

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física

**Perturbações de Sistemas Gravitacionais: a Métrica de  
Vaidya, Mini Buracos Negros e Gravastares**

**Cecilia Bertoni Martha Hadler Chirenti**

Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla

Tese de doutorado apresentada no Instituto  
de Física para a obtenção do título de Doutor  
em Ciências.

**Comissão Examinadora:**

Prof. Dr. Elcio Abdalla (IFUSP)  
Prof. Dr. Luís Raul Weber Abramo (IFUSP)  
Prof. Dr. Reuven Opher (IAG/USP)  
Prof. Dr. George E. Avraam Matsas (IFT)  
Prof. Dr. Carlos Alexandre Wuensche de Souza (INPE)

São Paulo  
2007



para meus pais



# Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Elcio Abdalla, pela sua atenção, ajuda e orientação durante os anos do doutorado, e também desde a iniciação científica. Foi um prazer e uma honra trabalhar ao seu lado. Agradeço também ao Prof. Dr. Alberto Saa, da Unicamp, cuja ajuda em todas as etapas do trabalho se mostrou sempre providencial.

Agradeço ao Prof. Dr. Luciano Rezzolla, com quem trabalhei na Alemanha durante três meses, pela frutífera colaboração, e ao grupo de Relatividade Numérica do Instituto Max Planck de Potsdam, pela hospitalidade e amizade.

Agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro durante todo o doutorado, e ao Serviço Alemão de Intercâmbio Acadêmico (DAAD) e à Sociedade Max Planck pelo apoio financeiro durante a minha estadia na Alemanha.

Agradeço à Amélia, à Simone e à Bethe, sem as quais o Departamento de Física Matemática não poderia existir tal como o conhecemos.

Agradeço aos colegas do grupo, Alan Maciel, Alan Pavan, Alexander, Carlos Eduardo, Carlos Molina, Flávio, Jeferson, Karlucio, Rodrigo, Roman e Sandro, pela companhia e amizade, além das constantes discussões sobre física e outros assuntos.

Merecem um agradecimento especial os que foram, e são, meus companheiros de sala. Agradeço à Bertha, agora no Chile, e à Michele, agora na Alemanha, pela companhia feminina na sala 341 do departamento. Agradeço especialmente ao amigo Davi, por estar sempre presente e pronto a me ajudar quando precisei. Agradeço também ao Brenno, novo integrante do grupo, amigo novo, pela companhia.

Agradeço à amiga e professora Gladys Chalom do IME, pela amizade e conselhos desde a graduação. Agradeço ao amigo e físico José Gomes, responsável em grande parte pela

minha vocação para a Física.

Agradeço aos amigos Bel, Adriana e Laerte, uma física e dois astrônomos, pela amizade duradoura.

Agradeço aos meus amigos Ader, Camila, Carla, Filipe, Marcos, Mogar e Oliver, que acompanharam de longe os meus estudos de Física, e tiveram paciência para esperar até agora. Todos fizeram a minha vida muito mais feliz e me ajudaram sempre que possível.

Agradeço ao Rubens, pelo amor, amizade e paciência durante todos os anos.

Agradeço aos meus pais, que sempre respeitaram as minhas e decisões e me apoiaram, e me proporcionaram a liberdade para seguir a carreira que escolhi. Agradeço pelo amor e carinho, sempre. Agradeço à minha família e em particular à minha avó Sirley, que sempre teve a mais alta opinião a meu respeito, justificada ou não. Finalmente, agradeço in memoriam ao meu avô Geraldo, engenheiro, que com certeza estaria orgulhoso se pudesse estar aqui.

*“The traveller has to knock at every alien door to come to his own, and one has to wander through all the outer worlds to reach the innermost shrine at the end.”*

Rabindranath Tagore, Gitanjali.





# Sumário

|  |            |
|--|------------|
| <b>RESUMO</b>  | <b>vii</b> |
| <b>ABSTRACT</b>  | <b>ix</b>  |
| <b>1 Introdução: Perturbações em Relatividade Geral</b>                            | <b>1</b>   |
| <b>2 Modos Quasi-Normais da Métrica de Vaidya</b>                                  | <b>5</b>   |
| 2.1 A métrica de Vaidya em coordenadas de cone de luz . . . . .                    | 5          |
| 2.2 Soluções das equações de campo . . . . .                                       | 11         |
| 2.3 Perturbações e MQN's da métrica de Vaidya . . . . .                            | 16         |
| <b>3 Caracterização de Mini Buracos Negros através de seus Modos Quasi-Normais</b> | <b>27</b>  |
| 3.1 Mini buracos negros em aceleradores de partículas . . . . .                    | 27         |
| 3.2 Modelo utilizado . . . . .   | 31         |
| 3.3 Perturbações e resultados . . . . .  | 33         |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>4</b> | <b>Estrutura e Estabilidade do Gravastar</b>               | <b>41</b> |
| 4.1      | Gravastar (Gravitational Vacuum Condensate Star) . . . . . | 41        |
| 4.2      | Vínculos nos parâmetros do modelo original . . . . .       | 43        |
| 4.3      | O modelo alternativo com pressões anisotrópicas . . . . .  | 46        |
| 4.4      | Equações de Perturbação e Resultados Numéricos . . . . .   | 53        |
| <b>5</b> | <b>Conclusão</b>   | <b>61</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>                          | <b>63</b> |
|          | <b>APÊNDICE A</b>  | <b>67</b> |
|          | <b>APÊNDICE B</b>  | <b>69</b> |
|          | <b>APÊNDICE C</b>  | <b>71</b> |
|          | <b>APÊNDICE D</b>  | <b>73</b> |
|          | <b>APÊNDICE E</b>  | <b>85</b> |

# Lista de Figuras

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.1  | Exemplos de curvas $r(u = \text{const}, v)$ obtidas com a eq. (2.39), com $M = 1$ . . .  | 12 |
| 2.2  | Comportamento das curvas $r(u = \text{const}, v)$ obtidas com a eq. (2.39) para $r(u, v_0) = -u/2 \rightarrow 2M$ . . . . .  | 13 |
| 2.3  | Curvas de $r$ e $t$ constante. . . . .   | 14 |
| 2.4  | Curvas de $u$ constante e diagrama conforme. . . . .   | 15 |
| 2.5  | Diagrama da grade utilizada para a integração numérica da equação de perturbação da métrica de Vaidya. . . . .   | 18 |
| 2.6  | Perturbação eletromagnética com $\ell = 2$ para um buraco negro de Schwarzschild e a métrica de Vaidya com a função de massa hiperbólica. . . . .  | 19 |
| 2.7  | Perturbação escalar com $\ell = 2$ para um buraco negro de Schwarzschild e a métrica de Vaidya com massa linear crescente e decrescente. . . . .   | 20 |
| 2.8  | Perturbação eletromagnética com $\ell = 2$ para um buraco negro de Schwarzschild e a métrica de Vaidya com massa linear crescente e decrescente. . . .   | 20 |
| 2.9  | A parte real ( $\omega_R$ ) da frequência de perturbações escalares com $\ell = 2$ em função de $v$ para funções de massa linear e hiperbólica decrescentes. . . . .                                       | 22 |
| 2.10 | As partes real ( $\omega_R$ ) e imaginária ( $\omega_I$ ) da frequência para perturbações eletromagnéticas com $\ell = 2$ em função de $v$ para funções de massa linear e hiperbólica crescentes . . . . . | 23 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.11 | Evolução de $\omega_R$ para perturbações escalares com $\ell = 2$ e diferentes funções de massa hiperbólicas, em comparação com uma função de massa linear. . . . .  | 24 |
| 2.12 | Evolução de $\omega_R$ para perturbações escalares, com diferentes valores de $\ell$ para diferentes funções de massa lineares. . . . .  | 25 |
| 3.1  | Frequências “instantâneas” dos MQN’s para mini buracos negros em processo de evaporação ( $\ell = 2$ ). . . . .  | 35 |
| 3.2  | Frequências “instantâneas” dos MQN’s para mini buracos negros em processo de evaporação ( $\ell = 3$ ). . . . .  | 36 |
| 3.3  | Os espectros de potências $ \Psi(f) $ e $ \tilde{\Psi}(f) $ . . . . .  | 38 |
| 3.4  | Solução gráfica para a frequência de máximo de $ \Psi(f) $ . . . . .   | 39 |
| 4.1  | Limite para a compacidade $\mu$ do gravastar em função da espessura $\delta_c$ da casca de matéria . . . . .   | 46 |
| 4.2  | Exemplo típico das funções $\rho(r)$ , $p_r(r)$ e $p_t(r)$ para $M = 1$ , $r_1 = 1.8$ e $r_2 = 2.2$ . . . . .  | 50 |
| 4.3  | Comportamento de $(1 - 2m/r)$ para $M = 1$ e diferentes valores de $r_1$ e $r_2 = 2.2$ . . . . .   | 51 |
| 4.4  | Varição de $(1 - 2m/r)_{min}$ com $\delta$ , para $M = 1$ e diferentes valores de $r_2$ . . . . .  | 51 |
| 4.5  | Limite na compacidade $\mu$ do gravastar com a espessura $\delta$ da casca, comparando os resultados apresentados na figura 4.1 com os resultados obtidos para o modelo com pressões anisotrópicas, na curva superior. . . . . | 52 |
| 4.6  | Diagrama da grade de integração numérica utilizada para o gravastar . . . . .  | 55 |
| 4.7  | Potencial $V(r)$ ( $\ell = 2$ ) para gravastares com mesma compacidade e $\mu$ e espessura $\delta$ crescente. . . . .   | 55 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 4.8  | Potencial $V(r)$ ( $\ell = 2$ ) para gravastares com a mesma espessura $\delta$ e compactidade $\mu$ crescente. . . . .   | 56 |
| 4.9  | Evolução das perturbações axiais com $n = 0, 1$ e $2$ para um gravastar com $M = 1, r_1 = 1.85$ e $r_2 = 2.2$ . . . . .   | 58 |
| 4.10 | Comportamento das frequências quasi-normais do gravastar em função de $\delta$ para diferentes valores de $\mu$ . . . . . | 59 |

# Lista de Tabelas

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 4.1 | Alguns valores típicos obtidos para as frequências quasi-normais do modo fundamental e primeiros modos superiores do gravastar ( $M = 1$ ) para perturbações axiais com $\ell = 2$ . . . . . | 57 |
|-----|--|----|

# Resumo

Estudos de perturbações em sistemas gravitacionais no âmbito da Relatividade Geral vêm sofrendo grandes desenvolvimentos nos últimos anos, especialmente em face da evolução dos modernos detectores de ondas gravitacionais. Abordamos neste trabalho as perturbações de diferentes cenários. Princípios com a métrica de Vaidya, utilizada para descrever espaços-tempos esféricamente simétricos e dependentes do tempo. Nossas simulações mostraram que as frequências dos modos quasi-normais (MQN's) apresentam um novo efeito inercial para variações rápidas da função de massa, retornando depois ao comportamento adiabático. Em seguida, apresentamos um modelo para a evaporação de mini buracos negros por radiação de Hawking inspirado no cenário de criação destes objetos em aceleradores de partículas, previsto pelas novas teorias com dimensões extras. Nosso modelo, baseado na métrica de Vaidya  $n$ -dimensional, tornou possível a análise de MQN's resultando na possibilidade de se obter os parâmetros relevantes do buraco negro, como a sua massa inicial e o número de dimensões extras, a partir de medições experimentais. Finalmente, realizamos um estudo sobre uma nova solução denominada gravastar, proposta como um modelo alternativo para o estágio final de estrelas com grande massa. Obtivemos limites para os parâmetros da solução e verificamos a sua estabilidade frente a perturbações axiais, concluindo positivamente a respeito da possibilidade de se distinguir entre buracos negros e gravastares com base no seu espectro de MQN's.





# Abstract

Perturbative studies of gravitational systems in General Relativity have gone through big developments in the last years, especially due to the evolution of the modern gravitational wave detectors. We consider in this work different perturbations in different scenarios. Firstly we consider the Vaidya metric, mainly used to describe time-dependent spherically symmetric spacetimes. Our simulations show that the frequencies of the quasinormal modes (QNM's) present a new inertial effect for rapidly varying mass functions, returning afterwards to the adiabatic behavior. Next we present a model for evaporating mini black holes in particle accelerators, in the context of the new gravity models with extra dimensions. With our model, based on the  $n$ -dimensional Vaidya metric, we are able to perform a QNM analysis which results in the possibility of obtaining the parameters of the black hole, such as its initial mass and the number of extra dimensions, from the experimental measurements. Finally, we present a study of a new solution, the gravastar, proposed as an alternative model for the end state of massive stars. We obtain bounds for the parameters of the solution and verify its stability against axial perturbations. Our results indicate that the gravastar's QNM spectrum can indeed be used to distinguish a black hole from a gravastar.



# Capítulo 1

## Introdução: Perturbações em Relatividade Geral

O estudo de perturbações em relatividade geral tem se mostrado um campo de pesquisa muito ativo, desde o trabalho pioneiro de Regge e Wheeler de 1957 [1]. A análise da evolução de pequenas perturbações em um campo gravitacional de fundo conhecido fornece informações sobre a estabilidade das soluções das equações de Einstein, e nos permite obter um conhecimento mais aprofundado acerca da natureza das equações de campo da gravitação. A estabilidade das soluções é uma de suas características mais importantes. Soluções instáveis devem decair rapidamente em um objeto estável, que é mais facilmente detectável devido ao seu tempo de vida maior.

Além disso, a propagação de pequenas perturbações pode ser usada para descrever sinais de ondas gravitacionais gerados por fontes astrofísicas distantes, quando detectados na Terra. A detecção de ondas gravitacionais, apesar de ser um projeto extremamente desafiador e experimentalmente complexo, se torna aos poucos mais viável, com a nova geração de projetos: detectores de massas ressonantes, interferômetros laser, ou ainda com o detector LISA, que consistirá de um conjunto de três satélites em órbita da Terra. A dificuldade de detecção reside, entre outros fatores, na razão sinal/ruído extremamente baixa esperada.

Um dos sucessos da teoria de perturbação aplicada à Relatividade Geral foi obter o espectro de frequências dos modos quasi-normais de buracos negros. Um buraco negro espalha ondas gravitacionais incidentes como em um problema de espalhamento de ondas planas por uma barreira de potencial na Mecânica Quântica. Mas, na Relatividade Geral, as ondas espalhadas pelo buraco negro possuem uma frequência de oscilação e uma cons-

tante de decaimento que são inversamente proporcionais à massa do buraco negro, e não dependem das condições iniciais da perturbação. Portanto, as ondas espalhadas carregam informações sobre o buraco negro, como se fossem as suas “impressões digitais” ou o seu “som característico”.

Este fato gerou uma expectativa de que, ao se atingirem as condições técnicas necessárias para a detecção das ondas gravitacionais, teríamos uma nova janela observacional para o universo. Informações sobre objetos astrofísicos, que de outra maneira seriam invisíveis para nós, poderiam ser obtidas procurando-se pelas suas assinaturas nos sinais detectados. Desta forma poderíamos obter informações sobre buracos negros e estrelas compactas, e talvez até sobre outros tipos de objetos astrofísicos ainda desconhecidos. Detectores de ondas gravitacionais seriam utilizados para se obter informações sobre o cosmos, como as informações obtidas em raios X, microondas ou no espectro visível pelos modernos telescópios e satélites de pesquisa.

Parece, porém, um pouco otimista demais pensar que sinais reais poderiam refletir os resultados obtidos por uma investigação teórica extremamente idealizada, como a análise do espalhamento de ondas gravitacionais pela barreira de potencial de um buraco negro. Estima-se que as maiores fontes astrofísicas de emissão de ondas gravitacionais sejam eventos cataclísmicos extremamente violentos, tais como a explosão de super novas, ou a colisão de buracos negros.

A fonte mais promissora para detecção e estudo de ondas gravitacionais é o “sistema binário compacto espiralando” nas últimas fases de sua vida. Este é um sistema binário formado por duas estrelas de nêutrons ou dois buracos negros (ou um de cada), espiralando para um centro comum, altura em que finalmente coalescem violentamente. Tal é o destino, por exemplo, do famoso sistema de Hulse-Taylor, o Pulsar PSR 1913+16 [2], daqui a cerca de 240 milhões de anos, ou de um sistema binário de buracos negros massivos no centro de uma galáxia.

Simulações numéricas recentes (ver [3] e referências) realizadas no regime não linear, envolvendo a integração numérica das equações de Einstein com condições iniciais dadas, obtiveram alguns resultados para as ondas gravitacionais emitidas em processos deste tipo. Verificou-se que o sinal emitido é composto de três fases distintas: movimento em espiral, fusão e “ringdown” ou decaimento. Como resultado, foi verificado que o decaimento das ondas em modos quasi-normais é recuperado no último estágio da evolução das ondas gravitacionais! Pelo visto, não era otimista demais pensar que a análise de modos quasi-normais poderia ser efetivamente útil para a análise de sinais reais.

Cada vez mais tem sido observado que os métodos perturbativos fazem previsões que são pelo menos qualitativamente corretas em regimes não-lineares nos quais, a princípio,

estes métodos não deveriam mais produzir resultados válidos. Já foram obtidos resultados perturbativos compatíveis com os resultados obtidos por simulações numéricas mais complexas não lineares até mesmo para problemas envolvendo colisões de buracos negros [4], situação que certamente, à primeira vista, não deveria ser bem resolvida por técnicas destinadas a tratar de pequenas perturbações. Se a colisão de buracos negros for estudada de maneira que no instante inicial os dois buracos negros estejam cobertos por um horizonte comum, o problema pode ser visto como a perturbação de um único buraco negro. Além disso, com o passar do tempo os métodos perturbativos têm se tornado cada vez mais úteis, e têm sido cada vez mais utilizados, mesmo com o amadurecimento dos métodos não lineares [3], que, por sua vez, envolvem técnicas de programação muito mais avançadas, além de exigirem um maior poder computacional. Finalmente, métodos perturbativos baseados em tratamentos invariantes de gauge das perturbações estão na base de grande parte dos trabalhos realizados em relatividade numérica com métodos não lineares.

No tratamento perturbativo da evolução de pequenas perturbações em Relatividade Geral, temos duas abordagens distintas. Uma consiste em somar uma pequena perturbação aos coeficientes da métrica, o que leva a perturbações gravitacionais axiais e polares, descritas no caso de um buraco negro de Schwarzschild pelas equações de Regge-Wheeler [1] e Zerilli [5]. Estas são as perturbações que podem ser identificadas com as ondas gravitacionais emitidas por algum processo físico real. Outra abordagem diferente consiste em analisar a propagação de um campo de teste no espaço-tempo descrito pela métrica, sem considerar a reação do campo sobre a métrica (análise linear). Costumeiramente este método é aplicado para campos escalares e eletromagnéticos, podendo porém ser aplicado também para campos de spin semi-inteiro, ou mais elevado. Isto corresponde à situação física de espalhamento de partículas pela barreira de potencial do buraco negro ou qualquer outro objeto considerado. Em ambos os casos, para o buraco negro de Schwarzschild, por exemplo, a perturbação segue uma equação de onda que pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \psi_{\ell m}}{\partial r^{*2}} - \frac{\partial^2 \psi_{\ell m}}{\partial t^2} + V_\ell(r) \psi_{\ell m} = 0, \quad (1.1)$$

onde  $r^*$  é a coordenada tartaruga dada por  $r^* = r + 2M \ln(r/2M - 1)$ , e o potencial  $V_\ell(r)$  é uma função de  $r$  e  $M$  que contém toda a física do problema. Para perturbações gravitacionais axiais, por exemplo,

$$V_\ell(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2\sigma M}{r^3}\right], \quad (1.2)$$

é o potencial efetivo, ou potencial de Regge-Wheeler, formado por uma barreira de potencial com um pico localizado próximo de  $r = 3M$ . A forma (1.2) se mantém mesmo se consideramos campos de teste escalares ou eletromagnéticos como perturbações. O parâmetro  $\sigma$  é igual a 1 para perturbações escalares, 0 para perturbações eletromagnéticas e -3 para perturbações gravitacionais, podendo ser expresso como  $\sigma = 1 - s^2$ , onde  $s = 0, 1$  ou  $2$  é o spin do campo de perturbação.

A eq. (1.1) tem sido estudada durante os últimos 50 anos, e revelou muito do que se sabe atualmente sobre buracos negros em nosso universo. As soluções dessa equação são escritas geralmente na forma [6]

$$\Psi(r, t, \theta, \phi) = \sum_{\ell, m} \frac{\psi_{\ell m}(r, t)}{r} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (1.3)$$

com

$$\psi(r, t) = e^{i(\omega_R + i\omega_I)t} \rightarrow e^{-\omega_I t} \sin(\omega_R t + \delta). \quad (1.4)$$

A estabilidade do buraco negro é dada pelo sinal da exponencial na eq. (1.4). O buraco negro é considerado estável quando a perturbação decai exponencialmente, e instável quando a perturbação cresce exponencialmente.

Pode-se argumentar que seria extremamente difícil medir experimentalmente as partículas espalhadas por um buraco negro real, o que é verdade para buracos negros astrofísicos, porém não é assim tão certo para mini buracos negros que podem ser formados em aceleradores de partículas [7]. Apesar disso, a análise de perturbações escalares e eletromagnéticas serve muito bem como uma análise preliminar e mais simples da estabilidade das soluções das equações de Einstein. Além disso, já foi mostrado que para valores grandes de  $\ell$ , os valores das frequências dos modos quasi-normais para todos os tipos de perturbações, escalares, eletromagnéticas ou gravitacionais, tornam-se iguais, dando mais uma justificativa para o estudo da evolução de campos de teste em sistemas gravitacionais. Podemos ver da eq. (1.2) que para  $\ell$  grande o termo proporcional a  $\ell$  do potencial domina sobre o segundo termo, de modo que o potencial torna-se igual para as diferentes perturbações.

O estudo de perturbações em buracos negros de Schwarzschild já foi em grande parte exaurido no passado, e suas características são hoje bem conhecidas. Atualmente, o desafio se encontra no estudo de perturbações em novas soluções, motivadas por desenvolvimentos da teoria e novos modelos fenomenológicos, ou ainda em antigas soluções conhecidas já há bastante tempo, mas que conseguiram até hoje frustrar os estudos perturbativos por dificuldades técnicas. Faz parte do segundo caso a métrica de Vaidya, dependente do tempo, da qual nos ocupamos no capítulo 2 deste trabalho. Do primeiro caso fazem parte os estudos de mini buracos negros e gravastares, desenvolvidos nos capítulos 3 e 4. Veremos a seguir neste trabalho como os métodos perturbativos podem ser utilizados para estudar estes problemas, como os resultados novos obtidos se relacionam com os resultados já conhecidos, e quais as novas contribuições que surgem para o entendimento da teoria e para a análise de possíveis futuros resultados experimentais.

## Capítulo 2

# Modos Quasi-Normais da Métrica de Vaidya

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos para os modos quasi-normais da métrica de Vaidya. Nas seções 2.1 e 2.2 apresentamos um tratamento desta métrica em coordenadas de cone de luz  $(u, v)$ , mais adequadas à análise perturbativa realizada na seção 2.3. Os resultados obtidos na seção 2.3 para os modos quasi-normais (MQN's) são comparados com os resultados de [8], e novos efeitos são identificados [9], devido à melhor precisão dos resultados no sistema de coordenadas de cone de luz utilizado.

### 2.1 A métrica de Vaidya em coordenadas de cone de luz

Em um trabalho de 1951, P. C. Vaidya apresentou pela primeira vez uma métrica para descrever o espaço-tempo exterior a uma estrela esfericamente simétrica, considerando o fluxo de radiação emitido pela estrela [10]. Neste caso, a massa da estrela não é considerada constante, como no caso de Schwarzschild, e a métrica não deve ser estática. Como ponto de partida foi tomada a seguinte descrição do problema: uma massa esférica radiante deve estar provavelmente envolvida por um envelope finito e não estático de radiação com simetria radial. Tudo deve estar envolvido por um campo gravitacional radial que se torna cada vez mais fraco com a distância até o corpo central, até o espaço se tornar plano no infinito.

No trabalho original de Vaidya, cujos resultados principais revisamos a seguir, as equações de campo são obtidas com a suposição de que uma estrela de massa  $M$  e raio  $r_0$  começa a emitir radiação em um tempo  $t_0$ . À medida que a estrela continua a emitir, a espessura da zona de radiação aumenta e a sua superfície exterior em um instante posterior  $t = t_1$  está em  $r = r_1$ . Para  $r_0 \leq r \leq r_1$  e  $t_0 \leq t \leq t_1$ , seja o elemento de linha da forma

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.1)$$

onde  $\lambda$  e  $\nu$  são funções de  $r$  e  $t$ . Para que a energia total seja conservada, o elemento de linha obtido ao se resolver as equações de campo para (2.6) e (2.1) deve se reduzir à forma estática

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.2)$$

para  $r = r_0$ ,  $t = t_0$  e para  $r \geq r_1$  em  $t = t_1$ .

O tensor de energia-momento do campo eletromagnético é dado por

$$T^{\mu\nu} = F^\mu_\alpha F^{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (2.3)$$

Para um fluxo isotrópico de radiação, a expressão (2.3) pode ser escrita como o tensor de energia-momento de um fluido perfeito,

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

onde  $U^\mu$  é a quadrivelocidade do fluido, e  $p = \rho/3$ . Em nosso caso, porém, consideramos um fluxo de radiação direcionado, e não isotrópico: em cada ponto da região do espaço considerada, um observador vê um fluxo de energia em apenas uma direção.

Utilizamos coordenadas naturais no ponto de interesse, e podemos tomar as componentes do tensor de energia-momento em termos das intensidades dos campos elétrico e magnético  $E$  e  $H$ . Considerando, sem perda de generalidade, que os eixos do nosso sistema natural de coordenadas estejam orientados de tal maneira que o fluxo de radiação no ponto de interesse esteja na direção  $x$  e que a radiação esteja polarizada com o vetor campo elétrico paralelo à direção  $y$ , as componentes não-nulas de  $T^{\mu\nu}$  (no sistema de coordenadas naturais) são

$$T^{11} = T^{44} = T^{14} = \frac{1}{2}(E_y^2 + H_z^2) = \rho. \quad (2.5)$$

Em um sistema de coordenadas arbitrário,  $T^{\mu\nu}$  será dado por

$$T^{\mu\nu} = \rho v^\mu v^\nu, \quad (2.6)$$



onde  $v^\mu$  é um vetor nulo e radial,

$$v_\mu v^\mu = 0 \Rightarrow -e^\lambda (v^1)^2 + e^\nu (v^4)^2 = 0, \quad v^2 = v^3 = 0. \quad (2.7)$$

Com a expressão usual para as componentes de  $T_{\mu\nu}$  em termos de  $g_{\mu\nu}$  e suas derivadas, dada pelas equações de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

e as equações (2.6) e (2.7), temos as três equações de campo:

$$T_1^4 e^{(\nu-\lambda)/2} - T_4^4 = 0 \rightarrow e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} + \frac{\dot{\lambda}}{r} e^{-(\lambda+\nu)/2} = 0, \quad (2.9)$$

$$T_1^1 + T_4^4 = 0 \rightarrow e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda' - \nu'}{r} - \frac{2}{r^2} \right) + \frac{2}{r^2} = 0, \quad (2.10)$$

$$T_2^2 = 0 \rightarrow -e^{-\lambda} \left( \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right) + e^{-\nu} \left( \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} \right) = 0. \quad (2.11)$$

Tomando

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad m = m(r, t), \quad (2.12)$$

na equação de campo (2.9), obtemos

$$e^{\nu/2} = -\frac{\dot{m}}{m'} \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1/2}. \quad (2.13)$$

Substituindo  $\lambda$  e  $\nu$  das equações (2.12 e (2.13)) na equação de campo (2.10), temos

$$\left( \frac{\dot{m}'}{\dot{m}} - \frac{m''}{m'} \right) \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) = \frac{2m}{r^2}. \quad (2.14)$$

Integrando a eq. acima em relação a  $r$ , obtemos

$$m' \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) = f(m), \quad \text{com} \quad \frac{df}{dm} = \frac{\dot{m}'}{\dot{m}} \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) - \frac{2m'}{r}. \quad (2.15)$$

A métrica assim obtida é dada por

$$ds^2 = -\frac{\dot{m}^2}{f^2} \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.16)$$

$$m' \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) = f(m), \quad m = m(r, t), \quad (2.17)$$

A eq.(2.17) é a equação diferencial a ser resolvida para  $m$ , dada uma função  $f(m)$  arbitrária. A continuidade da métrica na fronteira  $r = R(t)$  (obviamente,  $R(t_1) = r_1$ ) é dada por

$$m = M, \quad (2.18)$$

$$\dot{m} = -f(M). \quad (2.19)$$

Podemos notar ainda que, ao impor a continuidade da métrica em  $r = R$ , garantimos que em  $r = r_0$ ,  $t = t_0$  o elemento de linha é novamente igual a (2.2).

Em 1953 a métrica de Vaidya foi rerepresentada em coordenadas radiativas [11], fazendo uso de uma mudança de coordenadas dada implicitamente por [12]

$$(r, \theta, \phi, t) \longrightarrow (r, \theta, \phi, \omega), \quad (2.20)$$

$$dt = d\omega - c \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr, \quad (2.21)$$

onde supusemos  $m = m(\omega)$ . Em coordenadas radiativas a métrica pode ser reescrita de maneira mais simples como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\omega^2 + 2cd\omega dr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.22)$$

Para  $c = 1$ , temos um fluxo de radiação para dentro da estrela, e  $m(\omega)$  é uma função de massa monótona crescente do tempo avançado  $\omega$  dado por  $d\omega = dt + dr^*$ , com  $dr^* = (1 - 2m/r)^{-1} dr$ . Para  $c = -1$ , temos um fluxo de radiação para fora da estrela, e  $m(\omega)$  é uma função monótona decrescente do tempo retardado  $\omega$  dado por  $d\omega = dt - dr^*$ . Esta é a forma mais conhecida e geralmente utilizada da métrica de Vaidya.

