Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Estados Quânticos de um Elétron em um Campo Magnético Uniforme

Mario Cesar Baldiotti

Banca Examinadora

Prof. Dr. Dmitri M. Gitman, IFUSP, USP - Orientador

Prof. Dr. Josif Frenkel, IFUSP, USP

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar, IFT, UNESP

Dissertação apresentada ao
IFUSP para a obtenção do
grau de Mestre em Ciências.

Abril de 2002

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um método que permite explicitar a arbitrariedade contida nas soluções das equações de onda relativísticas, na presença de certos tipos de campos eletromagnéticos externos. Esta arbitrariedade está relacionada com a existência de uma transformação, com a qual podemos reduzir o número de variáveis presentes na equação original. Através desta transformação, criamos uma representação, a qual permite obter novos conjuntos de soluções exatas e construir a função de evolução para a equação de Klein-Gordon. Como resultado, apresentamos novos conjuntos de soluções, estacionárias e não-estacionárias, para o problema em um campo magnético constante e uniforme e a combinação deste campo com um campo elétrico longitudinal.

Abstract

We demonstrate how one can describe explicitly the present arbitrariness in solutions of relativistic wave equations in external electromagnetic fields of special form. This arbitrariness is connected to the existence of a transformation, which reduces effectively the number of variables in the initial equations. Then we use the corresponding representations to construct new sets of exact solutions, which may have a physical interest, and to construct the evolution function to the Klein-Gordon equation. As resulted, we present new sets of stationary and nonstationary solutions in magnetic field and in some superpositions of electric and magnetic fields.

Dedico este trabalho aos meus pais,

José Daniel Baldiotti,

Rita de Cássia Baldiotti

e, especialmente, ao meu irmão

José Carlos Baldiotti.

O Binômio de Newton é tão belo como a Vênus de Milo.

O que há é pouca gente para dar por isso.

Álvaro de Campos, 1928

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Dmitri M. Gitman; ao Prof. Dr. V.G. Bagrov e a todos os professores do Instituto de Física da USP que contribuíram para a minha formação.

Aos membros da banca.

Ao João Luis Meloni Assirati, cuja contribuição em minha carreira foi nada menos que essencial.

A Rodrigo Fresneda, Andrei Smirnov e Carlos Molina por discussões especialmente úteis.

Aos inúmeros amigos que fiz no IFUSP, dentre os quais gostaria de destacar, Luiz Blanes, Marcelo Takara, Fábio Jorge e Masayuki Hase.

Aos meus amigos Carlos Pedro da Silva, Julio Cesar de Lima e Rogério Morelli.

À FAPESP pelo suporte financeiro.

À Beatriz Protti Christino, por existir.

Índice

Capítulo 1

Introdução

A descrição do movimento de uma carga elétrica em um campo eletromagnético externo, levando em conta efeitos relativísticos, pode ser obtida através das equações de onda de Dirac e de Klein-Gordon. Estas equações fornecem a base da mecânica quântica relativística e da eletrodinâmica quântica para partículas espinoriais e escalares [1]. Na mecânica quântica relativística, estas equações fornecem a função de onda de uma partícula, i.e, descrevem o movimento de um fermion ou um bóson em um campo eletromagnético externo. Já na eletrodinâmica quântica, as soluções destas equações permitem o desenvolvimento de uma expansão perturbativa, conhecida como representação de Furry, a qual incorpora a interação com o campo externo de forma exata, enquanto trata perturbativamente a interação com o campo eletromagnético quantizado [2]. Em especial, todos os propagadores, ou seja, as várias funções de Green, são construídos de certa forma usando soluções exatas da equação de Dirac e de Klein-Gordon.

Fisicamente, as soluções exatas conhecidas mais importantes das equações de Dirac e de Klein-Gordon são: para o campo coulombiano, o campo magnético uniforme, ondas planas, monopólos magnéticos, ondas planas combinadas com campos elétrico e magnético uniformes paralelos à direção de propagação, campos cruzados, e alguns campos elétricos em uma dimensão. Uma revisão completa destas soluções pode ser encontrada em [4].

No caso geral, as equações de onda, que descrevem um certo problema, podem admitir diferentes conjuntos completos de soluções. Este fato reflete a existência de uma arbitrariedade na solução do problema de autovalores para esta equação. Pode ocorrer ainda, desta arbitrariedade estar relacionada com a existência de infinitos conjuntos completos de soluções. Em alguns destes casos, podemos construir soluções onde esta arbitrariedade está explícita na forma de uma função arbitrária, ou seja, neste casos, temos uma arbitrariedade funcional. O problema de desenvolver um método regular, que permita explicitar esta arbitrariedade, parece não trivial, especialmente na presença de um campo externo.

Neste trabalho, apresentaremos como é possível explicitar a presença desta arbitrariedade nas soluções das equações de onda relativísticas para alguns tipos de campos externos, mais especificamente, para campos magnéticos uniformes e uma combinação deste tipo de campo com campos elétricos longitudinais. Mostraremos que esta arbitrariedade está conectada com a existência de uma transformação, com a qual podemos reduzir o número de variáveis na equação original Com esta transformação obtemos uma nova representação, a qual chamaremos representação de semimomento, e com ela poderemos construir novos conjuntos de soluções exatas. Todo o trabalho é desenvolvido de forma a termos um tratamento praticamente idêntico para as equações de Dirac e de Klein-Gordom, ou seja, os espinores, soluções da equação de Dirac, são construídos através das soluções escalares da equação de Klein-Gordon. Inicialmente, do capítulo 2 ao 4, consideraremos equações relativísticas em um campo magnético constante e uniforme. Neste caso, as soluções exatas obtidas, usando a representação de semimomento, possuem uma arbitrariedade funcional explícita, ou seja, as soluções apresentam uma função que pode ser escolhida arbitrariamente. Através de escolhas apropriadas desta função, obteremos não só as soluções conhecidas atualmente, como novos conjuntos de soluções. Entre os novos conjuntos de soluções encontraremos: soluções estacionárias, estados coerentes generalizados e outras soluções não-estacionárias. Em seguida, no capítulo 5, consideraremos a configuração mais complicada de um campo eletromagnético longitudinal. Aqui, novamente, explicitaremos a arbitrariedade nas soluções e, com base nisto, construiremos vários conjuntos de novas soluções exatas. Finalmente, no capítulo 6, usaremos esta arbitrariedade funcional para encontrar a função de evolução da equação de Klein-Gordon em um campo magnético uniforme.

