Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Teorias de Campo Quasetopológicas Discretas em Dimensão 3

Nelson de Oliveira Yokomizo

SBI-IFUSP
305.M8 T4459

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física para a obtenção do título de Doutor em Ciências

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Paulo Teotonio Sobrinho (Orientador / IFUSP)
Prof. Dr. João Carlos Alves Barata (IFUSP)
Prof. Dr. Domingos Humberto Urbano Marchetti (IFUSP)
Prof. Dr. José Francisco Gomes (IFT / UNESP)
Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira (IFSC / USP)

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
T4459
INSTITUTO DE FÍSICA

São Paulo
2005

Prof. Celso Luiz Lima
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Yokomizo, Nelson de Oliveira

Teorias de campo quasetopológicas discretas em dimensão 3. São Paulo , 2006

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física – Depto. de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho
Área de Concentração: Física

Unitermos:
1. Teoria de campos;
2. Topologia combinatória;
3. Álgebras de Hopf.

USP/IF/SBI-003/2006

Resumo

Teorias de campo discretas euclideanas invariantes por transformações que preservam a topologia e o volume dos espaços são estudadas em três dimensões. Teorias com tal simetria são chamadas de quasetopológicas. Os modelos são definidos em diagramas de Heegard, interpretados como uma generalização das triangulações e redes cúbicas. Quando um diagrama descreve uma triangulação, o seu gênero g corresponde ao número de tetraedros. Uma função de partição $Z(\mathcal{D})$ é atribuída a cada diagrama $\mathcal{D}$. Nas teorias quasetopológicas, $Z(\mathcal{D})$ depende apenas de g e da topologia de $\mathcal{D}$. Ou seja, as operações de simetria são homeomorfismos que preservam o gênero. Nas triangulações, tem-se invariância por homeomorfismos que preservam o número de tetraedros. Provou-se que tais operações sempre podem ser escritas como composições de três operações elementares, batizadas de *moves* quasetopológicos. Impondo-se invariância de Z pela ação dos *moves*, chegou-se a um sistema de equações que caracteriza as teorias quasetopológicas. Mostrou-se que a cada álgebra de Hopf corresponde uma solução simples do sistema. Uma nova generalização das álgebras de Hopf foi proposta como *ansatz* para uma solução mais geral, mas as condições de simetria a reduziram a uma álgebra de Hopf. Nesta generalização, a relação de biálgebra foi substituída por uma relação modificada mais fraca. Identidades tradicionais das álgebras de Hopf deixam de ser verificadas, mas uma série de relações semelhantes foi obtida. A generalização estudada sugere uma família de outras generalizações, com modificações diversas da relação de biálgebra, as quais podem ser usadas na busca de novos exemplos de teorias quasetopológicas.

Abstract

Euclidean discrete field theories invariant under topology and volume preserving transformations are studied in three-dimensions. Theories with such symmetry are called quasitopological. The models are defined in Heegard diagrams, which are interpreted as a generalization of triangulations and cubic lattices. When a diagram describes a triangulation, its genus g corresponds to the number of tetrahedra. A partition function $Z(\mathcal{D})$ is assigned to each diagram $\mathcal{D}$. In quasitopologica theories, $Z(\mathcal{D})$ depends only on g and on the topology of $\mathcal{D}$. In other words, the symmetry operations are genus preserving homeomorphisms. In the case of triangulations, there is invariance under homeomorphisms which preserve the number of tetrahedra. It was proved that such operations can always be written as compositions of three elementary operations, denoted quasipological moves. Imposing invariance of Z under the action of the moves, a system of equations was found which characterizes quasitopological theories. It was shown that to each Hopf algebra corresponds a simple solution of the equations. A new generalization of Hopf algebras was proposed as an *ansatz* for a more general solution, but the symmetry conditions reduced it to a Hopf algebra. In this generalization, the bialgebra relation was replaced by an weaker modified one. Traditional identities of Hopf algebras are not verified, but a series of similar relations was obtained. The generalization considered suggests a family of other generalizations, with varied modifications of the bialgebra relation, which can be used in the search for new examples of quasitopological theories.

Sumário

Agradecimentos 3

Capítulo 1. Introdução 4

Capítulo 2. Campos Discretos Tridimensionais 8

2.1. Variedades Topológicas e Triangulações 9
- 2.1.1. Variedades topológicas 9
- 2.1.2. Colagem de variedades com fronteira 10
- 2.1.3. Complexos topológicos 12

2.2. Partições de Heegard 13
- 2.2.1. *Handlebodies* e partições de Heegard 13
- 2.2.2. Partições associadas a triangulações 14
- 2.2.3. Homeomorfismos de partições 15
- 2.2.4. Espaços quasetopológicos 17

2.3. Diagramas de Heegard 18
- 2.3.1. Decomposições de *handlebodies* 18
- 2.3.2. Bipartições e diagramas de Heegard 20
- 2.3.3. Diagramas de Heegard abstratos 22
- 2.3.4. Diagrama de uma triangulação 23

2.4. Campos discretos em diagramas de Heegard 26
- 2.4.1. Estrutura geral do modelo 26
- 2.4.2. Teorias de gauge na rede 28
- 2.4.3. Modelos topológicos 30
- 2.4.4. Modelos quasetopológicos 33

Capítulo 3. Simetria Topológica e Quasetopológica 34

3.1. Operações em Diagramas Triniônicos 35
- 3.1.1. Colagens equivalentes 37
- 3.1.2. Automorfismos de H_1 38
- 3.1.3. *Flip moves* 39
- 3.1.4. *Two-point moves* 40

3.2. Operações em Diagramas Triniônicos Abstratos 41
- 3.2.1. *Flip moves* 42
- 3.2.2. Automorfismos da superfície 44
- 3.2.3. *Two-point moves* 45

3.3. Prova de Ergodicidade dos *Moves* 46
3.4. Ação de *Flip Moves* em Decomposições Triniônicas Sólidas 48
3.4.1. Suzuki *moves* 48
3.4.2. Grafo associado a uma decomposição triniônica 48
3.4.3. Teorema dos *flips* 51
Apêndice: Suzuki *moves* e *flips*. 56

Capítulo 4. Representação Algébrica da Simetria Quasetopológica 62

4.1. Interpretação algébrica dos *moves* 63
4.1.1. Automorfismos da superfície 63
4.1.2. Inversão de orientação 65
4.1.3. *Two-point moves* 68
4.1.4. *Flip moves* 69
4.2. O sistema de equações do modelo quasetopológico 75
4.2.1. Álgebras de Hopf modificadas 76
4.2.2. *Flip moves* e a relação de biálgebra 78
4.2.3. *Flip moves* e a relação de biálgebra modificada 80
4.3. Resolução do *Ansatz* 82
4.3.1. Resolução da equação dos *flip moves* 82
4.3.2. Equivalência com álgebras de Hopf 85
4.3.3. Generalizações alternativas das Álgebras de Hopf 87

Capítulo 5. Conclusão 90

Referências Bibliográficas 93

Agradecimentos

Ao Prof. Paulo Teotônio Sobrinho pela contínua motivação e pelo acompanhamento atento dedicado a este trabalho. Ao Prof. A. P. Balachandran pelas sugestões e críticas feitas em diversas fases de desenvolvimento da pesquisa. Ao Prof. João Carlos Alves Barata pelo auxílio no período de conclusão da tese, e pela sugestão certeira para a resolução de uma comprida equação algébrica.

A meus pais, pelo constante apoio e pela confiança depositada. A Cláudia dos Reis e Cunha, sempre presente para renovar os ânimos e desarmar aborrecimentos. E a Luciana Tiemi, por ter tornado bom este último ano, apesar das tensões com a parte final da pesquisa.

A Márcio Fernando Cornélio e Armando Maccori, pela ajuda com os computadores e pela paciência tolerante com minha ignorância em Linux e Latex.

Aos funcionários do Departamento de Física Matemática, pela ajuda em inúmeras ocasiões. À Fapesp, pelo suporte financeiro.

Capítulo 1

Introdução

A motivação para o estudo das teorias de campo quasetopológicas [1] tem origem em dificuldades técnicas encontradas no tratamento matemático das teorias de campo discretas. Estas teorias são em geral insolúveis, à exceção de exemplos bidimensionais [2] ou de modelos extremamente idealizados, como as teorias topológicas de campo [3], por exemplo. Em modelos mais realistas é impossível o tratamento exato. A pesquisa é feita com modelos auxiliares, simplificados, nos quais aspectos específicos dos problemas são abordados de modo independente. Há uma vasta gama de modelos, e dentre estes se encontram as teorias quasetopológicas.

De modo geral, o interesse é voltado às versões discretas das teorias de gauge e da relatividade geral. No contínuo, ambas se baseiam em equações de campo não-lineares, o que dificulta o tratamento analítico e restringe os campos de aplicação. A discretização visa contornar este problema. Novas dificuldades são encontradas, mas ainda assim se chega a resultados importantes deste modo. A formulação das teorias de gauge na rede [4], por exemplo, permitiu o estudo do fenômeno de confinamento de quarks e deu acesso ao regime não-perturbativo da cromodinâmica quântica [5].

O uso de redes em gravitação foi iniciado por Regge em 1961 [6], num trabalho onde apresenta uma versão poliédrica da relatividade geral, definida em dimensões arbitrárias do espaço-tempo. A equação de Einstein é substituída por equações algébricas, que são tratadas com métodos computacionais [7]. As variáveis fazem o papel do tensor métrico na teoria, e são interpretadas como comprimentos. As equações minimizam uma ação S_{Regge}. O método é batizado de "cálculo de Regge" e foi aplicado com sucesso em gravitação clássica, como, por exemplo, em (3+1)-d, na análise da evolução temporal de modelos simples de universo [8].

A aplicação do cálculo de Regge à gravitação quântica em três dimensões levou em 1967 à formulação do modelo de Ponzano-Regge [9], no qual o campo gravitacional é descrito como uma superposição quântica dos estados da teoria de Regge. Este modelo foi o primeiro exemplo de uma série de teorias de campo topológicas, e o descrevemos a seguir com dois propósitos. O primeiro é ilustrar o conceito de *state sum model*, que

nas teorias discretas faz o papel da integral de trajetória de Feynman. O segundo é explicar o motivo pelo qual as teorias de campo topológicas são solúveis.

O modelo é definido em espaços triangulados, ou seja, decompostos em uma série de tetraedros colados ao longo de faces comuns, formando um poliedro Δ. Todo espaço tridimensional pode ser triangulado [10]. A cada aresta j do poliedro se atribui um comprimento $L_j = n_j + 1/2$, onde $n_j \geq 0$ é inteiro ou semi-inteiro. A cada distribuição de comprimentos $\{n_j; j \in \Delta\}$ em Δ se atribui um peso estatístico $\sigma_{PR}(n_j)$. Estes pesos são o análogo discreto do integrando $exp(iS)$ das integrais de trajetória. A função de partição Z_{PR} é definida como

$$Z_{PR} = \sum_{\{n_j\}} \sigma_{PR}(n_j),$$

onde a soma é feita sobre todas as configurações $\{n_j\}$ permitidas. Os pesos estatísticos σ_{PR} são definidos a partir de pesos locais σ_t por uma expressão com a forma

$$\sigma_{PR} = \prod_{t \in \Delta} \sigma_t,$$

onde a produtória envolve todos os tetraedros t de Δ, e σ_t depende apenas dos comprimentos L_j na fronteira de t.

No limite de comprimentos grandes, $\sigma_{PR} \simeq exp(iS_{Regge})$ [9], e a soma se aproxima de uma integral nos comprimentos L_j. A função de partição Z_{PR} é interpretada como a integral de Feynman da teoria de Regge. Valores esperados e amplitudes de transição são escritos em termos de Z_{PR}, como exposto em [11], por exemplo.

Há uma variedade de outros *state sum models*, nos quais a estrutura de campos com pesos locais aparece em diversas variações. Os pesos locais podem estar em faces, arestas ou tetraedros, por exemplo, e os campos em vértices ou arestas. No entanto, a dinâmica é estudada sempre do mesmo modo, em termos de uma função de partição Z dada como a soma do produto dos pesos locais sobre todas as configurações (ou "estados") do campo. Quando a soma pode ser computada em redes com um número arbitrário de componentes, diz-se que o modelo é solúvel. Em geral este cálculo é impossível.

O que torna as teorias topológicas solúveis são suas simetrias. Um modelo é simétrico em relação a um grupo de transformações da rede se Z é invariante sob tais transformações. Com isso o cálculo da função de partição é facilitado. O valor de Z em uma rede Δ pode ser computado numa rede Δ' mais simples, desde que ambas se relacionem por simetrias do modelo. Em modelos com invariância topológica, a simplificação é severa. Todas as triangulações de um dado espaço M possuem a mesma função de partição $Z(M)$. Em particular, $Z(M)$ não depende do número de triângulos.

Assim, basta calcular Z em uma triangulação com um número mínimo de triângulos para que o modelo seja solúvel no espaço. Isto em geral pode ser feito.

As teorias de campo quasetopológicas discretas foram definidas em 1998 por Teotônio Sobrinho e Cunha [1] como deformações de teorias de campo topológicas. A invariância topológica é enfraquecida de modo a que a função de partição $Z(M, n)$ dependa não só da topologia M da rede, mas também do número n de blocos na mesma. As demais características da rede são irrelevantes. Um modelo quasetopológico é solúvel se $Z(M, n)$ pode ser calculado, para cada n, em alguma triangulação contendo n blocos.

O caso bidimensional foi estudado de forma geral em [1]. Nesta dimensão, teorias quasetopológicas são solúveis e de fácil classificação. Entre seus exemplos se encontram as teorias de gauge na rede. No limite contínuo, descrevem teorias invariantes por transformações que preservam a área da superfície, dentre as quais as teorias de Yang-Mills. Em outro limite, a grandeza n se torna irrelevante e a teoria tem comportamento topológico. Por este motivo se diz que são deformações de teorias topológicas.

Nesta tese, a extensão ao caso tridimensional é formulada. O problema central abordado é o da caracterização das teorias quasetopológicas discretas tridimensionais e a prova de sua existência. Para isto, define-se uma classe suficientemente geral de modelos discretos tridimensionais, na qual são deduzidas condições de invariância quasetopológica, e exemplos de soluções são apresentados. Usa-se o formalismo do modelo topológico de Kuperberg [12] para a definição desta classe de modelos. A simetria topológica é enfraquecida e as novas condições de invariância estudadas.

O motivo da escolha da invariância quasetopológica para pesquisa deve-se principalmente a sua simplicidade. Em três dimensões há poucos modelos solúveis. Os mais realistas são intratáveis. Busca-se então a partir de modelos solúveis elaborar deformações mais complexas que ainda permitam um tratamento exato. Espera-se deste modo chegar gradualmente a modelos mais realistas. Os modelos topológicos descrevem a influência da topologia de um espaço sobre a dinâmica dos campos em questão. As teorias quasetopológicas descrevem a influência do volume dos espaços.

Em relação ao caso bidimensional, a maior diferença se encontra no modo como o espaço é discretizado. Modelos discretos geralmente são definidos em triangulações ou em redes cúbicas, mas discretizações alternativas podem ser adotadas. Os modelos estudados neste trabalho são definidos em partições de Heegard [13]. As partições de Heegard são mais maleáveis para a definição de operações de simetria, o que facilita a construção de modelos. Além disto, fornecem uma descrição mais geral dos modelos tridimensionais. Triangulações arbitrárias podem ser interpretadas como casos particulares de partições, e modelos na rede reescritos como modelos em partições. A desvantagem no uso de partições de Heegard é a necessidade do uso de ferramentas

mais abstratas da topologia combinatória. A notação e os procedimentos se tornam menos intuitivos, porém mais gerais e maleáveis.

O texto é organizado da seguinte forma. No capítulo 2 é apresentada a classe de modelos discretos estudada. São definidos como *state sum models* em partições de Heegard. A definição é feita de modo a que teorias de gauge na rede e as teorias topológicas mais relevantes sejam exemplos de modelos desta classe.

No capítulo 3, estuda-se a representação das operações de simetria quasetopológica sobre as partições de Heegard. Prova-se que a simetria quasetopológica pode ser descrita em termos de operações elementares, os *moves* quasetopológicos, cujas composições geram todas as demais operações de simetria.

No capítulo 4 são deduzidas as condições impostas pela simetria quasetopológica sobre a forma dos pesos locais. É imposta a invariância da função de partição sob a ação dos *moves* quasetopológicos. Exemplos de soluções são apresentados, e possíveis desenvolvimentos futuros discutidos.

O capítulo 5 é a conclusão do trabalho. Cada capítulo é introduzido por uma apresentação geral de seu conteúdo.

Capítulo 2

Campos Discretos Tridimensionais

Neste capítulo são apresentados os fundamentos matemáticos das teorias de campo discretas tridimensionais, no formalismo de *state sum models*. Há três passos principais na formulação destes modelos. O primeiro é a escolha de uma discretização dos espaços, o que é feito com ferramentas da topologia combinatória. O segundo é a definição de campos nos espaços discretos. O terceiro consiste na definição dos pesos locais e da função de partição, respeitando as simetrias que se queira preservar.

State sum models formam uma classe vasta de modelos. Dentre estes, encontram-se as versões discretas das teorias de maior interesse no contínuo. A gravitação quântica em três dimensões, por exemplo, é o limite contínuo do modelo de Ponzano-Regge. Teorias de gauge na rede aproximam teorias de Yang-Mills em dimensões arbitrárias. E, além disto, esboços da gravitação quântica em quatro dimensões também são formulados como *state sum models* para estudos exploratórios [8]. Portanto, a restrição dos modelos discretos a *state sum models* não leva a nenhuma limitação séria. Todas as teorias de interesse físico podem ser estudadas neste formalismo.

Modelos discretos são tradicionalmente definidos em redes cúbicas ou em triangulações [14]. Com isso, os campos e pesos locais habitam regiões no interior de poliedros, como faces, arestas ou tetraedros. Há duas vantagens neste procedimento. A primeira é a facilidade de visualização dos objetos envolvidos. Nenhum método de discretização é tão natural e intuitivo quanto a aproximação de um espaço por um poliedro. A segunda é a existência de triangulações e redes cúbicas em dimensões arbitrárias, o que permite que modelos sejam definidos de modo independente da dimensão. Teorias de gauge na rede, por exemplo, são definidas de modo idêntico em qualquer dimensão [15].

Em casos especiais, no entanto, o uso de discretizações alternativas pode ser mais apropriado. Em três dimensões, diversas possibilidades são exploradas. A variação mais comum é o uso das partições de Heegard [10], que consistem em colagens feitas com blocos mais complexos que os tetraedros. Partições de Heegard geralmente são descritas de modo indireto com o auxílio de diagramas de Heegard [13]. Os diagramas de Heegard fornecem uma descrição bastante abstrata dos espaços tridimensionais.

Consistem em sistemas especiais de curvas em superfícies bidimensionais. A cada diagrama corresponde um espaço tridimensional. Todos os espaços orientáveis podem ser descritos deste modo. Apesar de pouco intuitiva, tal descrição é conveniente para o estudo de modelos discretos. Diagramas de Heegard foram aplicados com sucesso na construção de teorias de campo topológicas [12, 16] e na formulação de teorias de gauge com grupos quânticos [17], por exemplo.

A classe de modelos estudada nesta tese é construída sobre diagramas de Heegard. Os campos e pesos locais são definidos segundo as prescrições adotadas por Kuperberg em seu modelo topológico [12]. Obtém-se deste modo uma classe bastante geral de modelos, que reproduz em casos especiais as teorias de gauge na rede e as teorias de campo topológicas tradicionais. As teorias quasetopológicas são definidas como uma deformação simples das topológicas. Formam um caminho natural na exploração desta classe de modelos, partindo-se de exemplos solúveis rumo a modelos com simetrias menos rígidas.

Este capítulo é organizado da seguinte forma. Na seção 2.1 são apresentados resultados gerais da teoria de variedades topológicas e triangulações, sobre os quais se baseia o estudo das partições de Heegard. Na seção 2.2 são estudadas as partições de Heegard, e na seção 2.3 sua representação através de diagramas de Heegard. Trata-se de uma revisão breve de material padrão. Na seção 2.4 é definida a classe de modelos considerada neste trabalho. Teorias de gauge na rede são descritas como exemplo. Condições de invariância topológica e quasetopológica são estabelecidas.

2.1. Variedades Topológicas e Triangulações

Esta seção não é destinada a um estudo sistemático de topologia combinatória. Seu propósito é introduzir os conceitos mais elementares, fixar a notação e listar as proposições que serão usadas ao longo do trabalho. Definições de topologia geral são utilizados de maneira corrente, e podem ser encontradas em [18]. O estudo de topologia de variedades em dimensão baixa baseia-se no livro de Stilwell [14]. Para o caso específico de variedades 3d, recorreu-se também ao artigo de Matveev [10]. Todos os resultados aqui enunciados podem ser encontrados nestas refererências.

2.1.1. Variedades topológicas

Uma variedade topológica n-dimensional M é um espaço topológico no qual todo ponto possui uma vizinhança homeomórfica à bola n-dimensional $\mathbb{R}^n$ ou à semi-bola $\mathbb{R}^n_+$. Os pontos que não possuem vizinhanças do primeiro tipo são os pontos da fronteira ∂M do espaço, e sempre formam uma variedade topológica $(n-1)$-dimensional

sem fronteira. Variedades com fronteira vazia são ditas fechadas. Uma subvariedade é um subconjunto de uma variedade que, com a topologia induzida do espaço que a contém, forma uma variedade topológica. Uma variedade provida de um homeomorfismo relacionando-a a uma subvariedade de um espaço M é dita mergulhada nesse espaço[1].

Duas condições adicionais são acopladas à definição de variedade para se evitar exemplos patológicos: que o espaço seja de Hausdorff, e que possua uma base enumerável. Isso corresponde a exigir que existam vizinhanças disjuntas para cada par de pontos distintos, e que o espaço possa ser coberto por uma porção enumerável de bolas. Ambas as condições são automaticamente satisfeitas quando se considera apenas subvariedades de espaços euclidianos. Reciprocamente, variedades satisfazendo essas condições sempre podem ser imersas em um espaço euclidiano de dimensão adequada, e assim, o estudo de variedades topológicas arbitrárias pode ser entendido como o estudo de subvariedades de espaços $\mathbb{R}^n$.

A representação de variedades como subconjuntos de espaços euclidianos é a forma mais natural de se descrevê-las, e corresponde à generalização da noção intuitiva de variedade dada pelas superfícies bidimensionais imersas no espaço tridimensional. Há diversas outras representações, no entanto. Outra maneira comum de se representar uma variedade é através de sua decomposição na forma de uma montagem de pedaços mais simples. Uma superfície, por exemplo, pode ser descrita como uma série de triângulos encaixados ao longo de arestas comuns, e um espaço tridimensional como um conjunto de tetraedros com faces unidas. Estas descrições são elaboradas com base num processo de colagem de espaços, definido a seguir.

2.1.2. Colagem de variedades com fronteira

Variedades com fronteira podem ser coladas. A colagem identifica regiões homeomórficas A e B na fronteira de espaços M e N de mesma dimensão, e é representada por um homeomorfismo específico $h : A \subset \partial M \mapsto B \subset \partial N$ entre estas regiões. O resultado é um novo espaço $M \cup_h N$, que será sem fronteira se a colagem for feita ao longo de toda a extensão das fronteiras ∂M e ∂N, e com fronteira, caso contrário. O homeomorfismo h identifica cada ponto de seu domínio com sua imagem. Vizinhanças hemisféricas de pontos identificados são unidas, de modo a comporem bolas n-dimensionais.

As colagens podem ser interpretadas como um "encaixe" de fronteiras, do modo representado na Figura 2.1. Esta interpretação é possível pelo seguinte fato. No caso em que $M \subset T$ e $N \subset T$ são subvariedades n-dimensionais de um mesmo espaço T, e $M \cap N$ é uma variedade $(n-1)$-dimensional contida na fronteira de ambas, tem-se

[1] Neste trabalho, variedades topológicas são chamadas de variedades, simplesmente, pois não há outras classes de variedades (diferenciáveis, *piecewise-linear*, C^k) envolvidas. Também podem ser chamadas de espaços n-dimensionais, ou de espaços, apenas, quando o contexto permitir.

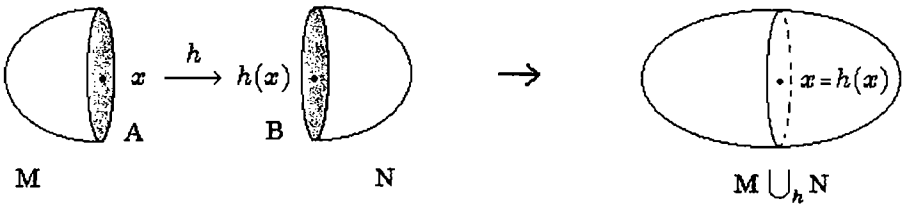


Figura 2.1. Colagem das variedades tridimensionais M e N ao longo das superfícies A e B. O homeomorfismo de colagem h identifica cada ponto x em A com sua imagem $h(x)$ em B.

que a união $M \cup N$ dos dois espaços, com a topologia induzida de T, é homeomórfica a $M \cup_h N$, onde h é a função que identifica os pontos compartilhados. Em outras palavras, compartilhamento de fronteiras equivale a colagem.

Há colagens para as quais a topologia de $M \cup_h N$ não depende da escolha do homeomorfismo h, mas apenas das regiões $A \subset \partial M$ e $B \subset \partial N$ envolvidas na colagem. Neste caso se diz que a colagem é feita de maneira única, ou que a colagem é trivial. O uso de colagens triviais fornece um método simples de construção de variedades a partir de blocos mais elementares de espaço. Sendo desnecessária a descrição dos homeomorfismos de colagem, basta que se especifique o modo como as fronteiras dos blocos são compartilhadas.

O exemplo mais simples de colagem trivial é a de uma bola tridimensional B^3 em uma região homeomórfica a $\partial B^3 = S^2$ na fronteira de uma variedade M qualquer. A colagem $B^3 \cup_h B^3$, por exemplo, tem como resultado a esfera S^3 para qualquer homeomorfismo $h : \partial B^3 \mapsto \partial B^3$. Outro exemplo é a colagem de um cilindro sólido ao longo de sua superfície lateral numa fita na fronteira de um espaço 3d qualquer (Figura 2.2)[2].

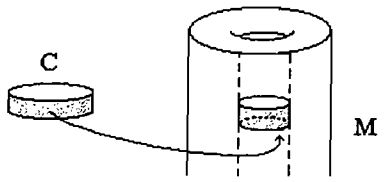


Figura 2.2. Exemplo de colagem trivial. O cilindro sólido C é colado ao longo de sua superfície lateral em uma fita na fronteira da variedade tridimensional M.

[2] A trivialidade de ambas as colagens é mencionada em [14]. A prova deste fato pode ser feita com o uso de extensões de homeomorfismos. Um esboço da demonstração pode ser vista em [13], na seção sobre diagramas de Heegard, Teorema 10.2.

2.1.3. Complexos topológicos

Os complexos topológicos são uma das classes de espaços construídos através de montagens feitas com blocos simples. As colagens envolvem apenas um tipo de bloco elementar de espaço, os n-simplexos, cujas fronteiras são divididas em um número finito de "faces", sobre as quais as colagens são feitas de maneira trivial.

No caso tridimensional, os n-simplexos são tetraedros. Um complexo topológico tridimensional é uma colagem de diversos tetraedros, dois a dois, ao longo de faces comuns. Dos homeomorfismos de colagem se exige apenas que vértices tenham vértices por imagem. Com isso a topologia do espaço resultante é completamente determinada. Funções de colagem com imagens idênticas nos vértices produzem espaços homeomórficos.

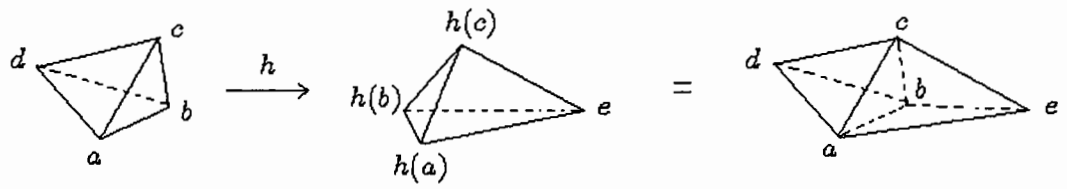


Figura 2.3. Colagem de dois tetraedros com o homeomorfismo h.

Nem todos os complexos topológicos são variedades. A classe de espaços topológicos que se pode construir com a colagem arbitrária de tetraedros é mais vasta que a de variedades topológicas. Para que todos os pontos possuam vizinhanças esféricas, a colagem deve satisfazer as condições listadas a seguir.

TEOREMA 2.1.1. *Um complexo topológico tridimensional é uma variedade topológica fechada se, e somente se,*

(i) todas as faces do complexo são coladas a alguma outra;

(ii) o seu número de Euller, definido por: $e = V - A + F - T$, onde V é o número de vértices, A o de arestas, F o de faces, e T o de tetraedros, é igual a zero.

Além de $e = 0$, vale também que $F = 2T$. Esta relação segue do fato de que tetraedros possuem sempre quatro faces, as quais são coladas sempre aos pares. Apenas duas das grandezas V, A, F e T são independentes, portanto.

O mergulho de um complexo topológico num espaço euclidiano fornece uma representação do complexo como um coleção de tetraedros compartilhando faces em $\mathbb{R}^n$, para algum n. Isso sempre pode ser feito. O enunciado deste resultado envolve o conceito de complexos simpliciais geométricos [19]. Um complexo simplicial geométrico

tridimensional é uma coleção de tetraedros em um espaço $\mathbb{R}^n$, para os quais a intersecção de dois tetraedros quaisquer ou é vazia, ou uma face, aresta ou vértice comum. A união dos tetraedros é um espaço topológico, com a topologia induzida de $\mathbb{R}^n$. Para que seja uma variedade, deve satisfazer as condições listadas no teorema 2.1. A possibilidade de imersão de complexos topológicos arbitrários em espaços euclidianos é enunciada no teorema abaixo.

TEOREMA 2.1.2. *Todo complexo topológico é homeomórfico a um complexo simplicial geométrico contido em um espaço euclidiano de dimensão finita.*

Uma triangulação de uma variedade é um homeomorfismo que leva esta variedade em um complexo topológico. Quando uma variedade possui alguma triangulação, diz-se que é triangulável. Todo complexo geométrico pode ser interpretado como complexo topológico, com a colagem de faces representada pelo compartilhamento das mesmas. Também se diz ser uma triangulação um homeomorfismo de um espaço em um complexo simplicial geométrico.

TEOREMA 2.1.3. *Toda variedade topológica tridimensional é triangulável.*

Portanto, todo espaço tridimensional é um complexo topológico, e todo complexo topológico pode ser representado como uma montagem de tetraedros em algum $\mathbb{R}^n$. Este é o conteúdo resumido desta seção. Com isso, a topologia das variedades tridimensionais se reduz a uma combinatória de encaixes de tetraedros em espaços euclidianos.

2.2. Partições de Heegard

Os espaços tridimensionais denominados *handlebodies* são definidos nesta seção. A representação de variedades tridimensionais como colagens de *handlebodies* é introduzida. Estas colagens são denominadas partições de Heegard. A relação entre partições e triangulações é discutida. Mostra-se como partições de Heegard são obtidas a partir de uma representação da variedade como complexo simplicial geométrico. Exemplos de equivalência homeomórfica no espaço das partições são apresentados.

2.2.1. *Handlebodies* e partições de Heegard

Como alternativa às triangulações, há outro tipo de colagem de uso tradicional em topologia 3d, dado pelas partições de Heegard. Ao contrário do que ocorre nas triangulações, onde se usa em geral grandes quantidades de blocos simples colados trivialmente, tem-se nas partições uma descrição dada por uma única colagem, envolvendo no entanto dois espaços mais complicados topologicamente.

A colagem envolve apenas dois *handlebodies* de mesmo gênero. Um *handlebody* é o espaço que resulta da colagem de cilindros sólidos em uma bola tridimensional ao longo de suas bases (Figura 2.4). Os cilindros colados são as "alças" do *handlebody*. O gênero de um *handlebody* é igual ao número de alças. Dos homeomorfismos de colagem, exige-se apenas que produzam um espaço orientável. Isso basta para que a topologia da colagem fique determinada, pois há um único modo orientável de colar cilindros em bolas tridimensionais. Todo espaço orientável definido pela colagem arbitrária de alças em esferas também é um *handlebody*.

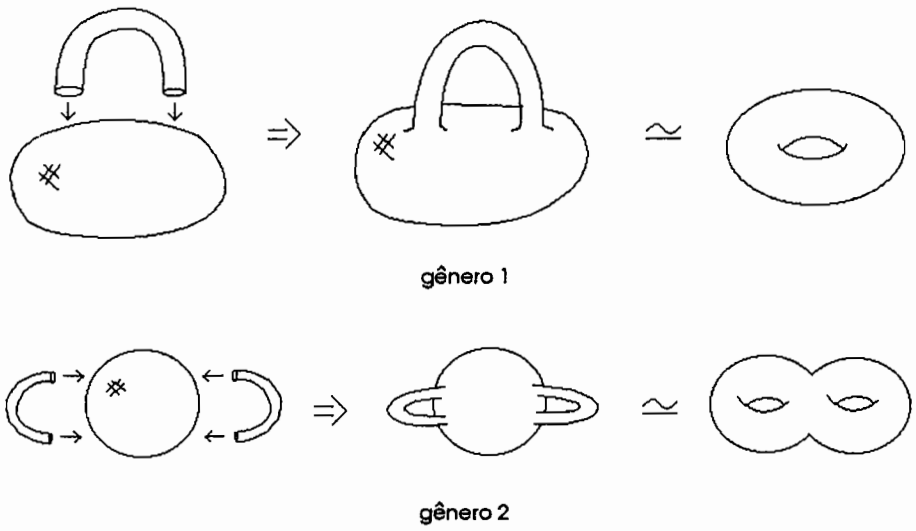


Figura 2.4. Exemplos de *handlebodies*.

DEFINIÇÃO 2.2.1. *Uma partição de Heegard é um trio* $\mathcal{P} = \langle H_1, H_2, h : \partial H_2 \to \partial H_1 \rangle$, *onde* H_1 *e* H_2 *são* handlebodies *de um mesmo gênero* g *e* h *é um homeomorfismo que cola as suas fronteiras. O gênero de uma partição é igual ao gênero de seus* handlebodies.

O espaço determinado por uma partição de Heegard, $H_1 \cup_h H_2$, é uma variedade sem fronteira, pois a colagem é feita ao longo de toda a extensão da fronteira de ambos os *handlebodies*. Além disso, pode-se mostrar que é um espaço orientável.

2.2.2. Partições associadas a triangulações

A existência de triangulações para todos os espaços tridimensionais permite que se construam partições de Heegard de espaços orientáveis arbirários. Isso é feito com um processo que gera, a partir de um complexo geométrico P, uma partição de Heegard homeomórfica. O método funciona apenas para variedades orientáveis.