Neste trabalho vamos considerar a métrica em coordenadas de cone de luz, mais adequadas para problemas de evolução temporal, como a análise de MQN's. No entanto, as dificuldades de se obter coordenadas de cone de luz para espaços-tempos não estacionários são bem conhecidas. Sabe-se que o problema de se obter coordenadas de cone de luz para a métrica de Vaidya, considerando uma função de massa genérica, não é solúvel para a maioria dos casos [13]. Nós seguimos aqui a abordagem semi-analítica proposta em [14], baseada no estudo realizado em [13]. Consideramos as equações de Einstein com simetria esfericamente simétrica *ab initio* em coordenadas de cone de luz  $(u, \theta, \phi, v)$ . O elemento de linha esfericamente simétrico nessas coordenadas é

$$ds^2 = -2f(u, v) du dv + r^2(u, v) d\Omega^2, \quad (2.23)$$

onde  $f(u, v)$  e  $r(u, v)$  são funções suaves e não nulas. O tensor de energia-momento de um fluxo unidirecional de radiação não polarizada é dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} h(u, v) k_\mu k_\nu, \quad (2.24)$$

onde  $k_\mu$  é um vetor radial do tipo nulo ( $k_\mu k^\mu = 0$  e  $k_2 = k_3 = 0$ ). Considerando, sem perda de generalidade, o caso em que o fluxo de radiação se dá na direção de  $v$ , temos  $k_\mu = (0, 0, 0, 1)$ . As equações de campo, dadas pelas equações de Einstein (2.8), com a métrica (2.23) e o tensor de energia-momento (2.24), se reduzem ao seguinte conjunto de equações:

$$f(u, v) = 2B(v) \frac{\partial r(u, v)}{\partial u}, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial r(u, v)}{\partial v} = -B(v) \left( 1 - \frac{2m(v)}{r(u, v)} \right), \quad (2.26)$$

$$h(u, v) = -4 \frac{B(v)m'(v)}{r^2(u, v)}, \quad (2.27)$$

onde  $B(v)$  e  $m(v)$  são funções arbitrárias, obedecendo à condição de energia fraca, isto é, para todo vetor tipo tempo  $X^\mu$  ( $X_\mu X^\mu < 0$ ), a densidade de matéria observada pelos observadores cuja linha de mundo é tangente a  $X^\mu$  deve ser sempre maior ou igual a zero:

$$\rho = T_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \geq 0. \quad (2.28)$$

Para o tensor de energia-momento (2.24), essa condição fornece

$$\rho = T_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = T_{vv} (X^v)^2 \geq 0 \Rightarrow T_{vv} \geq 0, \quad (2.29)$$

ou seja,

$$B(v)m' \leq 0. \quad (2.30)$$

A solução do sistema (2.25)-(2.27) corresponde à métrica de Vaidya, como pode ser visto de (2.23) e (2.24), que estabelecem que a métrica é esfericamente simétrica e possui um fluxo radial de radiação, respectivamente.

Vamos mostrar agora que a massa de uma distribuição esfericamente simétrica de matéria pode ser descrita por

$$m = \frac{1}{2} r^3 R_{23}{}^{23}, \quad (2.31)$$

segundo a argumentação exposta em [15]. Seja um espaço-tempo esfericamente simétrico arbitrário, com a métrica dada por

$$dS^2 = e^{2\gamma} (dx^4)^2 - e^{-2\alpha} [e^{2\alpha} (dx^1)^2 + r^2 d\Omega^2], \quad (2.32)$$

onde  $\gamma$ ,  $\alpha$  e  $r$  são funções de  $x^1$  e  $x^4$  e o centro de simetria é definido por  $x^1 = 0$ , de modo que  $r(0, x^4) = 0$ . Além disso, supõe-se que  $r(x^1, x^4) > 0$  para todo  $x^1 \neq 0$ , que  $e^{2\gamma} > 0$  e  $e^{2\alpha} > 0$  para todo  $x^1$  e  $x^4$  e que  $\gamma$  e  $\alpha$  são limitados a não ser que o contrário seja explicitamente mencionado.

A componente  $R^3_{232}$  do tensor de Riemann para esta métrica pode ser facilmente calculada,

$$R^3_{232} = 1 + e^{-2\gamma} c^{-2} r_{,4}^2 - e^{-2\alpha} r_{,1}^2. \quad (2.33)$$

Esta componente do tensor de Riemann é interessante por envolver apenas primeiras derivadas e por ser invariante por transformações da forma  $\bar{x}^1 = \bar{x}^1(x^1, x^4)$ ,  $\bar{x}^4 = \bar{x}^4(x^1, x^4)$ . Examinando a eq. (2.33), verificamos que, se  $r$  for usado como uma coordenada, e  $t$  for usado como uma coordenada ortogonal conjugada a  $r$ , ou seja,  $dr/dt = 0$ , então neste sistema de coordenadas a métrica assume a forma

$$dS^2 = e^{2\psi} dt^2 - \frac{1}{c^2} \left[ \frac{dr^2}{1 - R^3_{232}} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (2.34)$$

A coordenada  $r$  possui caráter espacial para  $R^3_{232} < 1$ , mas possui caráter temporal para  $R^3_{232} > 1$ . Logo, neste sistema de coordenadas,  $e^{2\alpha}$  pode divergir. Se estas coordenadas forem utilizadas em uma região vazia de um espaço-tempo esfericamente simétrico, temos os resultados da métrica de Schwarzschild

$$dS^2 = (1 - 2M/r) dt^2 - \frac{1}{c^2} \left[ \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.35)$$

e  $M$  é uma constante. Se considerarmos a seguir uma distribuição esférica arbitrária de matéria envolvida pelo espaço vazio, a fronteira da matéria será uma superfície de descontinuidade. De acordo com [16, 17], a métrica deve ser contínua sobre uma superfície de descontinuidade. Comparando então (2.34) e (2.35) temos

$$(R^3_{232})_f = 2M/r_f, \quad (2.36)$$

onde o índice “ $f$ ” indica o valor na fronteira. Este resultado sugere que uma função  $m(x^1, x^4)$  pode ser definida por

$$m = \frac{1}{2} r R^3_{232} = \frac{1}{2} r^3 R_{23}{}^{23}. \quad (2.37)$$

Em [15] são apresentados mais argumentos, que não reproduziremos aqui, para mostrar que esta identificação é razoável.

Utilizando agora a “definição” de massa (2.37) para a métrica de Vaidya em coordenadas de cone de luz, podemos verificar que a função  $m(v)$  que surge da integração das equações de campo, nas equações (2.26) e (2.27), é efetivamente a massa da solução.

Para  $m'(v) \neq 0$ , a escolha

$$2B(v) = -\frac{m'}{|m'|}, \quad (2.38)$$

(lembrando que  $B(v)$  é uma função arbitrária) permite interpretar  $v$  como o tempo próprio medido no referencial em repouso no infinito para o caso assintoticamente plano [13]. O

fluxo radial é dirigido para o interior do buraco negro se  $m'(v) > 0$ , e é dirigido para o exterior se  $m'(v) < 0$ . Podemos notar que, para que a condição de energia (2.29) seja satisfeita, a função  $m(v)$  deve ser monótona, implicando que o fluxo radial deve ter apenas uma direção, para todo  $v$ . Não é possível, portanto, ter funções de massa  $m(v)$  oscilantes.

## 2.2 Soluções das equações de campo

O método semi-analítico proposto em [14] consiste em construir numericamente as funções  $f(u, v)$ ,  $r(u, v)$  e  $h(u, v)$  a partir das eqs. (2.25)-(2.27). A eq. (2.26) ao longo de  $u$  constante é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem em  $v$ . Pode-se obter  $r(u, v)$  em qualquer ponto resolvendo o problema de valor inicial em  $v$ , conhecendo-se  $r(u, v_0)$ .

Vamos exemplificar em detalhe este método para a métrica de Schwarzschild, que admite solução analítica. Podemos escolher  $m(v)$ ,  $B(v)$  e  $r(u, v_0)$  nas eqs. (2.25)-(2.27) de modo a obter diferentes soluções. Para  $m(v) = M$ ,  $B(v) = -1/2$  e  $r(u, v_0) = -u/2$ , temos uma parametrização da métrica de Schwarzschild, e a eq. (2.26) pode ser resolvida analiticamente,

$$r + 2M \ln(r - 2M) = \frac{1}{2}(v - v_0) - \frac{1}{2}u + 2M \ln\left(-\frac{u}{2} - 2M\right). \quad (2.39)$$

Com uma outra escolha de parâmetros, obtemos a solução de Schwarzschild em termos das coordenadas de Kruskal-Szekeres [13]. A solução  $r(u_k, v_k)$  (o índice  $k$  indica aqui as coordenadas de Kruskal-Szekeres) é dada por

$$r + 2M \ln(r - 2M) = 2M \ln\left(\frac{v_k}{v_{k_0}}\right) + 2M \ln\left(\frac{u_k}{u_{k_0}}\right). \quad (2.40)$$

Comparando as duas soluções (2.39) e (2.40), é possível encontrar uma transformação entre os dois sistemas de coordenadas:

$$\frac{v_k}{v_{k_0}} = e^{\frac{v-v_0}{4M}}, \quad (2.41)$$

$$\frac{u_k}{u_{k_0}} = e^{-\frac{u-u_0}{4M}} \left(\frac{u+4M}{u_0+4M}\right), \quad (2.42)$$

de modo que, a partir da definição de tempo para as coordenadas de Kruskal,

$$t = 2M \ln \frac{v_k}{u_k}, \quad (2.43)$$

é possível obter

$$t - t_0 = \frac{v - v_0}{2} + \frac{u - u_0}{2} - 2M \ln\left(\frac{u + 4M}{u_0 + 4M}\right), \quad (2.44)$$

de maneira que, se  $r = R_F$  (fixo), então  $t = v + \text{const.}$  Esse resultado mostra que, efetivamente,  $v$  pode ser considerado como o tempo próprio de um observador em repouso no infinito, o que não acontece com  $v_k$ .

Nas figuras 2.1-2.3 temos alguns exemplos do comportamento de  $r(u, v)$  e  $t(u, v)$  com a parametrização (2.39). Na fig. 2.1 temos alguns exemplos de curvas  $r(u = \text{const}, v)$ . As curvas com valor inicial  $r(u, v_0) < 2M$  caem na singularidade  $r = 0$ , enquanto as curvas com valor inicial  $r(u, v_0) > 2M$  escapam para o infinito. Na fig. 2.2 temos em detalhe o comportamento destas curvas quando a condição inicial  $r(u, v_0) = -u/2$  tende a  $2M$ . As curvas se aproximam de  $r = 2M$  (tanto superior quanto inferiormente) durante mais tempo quanto mais próxima a condição inicial estiver de  $r = 2M$ , antes de caírem na singularidade ou escaparem. Na fig. 2.3 temos um mapeamento das linhas de  $r$  e  $t$  constantes no plano  $u \times v$ .

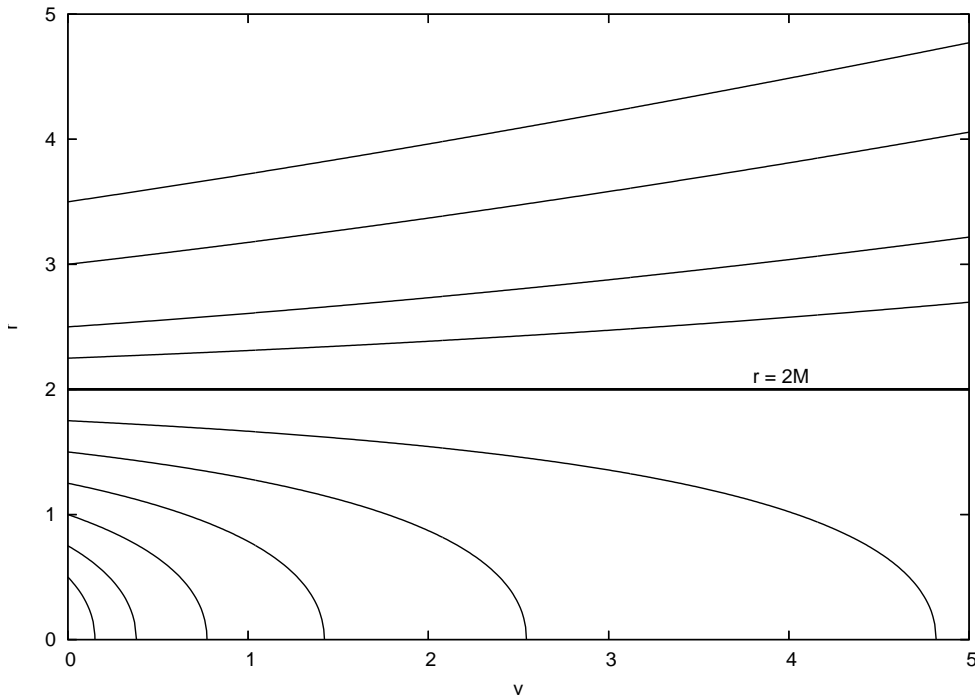


Figura 2.1: Exemplos de curvas  $r(u = \text{const}, v)$  obtidas com a eq. (2.39), com  $M = 1$ .

Vamos nos basear nestes resultados para escolher a parametrização que será utilizada para os casos de interesse, com  $m' \neq 0$ . Para  $m' > 0$ , por exemplo, tomamos  $B = -1/2$  e  $r(u, v_0) = -u/2$ . Esta escolha garante que a condição de energia fraca (2.29) seja satisfeita.

As curvas  $r(u = \text{const}, v)$  obtidas pela integração da eq. (2.26) são geodésicas nulas do espaço-tempo. A curva  $r = 2m(v)$  é o horizonte aparente do buraco negro, definido como a fronteira entre a região na qual raios de luz se afastam da singularidade ( $r' > 0$ ) e

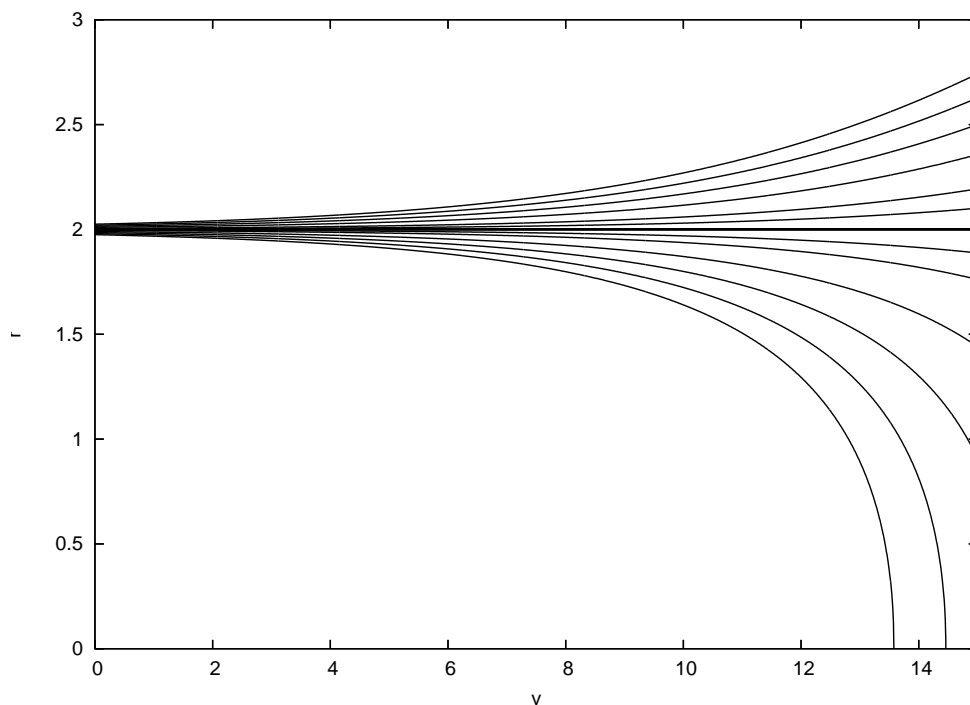


Figura 2.2: Comportamento das curvas  $r(u = \text{const}, v)$  obtidas com a eq. (2.39) para  $r(u, v_0) = -u/2 \rightarrow 2M$ .

a região na qual raios de luz se aproximam da singularidade ( $r' < 0$ ). O horizonte de eventos é definido como a fronteira entre as geodésicas que escapam e as que caem na singularidade [18, 19]. Os dois horizontes podem ser vistos na figura 2.4.

Com o método utilizado, o horizonte de eventos pode ser encontrado apenas numericamente, por inspeção, variando-se os valores da condição inicial  $r(u, v_0) = -u/2$ . Uma vez encontrada, dentro da precisão numérica disponível, a condição inicial  $r(\bar{u}, v_0)$  tal que a geodésica gerada seja a primeira a escapar da singularidade, definimos o horizonte de eventos como  $r_{HE} = r(\bar{u}, v)$ , e uma “massa assintótica” dada por

$$m_{ass}(\bar{u}) = \frac{r(\bar{u}, v_0)}{2}, \quad (2.45)$$

que será utilizada na seção 2.3, no tratamento numérico de perturbações na métrica de Vaidya.

Consideramos aqui a função de massa suave

$$m(v) = m_1 + \frac{m_2 - m_1}{2} [1 + \tanh \kappa(v - v_1)], \quad (2.46)$$

onde  $\kappa$  e  $v_1$  são parâmetros constantes. Para efeito de comparação com os resultados de

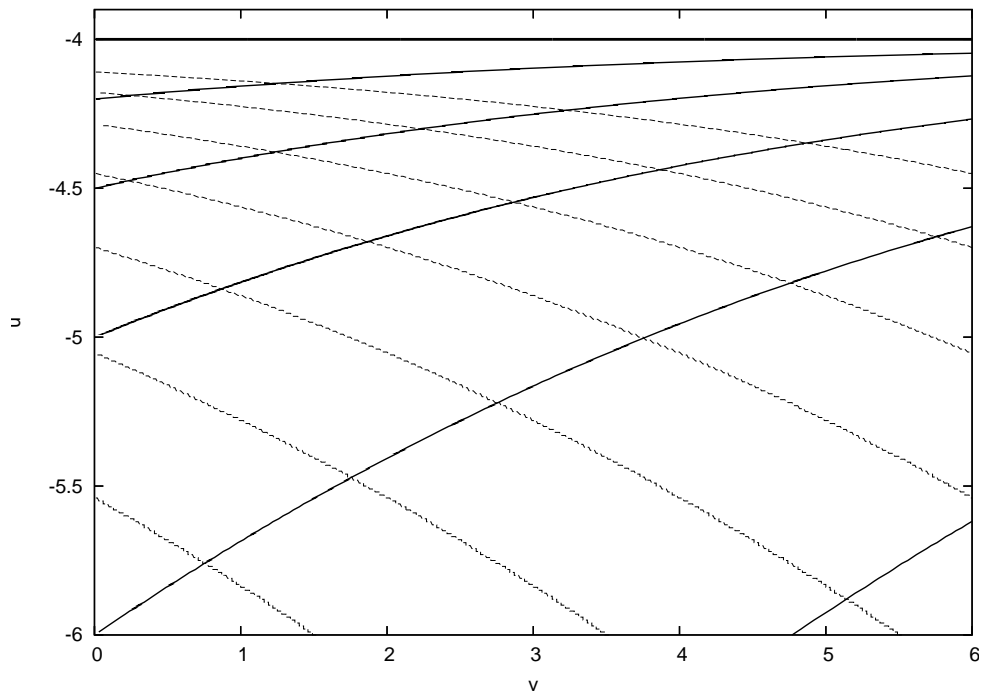


Figura 2.3: Curvas de  $r$  constante (linhas cheias) e  $t$  constante (linhas pontilhadas). O raio aumenta com  $|u|$  e  $v$  crescentes e o tempo aumenta com  $|u|$  e  $v$  decrescentes. Para  $r \rightarrow 2M$  e  $t \rightarrow \infty$ , as curvas tendem assintoticamente à reta  $u = -4M$ , que coincide com  $r = 2M$ .



[8], consideramos também um modelo linear

$$m(v) = \begin{cases} m_1 & v < v_1, \\ m_1(1 + \lambda cv) & v_1 < v < v_2, \\ m_2 = m_1(1 + \lambda cv_1) & v > v_2. \end{cases} \quad (2.47)$$

Na fig. 2.4 temos a estrutura causal correspondente à função de massa hiperbólica (2.46) obtida através do método semi-analítico. Para  $\kappa$  positivo e  $m_2 > m_1$  temos um buraco negro com massa inicial  $m_1$  recebendo um fluxo radial de radiação e aumentando sua massa continuamente até atingir  $m_2$ .

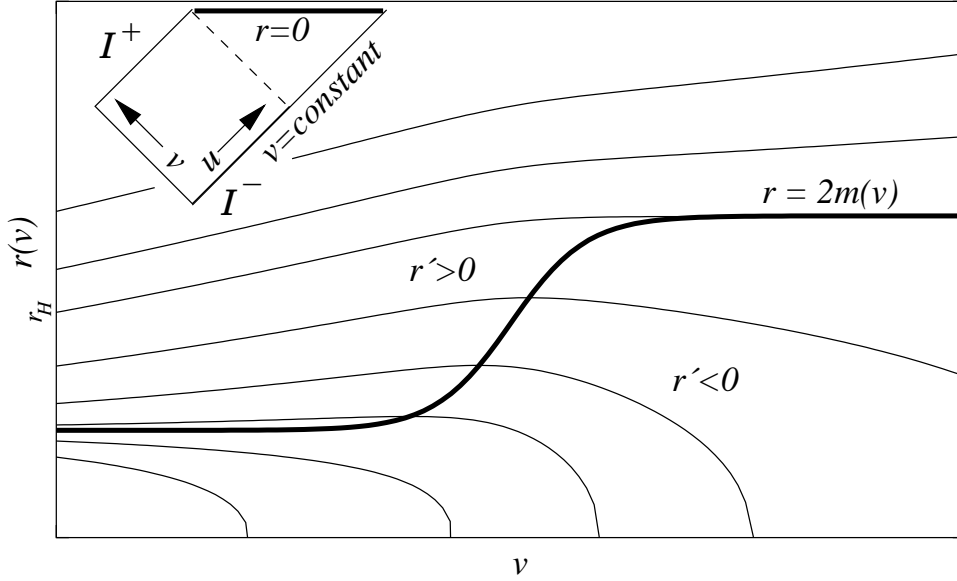


Figura 2.4: Curvas de  $u$  constante para a solução da eq. (2.26) com a função de massa (2.46), com  $m_2 > m_1$  e  $\kappa > 0$ . Todas as soluções na região abaixo da linha  $r = 2m(v)$  (horizonte aparente) possuem  $r' < 0$ . Toda solução que penetrar nesta região atingirá a singularidade  $r = 0$  em um tempo finito. Soluções confinadas à região  $r' > 0$  sempre escaparão da singularidade e atingirão  $I^+$ . Neste caso existe um horizonte de eventos (linha pontilhada no diagrama conforme apresentado) próximo à solução  $r_H(v)$ .

Devemos notar que o modelo linear, para o qual é possível obter explicitamente uma coordenada tartaruga generalizada, dificilmente poderia corresponder a uma situação física realista. A função de massa (2.47) é de classe  $C^0$ , implicando a existência de cascas infinitesimais de distribuição de matéria em  $v = v_1$  e  $v = v_2$ , onde o tensor de energia-momento é descontínuo,

$$T_{vv} = \begin{cases} 0 & v < v_1, \\ \frac{m_1 \lambda}{4\pi r^2} & v_1 < v < v_2, \\ 0 & v > v_2. \end{cases} \quad (2.48)$$

A interpretação destas estruturas não é clara, e em nossos resultados veremos como o

comportamento dos MQN's é afetado por esta característica.

## 2.3 Perturbações e MQN's da métrica de Vaidya

As equações para perturbações escalares e eletromagnéticas podem ser escritas como [6, 20, 21, 22] (ver demonstração nos Apêndices A e B)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} + V(u, v) f(u, v) \psi = 0, \quad (2.49)$$

onde o potencial  $V(u, v)$  é dado por

$$V(u, v) = \frac{\ell(\ell + 1)}{2r^2(u, v)} + \sigma \frac{m(v)}{r^3(u, v)}, \quad (2.50)$$

onde  $\sigma = 1$  e  $\sigma = 0$  correspondem, respectivamente, ao potencial para perturbações escalares e eletromagnéticas ( $\sigma = 1 - s^2$ , onde  $s$  é o spin da perturbação). Para uma dada função de massa  $m(v)$ , é necessário primeiro obter as funções  $f(u, v)$  e  $r(u, v)$  através do método semi-analítico de [14], para então resolver a equação (2.49) com o algoritmo de integração característica de segunda ordem proposto em [23].

As condições iniciais do problema são especificadas nas duas superfícies nulas  $u = u_0$  e  $v = v_0$  como

$$\psi(u = u_0, v) = \exp \left[ -\frac{(v - v_c)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (2.51)$$

$$\psi(u, v = v_0) = 0. \quad (2.52)$$

A eq.(2.49) é integrada numericamente com a discretização

$$\Psi(N) = \Psi(W) + \Psi(E) - \Psi(S) - \Delta u \Delta v V(X) \frac{\Psi(W) + \Psi(E)}{2} + O(\Delta^4), \quad (2.53)$$

onde usamos as seguintes definições para os pontos  $X, N, S, E$  e  $W$ :  $X = (u + \Delta u/2, v + \Delta v/2)$ ,  $N = (u + \Delta u, v + \Delta v)$ ,  $W = (u + \Delta u, v)$ ,  $E = (u, v + \Delta v)$  e  $S = (u, v)$ . Na figura 2.5 temos uma representação da grade de integração utilizada. Devemos notar que uma mudança de coordenadas se faz necessária para a integração numérica, para limitarmos de maneira eficiente a região de integração à região externa ao horizonte de eventos (dependente do tempo) do buraco negro. Para tanto, definimos uma nova variável  $U$

$$\frac{U}{2} \equiv \frac{u}{2} - 2m_{ass} \ln \left( -\frac{u}{2} - 2m_{ass} \right), \quad (2.54)$$

em termos da massa assintótica definida na eq. (2.45), de modo que a integração numérica é realizada na grade  $U \times v$ . Como resultado, a variável  $U$  da grade pode assumir valores de  $+\infty$  a  $-\infty$ , sem que o horizonte de eventos do buraco negro seja ultrapassado. Em outras palavras, restringimos o nosso espaço de integração para  $r(u, v)$  estritamente maior do que  $r_{HE} = r(\bar{u}, v)$ , ou seja,  $u < \bar{u} = -4m_{ass}$ . Durante a integração numérica, utilizamos um algoritmo baseado no método de Newton para se obter raízes de funções para inverter a eq. (2.54) e obter  $u(U)$  em cada ponto da grade  $U \times v$ . Este artifício é similar à definição da coordenada tartaruga  $r_*$  normalmente utilizada no tratamento de perturbações na métrica de Schwarzschild. A forma de (2.54) é inspirada pelo desenvolvimento analítico do potencial  $V(u, v)$  para perturbações escalares na métrica de Schwarzschild no sistema de coordenadas 2.39, no qual a mudança de coordenadas (2.54) é necessária para se obter a equação de perturbação correspondente à eq. (2.49) nas coordenadas usuais.

Após a integração da eq. (2.49) ser completada, extraímos os valores  $\psi(U_{max}, v)$ . Para  $U_{max}$  suficientemente grande, temos uma boa aproximação para o campo no horizonte de eventos. Na figura 2.6 temos um exemplo típico dos resultados obtidos para uma função de massa hiperbólica em comparação com o caso de um buraco negro de Schwarzschild. Nas figuras 2.7 e 2.8 temos mais alguns exemplos típicos, comparando a métrica de Schwarzschild com resultados obtidos para funções de massa lineares. Resultados similares são obtidos se extrairmos os dados em outros valores de  $U$ . Todas as análises apresentadas aqui correspondem a dados extraídos no horizonte  $U_{max}$ , apenas por uma questão de conveniência numérica. Como os MQN's correspondem aos auto-estados de uma equação de Schrödinger efetiva [6], os auto-valores complexos associados podem ser lidos em qualquer ponto, uma vez que o regime assintótico seja obtido.

As figuras 2.9 e 2.10 apresentam as partes real  $\omega_R$  e imaginária  $\omega_I$  das perturbações em função de  $v$ . Estes resultados correspondem a funções de massa decrescentes e crescentes, respectivamente, e são típicos para todos os valores de  $\ell$ , todos os tipos de perturbação e diferentes condições iniciais. Os valores da parte imaginária são obtidos tipicamente com uma precisão menor, apesar de exibirem o mesmo tipo de comportamento, o que pode ser visto nas irregularidades de  $\omega_I$  apresentadas na figura (2.10). Nas figuras 2.11 e 2.12 temos mais alguns exemplos típicos obtidos, para diferentes funções de massa e valores de  $\ell$ .

Esta menor precisão não é resultado de erros numéricos no procedimento de integração. De fato, as diferenças entre as freqüências obtidas com passos de integração  $\Delta u = \Delta v = 0.2, 0.1$  e  $0.5$  são menores do que o tamanho dos pontos utilizados nas figuras 2.9 e 2.10. Acreditamos que as irregularidade em  $\omega_I$  se devem ao modo como as freqüências são obtidas, fazendo-se um ajuste de mínimos quadrados localmente, em intervalos com poucos ciclos de oscilação. As freqüências de oscilação  $\omega_R$  podem ser determinadas facilmente com poucos ciclos, enquanto que para o termo de decaimento  $\omega_I$  ser obtido com precisão equivalente são necessários mais ciclos. Porém, tomando mais ciclos a tendência seria

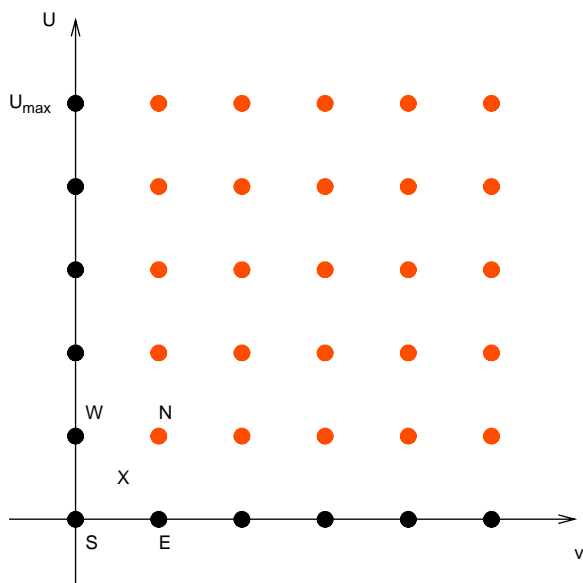


Figura 2.5: Diagrama da grade utilizada para a integração numérica da eq. (2.49) . Os pontos pretos indicam os pontos onde o valor do campo é conhecido, a partir das condições iniciais (2.51) e (2.52). Os pontos vermelhos indicam os pontos onde o campo deve ser obtido com o algoritmo (2.53). Os resultados são extraídos na linha  $U = U_{max}$ .