1.1 Movimento clássico de uma carga em um campo magnético uniforme

Considere um campo magnético constante e uniforme, $H = (0, 0, H)$, direcionado ao longo do eixo x^3. Este campo pode ser relacionado com um potencial eletromagnético na forma

$$A_0 = A_3 = 0,\ A_1 = \frac{1}{2}Hx^2,\ A_2 = -\frac{1}{2}Hx^1,\ H > 0. \tag{1.1}$$

Esta é a chamada forma simétrica do potencial. Uma outra escolha possível, que difere da anterior por uma transformação de gauge, é $A_0 = A_3 = A_1 = 0,\ \ A_2 = -Hx^1$.

As equações de Lorentz para o campo em consideração adquirem a forma[1] ($e = -|e|$ é a carga da partícula e m_0 sua massa de repouso)

$$m_0\ddot{x}^0 = 0,\ m_0\ddot{x}^1 = -\hbar\gamma\dot{x}^2,\ m_0\ddot{x}^2 = \hbar\gamma\dot{x}^1,\ m_0\ddot{x}^3 = 0 \tag{1.2}$$

$$\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu = c^2,\ \gamma = \frac{|e|\,H}{c\hbar} > 0\ ,\dot{x}_\mu = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu,\ g_{00} = 1,\ g_{ij} = -\delta_{ij}. \tag{1.3}$$

A solução geral destas equações pode ser escrita como

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{p_0}{m_0}\tau,\ x^1 = R\cos\kappa + x^1_{(0)},\ x^2 = R\sin\kappa + x^2_{(0)}, \\ x^3 &= -\frac{p_3}{m_0}\left(\tau - \tau_0\right),\ \kappa = \omega_0\tau + \varphi_0,\ \omega_0 = \hbar\gamma/m_0\ , \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde as constantes $p_0,\ p_3,\ R,\ x^1_{(0)},\ x^2_{(0)},\ \varphi_0,\ \tau_0$ são integrais do movimento, as quais estão relacionadas, através da condição de gauge (1.3), por $p_0^2 = c^2m_0^2 + p_3^2 + \hbar^2\gamma^2R^2$. O momento cinético $P_\mu = m_0\dot{x}_\mu$ assume a forma

$$P_0 = p_0,\ P_1 = \hbar\gamma R\sin\kappa,\ P_2 = -\hbar\gamma R\cos\kappa,\ P_3 = p_3\ . \tag{1.5}$$

[1]Estaremos usando a convenção usual na qual índices gregos indicam coordenadas quadridimensionais, e portanto assumem valores de zero a três, enquanto índices latinos vão de um a três, bem como a convenção de soma entre quaisquer índices repetidos.

Das quantidades acima, podemos determinar a seguinte relação:

$$P_1^2 + P_2^2 = \hbar^2\gamma^2 R^2 \,. \tag{1.6}$$

A projeção do momento angular no eixo x^3:

$$L_z = [\mathbf{x} \times \mathbf{p}]_z = \frac{\hbar\gamma}{2}\left(R^2 - R_0^2\right), \; R_0^2 = \left(x^1_{(0)}\right)^2 + \left(x^2_{(0)}\right)^2 \tag{1.7}$$

é uma integral do movimento. Nesta equação, o momento generalizado p_μ se relaciona com o momento cinético P_μ através da igualdade $P_\mu = p_\mu - eA_\mu/c$. Observe que, diferente do momento angular usual $L_z = [\mathbf{x} \times \mathbf{P}]_z$, a quantidade (1.7) é uma constante do movimento ainda que a órbita não esteja centrada na origem.

Segue das equações (1.4)-(1.5) que a trajetória de uma partícula neste campo magnético é uma espiral, enquanto a projeção desta trajetória no plano $x^3 = 0$ é um círculo de raio R com centro no ponto $x^1_{(0)}$, $x^2_{(0)}$, ou seja, $\left(x^1 - x^1_{(0)}\right)^2 + \left(x^2 - x^2_{(0)}\right)^2 = R^2$. A rotação ao longo deste círculo é uniforme, com freqüência angular ω,

$$\omega = c\frac{d\kappa}{dx^0} = c\frac{\dot{\kappa}}{\dot{x}^0} = c^2\frac{m_0\omega_0}{E_{cl}} = \hbar c^2\frac{\gamma}{E_{cl}}, \; \kappa = \omega\frac{x^0}{c} + \varphi_0 \,,$$

onde $E_{cl} = cp_0 = c\sqrt{c^2 m_0^2 + p_3^2 + \hbar^2\gamma^2 R^2}$ é a energia clássica do movimento. O movimento ao longo do eixo x^3 é uniforme, com velocidade β_3/c dada por $\beta_3 = cdx^3/dx^0 = c\dot{x}^3/\dot{x}^0 = -c^2 p_3/E_{cl}$ de onde podemos tirar $|\beta_3| < c^2$.