O procedimento é simples. A união das arestas de P forma o conjunto chamado "esqueleto unidimensional", ou 1-esqueleto, do complexo. Define-se a vizinhança tubular V_ϵ do 1-esqueleto como o o conjunto dos pontos de P que distam menos que um dado ϵ do 1-esqueleto. Em uma vizinhança tubular, a cada vértice está associada uma bola tridimensional, e a cada aresta um cilindro. A vizinhança tubular inteira é a colagem destas bolas e cilindros (ver Figura 2.5). Se o resultado é orientável, deve ser um *handlebody*, portanto . Mas variedades orientáveis não podem conter subvariedades não orientáveis de mesma dimensão[3]. Logo, em todo complexo geométrico orientável a vizinhança tubular do 1-esqueleto é um *handlebody* H_1.

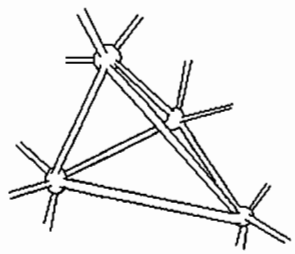


Figura 2.5. Vizinhança tubular de um complexo geométrico nas proximidades de um tetraedro.

Forma-se ainda um outro *handlebody* no processo: o complemento P/H_1 do *handlebody* H_1 no complexo geométrico P. Que P/H_1 é um *handlebody* pode ser justificado do seguinte modo. A cada tetraedro se associa uma bola em seu interior, e a cada face um cilindro que a atravessa. Este cilindro é usado para colar o interior de tetraedros adjacentes (Figura 2.6 (a)). Com isso, a cada tetraedro está associado um objeto de 4 "pernas" formado por uma bola em seu interior e 4 cilindros que emanam de suas faces (Figura 2.6 (b)). A união de todos esses objetos de quatro pernas é um *handlebody* H_2. Nota-se facilmente que H_2 pode ser "inflado" de modo a preencher P/H_1.

A superfície ∂H_1 da vizinhança tubular do 1-esqueleto de P separa o espaço numa colagem de dois *handlebodies* sólidos, portanto. Constitui uma partição de Heegard de P. Como todo espaço tridimensional pode ser representado como um complexo geométrico em algum $\mathbb{R}^n$, segue que existem partições de Heegard descrevendo espaços 3d orientáveis arbitrários.

2.2.3. Homeomorfismos de partições

A descrição dos espaços com partições de Heegard não é unívoca. A uma dada variedade M corresponde uma infinidade de partições. Partições que produzem a mesma

[3] Uma orientação qualquer do espaço M, restrita a um subespaço $R \subset M$, fornece uma orientação do mesmo.

(a) A cada face da triangulação corresponde um cilindro sólido que conecta bolas contidas no interior de tetraedros adjacentes.

(b) A cada tetraedro corresponde um objeto formado por uma bola contida em seu interior e 4 cilindros que emanam de suas faces.

Figura 2.6. Representação do *handlebody* H_2 como a união de bolas associadas a tetraedros e cilindros associados a suas faces.

variedade são ditas homeomórficas. Operações que transformam as partições sem alterar a topologia correspondente são denominadas homeomorfismos de partições. O conjunto $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ de todas as partições homeomórficas a uma partição $\mathcal{P}$ é a classe de equivalência homeomórfica de $\mathcal{P}$, ou a classe topológica de $\mathcal{P}$.

Há dois tipos principais de homeomorfismos de partições: as equivalências e as estabilizações.

DEFINIÇÃO 2.2.2. *Sejam $\mathcal{P} = \langle H_1, H_2, h\rangle$ e $\mathcal{P}' = \langle H_1', H_2', h'\rangle$ partições de Heegard de mesmo gênero. Diz-se que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ são equivalentes se $H_2 = H_2'$ e $h' : \partial H_2 \mapsto \partial H_1'$ pode ser escrito como $h' = h_1|_{\partial H_1} \circ h$, para algum homemomorfismo $h_1 : H_1 \to H_1'$. A transformação que leva $\mathcal{P}$ em $\mathcal{P}'$ é uma equivalência de partições.*

Analogamente, diz-se que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ são equivalentes complementares se $H_1 = H_1'$ e $h' : \partial H_2' \mapsto \partial H_1$ pode ser escrito como $h' = h \circ h_2|_{\partial H_2}$, para algum homemomorfismo $h_2 : H_2' \to H_2$. Neste caso, a transformação que leva $\mathcal{P}$ em $\mathcal{P}'$ é uma equivalência complementar.

TEOREMA 2.2.3. *Equivalências e equivalências complementares são homeomorfismos de partições.*

Equivalências e equivalências complementares relacionam partições de mesmo gênero. As estabilizações são usadas para relacionar partições homeomórficas de gêneros distintos. Uma estabilização consiste na criação de uma nova alça em alguma região da superfície $\partial H_1 = \partial H_2$ compartilhada pelos *handlebodies* colados (Figura 2.7). O gênero da partição é aumentado em uma unidade. A operação inversa, a remoção de uma alça, é batizada de estabilização inversa. A combinação de operações de equivalência, equivalência complementar e estabilizações gera qualquer homeomorfismo de partições.

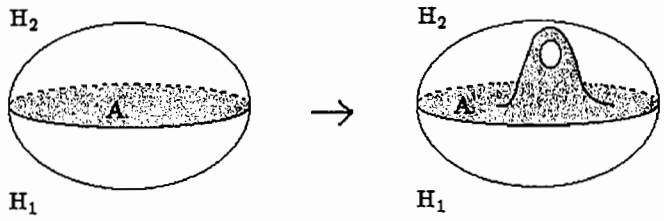


Figura 2.7. Exemplo de estabilização. É representada uma região esférica que cruza a superfície de colagem dos *handlebodies* H_1 e H_2 em um disco A. A estabilização altera os *handlebodies* dentro desta região. A superfície A que os delimita é substituída pela superfície A', na qual há uma alça adicional. O gênero dos *handlebodies* aumenta em uma unidade.

TEOREMA 2.2.4. *Quaisquer duas partições homeomórficas podem ser relacionadas por uma sucessão de operações de equivalência, equivalência complementar, estabilizações e estabilizações inversas.*

As operações listadas no Teorema 2.5 são os "*moves* topológicos" das partições. A descrição das classes de equivalência homeomórfica $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ baseia-se no uso destes *moves*. Qualquer partição $\mathcal{P}'$ homeomórfica a $\mathcal{P}$ é o resultado da operação de alguma seqüência de *moves* sobre $\mathcal{P}$. Portanto, a classe $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ é igual ao conjunto de todas as partições que resultam da operação de *moves* sobre $\mathcal{P}$. A descrição de classes de equivalência com o uso de *moves* é de importância central para o estudo de simetrias em modelos discretos. Para provar a invariância topológica de uma função de partição, basta que se prove sua invariância sob a ação dos *moves* topológicos.

2.2.4. Espaços quasetopológicos

Há uma classe de espaços, aqui batizados de quasetopológicos, nos quais não é preciso incluir estabilizações e estabilizações inversas entre os *moves*. Em geral, para que duas partições homeomórficas sejam ligadas por uma sucessão de *moves*, é preciso passar por partições de gêneros distintos, mesmo que as partições sejam de mesmo gênero. São usadas estabilizações e estabilizações inversas, portanto. Nos espaços quasetopológicos isto é desnecessário. Partições homeomórficas de mesmo gênero sempre podem ser ligadas por equivalências e equivalências complementares.

DEFINIÇÃO 2.2.5. *Seja M uma variedade tridimensional orientável. Diz-se que M é um espaço quasetopológico se para quaisquer duas partições $\mathcal{P} = \langle H_1, H_2, h\rangle$ e $\mathcal{P}' = \langle H_1', H_2', h'\rangle$ de mesmo gênero que determinam M existem homeomorfismos $h_1 : H_1 \to H_1'$ e $h_2 : H_2' \to H_2$ tais que as funções de colagem satisfaçam $h' = h_1|_{\partial H_1} \circ h \circ h_2|_{\partial H_2}$.*

Note-se que a partição feita com h' é obtida a partir da feita com h com a operação de uma única equivalência, $h \to h_1|_{\partial H_1} \circ h$, e uma equivalência complementar, $h_1|_{\partial H_1} \circ h \to h_1|_{\partial H_1} \circ h \circ h_2|_{\partial H_2} = h'$.

A existência de espaços quasetopológicos é garantida pelo teorema que fecha a seção. Até o momento não se tem uma classificação geral dos espaços quasetopológicos.

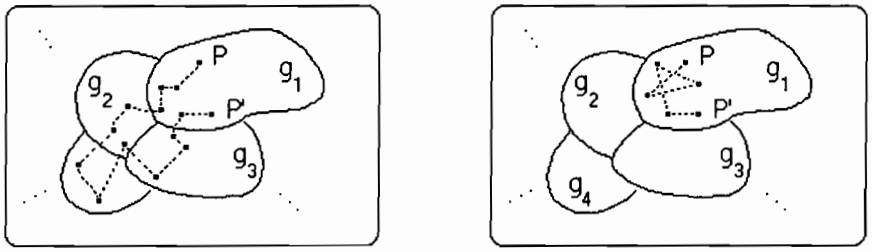


Figura 2.8. Diagramas representando classes topológicas $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ divididas em subclasses de gênero fixado g_i. Pontos representam partições. Segmentos pontilhados representam a ação de *moves*. Em $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$, os *moves* que conectam partições de mesmo gênero passam por partições de gêneros diferentes. No espaço quasetopológico $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$, os *moves* operam dentro das subclasses.

TEOREMA 2.2.6. *São exemplos de espaços quasetopológicos: S^3, $S^1 \times S^1 \times S^1$ e os espaços de lentes [10].*

2.3. Diagramas de Heegard

A descrição de uma partição de Heegard se resume praticamente à especificação do homeomorfismo de colagem que une os dois *handlebodies*. Isto é feito de modo indireto, com o uso dos diagramas de Heegard. A idéia intuitiva que motiva sua definição é que a descrição da colagem se torna mais simples se feita passo-a-passo. Os *handlebodies* são desmembrados em pedaços, e então se descreve como os pedaços de um *handlebody* são colados nos pedaços do outro. A estrutura abstraída desta descrição são os diagramas de Heegard.

2.3.1. Decomposições de *handlebodies*

O modo mais natural de se descrever um *handlebody* H é na forma de uma colagem de cilindros e bolas tridimensionais, como mostrado na Figura 2.9, por exemplo. Este tipo de colagem pode ser descrita diagramaticamente. Para isto, usa-se um diagrama $D = \{c_i\}$, composto por curvas fechadas na superfície ∂H do *handlebody*. Cada curva c_i do diagrama corresponde a um cilindro C_i da colagem. As curvas devem ser tais que existam discos d_i para os quais $c_i = \partial d_i$. A vizinhança cilíndrica dos discos d_i em H são os cilindros C_i da decomposição (Figura 2.10).

Para recuperar a decomposição do *handlebody* a partir do diagrama $D = \{c_i\}$, basta tomar discos d_i quaisquer para os quais se tenha $c_i = \partial d_i$, e cortar as regiões cilíndricas em suas vizinhanças. Determina-se uma única decomposição deste modo, a menos de isotopias. Quando este procedimento pode ser feito, diz-se que D é uma decomposição sólida do *handlebody* H.

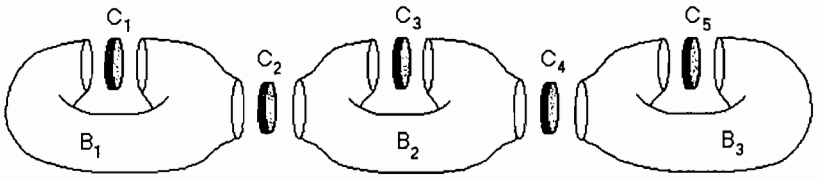


Figura 2.9. *Handlebody* decomposto numa colagem de bolas B_1, B_2, B_3 e cilindros C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5.

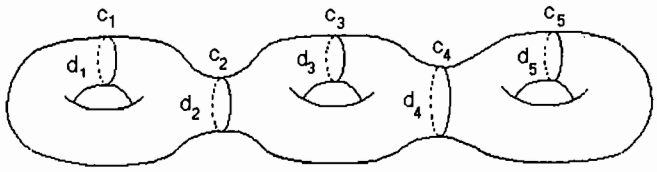


Figura 2.10. Diagrama $D = \{c_i\}$ associado à decomposição mostrada na Figura 2.9. Cada curva c_i é a fronteira de um disco d_i. As vizinhanças dos discos são os cilindros C_i da decomposição.

Nem todo sistema de curvas em ∂H decompõe o *handlebody* em uma colagem de cilindros e bolas. Para isto, deve satisfazer propriedades especiais. As curvas devem ser fechadas e simples (sem auto-intersecções), por exemplo, ou então não poderiam ser fronteiras de discos. As condições suficientes para que um diagrama descreva uma decomposição são listadas no Teorema 2.7.

TEOREMA 2.3.1. *Seja $D = \{c_i\}$ um conjunto de curvas fechadas e simples na superfície ∂H de um* handlebody *H. O diagrama D é uma decomposição sólida de H se*

(i) as curvas são duas a duas disjuntas, $c_i \cap c_j = \emptyset$;

(ii) existem discos $d_i \subset H$ para os quais $\partial d_i = c_i$;

(iii) o complemento das curvas em ∂H é uma coleção de regiões esféricas com furos.

A segunda condição permite cilindros sejam associados às curvas. A primeira condição garante que cilindros disjuntos são associados a cada curva. A terceira é imposta para que após se cortar os cilindros no *handlebody* se obtenha uma coleção de bolas como resultado. Quando a segunda condição não é satisfeita, diz-se que D é uma decomposição da superfície ∂H.

2.3.2. Bipartições e diagramas de Heegard

Quando a uma partição de Heegard são adicionadas decomposições sólidas D_1 e D_2 dos *handlebodies* envolvidos, obtém-se uma nova estrutura, aqui batizada de bipartição. A prova dos teoremas que definem os *moves* quasetopológicos baseia-se na manipulação destas estruturas.

DEFINIÇÃO 2.3.2. *Uma bipartição é uma 5-upla* $\mathcal{B} = \langle H_1, H_2, D_1, D_2, h\rangle$ *para a qual a 3-upla* $\langle H_1, H_2, h\rangle$ *forma uma partição de Heegard e* $D_1 = \{a_i \in \partial H_1\}$, $D_2 = \{b_j \in \partial H_2\}$ *são decomposições sólidas de* H_1 *e* H_2. *A variedade determinada por uma bipartição é o espaço* $H_1 \cup_h H_2$. *Duas bipartições são homeomórficas se determinam variedades homeomórficas.*

As decomposições escolhidas são irrelevantes topologicamente. A topologia da variedade determinada pela bipartição depende apenas da função h que realiza a colagem dos dois *handlebodies*. Com o uso das decomposições, no entanto, a descrição das partições pode ser reduzida a uma forma diagramática. Para isto se faz uso de um par de sistemas de curvas na superfície do *handlebody* H_1. Este é o primeiro exemplo de um diagrama de Heegard.

DEFINIÇÃO 2.3.3. *Seja* $\mathcal{B} = \langle H_1, H_2, D_1, D_2, h\rangle$ *uma bipartição, com* $D_1 = \{a_i \in \partial H_1\}$ *e* $D_2 = \{b_j \in \partial H_2\}$. *O diagrama de Heegard da bipartição* $\mathcal{B}$ *é o par de sistemas de curvas* $\mathcal{D} = \langle \{a_i\}, \{h(b_j)\}\rangle$ *em* ∂H_1[4].

A definição é motivada pelo fato de que a topologia da variedade $H_1 \cup_h H_2$ pode ser determinada a partir dos diagramas. Os diagramas descrevem a colagem de H_2 em H_1 como uma sucessão de colagens triviais de pedaços simples de H_2. As bolas e cilindros da decomposição D_2 são coladas individualmente.

Como exemplo do procedimento, considere a bipartição mostrada na Figura 2.11. O *handlebody* H_2 é representado como a colagem de uma bola B e cilindros C_1, C_2 e C_3. A decomposição sólida correspondente é $D_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$. A vizinhança de b_j na superfície ∂H_2 é uma fita que forma a lateral do cilindro C_j. Analogamente, o *handlebody* H_1 é representado com a decomposição sólida $D_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$.

A colagem de H_2 em H_1 começa pelo cilindro C_1. Sua superfície lateral é colada na fita hachurada em torno de $h(b_1)$ em ∂H_1. Esta colagem é trivial (ver página 11), e assim a topologia resultante depende apenas da região de ∂H_1 onde C_1 é colado. Tal região é completamente determinada pelo conhecimento da curva $h(b_1)$.

[4] Por motivos práticos, diz-se também que $\mathcal{D}$ é o diagrama da partição $\langle H_1, H_2, h\rangle$. Subentende-se sempre o uso de uma bipartição.

O segundo passo da montagem é a colagem de C_2 na vizinhança de $h(b_2)$, feita de modo análogo. O resultado depende apenas do desenho de $h(b_2)$. Em seguida, cola-se C_3 em torno de $h(b_3)$. Neste estágio do processo, tem-se uma bola $H_1 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Para completar a montagem, resta colar B em $H_1 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Esta colagem também é trivial, e seu resultado é o espaço S^3.

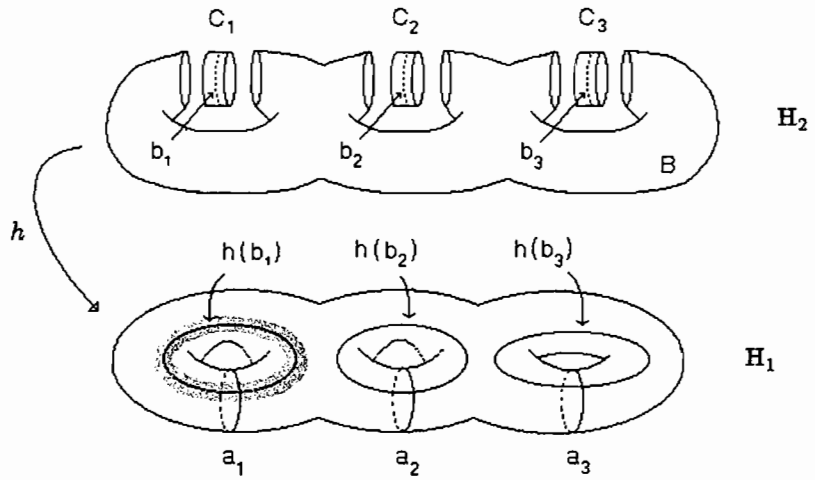


Figura 2.11. Exemplo de bipartição. O *handlebody* H_2 com decomposição sólida $\{b_j\}$ é colado pelo homeomorfismo h no *handlebody* H_1 com decomposição sólida $\{a_i\}$. A superfície lateral dos cilindros C_i é colada nas vizinhanças das curvas $h(b_j)$ em ∂H_1. O diagrama da bipartição é $\mathcal{D} = \langle \{a_i\}, \{h(b_j)\} \rangle$ em ∂H_1. O resultado desta colagem é o espaço S^3.

Um segundo exemplo simples de bipartição é mostrado na Figura 2.12. A bipartição representada é de gênero um, e descreve o espaço $S^2 \times S^1$. Neste gênero, os *handlebodies* H_1 e H_2 são toros. Há então apenas um cilindro sólido C_1 e uma bola B em H_2, os quais são colados na superfície de H_1 pelo homeomorfismo h.

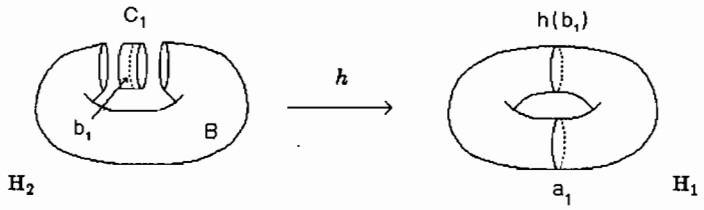


Figura 2.12. Bipartição de gênero um. As decomposições sólidas dos toros H_1 e H_2 possuem uma única curva, $D_1 = \{a_1\}$ e $D_2 = \{b_1\}$. O resultado desta colagem é o espaço $S^2 \times S^1$.

Em casos mais complicados, resta após a colagem dos cilindros um espaço cuja fronteira é composta não por uma, mas por diversas regiões esféricas. As bolas que restam da decomposição sólida de H_2 são coladas em tais superfícies, de modo a completar a colagem de todo o *handlebody*. A principal propriedade da colagem é que seu resul-

tado depende apenas das curvas $h(b_j)$ do diagrama. O argumento é simples. Todas as colagens envolvidas são triviais. As curvas do diagrama descrevem as regiões onde são feitas. Deste fato segue um resultado importante: quando bipartições distintas possuem um mesmo diagrama, ambas descrevem a mesma variedade.

TEOREMA 2.3.4. *Bipartições com diagramas idênticos são homeomórficas.*

Em resumo, tem-se o seguinte. O *handlebody* H_1 é naturalmente descrito como uma colagem de cilindros e bolas por sua decomposição $\{a_i\}$. As curvas de $\{h(b_j)\}$, por sua vez, ditam a forma como os blocos da decomposição sólida D_2 de H_2 devem ser colados em H_1. Deste modo, o diagrama $\mathcal{D} = \langle\{a_i\}, \{h(b_j)\}\rangle$ pode ser interpretado como uma descrição da montagem de $H_1 \cup_h H_2$ através da colagem de diversos cilindros e bolas tridimensionais.

2.3.3. Diagramas de Heegard abstratos

Os diagramas de Heegard podem ser definidos de maneira independente das bipartições. A definição é feita de modo a que todo diagrama abstrato possa ser interpretado como a representação de uma bipartição. Os diagramas são sistemas de curvas em alguma superfície de gênero g, isto é, homeomófica à fronteira de um *handlebody* de gênero g.

DEFINIÇÃO 2.3.5. *Um diagrama de Heegard é um par $\mathcal{D} = \langle\{u_i\}, \{v_j\}\rangle$ de sistemas de curvas numa superfície ∂H de gênero g, no qual cada sistema considerado isoladamente é uma decomposição de ∂H. O gênero do diagrama é igual ao gênero de ∂H.*

TEOREMA 2.3.6. *Seja $\mathcal{D} = \langle\{u_i\}, \{v_j\}\rangle$ um diagrama de Heegard numa superfície ∂H. Então existe uma bipartição $\mathcal{B} = \langle H_1, H_2, D_1 = \{a_i\}, D_2 = \{b_j\}, h\rangle$ com diagrama $\mathcal{D}^{(\mathcal{B})} = \langle\{a_i\}, \{h(b_j)\}\rangle$ e um homeomorfismo $r : \partial H \to \partial H_1$ para o qual $r(u_i) = a_i$ e $r(v_j) = h(b_j)$. Diz-se que $\mathcal{D}$ é um diagrama associado à bipartição $\mathcal{B}$.*

Cabe um esclarecimento do conteúdo do Teorema 2.3.6. Os diagramas de Heegard são definidos em superfícies abstratas ∂H. Não se exige que estas superfícies estejam imersas em um espaço qualquer, ou que sejam representadas como a fronteira de um *handlebody* sólido. Isto sempre pode ser feito, no entanto. O homeomorfismo r do Teorema 2.3.6 é um exemplo de tal procedimento. A superfície abstrata ∂H é representada através de r como a fronteira do *handlebody* sólido H_1.

Em ∂H_1, o diagrama $\mathcal{D} = \langle\{u_i\}, \{v_j\}\rangle$ assume a forma $\mathcal{D}' = \langle\{r(u_i)\}, \{r(v_j)\}\rangle$. Em outras palavras, $\mathcal{D}'$ é a representação de $\mathcal{D}$ em ∂H_1, e pode ser confundido com o diagrama abstrato $\mathcal{D}$. Em ∂H_1, diagramas abstratos podem ser comparados com

diagramas de bipartições. A afirmação do Teorema 2.3.6 equivale a dizer que todo diagrama abstrato $\mathcal{D}'$ é o diagrama de alguma bipartição $\mathcal{B}$. Isto é necessário para que se possa atribuir uma topologia a cada diagrama de Heegard abstrato.

DEFINIÇÃO 2.3.7. *A variedade topológica M descrita por um diagrama de Heegard $\mathcal{D}$ é a variedade determinada por uma bipartição $\mathcal{B}$ da qual $\mathcal{D}$ seja um diagrama associado.*

Um diagrama $\mathcal{D}$ pode ser associado a mais de uma bipartição. No entanto, se duas bipartições o compartilham como diagrama associado, então são necessariamente homeomórficas. Logo, a definição dada não apresenta ambigüidade. É irrelevante qual bipartição $\mathcal{B}$ se toma para construir a variedade M descrita por $\mathcal{D}$.

Por outro lado, diversos diagramas distintos podem descrever uma mesma variedade. Isto motiva a definição de homeomorfismos de diagramas.

DEFINIÇÃO 2.3.8. *Sejam $\mathcal{D}_\alpha$ e $\mathcal{D}_\beta$ diagramas de Heegard. Diz-se que $\mathcal{D}_\alpha$ e $\mathcal{D}_\beta$ são homeomórficos se existem bipartições homeomórficas $\mathcal{B}_\alpha$ e $\mathcal{B}_\beta$ com diagramas associados $\mathcal{D}_\alpha$ e $\mathcal{D}_\beta$, respectivamente. Qualquer operação que relacione diagramas homeomórficos é um homeomorfismo de diagramas.*

Com esta definição, o estudo das classes topológicas de espaços tridimensionais orientáveis pode ser feita exclusivamente com diagramas de Heegard. O conjunto de todos os espaços é igual ao conjunto de todos os diagramas de Heegard, e as classes de equivalência são definidas com homeomorfismos de diagramas. Operações explícitas de equivalência homeomórfica nos diagramas serão estudadas no próximo capítulo.

Diagramas triniônicos são diagramas de Heegard com decomposições especiais, denominadas triniônicas. Em uma decomposição arbitrária, ao se cortar a superfície ∂H ao longo das curvas c_i, obtém-se uma série de regiões esféricas com números variados de furos. Nas decomposições triniônicas, tais superfícies possuem exatamente três furos. Cada uma das regiões é um trinion da decomposição. Um exemplo de diagrama triniônico é mostrado na Figura 2.13.

DEFINIÇÃO 2.3.9. *Um diagrama triniônico é um diagrama de Heegard $\mathcal{D} = \langle \{u_i\}, \{v_j\} \rangle$ em ∂H no qual as decomposições $\{u_i\}$ e $\{v_j\}$ de ∂H são ambas triniônicas. O gênero do diagrama é igual ao gênero de ∂H.*

2.3.4. Diagrama de uma triangulação

A toda triangulação Δ de um espaço orientável M está associada uma partição de Heegard $\mathcal{P}$, como discutido na seção 2.2.2. A vizinhança tubular do 1-esqueleto de Δ é

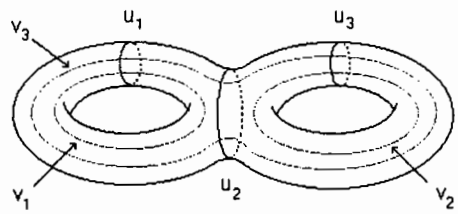


Figura 2.13. Exemplo de diagrama triniônico de gênero 2. A superfície é cortada pelas curvas u_i (ou v_j) em dois trinions. O diagrama determina o espaço S^3.

o *handlebody* H_1 da partição, formado por tubos que envolvem as arestas de Δ e bolas centradas em seus vértices. O complemento de H_1 em M é o *handlebody* H_2. Se aos *handlebodies* H_1 e H_2 são adicionadas decomposições sólidas D_1 e D_2, obtém-se então uma bipartição $\mathcal{B}$ de M. O diagrama de Heegard $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$ habita a superfície ∂H_1.

Há diversas maneiras de se decompor os *handlebodies* H_1 e H_2, e a cada escolha de D_1 e D_2 corresponde um diagrama distinto em ∂H_1. Descreve-se a seguir um método que gera decomposições $D_1^{(\Delta)}$ e $D_2^{(\Delta)}$ a partir das estrutura de arestas e faces da triangulação. Para esta escolha de decomposições, diz-se que $\mathcal{D}$ é um diagrama da triangulação Δ. Para o estudo futuro da simetria quasetopológica nos diagramas, é conveniente tomar decomposições triniônicas para isto.

A decomposição $D_1^{(\Delta)}$ de H_1 é obtida a partir das arestas da triangulação (ver Figura 2.14). Toma-se um plano perpendicular a cada aresta i e risca-se em ∂H_1 a primeira intersecção do plano com a superfície. Obtém-se uma curva fechada e simples a_i. A intersecção do plano com o *handlebody* H_1 é um disco cuja fronteira é a_i. O complemento da união das curvas a_i em ∂H_1 é uma coleção de regiões esféricas, cada qual associada a um dos vértices de Δ. Portanto, o conjunto $D_1 = \{a_i : i \in \Delta\}$ é uma decomposição sólida de H_1[5]. Uma decomposição triniônica é obtida com a adição de novas curvas, as quais decomponham as regiões esféricas associadas aos vértices em colagens de trinions. Há diversas maneiras de se fazer isto. Cada uma delas fornece uma decomposição triniônica $D_1^{(\Delta)} = \{a_i\}$ associada à triangulação Δ.

A decomposição $D_2^{(\Delta)}$ de H_2 é obtida a partir das faces da triangulação (ver Figura 2.15). O procedimento é mais simples. Basta riscar a intersecção das faces com a superfície ∂H_2 do *handlebody*. Para cada face se obtém uma curva fechada e simples b_j. A intersecção da face com o *handlebody* H_2 é um disco que possui tal curva como fronteira. O conjunto dos discos associados a todas as faces corta H_2 em diversas bolas, cada qual contida no interior de um tetraedro. As curvas b_j separam ∂H_2 em regiões esféricas

[5] As condições para que um sistema de curvas em ∂H seja uma decomposição sólida de H são listadas no teorema 2.7, situado na página 17.

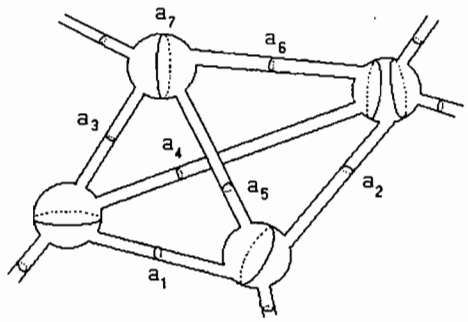


Figura 2.14. Decomposição triniônica $D_1^{(\Delta)} = \{a_i\}$ na vizinhança de um tetraedro. A cada aresta da triangulação é associada uma curva. Para que se tenha uma decomposição triniônica, curvas extra são adicionadas nos vértices.

com quatro furos, denominadas tétrions. Dividindo-se tais regiões em trinions com curvas adicionais, obtém-se um decomposição triniônica $D_2^{(\Delta)} = \{b_j\}$ associada a Δ.

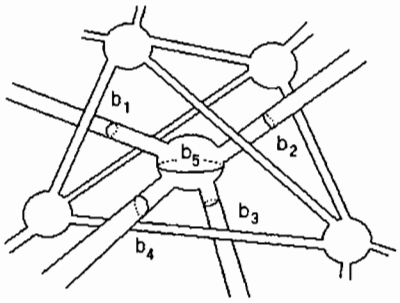


Figura 2.15. Decomposição triniônica $D_2^{(\Delta)} = \{b_j\}$ na vizinhança de um tetraedro. A cada face da triangulação é associada uma curva. O interior do tetraedro é separado em dois trinions pela curva extra b_5 .

O par $\mathcal{D}^{(\Delta)} = \langle \{a_i\}, \{b_j\} \rangle$ é um diagrama triniônico associado à triangulação Δ[6]. O diagrama formado apenas com curvas de arestas e faces, sem a adição de curvas extra, é o diagrama de Heegard da triangulação Δ.

Na decomposição de H_2, a cada tetraedro correspondem dois trinions, obtidos pela decomposição do tétrion que o descreve. Portanto, se T é o número de tetraedros na triangulação e n o número de trinions em H_2, então $n = 2T$. Além disso, o número de faces F e o de tetraedros são relacionados pela fórmula $2T = F$. Logo, $n = F$, e o número de trinions em $D_2^{(\Delta)}$ descreve o número de faces da triangulação Δ.

[6] Neste caso, H_1 e H_2 são representados como subvariedades de um mesmo espaço, e $\partial H_1 = \partial H_2$. A colagem das superfícies então é feita com o homeomorfismo $h = Id|_{\partial H_2}$, que identifica os pontos compartilhados. Com isso, o diagrama da bipartição assume a forma $\langle \{a_i\}, \{b_j\} \rangle$, ao invés de $\langle \{a_i\}, \{h(b_j)\} \rangle$, como no caso geral.

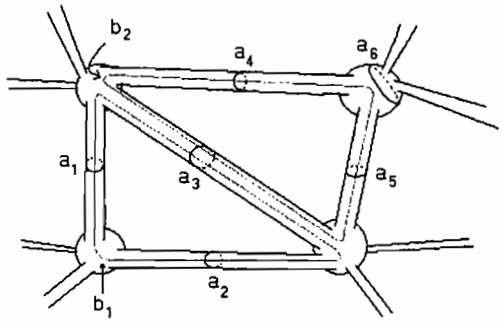


Figura 2.16. Diagrama triniônico $\mathcal{D}^{(\Delta)} = \langle \{a_i\}, \{b_j\} \rangle$ na vizinhança de duas faces coladas.

O número de trinions numa decomposição triniônica qualquer é fixado pelo gênero g do *handlebody* pela relação $n = 2g - 2$ [20]. Como H_1 e H_2 são de mesmo gênero, então a decomposição $D_1^{(\Delta)}$ de H_1 também possui $2T$ trinions.

2.4. Campos discretos em diagramas de Heegard

Num diagrama de Heegard, curvas pertencentes a um mesmo sistema não se intersectam, mas curvas de um sistema podem intersectar curvas do outro em uma porção arbitrária de pontos. Define-se nesta seção uma classe de modelos na qual o valor da função de partição é determinado pelo modo como estas curvas se intersectam. A definição é feita de modo abstrato, e em seguida são descritos como casos especiais as teorias de gauge na rede e o modelo topológico de Kuperberg. Modelos quasetopológicos são definidos no final da seção.

2.4.1. Estrutura geral do modelo

A classe de modelos considerada é definida sobre diagramas de Heegard arbitrários $\mathcal{D} = \langle \{u_i\}, \{v_j\} \rangle$ em ∂H. Os campos são definidos em intersecções de curvas, e pesos estatísticos são colocados tanto em intersecções quanto em curvas. Dois procedimentos preparatórios são exigidos. Em primeiro lugar, a superfície ∂H e as curvas do diagrama devem ser orientadas. As orientações serão usadas na definição dos pesos estatísticos. Em segundo lugar, é preciso tomar um espaço vetorial complexo V e uma base $\mathcal{B} = \{\phi_i : i \in \mathcal{C}\}$ de V. Isto especifica qual campo será estudado no diagrama. O conjunto $\mathcal{C}$ descreve as suas possíveis configurações. Segue a descrição do modelo.

