 23, 36, 51, 84, 88
- [GY04] K. Gottfried e T. Yan. *Quantum Mechanics: Fundamentals*. Springer, 2004. Seções 8.2(d) e 9.2(d). 17
- [Hag00] Kevin L Haglin. Charmonium dissociation in hadronic matter. *Physical Review C*, 61(3):031902, 2000. 49
- [Ham05] H. W. Hammer. Universality in few-body systems with large scattering length. *AIP Conf. Proc.*, 777:1–11, 2005. [1(2005)]. 60
- [Har01] Stephan Hartmann. Effective field theories, reductionism and scientific explanation. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 32(2):267–304, 2001. 29
- [HM06] Jie Hu e Thomas Mehen. Chiral lagrangian with heavy quark-diquark symmetry. *Physical Review D*, 73(5):054003, 2006. 51, 61
- [Hpa] A parametrização que aqui empregamos, conjuntamente com suas regras de transformações sob diversas operações, são largamente empregadas na literatura, vide por exemplo [GJM⁺92, JLMS93, BG95, CDDB⁺97, CDFP04, AGP06, GHL⁺11]. Argumentos de plausibilidade para a parametrização em si são expostos em [FGGW90, Geo91, MW07]. 46, 47
- [JLMS93] Elizabeth Ellen Jenkins, Michael E. Luke, Aneesh V. Manohar e Martin J. Savage. Semileptonic B_c decay and heavy quark spin symmetry. *Nucl. Phys.*, B390:463–473, 1993. 86
- [JM91] Elizabeth Jenkins e Aneesh V. Manohar. Baryon chiral perturbation theory using a heavy fermion lagrangian. *Physics Letters B*, 255(4):558–562, 1991. 45
- [JMW95] Elizabeth Jenkins, Aneesh V Manohar e Mark B Wise. Chiral perturbation theory for vector mesons. *Physical review letters*, 75(12):2272, 1995. 45
- [Kak93] Michio Kaku. *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*. Oxford University Press, 1993. 88
- [Kap97] David B. Kaplan. More effective field theory for non-relativistic scattering. *Nuclear Physics B*, 494(1):471–483, 1997. 55

- [KMW05] F. Kampfer, M. Moser e U. J. Wiese. Systematic low-energy effective theory for magnons and charge carriers in an antiferromagnet. *Nucl. Phys.*, B729:317–360, 2005. 35
- [Koc97] Volker Koch. Aspects of chiral symmetry. *International Journal of Modern Physics E*, 6(02):203–249, 1997. 36, 37, 39
- [KSF01] Hagen Kleinert e Verena Schulte-Frohlinde. *Critical Properties of ϕ^4 -Theories*, volume 13. World Scientific, 2001. 58
- [KSW98a] David B. Kaplan, Martin J. Savage e Mark B. Wise. A new expansion for nucleon-nucleon interactions. *Physics Letters B*, 424(3):390–396, 1998. 59, 60
- [KSW98b] David B. Kaplan, Martin J. Savage e Mark B. Wise. Two-nucleon systems from effective field theory. *Nuclear Physics B*, 534(1):329–355, 1998. 59, 60
- [Lai81] C. H. Lai. *Selected Papers on Gauge Theory of Weak and Electromagnetic Interactions*. World Scientific, 1981. Seções II e III. 35, 36
- [Leu96] H. Leutwyler. Phonons as goldstone bosons. *arXiv preprint hep-ph/9609466*, 1996. 35
- [LFGL09] Ian Woo Lee, Amand Faessler, Thomas Gutsche e Valery E. Lyubovitskij. $X(3872)$ as a molecular dd^* state in a potential model. *Physical Review D*, 80(9):094005, 2009. 9
- [Li05] Bing An Li. Is $X(3872)$ a possible candidate as a hybrid meson? *Physics Letters B*, 605(3):306–310, 2005. 9
- [Liu14] Xiang Liu. An overview of xyz new particles. *Chinese Science Bulletin*, 59(29-30):3815–3830, 2014. 7, 8
- [LK00] Ziwei Lin e C. M. Ko. Model for j/ψ absorption in hadronic matter. *Physical Review C*, 62(3):034903, 2000. 49