1.2 As equações de onda relativísticas

Quando Schrödinger escreveu a equação de onda não-relativística, que hoje leva seu nome, também formulou a correspondente equação de onda relativística. Subsequentemente, em 1926, uma equação idêntica foi proposta, independentemente, por Klein, Gordon, Kudar, Donder, Van Dungen e Fock. A equação proposta possuía uma dificuldade de interpretação, proveniente do fato da densidade de probabilidade especificada por ela permitir valores negativos. Por conta desta dificuldade, a equação de Klein-Gordon, como ficou conhecida, caiu em descrédito por quase sete anos, a partir de sua formulação. Apenas em 1934, Pauli e Weisskopf restabeleceram a validade desta equação reinterpretando-a como uma equação de campo, no mesmo sentido das equações de Maxwell para o campo eletromagnético, e efetuando sua quantização.

Em 1928, Dirac descobriu sua equação de onda relativística, enquanto tentava resolver a dificuldade da densidade de probabilidade negativa presente na equação de Klein-Gordon. Por muito tempo, acreditou-se que a equação de Dirac fosse a única equação de onda relativística válida para partículas com massa. Esta crença só foi derrubada após a reinterpretação da equação de Klein-Gordon citada acima. Hoje, ambas as equações possuem seu lugar na teoria relativística. Pois, sabe-se que estas equações descrevem partículas com propriedades distintas. Mais especificamente, enquanto a equação de Klein-Gordon descreve partículas sem spin, a equação de Dirac se ocupa das partículas com spin $\frac{1}{2}$.

1.2.1 A equação de Klein e Gordon

É um fato conhecido que a equação de Schrödinger, para uma partícula com massa m em um potencial $V(\mathbf{r})$,

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - V(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r},t) = 0 , \tag{1.8}$$

só é válida para partículas cuja velocidade seja muito inferior à da luz. Esta equação pode ser obtida da relação não-relativística entre a energia E e o momento $\mathbf{p}$ de uma partícula com massa de repouso $m_0 \neq 0$, i.e., da relação $E = \frac{p^2}{2m_0} + V(r)$. Substituindo nesta relação as quantidades clássicas por operadores, de acordo com a regra

$$E \rightarrow \ c\mathcal{P}^0 = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \ , \ \mathbf{p} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}} = i\hbar\nabla \ , \tag{1.9}$$

e aplicando estes operadores em uma função de onda $\psi(\mathbf{r},t)$, obteremos a equação de Schrödinger na forma (1.8). Esta equação não é invariante por transformações de Lorentz. De fato, a equação de Schrödinger contém uma derivada primeira em relação ao tempo e derivadas de segunda ordem nas coordenadas, enquanto a teoria especial da relatividade requer que as coordenadas espaciais e temporais desempenhem o mesmo papel numa equação.

A forma mais simples de generalizar a equação de onda não-relativística para o caso relativístico, tratando-se da partícula livre, consiste em usar a relação relativística entre momento e energia, $E^2 - c^2\mathbf{p}^2 - m_0^2c^2 = 0$. Se, nesta equação, introduzirmos os operadores definidos em (1.9) e aplicarmos o operador assim obtido à função de onda ψ, obteremos a equação de Klein-Gordon

$$\mathcal{K}\psi\left(\mathbf{r},t\right) = 0,\ \mathcal{K} = c^2\left(\left(\mathcal{P}^0\right)^2 - \mathcal{P}^2 - m_0^2c^2\right)\ , \tag{1.10}$$

a qual é relativisticamente invariante.

A invariância relativística de (1.10) torna-se evidente se introduzirmos os quadrivetores de coordenadas $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ e momentos $p_\mu = (E/c, \mathbf{p})$, bem como o produto escalar invariante $x \cdot p = x^\mu p^\nu g_{\mu\nu}$, onde[2] $p^\nu = g^{\nu\alpha}p_\alpha,\ g_{00} = 1,\ g_{ij} = -\delta_{ij}$ e $g^{\mu\nu}g_{\mu\sigma} = \delta^\nu_{\ \sigma}$. Com este produto escalar, se aplicarmos a um quadrivetor a uma transformação de Lorentz, ou seja, se fizermos $a' = \Lambda a + b$, onde b é um quadrivetor e Λ uma matriz com $\Lambda^\mu_{\ \nu} g_{\mu\rho} \Lambda^\rho_{\ \sigma} = g_{\nu\sigma}$, manteremos invariante a forma quadrática $a^2 = a_\mu a^\mu = a'^2$. Usando quadrivetores, a equação (1.10) assume a forma

$$\left(\mathcal{P}_\mu \mathcal{P}^\mu - m_0^2c^2\right)\psi\left(x\right) = 0\ . \tag{1.11}$$

Ao realizarmos uma transformação de Lorentz $x' = \Lambda x + a$, a função de onda transformada ψ' pode diferir da função original apenas por um fator constante de módulo unitário, i.e., $\psi = \lambda\psi$ com $|\lambda| = 1$. Portanto, a função de onda na equação de Klein-Gordon transforma-se como um escalar. Se a transformação de Lorentz sob ψ for contínua, a constante λ será igual a um. Enquanto, se considerarmos transformações discretas (reflexões espaciais), precisaremos examinar também a possibilidade da função de onda mudar seu sinal ($\lambda = -1$). Uma quantidade que muda seu sinal sob uma inversão espacial é chamada

[2] Com qualquer quadrivetor covariante p_μ podemos formar o quadrivetor contravariante $p^\mu = g^{\mu\nu}p_\nu$ através do tensor métrico $g^{\mu\nu}$, ou de forma análoga $p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu$.

de pseudovetor. As propriedades das funções de onda sob transformações de Lorentz estão intimamente relacionadas com o spin das partículas. Em particular, funções de onda escalares (e pseudoescalares) descrevem partículas de spin zero.