A definição dos campos é bastante simples. Seja u uma curva qualquer de $\{u_i\}$ com m intersecções. A cada intersecção de u se atribui um elemento i de $\mathcal{C}$. Faz-se o mesmo nas curvas de $\{v_j\}$: a cada intersecção de uma curva v se atribui um elemento j de $\mathcal{C}$.

Isto completa a definição dos campos. Em toda curva do diagrama, há um elemento de C associado a cada intersecção.

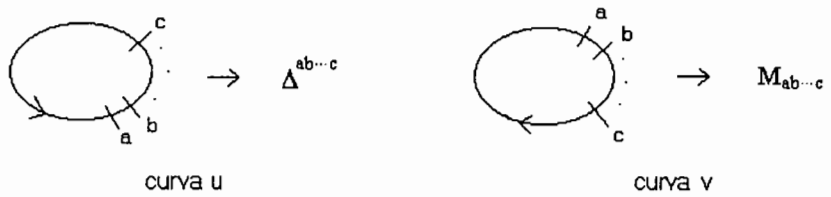


Figura 2.17. Peso estatístico associado às curvas orientadas.

Os pesos locais são definidos em curvas e intersecções. A cada curva u com m intersecções é atribuído um peso estatístico $\Delta^{i_1 i_2 \ldots i_m}$, com valor fixado pela configuração i_α dos campos em suas intersecções . Os índices em $\Delta^{i_1 i_2 \ldots i_m}$ devem aparecer na mesma ordem em que aparecem na curva (Figura 2.17). Como não há um modo natural de escolher a "primeira" intersecção numa curva fechada, toma-se $\Delta^{i_1 i_2 \ldots i_m}$ simétrico em relação à permutação cíclica de índices. De modo análogo, são atribuídos às curvas v pesos locais $M_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ com simetria cíclica em seus índices.

Dois tensores são definidos a partir dos pesos das curvas. O tensor contravariante $\Delta^{(m)}$, o m-coproduto, é definido por $\Delta^{(m)} := \Delta^{i_1 i_2 \ldots i_m} \phi_{i_1} \otimes \phi_{i_2} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_m}$. O tensor covariante $M^{(n)}$, o n-produto, é definido por $M^{(n)} := M_{j_1 j_2 \ldots j_n} \psi^{j_1} \otimes \psi^{j_2} \otimes \cdots \otimes \psi^{j_n}$, onde $\{\psi^k\}$ é a base dual de $V^\star$ [7].

O peso estatístico das intersecções é descrito por um tensor misto I de tipo $(1,1)$. A cada intersecção corresponde um índice a no tensor da curva u que o atravessa e um índice b no tensor da curva v. O peso da intersecção é I_a^b. O tensor I pode ser de dois tipos. Na intersecção das curvas, os vetores tangentes a u e v definem uma orientação da superfície. Se esta concorda com a orientação de ∂H, então $I_a^b = \delta_a^b$. Se as orientações discordam, então se toma um tensor especial S, denominado antípoda, e $I_a^b = S_a^b$.

Os índices da intersecção podem ser contraídos com os índices correspondentes nas curvas, como mostrado na Figura 2.18. A função de partição $Z(\mathcal{D})$ do modelo é definida como o escalar que resulta da contração dos índices das curvas em todas as intersecções do diagrama $\mathcal{D}$. Seu valor depende dos coeficientes dos tensores S, $\Delta^{(m)}$ e $M^{(n)}$, e da estrutura de intersecções do diagrama.

A interpretação do modelo como *state-sum model* é a seguinte. Os coeficientes dos tensores $\Delta^{(m)}$, $M^{(n)}$ e I são pesos locais associados a curvas u, curvas v e intersecções, respectivamente. Os índices nas intersecções das curva são as configurações do campo. O produto de todos os pesos locais em um diagrama, com uma dada escolha de índices,

[7] A ação de $V^\star$ em V é dada pela expressão tradicional, $\psi^k(\phi_i) = \delta_i^k$.

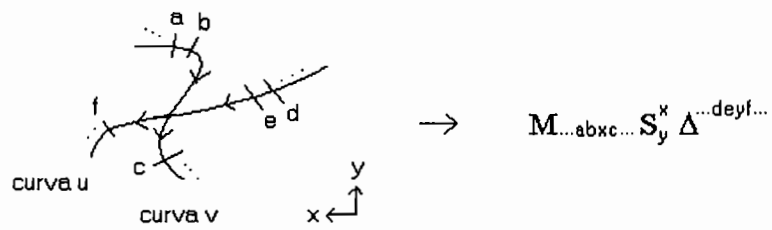


Figura 2.18. Contração de índices na intersecção das curvas a e b. A orientação definida pelas curvas discorda da orientação da superfície, dada pelo par ordenado de vetores (x, y).

é o peso de tal configuração. A soma sobre configurações é feita automaticamente com a contração dos índices.

Em casos particulares, outras interpretações como *state-sum model* são possíveis. Apresenta-se na próxima seção um caso que equivale a um modelo com campos definidos em curvas de arestas e pesos estatísticos em curvas de faces, que reproduz a formulação das teorias de gauge na rede.

2.4.2. Teorias de gauge na rede

A toda triangulação Δ de uma variedade tridimensional orientável corresponde um diagrama de Heegard $\mathcal{D} = \langle \{a_i\}, \{b_j\} \rangle$. Cada curva de $\{a_i\}$ descreve uma aresta e cada curva de $\{b_j\}$ uma face da triangulação (ver seção 2.3.4). Teorias de gauge locais definidas sobre uma triangulação podem ser reformuladas neste diagrama. Assumiremos G finito por simplicidade.

Nas teorias de gauge na rede, há um elemento x do grupo de gauge G associado a cada aresta, e um peso estatístico σ_{xyz} em cada face da triangulação. Arestas e faces devem ser orientadas. O peso σ_{xyz} de uma face é determinado pelos elementos x, y, z em suas arestas, lidos na ordem ditada pela orientação da face. Caso as orientações das arestas e da face discordem, inverte-se o elemento correspondente (Figura 2.19). O peso σ_{xyz} possui simetria cíclica nos índices.

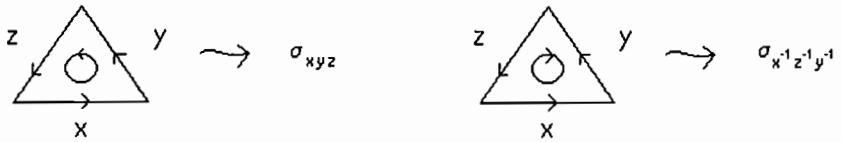


Figura 2.19. Peso estatístico atribuído a uma face. No segundo caso, a orientação da face não concorda com a das arestas, e os elementos do grupo são invertidos.

A atribuição de um elemento $x_i \in G$ a cada aresta i da triangulação descreve uma configuração do campo de gauge na triangulação. A ação do modelo, em uma dada configuração do campo, é o produto dos pesos σ_{xyz} em todas as faces da triangulação[8]. A função de partição Z é a soma da ação sobre todas as configurações $\{x_i\}$ possíveis, ou seja,

$$Z = \sum_{\{x_i\}} \prod_f \sigma_{x_f y_f z_f} ,$$

onde f enumera as faces de Δ, e x_f, y_f, z_f são os elementos do grupo de gauge G atribuídos às arestas de f, lidos na ordem fixada pela sua orientação. A soma é feita sobre todas as configurações de campo $\{x_i\}$.

O modelo definido nos diagramas difere bastante desta formulação. Há duas diferenças principais. Nos diagramas há pesos associados a arestas e faces e também às intersecções de suas curvas. Nas teorias de gauge só há pesos em faces. Além disso, nas teorias de gauge os índices que descrevem o campo são colocados em arestas, enquanto nos diagramas habitam intersecções de curvas. Mostra-se a seguir como uma escolha adequada de pesos nos diagramas permite que estas diferenças sejam eliminadas.

No diagrama $\mathcal{D} = \langle \{a_i\}, \{b_j\} \rangle$ da triangulação Δ, há uma curva a associada a cada aresta da triangulação. Atribui-se à mesma um peso $\Delta^{abc\cdots d}$, onde $a, b, c, ..., d \in \mathcal{C}$ são as configurações do campo em suas intersecções. O conjunto $\mathcal{C}$ de índices deve ser o grupo de gauge G, naturalmente. Para que se possa associar um único índice à aresta, toma-se

$$\Delta^{abc\cdots d} = \delta_{a,b}\delta_{a,c}\cdots\delta_{a,d} .$$

Deste modo, o peso da curva é não-nulo somente se todas as suas intersecções são "coloridas" com o mesmo índice. Neste caso, o índice pode ser atribuído à própria aresta. Quando o peso é não-nulo, seu valor é 1, e pode ser omitido do produto na ação. Com isso, o peso local das arestas é eliminado da formulação do modelo. A configuração dos campos na curva de uma aresta reduz-se a um único índice, de maneira análoga à das teorias de gauge.

A cada face de Δ está associada uma curva b em $\mathcal{D}$. Todas as curvas de faces apresentam três intersecções, produzidas pelas três arestas que as formam. São então descritas por um peso M_{xyz}, que tomamos idêntico ao peso σ_{xyz} das teorias de gauge,

$$M_{xyz} = \sigma_{xyz}.$$

[8] Por motivos práticos, diz-se que $exp\{-iS\}$ é a ação do modelo.

A orientação das curvas é feita a partir das orientações de arestas e faces na triangulação com o uso da clássica "regra da mão direita". A superfície ∂H_1 é orientada para fora de H_1. Assim, nas intersecções em que face e aresta são orientadas de forma coerente, a intersecção é descrita pelo tensor δ_a^b. Nos casos em que as orientações são incoerentes, a intersecção é descrita por S_a^b (Figura 2.20).

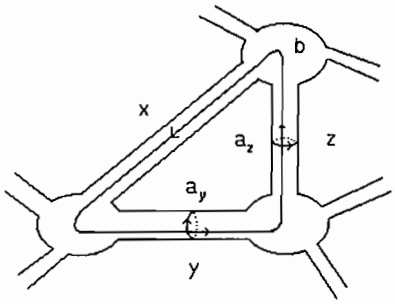


Figura 2.20. Diagrama associado a triangulação na vizinhança de uma face. São representadas a curva b da face e as curvas a_y e a_z das arestas y e z. A face é orientada para fora do papel, a aresta z de baixo para cima, e a aresta y da direita para a esquerda. A orientação de z concorda com a da face. As tangentes a a_z e b definem uma orientação que aponta para fora do *handlebody* H_1. A da aresta y discorda, e a orientação definida na intersecção aponta para dentro de H_1.

A contração dos índices nas intersecções corresponde ao encaixe de faces em arestas na triangulação. O encaixe de uma face M_{xyz} em uma aresta com configuração "a" é descrita pela contração $M_{xyz}I_a^z$. Nas intersecções descritas por δ_a^b, a expressão tem uma interpretação simples. O peso da face M_{xyz}, quando encaixada na aresta com índice a, é igual a M_{xya}.

A especificação do modelo é completada com a escolha do tensor S_a^b. Toma-se S como o operador de inversão de elementos do grupo, com coeficientes $S_a^b = \delta_{a^{-1},b}$. Com esta escolha, em intersecções descritas por S_a^b, o encaixe da face na aresta é feito com índices invertidos. Se a aresta tem índice a, o peso da face é $M_{xya^{-1}}$.

Em todas as contrações, o peso I_a^b associado à intersecção vale 1 quando não-nulo, e assim pode ser omitido no produto da ação. O peso local das arestas também já foi trivializado. A ação se reduz, portanto, ao produto dos pesos locais M_{xyz} das faces. A soma é feita sobre atribuições de índices a arestas. Os pesos são iguais aos das teorias de gauge, $M_{xyz} = \sigma_{xyz}$. A função de partição que se obtém é a das teorias de gauge na rede.

2.4.3. Modelos topológicos

Na classe de modelos topológicos definida por Kuperberg [12], os tensores $M_{ab\cdots c}$ e $\Delta^{ab\cdots c}$ com número arbitrário de índices são todos construídos a partir de quatro tenso-

res fixos. São estes: o produto M^c_{ab}, o co-produto Δ^{bc}_a, a unidade ι^a e a co-unidade ϵ_a. Os quatro tensores, juntamente com a antípoda S^b_a, são os tensores de estrutura do modelo. Para que o modelo seja topológico, os tensores de estrutura devem formar uma álgebra de Hopf involutória [12]. Um modelo é topológico quando o valor de Z é o mesmo em todos os diagramas que descrevem um mesmo espaço M. A simetria topológica em diagramas será discutida em maior detalhe no próximo capítulo.

O tensor M^c_{ab} é um produto linear no espaço vetorial V. O produto $u \cdot v$ de vetores $u, v \in V$ tem seus coeficientes dados pela expressão

$$(u \cdot v)^c = u^a v^b M^c_{ab} \,.$$

O tensor ι^a é a unidade deste produto, definido pela relação $\iota \cdot u = u \cdot \iota = u$, $\forall u \in V$. O co-produto Δ^{bc}_a é um produto linear no espaço dual $V^\star$. O produto de vetores duais $\alpha, \beta \in V^\star$ tem seus coeficientes dados pela expressão

$$(\alpha \cdot \beta)_c = x_a \, y_b \, \Delta^{ab}_c \,.$$

O tensor ϵ_a é a unidade deste produto, e obedece a relação $\epsilon \cdot x = x \cdot \epsilon = x$, $\forall x \in V^\star$.

A construção dos tensores $M^{(n)}$ e $\Delta^{(m)}$ a partir dos tensores de estrutura envolve a manipulação de expressões tensoriais longas, e é conveniente usar a notação diagramática de Kuperberg [12] para descrevê-las. Exemplos da notação são dados na Figura 2.21. Os índices dos tensores são representados por setas, e suas contrações pela conexão das setas correspondentes. Índices contravariantes são setas que apontam para fora do tensor, e índices covariantes setas que apontam para dentro do tensor. Índices de mesmo tipo são agrupados, e lidos em sentido anti-horário.

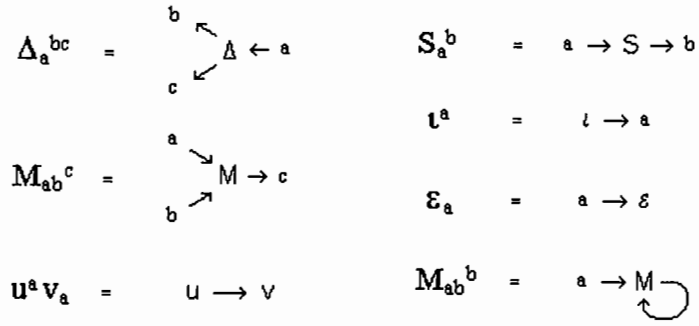


Figura 2.21. Exemplos da notação diagramática de expressões tensoriais.

A notação também é usada sem os índices junto às setas. Esta representação é análoga à feita com índices abstratos na notação tradicional. O conjunto das setas descreve

apenas o tipo do tensor – $(2,1)$ ou $(3,1)$, por exemplo. Se índices são adicionados, a expressão passa a representar coeficientes do tensor numa base especificada.

Existe uma ambiguidade na notação descrita, no caso de tensores puramente covariantes ou contravariantes. Nestes, não há um modo natural de se escolher o primeiro índice no ciclo de setas. Exige-se então que os tensores possuam simetria cíclica. A representação diagramática não pode ser aplicada a tensores puros que não sejam cíclicos.

A construção dos tensores de campo a partir dos tensores de estrutura é apresentada na Figura 2.22, onde também são fixadas algumas convenções de notação. Os tensores puros $M^{(n)}$ e $\Delta^{(m)}$ devem ser ciclicamente simétricos. Para isto, é suficiente que produto M^c_{ab} e o co-produto Δ^{bc}_a sejam ambos associativos [12]. Diz-se neste caso que o co-produto é co-associativo. A representação diagramática das condições de associatividade e de co-associatividade é mostrada na Figura 2.23.

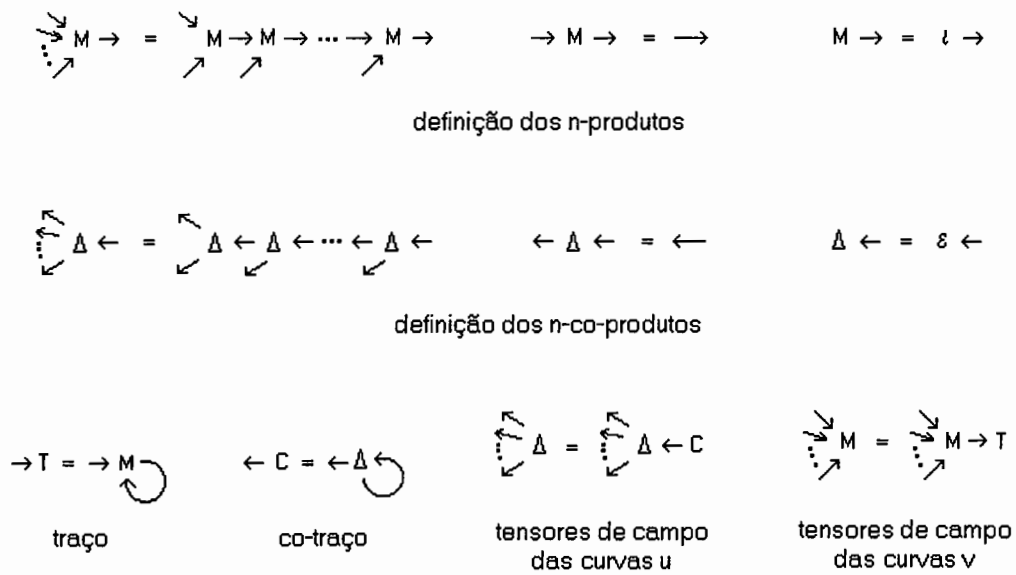


Figura 2.22. Definição dos tensores de campo e de tensores auxiliares.

O resultado provado por Kuperberg que garante a invariância topológica de seu modelo é enunciado no Teorema 2.4.1.

TEOREMA 2.4.1. *Seja M um espaço topológico tridimensional orientável. Sejam $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ diagramas de Heegard quaisquer de M, com funções de partição $Z(\mathcal{D})$ e $Z(\mathcal{D}')$. Se os tensores de estrutura Δ, M, S, ϵ e ι formam uma álgebra de Hopf involutória, então $Z(\mathcal{D}) = Z(\mathcal{D}')$.*

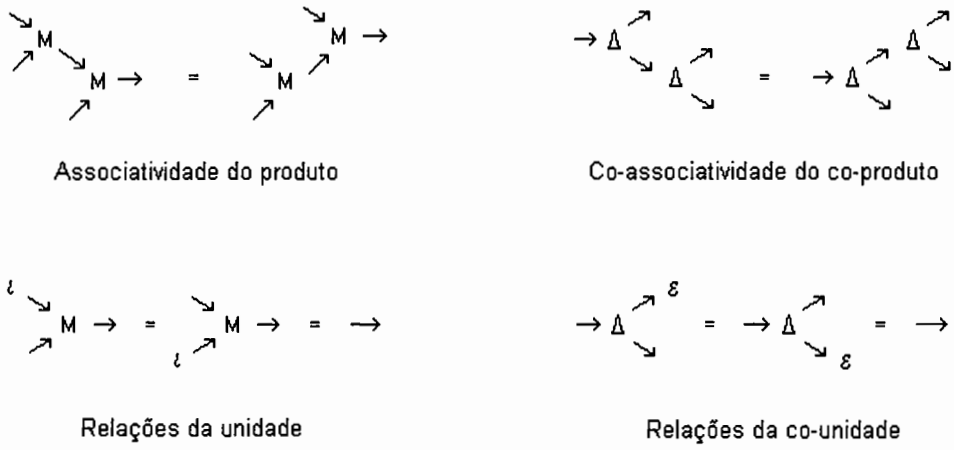


Figura 2.23. Propriedades básicas dos tensores de estrutura.

2.4.4. Modelos quasetopológicos

Os modelos quasetopológicos estudados neste trabalho são definidos da mesma forma que o modelo topológico de Kuperberg. Os pesos $\Delta^{(m)}$ e $M^{(n)}$ das curvas de u_i e v_j são dados pelas fórmulas da Figura 2.22. Não se exige que os tensores de estrutura formem uma álgebra de Hopf, no entanto. As condições listadas na Figura 2.23 devem ser satisfeitas para que os tensores de campo $\Delta^{(m)}$ e $M^{(n)}$ estejam bem definidos.

As operações de simetria quasetopológica são homeomorfismos que preservam o número de trinions. Em diagramas de triangulações, o número de trinions é igual ao número F de faces. O modelo tem como casos especiais as teorias na rede invariantes por homeomorfismos que preservam o número de faces. O número de tetraedros em uma triangulação é igual a $F/2$, e então também é preservado. Portanto, as teorias quasetopológicas são a generalização para os diagramas de Heegard de modelos definidos em triangulações com invariância por homeomorfismos que preservam o número de tetraedros.

Capítulo 3

Simetria Topológica e Quasetopológica

No contínuo, a simetria topológica de uma teoria de campo num espaço fechado é descrita pela invariância de sua função de partição Z sob mudanças de coordenadas arbitrárias. Em outras palavras, Z deve ser invariante sob a ação de difeomorfismos quaisquer. Em três dimensões, invariância por difeomorfismos equivale a invariância por homeomorfismos [10], e assim Z é um invariante topológico. O seu valor depende apenas da topologia do espaço onde é calculado. Estruturas adicionais, como uma métrica ou uma orientação, não influenciam no cálculo de Z.

A simetria topológica é definida de modo análogo nas teorias de campo discretas. Há diversos diagramas de Heegard distintos que descrevem um mesmo espaço. Diz-se que são homeomórficos. Uma operação qualquer que relacione diagramas homeomórficos é um homeomorfismo. Em modelos com simetria topológica, a função de partição é invariante sob a ação de homeomorfismos arbitrários entre diagramas. O valor de Z depende apenas da topologia determinada pelo diagrama.

A demonstração da invariância topológica de um modelo discreto geralmente é feita com o uso de *moves* topológicos. Os *moves* topológicos são homeomorfismos elementares cujas composições geram todos os demais homeomorfismos. Para que um modelo seja topológico, basta que Z seja invariante sob a ação dos *moves*. Considere o caso das triangulações, por exemplo. Para complexos homeomórficos T_1 e T_2 quaisquer, existe uma seqüência de *moves* m_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, que leva T_1 em T_2, isto é, para a qual $m_n \circ \cdots \circ m_2 \circ m_1 (T_1) = (T_2)$. Se Z é invariante sob a ação de cada *move* m_i, então é evidente que $Z(T_1) = Z(T_2)$. Segue que o modelo é topológico.

A simetria quasetopológica é estudada do mesmo modo. Um conjunto de *moves* quasetopológicos é definido, cujas composições geram todas as operações de simetria. Prova-se então a invariância da função de partição sob a ação dos *moves*. O modelo é definido sobre diagramas triniônicos, e as operações de simetria são homeomorfismos que preservam o número de trinions. Teorias quasetopológicas têm como casos especiais as teorias na rede invariantes por homeomorfismos que preservam o número de tetraedros.

Nas triangulações, não há um conjunto simples de operações que preservem o número de tetraedros. Nos diagramas triniônicos, no entanto, define-se facilmente operações que preservam o número de trinions. Este é o motivo pelo qual os diagramas são adotados para o estudo da simetria quasetopológica. O interesse é dirigido às teorias na rede, de interpretação mais intuitiva, mas a abordagem matemática é feita de modo mais adequado com o uso dos diagramas.

A principal dificuldade na descrição de uma simetria com o uso de *moves* é a prova de ergodicidade das operações dentro das classes de equivalência. Deve ser provado que toda operação de simetria pode ser escrita como uma composição finita dos *moves*. Este capítulo é dedicado ao estudo das operações de equivalência quasetopológica e à prova de ergodicidade dos *moves*. O estudo é feito em uma classe especial de espaços, formada pelos espaços quasetopológicos definidos na seção 2.2.4. Os espaços tridimensionais de maior relevância, como os espaços de lentes, o toro tridimensional $S^1 \times S^1 \times S^1$ e a esfera S^3, encontram-se dentro desta classe.

A organização do capítulo é a seguinte. A definição dos *moves* quasetopológicos é feita nas seções 3.1 e 3.2. O teorema de ergodicidade é provado na seção 3.3. Na seção 3.4 é apresentado um longo teorema sobre decomposições triniônicas sólidas, sobre o qual se baseia a prova de ergodicidade dos *moves*. No final do capítulo é incluído um apêndice sobre Suzuki *moves* [21] – um conjunto de operações em *handlebodies* sólidos usado na definição dos *moves* quasetopológicos.

3.1. Operações em Diagramas Triniônicos

Os diagramas triniônicos são definidos como um par $\mathcal{D} = \langle \{u_i\}, \{v_j\} \rangle$ de sistemas de curvas numa superfície ∂H de gênero g. Os sistemas de curvas $\{u_i\}$ e $\{v_j\}$ devem ser decomposições triniônicas da superfície. De acordo com o Teorema 2.3.6, todo diagrama triniônico abstrato pode ser interpretado como a representação de uma bipartição $\mathcal{B}$ de mesmo gênero. Seja $\mathcal{B} = \langle H_1, H_2, D_1 = \{a_i\}, D_2 = \{b_j\}, h : \partial H_2 \to \partial H_1 \rangle$. A representação é feita explicitamente com um homeomorfismo $r : \partial H \to \partial H_1$ que identifica ∂H com ∂H_1. Sob a ação de r, o diagrama $\mathcal{D}$ assume a forma $\langle \{a_i\}, \{h(b_j)\} \rangle$ em ∂H_1, com $r(u_i) = a_i$ e $r(v_j) = h(b_j)$. Para a definição de operações nos diagramas é conveniente adotar sempre esta representação.

O conjunto das operações de simetria quasetopológica, que denotaremos $\mathfrak{Q}$, é formado por homeomorfismos de diagramas triniônicos que preservam o número de trinions. O número de trinions é diretamente relacionado ao gênero do *handlebody* habitado pelo diagrama, e então as operações de $\mathfrak{Q}$ relacionam diagramas de mesmo gênero.

Para cada gênero g, fixa-se uma representação padrão $H_1^{(g)}$ e $H_2^{(g)}$ dos *handlebodies* usados nas bipartições. Uma bipartição $\mathcal{B} = \langle H_1, H_2, D_1, D_2, h\rangle$ qualquer de gênero g pode ser levada em uma bipartição $\mathcal{B}'$ em $H_1^{(g)}$ e $H_2^{(g)}$ pela aplicação de uma equivalência $h_1 : H_1 \to H_1^{(g)}$ e uma equivalência complementar $h_2 : H_2 \to H_2^{(g)}$[1]. A bipartição $\mathcal{B}'$ que se obtém deste modo é homeomórfica a $\mathcal{B}$, e é interpretada como sua representação nos *handlebodies* padrão. Nesta seção, em toda bipartição de gênero g, pressupõe-se que $H_1 = H_1^{(g)}$ e $H_2 = H_2^{(g)}$.

Uma bipartição qualquer de gênero g é então escrita na forma

$$\mathcal{B} = \left\langle H_1^{(g)}, H_2^{(g)}, D_1 = \left\{a_i \subset \partial H_1^{(g)}\right\}, D_2 = \left\{b_j \subset \partial H_2^{(g)}\right\}, h : \partial H_2^{(g)} \to \partial H_1^{(g)}\right\rangle,$$

e um diagrama qualquer é representado como

$$\mathcal{D} = \langle \{a_i\}, \{h(b_j)\}\rangle.$$

Operações quasetopológicas preservam o gênero, e então relacionam bipartições definidas num mesmo par de *handlebodies*. Por motivos práticos, os *handlebodies* são omitidos da notação. As operações de simetria quasetopológica são representadas por

$$\mathcal{B} = \langle D_1, D_2, h\rangle \to \mathcal{B}' = \langle D_1', D_2', h'\rangle,$$

subentendendo-se que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ habitam os mesmos *handlebodies* $H_1^{(g)}$ e $H_2^{(g)}$. Nos diagramas triniônicos, as operações assumem a forma

$$\mathcal{D} = \langle \{a_i\}, \{h(b_j)\}\rangle \to \mathcal{D}' = \langle \{a_i'\}, \{h'(b_j')\}\rangle.$$

Há duas classes básicas de operações. Uma é composta por operações que alteram a função de colagem h, mas nas quais as decomposições D_1 e D_2 não mudam. Ou seja, transforma-se a bipartição $\langle D_1, D_2, h\rangle$ em $\langle D_1, D_2, h'\rangle$. Na outra classe, somente as decomposições D_1 e D_2 são alteradas. Leva-se $\langle D_1, D_2, h\rangle$ em $\langle D_1', D_2', h\rangle$. As operações desta segunda classe são sempre homeomorfismos, pois a topologia de uma bipartição depende apenas do homeomorfismo de colagem h. Nas operações que alteram h, é preciso mostrar que as partições envolvidas são homeomórficas. Os dois casos são discutidos a seguir. Define-se também uma operação na qual as duas possibilidades são combinadas.

[1] Na bipartição $\mathcal{B}'$, as decomposições de $H_1^{(g)}$ e $H_2^{(g)}$ são dadas por $D_1' = \{h_1(a_i)\}$ e $D_2' = \{h_2(b_j)\}$. O fato de serem decomposições triniônicas segue do Teorema 3.1, que será provado mais adiante.

3.1.1. Colagens equivalentes

Os primeiros exemplos de homeomorfismos de diagramas triniônicos são dados pela ação de equivalências e equivalências complementares nas bipartições associadas. Bipartições relacionadas por uma equivalência de colagens são sempre homeomórficas. A ação da operação sobre os diagramas é deduzida a partir de sua ação sobre as partições.

Numa equivalência, o homeomorfismo de colagem h é alterado. O homeomorfismo h é transformado em $h' = h_1|_{\partial H_1} \circ h$, onde $h_1 : H_1 \mapsto H_1$ é um automorfismo do *handlebody* sólido H_1. Mantendo as decomposições $D_1 = \{a_i\}$ e $D_2 = \{b_j\}$ inalteradas, define-se uma operação sobre bipartições,

$$\langle D_1, D_2, h\rangle \to \left\langle D_1, D_2, h_1|_{\partial H_1} \circ h\right\rangle.$$

O diagrama da bipartição inicial é $\langle\{a_i\}, \{h(b_j)\}\rangle$. O diagrama da bipartição final é $\left\langle\{a_i\}, \left\{h_1|_{\partial H_1} \circ h(b_j)\right\}\right\rangle$. Portanto, a operação age sobre os diagramas segundo

$$\langle\{a_i\}, \{h(b_j)\}\rangle \to \left\langle\{a_i\}, \left\{h_1|_{\partial H_1} \circ h(b_j)\right\}\right\rangle = \langle\{a_i\}, \{h_1(h(b_j))\}\rangle.$$

Os dois diagramas são homeomórficos. Sendo ambos definidos na mesma superfície ∂H_1, são também de mesmo gênero. Portanto, a operação é um homeomorfismo que preserva o gênero dos diagramas, isto é, um elemento de $\mathfrak{Q}$.

Uma operação de simetria baseada em equivalências complementares é definida de modo análogo. Numa equivalência complementar, o homeomorfismo de colagem h é transformado em $h' = h \circ h_2|_{\partial H_2}$, onde $h_2 : H_2 \mapsto H_2$ é um automorfismo de H_2. Mantém-se novamente as decomposições D_1 e D_2 inalteradas. A operação definida é

$$\langle D_1, D_2, h\rangle \to \left\langle D_1, D_2, h \circ h_2|_{\partial H_2}\right\rangle.$$

A operação correspondente nos diagramas é dada por

$$\langle\{a_i\}, \{h(b_j)\}\rangle \to \left\langle\{a_i\}, \left\{h \circ h_2|_{\partial H_2}(b_j)\right\}\right\rangle = \langle\{a_i\}, \{h(h_2(b_j))\}\rangle.$$

A transformação é um homeomorfismo, e preserva o gênero. Constitui uma nova operação de simetria quasetopológica de $\mathfrak{Q}$, portanto.

A ação de equivalências complementares nos diagramas admite uma interpretação alternativa, a qual faz uso do resultado que será provado agora. A ação de automorfismos do *handlebody* sólido sobre as curvas de uma decomposição sólida qualquer produz uma nova decomposição sólida do mesmo *handlebody*.

TEOREMA 3.1.1. *Sejam H e H'* handlebodies *homeomórficos, $D = \{c_i\}$ uma decomposição triniônica sólida de H, e $h : H \mapsto H'$ um homeomorfismo. Então o sistema de curvas $D' = \{h(c_i)\}$ em $\partial H'$ é uma decomposição triniônica sólida de H'. Usa-se a notação $D' = h(D)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Por definição, um sistema de curvas D na superfície ∂H de um *handlebody* sólido H é uma decomposição triniônica sólida se: (i) as curvas c_i são duas a duas disjuntas, $c_i \cap c_j = \emptyset$, se $c_i \neq c_j$; (ii) existem discos d_i em H com fronteira c_i; e (iii) as curvas cortam a superfície em uma coleção de trinions. Mostremos que tais condições são satisfeitas por D' se válidas para D. A função h é um homeomorfismo, e em particular uma bijeção. Mas para qualquer bijeção h, $h(c_i) \cap h(c_j) = \emptyset$, se $\dot{c}_i \cap c_j = \emptyset$. Então a condição (i) vale em D'. h é um homeomorfismo, e então a imagem $h(d_i)$ de um disco d_i é um novo disco em H. A fronteira deste disco é $h(c_i)$. Logo, vale (ii) em D'. Pelo mesmo motivo, a imagem de trinions por h são novos trinions, e a condição (iii) também é verificada. Portanto, $D' = \{h(c_i)\}$ é uma decomposição triniônica sólida de H'. □

Como conseqüência do teorema, tem-se que $D_2' = \{h_2(b_j)\}$ é uma decomposição triniônica de H_2. Então é possível definir uma operação nas bipartições onde o homeomorfismo de colagem não é alterado, mas a decomposição de H_2 muda de $D_2 = \{b_j\}$ para $D_2' = \{h_2(b_j)\}$. A operação correspondente nos diagramas é

$$\langle \{a_i\}, \{h(b_j)\} \rangle \to \langle \{a_i\}, \{h(h_2(b_j))\} \rangle .$$

O diagrama obtido é idêntico ao que resulta da mudança de homeomorfismo de colagem dada por $h \to h' = h \circ h_2|_{\partial H_2}$. Portanto, a ação de equivalências complementares nos diagramas pode ser interpretada como uma mudança da decomposição de H_2, na forma $\langle D_1, D_2, h \rangle \to \langle D_1, D_2', h \rangle$. Esta segunda interpretação será usada na prova de ergodicidade dos *moves*.