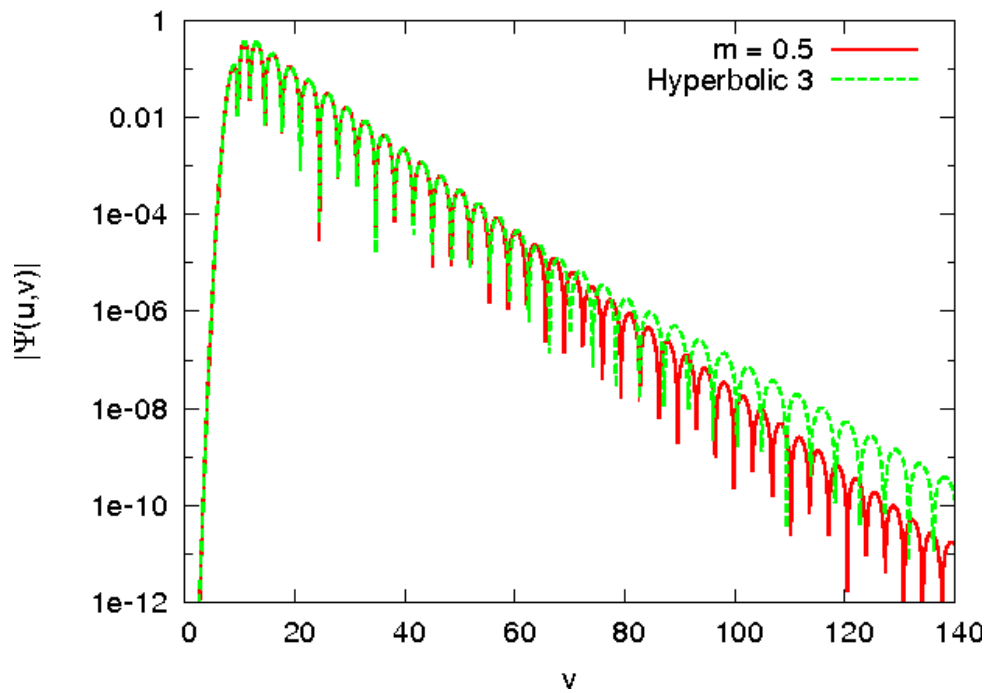


Figura 2.6: Valores da perturbação eletromagnética  $\psi(u_{max}, v)$  com  $\ell = 2$  para um buraco negro de Schwarzschild com massa  $m = 0.5$  e para a métrica de Vaidya com a função de massa hiperbólica (2.46), onde  $v_1 = 75$ ,  $\kappa = 0.08$ ,  $m_1 = 0.5$ , e  $m_2 = 0.65$  (Hyperbolic 3). Pode-se ver claramente, no caso dependente do tempo, a desaceleração da frequência de oscilação e do decaimento a partir de  $v_1$ .

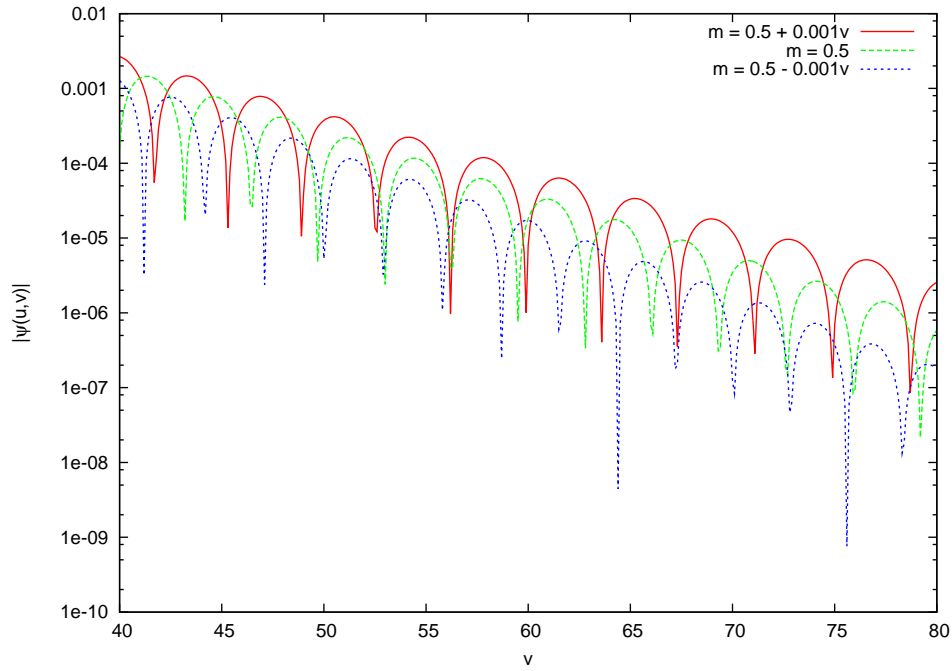


Figura 2.7: Perturbação escalar com  $\ell = 2$  para um buraco negro de Schwarzschild e a métrica de Vaidya com massa linear crescente e decrescente.

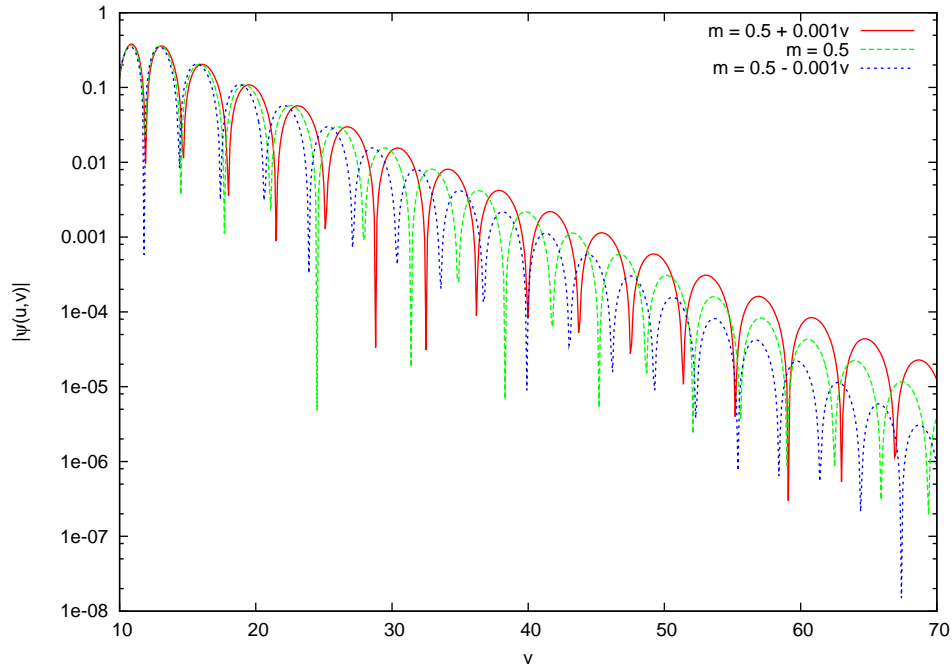


Figura 2.8: Perturbação eletromagnética com  $\ell = 2$  para um buraco negro de Schwarzschild e a métrica de Vaidya com massa linear crescente e decrescente.

fazer uma média temporal dos valores, ao invés de obter um resultado mais próximo do valor instantâneo. Por isso, escolhemos tomar o menor número possível de ciclos para o ajuste, apesar de isso causar irregularidades em  $\omega_I$ .

Analisemos mais detalhadamente, por exemplo, o caso de  $m(v)$  decrescente (figura 2.9). Para os casos com variação acentuada (Linear 2 e Hyperbolic 2), pode-se ver claramente o efeito inercial em  $\omega_R$  próximo de  $v = 75$ . A função  $\omega_R(v)$  não se comporta como  $m^{-1}(v)$ , como seria de se esperar para um regime estacionário adiabático, como realmente ocorre para o caso Hyperbolic 1. Após a fase de crescimento acelerado,  $\omega_R$  se comporta como se tivesse uma inércia intrínseca, atingindo um valor máximo que é maior do que  $\omega_R(\infty)$ , implicando em um relaxamento correspondente à região com  $\omega'_R(v) < 0$  para  $v > 75$ .

Analisando ainda a figura 2.9, pode-se notar também que, para o caso com variação acentuada, não é possível detectar diferenças entre os casos com função de massa suave e tipo  $C^0$ . No entanto, vemos que o caso linear com variação mais lenta (Linear 1) exibe alguns efeitos inerciais próximos a  $v = v_2$ . Em todas as outras regiões as frequências seguem um comportamento proporcional a  $m^{-1}(v)$ . Não foram detectadas diferenças apreciáveis entre os transientes das perturbações escalares e eletromagnéticas. Como já foi mencionado anteriormente este comportamento inercial transiente não pôde ser detectado pela análise de MQN's realizada em coordenadas radiativas apresentada em [8]. Conclusões análogas se aplicam também aos casos com massa crescente (figura 2.10).

A partir de nossas simulações numéricas podemos inferir qual a situação correspondente ao aparecimento do comportamento inercial não estacionário dos MQN's. O desvio do regime estacionário é medido pela segunda derivada da função de massa,  $m''(v)$ , que mede a “velocidade” com a qual a massa varia. Heuristicamente, podemos esperar o aparecimento do comportamento não estacionário quando  $|1/m''|$  (que possui a mesma dimensão que o tempo no sistema de unidades geométricas utilizado) for menor do que um certo tempo característico de relaxamento do sistema, impedindo que o sistema relaxe e entre em um regime adiabático. Existem dois tempos característicos associados com os MQN's de buracos negros: o período de oscilação  $2\pi/\omega_R$  e o tempo de decaimento  $|1/\omega_I|$ . O aparecimento do comportamento inercial está associado ao tempo de decaimento. Verificamos desvios apreciáveis do regime estacionário sempre que  $m''(v)$  for da mesma ordem (ou maior) do que  $|\omega_I|$ , como mostraremos a seguir

Podemos calcular, por exemplo, a razão  $|m''_{\max}/\omega_I^{\text{final}}|$  para os dados Hyperbolic 4 da figura 2.10 (correspondentes ao comportamento inercial apresentado na figura 2.10). Para a função de massa (2.46), temos

$$m''(v) = (m_2 - m_1)\kappa^2 \tanh \kappa(v - v_1)[1 - \tanh^2 \kappa(v - v_1)], \quad (2.55)$$

que possui um máximo para

$$\tanh \kappa(v - v_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (2.56)$$

de modo que

$$m''(v)_{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}(m_2 - m_1)\kappa^2. \quad (2.57)$$

Para os parâmetros de Hyperbolic 4,  $v_1 = 75$  e  $\kappa = 0.8$ , e  $\omega_I^{\text{final}} \approx -0.145$  (lido do gráfico), temos  $|m''_{\text{max}}/\omega_I^{\text{final}}| \approx 25\%$ . Para os dados Hyperbolic 3 da figura 2.10 (correspondentes ao comportamento estacionário apresentado na figura), temos  $v_1 = 75$  e  $\kappa = 0.08$ , portanto a razão será 100 vezes menor.

Estimar a magnitude do comportamento inercial a partir de nossas simulações sem um modelo analítico aproximado parece ser bem mais difícil. Mais uma vez de maneira heurística, podemos esperar que a magnitude do efeito seja proporcional a  $|m''|\tau$ , onde  $\tau$  é o intervalo de tempo durante o qual  $|m''| \gtrsim |\omega_I|$ .

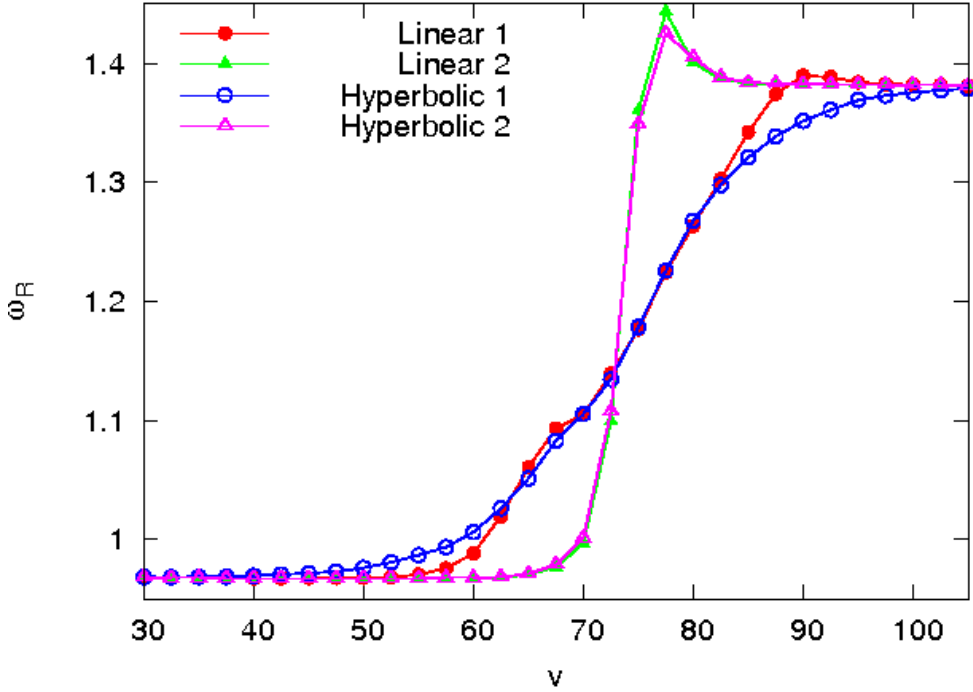


Figura 2.9: A parte real ( $\omega_R$ ) da frequência de perturbações escalares com  $\ell = 2$  em função de  $v$  para funções de massa linear e hiperbólica decrescentes. Para todos os casos,  $m_1 = 0.5$  e  $m_2 = 0.35$ . Linear 1:  $v_1 = 60$ ,  $v_2 = 90$ . Linear 2:  $v_1 = 74.5$ ,  $v_2 = 75.5$ . Hyperbolic 1:  $v_1 = 75$ ,  $\kappa = 0.08$ . Hyperbolic 2:  $v_1 = 75$ ,  $\kappa = 0.8$ .

Todas as situações consideradas aqui envolvem funções de massa correspondentes a um buraco negro com massa inicial  $m_1$  que passa por um processo de acreção ou diminuição de massa que termina com uma massa  $m_2$ . Esta escolha “assintoticamente Schwarzschild”



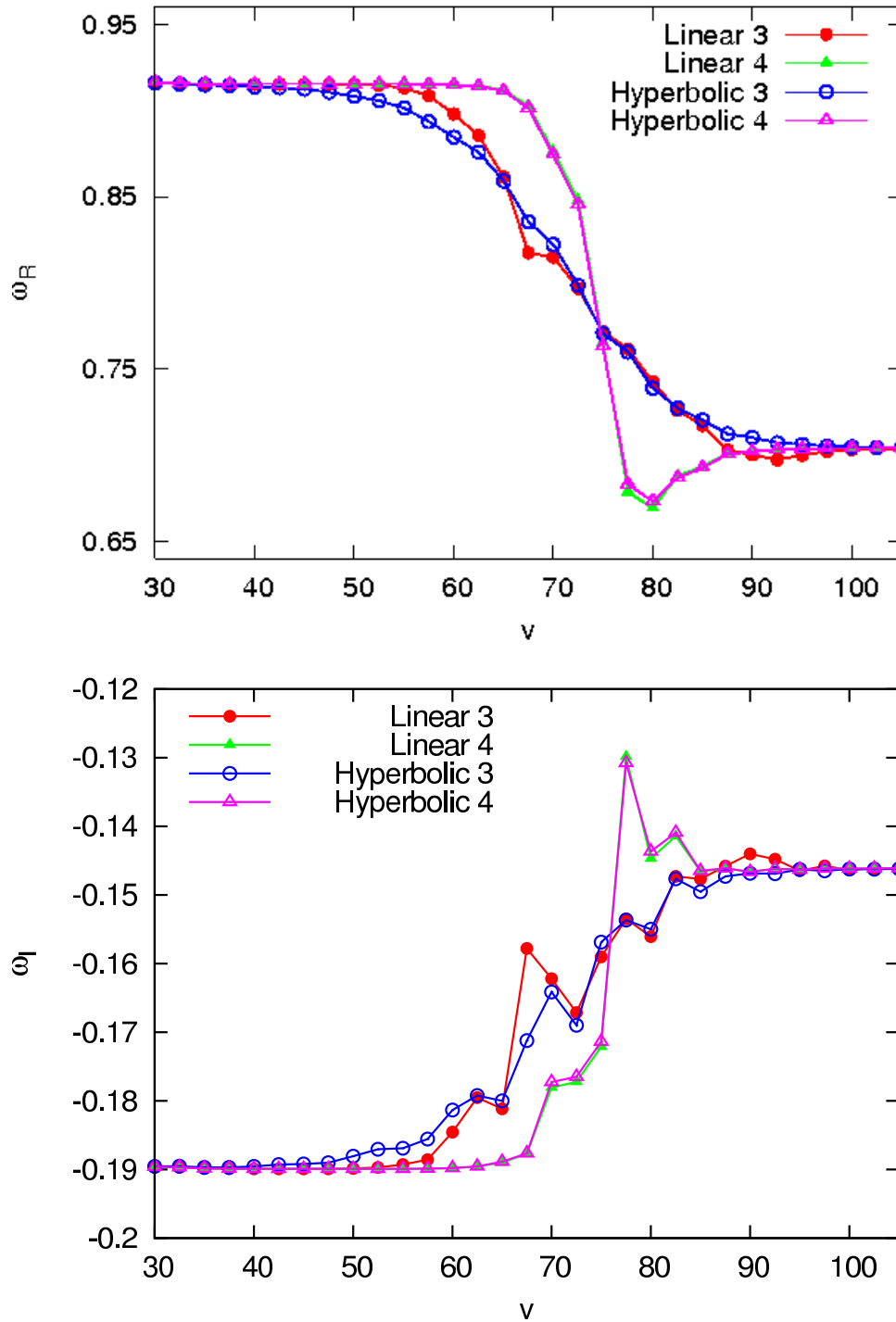


Figura 2.10: As partes real ( $\omega_R$ ) e imaginária ( $\omega_I$ ) da frequência para perturbações eletromagnéticas com  $\ell = 2$  em função de  $v$  para funções de massa linear e hiperbólica crescentes. Para todos os casos,  $m_1 = 0.5$  e  $m_2 = 0.65$ . Linear 3:  $v_1 = 60$ ,  $v_2 = 90$ . Linear 4:  $v_1 = 74.5$ ,  $v_2 = 75.5$ . Hyperbolic 3:  $v_1 = 75$ ,  $\kappa = 0.08$ . Hyperbolic 4:  $v_1 = 75$ ,  $\kappa = 0.8$ .

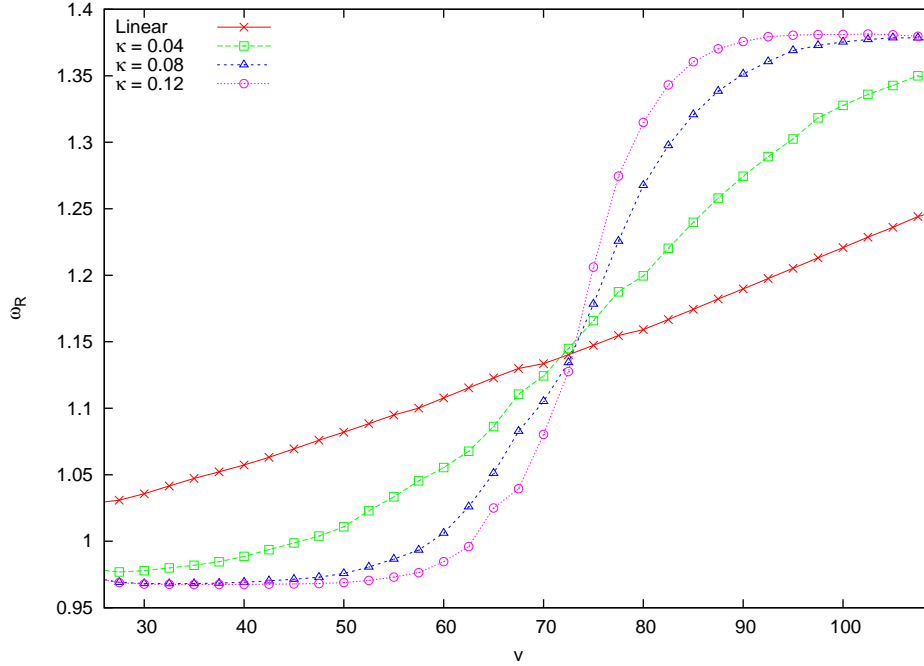


Figura 2.11: Evolução de  $\omega_R$  para perturbações escalares com  $\ell = 2$  e diferentes funções de massa hiperbólicas, em comparação com uma função de massa linear.

nos garante que o espaço-tempo possui a estrutura causal de um buraco negro usual para  $v \rightarrow \pm\infty$  e, conseqüentemente, que os MQN's podem ser definidos da maneira usual e as frequências correspondentes podem ser apropriadamente comparadas. Em todos os casos considerados, os transientes iniciais se dissipam e  $\omega(v)$  passa a ser proporcional a  $m^{-1}(v)$  bastante rapidamente, confirmando a solidez da análise numérica de MQN's. A integração em coordenadas nulas se mostrou muito mais eficiente do que a integração em coordenadas radiativas [8], permitindo-nos atingir a precisão necessária para verificar o comportamento não estacionário com recursos computacionais bastante modestos.

Uma extensão interessante deste trabalho seria a análise dos MQN's rapidamente amortecidos ( $n > 0$ ). Para estes modos superiores a razão  $|\omega_I/\omega_R|$  é sempre maior do que para o MQN fundamental com  $n = 0$  considerado aqui, incluindo, para  $n$  suficientemente grande, casos em que  $|\omega_I/\omega_R| > 1$ . Portanto, seria interessante verificar se o comportamento não estacionário poderia ser atenuado de alguma maneira para  $n > 0$ . A análise numérica apresentada aqui não pode ser estendida diretamente para o caso  $n > 0$ , uma vez que não é possível identificar estas frequências com precisão suficiente. Acreditamos que este resultado poderia ser obtido, em princípio, através do método WKB, que já foi utilizado com sucesso para a obtenção dos modos superiores de perturbações do buraco negro de Schwarzschild [24], por exemplo.

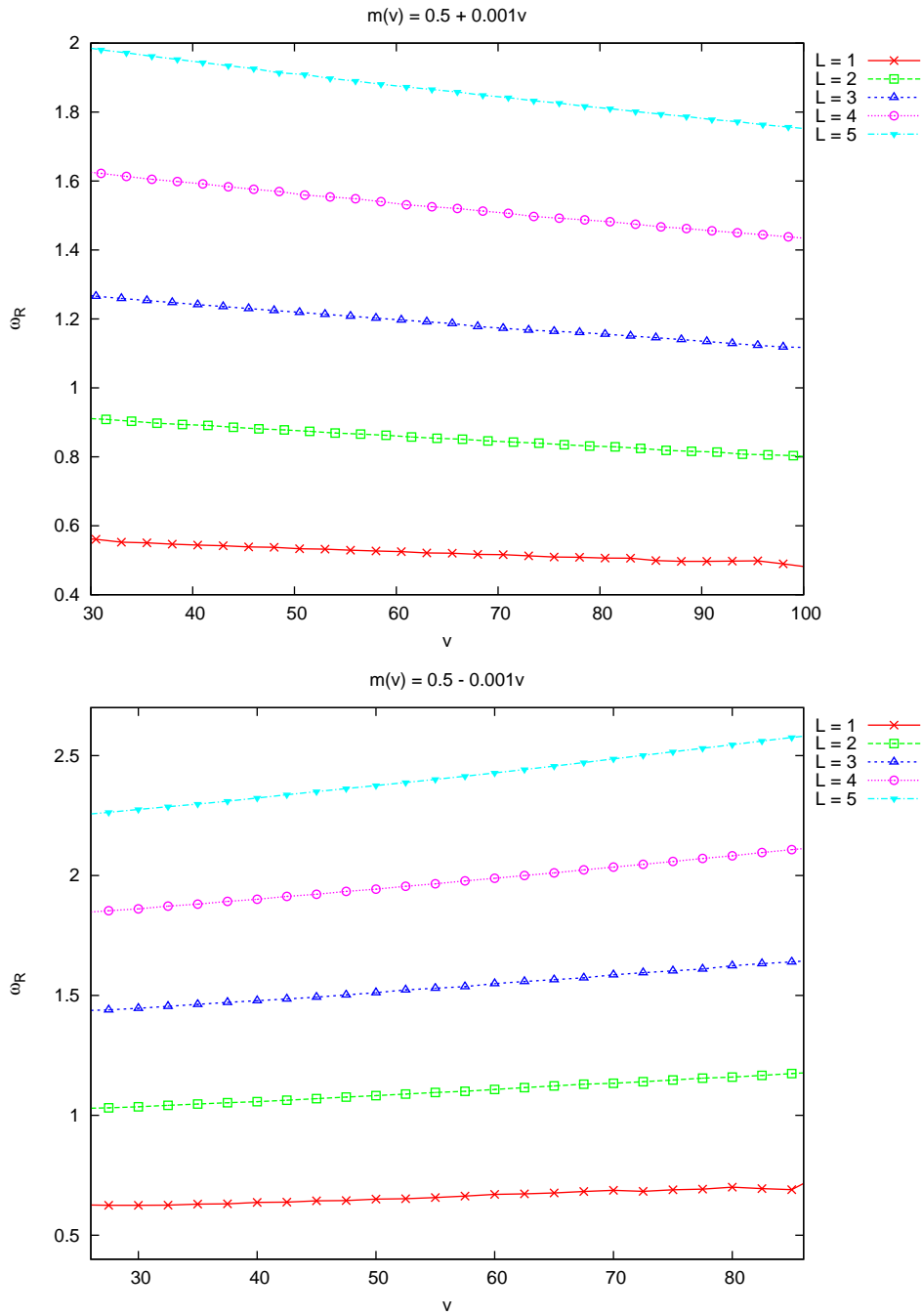


Figura 2.12: Evolução de  $\omega_R$  para perturbações escalares para diferentes valores de  $\ell$  e funções de massa lineares crescente (figura superior) e decrescente (figura inferior).

Embora as configurações astrofísicas típicas de acreção de matéria em buracos negros dificilmente mantenham a simetria esférica intacta durante os estágios intermediários, nossos resultados podem ser utilizados como uma primeira aproximação para o espalhamento de campos fracos por estas fontes. É fato bem conhecido que, após as fases transientes, o sistema deve se acomodar em uma configuração esfericamente simétrica estacionária. Entretanto, não devemos esquecer que o comportamento inercial não estacionário das frequências dos MQN's deve surgir sempre que  $|m''| \gtrsim |\omega_I|$ . Isto torna a análise de situações com variações rápidas uma tarefa delicada.

A evaporação por radiação de Hawking [25] poderia ser considerada como um processo físico real onde a massa do buraco negro decresce e a simetria esférica é mantida. Nosso método pode ser aplicado a esse caso (ver capítulo 3).

Finalmente, notamos que as oscilações amortecidas correspondem a uma fase intermediária do espalhamento de ondas por buracos negros assintoticamente planos. A última fase corresponde a um decaimento que segue uma lei de potência. Nos problemas considerados aqui, o decaimento em lei de potência aparece tipicamente para valores grandes de  $v$ , nos quais os MQN's já atingiram a fase estacionária, sem vestígios dos transientes: a massa do buraco negro atingiu o seu valor final constante e o comportamento dos MQN's é mais uma vez estacionário, ou seja, tudo se passa como se tivéssemos um buraco negro de Schwarzschild. Não detectamos, neste caso, qualquer influência da dependência temporal do potencial na fase final de decaimento em lei de potência. Este resultado é consequência da nossa escolha de funções de massa “assintoticamente Schwarzschild”.

# Capítulo 3

## Caracterização de Mini Buracos Negros através de seus Modos Quasi-Normais

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos para os modos quasi-normais de um modelo utilizado para descrever mini buracos negros. Na seção 3.1 apresentamos uma curta introdução ao tópico de mini buracos negros produzidos em aceleradores de partículas, e algumas referências são sugeridas para o leitor interessado em obter mais detalhes sobre o assunto. Na seção 3.2 temos a apresentação do modelo utilizado para descrever os mini buracos negros, baseado no tratamento da métrica de Vaidya em  $n$  dimensões apresentado em [26], e na seção 3.3 temos os resultados obtidos [7]. Nossos resultados implicam a possibilidade de se obter os parâmetros da solução, como a massa inicial e o número de dimensões extras, através de seus MQN's.

### 3.1 Mini buracos negros em aceleradores de partículas

Alguns anos atrás, em 1998, surgiu uma nova proposta para se resolver o chamado *Problema da Hierarquia*. Este problema consiste em explicar por que a escala característica da gravidade,  $M_P = \sqrt{\hbar c/G} \sim 10^{19}$  GeV, é 16 ordens de grandeza maior do que a escala eletro-frac,  $M_{EW} \sim 1$  TeV. Segundo esta nova proposta, o problema poderia ser resolvido supondo-se a existência de dimensões espaciais extras em nosso universo [27, 28, 29].

Vamos apresentar aqui resumidamente o argumento proposto. Existe uma diferença importante entre as duas escalas de energia fundamentais,  $M_{EW}$  e  $M_P$ . Enquanto as inte-

rações eletro-fracas já foram testadas experimentalmente até distâncias de  $\sim M_{EW}^{-1}$ , as forças gravitacionais ainda estão muito longe de serem testadas em distâncias de  $\sim M_P^{-1}$ . De fato, a gravidade só foi medida experimentalmente até o limite de  $\sim 1$  cm. Portanto, quando interpretamos  $M_P$  como uma escala de energia fundamental, estamos supondo que a gravidade se mantém inalterada ao longo das 33 ordens de grandeza entre  $\sim 1$  cm até a distância de Planck  $\ell_P \sim 10^{-33}$  cm.

Uma vez que a natureza fundamental da escala eletro-fracas é uma certeza experimental, a idéia proposta é:  $M_{EW}$  é a única escala de curta distância fundamental da natureza, estabelecendo inclusive a escala da interação gravitacional. Como conciliar este quadro com a gravitação usual? Uma idéia muito simples é supor que existem  $d$  dimensões espaciais compactas extras de raio  $\sim R$ . A escala de Planck  $M_{P(4+d)}$  desta teoria  $(4+d)$ -dimensional é tomada como sendo  $\sim M_{EW}$ . Desta forma, duas massas de teste  $m_1$  e  $m_2$  separadas por uma distância  $r \ll R$  sentirão um potencial gravitacional dado pela lei de Gauss em  $(4+d)$ -dimensões,

$$V(r) \sim \frac{m_1 m_2}{M_{P(4+d)}^{d+2}} \frac{1}{r^{d+1}}. \quad (3.1)$$

Por outro lado, se as massas estiverem separadas por uma distância  $r \gg R$ , as suas linhas de fluxo gravitacional não conseguirão mais penetrar nas dimensões extras, e o potencial usual é obtido,

$$V(r) \sim \frac{m_1 m_2}{M_{P(4+d)}^{d+2} R^d} \frac{1}{r}, \quad (3.2)$$

de modo que a nossa massa de Planck 4-dimensional efetiva  $M_{P(4)}$  é

$$M_{P(4)}^2 = M_{P(4+d)}^{2+d} R^d. \quad (3.3)$$

Substituindo  $M_{P(4+d)} \sim M_{EW}$ , o valor de  $R$  que reproduz a  $M_{P(4)}$  observada é

$$R \sim 10^{\frac{30}{d}-17} \text{cm} \times \left( \frac{1 \text{TeV}}{M_{EW}} \right)^{1+\frac{2}{d}}. \quad (3.4)$$

Desta maneira, as interações gravitacionais poderiam ter uma dependência em  $r$  totalmente diferente do conhecido em escalas menores do que 1 mm. Por outro lado, as forças eletromagnéticas, fracas e fortes também seriam sensíveis à presença destas dimensões extras. E as suas interações seriam modificadas além de qualquer limite fenomenológico aceitável, para dimensões extras da ordem de 1 mm. Esta dificuldade foi solucionada supondo-se que toda a matéria comum, sujeita à ação das forças eletromagnéticas, fracas e fortes, está limitada a viver em uma hipersuperfície em  $(3+1)$  dimensões, ou 3-brana.