Para tratar o problema da interação quântica entre uma partícula e o campo eletromagnético, podemos utilizar a hamiltoniana clássica

$$H = \left\{c^2 \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + m_0^2 c^4\right\}^{1/2} + eA_0 \ ,$$

onde A e A_0 são, respectivamente, o potencial vetor e escalar. Fazendo $(H - eA_0)^2 - c^2 (\mathbf{p} - \mathbf{A}e/c)^2 + m_0^2 c^4 = 0$, podemos substituir as variáveis clássicas por operadores, fazendo $H = E$ e usando (1.9), e aplicar o resultado sobre uma função de onda. Isto fornece a equação de Klein-Gordon para uma partícula em um campo eletromagnético

$$\left\{\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - eA_0\right)^2 - c^2 \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - m_0^2 c^4\right\} \psi\left(x\right) = 0 \ .$$

Esta equação fornece uma expressão idêntica a (1.11) se realizarmos a substituição

$$\mathcal{P}_\mu = i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu, \ A_\mu = \left(A_0, \mathbf{A}\right), \ \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ . \tag{1.12}$$

Seguindo o procedimento regular da teoria não-relativística, para fornecer uma interpretação física da equação de Klein-Gordon, precisamos definir uma densidade de probabilidade ρ e uma corrente de probabilidade $\mathbf{j}$, as quais devem obedecer a equação de continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0, \ j^\mu = g^{\mu\nu} j_\nu \ , \tag{1.13}$$

onde introduzimos o quadrivetor $j_\mu = (\rho, \mathbf{j})$. Entretanto, sendo a equação de Klein-Gordon de segunda ordem no tempo, podemos ter soluções estacionárias na forma $\psi\left(\mathbf{x}\right) e^{iEt/\hbar}$ com $|E| = \pm E$, acarretando numa densidade de probabilidade, que é proporcional à energia, com valores positivos e negativos. Isto é uma dificuldade para o caso das partículas não livres pois, neste caso, podemos ter transições entre estados de energia positiva e negativa e não podemos limitar nossas soluções a um determinado valor do sinal de E. Para contornar este problema, podemos interpretar ρ como uma densidade de carga. Então, os diferentes sinais de energia corresponderiam a diferentes sinais na carga da partícula. Com isto em mente, e levando em conta (1.11) e (1.12), vemos que as quantidades

$$j^{\mu} = \frac{e}{2m_0c}\left[\psi_1^* \mathcal{P}^{\mu} \psi_2 + \left(\mathcal{P}^{\mu}\psi_1\right)^* \psi_2\right] \tag{1.14}$$

satisfazem a equação de continuidade (1.13), para funções ψ_1 e ψ_2 que obedeçam (1.11). As constantes que multiplicam as densidades em (1.14), foram escolhidas para estas quantidades se tornarem idênticas às expressões usuais na teoria de Schrödinger, no limite não-relativístico. Se fizermos $i\hbar\partial_t \to E$ (1.9) na equação (1.14) e tomarmos $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, teremos $\rho = eE\left(m_0c^2\right)^{-1}\psi^*\psi$, o qual se torna idêntico ao resultado de Schrödinger $\rho = e\psi^*\psi$ para a aproximação não relativística ($v << c,\ E \approx m_0c^2$).

A equação de continuidade (1.13), e o decaimento suficientemente rápido das funções ψ_1 e ψ_2 no infinito, garantem que a quantidade

$$\begin{aligned}
(\psi_1, \psi_2) &= \frac{e}{2m_0c}\int_{\sigma}\left[\psi_1^* \mathcal{P}^{\mu} \psi_2 + \left(\mathcal{P}^{\mu}\psi_1\right)^* \psi_2\right] d\sigma_{\mu} \\
d\sigma_{\mu} &= \left(dx^1dx^2dx^3, dx^0dx^2dx^3, dx^0dx^1dx^3, dx^0dx^1, dx^2\right)\ ,
\end{aligned}$$

não dependa da hipersuperfície σ, em especial, escolhendo σ como o plano $x^0 =$ constante, obteremos o produto escalar independente do tempo

$$(\psi_1, \psi_2) = \frac{ie\hbar}{2m_0c^2}\int\left\{\psi_1^*\frac{\partial\psi_2}{\partial t} - \left(\frac{\partial\psi_1^*}{\partial t}\right)\psi_2\right\} d\mathbf{x}\ . \tag{1.15}$$

Outro conceito extremamente importante com relação às soluções de (1.11) é o de completeza. Dizemos que um conjunto de soluções $\psi_n(x)$, ortogonal com respeito ao produto escalar (1.15), é completo, se qualquer solução $\Psi(x)$ puder ser expandida na série

$$\Psi(x) = \sum_n c_n\psi_n(x)\ ,\ c_n = \frac{(\psi_n, \Psi)}{(\psi_n, \psi_n)}\ , \tag{1.16}$$

onde a somatória deve ser entendida como uma integral para índices que variem continuamente.