3.1.2. Automorfismos de H_1

A partir de um automorfismo $h_1 : H_1 \to H_1$ do *handlebody* H_1, pode-se definir naturalmente duas operações numa bipartição $\mathcal{B} = \langle \{a_i\}, \{b_j\}, h \rangle$. A primeira é uma transformação da decomposição triniônica de H_1. Troca-se a decomposição $\{a_i\}$ por $\{h_1(a_i)\}$. A segunda é a equivalência de colagens dada por $h \to h' = h_1|_{\partial H_1} \circ h$. As duas operações podem ser combinadas. O resultado é um novo *move* quasetopológico.

Sua ação sobre os diagramas e partições é dada por

$$\langle \{a_i\}, D_2, h\rangle \to \left\langle \{h_1(a_i)\}, D_2, h_1|_{\partial H_1} \circ h \right\rangle$$
$$\langle \{a_i\}, \{h(b_j)\}\rangle \to \left\langle \{h_1(a_i)\}, \left\{h_1|_{\partial H_1} \circ h(b_j)\right\} \right\rangle.$$

A operação corresponde à ação do automorfismo $h_1|_{\partial H_1} : \partial H_1 \mapsto \partial H_1$ de ∂H_1 sobre os dois sistemas de curvas do diagrama simultaneamente. A ação nos diagramas pode ser escrita na forma

$$\langle \{a_i\}, \{h(b_j)\}\rangle \to \langle \{h_1(a_i)\}, \{h_1(h(b_j))\}\rangle,$$

onde cada curva a_i e $h(b_j)$ é substituída por sua imagem sob a ação de h_1.

3.1.3. *Flip moves*

Os *flip moves*, ou *"flips"*, simplesmente, são operações definidas sobre decomposições triniônicas sólidas de *handlebodies*. Quando aplicados em uma decomposição D_1 ou D_2 de uma bipartição, definem *flip moves* de bipartições. O homeomorfismo de colagem não é alterado. Constituem novas operações de simetria quasetopológica.

A ação de um *flip move* em uma decomposição D é restrita a uma região formada pela colagem de dois trinions. Tais regiões são denominadas tétrions. A curva a no interior do tétrion é substituída por uma curva a' que a cruze em dois pontos[2]. Deve se obter uma nova decomposição triniônica sólida do tétrion (Figura 3.1).

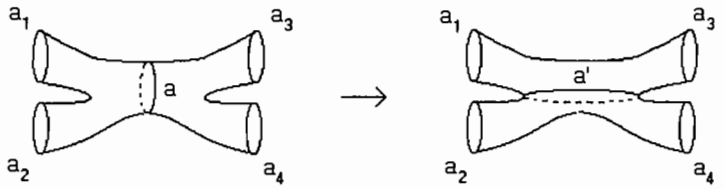


Figura 3.1. Exemplo de *flip move*: a curva a no interior do tétrion é substituída pela curva a' que a intersecta em dois pontos.

Há uma infinidade de maneiras de se construir um tétrion com a colagem de dois trinions, e os *flips* são um caso particular de mudança de decomposição. Na Figura 3.2 são mostrados exemplos de decomposições triniônicas sólidas de um tétrion.

[2] A exigência de que as curvas se intersectem em exatamente dois pontos é imposta para facilitar a representação algébrica do *move*, que será feita no próximo capítulo. Provaremos, no entanto, que qualquer mudança de decomposição triniônica sólida do tétrion pode ser construída com operações deste tipo.

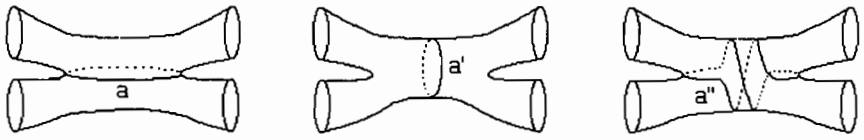


Figura 3.2. Exemplos de decomposições triniônicas sólidas de um tétrion. A curva a'' é obtida a partir de a' com uma "torção" do tétrion.

A ação de um *flip move* f em uma decomposição triniônica D é representada por $D \to D' = f(D)$. Para qualquer *flip* f, $f(D)$ é uma decomposição triniônica sólida. A ação de um *flip* numa bipartição é dada por

$$\langle D_1, D_2, h\rangle \to \langle f(D_1), D_2, h\rangle,$$

quando o flip age na decomposição D_1, ou

$$\langle D_1, D_2, h\rangle \to \langle D_1, f(D_2), h\rangle,$$

quando a ação se dá em D_2[3].

A representação dos *flips* de bipartições nos diagramas é feita da maneira padrão. Considere o primeiro caso, onde D_1 é levado pelo *flip* f em $D' = f(D_1)$. Seja $D' = \{a_i'\}$. Nos diagramas, a operação corresponde a

$$\langle \{a_i\}, \{h(b_j)\}\rangle \to \langle \{a_i'\}, \{h(b_j)\}\rangle.$$

O diagrama se altera apenas em uma tétrion Σ de ∂H_1, formado por dois trinions de D_1. A curva no interior do tétrion Σ é alterada, e a forma do diagrama no restante da superfície é mantida. O resultado da operação é um novo diagrama triniônico. No caso em que D_2 é alterado, o sistema $\{h(b_j)\}$ do diagrama é levado em $\left\{h\left(b_j'\right)\right\}$ com a substituição de uma única curva no interior de um tétrion de $h(D_2)$ em ∂H_1.

3.1.4. *Two-point moves*

Esta é a última classe de operações quasetopológicas usada no trabalho. Consiste numa classe restrita de equivalências e equivalências complementares de representação

[3] A notação é ambígua. *Flips* podem operar tanto em decomposições quanto em bipartições. Será definida ainda a ação de *flips* sobre diagramas triniônicos e sobre grafos trivalentes. A ambigüidade é vantajosa para o texto, no entanto, pois permite que operações em estruturas associadas sejam identificadas.

simples sobre a estrutura de intersecções dos diagramas. A definição das operações se baseia no uso de isotopias.

DEFINIÇÃO 3.1.2. *Duas funções $f_0, f_1 : X \to Y$ são homotópicas se existe uma função contínua $F : X \times [0,1] \to Y$ tal que $F(x,0) = f_0(x)$ e $F(x,1) = f_1(x)$, para qualquer $x \in X$. Diz-se que F é uma homotopia entre f_0 e f_1. Uma isotopia é uma homotopia na qual $F(x,t) : X \to Y$ é um homeomorfismo em sua imagem para qualquer valor do parâmetro $t \in [0,1]$.*

As isotopias formalizam o conceito de deformação progressiva de um subespaço. Na definição 3.1.2, as imagens $f_0(X)$ e $f_1(X)$ das funções f_0 e f_1 são ambas homeomórficas ao espaço base X. A isotopia $F(x,t)$ descreve uma deformação contínua de $f_0(X)$ em $f_1(X)$, com a variação do parâmetro t de 0 a 1.

Os automorfismos $h_1 : H_1 \to H_1$ e $h_2 : H_2 \to H_2$ usados para definir equivalências e equivalências complementares de colagens em bipartições podem ser tomados isotópicos à identidade. Em ambos os casos, a operação assim definida produz uma deformação contínua das curvas de um dos sistemas no diagrama associado. Considere o caso das equivalências complementares. Então as curvas do sistema $\{h(b_j)\}$ são arrastadas pela superfície do *handlebody* até a nova imagem $\{h'(b_j)\}$, de modo que intersecções com curvas do sistema $\{a_i\}$ podem ser criadas ou desfeitas. O resultado desta ação se resume a uma seqüência de *two-point moves* [12]. Cada *two-point move* descreve a criação ou a remoção de um par de intersecções. A operação de um *two-point* é representada na Figura 3.3. O *move* age sobre duas curvas, em cada uma das quais se cria um novo par de intersecções consecutivas.

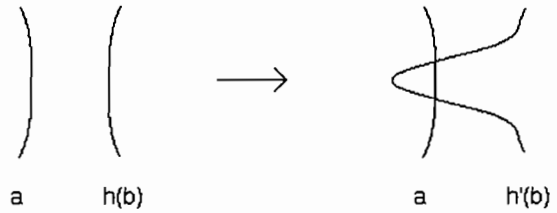


Figura 3.3. Operação do *two-point move* no par de curvas a, $h(b)$. A curva $h(b)$ é deformada continuamente de modo a que duas intersecções com a curva a sejam criadas.

3.2. Operações em Diagramas Triniônicos Abstratos

As operações apresentadas até aqui são definidas em diagramas triniônicos de bipartições. Não é possível descrevê-las de modo independente das bipartições, como uma ação em diagramas abstratos. Nas equivalências de colagem, por exemplo, usa-se

um automorfismo de algum dos *handlebodies* sólidos. Portanto, $H_1^{(g)}$ e $H_2^{(g)}$ devem estar definidos para que a operação faça sentido. O mesmo ocorre nas mudanças de decomposição triniônica sólida: são definidas nos *handlebodies* da bipartição que produz o diagrama, e não no próprio diagrama.

Nesta seção, os *moves* são redefinidos de modo a agirem em diagramas abstratos, sobre os quais são definidos os modelos quasetopológicos. Mostraremos que os *moves* definidos em bipartições equivalem a *moves* em diagramas abstratos. De acordo com o teorema ergódico que será demonstrado mais adiante, bastam *flips*, *two-point moves* e automorfismos da superfície para gerar todo o grupo quasetopológico $\mathfrak{Q}$. Estuda-se apenas a representação destes três *moves*, portanto.

3.2.1. *Flip moves*

Segue a definição dos *flip moves* de diagramas e a prova de que tais operações coincidem com os *flips* de bipartições anteriormente definidos. A definição não faz referência às bipartições, no entanto. Sua ação é descrita diretamente sobre a estrutura das curvas, como desejado.

DEFINIÇÃO 3.2.1. *Sejam $\mathcal{D} = \langle \{u_i\}, \{v_j\} \rangle$ e $\mathcal{D}'$ diagramas triniônicos em uma superfície ∂H. Se $\mathcal{D}'$ pode ser obtido a partir de $\mathcal{D}$ com a substituição de uma única curva u_i (ou v_j) compartilhada por dois trinions, por uma curva u' (ou v') que a intersecte em dois pontos, então se diz que $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ são relacionados por um* flip move. *A operação que leva $\mathcal{D}$ em $\mathcal{D}'$ é o* flip *f, com ação $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$.*

Os *flips* de bipartições, vistos nos diagramas associados, são *flips* de diagramas. Em bipartições $\mathcal{B} = \langle D_1, D_2, h \rangle$, o *flip* substitui uma curva de D_1 (ou D_2) por outra que a cruze em dois pontos e gere uma nova decomposição triniônica sólida de H_1 (ou H_2). Nos diagramas não se exige que a decomposição obtida seja sólida. Esta exigência só faz sentido em bipartições. À parte isto, as definições coincidem, e *flips* de bipartições são casos especiais de *flips* de diagramas, portanto.

Para provar a recíproca, isto é, que qualquer *flip* de diagramas pode ser interpretado como um *flip* de bipartições, usa-se o lema a seguir.

LEMA 3.2.2. *Seja $D = \{a, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ uma decomposição triniônica sólida do* handlebody *$H^{(g)}$, e a uma curva de D compartilhada por dois de seus trinions. Seja $D' = \{a', a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ uma decomposição triniônica da superfície $\partial H^{(g)}$ obtida a partir de D com a substituição da curva a por uma curva a'. Então a' é fronteira de um disco em $H^{(g)}$ e D' é uma decomposição triniônica sólida de $H^{(g)}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere a região de $H^{(g)}$ formada pela união dos trinions sólidos T_a e T_b que compartilham a curva a. Esta região é um tétrion sólido $T = T_a \cup T_b$.

Seja $T \cap \partial H^{(g)} = \Sigma$. Então Σ é uma superfície esférica com quatro furos, delimitada por quatro curvas da decomposição D. Sejam estas denotadas a_1, a_2, a_3 e a_4. Como D é uma decomposição triniônica sólida, então existem discos $d_1, d_2, d_3, d_4 \in H^{(g)}$ possuindo tais curvas como fronteira.

Por hipótese, o sistema $D' = \{a', a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é uma decomposição triniônica da superfície. Logo, a curva a' decompõe o tétrion Σ em dois trinions, Σ_a e Σ_b. Sem perda de generalidade, podemos considerar Σ_a delimitado por a_1, a_2 e a'. A curva a_1 é fronteira do disco $d_1 \in H^{(g)}$. Então a união $\Sigma_a \cup d_1$ em $H^{(g)}$ é uma superfície esférica com dois furos apenas. Sua fronteira é formada pelas curvas a_2 e a'. Além disso, a curva a_2 é fronteira do disco $d_2 \in H^{(g)}$. Portanto, tomando a união $\Sigma_a \cup d_1 \cup d_2$, obtém-se uma superfície esférica com um único furo, isto é, um disco d. Como $\Sigma_a, d_1, d_2 \in H^{(g)}$, então $d \in H^{(g)}$. A fronteira do disco d é a curva a' introduzida pelo flip. Provamos então que existe um disco $d \in H^{(g)}$ tal que $\partial d = a'$.

As curvas $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de D' pertencem também ao sistema D. Por hipótese, D é uma decomposição sólida de $H^{(g)}$, e então existem discos $d_i \in H^{(g)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tais que $\partial d_i = a_i$. Portanto todas as curvas de D' são fronteiras de discos em $H_1^{(g)}$, e assim D' é uma decomposição triniônica sólida de $H^{(g)}$. □

O conteúdo do teorema se resume na prova de que a aplicação de *flips* de superfície em decomposições triniônicas sólidas produz novas decomposições triniônicas sólidas. Com este resultado, a redução dos *flips* de diagramas a *flips* de bipartições é feita de maneira simples.

TEOREMA 3.2.3. *Sejam $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ diagramas triniônicos relacionados por um* flip move. *Então existem bipartições $\mathcal{B} = \langle D_1, D_2, h\rangle$ e $\mathcal{B}' = \langle D_1', D_2', h\rangle$ com diagramas associados $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$, respectivamente, relacionadas por um* flip move *de bipartições.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\mathcal{D} = \langle \{u_i\}, \{v_j\}\rangle$ e $\mathcal{D}' = \left\langle \{u_i'\}, \left\{v_j'\right\}\right\rangle$. Há dois tipos de *flip moves* definidos em $\mathcal{D}$: os que agem em $\{u_i\}$ e os que agem em $\{v_j\}$. Consideremos o primeiro caso. Então $\left\{v_j'\right\} = \{v_j\}$. O *flip move* substitui uma curva u_α do sistema $\{u_i\}$, compartilhada por dois de seus trinions, pela curva u_α'. O resultado é a decomposição triniônica $\{u_i'\}$. Pela definição de *flip moves*, as curvas u_α' e u_α intersectam-se em dois pontos.

De acordo com o Teorema 2.3.6, o diagrama $\mathcal{D}$ pode ser associado a uma bipartição $\mathcal{B} = \langle H_1, H_2, D_1 = \{a_i\}, \{b_j\}, h\rangle$. A associação é feita explícita por um homeomorfismo $r : \partial H \to \partial H_1$ que leva $\mathcal{D}$ sobre o diagrama $\mathcal{D}^{\mathcal{B}}$ da bipartição $\mathcal{B}$, isto é, para a qual $r(u_i) = a_i$ e $r(v_j) = h(b_j)$. A imagem de $\{u_i\}$ por r é a decomposição triniônica sólida $D_1 = \{r(u_i)\} = \{a_i\}$ de H_1. Definiremos agora uma bipartição $\mathcal{B}'$ através da aplicação de um *flip move* f sobre $\mathcal{B}$.

Considere $D_1' = \{r(u_i')\}$. O sistema de curvas D_1' é a imagem da decomposição triniônica $\{u_i'\}$ da superfície ∂H pelo homeomorfismo $r : \partial H \to \partial H_1$. Logo, é uma decomposição triniônica da superfície ∂H_1. D_1' é obtida a partir de D_1 com a substituição da curva $r(u_\alpha)$ pela curva $r(u_\alpha')$. Como u_α é compartilhada por dois trinions de $\{u_i\}$, então $r(u_\alpha)$ é compartilhada por dois trinions de D_1[4]. As hipóteses do Lema 3.2.2 são satisfeitas, e então D_1' é uma decomposição triniônica sólida de H_1. A bipartição $\mathcal{B}'$ é definida como $\mathcal{B}' = \langle H_1, H_2, D_1' = \{r(u_i')\}, \{b_j\}, h\rangle$.

As curvas u_α e u_α' intersectam-se em dois pontos. Como r é um homeomorfismo e, em particular, uma bijeção, então $r(u_\alpha)$ e $r(u_\alpha')$ apresentam o mesmo número de intersecções. Segue que a decomposição triniônica sólida D_1' é obtida a partir de D_1 com a substituição de uma única curva $r(u_\alpha)$, compartilhada por dois trinions de D_1, por uma curva $r(u_\alpha')$ que a intersecta em dois pontos. Então D_1 e D_1' são relacionados por um *flip move*, e assim também as bipartições $\mathcal{B} = \langle D_1, D_2, h\rangle$ e $\mathcal{B}' = \langle D_1', D_2, h\rangle$.

Resta observar que $\mathcal{D}'$ é um diagrama associado a $\mathcal{B}' = \langle D_1', D_2, h\rangle$. A associação é feita pelo mesmo homeomorfismo $r : \partial H \to \partial H_1$ que leva $\mathcal{D}$ em $\mathcal{D}^{\mathcal{B}}$. Portanto, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ são diagramas associados às bipartições $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ as quais são relacionadas por um *flip* move, como queríamos demontrar. Prova-se de maneira análoga o caso de ação sobre o sistema $\{v_j\}$. □

A topologia de um diagrama é definido como sendo a topologia de alguma bipartição associada, e bipartições relacionadas por *flips* são homeomórficas. Segue então do Teorema 3.2.3 o corolário a seguir.

COROLÁRIO 3.2.4. Flip moves *de diagramas triniônicos abstratos são homeomorfismos.*

3.2.2. Automorfismos da superfície

A ação de um automorfismo $h_1 : H_1 \to H_1$ do *handlebody* H_1 sobre a bipartição $\mathcal{B} = \langle D_1, D_2, h\rangle$ consiste na mudança da função de colagem h para $h' = h_1|_{\partial H_1} \circ h$, e da decomposição D_1 de H_1 para $D_1' = \{h_1(a_i)\}$. As curvas do diagrama em ∂H_1 sofrem a transformação

$$\langle \{a_i\}, \{h(b_i)\}\rangle \to \langle \{h_1(a_i)\}, \{h_1(h(b_i))\}\rangle .$$

Nos diagramas abstratos, esta operação é naturalmente generalizada pela ação de um automorfismo da superfície ∂H sobre as curvas $\{u_i\}$ e $\{v_j\}$ do diagrama, simultaneamente.

[4] A imagem de um trinion sob a ação de qualquer homeomorfismo de superfícies é um novo trinion.

DEFINIÇÃO 3.2.5. *Seja $\mathcal{D} = \langle \{u_i\}, \{v_j\} \rangle$ um diagrama triniônico na superfície ∂H, e $f : \partial H \to \partial H$ um homeomorfismo qualquer. A ação do automorfismo f no diagrama $\mathcal{D}$ resulta no diagrama $\mathcal{D}' = \langle \{f(u_i)\}, \{f(v_j)\} \rangle$.*

TEOREMA 3.2.6. *Sejam $\mathcal{D} = \langle \{u_i\}, \{v_i\} \rangle$ e $\mathcal{D}' = \langle \{f(u_i)\}, \{f(v_j)\} \rangle$ diagramas triniônicos em ∂H tais que $\mathcal{D}'$ resulte da ação do automorfismo de superfície $f : \partial H \to \partial H$ sobre $\mathcal{D}$. Então $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ determinam variedades homeomórficas.*

DEMONSTRAÇÃO. Por definição, a variedade topológica M descrita por um diagrama de Heegard $\mathcal{D}$ é a variedade determinada por uma bipartição $\mathcal{B}$ qualquer que tenha $\mathcal{D}$ como diagrama associado. Então para provar que os diagramas $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ são homeomórficos, basta mostrar que são associados a uma mesma bipartição.

Seja $\mathcal{B} = \langle \{a_i\}, \{b_i\}, h \rangle$ uma bipartição à qual $\mathcal{D} = \langle \{u_i\}, \{v_i\} \rangle$ seja associado. Seja $r : \partial H \to \partial H_1$ o homeomorfismo que descreve explicitamente a associação. Então $r(u_i) = a_i$ e $r(v_j) = h(b_j)$. Considere o homeomorfismo $r' : \partial H \to \partial H_1$ que resulta da composição dos homeomorfismos $r : \partial H \to \partial H_1$ e $f^{-1} : \partial H \to \partial H$, isto é, $r' = r \circ f^{-1}$. Mostraremos que este homeomorfismo associa $\mathcal{D}' = \langle \{f(u_i)\}, \{f(v_j)\} \rangle$ a $\mathcal{B}$. Para isso, basta mostrar que $r'(f(u_i)) = a_i$ e que $r'(f(v_j)) = h(b_j)$. Mas

$$r'(f(u_i)) = r \circ f^{-1}(f(u_i)) = r \circ f^{-1} \circ f(u_i) = r(u_i) = a_i \text{ , e}$$
$$r'(f(v_j)) = r \circ f^{-1}(f(v_j)) = r \circ f^{-1} \circ f(v_j) = r(v_j) = h(b_j).$$

Logo, r' associa $\mathcal{D}'$ a $\mathcal{B}$. Os diagramas abstratos $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ são associados a uma mesma bipartição, e são homeomórficos, portanto, como queríamos demonstrar. □

Como o teorema vale para diagramas $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ arbitrários, então automorfismos da superfície ∂H são sempre homeomorfismos de diagramas triniônicos abstratos. Os automorfismos definidos na Seção 3.1.2 são casos especiais de automorfismos da superfícies, com $f = h_1|_{\partial H_1}$, onde h_1 é um automorfismo do *handlebody* sólido H_1. Neste caso, o homeomorfismo $h_1|_{\partial H_1}$ necessariamente preserva a orientação da superfície. Quando a interpretação algébrica dos *moves* for feita no próximo capítulo, apenas esta classe de autormorfismos será considerada.

3.2.3. *Two-point moves*

Os *two-point moves* são naturalmente definidos por uma ação sobre as curvas do diagrama. Duas intersecções consecutivas são criadas em um par de curvas u, v, do modo mostrado na Figura 3.3 exposta na página 38.

3.3. Prova de Ergodicidade dos *Moves*

Prova-se nesta seção que, na classe dos espaços quasetopológicos, quaisquer dois diagramas triniônicos homeomórficos de mesmo gênero podem ser relacionados por uma seqüência com apenas três tipos de *moves*: *flips*, *two-point moves* e automorfismos orientáveis da superfície. A prova do teorema baseia-se fortemente no teorema dos *flips* que será demonstrado na Seção 3.4.3 (Teorema 3.4.10) e nas propriedades das operações quasetopológicas descritas na Seção 3.1.

TEOREMA 3.3.1. *Sejam $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ diagramas triniônicos de gênero g. Se $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ são homeomórficos e determinam um espaço quasetopológico, então existe uma seqüência de* flip moves, two-point moves *e automorfismos da superfície que leva o diagrama $\mathcal{D}'$ sobre $\mathcal{D}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Apresentaremos uma seqüência explícita de *moves* relacionando os diagramas $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$, usando operações definidas em bipartições. Seja $\mathcal{D}$ representado como o diagrama $\mathcal{D} = \langle \{a_i\}, \{h(b_j)\} \rangle$ da bipartição $\mathcal{B} = \langle \{a_i\}, \{b_j\}, h \rangle$. Seja $\mathcal{D}'$ representado como o diagrama $\mathcal{D}' = \left\langle \{a'_i\}, \left\{h'\left(b'_j\right)\right\} \right\rangle$ da bipartição $\mathcal{B}' = \left\langle \{a'_i\}, \left\{b'_j\right\}, h' \right\rangle$. Por hipótese, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são bipartições homeomórficas e determinam um espaço quasetopológico. Pela definição de espaço quasetopológico (ver Seção 2.2.4), temos então que

$$h' = h_1|_{\partial H_1} \circ h \circ h_2|_{\partial H_2},$$

onde h_1 é um automorfismo $h_1 : H_1 \to H_1$ de H_1, e h_2 um automorfismo $h_2 : H_2 \to H_2$ de H_2. Portanto,

$$\mathcal{D}' = \left\langle \{a'_i\}, \left\{h_1|_{\partial H_1} \circ h \circ h_2|_{\partial H_2}\left(b'_j\right)\right\} \right\rangle.$$

O primeiro *move* aplicado em $\mathcal{D}'$ é um automorfismo de ∂H_1. Toma-se para isto a restrição $h_1^{-1}|_{\partial H_1}$ do automorfismo h_1^{-1} do *handlebody* sólido a sua superfície ∂H_1. A ação do *move* sobre a bipartição e sobre seu diagrama é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}' = \langle \{a'_i\}, \{b'_j\}, h' \rangle &\to \mathcal{B}^{(1)} = \left\langle \left\{h_1^{-1}\left(a'_i\right)\right\}, \{b'_j\}, h \circ h_2|_{\partial H_2} \right\rangle \\ \mathcal{D}' = \langle \{a'_i\}, \{h'(b'_j)\} \rangle &\to \mathcal{D}^{(1)} = \left\langle \left\{h_1^{-1}\left(a'_i\right)\right\}, \left\{h \circ h_2|_{\partial H_2}\left(b'_j\right)\right\} \right\rangle. \end{aligned}$$

A descrição da transformação foi simplificada com o uso da identidade

$$h_1^{-1}|_{\partial H_1} \circ h' = h_1^{-1}|_{\partial H_1} \circ h_1|_{\partial H_1} \circ h \circ h_2|_{\partial H_2} = h \circ h_2|_{\partial H_2}.$$

Em seguida, ajusta-se a decomposição triniônica sólida do *handlebody* H_1. Pelo Teorema 3.4.10, qualquer par de decomposições triniônicas sólidas de H_1 pode ser ligado por uma seqüência de *flip moves* e isotopias. Em particular, existe uma seqüência de *flips* e isotopias que leva $\{h_1^{-1}(a_i')\}$ em $\{a_i\}$. Operando-a em $\mathcal{B}^{(1)}$, tem-se uma seqüência de *flips* de bipartições e *two-point moves* que realiza a transformação

$$\mathcal{B}^{(1)} = \left\langle \{h_1^{-1}(a_i')\}, \{b_j'\}, h \circ h_2|_{\partial H_2} \right\rangle \to \mathcal{B}^{(2)} = \left\langle \{a_i\}, \{b_j'\}, h \circ h_2|_{\partial H_2} \right\rangle$$
$$\mathcal{D}^{(1)} = \left\langle \{h_1^{-1}(a_i')\}, \left\{h \circ h_2|_{\partial H_2}(b_j')\right\} \right\rangle \to \mathcal{D}^{(2)} = \left\langle \{a_i\}, \left\{h \circ h_2|_{\partial H_2}(b_j')\right\} \right\rangle.$$

Considere a bipartição $\mathcal{B}^{(2')}$ definida por $\mathcal{B}^{(2')} = \left\langle \{a_i\}, \left\{h_2\left(b_j'\right)\right\}, h \right\rangle$. O diagrama desta bipartição é idêntico ao da bipartição $\mathcal{B}^{(2)} = \left\langle \{a_i\}, \left\{b_j'\right\}, h \circ h_2|_{\partial H_2} \right\rangle$. As duas são relacionadas por uma equivalência complementar de colagens feita com o automorfismo h_2 de H_2, e são homeomórficas, portanto. A operação que transforma $\mathcal{B}^{(2)}$ em $\mathcal{B}^{(2')}$ não altera os diagramas, e pode ser interpretada como uma mudança da bipartição associada ao diagrama $\mathcal{D}^{(2)}$. Tem-se então o homeorfismo de bipartições

$$\mathcal{B}^{(2)} = \left\langle \{a_i\}, \{b_j'\}, h \circ h_2|_{\partial H_2} \right\rangle \to \mathcal{B}^{(2')} = \left\langle \{a_i\}, \{h_2(b_j')\}, h \right\rangle,$$

como uma operação intermediária, que não corresponde a operação alguma nos diagramas.

A terceira transformação operada no diagrama é novamente uma seqüência de *flips* e isotopias, que leva a decomposição $\left\{h_2\left(b_j'\right)\right\}$ em $\{b_j\}$. A existência desta seqüência é garantida pelo Teorema 3.4.10. A operação é representada pelas expressões

$$\mathcal{B}^{(2')} = \langle \{a_i\}, \{h_2(b_j')\}, h \rangle \to \mathcal{B}^{(3)} = \langle \{a_i\}, \{b_j\}, h \rangle$$
$$\mathcal{D}^{(2)} = \langle \{a_i\}, \{h(h_2(b_j'))\} \rangle \to \mathcal{D}^{(3)} = \langle \{a_i\}, \{h(b_j)\} \rangle.$$

O diagrama $\mathcal{D}^{(3)}$ é idêntico ao diagrama $\mathcal{D}$ definido inicialmente. Temos então o seguinte. Com um automorfismo da superfície, leva-se o diagrama $\mathcal{D}'$ em $\mathcal{D}^{(1)}$. Uma seqüência de *flips* e *two-point moves* transforma $\mathcal{D}^{(1)}$ em $\mathcal{D}^{(2)}$. Por fim, uma outra seqüência de *flips* e *two-point moves* leva $\mathcal{D}^{(2)}$ em $\mathcal{D}^{(3)} = \mathcal{D}$. Concatenando as três transformações, tem-se uma seqüência de automorfismos, *flip moves* e *two-point moves* que leva $\mathcal{D}$ em $\mathcal{D}'$, como queríamos demonstrar. □

Resta agora demonstrar o teorema dos *flips*.

3.4. Ação de *Flip Moves* em Decomposições Triniônicas Sólidas

A demonstração do teorema dos *flips* envolve o uso de estruturas matemáticas auxiliares – Suzuki *moves* e grafos trivalentes – irrelevantes para o restante do trabalho. Nesta seção tais estruturas são definidas, e o teorema é provado.

3.4.1. Suzuki *moves*

Os Suzuki *moves* são homeomorfismos $S_i : H^{(g)} \to H^{(g)}$ do *handlebody* sólido de gênero g, os quais geram, a menos de isotopias, todos os automorfismos do espaço. Os *moves* são descritos em detalhe no apêndice deste capítulo, mas para a demonstração do teorema dos *flips*, basta saber duas de suas propriedades. A primeira é o fato de serem (a menos de isotopias) geradores dos grupos de automorfismos dos *handlebodies* sólidos [21]. A segunda, provada no apêndice, é a existência de uma decomposição D_p de $H^{(g)}$ na qual a ação dos Suzuki *moves* pode ser reproduzida por seqüências de *flips*.

TEOREMA 3.4.1. *Seja $H^{(g)}$ um* handlebody *de gênero g. Então para todo homeomorfismo $h : H^{(g)} \mapsto H^{(g)}$ do handlebody em si mesmo, existe uma seqüência $S_i, i = 1, 2, \ldots, n$, de Suzuki* moves *tal que $h = S_n \circ S_{n-1} \circ \cdots \circ S_1$, a menos de isotopias.*

TEOREMA 3.4.2. *Para todo handlebody $H^{(g)}$ de gênero g existe uma decomposição sólida D_p de $H^{(g)}$ tal que, para cada Suzuki move $S : H^{(g)} \mapsto H^{(g)}$, existe uma seqüência de* flip moves *que leva a decomposição sólida $S(D_p)$ de $H^{(g)}$ em D_p.*

3.4.2. Grafo associado a uma decomposição triniônica

Um grafo é um par $\langle \{V_j\}, \{A_{jk}\} \rangle$ formado por uma lista $\{V_j; j = 1, \ldots, n\}$ de vértices e uma lista $\{A_{jk}\}$ de arestas, onde A_{jk} conecta os vértices V_j e V_k. Num grafo trivalente, cada vértice é compartilhado por exatamente três arestas. Exemplos de grafos são dados na Figura 3.4. Intuitivamente, grafos são colagens de arestas.

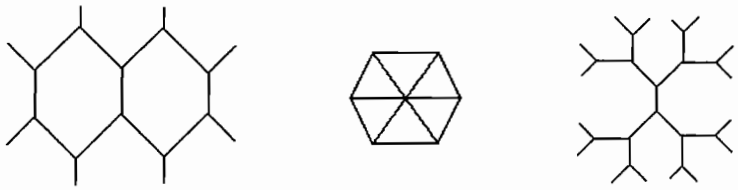


Figura 3.4. Exemplos de grafos. Os grafos da esquerda e da direita são trivalentes.

Nas decomposições triniônicas de *handlebodies*, há uma estrutura de grafo trivalente implícita. Este grafo descreve a maneira como os trinions compartilham as curvas da decomposição. Descreve-se a seguir o procedimento pelo qual tal grafo é obtido.

Inicialmente, associa-se um vértice a cada trinion. Obtém-se assim uma lista de vértices $\{V_j; j = 1, \ldots, n\}$, onde n é o número de trinions da decomposição D em questão. A cada uma das curvas do trinion associa-se uma aresta, saindo do vértice que descreve o trinion (ver Figura 3.5).

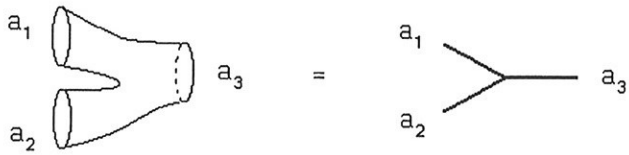


Figura 3.5. Grafo associado a um trinion. O trinion é representado por um vértice, e as curvas a_i em sua fronteira por arestas.

A colagem de dois trinions é representada pela união da aresta correspondente. Um tétrion, por exemplo, formado pela colagem de dois trinions ao longo de uma curva comum, é representado por dois vértices ligados por uma aresta. Destes vértices saem ainda quatro arestas livres, correspondentes às curvas não coladas (Figura 3.6).

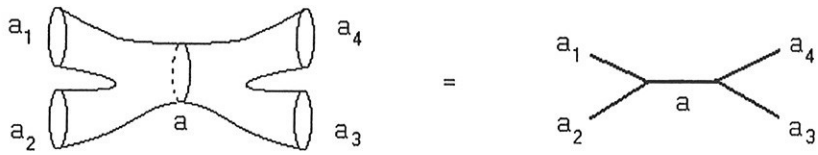


Figura 3.6. Representação combinatória da colagem de dois trinions.

Os flip *moves* são descritos nos grafos como uma mudança da curva interna do tétrion. Altera-se o modo como as quatro curvas externas do tétrion são distribuídas entre os dois vértices internos. A operação é mostrada na Figura 3.7.