Esta 3-brana, que representa o nosso mundo em 4 dimensões, está mergulhada em um espaço com mais dimensões, chamado *bulk*, no qual apenas a gravidade se propaga. A brana deve ter uma “espessura” de  $\sim M_{EW}^{-1}$  nas dimensões extras.

Se realmente existirem, as dimensões extras mudarão muitas de nossas concepções a respeito do universo. Teorias já estabelecidas deverão ser estendidas ou modificadas para acomodar os resultados devidos às dimensões extras. Da mesma forma, a física e as propriedades dos buracos negros sofrerão modificações em uma teoria com dimensões extras. Como no caso 4-dimensional, é natural pensar que um buraco negro será formado se a matéria limitada à brana sofrer um colapso gravitacional. Os buracos negros assim formados estão centrados na brana, e se estendem ao longo das dimensões extras. Se o horizonte do buraco negro for muito maior do que o tamanho  $R$  das dimensões extras,  $r_h \gg R$ , o buraco negro produzido será efetivamente um objeto em 4 dimensões. Entretanto, se  $r_h \ll R$ , então este pequeno buraco negro será um objeto com mais dimensões, totalmente submerso no espaço-tempo com dimensões extras, com propriedades distintas daquelas de um buraco negro usual.

Estes novos modelos propostos com dimensões extras prevêm a produção de mini buracos negros em colisões de partículas com energia suficientemente altas, pois argumentos teóricos mostram que a presença de dimensões extras aumenta a seção de choque de produção destes objetos [30]. Temos, como consequência, a previsão de criação de mini buracos negros em interações de partículas elementares a altas energias, em aceleradores de partículas ou raios cósmicos.

Espera-se que estes eventos sejam obtidos no *Large Hadron Collider* (LHC) no Cern no futuro próximo [31]. Consideremos dois partons com energia de centro de massa igual a  $M_{BN}$  se movendo em direções opostas. Argumentos semi-clássicos sugerem que, se o parâmetro de impacto for menor do que o raio ( $n$ -dimensional) de Schwarzschild, um buraco negro com massa  $M_{BN}$  será formado. As consequências fenomenológicas e observacionais da existência destes objetos têm sido discutidas intensamente (ver, por exemplo, [32, 30, 33]). Supõe-se que estes mini buracos negros  $n$ -dimensionais sejam fortemente interagentes. Uma vez formados e após possíveis estágios transientes, a radiação de Hawking [25] deve ser predominante na sua evolução.

Hawking mostrou que um buraco negro (4-dimensional) deve emitir partículas como um corpo negro com uma temperatura  $T$  proporcional à sua gravidade superficial, que por sua vez é inversamente proporcional à massa  $M$  do buraco negro,

$$kT = \frac{M_P^2 c^2}{8\pi M(t)}. \quad (3.5)$$

Podemos utilizar um raciocínio semi-clássico para obter o tempo de vida deste buraco negro. O fluxo de energia emitido pelo buraco negro, por unidade de área, é dado pela lei de Stefan-Boltzmann

$$\phi = \sigma T^4, \quad (3.6)$$

de forma que a potência total irradiada será dada por

$$c^2 \frac{dM}{dt} = A\sigma T^4, \quad (3.7)$$

onde

$$A = 4\pi R_S^2, \quad R_S = \frac{2GM(t)}{c^2}. \quad (3.8)$$

Portanto, temos, finalmente,

$$\frac{d}{dt} \frac{M}{M_P} = -\frac{a}{t_P} \left( \frac{M}{M_P} \right)^{-2}, \quad (3.9)$$

onde  $t_P = \hbar/M_P c^2$  é o tempo de Planck e a constante  $a$  é dada por

$$a = \frac{\sigma \hbar^3 c^2}{256\pi^3 k^4} = \frac{1}{15360\pi}. \quad (3.10)$$

A eq. (3.9) pode ser integrada analiticamente, e o tempo de vida  $t_0$  do buraco negro (em 4 dimensões) com massa inicial  $M_0$  é

$$t_0 = \frac{1}{3} \left( \frac{M_0}{M_P} \right)^3 \frac{t_P}{a}. \quad (3.11)$$

Para mini buracos negros estudados no âmbito de teorias com dimensões extras, a sua potência irradiada e, conseqüentemente, a sua taxa de diminuição de massa devem ser regidas pela lei de Stefan-Boltzmann  $n$ -dimensional [34], de onde temos, de maneira similar ao exposto acima para um buraco negro em 4 dimensões,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{M_P} \right) = -\frac{a_n}{t_P} \left( \frac{m}{M_P} \right)^{-\frac{2}{n-3}}, \quad (3.12)$$

onde a constante  $a_n$  é proporcional à constante de Stefan-Boltzmann  $n$ -dimensional  $\sigma_n$  [34], O valor de  $\sigma_n$  depende dos canais de emissão disponíveis para a radiação de Hawking, dos números de graus de liberdade para as diferentes espécies de partículas emitidas e dos fatores de emissão do buraco negro. No entanto, supõe-se tipicamente  $a_n \approx 10^{-3}$  [35, 36]. A eq. (3.12) pode ser integrada facilmente,

$$m(t) = m_0 \left( 1 - \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{n-3}{n-1}}, \quad (3.13)$$

$0 \leq t \leq t_0$ , onde o tempo de vida  $t_0$  de um buraco negro com massa inicial  $m_0$  é dado por

$$t_0 = \frac{n-3}{n-1} \left( \frac{m_0}{M_P} \right)^{\frac{n-1}{n-3}} \frac{t_P}{a_n}. \quad (3.14)$$



Seguindo Arkani-Hamed *et al* [27, 28, 29], a fenomenologia destes mini buracos negros pode ser estudada tomando-se a escala de Planck de modo que  $M_P \approx 1\text{TeV}$ .

É importante lembrar que a eq. (3.12) não é válida nos estágios finais da evaporação do buraco negro, quando a temperatura do buraco negro aumenta e o aparecimento de novos canais de emissão para a radiação de Hawking podem induzir variações no valor da constante  $a_n$ . Neste ponto, é possível que até mesmo a derivação adiabática usual da radiação de Hawking não seja mais válida. Estes pontos estão fora do escopo deste trabalho. Nós supomos aqui que o buraco negro evapora seguindo (3.13) para  $0 \leq t \leq t_0$ . Entretanto, para a nossa análise numérica se faz necessária a introdução de uma regularização da função de massa nos instantes finais do processo de evaporação. Porém, nossos resultados principais não dependem dos detalhes finais da evaporação.

## 3.2 Modelo utilizado

Consideramos aqui os MQN's associados a um buraco negro  $n$ -dimensional cuja massa decai de acordo com (3.13). Como os canais de emissão preferenciais para a radiação de Hawking correspondem a campos sem massa, utilizamos para modelar estes mini buracos negros a métrica de Vaidya  $n$ -dimensional [37] em coordenadas de cone de luz [26]. A métrica de Vaidya (descrita na seção 2.1 para o caso  $n = 4$ ), corresponde a uma solução das equações de Einstein com simétrica esférica na presença de um fluxo radial de radiação não polarizada,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} h(u, v) k_\mu k_\nu, \quad (3.15)$$

onde  $k_\mu$  é um vetor radial nulo. Em coordenadas de cone de luz  $n$ -dimensionais  $(u, v, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$  a métrica possui a forma

$$ds^2 = -2f(u, v) du dv + r^2(u, v) d\Omega_{n-2}^2, \quad (3.16)$$

onde  $d\Omega_{n-2}^2$  é a métrica da esfera  $(n - 2)$ -dimensional com raio unitário, mapeada pelas coordenadas angulares  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2}$ ,

$$d\Omega_{n-2}^2 = \sum_{i=1}^{n-2} \left( \prod_{j=1}^{i-1} \sin^2 \theta_j \right) d\theta_i^2, \quad (3.17)$$

e  $f(u, v)$ ,  $r(u, v)$  e  $h(u, v)$  obedecem as seguintes equações [26]:

$$f(u, v) = 2B(v) \frac{\partial r(u, v)}{\partial u}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial r(u, v)}{\partial v} = -B(v) \left( 1 - \frac{2m(v)}{(n-3)r^{n-3}} \right), \quad (3.19)$$

$$h(u, v) = -2 \left( \frac{n-2}{n-3} \right) \frac{B(v)m'(v)}{r^{n-2}}, \quad (3.20)$$

onde  $m(v)$  representa a massa da solução  $n$ -dimensional, sendo definida em termos das componentes do tensor de Riemann como [26]

$$m = \frac{n-3}{2} r^{n-3} R_{\theta_1 \theta_k \theta_1}^{\theta_k}, \quad (3.21)$$

com  $k > 1$ . Todos os resultados para a métrica (3.16) são uma generalização dos resultados da seção 2.1. Adotamos o sistema de unidades naturais ( $t_P = M_P = \ell_P = 1$ ).

O horizonte aparente de um buraco negro  $n$ -dimensional descrito pelas equações (3.16)-(3.19) é dado pela condição de que a derivada de  $r$  em relação a  $v$  dada na eq. (3.19) se anule (ver fig. 2.4),

$$r_h(v) = \left( \frac{2m(v)}{n-3} \right)^{\frac{1}{n-3}}. \quad (3.22)$$

Nossa escolha para a função de massa  $m(v)$  é guiada pela solução (3.13). Porém, o estágio final da evaporação de um buraco negro é um ponto bastante sutil. Um buraco negro poderia evaporar até massa nula como descrito por (3.13) deixando para trás um espaço-tempo de Minkowski vazio (ou talvez até mesmo uma singularidade nua), ou poderia evaporar até atingir uma massa mínima, isto é, deixando um remanescente massivo. Para evitar estes problemas em nossa análise numérica, introduzimos uma regularização para o estágio final do processo de evaporação. Consideramos a função de massa

$$m(v) = \begin{cases} m_0 \left( 1 - \frac{v}{v_0} \right)^{\frac{n-3}{n-1}}, & 0 \leq v < v_1 < v_0, \\ A - B \tanh \kappa(v - v_1), & v > v_1, \end{cases} \quad (3.23)$$

com  $\kappa > 0$ . As constantes  $A$ ,  $B$  e  $\kappa$  são determinadas impondo-se condições para a continuidade de  $m(v)$  e sua primeira derivada em  $v = v_1$ ,

$$A = \left( 1 - \frac{v_1}{v_0} \right)^{\frac{n-3}{n-1}}, \quad (3.24)$$

$$B = A - m_F, \quad (3.25)$$

$$\kappa = \frac{n-3}{n-1} \frac{m_0}{B} \left( 1 - \frac{v_1}{v_0} \right)^{-\frac{2}{n-1}}. \quad (3.26)$$

Claramente,  $A - B = m_F$  é a massa do remanescente final. A regularização só é efetiva nos instantes finais do processo de evaporação,  $(v_0 - v_1)/t_0 \ll 1$ , e  $m_F \ll 1\text{TeV}$ . Nossos resultados mostram que, durante a maior parte do processo de evaporação, o regime estacionário dos MQN's descrito na seção 2.3 se mantém, implicando um espectro de potências específico e talvez observável para as perturbações desses mini buracos negros.

### 3.3 Perturbações e resultados

Nós decomparamos um campo perturbativo genérico  $\phi$  como

$$\phi = \sum_{\ell m} r^{-\frac{n-2}{2}} \psi_\ell(u, v) Y_{\ell m}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}), \quad (3.27)$$

onde  $Y_{\ell m}$  são os harmônicos esféricos na esfera unitária  $(n-2)$ -dimensional [38], de forma que

$$\partial_{\Omega_{n-2}}^2 Y_{\ell m} = -\ell(\ell + n - 3) Y_{\ell m}, \quad (3.28)$$

onde  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ , e  $m$  é um conjunto de  $(n-3)$  inteiros  $(m_1, m_2, \dots, m_{n-3})$  que satisfazem  $\ell \geq m_{n-3} \geq m_2 \geq |m_1|$ . Utilizando (3.18) e (3.19), podemos, através de cálculos inteiramente análogos aos apresentados no Apêndice A para perturbações escalares na métrica de Vaidya em 4 dimensões, escrever a equação de Klein-Gordon para um campo  $\psi_\ell$  como

$$\frac{\partial^2 \psi_\ell}{\partial u \partial v} + f(u, v) V(u, v) \psi_\ell = 0, \quad (3.29)$$

onde

$$V(u, v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\ell(\ell + n - 3)}{r^2} + \frac{(n-2)(n-4)}{4r^2} + \frac{(n-2)^2 m(v)}{2r^{n-1} (n-3)} \right). \quad (3.30)$$

Este resultado não é inesperado. As equações de perturbação para o buraco negro de Schwarzschild em  $n$  dimensões são conhecidas na literatura. Além das perturbações escalares e eletromagnéticas, existem três tipos de perturbações gravitacionais, denominadas escalares (que se reduzem a perturbações polares em  $n = 4$ ), vetoriais (que se reduzem a perturbações axiais em  $n = 4$ ) e tensoriais (sem análogo em  $n = 4$ ). A equação de perturbação geral para um buraco negro de Schwarzschild  $n$ -dimensional é conhecida e possui a mesma forma da eq. (3.29), com o potencial dado por [39, 40]

$$V(u, v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\ell(\ell + n - 3)}{r^2} + \frac{(n-2)(n-4)}{4r^2} + \frac{(1-s^2)(n-2)^2}{4r^{n-1}} \right). \quad (3.31)$$

A constante  $s$  determina o tipo de perturbação considerada:  $s = 0$  corresponde a perturbações escalares e tensoriais gravitacionais,  $s = 2$  corresponde a perturbações vetoriais gravitacionais,  $s = 2/(n-2)$  corresponde a perturbações vetoriais eletromagnéticas e

$s = 2 - 2/(n - 2)$ , finalmente, a perturbações escalares eletromagnéticas (segundo a nomenclatura de [40]). A expressão para o potencial gravitacional escalar é mais complexa e não será apresentada aqui.

Podemos ver que para  $n = 4$  o potencial (3.31) se reduz às expressões conhecidas para perturbações escalares, eletromagnéticas (note-se que  $s = 2/(n - 2) = 2 - 2/(n - 2) = 1$  para  $n = 4$ ) e axiais para Schwarzschild (comparar com eq. (1.2)). O potencial (3.30) é equivalente ao potencial (3.31) com  $\sigma = 0$ . A diferença no último termo do potencial se deve ao fato de que, em [40], o raio do horizonte aparente foi tomado como  $r_h = 1$ .

Nós realizamos uma exaustiva análise numérica das equações (3.18), (3.19) e (3.29), seguindo o método descrito na seção 2.3, adaptado para o caso de  $n$  dimensões. Em particular, pudemos verificar que o comportamento estacionário dos MQN's para massas variando lentamente, verificado na seção 2.3, não é alterado em espaços-tempos com maior número de dimensões, ver fig. 3.1. Conseqüentemente, uma vez que a função de massa  $m(v)$  varie lentamente, os MQN's da eq. (3.29) atingem um regime estacionário e as frequências associadas ( $\tilde{\omega}_R$ ) e os termos de decaimento ( $\tilde{\omega}_I$ ) são proporcionais a  $1/r_h(v)$ , onde  $r_h$  é o horizonte aparente dado pela eq. (3.22) De maneira mais quantitativa, temos, para um buraco negro evaporando de acordo com a eq. (3.23), porém sem a regularização para  $v > v_1$  (necessária apenas para a análise numérica),

$$\frac{\tilde{\omega}_{R,I}(v)}{\omega_{R,I}} = \frac{r_h(0)}{r_h(v)} = \left(1 - \frac{v}{v_0}\right)^{-\frac{1}{n-1}}, \quad (3.32)$$

onde  $\omega_{R,I}$  correspondem à frequência de oscilação (<sub>R</sub>) e ao termo de decaimento (<sub>I</sub>) dos MQN's de um buraco negro de Schwarzschild  $n$ -dimensional com massa  $m_0$ . Devemos notar que a relação  $\omega_R \propto 1/r_h$  para buracos negros de Schwarzschild  $n$ -dimensionais já havia sido obtida anteriormente por Konoplya em [41]. Assim como na seção 2.3, condições iniciais gaussianas foram utilizadas em todas as análises, embora resultados equivalentes possam ser obtidos para qualquer condição inicial localizada.

Nossas simulações indicam fortemente que a condição para o regimes estacionário dos MQN's (obtida na seção 2.3) deve ser generalizada para o caso de buracos negros  $n$ -dimensionais como  $|r_h''(v)| < |\tilde{\omega}_I(v)|$ , onde  $\tilde{\omega}_I$  é o menor termo de decaimento do sistema. Para o presente caso, esta condição pode ser escrita como

$$\left(1 - \frac{v}{v_0}\right)^{2\frac{n-2}{n-1}} < 1 - a_n^2 \left[ \frac{n-2}{(n-3)^2} \left(\frac{2}{n-3}\right)^{\frac{1}{n-3}} \frac{m_0}{|\omega_I|} \right], \quad (3.33)$$

onde  $\omega_I$  é o menor termo de decaimento de um buraco negro de Schwarzschild  $n$ -dimensional com massa  $m_0 = m(0)$ , correspondendo tipicamente a perturbações escalares. Para miniburacos negros formados no LHC, o termo entre colchetes deve ser  $\approx 1$ , independente

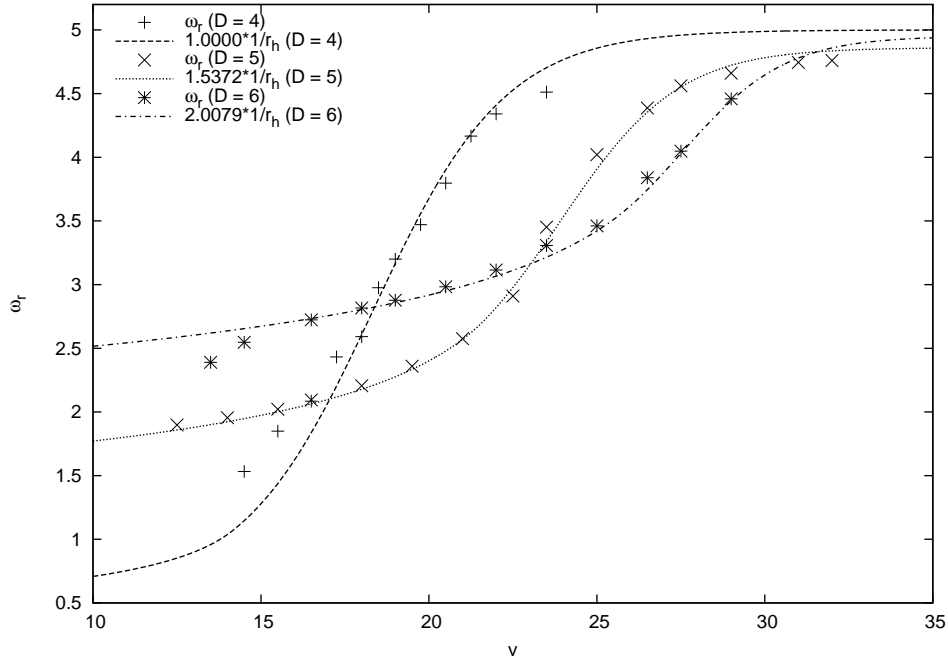


Figura 3.1: Frequências “instantâneas” dos MQN’s para a eq. (3.29) com o potencial (3.30). No regime estacionário, as frequências são proporcionais a  $1/r_h(v)$ , como pode ser visto pelo bom acordo entre os pontos (obtidos nas simulações numéricas) e as curvas  $const. \times 1/r_h$ , onde as constantes foram estimadas a partir da eq. (3.32). Os casos apresentados correspondem a  $\ell = 2$  e  $a_n = 0.02$ .

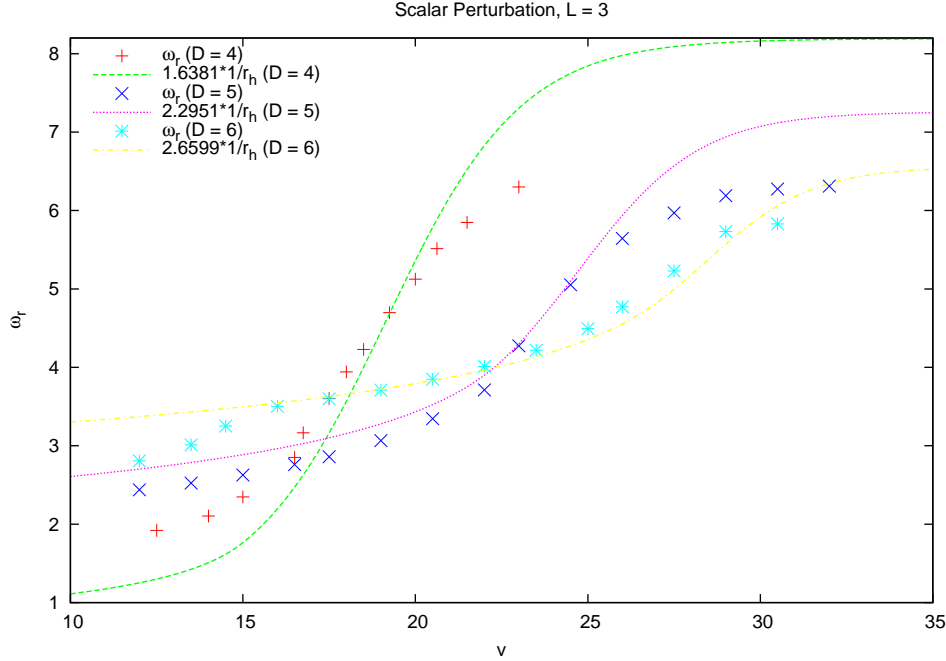


Figura 3.2: Frequências “instantâneas” dos MQN’s para a eq. (3.29) com o potencial (3.30). Os casos apresentados correspondem a  $\ell = 3$  e  $a_n = 0.02$ .

de  $n$ . Portanto, somente nos últimos estágios do processo de evaporação (menos do que a última fração  $a_n^{(n-1)/(n-2)}$  do tempo de vida) o regime estacionário é quebrado. Conseqüentemente, a perturbação da eq. (2.49) pode ser bem descrita por

$$\tilde{\psi}(v) = e^{-\tilde{\omega}_1 v} \sin(\tilde{\omega}_R v + \delta), \quad (3.34)$$

para  $0 \leq v < v_0$ , e  $\tilde{\psi}(v) = 0$  for  $v \geq v_0$ , onde  $\tilde{\omega}_{R,I}$  são funções de  $v$  dadas por (3.32), e  $\delta$  é uma fase arbitrária.

Podemos observar que, para valores típicos do parâmetro  $a_n$  e  $m_0 \approx 1\text{TeV}$ , o espectro de Fourier  $\tilde{\Psi}(f)$  das perturbações estacionárias (3.34) é muito próximo do espectro de Fourier  $\tilde{\Psi}(f)$  das perturbações de um buraco negro de Schwarzschild  $n$ -dimensional ( $m(v) = m_0$ ),

$$\psi(v) = e^{-\omega_1 v} \sin(\omega_R v + \delta), \quad (3.35)$$

para  $v \geq 0$ . Este fato, claramente ilustrado na fig. 3.3, certamente merece uma análise mais rigorosa. Entretanto, algumas estimativas simples corroboram esta observação. Da linearidade da transformada de Fourier e da identidade de Parseval, temos

$$\int_0^\infty (\psi(v) - \tilde{\psi}(v))^2 dv = \int_{-\infty}^\infty |\Psi(f) - \tilde{\Psi}(f)|^2 df. \quad (3.36)$$

Uma vez que o lado esquerdo da eq. (3.36) seja pequeno  $\Psi(\omega)$  será próxima (no sentido

da norma  $L^2$ ) de  $\tilde{\Psi}(\omega)$ . A integral do lado esquerdo da eq. (3.36) pode ser dividida como

$$I_1 + I_2 = \int_0^{v_2} (\psi - \tilde{\psi})^2 dv + \int_{v_2}^{\infty} (\psi - \tilde{\psi})^2 dv. \quad (3.37)$$

A segunda integral pode ser estimada como

$$I_2 \leq 2 \left( \int_{v_2}^{\infty} \psi^2 dv + \int_{v_2}^{\infty} \tilde{\psi}^2 dv \right) \leq 4 \int_{v_2}^{\infty} e^{-2\omega_I v} dv = 2 \frac{e^{-2\omega_I v_2}}{\omega_I}. \quad (3.38)$$

Tipicamente,  $\omega_R$  e  $\omega_I$  são da ordem da unidade, enquanto  $a_n$  é muito menor ( $10^{-3}$ ). Se escolhermos  $v_2$  correspondendo a, por exemplo, 10 ciclos de oscilação de  $\psi(v)$ , o valor de  $I_2$  será menor do que  $e^{-20}$ . Este é o erro cometido ao aproximarmos o lado esquerdo da eq. (3.36) por  $I_1$ .

Na fig. 3.3 o espectro de Fourier  $\tilde{\Psi}(f)$  foi obtido numericamente através de um algoritmo de FFT (“Fast Fourier Transform”) [42]. Podemos obter numericamente com algoritmos deste tipo a transformada de Fourier de uma função  $h(t)$  cujo valor é conhecido em intervalos de tempo igualmente espaçados. Seja  $\Delta$  o intervalo de tempo entre dois valores consecutivos, de modo que a seqüências de valores amostrados seja

$$h_n = h(n\Delta) \quad n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.39)$$

Para qualquer intervalo de amostragem  $\Delta$ , existe um frequência especial  $f_c$ , denominada frequência crítica de Nyquist, dada por

$$f_c \equiv \frac{1}{2\Delta}. \quad (3.40)$$

Esta é a frequência máxima que pode ser “vista” no espectro obtido pelo método de FFT. Existe um efeito denominado “aliasing” relacionado à frequência crítica de Nyquist. Se uma função contínua for amostrada com um certo intervalo  $\Delta$ , mas o seu espectro de frequências não for limitado por  $f_c$ , todas as contribuições para o seu espectro que estiverem fora do intervalo  $-f_c < f < f_c$  serão espuriamente acrescentadas neste intervalo. Podemos ver claramente este efeito na fig. 3.3, na parte final do espectro de potências.

O espectro de Fourier  $\Psi(f)$  da perturbação (3.35) pode ser facilmente obtido,

$$\Psi(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-ift} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega_R \cos \delta + (\omega_I + if) \sin \delta}{(\omega_R)^2 + (if + \omega_I)^2}. \quad (3.41)$$

O espectro de potências associado

$$|\Psi(f)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{(\omega_R \cos \delta + \omega_I \sin \delta)^2 + f^2 \sin^2 \delta}{(\omega_R^2 + \omega_I^2 - f^2)^2 + 4f^2 \omega_I^2}}, \quad (3.42)$$

apresenta um pico bastante evidente (ver fig. 3.3) em  $f_{max}$  dada por

$$\frac{f_{max}^2 - (\omega_R^2 - \omega_I^2)}{(\omega_R^2 + \omega_I^2)^2 - f_{max}^4} = g(f_{max}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \delta}{\omega_R \cos \delta + \omega_I \sin \delta} \right)^2, \quad (3.43)$$

de onde podemos concluir que

$$\sqrt{\omega_R^2 - \omega_I^2} \leq f_{max} \leq \sqrt{\omega_R^2 + \omega_I^2}, \quad (3.44)$$

pois  $|\omega_R| > |\omega_I|$ , ver Fig. 3.4.

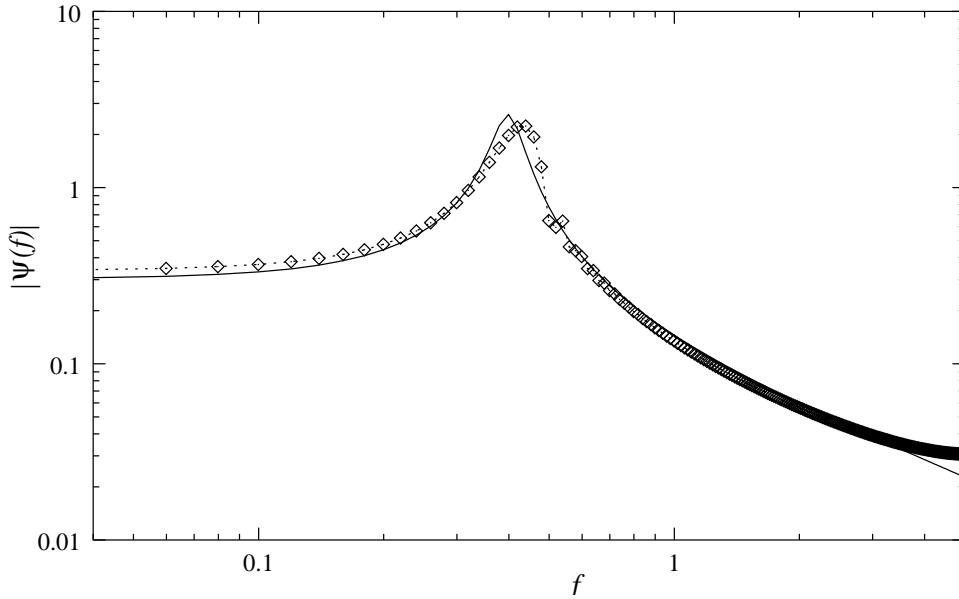


Figura 3.3: O espectro de potências:  $|\Psi(f)|$ , linha contínua, dado pela eq. (3.42); e  $|\tilde{\Psi}(f)|$ , linha pontilhada, calculado numericamente a partir das equações (3.34) e (3.32). As duas curvas são realmente bastante próximas para valores típicos de  $a_n$  e  $m_0 \approx 1\text{TeV}$ . Em particular, ambos os espectros apresentam picos pronunciados similares. Note-se que as discrepâncias para valores grandes de  $f$  se devem ao efeito de “aliasing” dos métodos de FFT para frequências maiores do que a frequência crítica de Nyquist [42], e não a discrepâncias reais entre  $|\Psi(f)|$  e  $|\tilde{\Psi}(f)|$ . O caso apresentado corresponde a  $n = 4$ ,  $a_4 = 0.002$ ,  $\omega_R = 0.25$ ,  $\omega_I = 0.01$ , e  $\delta = 0$ .