1.2.2 A equação de Dirac

Como mencionado na seção anterior, a dificuldade apresentada pelo surgimento de densidades de probabilidade negativas, na equação de Klein-Gordon, provém do fato de ser esta uma equação de segunda ordem no tempo. Para obter uma equação com derivadas temporais de primeira ordem, e por questões de invariância relativística também de primeira ordem nas derivadas espaciais, precisamos linearizar o operador $\mathcal{K}$ em (1.10). A forma mais simples de efetuar esta linearização é partirmos da equação

$$\frac{E}{c} = \left(\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2\right)^{1/2} \ , \tag{1.17}$$

e efetuarmos a substituição (1.9). Entretanto, este procedimento inclui a necessidade de definir o operador $(\nabla^2 + m_0^2 c^2)^{1/2}$. A relação linear mais geral entre os dois lados da igualdade (1.17), usando os operadores (1.9), pode ser obtida fazendo

$$\mathcal{P}_0 = \alpha_i \mathcal{P}_i + \alpha^0 m_0 c \ , \tag{1.18}$$

$$\mathcal{P}_0^{\,2} = \left(\alpha_i \mathcal{P}_i + \alpha^0 m_0 c\right)^2 = \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2 \ , \tag{1.19}$$

onde na última igualdade usamos que este operador deve concordar com $\mathcal{K}$ (1.10). Lembrando que estamos tratando da partícula livre, onde os operadores de momento comutam entre si, para a igualdade em (1.19) ser verdadeira, devemos ter

$$\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \ , \tag{1.20}$$

ou seja, α devem ser números hipercomplexos. Se utilizarmos uma representação matricial para α devemos notar que: fazendo $\mu \neq \nu$ em (1.20) e tomando o determinante de ambos os lados temos $\det \alpha_\mu \det \alpha_\nu = (-1)^n \det \alpha_\nu \det \alpha_\mu$, ou seja, a dimensão n de nossas matrizes deve ser par. A primeira tentativa seria $n = 2$, contudo, sabemos que não existem quatro matrizes 2×2 que anticomutem entre si e, portanto, tendo nossa equação (1.18) quatro matrizes, devemos trabalhar com $n = 4$, i.e, α são matrizes 4×4.

Para colocar a equação de Dirac (1.18) numa forma covariante, precisamos mudar o fato das derivadas espaciais serem multiplicadas por α enquanto a derivada temporal não.

Isto é feito multiplicando toda a equação por α_0, com isto temos $\alpha_0\mathcal{P}_0 = \alpha_0\alpha_i\mathcal{P}_i + \alpha_0\alpha_0 m_0 c$. Ao aplicarmos este operador numa função $\Theta(x)$ teremos

$$(\gamma^\mu \mathcal{P}_\mu - m_0 c)\,\Theta(x) = 0\ , \tag{1.21}$$

onde $\gamma^0 = \alpha^0,\ \gamma^i = \alpha_0\alpha^i,\ \alpha^\mu = g^{\mu\nu}\alpha_\nu$. Nesta equação γ são matrizes 4×4 conhecidas como matrizes de Dirac e Θ um conjunto de quatro funções formando uma matriz coluna. Para verificarmos a invariância de (1.21) devemos analisar o efeito da transfomação de Lorentz $x' = \Lambda x + a,\ \Lambda^\mu{}_\nu g_{\mu\rho}\Lambda^\rho{}_\sigma = g_{\nu\sigma}$. Isto leva a uma transformação na função de onda $\Theta'(x') = S(\Lambda)\,\Theta(x)$, com $S(\Lambda)$ uma matriz 4×4 operando nas componentes de Θ. Usando $\partial_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu\partial'_\nu$, com $\partial'_\nu = \partial/\partial x'^\nu$ temos que (1.21) torna-se

$$i\hbar\Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu\partial'_\nu\left(S^{-1}\Theta'(x')\right) - m_0 c S^{-1}\Theta'(x') = 0\ .$$

Multiplicando esta equação por S pela direita e exigindo que as matrizes γ não se transformem, podemos garantir a invariância de (1.21) fazendo

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu\ . \tag{1.22}$$

Para encontrar S basta analisarmos uma transformação de Lorentz infinitesimal, uma vez que uma transformação finita pode ser obtida por exponenciação. Assim, fazendo $\Lambda = I + \varepsilon\lambda$, com $\lambda^{\mu\nu} = -\lambda^{\nu\mu}$, teremos $S(I+\varepsilon\lambda) = I + \varepsilon T$ e nossa condição sobre S (1.22) toma a forma

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \gamma^\mu + \varepsilon\left(\gamma^\mu T - T\gamma^\mu\right) = \gamma^\mu + \varepsilon\lambda^\mu_\nu\gamma^\nu \Rightarrow \gamma^\mu T - T\gamma^\mu = \lambda^\mu_\nu\gamma^\nu\ .$$

Esta expressão define univocamente T, a menos da soma de uma constante, pois, se houver dois T distintos, sua diferença deverá comutar com todas as matrizes γ e consequentemente será um múltiplo da identidade. **Se adotarmos a normalização** $\det S = 1$**, teremos** $\det(I+\varepsilon T) = 1 + \varepsilon\mathbf{Tr}T = 1$**, i.e.,** $\mathbf{Tr}T = 0$**.** É fácil verificar que a seguinte matriz satisfaz todas estas condições

$$T = \frac{1}{4i}\lambda^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu},\ \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu\right) \Rightarrow S = I + \frac{1}{4i}\varepsilon\lambda^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\ .$$

Pode-se verificar também que $S(\Lambda)\, S(\Lambda') = S(\Lambda\Lambda')$ e $S(I) = I$, ou seja, S é uma representação do grupo de Lorentz, quantidades que se transformam segundo esta representação são chamados biespinores ou spinores de Dirac.