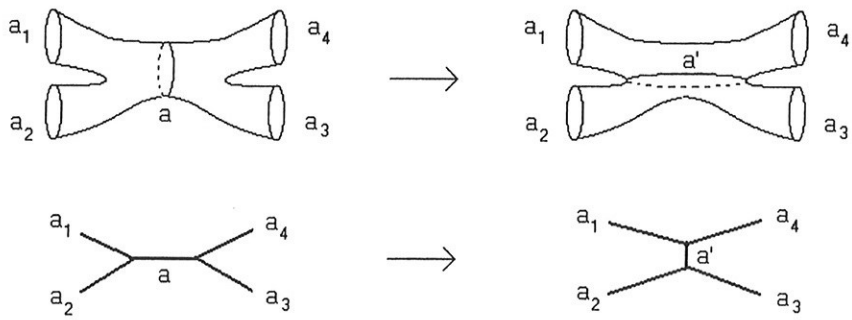


Figura 3.7. Ação do flip *move* nos grafos associados.

Manteremos nos grafos a notação usada para as decomposições. Então um vértice do qual saem três arestas é dito um trinion, e uma colagem de dois trinions forma um tétrion. Num dado tétrion (grafo), há apenas dois *flips* possíveis. O primeiro deles é o representado na Figura 3.7. O segundo é mostrado na Figura 3.8. Não há nenhuma outra possibilidade de se combinar arestas externas de um tétrion numa colagem de dois trinions.

Figura 3.8. Segundo tipo de flip *move* no tétrion.

A ação de *flip moves* em grafos trivalentes possui uma estrutura combinatória simples. A operação não muda o número de vértices do grafo. O número de arestas é determinado pelo número de vértices[5], e assim também é invariante sob a ação de *flips*. Além disso, dispõe-se do teorema a seguir, que garante a ergodicidade dos *flip moves* entre grafos com o mesmo número de vértices.

TEOREMA 3.4.3. *Sejam G_1 e G_2 grafos trivalentes. Se G_1 e G_2 possuem o mesmo número de vértices, então existe uma seqüência de* flip moves *que leva G_1 em G_2.*

O teorema segue de duas proposições encontradas no apêndice de [20], o qual consiste num estudo de decomposições triniônicas de superfícies. Em primeiro lugar, tem-se que para todo grafo trivalente G existe uma decomposição triniônica D de uma superfície $\partial H^{(g)}$ cujo grafo associado é G. O gênero g é fixado pela relação $n = 2g - 2$, onde n é o número de vértices no grafo. Em segundo lugar, afirma-se que duas decomposições triniônicas quaisquer de uma superfície sempre podem ser relacionadas por uma seqüência de operações cuja ação nos grafos se reduz a *flips*.

Com os dois resultados, a demonstração do teorema 3.4.3 é trivial. Interpreta-se G_1 e G_2 como grafos associados a decomposições D_1 e D_2. Como G_1 e G_2 têm o mesmo número de vértices, então D_1 e D_2 têm o mesmo número de trinions. Logo, são definidos numa mesma superfície $\partial H^{(g)}$. Podem então ser relacionados por operações que se reduzem a *flips* nos grafos associados. A imagem de tais operações nos grafos forma uma seqüência de *flips* que leva G_1 em G_2[6].

Decorre do teorema um resultado importante.

[5] Em cada vértice há três arestas, que são compartilhadas por dois vértices; vale portanto a relação $N_a = \frac{3}{2}N_v$, onde N_a é o número de arestas no grafo, e N_v o de vértices.

[6] Uma prova alternativa do teorema, puramente combinatória, pode ser encontrada em [1].

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
T4459

TEOREMA 3.4.4. *Seja D uma decomposição triniônica sólida de $H^{(g)}$ com $2g-2$ trinions e G um grafo trivalente com $2g-2$ vértices. Então existe uma seqüência de flip* moves *que leva D em uma decomposição triniônica sólida D' de $H^{(g)}$ com grafo associado G.*

Em outras palavras, com o uso de *flip moves* é possível levar uma decomposição D qualquer até um formato com o grafo associado G que se queira, desde que este possua o número correto de vértices.

3.4.3. Teorema dos *flips*

Sejam D_0 e D_f decomposições triniônicas sólidas quaisquer do *handlebody* $H^{(g)}$ de gênero g. Mostraremos que existe uma sucessão de *flip moves* que leva D_0 em D_f. Na demonstração do teorema, faz-se referência freqüente aos grafos das decomposições triniônicas envolvidas. Por este motivo, os grafos são incluídos explicitamente na notação. Nesta seção, decomposições são representadas na forma $\langle D, G\rangle$, onde G é o grafo trivalente associado à decomposição triniônica sólida D.

De acordo com o Teorema 3.4.2, existe uma decomposição D_p de $H^{(g)}$ na qual a ação de qualquer Suzuki *move* pode ser desfeita por uma seqüência adequada de *flips*. Usaremos D_p como uma decomposição intermediária entre D_0 e D_f, mostrando que ambas podem ser levadas por *flips* a D_p. Com a composição destes *flips*, obtém-se uma nova seqüência, a qual leva D_0 em D_f, como desejado. Dois lemas são enunciados para isto.

LEMA 3.4.5. *Seja $\langle D_0, G_0\rangle$ uma decomposição triniônica sólida de $H^{(g)}$, e G_p um grafo trivalente com $2g-2$ vértices. Então existe uma seqüência de* flip moves *que leva $\langle D_0, G_0\rangle$ em uma decomposição $\langle D_1, G_p\rangle$ com grafo associado G_p.*

O lema não passa de um enunciado alternativo do Teorema 3.4.4.

LEMA 3.4.6. *Se $\langle D = \{a_i\}, G\rangle$ e $\langle D' = \{a_i'\}, G\rangle$ são decomposições triniônicas sólidas de $H^{(g)}$com mesmo grafo associado, então existe um homeomorfismo $h : H^{(g)} \mapsto H^{(g)}$ tal que $h(a_i) = a_i'$, isto é, tal que $h(D) = D'$.*

DEMONSTRAÇÃO. Por hipótese, as decomposições D e D' possuem o mesmo grafo trivalente associado G. Então existe um automorfismo $f : \partial H^{(g)} \mapsto \partial H^{(g)}$ da superfície $\partial H^{(g)}$ tal que $f(a_i) = a_i'$ [20][7].

Como D é uma decomposição triniônica sólida de $H^{(g)}$, então existem discos $d_i \in H^{(g)}$ tais que $\partial d_i = a_i$. A restrição do homeomorfismo f à curva a_i é um homeomorfismo $f|_{a_i} : \partial H^{(g)} \mapsto \partial H^{(g)}$. A imagem de a_i é a curva a_i' de D'. Mas qualquer

[7] A afirmação exata contida no apêndice do trabalho é a seguinte: "There is a one-to-one correspondence between such finite trivalent graphs and diffeomorphism classes of markings". A definição de "markings" é idêntica à de "decomposição triniônica de superfície".

homeomorfismo definido na fronteira de um disco pode ser extendido para o disco todo. Logo, existe um homeomorfismo $\phi_i : d_i \mapsto d'_i$, para cada i, tal que $\phi_i|_{a_i} = f|_{a_i}$.

Seja t um trinion da decomposição D. Considere a restrição $f|_t$ do homeomorfismo f ao trinion t. f é um homeomorfismo, e então a imagem de um trinion t é um novo trinion t'. Além disso, f é tal que $f(a_i) = a'_i$. Portanto, se t é delimitado por curvas a_α de D, então sua imagem t' é delimitada por curvas a'_α de D'. Ou seja, t' é um trinion de D'. Segue que $f|_t : t \mapsto t'$ é um homeomorfismo que relaciona os trinions t e t' das decomposições D e D'.

Sejam a_α, a_β e a_γ as três curvas que delimitam t, e d_α, d_β, d_γ os discos correspondentes. A união $t \cup d_\alpha \cup d_\beta \cup d_\gamma$ é uma superfície esférica ∂T, a fronteira do trinion sólido T associado a t. Seja T' o trinion sólido associado a t'. Seja definida a função $h|_{\partial T} : \partial T \mapsto \partial T'$, cuja restrição ao trinion t é idêntica a $f|_t : t \mapsto t'$, e nos discos d_i coincide com $\phi_i : d_i \mapsto d'_i$, $i = \alpha, \beta, \gamma$. Esta função é um homeomorfismo $h|_{\partial T} : \partial T \mapsto \partial T'$, que relaciona as superfícies dos trinions sólidos T e T'.

Qualquer homeomorfismo definido na superfície de uma bola tridimensional pode ser extendido para a bola toda (ver Teorema 10.2 de [13]). Topologicamente, o trinion sólido T é uma bola tridimensional. O homeomorfismo $h|_{\partial T}$ é definido em sua superfície. Logo, existe uma extensão $h|_T : T \mapsto T'$ do homeomorfismo $h|_{\partial T}$ a um homeomorfismo que leva T em T'. Podemos definir a função $h : H^{(g)} \mapsto H^{(g)}$ que em cada trinion sólido T de D coincide com $h|_T$. A função h assim definida é um homeomorfismo do *handlebody* $H^{(g)}$ em si mesmo, e em $\partial H^{(g)}$ é idêntico a f. Portanto, nas curvas $a_i \in \partial H^{(g)}$, temos que $h(a_i) = f(a_i) = a'_i$. Ou seja, $h(a_i) = a'_i$, como queríamos demonstrar. □

Alguns comentários sobre a notação. Uma operação r que leve a decomposição D sobre a decomposição D' é representada de modo padrão pela expressão $r(D) = D'$. O resultado da aplicação de um *flip move* f sobre D, por exemplo, é representado por $f(D)$. Analogamente, a ação do automorfismo h do *handlebody* sobre uma decomposição D tem como resultado a decomposição $h(D)$. Composições são descritas pelo símbolo "$\circ$", como de costume. A aplicação consecutiva de *flips* f_1 e f_2 sobre D, por exemplo, tem como resultado a decomposição $f_2 \circ f_1(D)$. Aplicando-se em seguida o homeomorfismo h, obtém-se $h \circ f_2 \circ f_1(D)$.

Para seqüências mais longas de operações, adota-se uma notação alternativa. As operações são descritas por setas, que podem ser concatenadas. A ação do *flip move* f sobre a decomposição D é representada na forma $D \rightarrow^f f(D)$. Automorfismos são representados de modo análogo. A composição de um automorfismo h com um *flip* f, por exemplo, é representada por $D \rightarrow^f f(D) \rightarrow^h h \circ f(D)$.

Além disso, *flip moves* e autormorfismos podem ser combinados para definir novas

operações, as quais agem como *flip moves* nas decomposições. Estes *flips* são definidos a seguir, e a notação estabelecida.

TEOREMA 3.4.7. *Seja D uma decomposição triniônica sólida do* handlebody H, $h : H \to H$ *um homeomorfismo qualquer e f um flip* move *que leva D em $f(D)$. Então a operação que relaciona as decomposições triniônicas sólidas $h(D)$ e $h(f(D))$ de H é um* flip move f^h.

DEMONSTRAÇÃO. Para provar que f^h é um flip *move*, basta mostrar que $h(f(D))$ é obtido a partir de $h(D)$ com a substituição de uma única curva por outra que a cruze em dois pontos. Para demonstrar isto, considere o *flip move* f. Seja a a curva de D substituída na operação de f, e a' a curva que a substitui. Pela definição de *flip move*, tais curvas se intersectam em dois pontos, e $f(D)$ é obtido a partir de D com esta única substituição. Então $h(f(D))$é obtido a partir de $h(D)$ com a troca de $h(a)$ por $h(a')$. Como h é um homeomorfismo, e em particular uma bijeção, o número de intersecções das curvas não se altera. Logo, $h(a)$ intersecta $h(a')$ em exatamente dois pontos. Portanto, $h(D)$ é obtido a partir de $h(f(D))$ com a substituição de uma única curva $h(a)$ por uma curva $h(a')$ que a intersecta em dois pontos. Então f^h é um *flip move*, como queríamos demonstrar. □

Com o uso dos *flip moves* definidos acima, é possível extender o resultado provado no apêndice sobre os Suzuki *moves*. Não só a ação de cada *move* pode ser desfeita por *flips*, mas também a de qualquer composição de Suzuki *moves*.

TEOREMA 3.4.8. *Seja $S = S_n \circ S_{n-1} \circ \cdots \circ S_1$ uma seqüência qualquer de Suzuki* moves, *e $S(D_p)$ a decomposição triniônica sólida que resulta de sua ação sobre a decomposição D_p do* handlebody $H^{(g)}$. *Então existe uma sucessão de* flip moves *que leva $S(D_p)$ em D_p.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $h_i : H^{(g)} \to H^{(g)}$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, a família de homeomorfismos definida por $h_i = S_n \circ S_{n-1} \circ \cdots \circ S_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, e $h_{n+1} = Id$. Então $h_1 = S$. Além disso, para $i = 1, 2, \ldots, n$, tem-se $h_{i+1} = h_i \circ S_i^{-1}$. Mostraremos que, para cada i, existe uma seqüência $f^{(i)}$ de *flips* que leva $h_i(D_p)$ a $h_{i+1}(D_p)$. A composição $f^{(n)} \circ f^{(n-1)} \circ \cdots \circ f^{(1)}$ destas seqüências é uma nova seqüência de *flips*, a qual leva $h_1(D_p)$ em $h_{n+1}(D_p)$. Mas $h_1(D_p) = S(D_p)$ e $h_{n+1}(D_p) = D_p$. Logo, $f^{(n)} \circ f^{(n-1)} \circ \cdots \circ f^{(1)}$ leva $S(D_p)$ em D_p.

Considere o caso $i = 1$. Mostremos então que existe uma seqüência de *flips* levando $h_1(D_p) = S_n \circ S_{n-1} \circ \cdots \circ S_1(D_p)$ em $h_2(D_p) = S_n \circ S_{n-1} \circ \cdots \circ S_2(D_p)$. De acordo com o Teorema 3.4.2, existe uma seqüência de *flips* que desfaz a ação de S_1 em D_p. Seja esta composta por m *flips*, e denotada $f_j, j = 1, 2, \ldots, m$. Então

$$f_m \circ f_{m-1} \circ \cdots \circ f_1(S_1(D_p)) = D_p.$$

Para simplificar a notação, definamos as decomposições $D_p^{(j)}$ obtidas como passos intermediários na aplicação da seqüência f_j de *flips*. Seja $D_p^{(1)} = S_1(D_p)$, e $D_p^{(j+1)} = f_j\left(D_p^{(j)}\right)$. A ação dos *flips* pode então ser escrita como

$$S_1(D_p) = D_p^{(1)} \rightarrow^{f_1} D_p^{(2)} \rightarrow^{f_2} D_p^{(3)} \rightarrow \quad \ldots \quad \rightarrow^{f_m} \quad D_p^{m+1} = D_p \quad .$$

A combinação do homeomorfismo h_2 com os *flips* f_j leva à definição de novos *flip moves* $f_j^{h_2}$. O *flip* f_1 age sobre $S_1(D_p) = D_p^{(1)}$, levando-o na decomposição $D_p^{(2)}$. Então o *flip* $f_1^{h_2}$ age sobre $h_2\left(D_p^{(1)}\right)$ segundo a expressão

$$f_1^{h_2}\left(h_2\left(D_p^{(1)}\right)\right) = h_2\left(f_1\left(D_p^{(1)}\right)\right) = h_2\left(D_p^{(2)}\right).$$

Analogamente, cada *flip* f_j age sobre a decomposição $D_p^{(j)}$ segundo a expressão

$$f_j^{h_2}\left(h_2\left(D_p^{(j)}\right)\right) = h_2\left(f_j\left(D_p^{(j)}\right)\right) = h_2\left(D_p^{(j+1)}\right).$$

A ação da seqüência completa de *flips* $f_j^{h_2}$ é dada por

$$h_2\left(D_p^{(1)}\right) \rightarrow^{f_1^{h_2}} \quad h_2\left(D_p^{(2)}\right) \quad \rightarrow^{f_2^{h_2}} \quad h_2\left(D_p^{(3)}\right) \quad \rightarrow \quad \ldots \quad \rightarrow^{f_m^{h_2}} \quad h_2\left(D_p^{(m+1)}\right) \quad .$$

Portanto, os *flips* $f_j^{h_2}$ formam uma seqüência que leva $h_2\left(D_p^{(1)}\right)$ em $h_2\left(D_p^{(m+1)}\right)$.

Por definição, $D_p^{(1)} = S_1(D_p)$ e $h_2 = S_n \circ S_{n-1} \circ \cdots \circ S_2$. Portanto,

$$h_2\left(D_p^{(1)}\right) = h_2(S_1(D_p)) = h_2 \circ S_1(D_p) = S_n \circ S_{n-1} \circ \cdots \circ S_2 \circ S_1(D_p) = h_1(D_p).$$

Além disso, tem-se também, por definição, que $D_p^{(m+1)} = D_p$. Logo,

$$h_2\left(D_p^{(m+1)}\right) = h_2(D_p).$$

Portanto, a seqüência $f^{(1)}$de *flips* composta por $f_j^{h_2}, j = 1, 2, \ldots, m$, leva a decomposição $h_1(D_p)$ em $h_2(D_p)$, como desejávamos.

Na hipótese do teorema, a seqüência S de Suzuki *moves* é arbitrária. Acabamos de provar que $h_1(D_p)$ pode ser levada por *flips* em $h_2(D_p)$. Em outras palavras, provamos que para qualquer seqüência $S = S_n \circ S_{n-1} \circ \cdots \circ S_1$ de Suzuki *moves*, existe uma seqüência f de *flips* que leva $S_n \circ S_{n-1} \circ \cdots \circ S_1(D_p)$ em $S_n \circ S_{n-1} \circ \cdots \circ S_2(D_p)$. Em particular, para as seqüências $h_i = S_n \circ S_{n-1} \circ \cdots \circ S_i$ de Suzuki *moves*, existem *flips* que

leva $S_n \circ S_{n-1} \circ \cdots \circ S_i (D_p)$ em $S_n \circ S_{n-1} \circ \cdots \circ S_{i+1} (D_p)$. Mas $S_n \circ S_{n-1} \circ \cdots \circ S_{i+1} = h_{i+1}$. Portanto, existem seqüências $f^{(i)}$ de *flips* que levam $h_i (D_p)$ em $h_{i+1} (D_p)$.

A concatenação $f^{(n)} \circ f^{(n-1)} \circ \cdots \circ f^{(1)}$ das seqüências $f^{(i)}$ de *flip moves* forma uma seqüência de *flips* que relaciona as decomposições $h_1 (D_p)$ e $h_{n+1} (D_p)$. Por definição, $h_1 (D_p) = S (D_p)$ e $h_{n+1} (D_p) = D_p$. Logo, $f^{(n)} \circ f^{(n-1)} \circ \cdots \circ f^{(1)}$ é uma seqüência de *flip moves* que leva $S (D_p)$ em D_p, como queríamos demonstrar. □

Como caso particular do teorema, temos que quaisquer duas decomposições $\langle D_1, G_p \rangle$ e $\langle D_p, G_p \rangle$ com mesmo grafo associado podem ser relacionadas por *flip moves*. Pelo Lema 3.4.5, existe uma seqüência de *flips* levando $\langle D_0, G_0 \rangle$ em $\langle D_1, G_p \rangle$. A composição das duas seqüências forma uma nova seqüência que leva $\langle D_0, G_0 \rangle$ em $\langle D_p, G_p \rangle$. Como inicialmente não foi imposta nenhuma condição sobre a decomposição $\langle D_0, G_0 \rangle$, então é verdadeiro o teorema enunciado a seguir.

TEOREMA 3.4.9. *Seja $\langle D, G \rangle$ uma decomposição triniônica sólida qualquer de $H^{(g)}$ e $\langle D_p, G_p \rangle$ a decomposição triniôinica sólida padrão de $H^{(g)}$. Então existe uma seqüência de* flip moves *e isotopias que leva $\langle D, G \rangle$ em $\langle D_p, G_p \rangle$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Lema 3.4.5, existe uma seqüência f de *flips* que leva $\langle D, G \rangle$ em uma decomposição $\langle D_1, G_p \rangle$ com grafo idêntico ao de $\langle D_p, G_p \rangle$. Além disso, pelo Lema 3.4.6, existe um homeomorfismo $h : H^{(g)} \mapsto H^{(g)}$ tal que $h (D_1) = D_p$. Mas, pelo Teorema 3.4.1, para qualquer automorfismo h de um *handlebody* $H^{(g)}$, existe uma seqüência S_i de Suzuki *moves* tal que $h = S_n \circ S_{n-1} \circ \cdots \circ S_1$, a menos de isotopias. E, pelo Teorema 3.4.8, existe uma seqüência de *flips* que leva $h (D_1) = D_p$ em D_1. Logo, existe uma seqüência f' de *flips* e isotopias *que* leva D_1 em D_p. A concatenação das seqüências f' e f forma uma seqüência de *flips* e isotopias que leva $\langle D, G \rangle$ em $\langle D_p, G_p \rangle$. □

Flips podem ser invertidos, e têm *flip moves* como operações inversas. Segue então trivialmente do Teorema 3.4.9 o resultado final da seção.

TEOREMA 3.4.10. *Sejam $\langle D_0, G_0 \rangle$ e $\langle D_f, G_f \rangle$ decomposições triniônicas sólidas quaisquer de um* mesmo handlebody *$H^{(g)}$. Então existe uma seqüência de* flip moves *e isotopias que leva $\langle D_0, G_0 \rangle$ em $\langle D_f, G_f \rangle$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Teorema 3.4.9, existe uma seqüência $f^{(a)}$ de *flips* e isotopias que leva $\langle D_0, G_0 \rangle$ em $\langle D_p, G_p \rangle$, e uma seqüência $f^{(b)}$ que leva $\langle D_f, G_f \rangle$ em $\langle D_p, G_p \rangle$. A seqüência $f^{(b)}$ pode ser invertida. Tém-se assim uma seqüência $f^{(c)}$ de *flips* e isotopias que leva $\langle D_p, G_p \rangle$ em $\langle D_f, G_f \rangle$. A concatenação de $f^{(a)}$ e $f^{(c)}$ forma uma seqüência de *flips* e isotopias que leva $\langle D_0, G_0 \rangle$ em $\langle D_f, G_f \rangle$, como desejado. □

Apêndice: Suzuki *moves* e *flips*.

Os seis Suzuki *moves* definidos em [21] são apresentados neste apêndice. A ação dos *moves* é descrita numa representação padrão do *handlebody* $H^{(g)}$ em $\mathbb{R}^3$. Define-se uma decomposição triniônica sólida D_p de $H^{(g)}$, e nesta decomposição é estudada a relação entre os Suzuki *moves* e os *flips*. Mostra-se que a ação de cada Suzuki *move* sobre D_p pode ser desfeita por uma seqüência de *flips* adequada.

O *handlebody* $H^{(g)}$ é construído a partir de uma bola tridimensional B^3 mergulhada em $\mathbb{R}^3$. Na superfície ∂B^3, tomam-se g discos C^i, delimitados por curvas c_i. No interior de cada disco C_i tomam-se dois outros discos, denominados C_0^i e C_1^i. Cilindros sólidos K_i são colados em B^3 para compor as alças do *handlebody*. Cada cilindro K_i tem suas bases superior e inferior coladas nos discos C_0^i e C_1^i, formando a i-ésima alça do *handlebody*. O resultado da colagem é mostrado na Figura 3.9.

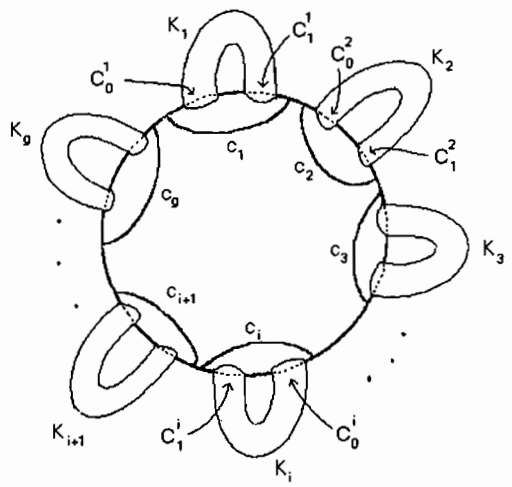


Figura 3.9. Representação padrão do *handlebody* de gênero g.

A decomposição triniônica D_p de $H^{(g)}$ é mostrada na Figura 3.10. Representa-se apenas a parte da decomposição relevante para o estudo dos Suzuki *moves*. A menos de uma exceção, os *moves* são definidos em regiões limitadas do *handlebody*, envolvendo no máximo duas alças. Basta que se descreva D_p nesta região, portanto. A exceção é o *move* denominado translação cíclica de alças, o qual é tratado de modo especial no final do apêndice. As curvas de D_p são escolhidas de modo a simplificar ao máximo a ação dos *moves*.

Há seis Suzuki *moves*. Mostraremos a seguir como a ação de cada um dos *moves* em D_p pode ser desfeita com *flip moves*. Os dois primeiros, a torção ω_1 e o *twist* τ_1, têm ação restrita à região delimitada pela curva c_1. Diferem da identidade apenas na região da primeira alça do *handlebody*. Os três seguintes, a troca de alças ρ_{12} e os *sliddings* θ_{12} e

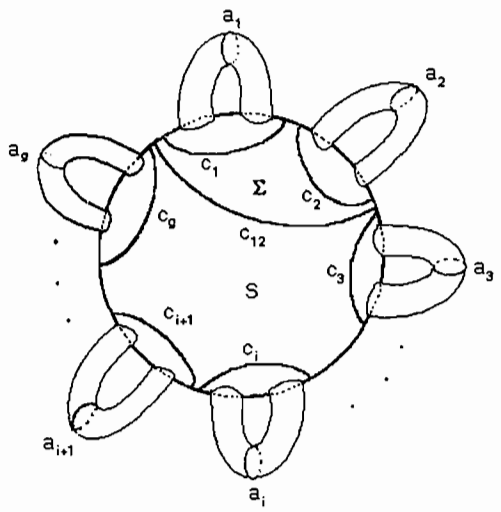


Figura 3.10. Decomposição triniônica sólida D_p do *handlebody* $H^{(g)}$ de gênero g. A decomposição é representada em detalhe apenas na região que contém as alças do *handlebody*.

ξ_{12}, envolvem duas alças, e diferem da identidade apenas na região Σ delimitada por c_{12}. O último *move* é a translação cíclica de alças ρ, que age em todo o *handlebody*.

(i) Dehn *twist* ω_1. Este *move* é a extensão tridimensional de um homeomorfismo tradicional da topologia bidimensional, denominado *Dehn twist*. O cilindro K_1 é cortado ao longo de um disco com fronteira a_1. Com isso, duas extremidades livres em forma de disco são criadas. Em uma delas se aplica uma rotação completa de 2π, depois da qual os pedaços do cilindro são novamente colados (Figura 3.11). Há apenas duas curvas de D_p na região, a_1 e c_1, as quais não se alteram com a operação. Logo, é trivial provar que a ação do *move* em D_p pode ser desfeita por *flips*. Tem-se $\omega_1(D_p) = D_p$. Não é preciso aplicar nenhum *flip*.

(ii) Torção de alça τ_1. Este *move* não envolve cortes do *handlebody*. Gira-se, apenas, a primeira alça por π. O resto do espaço é mantido fixado (Figura 3.12). Novamente a decomposição D_p não se altera, $\tau_1(D_p) = D_p$.

(iii) Troca de alças ρ_{12}. Este é o primeiro *move* que envolve mais de uma alça do *handlebody*. Consiste na aplicação de uma rotação de π na região Σ que contém as duas primeiras alças. A rotação deve ser tal que a primeira alça seja levada sobre a segunda, e vice-versa (Figura 3.13). A ação do *move* sobre a decomposição D_p é trivial. As curvas a_2 e c_2 trocam de posição com a_1 e c_1, respectivamente, e D_p não é alterado.

(iv) *Handle slide* θ_{12}. Os *sliddings* são homeomorfismos de $H^{(g)}$ nos quais se faz a extremidade de alguma das alças percorrer um caminho fechado ao longo da superfície do *handlebody*. Curvas de D_p cruzadas no trajeto são deformadas pela operação. A defi-

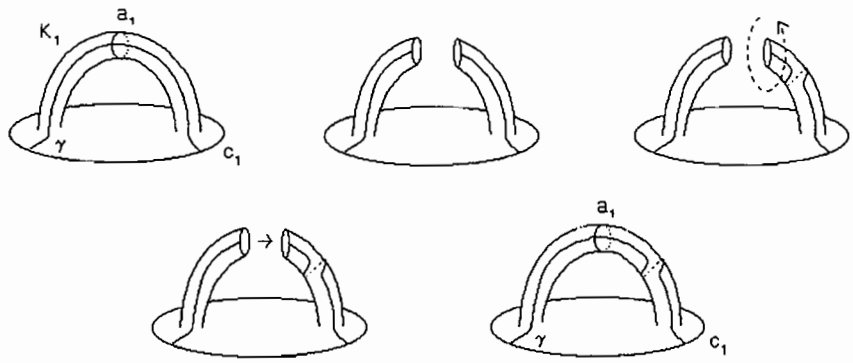


Figura 3.11. Ação do *Dehn twist* sobre a primeira alça do *handlebody* $H^{(g)}$. O cilindro K_1 é cortado ao longo de um disco com fronteira a_1. Uma das extremidades criadas é girada por 2π, e os pedaços são colados novamente. As curvas a_1 e c_1 da decomposição D_p não são alteradas. Uma curva auxiliar γ é incluída para indicar a ação do homeomorfismo.

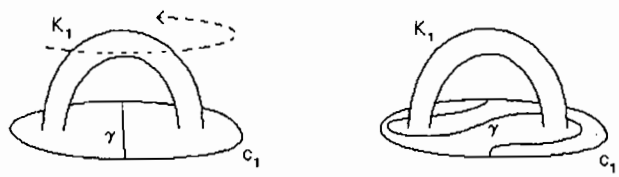


Figura 3.12. Torção da primeira alça do *handlebody*. Uma rotação de π é aplicada em K_1. A ação do homeomorfismo é ilustrada pela ação sobre a curva γ.

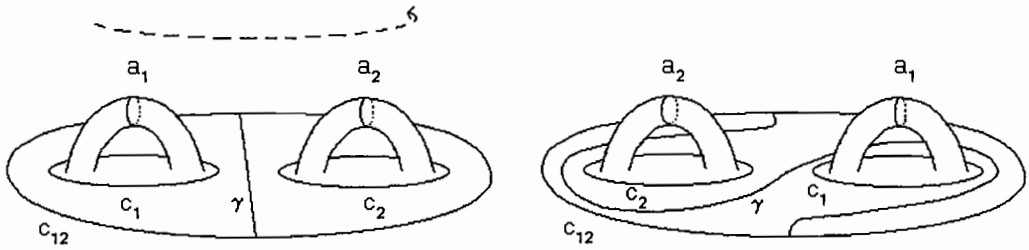


Figura 3.13. Troca de alças.

nição precisa do *move* é dada em [21], mas esta descrição breve basta para os presentes propósitos.

Uma decomposição auxiliar D_{sld} de $H^{(g)}$ é introduzida para o estudo dos *sliddings*. Em D_{sld}, os *sliddings* assumem uma forma mais simples. O sistema de curvas D_{sld} é obtido a partir de D_p com a aplicação de dois *flips*, f_1 e f_2. Em outras palavras, tem-se que $f_2 \circ f_1 (D_p) = D_{sld}$ (Figura 3.14).

No *slidding* θ_{12}, denominado *handle slide*, a base de K_1 colada ao disco C_1^1 realiza um percurso contido na região Σ das duas primeiras alças do *handlebody*. Em Σ, atravessa

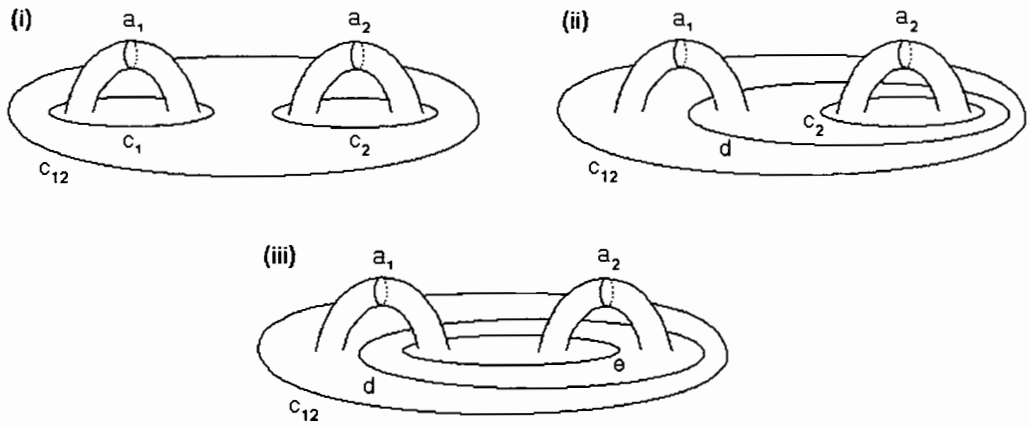


Figura 3.14. Obtenção de D_{sld} a partir de D_p. **(i)** Curvas de D_p na região das duas primeiras alças delimitada por c_{12}. **(ii)** Primeiro *flip*. A curva c_1 é substituída pela curva d. **(iii)** Segundo *flip*. A curva c_2 é substituída pela curva e. O resultado é a decomposiçãoD_{sld}.

toda a extensão do cilindro K_2, entrando por uma de suas bases, C_0^2, e saindo pela outra, C_1^2, para depois retornar à sua posição original. O trajeto é descrito por uma linha tracejada na Figura 3.15 (i).

A ação de θ_{12} sobre D_{sld} é desfeita por um único *flip*, como mostrado na Figura 3.15. Seja f este *flip*. Então $f(\theta_{12}(D_{sld})) = D_{sld}$. Mostraremos que a existência de f implica na existência de uma seqüência de *flips* levando $\theta_{12}(D_p)$ em D_p.