Nosso resultado mais interessante concerne à caracterização dos sinais que vêm do buraco negro. Podemos determinar  $\omega_R$  e  $\omega_I$  a partir dos picos no espectro de potências das perturbações em mini buracos negros em processo de evaporação. Conseqüentemente, podemos inferir valores para os parâmetros do buraco negro, tais como a sua massa inicial  $m_0$  e até mesmo a dimensão  $n$  do espaço-tempo no qual o buraco negro efetivamente vive. Obviamente, nós não esperamos que as perturbações gravitacionais associadas a estes mini buracos negros sejam mensuráveis. No entanto, lembramos que a análise de MQN’s



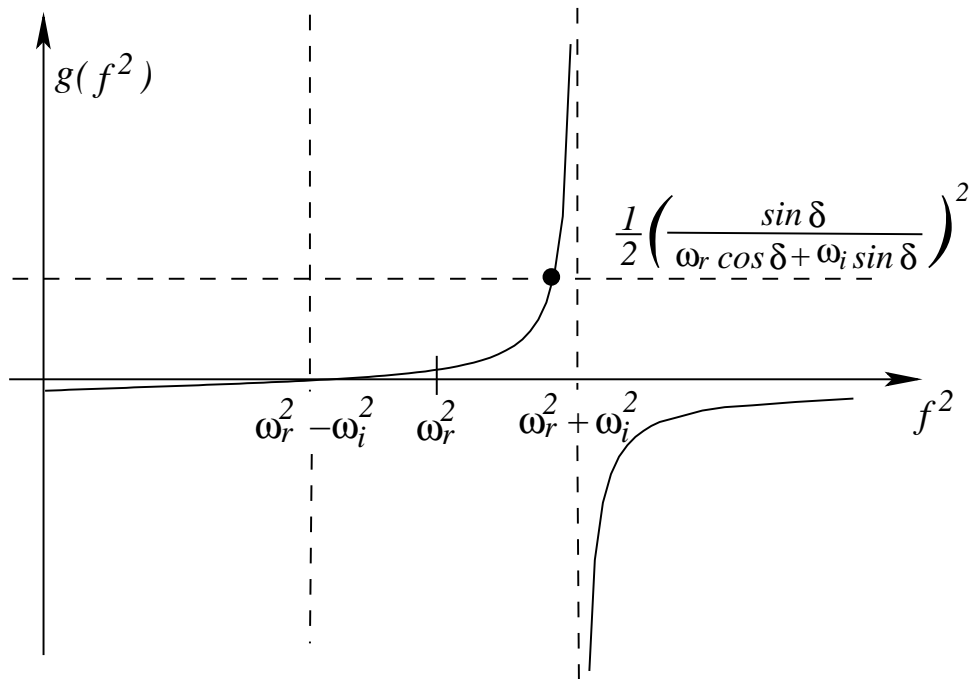


Figura 3.4: Solução gráfica de (3.43). Podemos ver claramente que, para uma fase arbitrária  $\delta$ , o pico do espectro de potências (3.42) está localizado no intervalo descrito por (3.44).

pode ser aplicada a qualquer campo de teste se propagando próximo de um buraco negro. Em particular, esta análise também se aplica para perturbações eletromagnéticas reais e, embora uma parte significativa das emissões destes buracos negros seja dirigida para o “bulk” [43, 44], campos eletromagnéticos estão presentes e são mensuráveis no ambiente do LHC. O comportamento das ondas eletromagnéticas espalhadas por estes mini buracos negros durante o processo de evaporação deve exibir um espectro de potências como o da fig. 3.3, pois as perturbações eletromagnéticas também serão da forma (3.34). Para buracos negros 4-dimensionais, por exemplo, as frequências e os termos de decaimento dos MQN’s da primeira perturbação eletromagnética ( $\ell = 1$  e  $n = 0$ ) [24] são

$$\omega = 0.2483 - 0.0925i, \quad (3.45)$$

de modo que a frequência do pico do espectro de potências da perturbação eletromagnética está no intervalo

$$\left(\frac{m_0}{1\text{TeV}}\right) \hbar f_{max} = 230 \quad \text{até} \quad 265 \text{ GeV}. \quad (3.46)$$

Tipicamente, quanto maior o número de dimensões extras, maior será a frequência do pico, podendo até ultrapassar 1 TeV. Entretanto, a partir de uma determinação precisa da localização do pico para perturbações eletromagnéticas podemos obter os parâmetros relevantes do mini buraco negro, incluindo o número de dimensões extras.

Podemos discutir um pouco sobre as conseqüências observacionais destes resultados. O que, efetivamente, pode ser observado? A frequência  $f_{max}$  corresponde ao pico do espectro de potências da perturbação eletromagnética do buraco negro. Ou seja, de ondas eletromagnéticas espalhadas pela barreira de potencial do buraco negro. O valor de  $f_{max}$  e a forma do espectro independem das ondas incidentes, esta é uma característica do decaimento em MQN’s. Podemos esperar que, caso mini buracos negros sejam formados nos experimentos do LHC de colisão de partículas, os fótons presentes e resultantes da colisão entre partículas elementares sejam espalhados pelo mini buraco negro da maneira descrita aqui. Desta forma, é possível esperar a detecção de um sinal eletromagnético altamente energético, possivelmente isotrópico, “emitido” (na verdade, espalhado) pelo mini buraco negro, e com as características descritas acima. Não desejamos simplificar aqui exageradamente uma situação experimental reconhecidamente complexa, mas salienta que o sinal previsto deve se encontrar presente, ainda que parcialmente camuflado pelo grande número de produtos gerados na colisão.

# Capítulo 4

## Estrutura e Estabilidade do Gravastar

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos no estudo do gravastar [45]. Na seção 4.1, apresentamos uma revisão dos resultados recentes na literatura sobre o gravastar e na seção 4.2 obtemos os vínculos que limitam os parâmetros da solução. Na seção 4.3 apresentamos um modelo baseado no trabalho de [46] e uma discussão sobre a sua estrutura. Finalmente, na seção 4.4 temos a análise das perturbações axiais para o modelo adotado.

### 4.1 Gravastar (Gravitational Vacuum Condensate Star)

O modelo do gravastar foi proposto recentemente por Mazur e Mottola [47, 48] e tem atraído atenção como uma possível alternativa aos buracos negros. Uma estrela cuja massa seja suficientemente grande, nos derradeiros estágios de sua evolução, pode terminar sua vida como um gravastar estável, um objeto muito compacto com raio muito próximo do raio de Schwarzschild da estrela. Este objeto não possui um horizonte de eventos nem uma singularidade central. No modelo do gravastar uma transição de fase deve ocorrer próxima da localização onde o horizonte de eventos poderia ter se formado. O interior do que poderia ter sido um buraco negro é substituído por uma região de espaço-tempo de de Sitter. Este núcleo é envolvido por uma casca fina de matéria, que por sua vez é envolvida por um vácuo descrito pela métrica de Schwarzschild.

Apesar das muitas evidências experimentais a favor da existência de buracos negros, pode ser fundamentalmente impossível fornecer uma prova observacional irrefutável da

existência do horizonte de eventos de um buraco negro [49]. Os questionamentos sobre a real existência dos buracos negros têm produzido novas propostas e idéias, como o gravastar. Estes novos modelos não devem ser descartados de imediato, mas devem ser analisados com cuidado antes de serem considerados mais seriamente. Não advogamos aqui uma posição contrária ou favorável à existência de gravastares, porém acreditamos que se trata de uma solução das equações de Einstein que merece ser estudada.

O modelo do gravastar deve responder primeiramente a uma pergunta óbvia: esta solução é estável? Em [47, 48] são apresentados argumentos que mostram que a solução é termodinamicamente estável, mas a análise de outros tipos de estabilidade não é trivial, devido à estrutura do modelo. O gravastar é, na verdade, uma estrutura com cinco camadas, incluindo duas cascas infinitesimais, decorrentes das condições de junção de Israel para a métrica [16, 17, 50] (ver equações (4.1) e (4.2)). Diversos modelos relacionados e simplificados foram propostos recentemente. Em [51] foi analisada a estabilidade radial de um modelo simplificado com três camadas, e mostrou-se que a estabilidade é mantida para diversas configurações. Este estudo foi generalizado em [52] para gravastares com diferentes métricas exteriores. Outras possibilidades para a solução interior também têm sido consideradas. Em [53] um phantom de Born-Infeld substitui o interior de de Sitter, em [54] a solução interior é governada pela equação de estado da energia escura, e finalmente em [55] geometrias interiores com eletrodinâmica não linear são combinadas com o exterior de Schwarzschild.

Em [46] é mostrado que gravastares não podem ser fluidos perfeitos, ou seja, eles devem possuir pressões anisotrópicas que são dadas no modelo original pelas tensões superficiais nas cascas infinitesimais na junção entre as métricas que descrevem o interior, a casca de matéria e o exterior. Em [46] temos um modelo proposto com pressões anisotrópicas e densidade contínuas, sem a presença de cascas infinitesimais. É mostrado que, se supusermos o gravastar como um fluido perfeito, a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff não será satisfeita: pressões isotrópicas não conseguem sustentar um objeto esfericamente simétrico, estático, com densidade positiva, pressão central negativa e pressão nula na superfície.

Em [56, 57] são propostas algumas equações de estado que satisfazem o modelo proposto em [46]. Em [57] foi realizada uma primeira análise de perturbações axiais neste modelo, seguindo o procedimento padrão para perturbações axiais em buracos negros [58]. Nosso trabalho também se baseia no modelo com pressões anisotrópicas proposto em [46] (ver seção 4.3), porém mostramos que um procedimento diferente deve ser utilizado para a análise perturbativa, seguindo o estudo de perturbações axiais em estrelas [59, 60]. Uma apresentação muito completa das perturbações gravitacionais, tanto axiais quanto polares, é apresentada para um modelo correlato em [61]. Entretanto, este modelo é assintoticamente de Sitter para  $r \rightarrow 0$  e assintoticamente Schwarzschild para  $r$  grande. Portanto, não poderia descrever uma alternativa para o estágio final de uma estrela compacta.

Além de testar a estabilidade do modelo, o estudo das perturbações gravitacionais do gravastar pode produzir outros resultados interessantes. Em geral, acredita-se que seria muito difícil distinguir observacionalmente um gravastar de um buraco negro [62]. Entretanto, sabemos que as frequências dos modos quasi-normais dependem apenas das características do objeto perturbado, e não da perturbação inicial, tornando possível identificar o objeto através de seu espectro de MQN's. Além disso, temos a possibilidade de detecção no futuro próximo de ondas gravitacionais provenientes de objetos astrofísicos. Conseqüentemente, se o estudo de perturbações do gravastar resultar em um espectro de MQN's, este resultado poderia fornecer um meio de se distinguir experimentalmente um gravastar de um buraco negro.

## 4.2 Vínculos nos parâmetros do modelo original

Primeiramente expomos uma rápida revisão das equações principais do modelo original do gravastar proposto por Mazur e Mottola [47, 48]. Esta revisão se faz necessária para apresentarmos nossos resultados para os vínculos sobre os parâmetros do modelo. Começamos com o elemento de linha esfericamente simétrico e estático

$$dS^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{h(r)} + r^2d\Omega^2, \quad (4.1)$$

e as equações de Einstein devem ser resolvidas para um fluido perfeito em repouso, com três diferentes equações de estado em três regiões

$$\begin{aligned} \text{I. Interior:} & \quad 0 \leq r \leq r_1, & \rho = -p, \\ \text{II. casca:} & \quad r_1 \leq r \leq r_2, & \rho = +p, \\ \text{III. Exterior:} & \quad r_2 \leq r, & \rho = p = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

A motivação desta construção é dar estabilidade ao modelo, com uma condição na qual o colapso gravitacional seja impedido. Podemos ver, a princípio, que isto pode ser conseguido com a equação de estado interior dada em (4.2). Um espaço-tempo plano, homogêneo e isotrópico, com  $p = -\rho = -\rho_v$  (constante), pode ser descrito pela métrica de Robertson-Walker,

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2d\Omega^2 \right], \quad (4.3)$$

com  $k = 0$  e o tensor de energia-momento de um fluido perfeito,  $T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}$  (ver seção 2.1). Esta solução das equações de Einstein é conhecida como espaço-tempo de de Sitter. Resolvendo as equações de Einstein para esta métrica, obtemos a equação

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}\rho_v R^2 \Rightarrow R(t) = R_0 \exp \left[ \left( \frac{8\pi\rho_v}{3} \right)^{1/2} t \right], \quad (4.4)$$

que mostra que este é um espaço-tempo em expansão. Portanto, a solução interior de (4.2) é adequada para impedir o colapso gravitacional. Este não é, porém, um argumento conclusivo para a estabilidade do modelo, apenas uma motivação e uma justificativa de sua viabilidade. Na seção 4.1 estão citados alguns trabalhos em que foram realizadas análises sobre a estabilidade deste modelo, e de outros modelos similares.

Seguindo a apresentação feita em [47, 48], as equações de Einstein para (4.1) e (4.2) podem ser escritas como

$$-G^t_t = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1-h)] = -8\pi T^t_t = 8\pi\rho, \quad (4.5)$$

$$G^r_r = \frac{h}{rf} \frac{df}{dr} + \frac{1}{r^2} (h-1) = 8\pi T^r_r = 8\pi p, \quad (4.6)$$

juntamente com a equação de conservação

$$T^{\mu}_{r;\mu} = \frac{dp}{dr} + \frac{\rho+p}{2f} \frac{df}{dr} = 0. \quad (4.7)$$

Nas interfaces  $r = r_1$  e  $r = r_2$ , os coeficientes da métrica  $r$ ,  $f$  e  $h$  devem ser contínuos, embora suas primeiras derivadas devam ser descontínuas, como pode ser visto das equações (4.5)-(4.7).

Na região I  $\rho$  é uma constante dada por  $\rho_v = 3H_0^2/8\pi$ , e a métrica descreve um espaço-tempo de de Sitter,

$$\text{I. } f(r) = Ch(r) = C(1 - H_0^2 r^2), \quad 0 \leq r \leq r_1. \quad (4.8)$$

Na região III, de acordo com o teorema de Birkhoff, o espaço-tempo é descrito pela métrica de Schwarzschild

$$\text{III. } f(r) = h(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad r_2 \leq r. \quad (4.9)$$

Na região II, definimos uma nova variável adimensional  $w \equiv 8\pi r^2 p$ , de modo que as equações (4.5)-(4.7) com  $\rho = p$  pode ser escritas como

$$\frac{dr}{r} = \frac{dh}{1-w-h}, \quad (4.10)$$

$$\frac{dh}{h} = -\frac{1-w-h}{1+w-3h} \frac{dw}{w}, \quad (4.11)$$

$$\frac{wf}{r^2} = \text{const.} \quad (4.12)$$

A eq. (4.10) é satisfeita com a definição

$$h \equiv 1 - \frac{\bar{m}}{r}, \quad d\bar{m}(r) = 2dm(r) = 8\pi\rho r^2 dr = w dr, \quad (4.13)$$

dentro da casca. A eq. (4.11) geralmente só pode ser resolvida numericamente. Entretanto, uma solução analítica pode ser obtida no limite de casca fina,  $r_1 \rightarrow r_2$  ( $0 < h \ll 1$ ), pois neste limite podemos tomar  $h$  igual a zero no lado direito da eq. (4.11), obtendo

$$h \equiv 1 - \frac{\bar{m}}{r} \simeq \epsilon \frac{(1+w)^2}{w} \ll 1, \quad (4.14)$$

na região II, onde  $\epsilon$  é uma constante de integração ( $\epsilon \ll 1$ ). Com as equações (4.10)-(4.14) e as condições de continuidade dos coeficientes da métrica  $f$  e  $h$  em  $r_1$  e  $r_2$ , podemos mostrar que as constantes de integração  $\epsilon$ ,  $C$ ,  $M$  e  $H_0$  presentes nas equações (4.8), (4.9) e (4.14) são dadas em termos de  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $w_1$  e  $w_2$  pelas relações

$$\epsilon = -\ln \frac{r_2}{r_1} \left( \ln \frac{w_2}{w_1} - \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_1} \right)^{-1} \quad (4.15)$$

$$C = \left( \frac{1+w_2}{1+w_1} \right)^2 \quad (4.16)$$

$$M = \frac{r_2}{2} \left[ 1 - \frac{\epsilon(1+w_2)^2}{w_2} \right] \quad (4.17)$$

$$H_0^2 = \frac{1}{r_1^2} \left[ 1 - \frac{\epsilon(1+w_1)^2}{w_1} \right] \quad (4.18)$$

Para estudar este modelo fora do limite de casca fina, notamos que as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (4.19)$$

$$\nu' = \frac{2m(r) + 8\pi r^3 p}{r(r - 2m(r))}, \quad (4.20)$$

$$p' = -(\rho + p) \frac{\nu'}{2}, \quad (4.21)$$

onde a linha (') indica a derivada em relação a  $r$ , e

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho dr', \quad (4.22)$$

são válidas na região II. Escrevemos a métrica na região II como

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.23)$$

e usamos as equações (4.19)-(4.22) para obter soluções numéricas para  $\rho(r) = p(r)$  e  $m(r)$ . Variando os valores para os parâmetros  $r_1$  e  $r_2$  e as condições iniciais  $p(r_1)$  e  $m(r_1)$  (note-se que neste modelo as funções  $\rho(r)$  e  $p(r)$  são descontínuas em  $r_1$  e  $r_2$  e  $m(r_1)$  deve ser, obviamente, menor do que  $r_1/2$ ), nós encontramos um limite para a compacidade  $\mu = M/r_2$  do gravastar.

Como pode ser visto na figura 4.1, a compactidade é limitada pela espessura  $\delta_c = r_2 - r_1$  da casca de matéria. Logo, os parâmetros da solução,  $r_1$ ,  $r_2$  e  $M$  não podem ser escolhidos livremente. Esta restrição é mais relevante quanto maior for a espessura da casca de matéria: não é possível construir um gravastar muito compacto com uma casca de matéria muito larga.

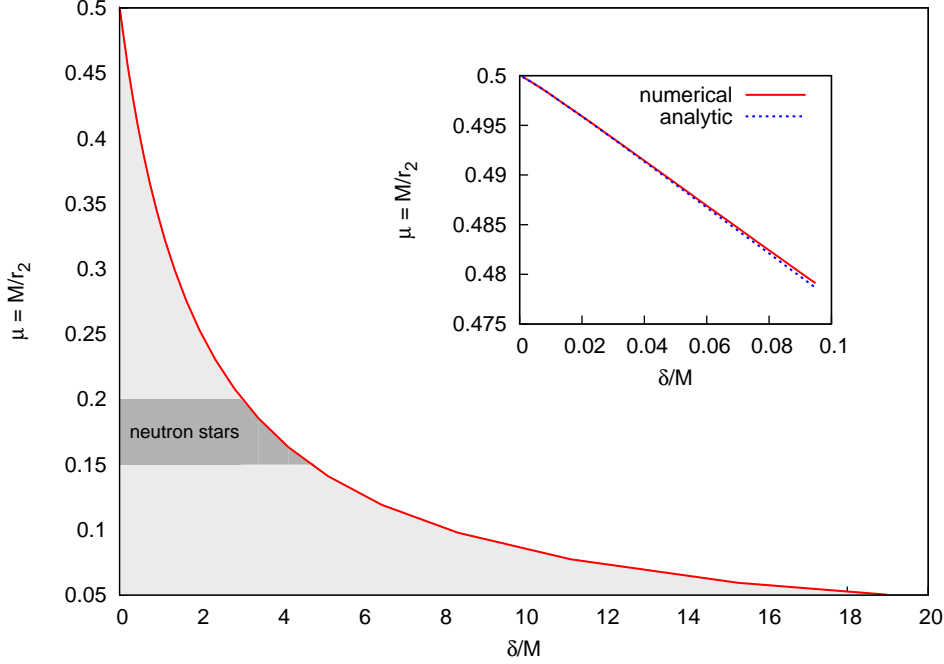


Figura 4.1: Limite para a compactidade  $\mu$  do gravastar. A curva mostra a compactidade máxima para uma dada espessura  $\delta_c$  da casca de matéria. Na região abaixo da curva temos as soluções possíveis, enquanto na região acima da curva não temos mais soluções possíveis. No gráfico em detalhe apresentamos o acordo entre a solução numérica das equações TOV e a solução analítica no limite de casca fina.

### 4.3 O modelo alternativo com pressões anistrópicas

Para nosso estudo do gravastar, escolhemos seguir o modelo sugerido em [46], isto é, com um perfil contínuo de pressões anisotrópicas, para evitar as cascas infinitesimais de matéria presentes no modelo original. Tomamos uma métrica da forma

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.24)$$



e o tensor de energia momento é dado por  $T^\mu_\nu = \text{diag}[-\rho, p_r, p_t, p_t]$ . As equações de Einstein para esta geometria e distribuição de matéria são

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi\rho, \quad (4.25)$$

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi p_r, \quad (4.26)$$

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right) = 8\pi p_t. \quad (4.27)$$

É conveniente transformar as equações acima em uma forma em que as propriedades termodinâmicas se mostrem mais evidentes. Para sistemas com pressões isotrópicas, esta formulação resulta nas equações TOV (ver equações (4.19)-(4.22 na seção 4.2). Obtemos aqui o seguinte conjunto de equações

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (4.28)$$

$$\nu' = \frac{2m(r) + 8\pi r^3 p_r}{r(r - 2m(r))}, \quad (4.29)$$

$$p'_r = -(\rho + p_r) \frac{\nu'}{2} + \frac{2(p_t - p_r)}{r}. \quad (4.30)$$

$$(4.31)$$

Combinando (4.29) e (4.30), obtemos a equação de TOV anisotrópica

$$p'_r = -(\rho + p_r) \frac{m(r) + 4\pi r^3 p_r}{r(r - 2m(r))} + \frac{2(p_t - p_r)}{r}. \quad (4.32)$$

Para seguir o modelo apresentado em [46], e ainda manter a estrutura simples estabelecida em [47, 48] (interior de Sitter, casca de matéria e exterior Schwarzschild), fazemos as seguintes exigências sobre a nossa função de densidade  $\rho(r)$ :

$$\rho(0) = \rho(r_1) = \rho_0, \quad \rho(r_2) = 0, \quad \rho'(r_1) = \rho'(r_2) = 0. \quad (4.33)$$

A densidade se anula na superfície do gravastar em  $r = r_2$  e a derivada da densidade se anula em  $r = r_1$  e  $r = r_2$  para que a densidade seja sempre uma função suave. Uma forma simples de satisfazer as condições acima é considerar uma dependência cúbica em  $r$ ,

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & 0 \leq r \leq r_1 \\ ar^3 + br^2 + cr + d, & r_1 < r < r_2 \\ 0, & r_2 \leq r \end{cases}, \quad (4.34)$$

com os coeficientes  $a, b, c, d$  dados por

$$a = \frac{2\rho_0}{(r_2 - r_1)^3}, \quad (4.35)$$

$$b = -\frac{3\rho_0(r_2 + r_1)}{(r_2 - r_1)^3}, \quad (4.36)$$

$$c = \frac{6\rho_0 r_1 r_2}{(r_2 - r_1)^3}, \quad (4.37)$$

$$d = \frac{\rho_0(r_2^3 - 3r_1 r_2^2)}{(r_2 - r_1)^3}. \quad (4.38)$$

Para obter a densidade em termos da massa total  $M = m(r_2) = \int_0^{r_2} 4\pi\rho r^2 dr$ , escrevemos

$$\begin{aligned} \rho_0 = M \frac{(r_2 - r_1)^3}{4\pi} & \left[ \frac{(r_2^6 - r_1^6)}{3} - \frac{3(r_2 + r_1)(r_2^5 - r_1^5)}{5} + \frac{3r_1 r_2 (r_2^4 - r_1^4)}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{(r_2^3 - 3r_1 r_2^2)(r_2^3 - r_1^3)}{3} + \frac{r_1^3 (r_2 - r_1)^3}{3} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Para a pressão radial  $p_r$ , consideramos uma equação de estado que segue a forma geral [56, 57] (esta escolha não é única)

$$p_r(\rho) = \left[ \alpha - (\alpha + 1) \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^m \right] \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/n} \rho, \quad (4.40)$$

onde  $m, 1/n$  e  $\alpha$  são parâmetros positivos e reais a serem determinados. Mesmo com estes parâmetros a determinar, a equação de estado geral (4.40) já apresenta as características desejadas e limites fisicamente interessantes para o nosso modelo.

Para baixas densidades,

$$\left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^m < \frac{\alpha}{\alpha + 1}, \quad (4.41)$$

a equação de estado se reduz à equação de um politropo de índice  $n$  ( $p_r \propto \rho^{1+1/n}$ ),

$$p_r(\rho) = (\alpha + 1) \left[ \frac{\alpha}{\alpha + 1} - \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^m \right] \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/n} \rho \simeq \frac{\alpha}{\rho_0^{1/n}} \rho^{1+1/n}, \quad (4.42)$$

o que implica  $p_r \rightarrow 0$  para  $\rho \rightarrow 0$ . Para densidades mais altas,

$$\left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^m > \frac{\alpha}{\alpha + 1}, \quad (4.43)$$

a pressão decresce até atingir  $p_r = -\rho_0$  para  $\rho \rightarrow \rho_0$ . Procuramos a forma mais simples da eq. (4.40) limitando  $m, 1/n$  e  $\alpha$ . Exigimos que a eq. (4.40) satisfaça algumas condições

básicas: (a) a velocidade do som  $dp/d\rho$  não pode ser máxima em  $\rho = 0$ , e (b) para excluir um possível comportamento superluminal ( $dp/d\rho > 1$ ), a velocidade do som máxima em  $d^2p/d\rho^2 = 0$  deve ser dada por  $dp/d\rho = 1$ .

Os casos  $[m = 1, 1/n = 0]$  e  $[m = 2, 1/n = 0]$  não satisfazem a condição (a) acima, e serão descartados. As próximas escolhas mais simples em potencial são  $[m = 1, n = 1]$  e  $[m = 2, n = 1]$ . Ambas as formas satisfazem a condição (a). Podemos impor, para as duas formas, que a velocidade do som máxima coincida com a velocidade da luz, sendo que esta condição é suficiente para se determinar o parâmetro  $\alpha$ .

Resolvendo simultaneamente  $d^2p/d\rho^2 = 0$  e  $dp/d\rho = 1$  para o caso  $[m = 1, n = 1]$ , fixamos  $\alpha$  como  $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{33}$  ou  $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{33}$ . Fazendo o mesmo para  $[m = 2, n = 1]$ , fixamos  $\alpha = 2$ . Seleccionamos então o caso  $[m = 2, n = 1]$  como a forma representativa para o nosso modelo para a equação de estado, já que este caso fornece uma única solução para  $\alpha$  e torna a interpretação mais simples. Conseqüentemente, a eq. (4.40) assume a forma

$$p_r(\rho) = \left[ \alpha - (\alpha + 1) \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \rho. \quad (4.44)$$

Finalmente, a pressão tangencial  $p_t$  é dada pela eq. (4.32),

$$p_t = p_r + \frac{r}{2} p_r' + \frac{1}{2} (p_r + \rho) \left[ \frac{m(r) + 4\pi r^3 p_r}{r(1 - 2m(r)/r)} \right]. \quad (4.45)$$

Como pode ser visto na figura 4.2, para  $r \rightarrow r_1$ ,  $p_r \rightarrow -\rho$  e para  $r \rightarrow r_2$ ,  $p_r \rightarrow 0$ , reproduzindo as equações de estado das regiões I e III, dadas na eq. (4.2).

Com as equações (4.33)-(4.45) nós podemos construir um modelo que possui um núcleo finito descrito pela métrica de de Sitter, uma casca de matéria, e o exterior descrito pela solução de Schwarzschild, como proposto em [46]. Na fig. 4.2 temos um exemplo típico das funções  $\rho(r)$ ,  $p_r(r)$  e  $p_t(r)$ . Deste modo, nós preservamos as três regiões do modelo do gravastar de Mazur e Mottola, ao contrário dos modelos apresentados em [56, 57], que são apenas assintoticamente de Sitter, ou em [63, 61], que são assintoticamente de Sitter para  $r \rightarrow 0$  e assintoticamente Schwarzschild para  $r$  grande.

Queremos ter certeza de que os coeficientes da métrica  $g_{00}$  e  $g_{11}$  (e as suas primeiras derivadas) sejam contínuos em todo o espaço-tempo, com a nossa escolha para a equação de estado  $p_r(\rho)$  e  $\rho(r)$ .

Analisemos primeiramente o comportamento de  $g_{11}$ , dado pela eq. (4.28),

$$g_{11} = e^\lambda = \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1}. \quad (4.46)$$

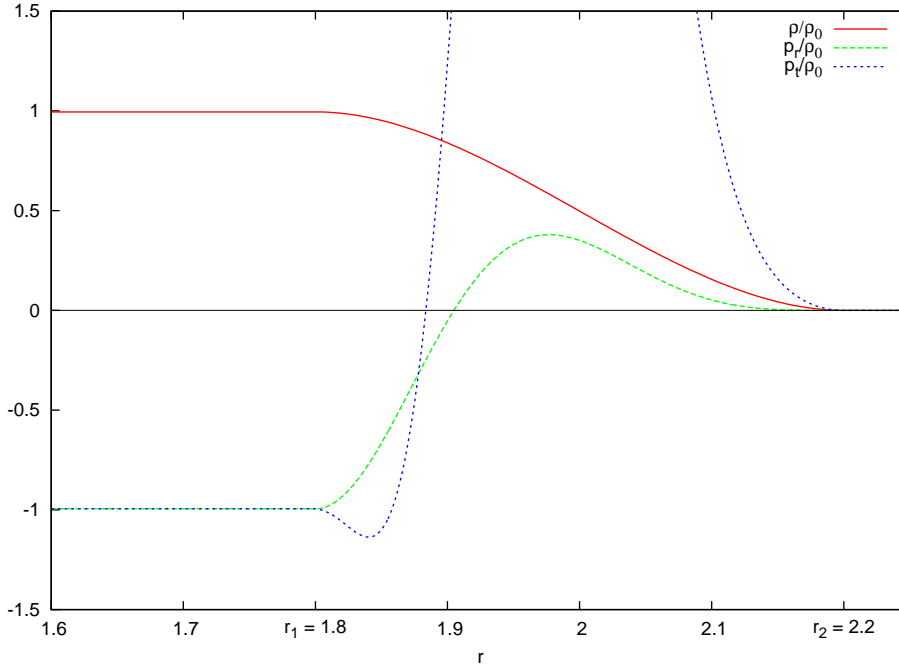


Figura 4.2: Exemplo típico das funções  $\rho(r)$ ,  $p_r(r)$  e  $p_t(r)$  para  $M = 1$ ,  $r_1 = 1.8$  e  $r_2 = 2.2$ .

Para  $\rho(r)$  definida na eq. (4.34),  $m(r)$  e  $m'(r)$  são funções contínuas. Conseqüentemente  $g_{11}$  e sua primeira derivada também são contínuas em todo o espaço-tempo. Porém, devemos notar que os três parâmetros livres  $M$ ,  $r_1$  e  $r_2$  devem ser escolhidos de tal maneira que  $g_{11}$  seja sempre maior do que zero. Na figura 4.3 temos alguns exemplos típicos do comportamento da função  $1 - 2m(r)/r$ , e na figura 4.4 podemos ver como o valor mínimo desta função depende de  $\delta = r_2 - r_1$ .

Quando aumentamos a compacidade  $\mu = M/r_2$  do gravastar, surgem casos para os quais a função  $1 - 2m(r)/r$  se anula, se aumentarmos o valor de  $\delta$ . Embora a compacidade total seja  $\mu = M/r < 1/2$ , a função de massa cresce de maneira que  $2m(r)/r > 1$  para um certo intervalo de  $r$ . Acreditamos que este comportamento deve causar o colapso do gravastar, que se torna então um buraco negro. Portanto, parece que estes casos não representam soluções aceitáveis e devem ser evitados.