Seguindo um esquema idêntico ao desenvolvido na seção anterior, devemos encontrar uma densidade de corrente que satisfaça à equação de continuidade (1.13). Utilizando a equação de Dirac (1.21) e o fato de Θ_1 e Θ_2 serem soluções desta equação, podemos ver que a seguinte expressão se verifica

$$j^\mu = \bar{\Theta}_1 \gamma^\mu \Theta_2 \Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0 \ , \tag{1.23}$$

onde $\bar{\Theta} = \Theta^+ \gamma^0$ e Θ^+ é a solução do hermitiano conjugado da equação (1.21). Mais uma vez, a expressão (1.23) e o decaimento suficientemente rápido das funções Θ garantem que a quantidade

$$(\Theta_1, \Theta_2) = \int_\sigma \bar{\Theta}_1 \gamma^\mu \Theta_2 \, d\sigma_\mu \ ,$$

não dependa da hipersuperfície σ. Escolhendo σ como o plano $x^0 =$ constante, obteremos o produto escalar independente do tempo

$$(\Theta_1, \Theta_2) = \int \Theta_1^+ \, \Theta_2 \, d\mathbf{x} \ . \tag{1.24}$$

A noção de completeza é a mesma da seção anterior (1.16), com a ortogonalidade entre as soluções Θ_n dada em relação ao produto escalar (1.24).

Capítulo 2

Operadores de criação e aniquilação

Todas as soluções exatas das equações de Klein-Gordon e de Dirac, conhecidas até o momento, em um campo magnético constante e uniforme podem ser escritas de uma única forma, seguindo o desenvolvimento apresentado a seguir. Além disto, este desenvolvimento permite obter novos conjuntos de soluções, com propriedades específicas.

Nosso objetivo é encontrar soluções das equações de Klein-Gordon e de Dirac, as quais escreveremos da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{K}\Psi = 0, \quad \hbar^2\mathcal{K} = \mathcal{P}^2 - m_0^2c^2,\ \mathcal{P}_\mu = i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\,, \\
&\mathcal{D}\boldsymbol{\Theta} = 0\,, \quad \hbar\mathcal{D} = \gamma^\mu\mathcal{P}_\mu - m_0c\,.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

com A_μ dado por (1.1) e as matrizes γ^μ na representação padrão [4].

No campo em consideração, os operadores $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_3$ são integrais do movimento compatíveis entre si, i.e., $[\mathcal{K}, \mathcal{P}_0] = [\mathcal{K}, \mathcal{P}_3] = [\mathcal{D}, \mathcal{P}_0] = [\mathcal{D}, \mathcal{P}_3] = [\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_3] = 0$. Para a equação de Klein-Gordon, podemos ainda acrescentar o operador de momento angular L_z, análogo quântico da expressão (1.7),

$$
L_z = i\hbar\left(x^2\partial_1 - x^1\partial_2\right),\ [L_z, \mathcal{P}_0] = [L_z, \mathcal{P}_3] = [\mathcal{K}, L_z] = 0\,, \tag{2.2}
$$

para formar (junto com $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_3$) um conjunto completo de integrais do movimento. No caso da equação de Dirac, podemos usar o operador J_z,

$$J_z = L_z + \frac{\hbar}{2}\Sigma_3,\ [J_z, \mathcal{P}_0] = [J_z, \mathcal{P}_3] = [\mathcal{D}, J_z] = 0\,, \tag{2.3}$$
$$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix},$$

para formar este conjunto completo.

No que segue, usaremos as coordenadas cartesianas adimensionais $-\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty$, e as coordenadas cilíndricas modificadas $0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi$, ambas definidas por

$$\sqrt{\frac{\gamma}{2}}x^1 = x = \sqrt{\rho}\cos\varphi, \quad \sqrt{\frac{\gamma}{2}}x^2 = y = \sqrt{\rho}\sin\varphi\ , \quad \gamma = \frac{|e|\,H}{c\hbar} > 0\ ,$$
$$dx^1dx^2 = \frac{2}{\gamma}dx\,dy = \frac{1}{\gamma}d\rho\,d\varphi, \quad x + iy = \sqrt{\rho}\exp i\varphi\ , \tag{2.4}$$

Vamos introduzir operadores a_1, a_2, a_1^+, a_2^+ ,

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}\hbar}\left[\mathcal{P}_2 - i\mathcal{P}_1 + \hbar\gamma\left(x^1 + ix^2\right)\right] = \frac{1}{2}\left(x + iy + \partial_x + i\partial_y\right) = \frac{e^{i\varphi}}{2\sqrt{\rho}}\left(\rho + i\partial_\varphi + 2\rho\partial_\rho\right),$$
$$a_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}\hbar}\left[\mathcal{P}_2 + i\mathcal{P}_1 + \hbar\gamma\left(x^1 - ix^2\right)\right] = \frac{1}{2}\left(x - iy - \partial_x + i\partial_y\right) = \frac{e^{-i\varphi}}{2\sqrt{\rho}}\left(\rho + i\partial_\varphi - 2\rho\partial_\rho\right),$$
$$a_1 = -\frac{1}{\sqrt{2\gamma}\hbar}\left(i\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2\right) = \frac{1}{2}\left(x - iy + \partial_x - i\partial_y\right) = \frac{e^{-i\varphi}}{2\sqrt{\rho}}\left(\rho - i\partial_\varphi + 2\rho\partial_\rho\right),$$
$$a_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}\hbar}\left(i\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2\right) = \frac{1}{2}\left(x + iy - \partial_x - i\partial_y\right) = \frac{e^{i\varphi}}{2\sqrt{\rho}}\left(\rho - i\partial_\varphi - 2\rho\partial_\rho\right), \tag{2.5}$$