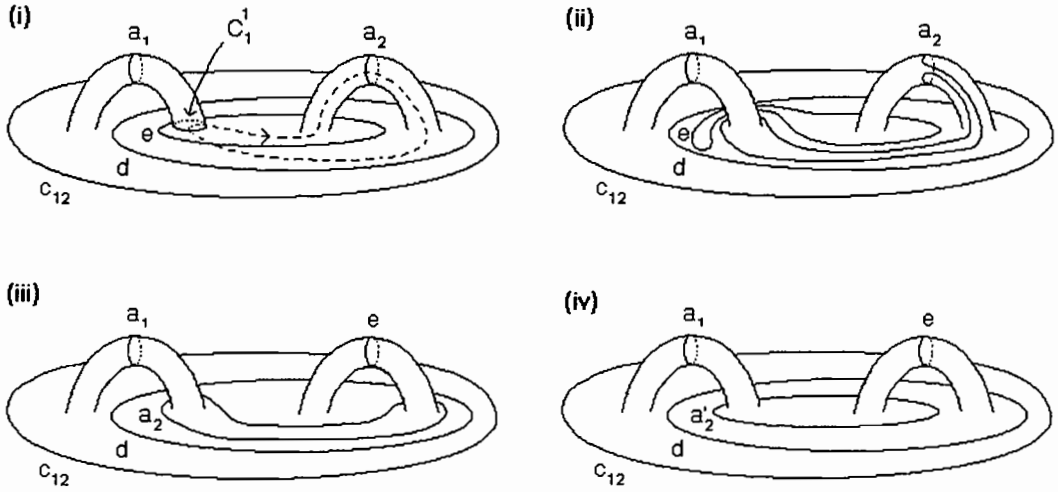


Figura 3.15. A ação de θ_{12} sobre D_{sld} é desfeita com um único *flip move* f. **(i)** Curvas de D_{sld} na região das duas primeiras alças delimitada por c_{12}. A linha tracejada indica o percurso que a extremidade da alça colada em C_1^1 percorre no *slidding* θ_{12}. **(ii)** O resultado da ação de θ_{12} sobre as curvas de D_{sld}. **(iii)** O mesmo sistema de curvas representado em **(ii)**, a menos de isotopias. **(iv)** D_{sld} é obtido novamente com a aplicação de um *flip* que substitui a curva a_2 por a_2'.

A combinação dos *flips* f_1 e f_2 com o homeomorfismo θ_{12} de $H^{(g)}$ permite que se definam os *flips* $f_1^{\theta_{12}}$ e $f_2^{\theta_{12}}$ (ver página 53). O *flip* $f_1^{\theta_{12}}$ age sobre $\theta_{12}(D_p)$, com ação dada por $f_1^{\theta_{12}}(\theta_{12}(D_p)) = \theta_{12}(f_1(D_p))$. O *flip* $f_2^{\theta_{12}}$ age sobre $\theta_{12}(f_1(D_p))$. Sua ação é tal que

$$f_2^{\theta_{12}} \circ f_1^{\theta_{12}}(\theta_{12}(D_p)) = \theta_{12}(f_2 \circ f_1(D_p)).$$

Mas $f_2 \circ f_1(D_p) = D_{sld}$, e então

$$f_2^{\theta_{12}} \circ f_1^{\theta_{12}}(\theta_{12}(D_p)) = \theta_{12}(D_{sld}).$$

O *flip* f descrito na Figura 3.15 leva $\theta_{12}(D_{sld})$ em D_{sld}. Logo,

$$f \circ f_2^{\theta_{12}} \circ f_1^{\theta_{12}}(\theta_{12}(D_p)) = D_{sld}.$$

Os *flips* f_1 e f_2 satisfazem a equação $f_2 \circ f_1(D_p) = D_{sld}$. *Flips* sempre podem ser invertidos, e então existem *flips* f_1^{-1} e f_2^{-1} para os quais $f_1^{-1} \circ f_2^{-1}(D_{sld}) = D_p$. Portanto,

$$f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f \circ f_2^{\theta_{12}} \circ f_1^{\theta_{12}}(\theta_{12}(D_p)) = D_p,$$

e $f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f \circ f_2^{\theta_{12}} \circ f_1^{\theta_{12}}$ é uma seqüência de *flips* que leva $\theta_{12}(D_p)$ em D_p.

(v) *Slidding* ξ_{12}. Também neste *slidding* o trajeto do cilindro K_1 em $\partial H^{(g)}$ se restringe à região Σ. No entanto, ao invés de percorrer a superfície da segunda alça, a base de K_1 passa pela região sob a mesma, entre os discos de C_0^2 e C_1^2 aos quais K_2 é colado (ver Figura 3.16). O resultado da operação sobre as curvas de D_{sld} é trivial. As curvas não se alteram. Com uma demonstração análoga à dada para os *sliddings* θ_{12}, mostra-se que isto garante a existência de uma seqüência de *flips* relacionando $\xi_{12}(D_p)$ e D_p. Explicitamente, tal seqüência é dada por $s_\xi = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_2^{\xi_{12}} \circ f_1^{\xi_{12}}$.

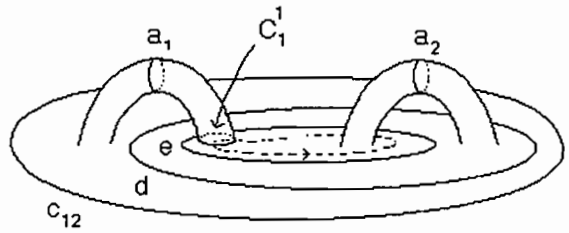


Figura 3.16. Definição do *slidding* ξ_{12}. A extremidade da primeira alça colada no disco C_1^1 percorre o circuito descrito pela linha tracejada. As curvas da decomposição D_{sld} não são alteradas.

(vi) Translação cíclica de alças ρ. Este último *move* age em todo o *handlebody* sólido, alterando as curvas da decomposição D_p ao longo de toda a superfície $\partial H^{(g)}$. A operação consiste na aplicação de uma rotação no *handlebody* inteiro, de modo a que cada alça K_i seja levada sobre a alça seguinte, K_{i+1}. Na decomposição D_p, as curvas a_i e c_i são levadas sobre a_{i+1} e c_{i+1}, respectivamente, para $i < g$. As curvas a_g e c_g na última alça têm por imagem a_1 e c_1, respectivamente. Portanto, o *move* altera as curvas de D_p nas alças, individualmente, sem no entanto modificar o sistema $\{a_i\} \cup \{c_i\}$ formado pelas mesmas. No restante da superfície, a decomposição D_s é em geral alterada. Mostraremos que a alteração pode ser desfeita com a aplicação de flip *moves*.

Chamemos de D'_s a decomposição obtida através da ação de ρ sobre D_s. Os sistemas de curvas D_s e D'_s são ambos decomposições triniônicas sólidas da bola B^3 que constitui o núcleo do *handlebody*. Conseqüentemente, são decomposições triniônicas da superfície esférica S com g furos delimitada pelas curvas c_i. Mas quaisquer duas decomposições triniônicas de uma superfície esférica podem ser relacionadas por *flip moves* [20][8]. Logo, existe uma seqüência de *flips* relacionando D_s e D'_s. Além disso, todas decomposições triniônicas da superfície esférica são sólidas, pois qualquer curva fechada e simples numa esfera é a fronteira de um disco[9]. Então tais *flips* são *flips* de decomposições triniônicas sólidas, e relacionam as decomposições $\rho(D_p) = \{a_i\} \cup \{c_i\} \cup D_s$ e $D_p = \{a_i\} \cup \{c_i\} \cup D'_s$. Logo, também a ação da translação cíclica de alças sobre D_p pode ser desfeita por *flip moves*.

[8] Afirma-se que quaisquer duas decomposições de uma superfície arbitrária podem ser relacionadas por dois tipos de *moves*. Um destes é o *flip move*. O outro é definido apenas em superfícies de gênero maior que zero.

[9] Para cada ponto P da curva fechada e simples c na superfície esférica S, toma-se uma reta que liga P ao centro da esfera. A união destas retas é um disco que tem c como fronteira.

Capítulo 4

Representação Algébrica da Simetria Quasetopológica

A classe de operações de simetria quasetopológica $\mathfrak{Q}$ é formado por homeomorfismos de diagramas triniônicos que preservam o gênero dos diagramas. Em espaços quasetopológicos, qualquer operação de $\mathfrak{Q}$ é uma composição finita de três tipos de ações elementares: *two-point moves*, *flip moves* e automorfismos da superfície. Na classe de modelos estudada, as curvas do diagrama são orientadas. A orientação das curvas não influi na topologia do diagrama, e assim há um quarto *move*, que consiste na inversão da orientação de uma curva qualquer.

Cada diagrama triniônico $\mathcal{D}$ possui uma função de partição $Z(\mathcal{D})$, que é um escalar complexo descrito por uma expressão tensorial. Esta expressão é construída a partir de cinco tensores básicos, ditos tensores de estrutura do modelo. A escolha dos coeficientes dos tensores de estrutura fixa o valor de Z em cada diagrama, e seleciona um modelo específico dentro da classe considerada. Neste capítulo são deduzidas as relações que os tensores de estrutura devem satisfazer para que se tenha uma teoria quasetopológica. As equações são obtidas com a imposição da invariância de Z sob a ação dos quatro *moves* quasetopológicos.

As equações obtidas formam uma generalização das álgebras de Hopf [22]. Para estudá-las, definiu-se uma família auxiliar de generalizações, com exemplos de complexidade crescente. Estas álgebras são adotadas como *ansatz* de solução para o sistema completo de equações. O caso mais simples foi resolvido. As soluções obtidas reduzem-se a álgebras de Hopf, no entanto. Modelos baseados em álgebras de Hopf apresentam dependência quasetopológica bastante simples. A busca de exemplos mais complexos de teorias quasetopológicas pode ser feita com as outras generalizações da família definida. Os cálculos devem ser análogos aos descritos neste capítulo.

A organização deste capítulo é a seguinte. Na Seção 4.1, deduz-se a representação algébrica dos quatro *moves* quasetopológicos. Na Seção 4.2, define-se a primeira generalização das álgebras de Hopf considerada. A solução deste caso é apresentada na Seção 4.3, onde também são descritas as generalizações alternativas.

4.1. Interpretação algébrica dos *moves*

A ação de um *move* quasetopológico m em um diagrama triniônico $\mathcal{D} = \langle \{u_i\}, \{v_i\} \rangle$ tem como resultado um diagrama triniônico $\mathcal{D}' = m(\mathcal{D})$. Para que um modelo definido sobre diagramas triniônicos seja quasetopológico, sua função de partição Z deve satisfazer a relação $Z(\mathcal{D}) = Z(\mathcal{D}')$, para qualquer diagrama $\mathcal{D}$ e *move* m. Há quatro *moves* a se considerar: automorfismos da superfície, inversão da orientação de uma curva, *two-point moves* e *flip moves*. Basta considerar automorfismos que preservam a orientação da superfície.

Dos quatro *moves*, três agem em regiões limitadas do diagrama, e alteram $Z(\mathcal{D})$ apenas em tais regiões. A inversão de orientação de uma curva, por exemplo, altera apenas o tensor desta curva e os de suas intersecções. O restante da expressão de $Z(\mathcal{D})$ se mantém inalterado. Os *two-point moves* agem apenas nos tensores das duas curvas nas quais o *move* opera. E a ação de um *flip move* se restringe aos tensores das curvas que atravessam o tétrion no qual o *flip* é definido. Nestas regiões, há uma representação tensorial antes da aplicação do *move*, e outra distinta depois. Ambas devem descrever o mesmo tensor para que se tenha $Z(\mathcal{D}) = Z(\mathcal{D}')$. Os automorfismos agem no diagrama inteiro, porém de modo trivial.

Em cada uma das subseções a seguir estuda-se a representação de um *move* quasetopológico específico.

4.1.1. Automorfismos da superfície

A ação de um automorfismo $f : \partial H \mapsto \partial H$ da superfície ∂H sobre um diagrama $\mathcal{D} = \langle \{u_i\}, \{v_j\} \rangle$ definido em ∂H produz o diagrama $\mathcal{D}' = \langle \{f(u_i)\}, \{f(v_j)\} \rangle$. Mostraremos que as funções de partição de $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ coincidem[1].

Em primeiro lugar, considere $Z(\mathcal{D})$. Em sua expressão, há um tensor $\Delta^{(m_i)}$ para cada curva u_i, e um tensor $M^{(n_j)}$ para cada curva v_j. O número m_i de índices em $\Delta^{(m_i)}$ é igual ao número de intersecções na curva u_i. Analogamente, n_j é o número de intersecções em v_j. A cada interseção k do diagrama está associado um tensor I_k, que pode ser a antípoda S_a^b ou o delta de Kronecker δ_a^b, dependendo da orientação das curvas e da superfície. A função de partição $Z(\mathcal{D})$ é um produto tensorial dos tensores $\Delta^{(m_i)}$, $M^{(n_j)}$ e I_k com todos os índices contraídos.

As contrações são feitas de modo a reproduzir a combinatória das intersecções de curvas em $\mathcal{D}$. Para descrevê-las, tomamos uma enumeração das intersecções em cada curva de $\mathcal{D}$. As m_i intersecções da curva u_i são enumeradas com o índice α. Assim,

[1] A construção das expressões tensoriais dos diagramas a partir de seus sistemas de curvas segue o procedimento descrito na Seção 2.4.1. Nesta subseção é apresentada uma descrição mais detalhada, descrita de modo adequado aos presentes propósitos.

o índice i_α refere-se à α-ésima intersecção na curva u_i. As intersecções de v_j são enumeradas com o índice j_β. Tomam-se enumerações que respeitem a ordem cíclica das intersecções ao longo das curvas (Figura 4.1).

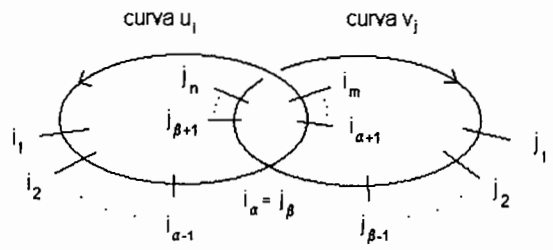


Figura 4.1. Enumeração das intersecções em um par de curvas.

Cada intersecção I_k realiza duas contrações de índices. Sejam $\Delta_i = \Delta^{i_1 i_2 \ldots i_{m_i}}$ e $M_j = M_{j_1 j_2 \ldots j_{n_j}}$ os tensores das curvas u_i e v_j que formam a intersecção. Seja $I_k = I^{i_\alpha}_{j_\beta}$. Os índices da intersecção são contraídos segundo a expressão

$$\Delta^{i_1 i_2 \ldots i_\alpha \ldots i_{m_i}} I^{j_\beta}_{i_\alpha} M_{j_1 j_2 \ldots j_\beta \ldots j_{n_j}}.$$

Mostraremos que a expressão é preservada pelos automorfismos.

O automorfismo f transforma $\mathcal{D} = \langle \{u_i\}, \{v_j\} \rangle$ em $\mathcal{D}' = \langle \{f(u_i)\}, \{f(v_j)\} \rangle$. O número de curvas nos dois sistemas é preservado. Como f é um homeomorfismo e, em particular, uma bijeção, então também o número de intersecções entre as curvas é preservado. Logo, há o mesmo número de tensores de cada um dos três tipos (M, Δ e I) nas expressões de $Z(\mathcal{D})$ e $Z(\mathcal{D}')$. Mostraremos que os tensores são idênticos e as contrações feitas do mesmo modo nas duas expressões.

Considere a ação do *move* sobre os tensores das curvas. Para que um mesmo tensor seja atribuído a duas curvas distintas, basta que tenham o mesmo número de intersecções. Automorfismos não alteram o número de intersecções nas curvas, e assim a curva $f(u_i)$ de $\mathcal{D}'$ tem o mesmo número m_i de intersecções que a curva u_i de $\mathcal{D}$. Logo, ambas são descritas por um mesmo tensor $\Delta^{(m_i)}$. No outro sistema a situação se repete. Atribui-se às curvas $f(v_j)$ de $\mathcal{D}'$ e v_j de $\mathcal{D}$ um mesmo tensor $M^{(n_j)}$.

Nas intersecções, a ação do *move* também é trivial. Sejam u e v as curvas que formam a intersecção I_k. Os vetores tangentes a u e v definem uma orientação local (t_u, t_v) da superfície ∂H no ponto de intersecção das curvas. Se esta orientação concorda com a da superfície, então $I^b_a = \delta^b_a$. Se discorda, então $I^b_a = S^b_a$. Mas o automorfismo f preserva a orientação da superfície, e assim as orientações dadas por (t_u, t_v) e $\left(t_{f(u)}, t_{f(v)}\right)$ coincidem. A orientação global da superfície não muda. Logo, a cada intersecção atribui-se o mesmo tensor antes e depois da aplicação do *move*.

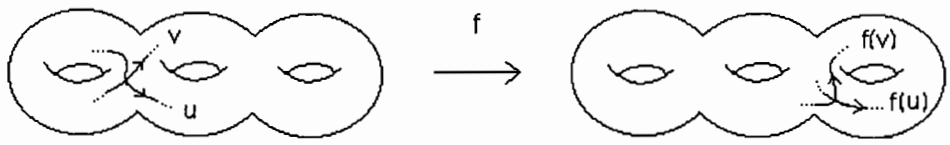


Figura 4.2. O automorfismo f da superfície altera as curvas, mas preserva a orientação das intersecções. As orientações (t_u, t_v) e $(t_{f(u)}, t_{f(v)})$ apontam ambas para fora do *handlebody*.

Resta mostrar que as contrações de índices são feitas da mesma forma em $Z(\mathcal{D})$ e $Z(\mathcal{D}')$. Para isto, note-se que a enumeração das intersecções dada pelos índices i_α e j_β pode ser carregada de $\mathcal{D}$ para $\mathcal{D}'$, sem alterações. Toma-se como α-ésima intersecção de $f(u_i)$ a imagem da α-ésima intersecção de u_i, e como β-ésima intersecção de $f(v_j)$ a imagem da β-ésima intersecção de v_j. Com esta escolha, a fórmula que descreve as contrações se mantém inalterada com a aplicação do *move*.

Portanto, as expressões de $Z(\mathcal{D})$ e $Z(\mathcal{D}')$ são formadas pelos mesmos tensores, e os índices são contraídos do mesmo modo. Ou seja, $Z(\mathcal{D}) = Z(\mathcal{D}')$.

4.1.2. Inversão de orientação

Na inversão da orientação de uma curva, a expressão de $Z(\mathcal{D})$ é alterada no tensor associado à curva e nos que descrevem suas intersecções. Ocorrem duas mudanças. No tensor da curva, a seqüência cíclica dos índices é invertida. As intersecções passam a ser lidas em sentido contrário ao longo da curva. Nas intersecções, muda-se o tensor de contração, pois a orientação (t_u, t_v) é invertida se o sinal de t_u ou t_v é mudado.

Na figura 4.3 é mostrada a ação do *move* sobre uma curva v_j e a sua representação tensorial. O caso em que o *move* age sobre curvas de $\{u_i\}$ é tratado no final da seção.

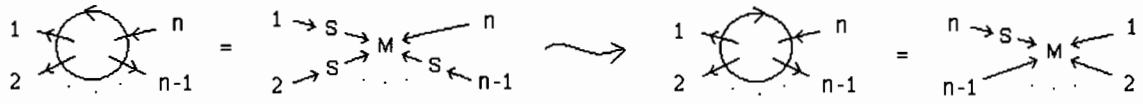


Figura 4.3. Inversão de orientação de uma curva v_j com n intersecções. O sentido em que os índices são lidos é invertido. O tensor que descreve cada intersecção é trocado.

As expressões que descrevem a região do *move* antes e depois de sua aplicação em geral diferem, para escolhas arbitrárias de tensores de estrutura. Para que descrevam o mesmo tensor, condições adicionais são impostas. Poderia se pensar em exigir diretamente a igualdade das duas expressões, mas isto teria que ser feito para curvas com qualquer número de intersecções, o que levaria a um número infinito de equações.

O modo mais simples de se chegar às mesmas identidades é a partir de um trio de equações acopladas, representadas diagramaticamente na Figura 4.4[2].

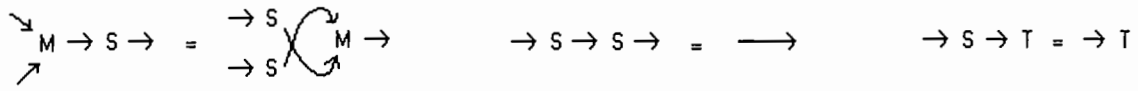


Figura 4.4. Equações que descrevem a invariância da função de partição Z sob a operação de inversão de orientação de curvas do sistema $\{v_j\}$.

O conteúdo algébrico das três equações é o seguinte. A primeira equação é a exigência de que a antípoda S_a^b seja um antimorfismo da álgebra M_{ab}^c. Esta condição é escrita de modo mais mais familiar como $S(x \cdot y) = S(y) \cdot S(x)$. A segunda equação pode ser escrita como $S^2 = Id$. A terceira é a exigência de que S preserve o traço. Mostraremos que as três equações são suficientes para gerar as identidades desejadas.

A relação $S^2 = Id$ é usada para simplificar a descrição do *move* nas intersecções. A inversão de orientação de uma curva leva à inversão da orientação de todas as suas intersecções. Se o tensor da intersecção era a antípoda, passa a ser o delta de Kronecker, e vice-versa. A troca do tensor de contração pode ser escrita na forma $I_k \longrightarrow S \circ I_k$, visto que assim S é levado em $Id = S \circ S$ e Id é levado em $S = S \circ Id$. Em outras palavras, a aplicação de S inverte a orientação das intersecções. A identidade $S^2 = Id$ representa o fato de que duas inversões de orientação consecutivas se cancelam.

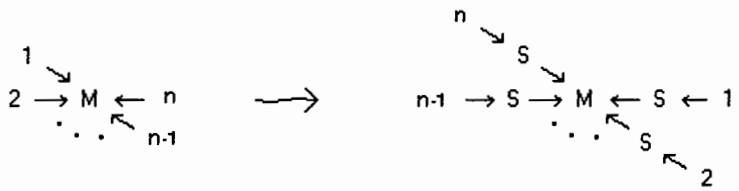


Figura 4.5. Representação tensorial da inversão de orientação de uma curva v_j com n intersecções. Pressupõe-se que $S^2 = Id$.

A representação tensorial do *move* assume então a forma mostrada na Figura 4.5, para curvas com qualquer número de índices. A ordem dos índices no tensor é invertida, e acopla-se uma antípoda a cada um deles. É preciso provar que esta transformação não altera o tensor. Para isto são usadas as duas outras equações da Figura 4.4. Os cálculos são mostrados na Figura 4.6. Usa-se também a associatividade do produto M_{ab}^c, na penúltima passagem.

[2] A inversão de orientação é um dos *moves* topológicos do modelo de Kuperberg [12], e a prova de invariância apresentada nesta seção segue o procedimento adotado em seu trabalho.

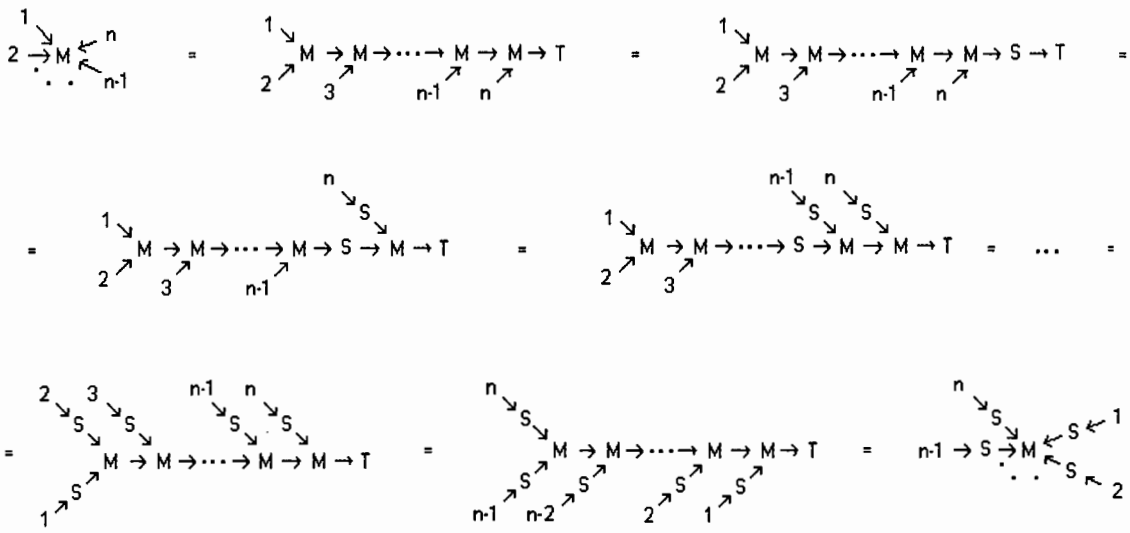


Figura 4.6. Prova da invariância da função de partição Z sob a inversão de orientação de uma curva v_j com n intersecções. A ordem cíclica dos índices é invertida e a orientação de cada intersecção trocada sem que se altere o tensor descrito pela expressão.

No caso em que o *move* age sobre uma curva v_j, procede-se de modo análogo. A representação do *move* é mostrada na Figura 4.7. As expressões são obtidas a partir das mostradas na Figura 4.5 com a inversão de todas as setas e a substituição dos tensores M por tensores Δ. Este é um exemplo de operação de dualidade. De forma geral, a "expressão dual" de uma dada expressão é a obtida a partir desta com a inversão do sentido de todas as setas e a troca dos tensores M por tensores Δ, e vice-versa.

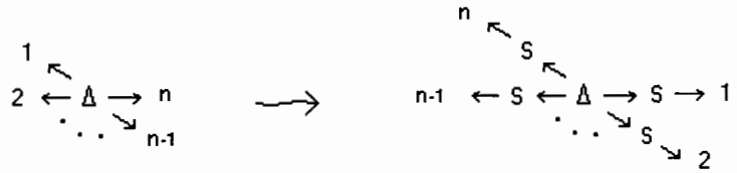


Figura 4.7. Representação tensorial da inversão de orientação de uma curva u_i com n intersecções. Pressupõe-se que $S^2 = Id$.

A solução do *move* é dada por um novo trio de relações, obtido por dualidade a partir das listadas na Figura 4.4. A equação $S^2 = Id$ é invariante por dualidade. Obtém-se apenas duas equações novas, portanto, as quais são mostradas na Figura 4.8. A prova de invariância para as curvas u_i é feita do mesmo modo que para as curvas v_j, mas com equações duais.

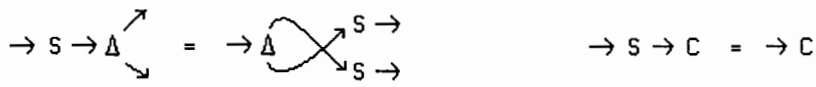


Figura 4.8. Equações que descrevem a invariância da função de partição Z sob a inversão de orientação de curvas do sistema $\{u_i\}$. A equação $S^2 = Id$ é omitida.

4.1.3. *Two-point moves*

Um *two-point move* age em um par de curvas formado por uma curva u_i e uma curva v_j que se intersectam em dois pontos consecutivos (Figura 4.9). O *move* consiste na eliminação destas duas intersecções. As enumerações podem ser tomadas de modo a que o o *move* opere nos dois primeiros índices das curvas. A orientação das curvas é escolhida do modo mais conveniente, com a aplicação de inversões de orientação.

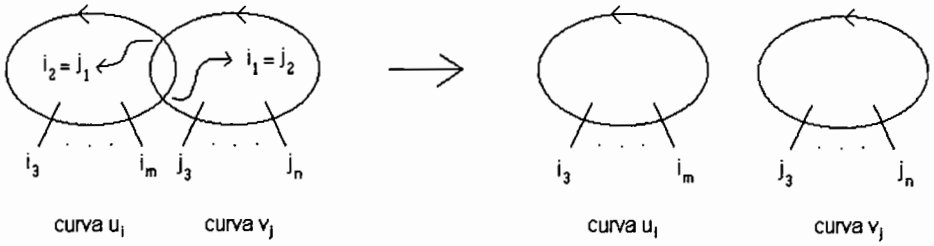


Figura 4.9. *Two-point move.* As intersecções são enumeradas de modo a que o *move* opere nos dois primeiros índices de cada curva.

A representação tensorial da operação é mostrada na Figura 4.10. Sejam I_k e I_l as duas intersecções envolvidas. As suas orientações necessariamente diferem, como se nota pela figura. Deste modo, há apenas dois casos a se considerar. No primeiro, $I_k = Id$ e $I_j = S$. No segundo caso, $I_k = S$ e $I_j = Id$. Os tensores $M^{(n_i)}$ e $\Delta^{(m_j)}$ das curvas podem ter um número arbitrário de índices. O fato é irrelevante para a prova de invariância que será apresentada.

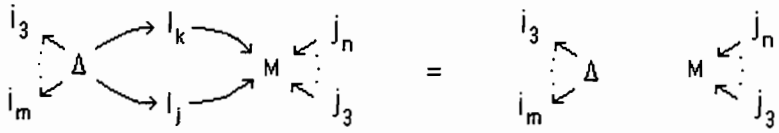


Figura 4.10. Representação tensorial do *two-point move.*

As equações do *move* são resolvidas pelo par de relações mostrado na Figura 4.11,

denominadas "relações da antípoda". Estas relações fazem parte da lista de axiomas das álgebras de Hopf, e a nomenclatura tradicional é mantida.

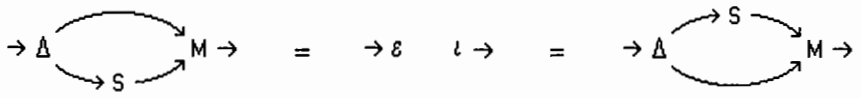


Figura 4.11. Relações da antípoda.

A prova de invariância de Z sob a ação do *two-point move* envolve, além das relações da antípoda, também as definições do n-produto $M^{(n)}$ e do m-co-produto $\Delta^{(m)}$, e as relações da unidade e da co-unidade do produto M^c_{ab} e do co-produto Δ^{bc}_a (ver página 33). Com o uso da primeira relação da antípoda, obtém-se a equação do *move* no caso em que $I_k = Id$ e $I_j = S$. Os cálculos são mostrados na Figura 4.12. O segundo caso é tratado de maneira análoga, com o uso da segunda relação da antípoda.

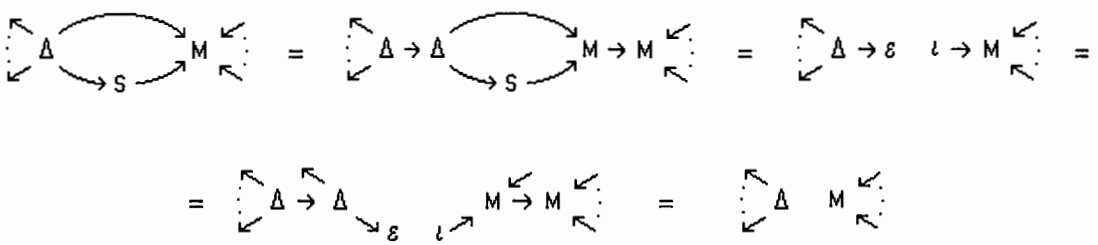


Figura 4.12. Prova de invariância da função de partição Z sob *two-point moves*. As contrações associadas às intersecções desfeitas pelo *move* são retiradas da expressão sem que se altere o tensor descrito pela mesma.

4.1.4. *Flip moves*

Os *flip moves* agem em tétrions formados pela colagem de dois trinions adjacentes. O *move* consiste na substituição da curva que une os dois trinions por outra que decomponha o tétrion numa nova colagem de dois trinions. A curva introduzida deve intersectar a original em exatamente dois pontos. Há dois casos a se considerar. O *move* pode agir no sistema $\{u_i\}$ ou no sistema $\{v_j\}$. Estuda-se este caso primeiro. A solução do *move* no caso de ação sobre $\{u_i\}$ é obtido por dualidade.

Antes de fazer a representação tensorial do *move*, sua ação nas curvas é simplificada com a aplicação de *two-point moves* e inversões de orientação. Descreve-se a seguir como isto é feito. Por conveniência, o tétrion é representado como uma superfície plana, da forma mostrada na Figura 4.13.

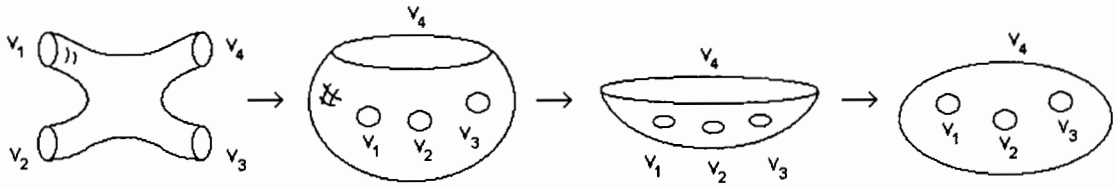


Figura 4.13. Representação plana de um tétrion. A curva v_4 em sua fronteira é alargada até que delimite um disco plano, no qual há três furos.

Um exemplo simples de *flip move* é mostrado na Figura 4.14. As quatro curvas que a delimitam em ∂H são denotadas v_1, v_2, v_3 e v_4. As regiões hachuradas delimitadas por v_1, v_2 e v_3 não fazem parte da superfície. A curva central, que divide o tétrion em dois trinions, é denotada v antes da aplicação do *move*, e v' após sua aplicação. O *move* consiste, portanto, na substituição de v por v'. A representação do tétrion no plano é feita de modo a que v e v' apresentem um desenho simples.

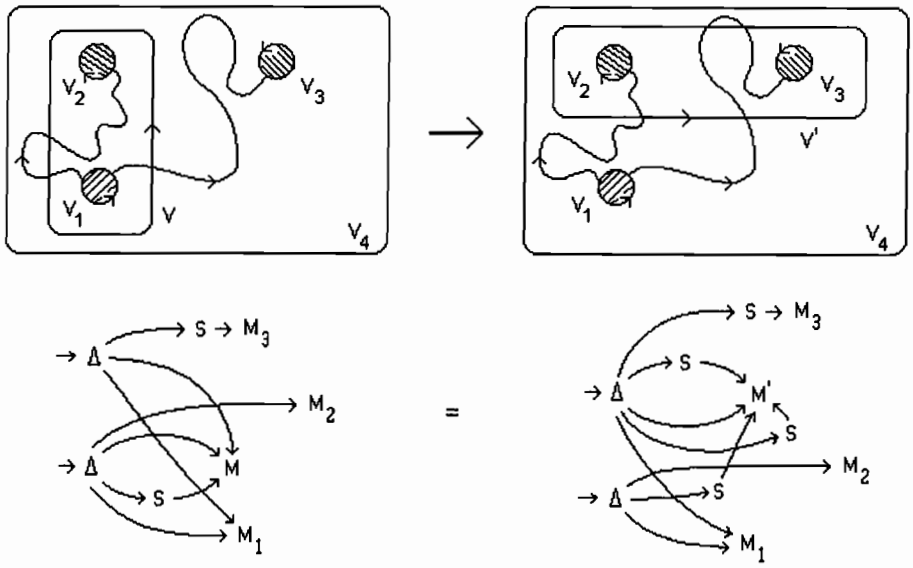


Figura 4.14. Um *flip move* f e sua representação tensorial.

As duas expressões obtidas na representação tensorial do *move* não apresentam nenhuma similaridade óbvia. Não foi possível encontrar um conjunto de relações básicas simples que representasse o *flip*. Estas relações deveriam resolver a ação de *flips* em tétrions quaisquer, atravessados por padrões arbitrários de curvas. Em tétrions mais complexos, as equações são ainda mais complicadas que a mostrada acima.