Este resultado limita os valores de  $\delta$  que podem ser utilizados para uma dada compacidade  $\mu$ , devendo ser menores do que um certo valor  $\delta_c(r_2, M)$ . Entretanto, este limite deixa de existir se considerarmos objetos menos compactos. Se definirmos um parâmetro  $\epsilon$  tal que  $r_2/M = 2 + \epsilon$ , podemos verificar que, para  $\epsilon > \epsilon_c = 0.3085$ ,  $\delta_c$  não está mais definido e a função  $1 - 2m(r)/r$  é sempre positiva. Na figura 4.5 este limite é comparado com um limite similar obtido para o modelo de Mazur e Mottola, apresentado na figura 4.1. Podemos ver que esta característica do modelo com pressões anisotrópicas e a nossa escolha para a equação de estado  $p(\rho)$  e  $\rho(r)$  não é um resultado espúrio simplesmente decorrente das

funções adotadas, tendo um análogo no modelo de Mazur e Mottola.

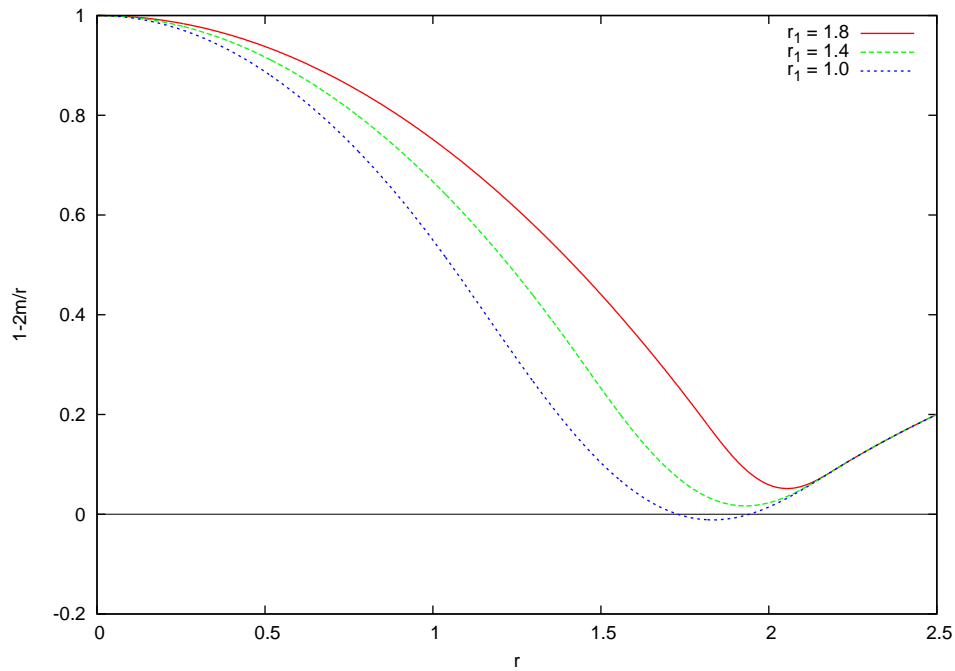


Figura 4.3: Comportamento de  $(1 - 2m/r)$  para  $M = 1$  e diferentes valores de  $r_1$  e  $r_2 = 2.2$ .

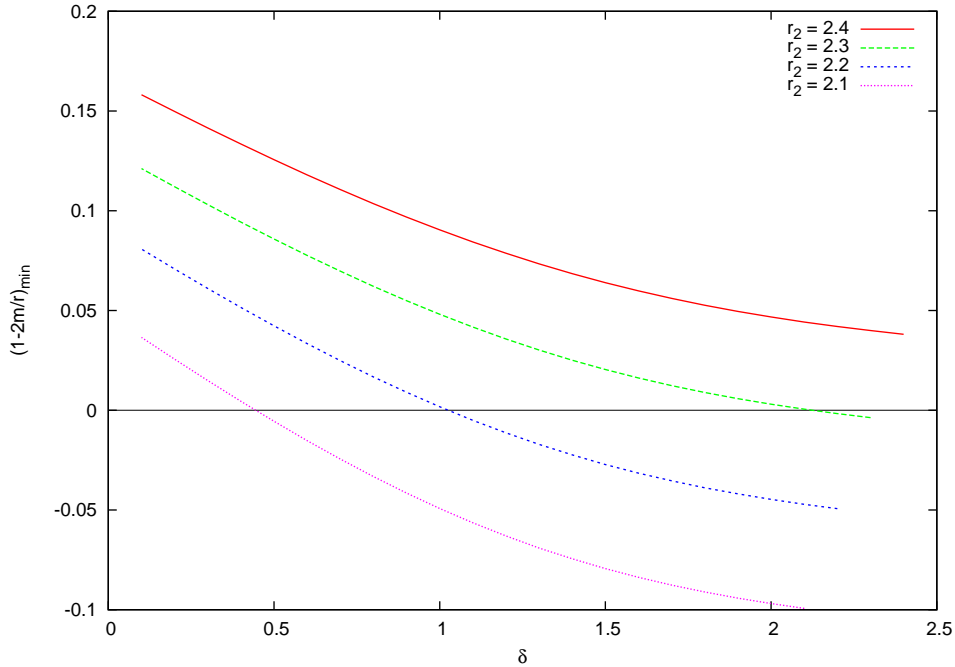


Figura 4.4: Variação de  $(1 - 2m/r)_{min}$  com  $\delta$ , para  $M = 1$  e diferentes valores de  $r_2$ .

Considerando agora a função  $g_{00}$ , é necessário notar que, ao obter  $\nu$  integrando a eq.

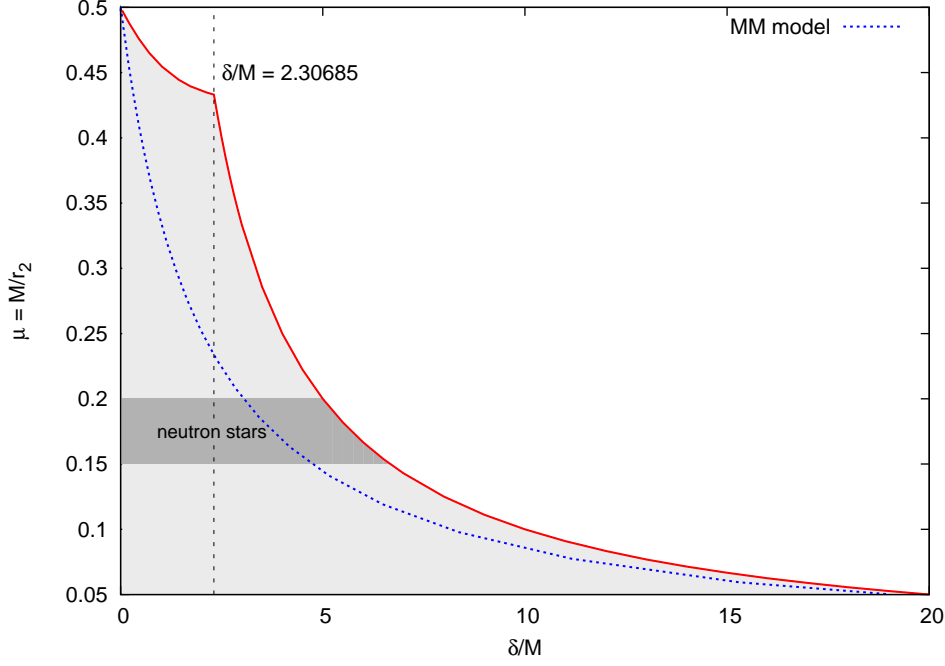


Figura 4.5: Limite na compactidade  $\mu$  do gravastar com a espessura  $\delta$  da casca, comparando os resultados apresentados na figura 4.1 com os resultados obtidos para o modelo com pressões anisotrópicas, na curva superior.

(4.29), devemos introduzir uma constante de integração  $\nu_0$ . Portanto,

$$\nu = \int_0^r \frac{2m(r) + 8\pi r^3 p_r}{r(r - 2m(r))} dr + \nu_0, \quad (4.47)$$

onde a constante  $\nu_0$  deve ser determinada pela condição de que, na fronteira  $r = r_2$  do objeto

$$g_{00}(r_2) = -e^{\nu(r_2)} = -e^{-\lambda(r_2)} = -\left(1 - \frac{2M}{r_2}\right), \quad (4.48)$$

de modo que temos

$$g_{00} = -e^{\nu(r)} = -e^{\Gamma(r)} \left(1 - \frac{2M}{r_2}\right) e^{-\Gamma(r_2)}, \quad (4.49)$$

onde

$$\Gamma(r) = \int_0^r \frac{2m(r) + 8\pi r^3 p_r}{r(r - 2m(r))} dr. \quad (4.50)$$

Com esta escolha para  $\nu_0$  podemos nos assegurar de que o espaço-tempo exterior ao gravastar é descrito pela métrica de Schwarzschild em sua forma usual. Também podemos mostrar a partir das equações (4.29) e (4.48) que  $e^{\nu(r)}$  é contínua em  $r = r_2$ , implicando a continuidade de  $g'_{00}$ . Logo, conseguimos eliminar em nosso modelo as cascas infinitesimais decorrentes das condições de junção da métrica na fronteira  $r = r_2$  com o exterior de Schwarzschild.

## 4.4 Equações de Perturbação e Resultados Numéricos

Para estudar a estabilidade do nosso modelo frente a perturbações axiais, seguimos o procedimento padrão para o estudo de oscilações não-radiais de estrelas [59, 60, 6, 64], diferentemente do estudo realizado em [57], no qual uma análise de perturbações axiais de um gravastar foi realizada seguindo o procedimento padrão de análise de perturbações em buracos negros [58]. No estudo de perturbações axiais, a anisotropia da métrica não possui conseqüências importantes, e o tratamento padrão para estrelas isotrópicas pode ser mantido essencialmente o mesmo. No caso de perturbações polares, entretanto, a anisotropia teria claramente um papel relevante. Um estudo de perturbações radiais em estrelas anisotrópicas foi apresentado em [65, 66]

O espalhamento de ondas gravitacionais axiais segue a equação (ver Apêndice C)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^{*2}} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = V(r)\psi, \quad (4.51)$$

onde

$$r^* = \int_0^r e^{\frac{\lambda-\nu}{2}} dr, \quad (4.52)$$

$$V(r) = \frac{e^\nu}{r^3} [\ell(\ell+1)r + 4\pi r^3(\rho - p_r) - 6m]. \quad (4.53)$$

Usamos um algoritmo tipo Runge-Kutta de 4ª ordem para obter  $e^\nu$  e  $r^*$  das equações (4.49) e (4.52).

Introduzindo coordenadas de cone de luz  $u = t - x$  e  $v = t + x$ , a equação de onda (4.51) pode ser escrita como

$$-4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}(u, v) = V(r)\psi(u, v). \quad (4.54)$$

A equação de onda (4.54) pode ser integrada numericamente. Nós usamos aqui uma variação do método utilizado nas seções 2.3 e 3.3 e discretizamos a equação (4.54) da seguinte forma:

$$\psi_N = (\psi_E + \psi_W) \frac{1 - \Delta^2 V(S)/16}{1 + \Delta^2 V(S)/16} - \psi_s + O(\Delta^4), \quad (4.55)$$

onde os pontos  $N$ ,  $S$ ,  $E$  e  $W$  são definidos mais uma vez como:  $N = (u + \Delta, v + \Delta)$ ,  $S = (u, v)$ ,  $E = (u, v + \Delta)$  e  $W = (u + \Delta, v)$ . A eq. (4.54) é resolvida numericamente no plano  $u - v$  com o algoritmo (4.55), utilizando-se uma grade triangular limitada pelas retas  $r^* = r_{min}^*$  e  $u = 0$ , onde  $r_{min}^*$  é um valor pequeno, da ordem de  $\Delta/2$  (ver figura 4.6). As condições iniciais são estabelecidas sobre estas retas.

Considerando que o comportamento da função de onda não deve ser sensível à escolha das condições iniciais, utilizamos um pulso gaussiano como perturbação inicial,

$$\psi(u = u_0, v) = \exp \left[ -\frac{(v - v_c)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (4.56)$$

e, impondo a condição de que a solução seja regular na origem,

$$\psi(r_{min}^*, t) = \psi(u = v - v_0, v) = 0. \quad (4.57)$$

Durante a integração, extraímos os valores do campo ao longo de uma reta de  $r^*$  constante, ou seja, nos pontos  $(u = v - 2r^*, v)$ . Fazemos o campo evoluir até  $t$  grande, para obter o sinal após o transiente inicial ter passado e as contribuições dos modos superiores de vibração terem decaído, para podermos obter as freqüências do modo fundamental com um ajuste de mínimos quadrados (ver seção 2.3) da função  $\psi_{fit}(t) = Ae^{\omega t} \cos(\omega_R t + \phi)$ , com  $\omega_1 < 0$  por convenção. Para obtermos as freqüências dos modos superiores, seguimos o método proposto em [67]. Este método consiste em subtrair do sinal obtido pela simulação a função ajustada para o modo fundamental  $n = 0$ , revelando o modo  $n = 1$ . Este procedimento pode ser iterado para se obter os próximos modos. Obviamente, modos que decaem muito rapidamente não podem ser obtidos por este procedimento, mas esta é uma maneira bastante eficiente e fácil de se obter os primeiros modos do sinal, que decaem mais lentamente e possuem, portanto, maior chance de detecção experimental. Todo o tratamento descrito aqui para se obter as freqüências dos MQN's foi testado primeiramente para estrelas de densidade uniforme, e os resultados obtidos se mostraram em bom acordo com os valores da literatura [60, 68, 69, 70].

Podemos notar que o potencial axial dado na eq. (4.53) apresenta algumas características similares àquelas presentes no comportamento bem conhecido do potencial axial de estrelas compactas com densidade uniforme [60]. O potencial exibe um máximo e um mínimo, característica que deve dar origem a diferentes famílias de modos. Nas figuras 4.7 e 4.8 temos alguns exemplos típicos de  $V(r)$ . Como pode ser visto nas figuras, o potencial depende da compactidade  $\mu = M/r_2$  (como observado para estrelas compactas) e da espessura  $\delta = r_2 - r_1$  da casca (sem análogo para estrelas). Para  $\mu$  e  $\delta$  crescentes, podemos notar que a diferença entre o máximo e o mínimo do potencial aumenta, ou seja, o poço de potencial se torna mais fundo. Para  $r > r_2$  (superfície do gravastar), o potencial é idêntico ao potencial de um buraco negro de Schwarzschild com massa  $M$ .

Seguindo o procedimento descrito acima, realizamos a integração da equação de onda (4.54). Realizamos uma extensa análise, variando os valores de  $M$ ,  $\mu$  e  $\delta$ , cujos resultados podem ser vistos na fig. 4.10, onde cada ponto das curvas representa uma configuração com diferentes valores de  $M$ ,  $\mu$  e  $\delta$ .

Na fig. 4.9 temos alguns resultados típicos para a forma da onda. Podemos ver no início da curva  $n = 0$  o batimento causado pela presença de modos superiores. Foi possível verificar que a presença dos modos superiores se torna mais pronunciada para  $\mu$  e  $\delta$  crescentes. As



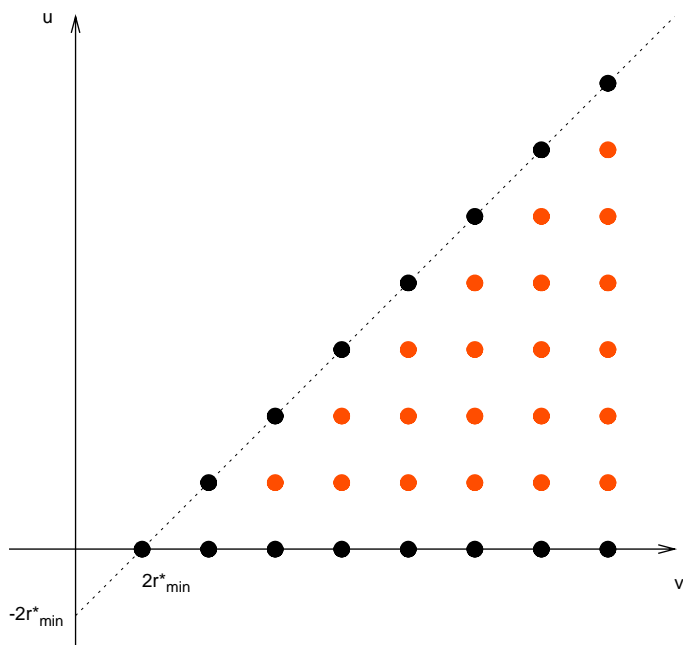


Figura 4.6: Diagrama da grade de integração numérica utilizada. Os pontos pretos representam os pontos da grade nos quais o valor do campo é conhecido. Os pontos vermelhos representam os pontos nos quais o valor do campo deve ser obtido.

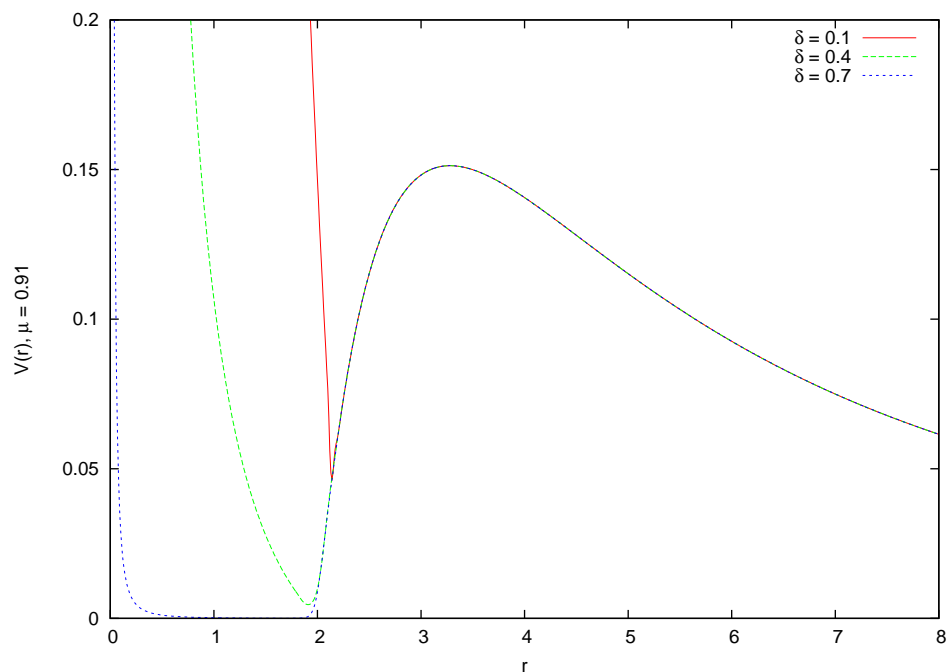


Figura 4.7: Potencial  $V(r)$  ( $\ell = 2$ ) para gravatares com mesma compacidade e  $\mu$  e espessura  $\delta$  crescente.

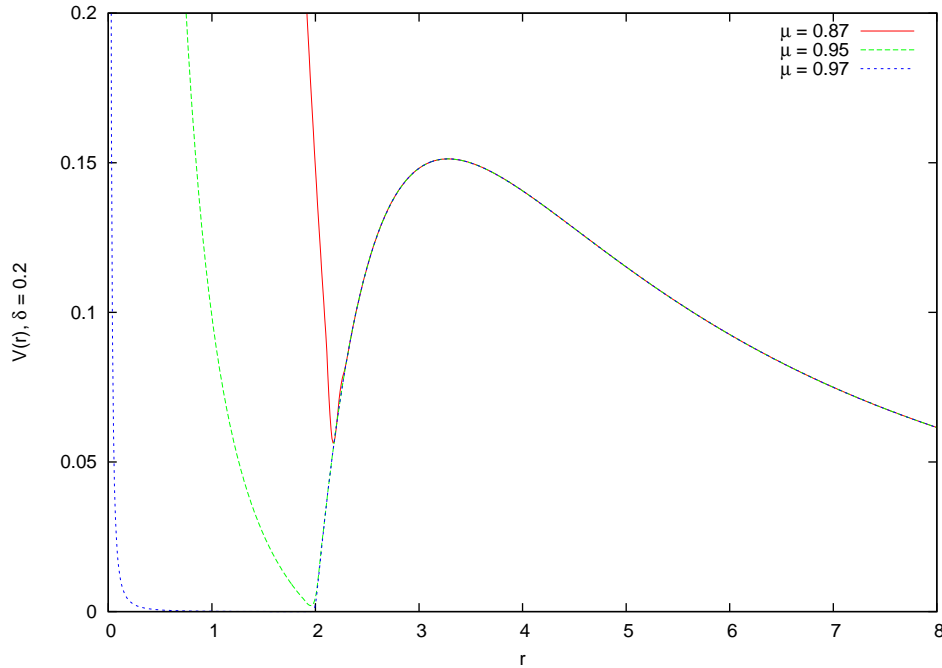


Figura 4.8: Potencial  $V(r)$  ( $\ell = 2$ ) para gravastares com a mesma espessura  $\delta$  e compacidade  $\mu$  crescente.

curvas com  $n > 0$  foram obtidas a partir da curva  $n = 0$  através do método descrito acima. Podemos ver que, para  $n$  crescente, o período das oscilações se torna mais curto e o decaimento, mais rápido.

Para a curva  $n = 3$  não foi possível obter as frequências com o ajuste de mínimos quadrados, já que não temos um sinal claro. Além disso, é interessante notar que é possível distinguir dois comportamentos diferentes na curva  $n = 3$ . Para  $t$  menor do que  $t \simeq 200$ , vemos o modo  $n = 3$  da mesma família de modos representada pelas curvas  $n = 0, 1$  e  $2$ . Acreditamos que estes modos sejam correspondentes aos modos “trapped” presentes para estrelas supercompactas ( $R \leq 3M$ ), cuja superfície se encontra dentro do pico da barreira de potencial do campo gravitacional. Estrelas supercompactas apresentam uma barreira de potencial que possui um máximo e um mínimo, assim como o gravastar.

Para  $t$  maior do que  $t \simeq 200$ , o comportamento da curva  $n = 3$  muda abruptamente. Essa mudança de comportamento é causada por um efeito de borda na integração numérica: a onda é refletida na borda da grade e interage causando esse efeito de interferência.

Na figura 4.10 podemos ver a variação das frequências quasi-normais com os parâmetros do gravastar. O tempo de decaimento do campo, dado pelo inverso de  $|\omega_I|$ , aumenta com  $\delta$  e  $\mu$  crescentes, assim como o período das oscilações, dado por  $2\pi/\omega_R$ . Mais alguns

| $n$ | $r_1 = 1.95, r_2 = 2.2$           | $r_1 = 1.9, r_2 = 2.2$            | $r_1 = 1.85, r_2 = 2.2$           |
|-----|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 0   | $0.2904 - 6.176 \times 10^{-4} i$ | $0.2447 - 8.920 \times 10^{-5} i$ | $0.1975 - 9.110 \times 10^{-6} i$ |
| 1   | $0.4430 - 3.065 \times 10^{-2} i$ | $0.3867 - 8.541 \times 10^{-3} i$ | $0.3225 - 1.097 \times 10^{-3} i$ |
| 2   | $0.5918 - 1.075 \times 10^{-1} i$ | $0.5087 - 5.369 \times 10^{-2} i$ | $0.4222 - 1.445 \times 10^{-2} i$ |

Tabela 4.1: Alguns valores típicos obtidos para as frequências quasi-normais do modo fundamental e primeiros modos superiores do gravastar ( $M = 1$ ) para perturbações axiais com  $\ell = 2$ .

resultados numéricos obtidos para casos típicos estão apresentados também na tabela 4.1.

Para um buraco negro de Schwarzschild, a frequência complexa associada com a perturbação de  $\ell = 2$  e  $n = 0$  é  $M\omega = 0.37367 - 0.08896 i$  [6]. Ao compararmos este resultado com os dados apresentados na parte (a) da figura 4.10, podemos ver que o valor de  $\omega_R$  para o gravastar parece tender para o valor equivalente do buraco negro de Schwarzschild, para  $\mu \rightarrow 1/2$  e  $\delta \rightarrow 0$ . Contudo, se analisarmos a parte (b) da figura 4.10, vemos que  $|\omega_I|$  para o gravastar é quase dez vezes menor no limite para  $\mu \rightarrow 1/2$  e  $\delta \rightarrow 0$  do que o valor correspondente para Schwarzschild. Conseqüentemente, os MQN's do gravastar não tendem para os valores de Schwarzschild em nenhum limite, uma vez que as ondas gravitacionais espalhadas por um gravastar decaem muito mais lentamente do que aquelas espalhadas por um buraco negro.

Os resultados aqui obtidos mostram que o gravastar, pelo menos no modelo particular considerado, é estável em relação a perturbações axiais. Seu espectro de MQN's é distinto daquele de um buraco negro de Schwarzschild usual, implicando a possibilidade de se distinguir observacionalmente entre estes dois objetos a partir de medições realizadas no futuro próximo com a nova geração de detectores gravitacionais. Além disso, os sinais provenientes de um gravastar podem ter maior chance de detecção, pois decaem mais lentamente. Uma continuação óbvia deste trabalho seria obter os MQN's associados a perturbações polares do gravastar. Esperamos que o espectro de MQN's das perturbações polares seja diferente do espectro das perturbações axiais, ao contrário do caso de Schwarzschild, onde ambos são iguais.

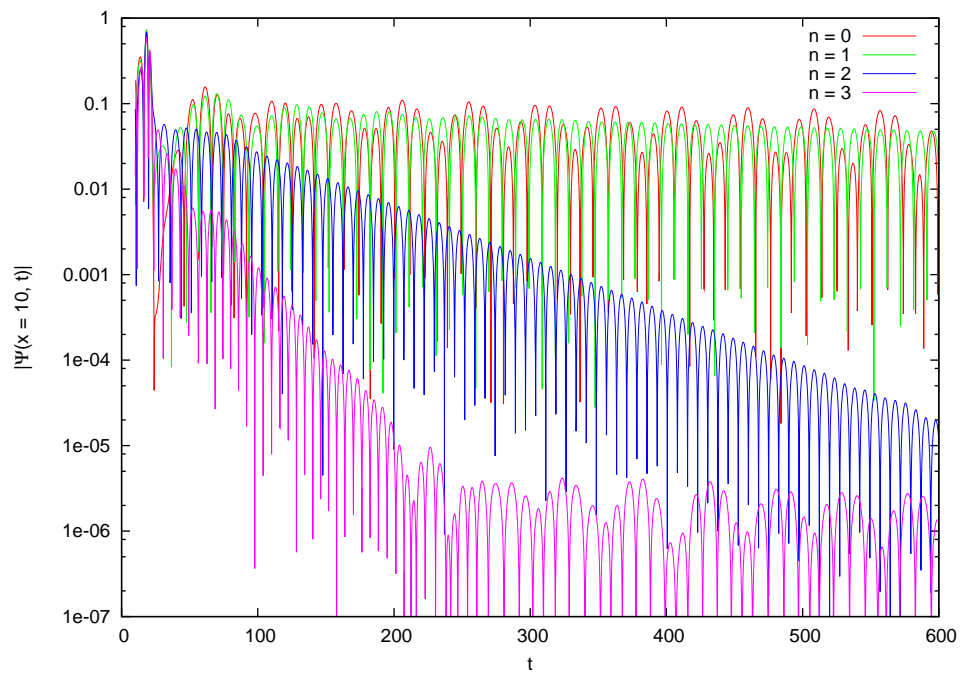


Figura 4.9: Evolução das perturbações axiais com  $n = 0, 1$  e  $2$  para um gravastar com  $M = 1$ ,  $r_1 = 1.85$  e  $r_2 = 2.2$ .

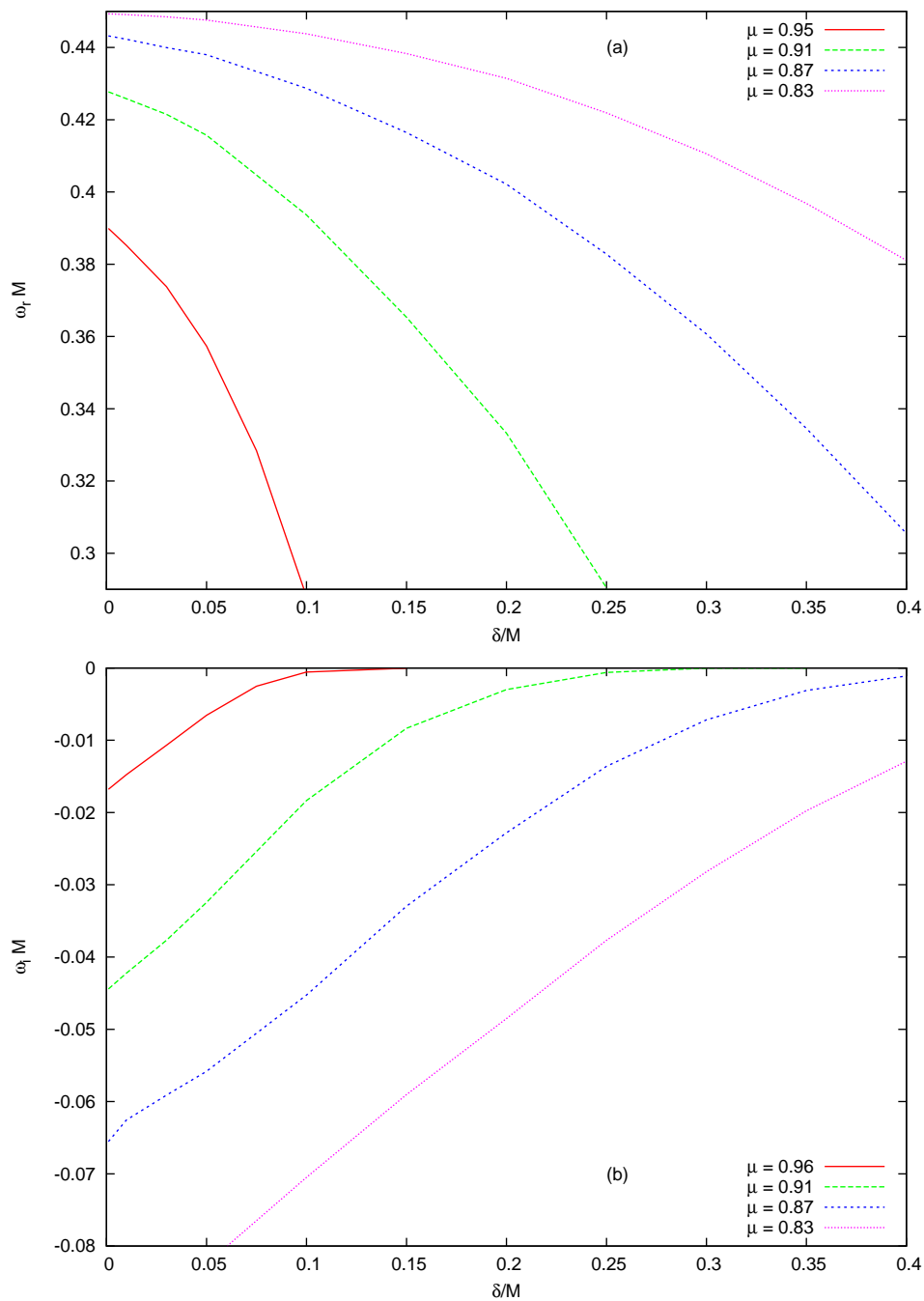


Figura 4.10: Comportamento das freqüências quasi-normais em função de  $\delta$  para diferentes valores de  $\mu$ . No gráfico superior (a) temos a parte real ( $\omega_R$ ) das freqüências (período da oscilação) e no gráfico inferior (b) temos a parte imaginária ( $\omega_I$ ) das freqüências (termo de decaimento).