Com isto, podemos escrever os operadores de energia radial (1.6) e da projeção do momento angular (2.2) como

$$E_r = \mathcal{P}_1^2 + \mathcal{P}_2^2 = \hbar^2\gamma\left(a_1a_1^+ + a_1^+a_1\right) = 2\hbar^2\gamma\mathcal{N} + \hbar^2\gamma\ ,$$
$$L_z = \hbar\left(\mathcal{N} - a_2^+a_2\right)\ , \quad \mathcal{N} = a_1^+a_1\ . \tag{2.6}$$

Enquanto os operadores de Klein-Gordon e Dirac tomam a forma

$$\mathcal{K} = \hbar^{-2}\left(\mathcal{P}_0^2 - \mathcal{P}_3^2\right) - 2\gamma\mathcal{N} - \gamma - m^2, \quad m = \frac{m_0c}{\hbar}\,,$$
$$\mathcal{D} = \hbar^{-1}\left(\gamma^0\mathcal{P}_0 + \gamma^3\mathcal{P}_3\right) - \sqrt{\frac{\gamma}{2}}\left[\left(\gamma^2 - i\gamma^1\right)a_1 + \left(\gamma^2 + i\gamma^1\right)a_1^+\right] - m\,. \tag{2.7}$$

Uma vez que o operador $\mathcal{N}$ comuta com $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_3$, L_z e $\mathcal{K}$, podemos incluí-lo no conjunto de integrais do movimento. Sua generalização para a equação de Dirac é

$$\mathcal{N}_D = \mathcal{N} + \frac{1}{2}\Sigma_3.$$

Devemos notar que as expressões para $\mathcal{K}$ e $\mathcal{D}$ em (2.7) não possuem os operadores a_2, a_2^+, o que nos permite identificá-los como integrais do movimento. Além disto, estes operadores comutam com $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_D$, $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_3$, entretanto, não comutam com L_z nem J_z .

Através das leis de comutação

$$[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\nu] = -i\frac{\hbar e}{c}F_{\mu\nu},\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_v - \partial_\nu A_\mu$$

e da forma explícita dos elementos não-nulos do tensor eletromagnético, $F_{12} = -F_{21} = H$, podemos determinar as leis de comutação dos operadores (2.5),

$$\left[a_k, a_s^+\right] = \delta_{k,s}\,, \quad [a_k, a_s] = \left[a_k^+, a_s^+\right] = 0\,, \quad k, s = 1, 2\,, \tag{2.8}$$

o que nos permite interpretá-los como operadores de criação e aniquilação.

2.1 Representação de semimomento

Uma vez que os operadores de criação e aniquilação (2.5), com índices diferentes comutam (2.8), podemos tentar encontrar uma representação onde eles atuam em variáveis distintas e independentes. Com esta finalidade em mente, vamos realizar uma transformada de Fourier parcial (apenas na variável y) nas funções de onda (2.1)

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iky}\widetilde{\Psi}(x, k)\ dk\ . \tag{2.9}$$

Chamaremos a isto a **representação de semimomento**. Obviamente, as funções Ψ e $\widetilde{\Psi}$ dependem também das variáveis x^0 e x^3, mas esta dependência será omitida para simplificar a notação. Na representação de semimomento a multiplicação e a diferenciação por y tomam a forma

$$y \to i\partial_k, \quad i\partial_y \to -k\ .$$

O que nos permite escrever os operadores de criação e aniquilação (2.5) como

$$
\begin{aligned}
2a_1 &= x + k + \partial_x + \partial_k, \quad 2a_1^+ = x + k - \partial_x - \partial_k \ , \\
2a_2 &= x - k + \partial_x - \partial_k, \quad 2a_2^+ = x - k - \partial_x + \partial_k \ .
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Introduzindo agora as variáveis

$$
\left.\begin{aligned}
\sqrt{2}\xi &= x + k \\
\sqrt{2}\eta &= x - k
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned}
\partial_x &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_\xi + \partial_\eta\right) \\
\partial_k &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_\xi - \partial_\eta\right)
\end{aligned} \ , \tag{2.11}
$$

a representação (2.9) e as variáveis (2.11) permitem escrever

$$
\sqrt{2}a_1 = \xi + \partial_\xi \ , \quad \sqrt{2}a_1^+ = \xi - \partial_\xi \ , \ \sqrt{2}a_2 = \eta + \partial_\eta \ , \quad \sqrt{2}a_2^+ = \eta - \partial_\eta \ , \tag{2.12}
$$

com isto, estes operadores passam a atuar em variáveis distintas e independentes.

Nestas novas variáveis temos

$$
2\mathcal{N} = \xi^2 - \partial_\xi^2 - 1 \ , \tag{2.13}
$$

e os operadores de Klein-Gordon e Dirac assumem a forma

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \hbar^{-2}\left(\mathcal{P}_0^2 - \mathcal{P}_3^2\right) + \gamma\left(\partial_\xi^2 - \xi^2\right) - m^2 \ , \\
\mathcal{D} &= \hbar^{-1}\left(\gamma^0\mathcal{P}_0 + \gamma^3\mathcal{P}_3\right) - \sqrt{\gamma}\left(\gamma^2\xi - i\gamma^1\partial_\xi\right) - m \ .
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

Onde devemos observar que estes operadores não dependem da variável η, o mesmo não ocorre com os operadores L_z e J_z,

$$
2L_z = \xi^2 - \partial_\xi^2 - \eta^2 + \partial_\eta^2 \ . \tag{2.15}
$$

A integral em k, na expressão (2.9), pode ser substituída por uma integral em η,

$$
\Psi\left(x, y\right) = \frac{e^{ixy}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sqrt{2}y\eta}\widetilde{\Psi}\left(\xi, \eta\right) \ d\eta, \quad \xi = \sqrt{2}x - \eta \ . \tag{2.16}
$$

Além disto, uma vez que o jacobiano da transformação (2.11) é igual a um, temos:

$$
\begin{aligned}
(\Psi, \Phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \; \Psi^*(x, y)\, \Phi(x, y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \; \widetilde{\Psi}^*(\xi, \eta)\, \widetilde{\Phi}(\xi, \eta) \; = \left(\widetilde{\Psi}, \widetilde{\Phi}\right).
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Como veremos a seguir, o fato dos operadores (2.14) não dependerem da variável η, ou melhor, comutarem com η e ∂_η, nos permitirá separar explicitamente uma dependência funcional nas soluções (2.16).