A equação pode ser simplificada, no entanto, com o uso das relações da antípoda. No *flip* f, por exemplo, em cada lado da equação há um par de intersecções que pode ser

removido por isotopias. Com a aplicação das isotopias antes da ação do *flip*, chega-se a uma equação mais simples, mostrada na Figura 4.15.

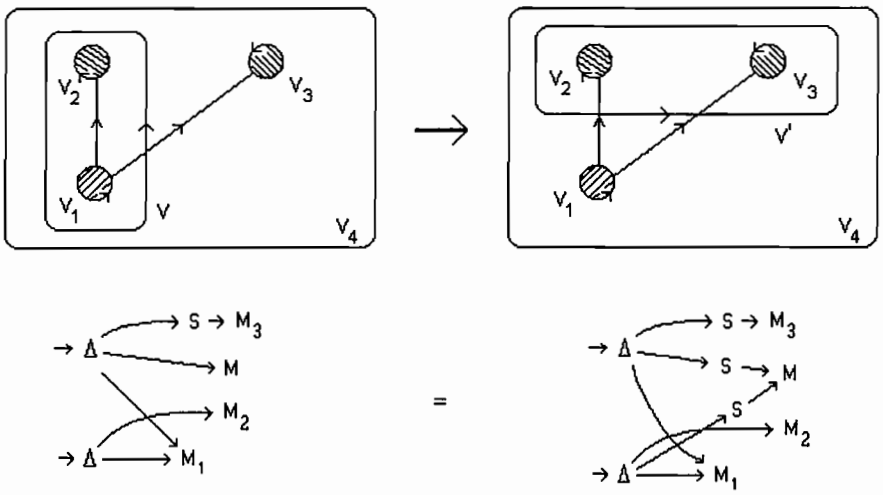


Figura 4.15. Simplificação do *flip move f* com a aplicação de isotopias.

A inversão da orientação das curvas v_3 e v' conduz a outra simplificação da equação. As antípodas que aparecem em ambos os lados da equação são eliminadas. O resultado é mostrado na Figura 4.16.

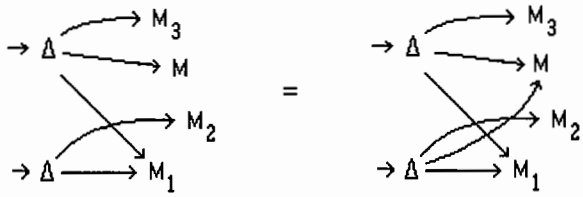


Figura 4.16. Forma final da equação do *flip move f*, após simplificação com o uso de isotopias e inversões de orientação.

O procedimento descrito pode ser generalizado e usado de maneira sistemática no estudo do *move*. Devido à liberdade admitida em sua definição, os *flips* costumam aparecer misturados com outras operações em sua ação. Podem ser simplificados pela composição com outros *moves*, portanto. Em outras palavras, interpreta-se cada *flip* como a composição de um *flip* puro, mais simples, com outros *moves* quasetopológicos. A forma "mais simples" dos *flips* é escolhida de modo a facilitar o tratamento algébrico.

Um *flip* arbitrário pode ser representado como na Figura 4.17. O tétrion em que age é delimitado pelas curvas v_1, v_2, v_3 e v_4. As curvas u_i que o atravessam são desenhadas apenas nas redondezas das intersecções. No restante da superfície, podem

comportar-se de qualquer maneira consistente. O *flip move* substitui a curva v, que envolve v_1 e v_2, por v', que envolve v_2 e v_3. O número de curvas u_i que atravessam o tétrion e o desenho que apresentam variam de *flip* para *flip*, naturalmente.

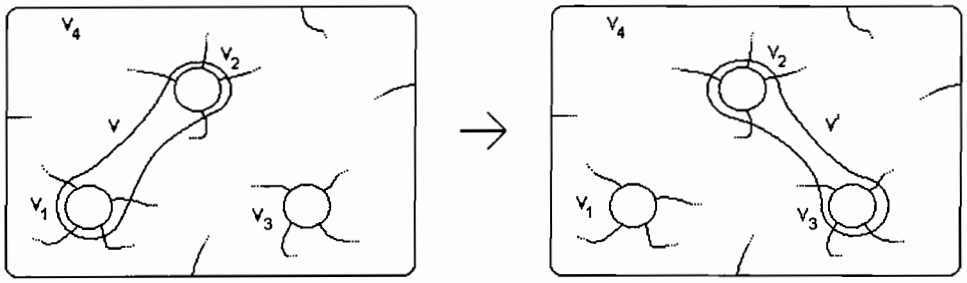


Figura 4.17. Representação padrão de um *flip move*.

Mostraremos que as curvas no tétrion podem ser reduzidas a um desenho simples, formado por três feixes de curvas emergindo de v_2 e dirigindo-se, cada um deles, a uma outra curva v_j do tétrion. O feixe que liga v_1 a v_2 fica contido no trinion definido por v, e o que liga v_2 a v_3 no definido por v'. A simplificação das curvas é feita exclusivamente com isotopias. No final as curvas são orientadas. Isto é feito de modo a se obter uma equação tão simples quanto possível para o *move*. O procedimento todo é organizado no quadro exposto na Figura 4.18. Segue uma explicação dos passos envolvidos.

Em primeiro lugar, as intersecções em cada curva v_j são agrupadas. Isto é feito com deformações das curvas u_i que atravessam o tétrion. O resultado é o mostrado no quadro (ii). O segundo passo é o ajuste do feixe de curvas que atravessa v_1. Faz-se com que este feixe se dirija à curva v_2, como mostrado no quadro (iii). Com isso as curvas u_i que cruzam v_1 passam a se dirigir a v_2. Os segmentos que se encontram no caminho da deformação criam novas intersecções em v_2, as quais são agrupadas com isotopias às já existentes. O resultado é o mostrado no quadro (iv).

O procedimento é repetido em v_2 e v_3. Leva-se o feixe de curvas que atravessa v_2 até a curva v_3. Em seguida, as intersecções que existirem em v_3 são agrupadas. Chega-se ao padrão mostrado no quadro (v). O feixe formado é levado de volta a v_2. Com isso novas intersecções são criadas em v_2. As que se encontram entre as curvas provenientes de v_3 formam os laços mostrados no quadro (vi). Não há outro comportamento possível. Estes laços são removidos do tétrion com a aplicação de isotopias. As intersecções restantes são agrupadas em v_2. O resultado é o mostrado no quadro (vii).

As curvas u_i das intersecções que restam em v_2 possuem apenas dois comportamentos consistentes no tétrion. Ou retornam a v_2, formando laços, ou dirigem-se a v_4. Os laços são removidos do tétrion com isotopias. As demais curvas são agrupadas num feixe que se dirige a v_4. O resultado final do processo é mostrado no quadro (viii).

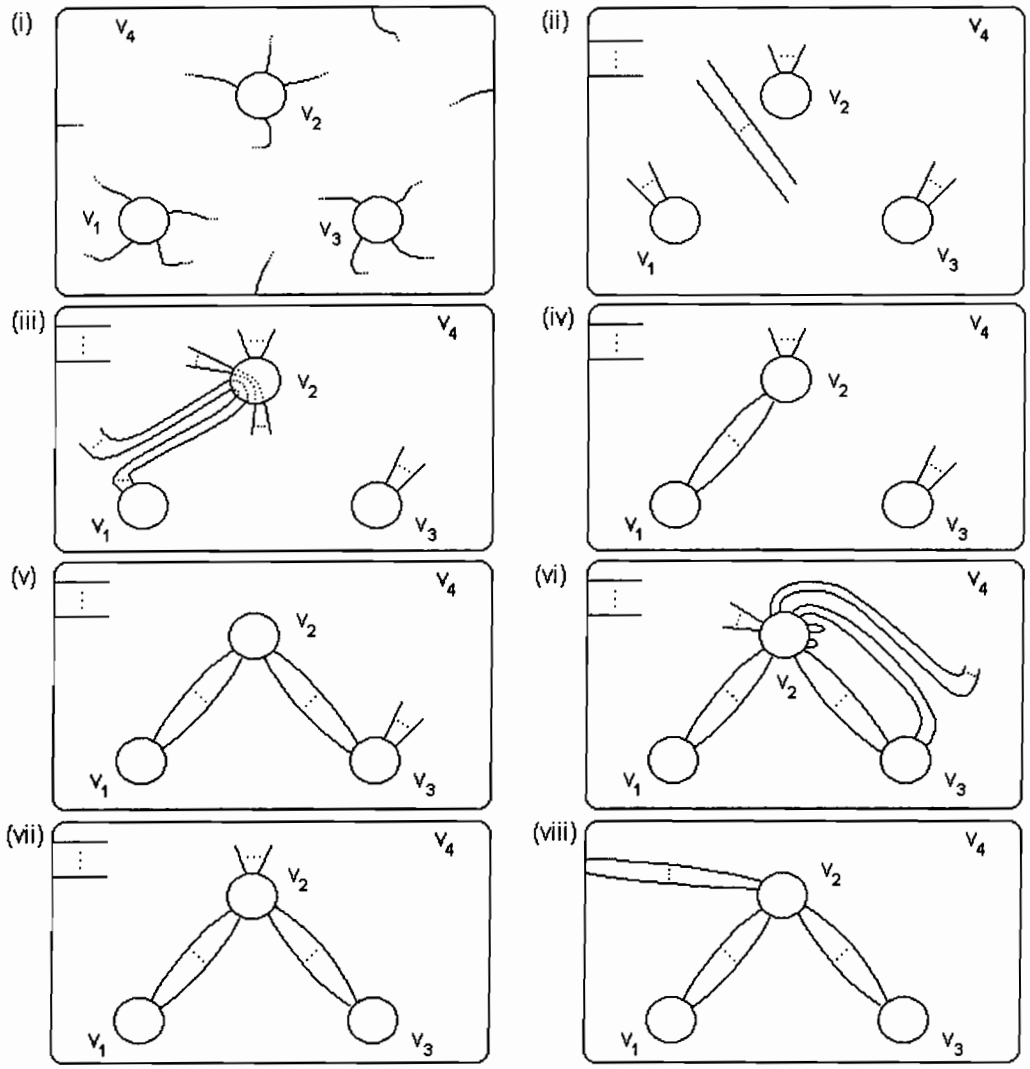


Figura 4.18. Trivialização do desenho das curvas u na superfície de um tétrion. Em qualquer tetrion, estas podem ser reduzidas ao formato mostrado no último quadro, com três feixes de curvas paralelas emanando de v_2 e se dirigindo cada um deles a uma das curvas v_i restantes.

O procedimento pode ser aplicado em *flips* arbitrários. Logo, os *flips* podem ser representados de forma geral pela operação mostrada na Figura 4.19. Nesta figura também se incluem orientações para as curvas. Os segmentos que atravessam o tétrion não podem ser orientados de forma arbitrária, pois não são independentes. Dois segmentos distintos podem pertencer à mesma curva.

A equação correspondente é mostrada na Figura 4.20. Nesta equação, cada segmento de curva u que atravessa o tétrion é descrito por um co-produto. Ao segmento

"a" que liga v_2 e v_3, por exemplo, corresponde o co-produto de mesmo índice na equação. Às curvas v_i correspondem os tensores M_i. Às curvas v e v' os tensores M_v e $M_{v'}$. Dependendo da orientação do segmento, acopla-se uma antípoda ao co-produto do mesmo em ambos os lados da equação. Este tensor é omitido da representação. A orientação dos segmentos é irrelevante para a equação dos *flips*.

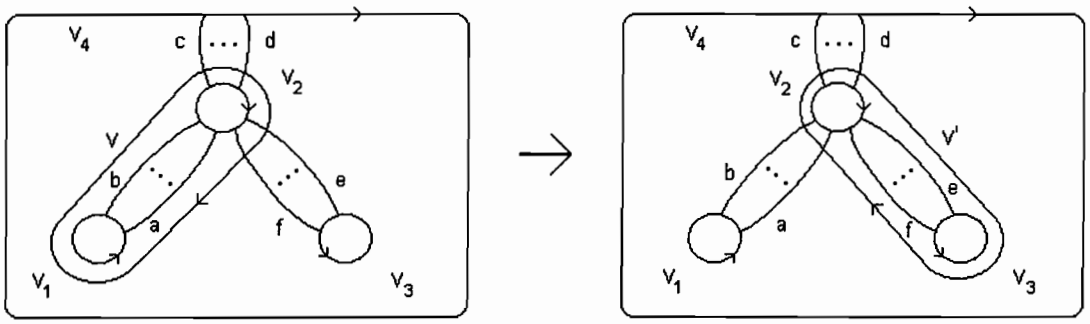


Figura 4.19. Forma final dos *flip moves*, após a simplificação das curvas envolvidas.

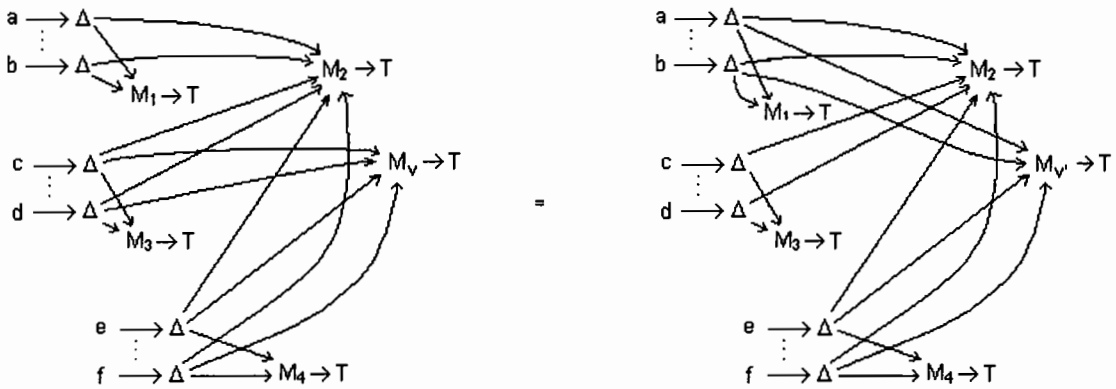


Figura 4.20. Representação tensorial dos *flip moves*.

Em alguns tétrions não se obtém todos os três feixes de curvas, e a equação se simplifica. Os casos especiais são discutidos nas próximas seções. No caso em que o *flip* age sobre $\{u_i\}$, pode-se repetir todo o procedimento de simplificação das curvas na superfície do tétrion. Chega-se a equações análogas, obtidas por dualidade a partir da equação da Figura 4.20.

4.2. O sistema de equações do modelo quasetopológico

As equações obtidas fornecem uma descrição algébrica da simetria quasetopológica. Formam um sistema bastante complexo, no entanto. As equações do *flip move*, em particular, mostram-se especialmente intratáveis no estado em que são obtidas. Há uma infinidade de equações (uma para cada tipo de tétrion), e cada equação tomada individualmente é consideravelmente difícil. Ainda assim, é possível demonstrar que o sistema de equações possui soluções não-triviais, garantindo sua consistência.

Exemplos de soluções são dados por álgebras de Hopf involutórias [12]. No trabalho de Kuperberg sobre invariantes topológicos, demonstra-se que se os tensores de estrutura formam uma álgebra de Hopf involutória, então a função de partição $Z(\mathcal{D})$ pode ser escrita como

$$Z(\mathcal{D}, H) = \sharp(\mathcal{D}, H)\,(dim\, H)^{g-n_u-n_v},$$

onde $\sharp(\mathcal{D}, H)$ é um invariante topológico, H uma álgebra de Hopf involutória, g o gênero de $\mathcal{D}$, e n_u e n_v o número de curvas u_i e v_j em $\mathcal{D}$, respectivamente. As quantidades n_u e n_v são independentes nos diagramas usados por Kuperberg. Em diagramas triônicos, no entanto, tem-se que $n_u = n_v = 3g - 3$ [20]. Para diagramas associados a triangulações, vale também que $f = 2g - 2$, onde f é o número de faces da triangulação. Neste caso, a expressão reduz-se a

$$Z(\mathcal{D}, H) = \sharp(\mathcal{D}, H)\,(dim\, H)^{1-\frac{5f}{2}},$$

e assim $Z(\mathcal{D}, H)$ é um invariante quasetopológico. Depende apenas da topologia de $\mathcal{D}$, via $\sharp(\mathcal{D}, H)$, e do número de faces f da triangulação. Logo, $Z(\mathcal{D}, H)$ é invariante sob a ação dos *moves* quasetopológicos. Álgebras de Hopf involutórias são soluções do sistema de equações que descrevem os *moves* quasetopológicos, portanto.

A parte quasetopológica de tais soluções é bastante simples, no entanto. A dependência da função de partição em f se resume a um fator $(dim\, H)^{1-\frac{5f}{2}}$. Segue que teorias quasetopológicas não-triviais, caso existam em três dimensões, devem basear-se em estruturas mais gerais do que as álgebras de Hopf[3].

Dentre as generalizações conhecidas, não se encontrou nenhum exemplo ajustado às necessidades do modelo. Nas Quasi-Hopf Algebras [24], por exemplo, perde-se a relação de co-associatividade do co-produto, necessária para a definição dos campos descrita na Seção 2.4.1. Nas Weak Hopf Algebras [25], usa-se a relação de biálgebra.

[3] Pode-se também recorrer álgebras de Hopf não-involutórias. Teorias topológicas com $S^2 \neq Id$ foram estudadas por Kuperberg em [23], e podem servir de base a uma outra abordagem das teorias quasetopológicas.

Associada às demais equações do modelo, reduz o sistema a uma álgebra de Hopf, trivializando o modelo. Estes são os dois casos mais conhecidos de generalização das álgebras de Hopf.

Uma nova generalização foi proposta, e seu comportamento junto às equações do modelo analisado. A nova álgebra é apresentada na seção 4.2.1, e batizada de álgebra de Hopf modificada. O restante da seção é dedicado ao estudo dos *flip moves* com esta álgebra.

4.2.1. Álgebras de Hopf modificadas

Para que os tensores de estrutura formem uma álgebra de Hopf, devem satisfazer as identidades mostradas na Figura 4.21. Estas equações são os axiomas das álgebras de Hopf.

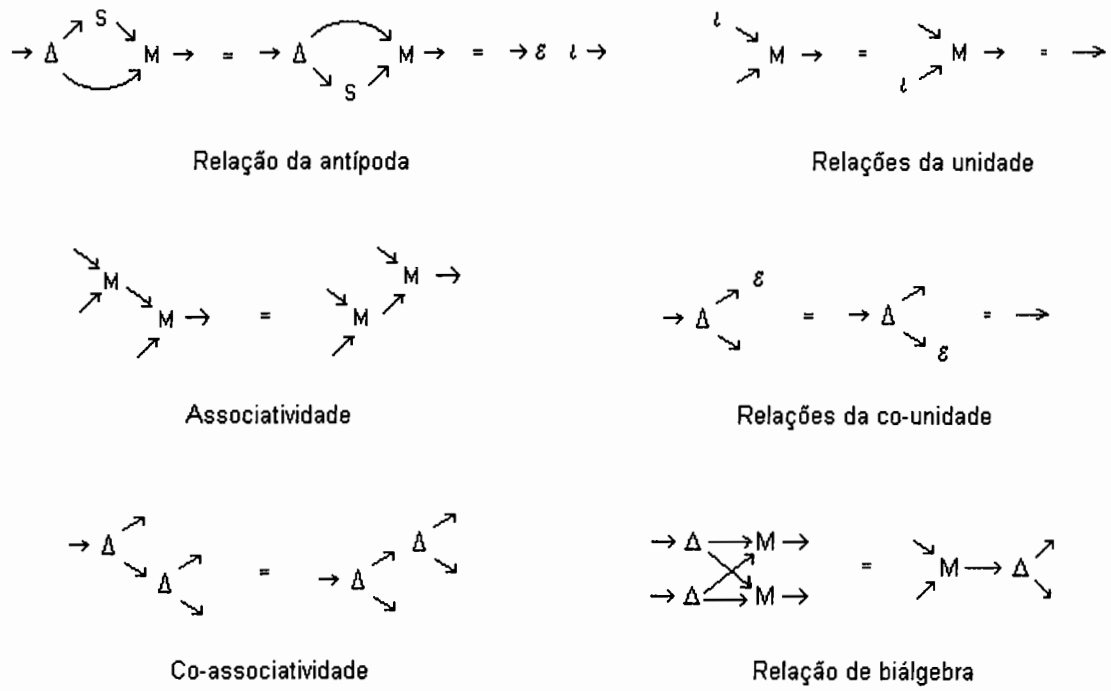


Figura 4.21. Axiomas das álgebras de Hopf.

Diversas equações do modelo quasetopológico se encontram entre as relações listadas. Apenas um dos axiomas não é exigido explicitamente pelo modelo: a relação de biálgebra. Portanto, a generalização das álgebras de Hopf procurada deve basear-se numa alteração da relação de biálgebra. Os demais axiomas devem ser verificados, ou então a álgebra falha na solução de algum *move*. Procura-se então definir novas

relações, menos restritivas que a de biálgebra, para substituí-la, de maneira a que as demais equações do modelo sejam conseqüência dos novos axiomas.

O modo mais simples de se fazer isso é postular diretamente as equações quasetopológicas como axiomas da nova álgebra. Mas como se busca simplificar o sistema de equações, não se inclui na lista todas as equações. A equação mais complicada – a dos *flip moves* – é a princípio deixada de lado, aguardando tratamento especial. A lista parcial de axiomas assim obtida é mostrada na Figura 4.22.

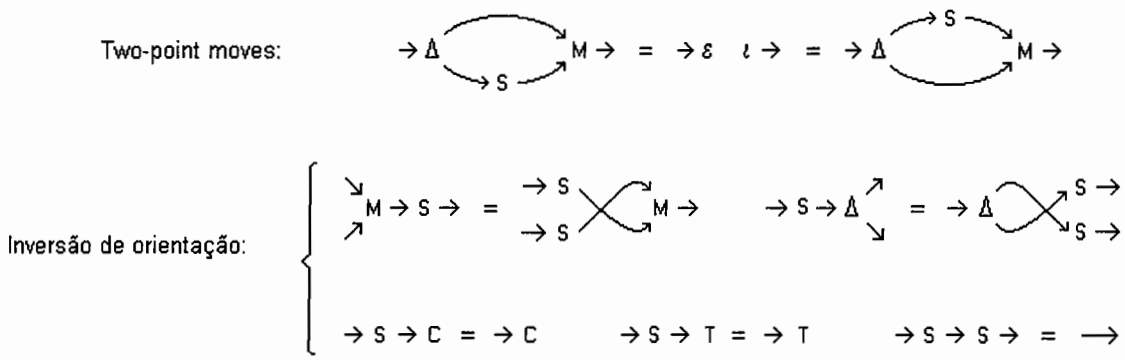


Figura 4.22. Lista parcial dos axiomas das biálgebras de Hopf modificadas.

Além das relações mostradas na figura, também se toma como axiomas os requerimentos básicos do modelo, isto é, a associatividade do produto, a co-associatividade do co-produto, e as relações da unidade e da co-unidade. Estas identidades são compartilhadas com as álgebras de Hopf e podem ser vistas na Figura 4.21.

Para completar a lista, toma-se um substituto para a relação de biálgebra. A alteração desta equação é feita tendo em vista a simplificação da equação dos *flip moves*, e é mostrada na Figura 4.23. Uma família de alterações análogas é discutida no final deste capítulo.

Figura 4.23. Relação de biálgebra modificada.

A generalização proposta das álgebras de Hopf tem os seguinte axiomas, portanto:

1. os requerimentos básicos do modelo listados na Figura 2.23;

2. as equações dos *moves* coletadas na Figura 4.22;
3. e a relação de biálgebra modificada da Figura 4.23.

Os axiomas não são independentes, como será mostrado mais adiante. A lista de axiomas apresentada não é o modo mais conciso de definir a estrutura algébrica estudada. Deve ser entendido como um modelo para eventuais pesquisas futuras em teorias quasetopológicas.

4.2.2. *Flip moves* e a relação de biálgebra

A equação dos *flips* é resolvida com álgebras de Hopf. Esta solução é descrita a seguir, a fim de que seja adaptada para a relação de biálgebra modificada.

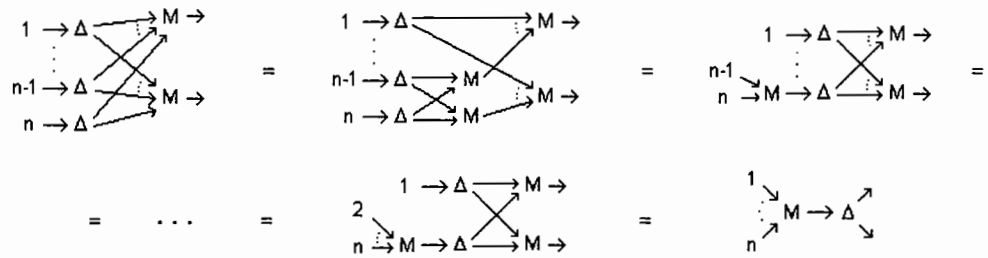
Na equação dos *flips* (Figura 4.20), os três feixes de curvas são interpretados algebricamente de modo semelhante. Para cada segmento no feixe há um co-produto Δ_a^{bc} ou Δ_a^{bcd}. O co-produto com dois índices superiores ocorre quando o feixe não cruza a curva interna do tétrion (v ou v'). No caso contrário, tem-se o co-produto com três índices superiores. Os tensores M_j representam as curvas v_j ligadas pelo feixe, e agrupam os co-produtos ordenadamente, como mostrado na Figura 4.24.

Figura 4.24. Representação tensorial do feixe de curvas u_i que liga as curvas v_1 e v_2 em um tétrion padrão. No primeiro caso, o feixe não intersecta a curva interna do tétrion. No segundo caso, intersecta v'.

A simplificação da expressão com a biálgebra é apresentada na Figura 4.25. Cada feixe reduz-se a uma expressão contendo apenas um produto e um co-produto. A equação dos *flips* assume a forma mostrada na Figura 4.26.

Logo, se os tensores de estrutura formam uma álgebra de Hopf, então a equação dos *flips* é satisfeita, no caso de ação sobre curvas de $\{v_j\}$. O caso em que o *flip* age sobre $\{u_i\}$ é descrito pela equação dual, e pode ser tratado de maneira idêntica. A relação de co-integral é dual à de integral, e a relação de biálgebra é auto-dual. Assim, a prova inteira pode ser refeita com relações duais.

(a) Co-produtos com dois índices contravariantes.



(b) Co-produtos com três índices contravariantes.

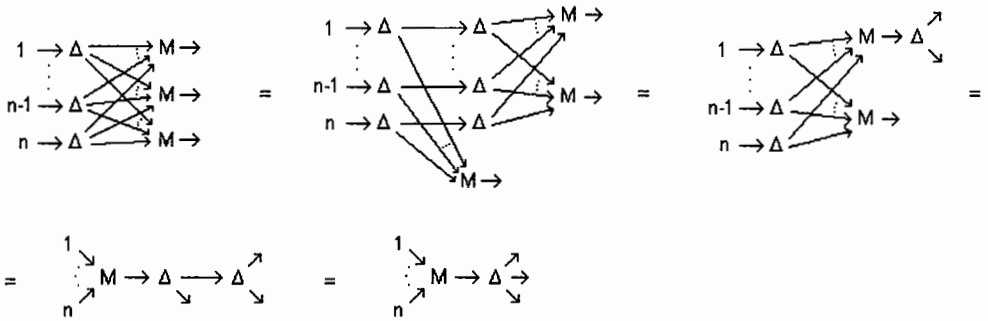


Figura 4.25. Simplificação da representação tensorial de um feixe de curvas u_i num tétrion padrão com o uso da relação de biálgebra.

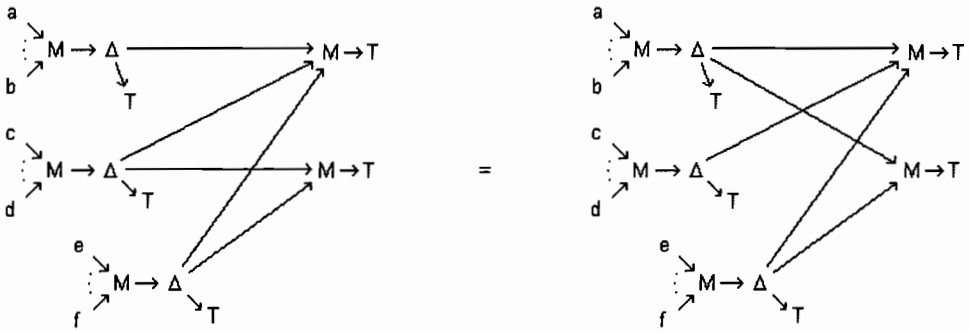


Figura 4.26. Equação dos *flip moves* simplificada com o uso da relação de biálgebra.

Figura 4.27. Propriedade integral do traço e propriedade co-integral do co-traço.

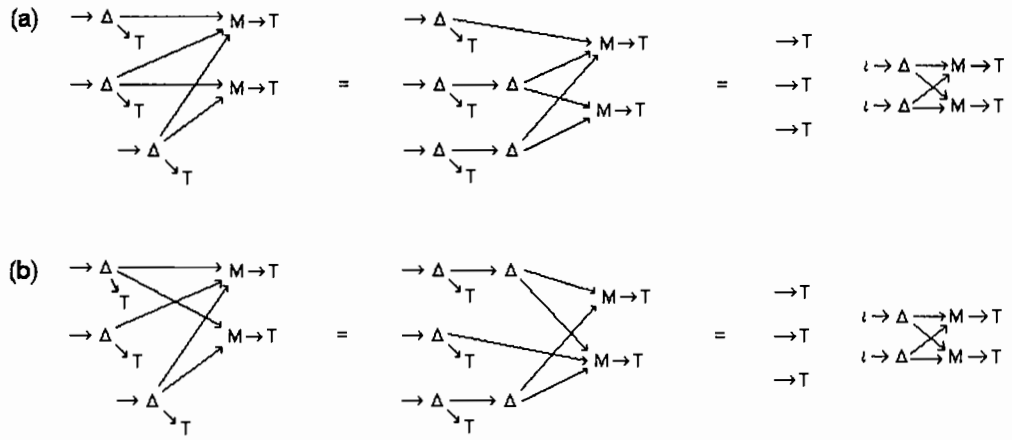


Figura 4.28. Verificação da equação dos *flip moves*. Os diagramas (a) e (b) representam o mesmo tensor. Usando este fato na Figura 4.26, tem-se a equação dos *flips*.

4.2.3. *Flip moves* e a relação de biálgebra modificada

Nesta seção se mostra como a representação tensorial dos feixes de curvas num tétrion padrão é simplificada com a relação de biálgebra modificada. Os cálculos são análogos aos feitos com a relação de biálgebra tradicional. Uma nova equação dos *flips* é obtida.

Em primeiro lugar, busca-se agrupar os co-produtos nos feixes de curvas. A modificação da biálgebra proposta na Figura 4.23 visa facilitar este procedimento. Os cálculos da Figura 4.25 são então facilmente adaptados. No caso de feixes de co-produtos com três índices contravariantes, chega-se à mesma simplificação obtida com a biálgebra. A expressão tensorial é reduzida a uma forma contendo apenas um produto e um co-produto. Os cálculos são mostrados na Figura 4.29.

Para os co-produtos com dois índices a situação é diferente. A redução dos feixes não é sempre completa. Para que isto ocorra, deve haver o número correto de co-produtos no feixe. Há dois casos a se considerar. Para feixes com $3+2n$ co-produtos, onde $n \in \mathbb{N}$, a redução é completa. Mas se há menos de três co-produtos, ou um número par deles, então restam produtos e co-produtos extra após a simplificação. Os dois casos são mostrados nas Figuras 4.30 e 4.31.

Substituindo as fórmulas das Figuras 4.29, 4.30 e 4.31 na equação dos *flips* (Figura 4.20), chega-se a quatro equações, representadas na Figura 4.32. Cada lado da equação pode assumir duas formas, dependendo do número de co-produtos no feixe. Quando há $3+2n$ co-produtos com dois índices contravariantes, usa-se a expressão da Figura

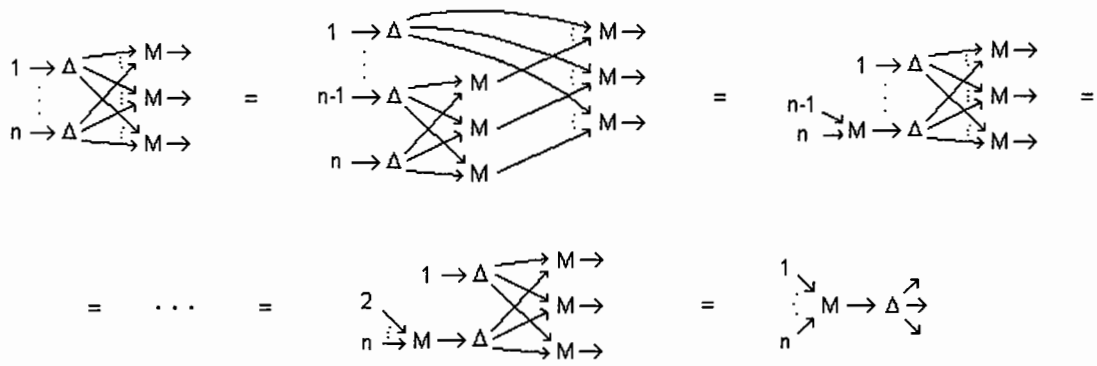


Figura 4.29. Simplificação da representação tensorial de um feixe de curvas u_i com a relação de biálgebra modificada. Primeiro caso: co-produtos com três índices contravariantes.

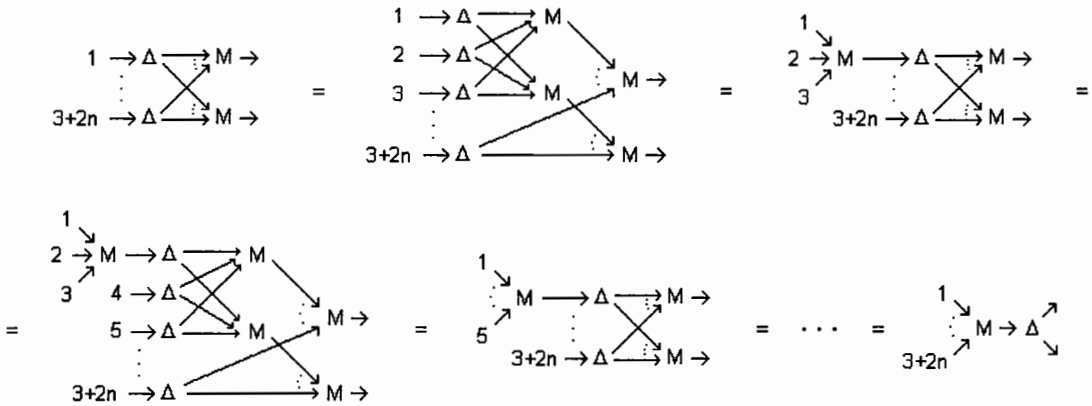


Figura 4.30. Simplificação da representação tensorial de um feixe de curvas u_i com a relação de biálgebra modificada. Segundo caso: $3 + 2n$ co-produtos com dois índices contravariantes.