- [LLDZ08] Yan-Rui Liu, Xiang Liu, Wei-Zhen Deng e Shi-Lin Zhu. Is $X(3872)$ really a molecular state? *The European Physical Journal C*, 56(1):63–73, 2008. 9, 10
- [LLLZ09] Xiang Liu, Zhi-Gang Luo, Yan-Rui Liu e Shi-Lin Zhu. $X(3872)$ and other possible heavy molecular states. *The European Physical Journal C*, 61(3):411–428, 2009. 9
- [LM02] X. Liao e T. Manke. Excited charmonium spectrum from anisotropic lattices. *arXiv preprint hep-lat/0210030*, 2002. 9
- [LZ12] Ning Li e Shi-Lin Zhu. Isospin breaking, coupled-channel effects, and $X(3872)$. *Physical Review D*, 86(7):074022, 2012. 9
- [Man77] Aneesh V. Manohar. Effective field theories. Em *Perturbative and nonperturbative aspects of quantum field theory*, páginas 311–362. Springer, 1977. 29
- [MM98] Sergei G Matinyan e Berndt Müller. Model of charmonium absorption by light mesons. *Physical Review C*, 58(5):2994, 1998. 49
- [MPPR05] Luciano Maiani, F. Piccinini, Antonio Davide Polosa e V. Riquer. Diquark-antidiquark states with hidden or open charm and the nature of $X(3872)$. *Physical Review D*, 71(1):014028, 2005. 9
- [MS11] Thomas Mehen e Roxanne Springer. Radiative Decays $X(3872) \rightarrow \psi(2S)\gamma$ and $\psi(4040) \rightarrow X(3872)\gamma$ in Effective Field Theory. *Phys. Rev.*, D83:094009, 2011. 11

- [MW07] Aneesh V Manohar e Mark B Wise. *Heavy quark physics*, volume 10. Cambridge university press, 2007. 31, 44, 45, 46, 47, 48, 86
- [Neu94] Matthias Neubert. Heavy-quark symmetry. *Physics Reports*, 245(5):259–395, 1994. 30, 31, 41, 42, 43, 44
- [OSL01] Yongseok Oh, Taesoo Song e Su Houng Lee. j/ψ absorption by π and ρ mesons in a meson exchange model with anomalous parity interactions. *Physical Review C*, 63(3):034901, 2001. 49
- [OSLW03] Yong-seok Oh, Tae-soo Song, Su Houng Lee e Cheuk-Yin Wong. Form-factor dependence of the J/ψ dissociation cross-sections in meson exchange model. *J. Korean Phys. Soc.*, 43:1003–1008, 2003. 49
- [PBB99] D. R. Phillips, S. R. Beane e M. C. Birse. Scheming in dimensional regularization. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 32(18):3397, 1999. 60
- [Pic95] Antonio Pich. Chiral perturbation theory. *Reports on Progress in Physics*, 58(6):563, 1995. 38, 40
- [Pic98] Antonio Pich. Effective field theory. *arXiv preprint hep-ph/9806303*, 1998. 29, 30, 31
- [PTWTV02] W. H. Press, S. A. Teukolsky e B. P. Flannery W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Second Edition, 2002. Seções 2.3 e 4.5, onde é feita uma discussão teórica de métodos numéricos e também fornecido algoritmos em linguagem de programação C - utilizamos "gauleg" para empregar a quadratura de Gauss-Legendre e "ludcmp" para efetuar a decomposição LU. 24
- [QFT] Fórmulas retiradas da seção 6.2 de [Gri04], seção 5.1 de [Kak93] e seção 4.5 de [tQFT95]. Seguimos na maioria das vezes as convenções do [Gri04]. As outras duas referências apresentam argumentos de plausibilidade para justificar $f(1)$ e $f(2)$. 22
- [Qui83] Chris Quigg. Gauge theories of the strong, weak, and electromagnetic interactions. 1983. 36
- [Qui13] Chris Quigg. *Gauge theories of the strong, weak, and electromagnetic interactions*. Princeton University Press, 2013. Seção 5.1. 35