# Capítulo 5

## Conclusão

Ao longo deste trabalho, pudemos chegar a algumas conclusões a respeito dos MQN's de perturbações dos sistemas gravitacionais estudados.

No estudo da métrica de Vaidya 4-dimensional, verificamos que as frequências  $\omega_R(v)$  e  $\omega_I(v)$  dos MQN's de perturbações escalares e eletromagnéticas são inversamente proporcionais à massa  $m(v)$ , apresentando um comportamento adiabático para funções de massa que variam lentamente.

Foi possível verificar também que, nos casos em que  $|m''(v)|$  é da mesma ordem (ou maior) do que  $\omega_I(v)$ , as frequências passam a exibir um comportamento inercial, que implica um tempo de relaxamento do sistema durante o qual as frequências retornam para seus valores assintóticos.

A comparação entre as funções de massa lineares e hiperbólicas mostrou que os efeitos inerciais aparecem primeiramente para as funções de massa lineares  $C^0$ . Porém, não foi possível detectar diferenças entre os dois tipos de função de massa nos casos de funções de massa com variações mais pronunciadas.

Em nosso estudo de mini buracos negros em um espaço com dimensões extras foi mostrado que, para valores típicos de massa inicial e taxa de variação da massa por evaporação de Hawking, as frequências dos MQN's de perturbações escalares mantêm o comportamento adiabático durante a quase totalidade do processo de evaporação. As frequências  $\omega_R(v)$  e  $\omega_I(v)$  são inversamente proporcionais ao horizonte aparente  $n$ -dimensional da solução, numa generalização do resultado obtido para a métrica de Vaidya 4-dimensional.

Além disso, ainda para valores típicos dos parâmetros, mostramos que o espectro de potências da perturbação é bastante próximo do espectro de potências da perturbação de um buraco negro com massa constante. Ambos os espectros apresentam um pico bastante pronunciado em uma frequência  $f_{max}$ . A partir do espectro de potências para um buraco negro de Schwarzschild foi possível determinar analiticamente o intervalo  $\sqrt{\omega_R^2 - \omega_I^2} \leq f_{max} \leq \sqrt{\omega_R^2 + \omega_I^2}$ .

Conseqüentemente, temos um possível método para determinar, a partir dos picos do espectro de potências das perturbações (mais provavelmente eletromagnéticas) de mini buracos negros gerados no LHC em experiências com colisão de partículas elementares, as frequências dos MQN's e outras informações como a massa inicial do buraco negro e o número de dimensões extras. Concluimos que os fótons presentes após a colisão e a criação do mini buraco negro podem ser espalhados pelo buraco negro, gerando um sinal altamente energético, cujo espectro de potências terá as características descritas aqui. Este sinal, possivelmente isotrópico, poderá ser mais uma assinatura observacional da existência destes objetos, ajudando a confirmar as novas teorias de gravidade com dimensões extras.

Na análise do gravastar, conseguimos determinar um vínculo que limita os parâmetros da solução e as configurações possíveis em termos da massa  $M$ , da compacidade  $\mu$  e da espessura  $\delta$  da casca de matéria. Foi também possível verificar que um vínculo semelhante, porém menos restritivo, também existe para o modelo alternativo com pressões anisotrópicas, para o qual foi realizada a análise de perturbações axiais.

O modelo do gravastar estudado se mostrou estável frente a perturbações axiais. As frequências  $\omega_R$  e  $\omega_I$  foram obtidas, e o seu comportamento para variações dos parâmetros  $M$ ,  $\mu$  e  $\delta$  foi analisado, resultando que  $\omega_R$  tende para o valor  $\omega_R^{Sch}$  de Schwarzschild para  $\mu \rightarrow 1/2$  e  $\delta \rightarrow 0$ . Os valores de  $|\omega_I|$  para o gravastar são até 10 vezes menores do que o valor correspondente para o buraco negro de Schwarzschild, indicando que as ondas gravitacionais axiais espalhadas por um gravastar decaem mais lentamente. Estes resultados nos permitem concluir que gravastares e buracos negros podem ser discernidos com base em seu espectro de modos quasi-normais.

Foram obtidos os modos superiores da perturbação até  $n = 3$ , para configurações nas quais o decaimento é mais lento e a contribuição dos modos com  $n > 0$  é mais pronunciada. Estas contribuições aumentam com  $\mu$  e  $\delta$  crescentes.



# Referências Bibliográficas

- [1] T. Regge and J. Wheeler, Phys. Rev. **108**, 1063 (1957).
- [2] J. H. Taylor, L. A. Fowler, and P. M. McCulloch, Nature **277**, 437 (1979).
- [3] E. Seidel, Class. Quant. Grav. **21**, S339 (2004).
- [4] R. H. Price and J. Pullin, Phys. Rev.Lett. **72**, 3297 (1994).
- [5] F. Zerilli, Phys. Rev.Lett. **24**, 737 (1970).
- [6] K. Kokkotas and B. Schmidt, Living Rev. Rel. **2**, 2 (1999), gr-qc/9909058.
- [7] E. Abdalla, C. B. M. H. Chirenti, and A. Saa, gr-qc/0703071.
- [8] C. Shao, B. Wang, E. Abdalla, and R. Su, Phys. Rev. **D71**, 044003 (2005), gr-qc/0410025.
- [9] E. Abdalla, C. B. M. H. Chirenti, and A. Saa, Phys. Rev. **D74**, 084029 (2006), gr-qc/0609036.
- [10] P. C. Vaidya, Proc. Indian Acad. Sci. **A33**, 264 (1951).
- [11] D. Finkelstein, Phys. Rev. **110**, 965 (1958).
- [12] P. C. Vaidya, Nature **171**, 260 (1953).
- [13] B. Waugh and K. Lake, Phys. Rev. **D34**, 2978 (1986).
- [14] F. Giroto and A. Saa, Phys. Rev. **D70**, 084014 (2004), gr-qc/0406067.
- [15] M. Cahill and G. McVittie, J. Math. Phys. **11**, 1382 (1970).
- [16] W. Israel, Nuovo Cimento **B44**, 1 (1966).
- [17] W. Israel, Nuovo Cimento **B48**, 463 (1967).
- [18] J. M. Bardeen, Phys. Rev. Lett. **46**, 382 (1981).

- [19] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Spacetime* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973), p. 312.
- [20] R. Ruffini, J. Tiomno, and C. Vishveshwara, *Lett. Nuovo Cimento* **3**, 212 (1972).
- [21] J. A. Wheeler, *Geometrodynamics* (Academic Press, New York, 1962), p. 203.
- [22] V. Cardoso and J. P. S. Lemos, *Phys. Rev.* **D64**, 084017 (2001), gr-qc/0105103.
- [23] C. Gundlach, R. H. Price, and J. Pullin, *Phys. Rev.* **D49**, 883 (1994).
- [24] S. Iyer, *Phys. Rev.* **D35**, 3632 (1987).
- [25] S. Hawking, *Comm. math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [26] A. Saa, gr-qc/0701153.
- [27] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, *Phys. Lett.* **B429**, 263 (1998).
- [28] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, *Phys. Rev.* **D59**, 0806004 (1999).
- [29] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, *Phys. Lett.* **B436**, 257 (1998).
- [30] P. Kanti, *Int. J. Mod. Phys.* **A19**, 4899 (2004).
- [31] S. Dimopoulos and G. Landsberg, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 161602 (2001).
- [32] M. Cavaglia, *Int. J. Mod. Phys.* **A18**, 1854 (2003).
- [33] D. M. Gingrich, *Int. J. Mod. Phys.* **A21**, 6653 (2006).
- [34] M. Cavaglia, S. Das, and R. Maartens, *Class. Quantum Grav.* **15**, L205 (2003).
- [35] D. N. Page, *Phys. Rev.* **D13**, 198 (1976).
- [36] D. N. Page, *Phys. Rev.* **D14**, 3260 (1976).
- [37] B. R. Iyer and C. V. Vishveshwara, *Pramana* **32**, 749 (1989).
- [38] A. Chodos and E. Myers, *Ann. Phys.* **156**, 412 (1984).
- [39] L. Crispino, A. Higuchi, and G. Matsas, *Phys. Rev.* **D63**, 124008 (2001).
- [40] V. Cardoso, J. P. Lemos, and S. Yoshida, *Phys. Rev.* **D69**, 044004 (2004).
- [41] R. A. Konoplya, *Phys. Rev.* **D68**, 024018 (2003).
- [42] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).

- [43] V. Cardoso, M. Cavaglia, and L. Gualtieri, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 071301 (2006).
- [44] V. Cardoso, M. Cavaglia, and L. Gualtieri, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 219902 (2006).
- [45] C. B. M. H. Chirenti and L. Rezzolla, arXiv:0706.1513.
- [46] C. Cattoen, T. Faber, and M. Visser, *Class. Quant. Grav.* **22**, 4189 (2005), gr-qc/0505137.
- [47] P. O. Mazur and E. Mottola, gr-qc/0109035.
- [48] P. O. Mazur and E. Mottola, *Proc.Nat.Acad.Sci.* **111**, 9545 (2004), gr-qc/0407075.
- [49] M. A. Abramowicz, W. Kluzniak, and J. P. Lasota, *Astron. Astrophys.* **396**, L31 (2002), astro-ph/0207270.
- [50] C. W. Misner, K. S. Thorn, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, New York, 1997), pp. 505–516, 551–556.
- [51] M. Visser and D. L. Wiltshire, *Class. Quant. Grav.* **21**, 1135 (2004), gr-qc/0310107.
- [52] B. M. N. Carter, *Class. Quant. Grav.* **22**, 4551 (2005), gr-qc/0509087.
- [53] N. Bilić, G. B. Tupper, and R. D. Viollier, *JCAP* **2**, 13 (2006), astro-ph/0503427.
- [54] F. Lobo, *Class. Quant. Grav.* **23**, 1525 (2006), gr-qc/0505137.
- [55] F. S. N. Lobo and A. V. B. Arellano, *Class. Quant. Grav.* **24**, 1069 (2007), gr-qc/0611083.
- [56] M. R. Mbonye and D. Kazanas, *Phys. Rev.* **D72**, 024616 (2005), gr-qc/0506111.
- [57] A. DeBenedictis, D. Horvat, S. Ilijic, S. Kloster, and K. Viswanathan, *Class.Quant.Grav.* **23**, 2303 (2006), gr-qc/0511097.
- [58] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, Oxford, 2004).
- [59] S. Chandrasekhar and V. Ferrari, *Proc. R. Soc. Lond.* **A432**, 247 (1991).
- [60] S. Chandrasekhar and V. Ferrari, *Proc. R. Soc. Lond.* **A434**, 449 (1991).
- [61] I. Dymnikova and E. Galaktionov, *Class. Quant. Grav.* **22**, 2331 (2005), gr-qc/0409049.
- [62] A. E. Broderick and R. Narayan, *Class. Quant. Grav.* **24**, 659 (2007), gr-qc/0701154.
- [63] I. Dymnikova, *Gen. Rel. Grav.* **24**, 235 (1992).
- [64] H. P. Nollert, *Class. Quantum Grav.* **16**, R159 (1999).

- [65] K. Dev and M. Gleiser, *Gen. Rel. Grav.* **24**, 1793 (2002), [astro-ph/0012265](#).
- [66] K. Dev and M. Gleiser, *Gen. Rel. Grav.* **25**, 1435 (2003), [gr-qc/0303077](#).
- [67] E. Abdalla and D. Giugno, [gr-qc/0611023](#).
- [68] K. D. Kokkotas, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **268**, 1015 (1994).
- [69] K. D. Kokkotas, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **277**, 1599 (1995).
- [70] E. Abdalla and D. Giugno, [gr-qc/0612183](#).

# Apêndice A

## A Equação de Perturbação Escalar para a Métrica de Vaidya

As perturbações escalares em uma métrica conhecida seguem a equação de Klein-Gordon,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu} \right) = 0. \quad (\text{A-1})$$

A métrica de Vaidya em coordenadas de cone de luz tem a forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -f \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ -f & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A-2})$$

com as relações

$$f(u, v) = 2B(v) \frac{\partial r}{\partial u}, \quad (\text{A-3})$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = -B(v) \left( 1 - \frac{2m(v)}{r(u, v)} \right), \quad (\text{A-4})$$

obtidas pelas equações de Einstein. Deste modo, temos

$$\sqrt{-g} = fr^2 \sin \theta. \quad (\text{A-5})$$

Escrevendo o campo  $\Psi(u, v, \theta, \phi)$  como

$$\Psi(u, v, \theta, \phi) = \frac{\psi(u, v)}{r} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (\text{A-6})$$

na eq. (A-1), onde  $Y_{\ell m}$  são os harmônicos esféricos usuais, que satisfazem a equação

$$\left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \ell(\ell + 1) \right] Y_{\ell m} = 0 \quad (\text{A-7})$$

com  $m = -\ell, -(\ell - 1), \dots, 0, \dots, \ell - 1, \ell$ , obtemos a seguinte equação para  $\psi(u, v)$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = \left[ -\frac{\ell(\ell + 1)}{2r^2} f + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} \right] \psi. \quad (\text{A-8})$$

Utilizando agora as equações (A-3) e (A-4), temos

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} = -\frac{m(v)}{r^2} f. \quad (\text{A-9})$$

Substituindo (A-9) em (A-8), obtemos finalmente

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = - \left[ \frac{\ell(\ell + 1)}{2r^2} + \frac{m(v)}{r^3} \right] f \psi. \quad (\text{A-10})$$

## Apêndice B

### A Equação de Perturbação Eletromagnética para a Métrica de Vaidya

As perturbações eletromagnéticas seguem as equações de Maxwell sem fontes,

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0, \quad (\text{B-1})$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (\text{B-2})$$

Substituindo nas equações (B-1) e (B-2) o ansatz [20, 21, 22]

$$A_\mu(u, v, \theta, \phi) = \sum_{\ell m} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a_{\ell m}(u, v)}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} \\ -a_{\ell m}(u, v) \sin \theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{\ell m} Y_{\ell m} \\ E_{\ell m} Y_{\ell m} \\ K_{\ell m} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} \\ H_{\ell m} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} \end{pmatrix} \right], \quad (\text{B-3})$$

e tomando a métrica na forma (A-2), obtemos quatro equações. As equações para  $x^\mu = v$  e  $x^\mu = u$  são, respectivamente, (a partir de agora deixamos de indicar os índices subscritos  $\ell$  e  $m$ , por questão de conveniência),

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{r^2}{f} \left( \frac{\partial E}{\partial u} - \frac{\partial H}{\partial v} \right) \right] = -\ell(\ell + 1) \left( \frac{\partial K}{\partial u} - H \right), \quad (\text{B-4})$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{r^2}{f} \left( \frac{\partial H}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial u} \right) \right] = -\ell(\ell + 1) \left( \frac{\partial K}{\partial v} - E \right). \quad (\text{B-5})$$

Derivando (B-4) em relação a  $v$  e (B-5) em relação a  $u$ , somando as duas equações resultantes e definindo  $\psi(u, v)$  como

$$\psi = \frac{r^2}{f} \left( \frac{\partial E}{\partial u} - \frac{\partial H}{\partial v} \right), \quad (\text{B-6})$$

Obtemos a equação

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = -\frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} f \psi. \quad (\text{B-7})$$

As equações para  $x^\mu = \theta$  e  $x^\mu = \phi$  não são linearmente independentes, e podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} & \left( 2 \frac{\partial^2 K}{\partial u \partial v} - \frac{\partial H}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial u} \right) \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + 2im \frac{\partial^2 a}{\partial u \partial v} Y - \\ & - im \frac{f}{r^2} a \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y = 0, \end{aligned} \quad (\text{B-8})$$

onde, tomando a parte real e a parte imaginária iguais a zero separadamente, e utilizando a eq. (A-7), obtemos

$$\frac{\partial^2 a}{\partial u \partial v} = -\frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} f a, \quad (\text{B-9})$$

$$2 \frac{\partial^2 K}{\partial u \partial v} - \frac{\partial H}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial u} = 0. \quad (\text{B-10})$$

Comparando as equações (B-7) e (B-9), vemos que as funções  $\psi(u, v)$  e  $a(u, v)$  seguem a mesma equação diferencial, e da eq. (B-10) vemos que as funções  $E(u, v)$ ,  $H(u, v)$  e  $K(u, v)$  não são todas linearmente independentes.



# Apêndice C

## A Equação de Perturbação Gravitacional Axial para o Gravastar

Para obter a equação para perturbações gravitacionais axiais, seguimos o tratamento apresentado em [59]. A métrica perturbada é escrita como

$$dS^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} (d\phi - \omega dt - q_2 dr - q_3 d\theta)^2 + e^{2\mu_2} dr^2 + e^{2\mu_3} d\theta^2, \quad (\text{C-1})$$

onde  $\nu$ ,  $\psi$ ,  $\mu_2$  e  $\mu_3$  mantêm seus valores não perturbados,

$$\nu = \int_0^r \frac{2m(r) + 8\pi r^3 p_r}{r(r - 2m(r))} dr + \nu_0, \quad (\text{C-2})$$

$$e^{2\psi} = r^2 \sin^2 \theta, \quad (\text{C-3})$$

$$e^{-2\mu_2} = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (\text{C-4})$$

$$e^{2\mu_3} = r^2, \quad (\text{C-5})$$

e

$$m(r) = \int_0^r 4\pi \rho r^2 dr, \quad (\text{C-6})$$

enquanto  $\omega$ ,  $q_2$  e  $q_3$ , que definem a perturbação, são funções de  $r$  e  $t$ . Convém notar que as convenções utilizadas neste apêndice para a forma da métrica (C-1) são ligeiramente diferentes das adotadas no capítulo 4, não afetando, porém o resultado final para a equação de perturbação. Além disso, adotamos aqui  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \phi, r, \theta)$ .

Como as perturbações axiais não causam movimentos no fluido de que o objeto é composto, temos que as perturbações em primeira ordem em  $\omega$ ,  $q_2$  e  $q_3$  são dadas pelas

equações [58]

$$\delta G_{12} = \delta R_{12} = 0, \quad (\text{C-7})$$

$$\delta G_{12} = \delta R_{12} = 0, \quad (\text{C-8})$$

que são escritas, respectivamente, como

$$(e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3} Q_{23})_{,\theta} + e^{3\psi-\nu-\mu_2+\mu_3} Q_{02,0} = 0, \quad (\text{C-9})$$

$$(e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3} Q_{23})_{,r} - e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3} Q_{03,0} = 0, \quad (\text{C-10})$$

onde

$$Q_{AB} = q_{A,B} - q_{B,A} \quad \text{e} \quad Q_{A0} = q_{A,0} - \omega_{,A} \quad (A = 2, 3). \quad (\text{C-11})$$

Utilizando a relação

$$Q_{20,\theta} - Q_{30,r} = (q_{23} - q_{32})_{,0} = Q_{23,0}, \quad (\text{C-12})$$

obtemos a partir das equações (C-9) e (C-10) a equação de onda

$$[e^{-3\psi+\nu-\mu_2+\mu_3} (e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3} Q_{23})_{,r}]_{,r} + [e^{-3\psi+\nu+\mu_2-\mu_3} (e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3} Q_{23})_{,\theta}]_{,\theta} = Q_{23,0,0}. \quad (\text{C-13})$$

Fazendo a substituição

$$e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3} Q_{23} = X(r) C_{\ell+2}^{-\frac{3}{2}}(\theta), \quad (\text{C-14})$$

onde  $C_n^\nu$  é a função de Gegenbauer, que satisfaz a equação

$$\left[ \frac{d}{d\theta} \sin^{2\nu} \theta \frac{d}{d\theta} + n(n+2\nu) \sin^{2\nu} \theta \right] C_n^\nu(\theta) = 0, \quad (\text{C-15})$$

e utilizando as equações (C-3) e (C-5), e as equações de campo para a métrica (C-1) com o tensor de energia-momento  $T^\mu_\nu = \text{diag}[-\rho, p_r, p_t, p_t]$ , podemos reescrever a eq. (C-13) como

$$X_{,r,r} - \frac{e^{2\mu_2}}{r} \left\{ 2 + r^2 \left[ 4\pi(\rho - p) - \frac{6m(r)}{r^3} \right] \right\} X_{,r} - e^{2\mu_2} \frac{\mu^2}{r^2} X - e^{2(\mu_2-\nu)} X_{,0,0} = 0, \quad (\text{C-16})$$

onde  $\mu^2 = 2n = (\ell - 1)(\ell + 2)$ . Definindo agora a coordenada tartaruga

$$r^* = \int_0^r e^{-\nu+\mu_2} dr, \quad (\text{C-17})$$

e tomando

$$X = rZ, \quad (\text{C-18})$$

a eq. (C-16) pode ser finalmente reescrita como

$$\left( \frac{d^2}{dr^{*2}} - \frac{d^2}{dt^2} \right) Z = VZ, \quad (\text{C-19})$$

onde

$$V = \frac{e^{2\nu}}{r^3} [\ell(\ell+1)r + 4\pi r^3(\rho - p_r) - 6m(r)]. \quad (\text{C-20})$$

# Apêndice D

## Códigos dos Programas Utilizados - I

```
#-----#
# Geometria: Vaidya em D dimensoes #
# #
# Programas gerados: dinamica, teste_u, horizonte, fftq #
# #
# Versao: final #
#-----#
#
# Shell usada:
#
SHELL = /bin/tcsh
#
# Compilador
#
F77 = lf95
LINKFLAGS = -O
COMPILEFLAGS = --chkglobal
#####
# dinamica:
# Programa principal
#
dinamica_obj = ./dinamica.o \
./a.o \
./aa.o \
./b.o \
./f.o \
./funcd.o \
./rtsafe.o \
./rkutta.o \
./pot2.o \
./pot2_el.o \
./psin2.o \
./psiv0.o \
./psiu0.o
#
# dinamica
#
dinamica: ./dinamica.exe
```

```

        touch dinamica
#
# dinamica.exe
#
./dinamica.exe: $(dinamica_obj)
    $(F77) -o $@ $^
#####
# teste_u:
# Determinacao de UM (limite de validade de rtsafe)
#
teste_u_obj = ./teste_u.o \
    ./rtsafe.o \
    ./a.o \
    ./aa.o \
    ./funcd.o
#
# teste_u
#
teste_u: ./teste_u.exe
    touch teste_u
#
# teste_u.exe
#
./teste_u.exe: $(teste_u_obj)
    $(F77) $(LINKFLAGS) -o $@ $^
#####
# horizonte:
# Determinacao de AA (massa assintotica para o horizonte de eventos)
#
horizonte_obj = ./horizonte.o \
    ./a.o \
    ./b.o \
    ./vaidya3.o
#
#horizonte
#
horizonte: ./horizonte.exe
    touch horizonte
#
# horizonte.exe
#
./horizonte.exe: $(horizonte_obj)
    $(F77) $(LINKFLAGS) -o $@ $^
#####
# fftq:
# Fast Fourier Transform com precisao quadrupla
#
fftq_obj = ./fftq.o \
    ./four1q.o
#
#fftq
#
fftq: ./fftq.exe
    touch fftq
#
#fftq.exe
#
./fftq.exe: $(fftq_obj)
    $(F77) $(LINKFLAGS) -o $@ $^
#####
#
# Compilacao padrao
#
./%.o: %.f
    $(F77) $(COMPILEFLAGS) -c -o $@ $<

```

```

#####

*****
PROGRAM DINAMICA
*****
*   DECLARACAO DOS PARAMETROS   *
*
*   NN,HH ESTAO RELACIONADOS COM N,H,IT EM RKUTTA
*   (NN-1)*HH = N*H, NN-1 = N/IT, HH = H*IT
*
*****
IMPLICIT NONE
*
*   variaveis
REAL*16 U, V
INTEGER J, I, K
*
*   parametros
REAL*16 VO, UO, UF, HH, HU
INTEGER L, NN, NU
PARAMETER (NN = 1001, NU = 1001, HH = 0.1q0, L = 3)
PARAMETER (UF = 100.0q0, VO = 0.0q0, UO = 0.0q0)
*
*   vetores
REAL*16 ROLD(NN), RNEW(NN), PSIOLD(NN), PSINEW(NN)
*
*   funcoes e subrotinas
REAL*16 A, PSIVO, PSIUO, PSIN2
EXTERNAL A, PSIVO, PSIUO, PSIN2, RKUTTA
*
*   variaveis comuns
INTEGER D
COMMON D
OPEN(unit=11,FILE="pert.dat",STATUS="UNKNOWN")
D = 4
U = UO
V = VO
DO J=1,NN
    PSIOLD(J) = PSIVO(V)
    V = V + HH
ENDDO
CALL RKUTTA(ROLD,U,VO,NN)
DO I=1,NU
    HU = HH
    U = U + HU
    IF(U.GT.UF) THEN
        DO K=1,NN
            WRITE(11,'(2(1x,g24.16))')v0 + qfloat(k-1)*hh,
+                PSINEW(k)
        ENDDO
        STOP
    ENDIF
    PSINEW(1) = PSIUO(U)
    CALL RKUTTA(RNEW,U,VO,NN)
    V = VO
    DO J=1,NN-1
        V = V + HH
        PSINEW(J+1) = PSIN2(PSINEW(J),PSIOLD(J+1),PSIOLD(J),V,U,
+            ROLD(J),RNEW(J),ROLD(J+1),RNEW(J+1),HU,HH,L)
    ENDDO
    DO K=1,NN
        ROLD(K) = RNEW(K)
        PSIOLD(K) = PSINEW(K)
    ENDDO
ENDDO
CLOSE(11)
END
*****
*****
SUBROUTINE RKUTTA (RR,U,VO,NN)
*****

```

```

      IMPLICIT NONE
*
      variaveis
      INTEGER N, IT, NN, UM, I, II, J, UM2
      REAL*16 EPS, H, U, V0, V, R, XK1, XK2, XK3, XK4, u_as, PI, r_h
*
      parametros
      PARAMETER (EPS = 1.0q-6, H = 0.001q0, UM = 120.0q0)
      PARAMETER (N = 100000, IT = 100)
*
      vetores
      REAL*16 RR(NN)
*
      funcoes
      REAL*16 FF, RTSAFE, AA
      EXTERNAL RTSAFE
*
      variaveis comuns
      INTEGER D
      COMMON D
      V = V0
      IF(U.LE.UM) THEN
         R = -0.5q0*RTSAFE(U)
      ELSE
*
      D = 4
         R = 2.0q0*AA(V)+QEXP(-(0.5q0*U+2.0q0*AA(V))/(2.0q0*AA(V)))
*
      D = 5
         u_as = 2.0q0*qsqrt(AA(V))*
*
      +      (qexp(-(U+2.0q0*qsqrt(AA(V)))/qsqrt(AA(V)))+1.0q0)/
*
      +      (qexp(-(U+2.0q0*qsqrt(AA(V)))/qsqrt(AA(V)))-1.0q0)
*
         R = -0.5q0*u_as
*
      D = 6
         PI = 4.0q0*qatan(1.0q0)
         r_h = qcbrrt(2.0q0*AA(V)/3.0q0)
         u_as = -2.0q0*(r_h +
*
      +      qexp(-(0.5q0*U + r_h*(1.0q0 - qlong(3.0q0*r_h**2)/6.0q0
*
      +      - PI/(3.0q0*qsqrt(3.0q0))))*3.0q0/r_h)
*
         R = -0.5q0*u_as
      ENDIF
      RR(1) = R
      II = 0
      DO I=1,N
         II = II + 1
         XK1 = H*FF(V,R)
         XK2 = H*FF(V+H/2.0q0,R+XK1/2.0q0)
         XK3 = H*FF(V+H/2.0q0,R+XK2/2.0q0)
         XK4 = H*FF(V+H,R+XK3)
         R = R + XK1/6.0q0 + XK2/3.0q0 + XK3/3.0q0 + XK4/6.0q0
         V = V + H
         IF (II.GE.IT) THEN
            II = 0
            J = I/IT +1
            RR(J) = R
         ENDIF
         IF (R.LT.EPS) THEN
            WRITE(*,*)' REACH THE SINGULARITY!!! '
            WRITE(*,*)'U = ',U,'R = ',RR(1),'u = ',rtsafe(U)
            STOP
         ENDIF
      ENDDO
      RETURN
      END
*
      REAL*16 FUNCTION FF(V,R)
      IMPLICIT NONE
      REAL*16 V, R, B, A
      INTEGER D
      COMMON D
      FF = -B(V)*(1.0q0-2.0q0*A(V)/(qfloat(D-3)*R**(D-3)))
      RETURN

```

```

END
*****
*****
REAL*16 FUNCTION B(V)
*****
IMPLICIT NONE
REAL*16 V
INTEGER D
COMMON D
B = -0.5q0
RETURN
END
*****
*****
REAL*16 FUNCTION A(V)
*****
IMPLICIT NONE
REAL*16 V,RHO,V1,V2,M1,M2,VM,C1,C2,MF,AN,M0,TO
INTEGER D
COMMON D
* Massa Linear com 2 patamares
* V1 = 74.5q0
* V2 = 75.5q0
* M1 = 0.5q0
* M2 = 0.35q0
* IF(V.LE.V1)THEN
* A = M1
* ELSE IF(V.GT.V1.AND.V.LT.V2)THEN
* A = M1+((M2-M1)/(V2-V1))*(V-V1)
* ELSE
* A = M2
* ENDIF
*
* Tangente Hiperbolica *
* M1 = 0.5q0
* M2 = 0.65q0
* RHO = 0.8q0
* VM = 75.0q0
* A = 0.5q0*(M2-M1)*(1.0q0 + QTANH(RHO*(V-VM))) + M1
*
* Raiz Cubica + tangente hiperbolica em n dimensoes *
AN = 0.02q0
M0 = 1.0q0
MF = 0.1q0
V1 = 15.0q0
T0 = qfloat(D-3)/qfloat(D-1)*(1.0q0/an)*(m0)**(
+ float(D-1)/float(D-3))
C2 = M0*(1.0q0-v1/t0)**(float(D-3)/float(D-1))-MF
rho = qfloat(D-3)/qfloat(D-1)*(m0/C2)*(1.0d0-v1/t0)**
+ (-2.0/float(D-1))
C1 = MF + C2
A = m0*(1.0q0-v/t0)**(float(D-3)/float(D-1))
IF(V.GE.V1) THEN
A = C1 - C2*qtanh(rho*(v-v1)/t0)
ENDIF
RETURN
END
*****
*****
REAL*16 FUNCTION rtsafe(X)
*****
IMPLICIT NONE
INTEGER MAXIT
REAL*16 x1,x2,xacc,X,V,AA
EXTERNAL funcd