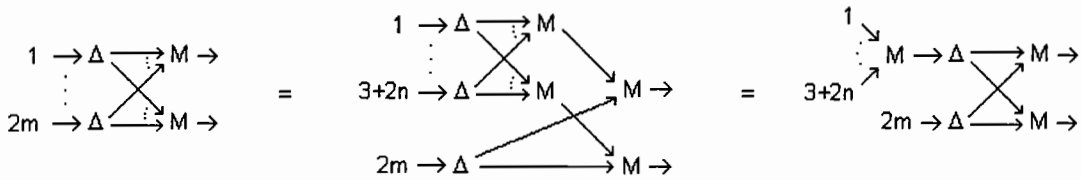


Figura 4.31. Simplificação da representação tensorial de um feixe de curvas u_i com a relação de biálgebra modificada. Terceiro caso: $2m$ co-produtos com dois índices contravariantes, $m \geq 2$.

4.30. Nos demais casos, a mostrada na Figura 4.31. Os feixes de co-produtos com três índices são escritos todos na forma simplificada mostrada na Figura 4.29.

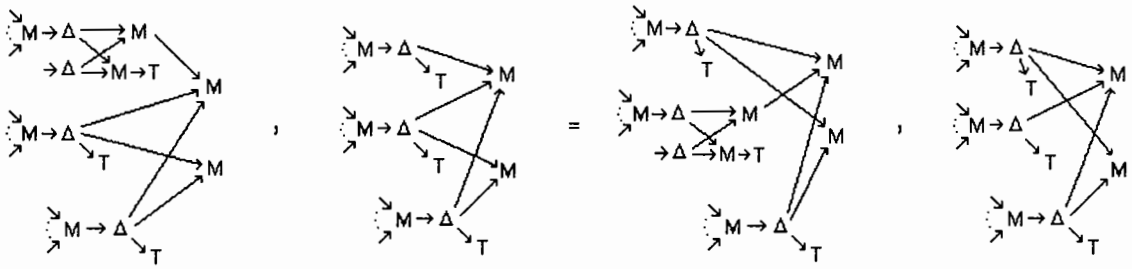


Figura 4.32. Equação dos *flip moves* simplificada com a relação de biálgebra modificada. Há quatro casos, que resultam das combinações das duas possibilidades em cada lado da equação.

4.3. Resolução do *Ansatz*

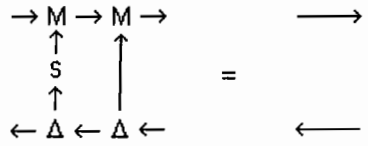
Nesta seção, um dos teoremas de existência de integrais em álgebras de Hopf [26] é adaptado para uso com as álgebras de Hopf modificadas aqui definidas. Não se chega a uma analogia completa, pois nesta álgebra o traço não é uma integral. Prova-se uma equação bastante similar à das integrais, no entanto, que resolve diversos casos da equação dos *flip moves*. Uma condição extra é necessária para resolver todos os casos. Tal condição reduz as álgebras de Hopf modificadas a álgebras de Hopf.

Há uma infinidade de outras possibilidades de alterações das álgebras de Hopf. Uma família natural de generalizações é sugerida pelo formalismo das biálgebras modificadas, e apresentada no final do capítulo. Conjectura-se que o traço satisfaça versões mais fracas da relação de integral nestas álgebras, de modo análogo ao que ocorre nas álgebras modificadas. Discute-se a possibilidade de aplicação das mesmas ao estudo da equação dos *flip moves*.

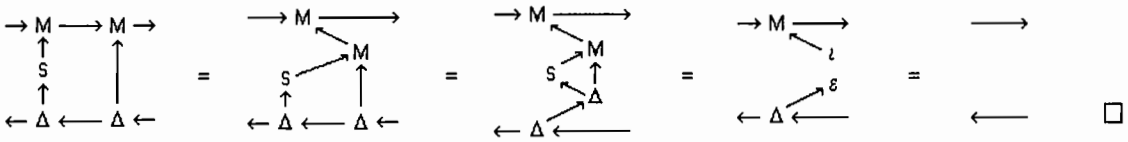
4.3.1. Resolução da equação dos *flip moves*

Duas relações envolvendo o traço são deduzidas a seguir. Os resultados são válidos em qualquer biálgebra de Hopf modificada involutória, isto é, com $S^2 = Id$. Um das relações é análoga à que descreve a propriedade integral do traço em álgebras de Hopf. A outra descreve a ação do traço sobre um dos lados da equação da relação de biálgebra. Ambas serão usadas na resolução da equação dos *flips*. Enuncia-se primeiro um lema para isto.

LEMA 4.3.1. Em uma biálgebra de Hopf modificada qualquer vale a relação

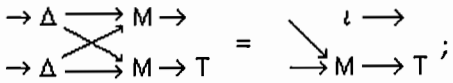


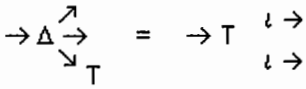
DEMONSTRAÇÃO:



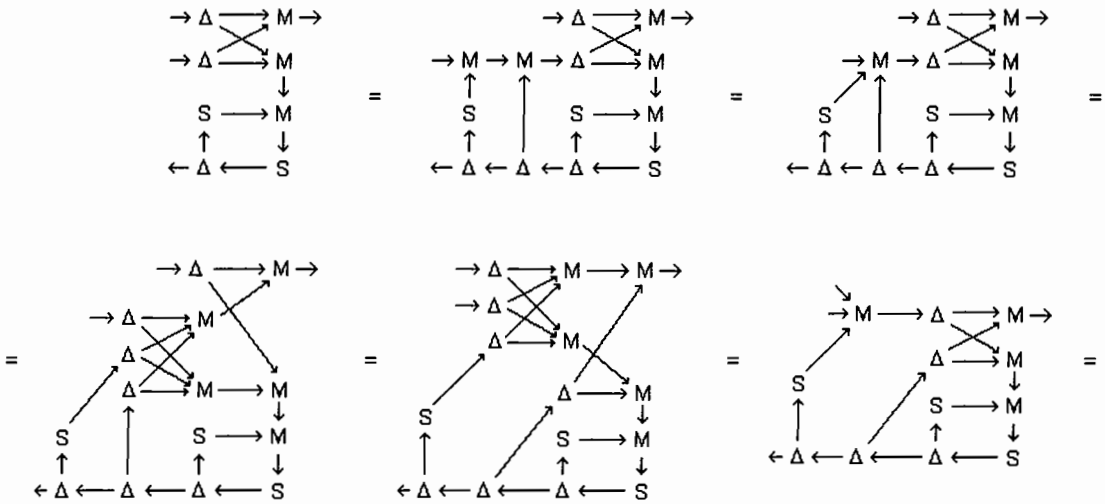
Na prova do lema são usadas, na seqüência das passagens, as relações de: (i) associatividade, (ii) co-associatividade, (iii) da antípoda e (iv) as definições de unidade e de co-unidade.

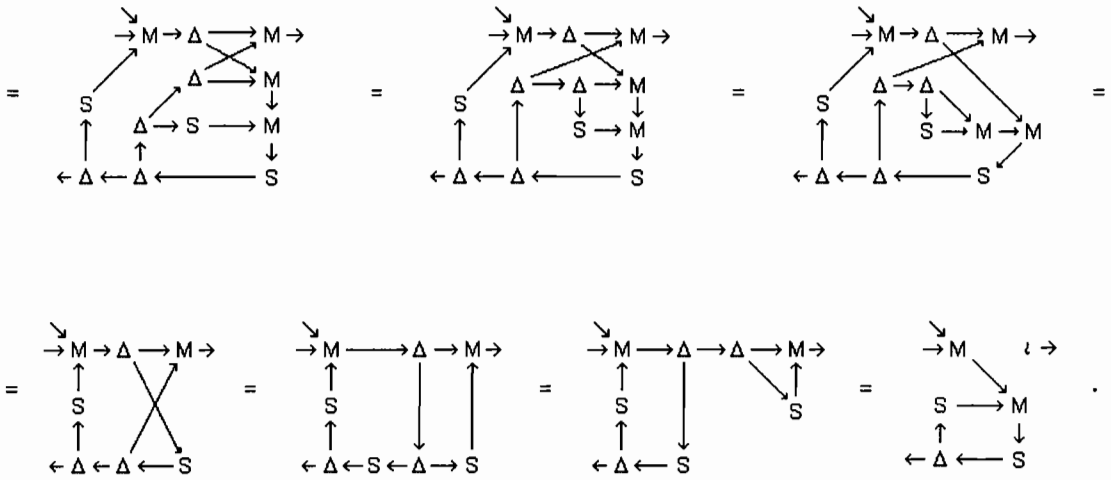
TEOREMA 4.3.2. Em uma biálgebra de Hopf modificada involutória qualquer, o traço satisfaz as seguintes relações:

(i) 

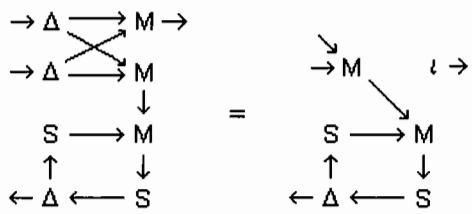
(ii) 

DEMONSTRAÇÃO: Considere a relação (i). O lado esquerdo da equação pode ser construído a partir do tensor introduzido abaixo. Basta que se contraia seu índice contravariante com a co-unidade, desde que $S^2 = Id$. Mas, por hipótese, a biálgebra é involutória. Segue que

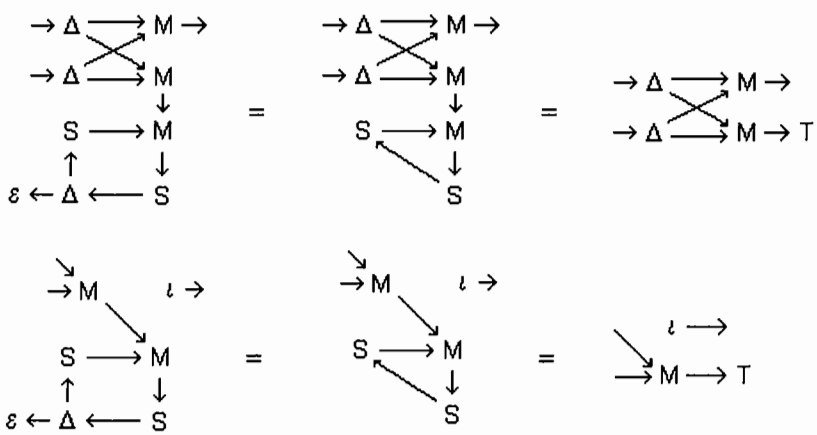




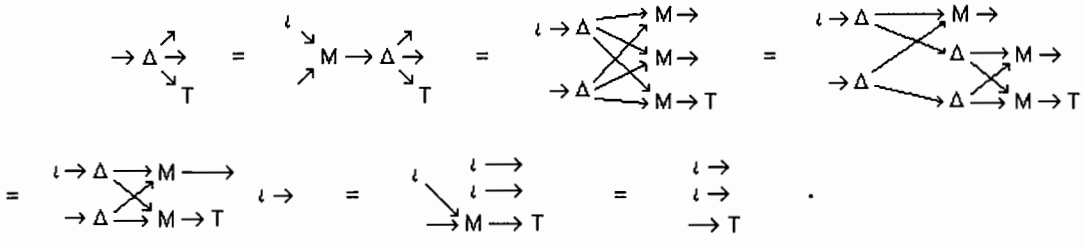
Ou seja,



Contraindo os dois lados da equação com a co-unidade ε, e usando que $S^2 = Id$, chega-se ao resultado desejado,



A prova da parte (ii) do teorema 4.3.2 faz uso do resultado (i), além da definição da unidade e da relação de biálgebra modificada.



As duas relações do Teorema 4.3.2 são então substituídas na equação dos *flip moves* (Figura 4.32). O resultado é mostrado na Figura 4.33. Apenas um dos quatro casos de *flip moves* é resolvido deste modo. Uma nova condição sobre o traço é adotada para a resolução dos outros três, a qual é mostrada na Figura 4.34, e denotada "condição dos *flips*". Dispondo-se desta relação, é fácil ver que todos os casos da equação dos *flips* são resolvidos. A relação pode ser interpretada, portanto, como a descrição algébrica dos *flip moves* dentro do *ansatz* adotado.

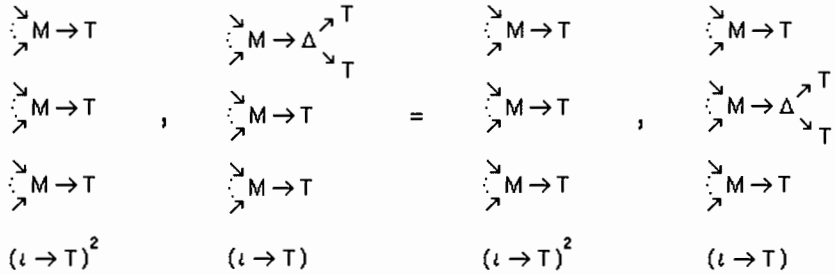


Figura 4.33. Equação dos *flip moves*.

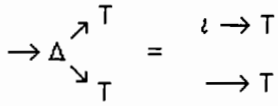


Figura 4.34. Condição dos *flips*.

4.3.2. Equivalência com álgebras de Hopf

Álgebras de Hopf modificadas involutórias são generalizações não-triviais das álgebras de Hopf. Existem exemplos que não se reduzem a álgebras de Hopf, nos quais a relação de biálgebra não é satisfeita. Entre os axiomas das álgebras de Hopf modificadas se encontram as equações de todos os *moves* quasetopológicos, exceto a do *flip move*.

Para que a equação dos *flips* seja satisfeita, recorre-se a uma condição extra, a condição dos *flips*. Se uma álgebra de Hopf modificada involutória satisfaz a condição dos *flips*, então define uma teoria quasetopológica em espaços quasetopológicos arbitrários.

Resta saber se estas teorias se resumem aos exemplos já conhecidos das álgebras de Hopf ou se há novos casos. Em outras palavras, é preciso verificar se existem álgebras de Hopf modificadas involutórias que satisfaçam a condição dos *flips* e que não sejam álgebras de Hopf. Provaremos que não existe nenhum exemplo. A condição dos *flips* reduz as álgebras modificadas a álgebras de Hopf.

Considere para isto o co-produto $\Delta(\iota)$ da unidade. Este tensor cumpre um papel central na distinção das duas álgebras. Nas álgebras de Hopf, vale sempre que $\Delta(\iota) = \iota \otimes \iota$ [22]. Por outro lado, se numa álgebra de Hopf modificada se tem $\Delta(\iota) = \iota \otimes \iota$, então a relação de biálgebra é satisfeita, e a álgebra é de Hopf[4] (Figura4.35). Ou seja, $\Delta(\iota) \neq \iota \otimes \iota$ é uma condição necessária e suficiente para que uma álgebra de Hopf modificada não seja uma álgebra de Hopf. Mostra-se a seguir que a condição dos *flips* implica em $\Delta(\iota) = \iota \otimes \iota$.

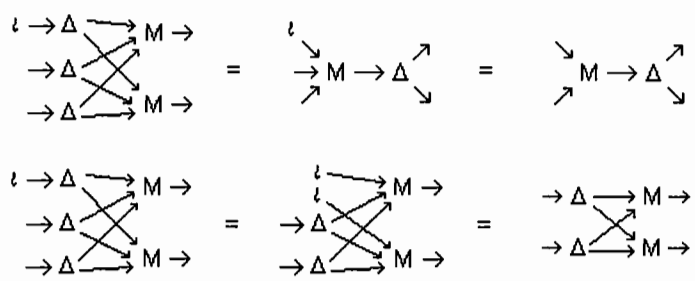
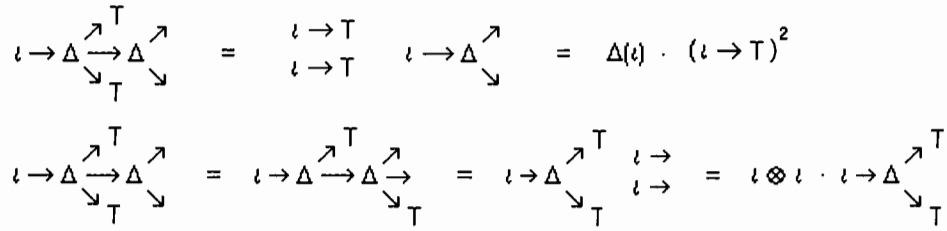


Figura 4.35. A relação de biálgebra modificada reduz-se à de biálgebra se $\Delta(\iota) = \iota \otimes \iota$.

TEOREMA 4.3.3. *Para toda álgebra de Hopf modificada involutória, tem-se que* $\Delta(\iota) = k \cdot \iota \otimes \iota$ [5].

DEMONSTRAÇÃO:



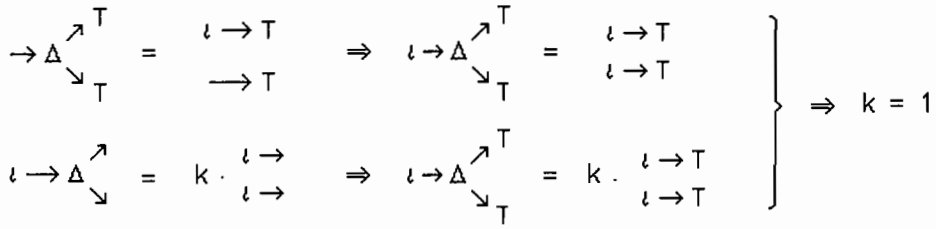
□

[4] Entre os axiomas das álgebras de Hopf modificadas estão todos os axiomas das Álgebras de Hopf, à exceção da relação de biálgebra.

[5] Demonstra-se que $\alpha.\Delta(\iota)$ é proporcional a $\iota \otimes \iota$, onde $\alpha = \iota \to T$. Mas, em qualquer álgebra H, tem-se que $\iota \to T = dim\, H$, e assim $\alpha \neq 0$. Segue que $\Delta(\iota)$ é proporcional a $\iota \otimes \iota$, como enunciado.

TEOREMA 4.3.4. *Para toda álgebra de Hopf modificada involutória que satisfaça a condição dos* flips, *tem-se que* $\Delta(\iota) = \iota \otimes \iota$.

DEMONSTRAÇÃO:



□

Portanto, toda álgebra de Hopf modificada involutória que satisfaça a condição dos *flips* se reduz a uma álgebra de Hopf. Logo, as teorias quasetopológicas definidas equivalem às já conhecidas. Os resultados obtidos são discutidos a seguir, e sugestões de procedimentos alternativos para o estudo das equações do modelo são apresentadas.

4.3.3. Generalizações alternativas das Álgebras de Hopf

As duas resoluções da equação dos *flips* apresentadas, com as álgebras de Hopf tradicionais e as modificadas, seguem um procedimento comum. Os *moves* são estudados num tétrion padrão, com as curvas internas alinhadas em feixes (Figura 4.19). Cada feixe de curvas no tétrion é representado algebricamente por um feixe de co-produtos (Figura 4.20). A aplicação direta da relação de biálgebra ou da biálgebra modificada leva a uma simplificação destes feixes. Com isso a equação dos *flips* também se simplifica. A equação obtida é então resolvida com o uso de relações satisfeitas pelo traço. No caso das álgebras de Hopf, usa-se a propriedade integral do traço. Nas álgebras modificadas, usam-se relações análogas, demonstradas no Teorema 4.3.2.

Conjectura-se que o procedimento possa ser adaptado para toda uma família de generalizações da biálgebra. Para cada par (m, n) de números naturais, $m, n \geq 2$, define-se uma relação de biálgebra modificada. Alguns exemplos são mostrados na Figura 4.36. O caso $(2, 2)$ descreve a biálgebra tradicional. O par $\langle (3, 2), (2, 3) \rangle$ descreve o caso estudado.

Figura 4.36. Deformações da relação de biálgebra: casos $(4, 2)$ e $(3, 3)$.

A simplificação dos feixes com as biálgebras modificadas (m, n) é feita de maneira óbvia. Nas álgebras de Hopf, todo feixe é reduzido a uma expressão com um único produto e um co-produto (ver Seção 4.2.2). Em suas generalizações, a redução não é completa. Nas deformações $(m, 2)$, por exemplo, os feixes de co-produtos com dois índices devem possuir exatamente $m + q \cdot (m - 1)$ co-produtos para que isto ocorra, com $q \in \mathbb{N}$ (ver Figura 4.37). A redução é incompleta em feixes com outros números de co-produtos. Restam então diversas equações simplificadas dos *flips*, as quais devem ser tratadas de modo independente, como no caso $(3, 2)$ estudado.

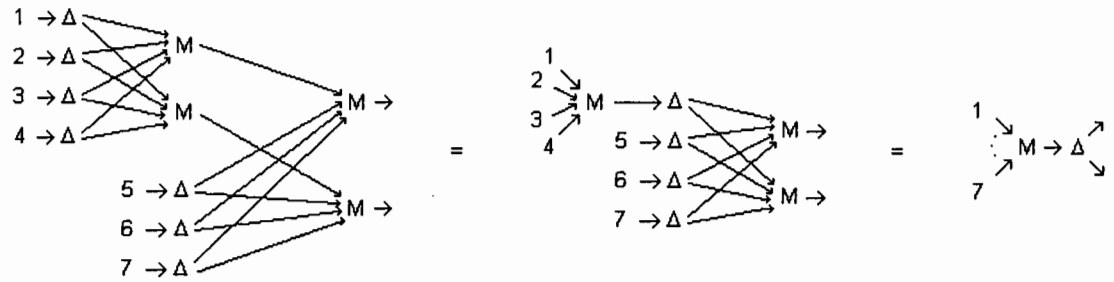


Figura 4.37. Aplicação da relação de biálgebra $(4, 2)$ para a simplificação de um feixe de sete co-produtos com dois índices contravariantes.

O segundo passo da resolução da equação apresenta mais dificuldades. Devem ser deduzidas relações envolvendo o traço que resolvam os diversos casos da equação simplificada dos *flips*. Para isto podem ser usados, além da biálgebra em questão, os demais axiomas da álgebra, isto é, os requerimentos básicos do modelo e as equações dos *moves*. Nas álgebras $(3, 2)$, recorre-se às relações provadas no Teorema 4.3.2. Este teorema é uma generalização para as álgebras modificadas de uma demonstração de existência de integrais em álgebras de Hopf [26]. Pode-se tentar adaptá-lo para uso com as outras álgebras. Caso exista uma analogia, deve levar a novas relações envolvendo o traço, que podem ser aplicadas às equações simplificadas dos *flips*. Nas álgebras de Hopf, as equações são deste modo resolvidas. Nas álgebras $(3, 2)$, é preciso adotar uma condição extra ainda, a condição dos *flips*. O método não foi estudado nas demais álgebras.

Prova-se de modo simples que as generalizações propostas são não-triviais, isto é, que não se reduzem a álgebras de Hopf. Em toda álgebra de Hopf, o co-produto da unidade satisfaz $\Delta(\iota) = \iota \otimes \iota$. Esta relação não é necessária nas novas álgebras, nas quais se pode ter $\Delta(\iota) = -\iota \otimes \iota$, por exemplo, desde que $\epsilon(\iota) = -1$. Um exemplo

bidimensional simples é dado por

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= -u \otimes u & \epsilon(u) &= -1 \\ \Delta(\iota) &= -\iota \otimes \iota & \epsilon(\iota) &= -1 \\ S &= Id & u \cdot u &= \iota \end{aligned}$$

onde $\{\iota, u\}$ é uma base do espaço vetorial V sobre o qual a álgebra é definida. A verificação dos axiomas não apresenta dificuldades.

Capítulo 5

Conclusão

Nesta tese foram estabelecidas as bases para o estudo das teorias de campo quasetopológicas discretas em três dimensões. A existência de modelos com tal simetria foi demonstrada, e uma família de exemplos apresentada. Métodos matemáticos específicos para o seu estudo foram desenvolvidos, e resultados novos em topologia combinatória e álgebra foram obtidos. Os métodos desenvolvidos também podem ser aplicados em outras teorias discretas, fornecendo assim uma nova abordagem matemática para o estudo de modelos mais tradicionais, como as teorias de gauge na rede, por exemplo.

Os resultados obtidos dividem-se naturalmente em dois ramos. No primeiro, a simetria quasetopológica é estudada de modo independente, como um conjunto de operações num espaço tridimensional discretizado, sem considerar a representação de sua ação sobre os campos. O problema central consiste em como reduzir a sua descrição à de um conjunto finito de geradores, ou "*moves* quasetopológicos". No outro ramo, estuda-se a representação dos *moves* em teorias de campo específicas. Procuram-se exemplos de teorias com função de partição Z invariante pela ação dos *moves*, o que basta para que sejam quasetopológicas. Os resultados obtidos nos dois ramos de pesquisa são descritos a seguir.

O problema da obtenção dos *moves* quasetopológicos foi completamente resolvido. Provou-se que há três *moves* elementares: *flip moves*, *two-point moves* e automorfismos da superfície. A discretização dos espaços foi feita com uma estrutura matemática batizada de "bipartição de Heegard", representada de maneira combinatória com "diagramas triniônicos" – uma classe especial de diagramas de Heegard. Os diagramas triniônicos podem ser interpretados como uma generalização das triangulações, e então ao número de tetraedros numa triangulação corresponde o número de trinions num diagrama. As operações de simetria quasetopológica são homeomorfismos que preservam o número de trinions. Nas triangulações, tais operações se reduzem a homeomorfismos que preservam o número de tetraedros.

Alguns resultados de interesse mais geral foram obtidos com o estudo das bipartições. Dentre estes, destaca-se o Teorema dos *flips*. O teorema diz respeito a decom-

posições triniônicas sólidas de *handlebodies*. Em um *handlebody* qualquer, existe uma infinidade de decomposições triniônicas sólidas distintas. Os *flip moves* são operações que agem em tais decomposições. Provou-se que duas decomposições quaisquer de um mesmo *handlebody* podem ser relacionadas pela aplicação de uma sucessão finita de *flip moves*. Decomposições triniônicas sólidas de *handlebodies* são utilizadas em outras teorias de campo (ver [16], por exemplo), e assim o teorema pode ser relevante em teorias que não as quasetopológicas.

Para desenvolver o segundo ramo de pesquisa, adotou-se uma classe específica de teorias discretas para o estudo dos *moves*. Foi usado o formalismo de Kuperberg [12], que descreve uma família vasta de teorias de campo em diagramas de Heegard. A função de partição destas teorias é construída a partir de cinco tensores de estrutura, os quais compõem uma biálgebra H. Impondo-se a invariância de Z pela ação dos *moves*, chega-se a uma série de equações envolvendo os tensores de estrutura. Ou seja, às simetrias do modelo correspondem identidades algébricas em H. As equações dos *moves* foram determinadas, e provou-se que existem soluções não-triviais, comprovando a existência de teorias quasetopológicas discretas em três dimensões.

Uma família simples de teorias quasetopológicas foi apresentada explicitamente. Mostrou-se que a cada álgebra de Hopf involutória H está associada uma solução das equações do modelo. Em tais teorias, a dependência de Z na grandeza quasetopológica f é dada por um fator $(dim\, H)^{\frac{5f}{2}}$, que vem multiplicado em Z por um invariante topológico conhecido[1]. Portanto, a menos de uma normalização, tem-se um modelo topológico. A principal importância deste resultado é mostrar que o sistema de equações obtido é consistente. A parte quasetopológica da teoria é exageradamente simples, e teorias com dinâmica mais complexa devem ser procuradas em álgebras mais gerais que as de Hopf.

As generalizações mais conhecidas das álgebras de Hopf (*Weak Hopf Algebras* e *Quasi-Hopf Algebras*) não são aplicáveis ao modelo. Propôs-se então novas generalizações. Nestas, a relação de biálgebra é substituída por outras relações mais fracas. As generalizações são indexadas por um par de números naturais (m, n), com $m, n \geq 2$. O caso $(2, 2)$ corresponde à biálgebra das álgebras de Hopf. A deformação mais simples é a $(3, 2)$, a qual foi estudada nesta tese. Provou-se que a generalização é não-trivial. Foram encontrados exemplos de álgebras não-Hopf que satisfazem os novos axiomas. Nestas, propriedades tradicionais das álgebras de Hopf deixam de ser válidas, mas são substituídas por relações análogas. Pode-se ter $\Delta(\iota) \neq \iota \otimes \iota$, por exemplo, mas tem-se sempre que $\Delta(\iota) = k \cdot \iota \otimes \iota$. O traço deixa de ser uma integral, mas valem relações semelhantes às satisfeitas por integrais em álgebras de Hopf.

[1] Em partições de Heegard associadas a triangulações, f é igual ao número de faces na triangulação. O número de faces está relacionado ao número T de tetraedros pela fórmula $f = 2T$.

A generalização das álgebras de Hopf proposta foi feita tendo em vista a simplificação das equações dos *moves* quasetopológicos. Tendo sido provado que a generalização é não-trivial, partiu-se para a sua aplicação como *ansatz* de solução junto às equações quasetopológicas. Não se chegou a novas soluções deste modo, no entanto. Provou-se que as condições de invariância quasetopológica reduzem as álgebras de Hopf modificadas a álgebras de Hopf. Exemplos de teorias quasetopológicas podem continuar a ser procurados entre as álgebras (m, n) com índices mais altos, e o procedimento deve ser análogo ao aqui apresentado para o caso $(3, 2)$.

Outra possibilidade de desenvolvimento consiste no estudo da simetria quasetopológica em classes mais gerais de teorias de campo discretas. A classe estudada é o análogo nas bipartições de teorias definidas em triangulações com campos e pesos locais em arestas e faces. Mas campos também podem ser colocados em vértices, por exemplo, e pesos locais no interior dos tetraedros, levando à formulação de famílias mais abrangentes de modelos. Novos exemplos de teorias quasetopológicas podem ser procuradas entre tais modelos.

Um caminho julgado mais promissor, no entanto, consiste na aplicação dos métodos matemáticos aqui desenvolvidos em outros problemas de teorias de campos. Teorias de campo discretas geralmente são estudadas em triangulações ou em redes cúbicas. Nas teorias topológicas, também é comum o uso de partições de Heegard. Mas para a formulação das teorias quasetopológicas, uma linguagem mista foi elaborada, baseada no uso das bipartições. As bipartições são interpretadas como uma generalização das triangulações, mas nas quais agem operações típicas de partições de Heegard. Com isso, as simetrias de modelos definidos em triangulações podem ser estudadas com novas classes de transformações.

Esta linha de pesquisa já vem sendo desenvolvida. Verificou-se que a teoria de gauge $\mathbb{Z}(2)$ com campos de matéria de Higgs pode ser reescrita em bipartições, dentro do formalismo desenvolvido nesta tese. O seu limite de baixa temperatura apresenta uma simetria semelhante à quasetopológica. Propriedades da teoria em temperatura finita também podem ser estudadas. Os resultados preliminares sugerem uma nova generalização das álgebras de Hopf, na qual as relações de biálgebra e da antípoda passam a ser válidas a menos de um fator, regulado por um parâmetro comum de deformação. Teorias de campo baseadas em tais álgebras podem ser estudadas como um modelo para o regime de temperatura baixa de teorias de gauge na rede.

Referências Bibliográficas

[1] P. Teotônio-Sobrinho e B. G. C. Cunha, *"Quasitopological field theories in two dimensions as soluble models"*, Int. J. Mod. Phys. **A13** (1998) 3667

[2] R. J. Baxter, *"Exactly solved models in statistical mechanics"*, Academic Press (1982)

[3] S. W. Chung, M. Fukuma e A. Shapere, *"Structure of topological lattice field theories in three dimensions"*, Int. J. Mod. Phys. **A9** (1994) 1305

[4] J. B. Kogut, *"An introduction to lattice gauge theory and spin systems"*, Rev. Mod. Phys. **51** (1979) 659

[5] J. B. Kogut, *"A review of the lattice gauge theory approach to quantum chromodynamics"*, Rev. Mod. Phys. **55** (1980) 2892

[6] T. Regge, *"General Relativity without coordinates"*, Nuovo Cimento **19** (1961) 558

[7] J. W. Barret, M. Galassi, W. A. Miller, R. D. Sorkin, P. A. Tuckey e R. M. Williams, *"A parallelizable implicit evolution scheme for Regge calculus"*, Int. J. Theor. Phys. **36** (1997) 815

[8] T. Regge e R. M. Williams, *"Discrete structures in gravity"*, J. Math. Phys. **41** (2000) 3964

[9] G. Ponzano e T. Regge, in F. Bloch (Ed.) *"Spectroscopy and group theoretical methods in physics"*, North Holland (1968).

[10] S. V. Matveev, *"Three-manifolds. Classical results"*, J. Math. Sci. **74** (1995) 834

[11] L. Freidel e D. Louapre, *"Ponzano-Regge model revisited I: Gauge fixing, observables and interacting spinning particles"*, Class. Quant. Grav. **21** (2004) 5685

[12] G. Kuperberg, *"Involutory Hopf Algebras and 3-Manifolds Invariants"*, Int. J. Math. **2** (1991) 41

[13] V. V. Prasolov e A. B. Sossinsky, *"Knots, links, braids and 3-manifolds"*, AMS (1997)

[14] J. Stilwell, *"Classical topology and combinatorial group theory"*, Springer-Verlag (1993)

[15] J. M. Drouffe e C. Itzykson, *"Lattice gauge fields"*, Phys. Rept. **38** No.3 (1978) 133

[16] L. Crane, *"2d Physics and 3d Topology"*, Commun. Math. Phys **135** (1991) 615

[17] D. V. Boulatov, *"Quantum deformation of lattice gauge theory"*, Comm. Math. Phys. **186** (1997) 295

[18] R. L. Bishop e S. I. Goldberg, *"Tensor Analysis on Manifolds"*, Dover Publ. (1980)

[19] L. S. Pontryagin, *"Foundations of Combinatorial Topology"*, Graylock Press (1952)

[20] A. Hatcher e W. Thurston, *"A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface"*, Topology **19** (1980) 221

[21] S. Suzuki, *"On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody"*, Can. J. Math. Vol.XXIX **1** (1997) 111

[22] E. Abe, *"Hopf Algebras"*, Cambridge University Press (1980)

[23] G. Kuperberg, *"Non-involutory Hopf algebras and 3-manifold invariants"*,

[24] V. G. Drinfeld, *"Quasi-Hopf Algebras"*, Leningrad Math.J. **1** (1990) 1419

[25] G. Böhm, F. Nill e K. Szlachányi, *"Weak Hopf Algebras I. Integral Theory and C*-structure"*, QA/9805116

[26] L. Kauffman e D. Radford, *"On two proofs for the existence and uniqueness of integrals for finite-dimensional Hopf Algebras"*, QA/991108