- [RH11] Gautam Rupak e Renato Higa. Model-independent calculation of radiative neutron capture on lithium-7. *Physical review letters*, 106(22):222501, 2011. 60
- [Sak94] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics: Revised Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994. Seções 3.10, 5.5, 7.1 e 7.5. 14, 16, 17
- [Sch03] Stefan Scherer. Introduction to chiral perturbation theory. Em *Advances in Nuclear Physics, Volume 27*, páginas 277–538. Springer, 2003. 30, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 45
- [set] An alternative interpretation of $X(3872)$, author=Seth, Kamal K., journal=Physics Letters B, volume=612, number=1, pages=1–4, year=2005, publisher=Elsevier. 9
- [Sie79] Warren Siegel. Supersymmetric dimensional regularization via dimensional reduction. *Physics Letters B*, 84(2):193–196, 1979. 58
- [Sop06] D. E. Soper. Scattering in quantum mechanics. University of Oregon, <http://pages.uoregon.edu/soper/QuantumMechanics2006/Smatrix.pdf>, datado em 15 de maio de 2006. 17

- [Suz05] Mahiko Suzuki. The $X(3872)$ boson: Molecule or charmonium. *Physical Review D*, 72(11):114013, 2005. 9, 10
- [Swa04a] Eric S. Swanson. Diagnostic decays of the $X(3872)$. *Physics Letters B*, 598(3):197–202, 2004. 10, 11, 62
- [Swa04b] Eric S. Swanson. Short range structure in the $X(3872)$. *Physics Letters B*, 588(3):189–195, 2004. 9
- [Swa06] Eric S. Swanson. The new heavy mesons: a status report. *Physics Reports*, 429(5):243–305, 2006. 9
- [Tör94] Nils A Törnqvist. On deusons or deuteronlike meson-meson bound states. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, 107(11):2471–2476, 1994. 9
- [Tör04] Nils A. Törnqvist. Isospin breaking of the narrow charmonium state of belle at 3872 mev as a deuson. *Physics Letters B*, 590(3):209–215, 2004. 10
- [tQFT95] An Introduction to Quantum Field Theory. *Michel E. Peskin and Daniel V. Schroeder*. Perseus Books, 1995. Seções 4.6 e 4.7. 23, 25, 56, 58, 88
- [VK99] Ubirajara Van Kolck. Effective field theory of short-range forces. *Nuclear Physics A*, 645(2):273–302, 1999. 60
- [VKARC02] U. Van Kolck, L. J. Abu-Raddad e DM Cardamone. Introduction to effective field theories in qcd. *arXiv preprint nucl-th/0205058*, 2002. 29, 30
- [Vla71] V.S. Vladimirov. *Equations of mathematical physics*. Marcel Dekker, 1971. Item 7 do capítulo 5. 18
- [Vol07] M. B. Voloshin. Isospin properties of the X state near the $D\bar{D}^*$ threshold. *Phys. Rev.*, D76:014007, 2007. 10
- [Vol08] MB Voloshin. Charmonium. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 61(2):455–511, 2008. 9, 10
- [Wan12] Zhi-Gang Wang. Analysis of the radiative decays among the charmonium states. *International Journal of Theoretical Physics*, 51(5):1518–1528, 2012. 8
- [Wei16] Steven Weinberg. Effective field theory, past and future. *International Journal of Modern Physics A*, 31(06):1630007, 2016. 30
- [Wil73] Kenneth G. Wilson. Quantum field-theory models in less than 4 dimensions. *Physical Review D*, 7(10):2911, 1973. 60
- [Wis93] Mark B Wise. Combining chiral and heavy quark symmetries. *arXiv preprint hep-ph/9306277*, 1993. 39
- [Won04] Cheuk-Yin Wong. Molecular states of heavy quark mesons. *Physical Review C*, 69(5):055202, 2004. 9