```

```

PARAMETER (MAXIT=1000)
INTEGER j
REAL*16 df,dx,dxold,f,fh,fl,temp,xh,xl
INTEGER D
COMMON D
V = 0.0q0
xacc = 1.0q-16
*   D = 4
*   x1 = -2.0q0*(2.0q0*AA(V)+xacc)
*   D = 5
*   x1 = -2.0q0*(qsqrt(AA(V))+xacc)
*   D = 6
*   x1 = -2.0q0*(qcbirt(2.0q0*AA(V)/3.0q0)+xacc)
x2 = -500.0q0
call funcd(x1,X,fl,df)
call funcd(x2,X,fh,df)
if(fl.eq.0.0q0)then
  rtsafe=x1
  return
else if(fh.eq.0.0q0)then
  rtsafe=x2
  return
else if(fl.lt.0.0q0)then
  xl=x1
  xh=x2
else
  xh=x1
  xl=x2
endif
rtsafe=0.5q0*(x1+x2)
dxold=qabs(x2-x1)
dx=dxold
call funcd(rtsafe,X,f,df)
do 11 j=1,MAXIT
  if(((rtsafe-xh)*df-f)*((rtsafe-xl)*df-f).ge.0.0q0.or.
+   qabs(2.0q0*f).gt.qabs(dxold*df) ) then
    dxold=dx
    dx=0.5q0*(xh-xl)
    rtsafe=xl+dx
    if(xl.eq.rtsafe)return
  else
    dxold=dx
    dx=f/df
    temp=rtsafe
    rtsafe=rtsafe-dx
    if(temp.eq.rtsafe)return
  endif
  if(qabs(dx).lt.xacc) return
  call funcd(rtsafe,X,f,df)
  if(f.lt.0.0q0) then
    xl=rtsafe
  else
    xh=rtsafe
  endif
11 continue
pause 'rtsafe exceeding maximum iterations'
return
END

C (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software #>,13.
*****
*****
SUBROUTINE funcd(uu,U,f,df)
*****
IMPLICIT NONE
REAL*16 V, AA

```



```

REAL*16 uu, U, f, df, r_h
INTEGER D
COMMON D
V = 0.0q0
* D = 4
f = 0.5q0*uu - 2.0q0*AA(V)*QLOG(-0.5q0*uu-2.0q0*AA(V)) - 0.5q0*U
df = 0.5q0 - AA(V)/(-0.5q0*uu-2.0q0*AA(V))
* D = 5
f = 0.5q0*uu + 0.5q0*qsqrt(AA(V))*
* + qlong(qabs(qsqrt(AA(V))-0.5q0*uu))-
* + 0.5q0*qsqrt(AA(V))*qlong(qabs(qsqrt(AA(V))+0.5q0*uu))
* + - 0.5q0*U
* df = -uu**2/(8.0q0*AA(V)-2.0q0*uu)
* D = 6
r_h = qcbrrt(2.0q0*AA(V)/3.0q0)
f = 0.5q0*uu - (r_h/3.0q0)*qlong(-0.5q0*uu-r_h) +
* + (r_h/6.0q0)*qlong(0.25q0*uu**2 - 0.5q0*r_h*uu + r_h**2) +
* + (r_h/qsqrt(3.0q0))*
* + qatan((1.0q0 - 0.5q0*uu*qcbrrt(12.0q0/AA(V)))/qsqrt(3.0q0)) -
* + 0.5q0*U
* df = 0.5q0 + (r_h/6.0q0)/(-0.5q0*uu - r_h) +
* + (r_h/12.0q0)*(uu - r_h)/(uu**2/4.0q0 - 0.5q0*r_h*uu + r_h**2)
* + - r_h*qcbrrt(12.0q0/AA(V))/6.0q0/
* + (1.0q0 + ((1.0q0 - 0.5q0*uu*qcbrrt(12.0q0/AA(V)))
* + /qsqrt(3.0q0))**2)
END
*****
*****
REAL*16 FUNCTION AA(V)
*****
*****
IMPLICIT NONE
REAL*16 V
INTEGER D
COMMON D
* Massa Linear com 2 patamares
* M1 = 0.5,M2 = 0.35,V1 = 60,V2 = 90
* AA = 0.49999999999999911704617150071849921q0
*
* Tangente Hiperbolica
* M1 = 0.5,M2 = 0.65,RHO = 0.8,VM = 75
* AA = 0.5000000000000001196894995610050063q0
*
* Raiz Cubica + tangente hiperbolica em n dimensoes
* D=4, AN=0.02,V1=15,MF=0.1
* AA = 0.92085039416497692419658489598500041q0
RETURN
END
*****
*****
REAL*16 FUNCTION PSIU0(U)
*****
*****
IMPLICIT NONE
REAL*16 U
INTEGER D
COMMON D
PSIU0 = 0.0q0
RETURN
END
*****
*****
REAL*16 FUNCTION PSIVO(V)
*****
*****
IMPLICIT NONE
REAL*16 V, VC, SIGMA
INTEGER D

```

```

COMMON D
VC = 10.0q0
SIGMA = 1.0q0
PSIVO = QEXP(-(V-VC)**2/(2.0q0*SIGMA**2))
RETURN
END
*****
*****
REAL*16 FUNCTION PSIN2(PSIW,PSIE,PSIS,V,U,R1,R2,R3,R4,HU,HH,L)
*****
*****
IMPLICIT NONE
REAL*16 PSIW, PSIE, PSIS, V, U, R1, R2, R3, R4, HH, HU
REAL*16 POT2, POT2_EL
INTEGER L
INTEGER D
COMMON D
* PERTURBACAO ESCALAR
PSIN2 = PSIW+PSIE-PSIS - HH*HU*POT2(V,U,R1,R2,R3,R4,HU,HH,L)
+ *(PSIW+PSIE)/8.0q0
* PERTURBACAO ELETROMAGNETICA
* PSIN2 = PSIW+PSIE-PSIS - HH*HU*POT2_EL(V,U,R1,R2,R3,R4,HU,HH,L)
* + *(PSIW+PSIE)/8.0q0
RETURN
END
*****
*****
REAL*16 FUNCTION POT2(V,U,R1,R2,R3,R4,HU,HH,L)
*****
*****
IMPLICIT NONE
REAL*16 V, U, R1, R2, R3, R4, HU, HH, A, F, AA, R, RU1, RU2
INTEGER L
INTEGER D
COMMON D
RU1 = 0.5q0*(R3 + R1)
RU2 = 0.5q0*(R4 + R2)
R = 0.5q0*(RU1 + RU2)
POT2 = 2.0q0*(QFLOAT(L*(L+D-3))/R**2 +
+ QFLOAT((D-2)*(D-4))/(4.0q0*r**2) +
+ QFLOAT((D-2)**2)*2.0q0*A(V-HH)/(4.0q0*qfloat(D-3)*R** (D-1)))
+ *F(V,RU1,RU2,HU)
RETURN
END
*****
*****
REAL*16 FUNCTION POT2_EL(V,U,R1,R2,R3,R4,HU,HH,L)
*****
*****
IMPLICIT NONE
REAL*8 V, U, R1, R2, R3, R4, HU, HH, F
REAL*8 RU1, RU2, R
INTEGER L
INTEGER D
COMMON D
RU1 = 0.5q0*(R3 + R1)
RU2 = 0.5q0*(R4 + R2)
R = 0.5q0*(RU1 + RU2)
POT2_EL = 2.0q0*(QFLOAT(L*(L+1))/R**2)
+ *F(V,RU1,RU2,HU)
RETURN
END
*****
*****
REAL*16 FUNCTION F (V,R1,R2,HU)
*****
*****
IMPLICIT NONE
REAL*16 B, V, DER, R1, R2, HU

```

```

INTEGER D
COMMON D
F = 2.0q0*B(V)*DER(R1,R2,HU)
RETURN
END

*
REAL*16 FUNCTION DER(R1,R2,HU)
IMPLICIT NONE
REAL*16 R1, R2, HU
INTEGER D
COMMON D
DER = (R2-R1)/HU
RETURN
END

*****
*****
PROGRAM TESTE_u
*****
IMPLICIT NONE
REAL*16 U, uu, UI, UF, RTSAFE,V,AA,u_as, r_h, PI
INTEGER I
INTEGER NPONTOS, D
COMMON D
D = 6
V = 1.0q0
UI = -100.0q0
UF = 100.0q0
NPONTOS = 1000
OPEN(unit=1,FILE="teste_u.dat",STATUS="UNKNOWN")
*
DO I=1, NPONTOS
  U = UI + (UF-UI)*QFLOAT(I-1)/QFLOAT(NPONTOS-1)
  uu = RTSAFE(U)
*
D = 4
*
u_as = -4.0q0*AA(V)-2.0q0*QEXP(-(0.5q0*U+2.0q0*AA(V))/
*
+ (2.0q0*AA(V)))
*
D = 5
*
u_as = 2.0q0*qsqrt(AA(V))*
*
+ (qexp(-(U+2.0q0*qsqrt(AA(V)))/qsqrt(AA(V)))+1.0q0)/
*
+ (qexp(-(U+2.0q0*qsqrt(AA(V)))/qsqrt(AA(V)))-1.0q0)
*
D = 6
  PI = 4.0q0*qatan(1.0q0)
  r_h = qcbrr(2.0q0*AA(V)/3.0q0)
  u_as = -2.0q0*(r_h +
+ qexp(-(0.5q0*U + r_h*(1.0q0 - qlong(3.0q0*r_h**2)/6.0q0
+ - PI/(3.0q0*qsqrt(3.0q0))))*3.0q0/r_h)
  WRITE(1,*) U, uu, u_as
ENDDO
CLOSE(1)
END

*****
*****
PROGRAM HORIZONTE
*****
IMPLICIT NONE
REAL*16 A,AA,RH,R
INTEGER control,N,I,J
INTEGER D
COMMON D
PARAMETER(N = 30)
EXTERNAL VAIDYA3
OPEN(unit=1,FILE="horizonte.dat",STATUS="UNKNOWN")
D = 6
R = 0.8q0
RH = R
WRITE(1,*)RH

```

```

CALL VAIDYA3(R,control)
DO I=1,N
  DO J=1,10
    CALL VAIDYA3(R,control)
    IF(control.EQ.1)THEN
      RH = RH + 0.9q0*10.0q0**(-I)
      WRITE(1,*)RH,control,J,I
      GOTO 20
    ELSE
      RH = RH - 10.0q0**(-I)
      WRITE(1,*)RH,control,J,I
    ENDIF
    R = RH
  ENDDO
20  R = RH
  ENDDO
  IF(control.EQ.1)THEN
    RH = RH + 10.0q0**(-I)
    WRITE(1,*)RH
  ENDIF
  AA = 0.5q0*qfloat(D-3)*RH**(D-3)
  WRITE(1,*)AA
  CLOSE(1)
  END
*****
*****
Subroutine VAIDYA3(R,control)
*****
IMPLICIT NONE
REAL*16 H,V,R,XK1,XK2,XK3,XK4, EPS,F,B,A
REAL*16 M2, MF, MO
INTEGER IT, I, II, N, control
PARAMETER (EPS=5.0q-6)
parameter (H = 0.001q0,N = 250000,IT = 100)
INTEGER D
COMMON D
open(unit=2,FILE="vaidya3.dat",STATUS="UNKNOWN")
V = 0.0q0
control = 0
*   M2 = 0.35q0
MF = 0.1q0
MO = 1.0q0
WRITE(2,*)V,R
II = 0
DO I=1,N
  II = II + 1
  XK1 = H*(V ,R )
  XK2 = H*(V+H/2.0q0,R+XK1/2.0q0)
  XK3 = H*(V+H/2.0q0,R+XK2/2.0q0)
  XK4 = H*(V+H ,R+XK3 )
  R = R + XK1/6.0q0 + XK2/3.0q0 + XK3/3.0q0 + XK4/6.0q0
  V = V + H
  IF (II.GE.IT) THEN
    II = 0
    WRITE(2,*)V,R
  ENDIF
*   IF (R.LT.EPS) THEN
*   IF (R.LT.2.0q0*M2) THEN
  IF (R.LT.2.0q0*MF) THEN
    IF (II.NE.0) WRITE(2,*)V,R
    CLOSE(2)
    control = 1
    return
  ENDIF
  IF (R.GT.2.5q0*MO) THEN

```

```

        IF (II.NE.0) WRITE(2,*)V,R
        CLOSE(2)
        return
    ENDIF
ENDDO
CLOSE(2)
RETURN
END
*
REAL*16 FUNCTION F(V,R)
IMPLICIT NONE
REAL*16 V,R,B,A
INTEGER D
COMMON D
F = -B(V)*(1.0q0-2.0q0*A(V)/(qfloat(D-3)*R**(D-3)))
RETURN
END
*****
*****
Program FFTQ
*****
*   Importante: Verificar nn e h ! nn deve ser potencia de 2
IMPLICIT NONE
INTEGER isign,nn,n
PARAMETER (nn = 1024, isign = 1)
REAL*16 data(2*nn),h,t,f
INTEGER i
EXTERNAL FOUR1Q
OPEN(unit=1,FILE="transformada.dat",STATUS="UNKNOWN")
OPEN(unit=7,FILE="espectro.dat",STATUS="UNKNOWN")
OPEN(unit=8,FILE="pert.dat",STATUS="UNKNOWN")
n = 2*nn
t = 0.0q0
h = 0.1q0
10 format(27x,g24.16)
do i=1,n,2
    read(8,10) data(i)
    data(i+1) = 0.0
    t = t + h
enddo
call four1q(data,nn,isign)
do i=1,n,2
    if(i.LE.nn+1)then
        f = (real(i)-1.0q0)/(2.0q0*real(nn)*h)
    elseif(i.GT.nn+1)then
        f = -(real(nn)/2.0q0-(real(i)-(real(nn)+1.0q0))/2.0q0)
+         / (real(nn)*h)
    endif
    WRITE(1,'(6(1x,g24.16))')(i-1)/2,f,h*data(i),h*data(i+1),
+     sqrt((h*data(i))**2+(h*data(i+1))**2),
+     atan(data(i+1)/data(i))
    WRITE(7,'(2(1x,g24.16))')f,(h*data(i))**2+(h*data(i+1))**2
enddo
CLOSE(1)
CLOSE(7)
CLOSE(8)
END
*****
*****
SUBROUTINE four1q(data,nn,isign)
*****
INTEGER isign,nn
REAL*16 data(2*nn)
INTEGER i,istep,j,m,mmax,n
REAL*16 tempi,tempo

```

```

REAL*16 theta,wi,wpi,wpr,wr,wtemp,pi
pi = 4.0q0*qatan(1.0q0)
n=2*nn
j=1
do 11 i=1,n,2
  if(j.gt.i)then
    tempr=data(j)
    tempi=data(j+1)
    data(j)=data(i)
    data(j+1)=data(i+1)
    data(i)=tempr
    data(i+1)=tempi
  endif
  m=n/2
1  if ((m.ge.2).and.(j.gt.m)) then
    j=j-m
    m=m/2
    goto 1
  endif
  j=j+m
11 continue
  mmax=2
2  if (n.gt.mmax) then
    istep=2*mmax
    theta=2.0q0*pi/(isign*mmax)
    wpr=-2.q0*qsine(0.5q0*theta)**2
    wpi=qsine(theta)
    wr=1.q0
    wi=0.q0
    do 13 m=1,mmax,2
      do 12 i=m,n,istep
        j=i+mmax
        tempr=wr*data(j)-wi*data(j+1)
        tempi=wr*data(j+1)+wi*data(j)
        data(j)=data(i)-tempr
        data(j+1)=data(i+1)-tempi
        data(i)=data(i)+tempr
        data(i+1)=data(i+1)+tempi
12      continue
        wtemp=wr
        wr=wr*wpr-wi*wpi+wr
        wi=wi*wpr+wtemp*wpi+wi
13      continue
        mmax=istep
      goto 2
    endif
  return
END
C (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software #>,13.
*****

```

# Apêndice E

## Códigos dos Programas Utilizados - II

```
#-----#
# Geometria: Gravastar #
# Programas gerados: dinamica #
# Versao: totalmente numerica #
#-----#
#
# Shell usada:
#
SHELL = /bin/tcsh
#
# Compilador
#
F77 = gfortran-4.0 -Wall -g
#####
# dinamica:
# Programa principal
#
dinamica_obj = ./dinamica.o \
./psiv0.o \
./psiu0.o \
./psin.o \
./find_x.o \
./g.o \
./f_r.o \
./f_t.o \
./h.o \
./m.o \
./rho.o \
./p_r.o \
./pot_int.o \
./rkutta.o \
./rkutta2.o \
./novo_xr.o \
./f_t2.o
#
# dinamica
#
dinamica: ./dinamica.exe
```

```

touch dinamica
#
# dinamica.exe
#
./dinamica.exe: $(dinamica_obj)
$(F77) -o $@ $^
#####
#
# Compilacao padrao
#
./%.o: %.f
$(F77) -c -o $@ $<
#####

*****
PROGRAM DINAMICA
*****
IMPLICIT NONE
*
variaveis usadas no programa
REAL*8 v, u, t, gama_r2
INTEGER i, j, k
*
parametros usados no programa
REAL*8 v0, u0, hv, hu, ri, rf
INTEGER nv, nu, L, np
PARAMETER(v0 = 0.1d0, u0 = 0.0d0, hv = 0.1d0, hu = 0.1d0)
PARAMETER(ri = 0.0d0, rf = 500.0d0, np = 5001)
PARAMETER(nv = 10001, nu = 10001, L = 2)
*
vetores usados no programa
REAL*8 psiold(nv), psinew(nv), vec_r(np), vec_x(np), vec_gama(np)
REAL*8 novo_r(nv), novo_x(nv), novo_gama(nv), novo_pot(nv)
*
funcoes utilizadas pelo programa
REAL*8 psiv0, psiu0, psin, find_x, find_x2, h, g
EXTERNAL psiv0, psiu0, psin, find_x, find_x2, h, g
*
subrotinas utilizadas pelo programa
EXTERNAL xr, rkutta, rkutta2, novo_xr
*
variaveis comuns
REAL*8 pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
common pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
pi = 4.0d0*datan(1.0d0)
m_s = 1.0d0
r1 = 1.95d0
r2 = 2.1d0
alfa = 2.2135d0
rho0 = m_s*(r2-r1)**3/(4.0d0*pi*((r2**6-r1**6)/3.0d0-3.0d0*(r2+r1)*
+ (r2**5-r1**5)/5.0d0+3.0d0*r1*r2*(r2**4-r1**4)/2.0d0+
+ (r2**3-3.0d0*r1*r2**2)*(r2**3-r1**3)/3.0d0+
+ r1**3*(r2-r1)**3/3.0d0))
a = 2.0d0*rho0/(r2-r1)**3
b = -3.0d0*rho0*(r2+r1)/(r2-r1)**3
c = 6.0d0*rho0*r1*r2/(r2-r1)**3
d = rho0*(r2**3-3.0d0*r1*r2**2)/(r2-r1)**3
open(unit=1,file="estrela.dat",status="unknown")
*
Condicoes iniciais
u = u0
do i=1,nv-1
v = v0 + dfloat(i-1)*hv
psiold(i) = psiv0(v)
enddo
*
Gera vetor vec_gama com rkutta
call rkutta(vec_gama,vec_r,np,h)
*
Gera vetor vec_x com rkutta2
call rkutta2(vec_gama,vec_x,vec_r,np,g)
*
Gera novo_x e novo_r
call novo_xr(u0,v0,hu,hv,nv,np,vec_r,vec_x,novo_r,novo_x)
*
Gera novo_gama

```



```

call novo_xr(u0,v0,hu,hv,nv,np,vec_gama,vec_x,novo_gama,novo_x)
gama_r2 = find_x(r2,np,vec_gama,vec_r)
* Gera novo_pot
do i=1,nv
  novo_pot(i) = pot_int(novo_r(i),L,novo_gama(i),gama_r2)
enddo
* Evolui a perturbacao
do i=1,nu-2
  u = u0 + dfloat(i)*hu
  psinew(1) = psiu0(u)
  do j=1,nv-i-1
    v = v0 + dfloat(i+j)*hv
    t = 0.5d0*(v+u)
    psinew(j+1)=
+     psin(psinew(j),psiol(j+2),psiol(j+1),hv,hu,
+     novo_pot(j))
    if(novo_x(j).ge.10.0d0-hu/4.0d0.and.
+     novo_x(j).le.10.0d0+hu/8.0d0)then
      write(1,*)t, psinew(j+1)
    endif
  enddo
  do k=1,nv
    psiol(k) = psinew(k)
  enddo
enddo
close(1)
END
*****
*****
SUBROUTINE RKUTTA (Y,XT,NN,F_RK)
*****
IMPLICIT NONE
INTEGER nn, i, ii, j
REAL*8 x0, x, y0, xk1, xk2, xk3, xk4
INTEGER n, it
REAL*8 h_rk
PARAMETER (n = 50000, it = 10, h_rk = 0.01d0)
REAL*8 y(nn),xt(nn)
REAL*8 f_rk
EXTERNAL f_rk
REAL*8 pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
common pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
x0 = 0.0d0
y0 = 0.0d0
x = x0
y(1) = y0
xt(1) = x0
ii = 0
do i=1,n
  ii = ii + 1
  xk1 = h_rk*f_rk(x)
  xk2 = h_rk*f_rk(x+h_rk/2.0d0)
  xk3 = h_rk*f_rk(x+h_rk/2.0d0)
  xk4 = h_rk*f_rk(x+h_rk)
  y0 = y0 + xk1/6.0d0 + xk2/3.0d0 + xk3/3.0d0 + xk4/6.0d0
  x = x + h_rk
  if (ii.ge.it) then
    ii = 0
    j = i/it + 1
    y(j) = y0
    xt(j) = x
  endif
enddo
xt(nn) = h_rk*n
RETURN

```

```

END
*****
*****
REAL*8 FUNCTION H(R)
*****
IMPLICIT NONE
REAL*8 r
REAL*8 p_r, m, rho
EXTERNAL p_r, m, rho
REAL*8 pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
common pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
if(0.0d0.eq.r)then
  h = 0.0d0
else
  h = 2.0d0*(m(r)+4.0d0*pi*p_r(r)*r**3)/(r*(r-2.0d0*m(r)))
endif
RETURN
END
*****
*****
REAL*8 FUNCTION RHO(R)
*****
IMPLICIT NONE
*   variaveis usadas no programa
REAL*8 r
*   variaveis comuns
REAL*8 pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
common pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
if(0.0d0.le.r.and.r.le.r1)then
  rho = rho0
elseif(r1.lt.r.and.r.lt.r2)then
  rho = a*r**3+b*r**2+c*r+d
elseif(r2.le.r)then
  rho = 0.0d0
endif
RETURN
END
*****
*****
REAL*8 FUNCTION M(R)
*****
IMPLICIT NONE
REAL*8 r
REAL*8 rho
REAL*8 pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
common pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
if(0.0d0.le.r.and.r.le.r1)then
  m = 4.0d0*pi*rho0*r**3/3.0d0
elseif(r1.lt.r.and.r.lt.r2)then
  m = 4.0d0*pi*((a*r**6/6.0d0+b*r**5/5.0d0+c*r**4/4.0d0+
+      d*r**3/3.0d0)-(a*r1**6/6.0d0+b*r1**5/5.0d0+c*r1**4/4.0d0+
+      (d-rho0)*r1**3/3.0d0))
elseif(r2.le.r)then
  m = 4.0d0*pi*((a*r2**6/6.0d0+b*r2**5/5.0d0+c*r2**4/4.0d0+
+      d*r2**3/3.0d0)-(a*r1**6/6.0d0+b*r1**5/5.0d0+c*r1**4/4.0d0+
+      (d-rho0)*r1**3/3.0d0))
endif
RETURN
END
*****
*****
REAL*8 FUNCTION P_R(R)
*****
IMPLICIT NONE
REAL*8 r

```

```

REAL*8 rho, y
EXTERNAL rho, y
REAL*8 pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
common pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
p_r = (alfa-(alfa+1.0d0)*(rho(r)/rho0)**2)*rho(r)**2/rho0
RETURN
END
*****
*****
REAL*8 FUNCTION P_T(R)
*****
IMPLICIT NONE
REAL*8 r
REAL*8 rho, m, p_r, dp_rdr, f_r
REAL*8 pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
common pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
if(0.eq.r)then
  p_t = -rho0
else
  p_t = 0.5d0*r*(dp_rdr(r)+(rho(r)+p_r(r))*
+ (m(r)+4.0d0*pi*p_r(r)*r**3)/(r**2*f_r(r)))+p_r(r)
endif
RETURN
END
*****
*****
SUBROUTINE RKUTTA2 (GT,Y,XT,NN,G)
*****
IMPLICIT NONE
INTEGER nn, i, ii, j
REAL*8 x0, x, y0, xk1, xk2, xk3, xk4
INTEGER n, it
REAL*8 h_rk
PARAMETER (n = 50000, it = 10, h_rk = 0.01d0)
REAL*8 gt(nn), y(nn),xt(nn)
REAL*8 g
EXTERNAL g
REAL*8 pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
common pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
x0 = 0.0d0
y0 = 0.0d0
x = x0
y(1) = y0
xt(1) = x0
ii = 0
do i=1,n
  ii = ii + 1
  xk1 = h_rk*g(x,gt,xt,nn)
  xk2 = h_rk*g(x+h_rk/2.0d0,gt,xt,nn)
  xk3 = h_rk*g(x+h_rk/2.0d0,gt,xt,nn)
  xk4 = h_rk*g(x+h_rk,gt,xt,nn)
  y0 = y0 + xk1/6.0d0 + xk2/3.0d0 + xk3/3.0d0 + xk4/6.0d0
  x = x + h_rk
  if (ii.ge.it) then
    ii = 0
    j = i/it +1
    y(j) = y0
    xt(j) = x
  endif
enddo
xt(nn) = h_rk*n
RETURN
END
*****
*****

```

```

REAL*8 FUNCTION G(r,vec_gama,vec_r,np)
*****
IMPLICIT NONE
REAL*8 r
INTEGER np
REAL*8 vec_gama(np), vec_r(np)
REAL*8 f_r, f_t
EXTERNAL f_r, f_t
REAL*8 pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
common pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
g = 1.0d0/dsqrt(f_r(r)*f_t(r,vec_gama,vec_r,np))
RETURN
END
*****
*****
REAL*8 FUNCTION F_R(R)
*****
IMPLICIT NONE
REAL*8 r
REAL*8 m
EXTERNAL m
REAL*8 pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
common pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
if(r.eq.0.0d0)then
  f_r = 1.0d0
else
  f_r = 1.0d0-2.0d0*m(r)/r
endif
RETURN
END
*****
*****
REAL*8 FUNCTION F_T(r,vec_gama,vec_r,np)
*****
IMPLICIT NONE
INTEGER np
REAL*8 r, gama_r, gama_r2
REAL*8 vec_gama(np), vec_r(np)
REAL*8 m, find_x
EXTERNAL m, find_x
REAL*8 pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
common pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
gama_r = find_x(r,np,vec_gama,vec_r)
gama_r2 = find_x(r2,np,vec_gama,vec_r)
if(r.le.r2)then
  f_t = dexp(gama_r)*(1.0d0-2.0d0*m(r2)/r2)*dexp(-gama_r2)
elseif(r.gt.r2)then
  f_t = 1.0d0-2.0d0*m(r2)/r
endif
RETURN
END
*****
*****
REAL*8 FUNCTION FIND_X(XP,NPONTOS,VEC_R,VEC_X)
*****
IMPLICIT NONE
REAL*8 xp
INTEGER npontos, i, j
REAL*8 vec_r(npontos), vec_x(npontos)
REAL*8 pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
common pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
if(xp.gt.vec_x(npontos))then
  write(*,*)'xp = ',xp,' maior do que vec_x(npontos)= ',
+   vec_x(npontos)
  find_x = vec_r(npontos)

```

```

        return
    endif
    if(xp.lt.vec_x(1))then
        write(*,*)'xp = ',xp,' menor do que vec_x(1) = ',vec_x(1)
        find_x = vec_r(1)
        return
    endif
    do i=1,npontos
        if(vec_x(i).eq.xp)then
            find_x = vec_r(i)
            return
        elseif(vec_x(i).lt.xp.and.vec_x(i+1).gt.xp)then
            j = i
            goto 10
        endif
    enddo
10  find_x = (vec_r(j+1)-vec_r(j))*(xp-vec_x(j))/(vec_x(j+1)-vec_x(j))
    +      +vec_r(j)
    RETURN
    END
*****
*****
SUBROUTINE NOVO_XR(u0,v0,hu,hv,nv,np,vec_r,vec_x,novo_r,novo_x)
*****
*****
    IMPLICIT NONE
    REAL*8 u0,v0,hu,hv,u,v
    INTEGER i, j, nv, np
    REAL*8 vec_r(np), vec_x(np), novo_r(nv), novo_x(nv)
    REAL*8 find_x
    EXTERNAL find_x
    REAL*8 r1
    common r1
    i = 1
    u = u0 + dfloat(i)*hu
    do j=1, nv-i-1
        v = v0 + dfloat(i+j)*hv
        novo_x(j) = 0.5d0*(v-u)
        novo_r(j) = find_x(novo_x(j),np,vec_r,vec_x)
    enddo
    RETURN
    END
*****
*****
    REAL*8 FUNCTION PSIU0(u)
*****
*****
    IMPLICIT NONE
    REAL*8 u
    REAL*8 pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
    common pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
    psiu0 = 0.0d0
    RETURN
    END
*****
*****
    REAL*8 FUNCTION PSIV0(v)
*****
*****
    IMPLICIT NONE
    REAL*8 v, vc, sigma
    REAL*8 pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
    common pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
    vc = 10.0d0
    sigma = 1.0d0
    psiv0 = dexp(-(v-vc)**2/(2.0d0*sigma**2))
    RETURN
    END

```

```

*****
*****
REAL*8 FUNCTION POT_INT(R,L,gama_r,gama_r2)
*****
IMPLICIT NONE
REAL*8 r, gama_r, gama_r2
INTEGER L, np
REAL*8 rho, p_r, m, f_t2
EXTERNAL rho, p_r, m, f_t2
REAL*8 pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
common pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
pot_int = f_t2(r,gama_r,gama_r2)*(dfloat(L*(L+1))*r+
+ 4.0d0*pi*r**3*(rho(r)-p_r(r))-6.0d0*m(r))/r**3
RETURN
END
*****
*****
REAL*8 FUNCTION F_T2(r,gama_r,gama_r2)
*****
IMPLICIT NONE
INTEGER np
REAL*8 r, gama_r, gama_r2
REAL*8 m
EXTERNAL m
REAL*8 pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
common pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
if(r.le.r2)then
  f_t2 = dexp(gama_r)*(1.0d0-2.0d0*m(r2)/r2)*dexp(-gama_r2)
elseif(r.gt.r2)then
  f_t2 = 1.0d0-2.0d0*m(r2)/r
endif
RETURN
END
*****
*****
REAL*8 FUNCTION PSIN(PSIW,PSIE,PSIS,HV,HU,POT)
*****
IMPLICIT NONE
REAL*8 psiw, psie, psis, hv, hu, pot, factor
INTEGER L,np
REAL*8 pot_int
EXTERNAL pot_int
REAL*8 pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
common pi, m_s, r1, r2, rho0, a, b, c, d, alfa
factor = hv*hu*pot/16.0d0
psin = (psiw+psie)*(1.0d0-factor)/(1.0d0+factor)-psis
RETURN
END
*****

```