Capítulo 3

Estados estacionários

Vamos analisar os estados estacionários de uma partícula carregada no campo magnético em consideração. Trabalhos sobre este assunto podem ser encontrados em [5, 6, 7, 8, 9].

3.1 Forma geral dos estados estacionários

Estados estacionários são autofunções do operador $\mathcal{P}_0$. Trabalharemos com funções que serão também autofunções dos operadores $\mathcal{P}_3$ e $\mathcal{N}$ para o caso escalar e $\mathcal{P}_3$ e $\mathcal{N}_D$ para o caso espinorial. Assim, as funções de onda Ψ correspondentes ao caso escalar possuem as condições

$$\mathcal{P}_0\Psi = \hbar k_0\Psi, \quad \mathcal{P}_3\Psi = \hbar k_3\Psi \ , \ \mathcal{N}\Psi = n\Psi, \ n = 0, 1, 2, \ldots , \tag{3.1}$$

de (2.14) temos que

$$k_0^2 = m^2 + \gamma + k_3^2 + 2\gamma n = m^{*\,2} + k_3^2 + 2\gamma n, \quad m^{*\,2} = m^2 + \gamma \ , \tag{3.2}$$

e a função Ψ tem a forma

$$\Psi_{n,k_3}\left(x^\mu\right) = N \exp\left(-ik_0x^0 - ik_3x^3\right) \Psi_n\left(x, y\right) \ . \tag{3.3}$$

Onde N é um fator de normalização. Na representação de semimomento (2.9) temos $\mathcal{N}\Psi = n\Psi$ e, consequentemente, $\left(\xi^2 - \partial_\xi^2 - 1\right)\widetilde{\Psi}_n(\xi,\eta) = 2n\widetilde{\Psi}_n(\xi,\eta)$, o que implica

$$\widetilde{\Psi}_n(\xi,\eta) = U_n(\xi)\,\Phi(\eta)\,, \quad \xi = \sqrt{2}x - \eta\,, \tag{3.4}$$

onde usamos as equações (3.1) e (2.13). Na expressão acima $U_n(\xi)$ são as funções de Hermite, as quais se relacionam com os polinômios correspondentes, $H_n(\xi)$, através da expressão [15]

$$U_n(x) = \left(2^n n!\sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-x^2/2\right) H_n(x)\ , \tag{3.5}$$

e $\Phi(\eta)$ uma função arbitrárias. As funções Ψ_n de (3.3) obedecem as relações

$$a_1\Psi_n = \sqrt{n}\Psi_{n-1}, \quad a_1^+\Psi_n = \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}\,, \quad \Psi_n(x,y) = \frac{\left(a_1^+\right)^n}{\sqrt{\Gamma(n+1)}}\Psi_0(x,y)\ , \tag{3.6}$$

$$\Psi_0(x,y) = \pi^{-\frac{3}{4}}\exp\left(-x^2+ixy\right)\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\ \exp\left[-\frac{\eta^2}{2} + \sqrt{2}\eta\,(x-iy)\right]\Phi(\eta)\ . \tag{3.7}$$

Além disto, como pode ser visto de (2.17) e da ortogonalidade das funções de Hermite,

$$(\Psi_n, \Psi_{n'}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \Psi_n^*(x,y)\,\Psi_{n'}(x,y) = \delta_{n'n}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\ \Phi^*(\eta)\,\Phi(\eta)\ . \tag{3.8}$$

Para o caso espinorial, as funções de onda de Dirac Θ satisfazem

$$\mathcal{P}_0\mathbf{\Theta} = \hbar k_0\mathbf{\Theta}, \quad \mathcal{P}_3\mathbf{\Theta} = \hbar k_3\mathbf{\Theta}, \quad \mathcal{N}_D\mathbf{\Theta} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\mathbf{\Theta}, \quad n = 0,1,2,\dots\,, \tag{3.9}$$

consequentemente,

$$\mathbf{\Theta}_{n,k_3}(x^\mu) = N\exp\left(-ik_0x^0 - ik_3x^3\right)\mathbf{\Theta}_n(x,y)\ ,$$

onde o biespinor $\mathbf{\Theta}_n$ tem a forma

$$\mathbf{\Theta}_n^T(x,y) = \left(c_1\Psi_{n-1}(x,y),\ ic_2\Psi_n(x,y),\ c_3\Psi_{n-1}(x,y),\ ic_4\Psi_n(x,y)\right)\ . \tag{3.10}$$

As funções Ψ_n são definidas pelas relações (2.16), (3.4) e o biespinor constante C (com elementos c_k) obedece ao seguinte sistema algébrico de equações:

$$AC = 0, \quad A = \gamma^0 k_0 + \gamma^3 k_3 - \sqrt{2\gamma n}\gamma^1 - m\,. \tag{3.11}$$

Para o sistema acima possuir uma solução não trivial devemos ter $\det A = (k_0^2 - k_3^2 - 2\gamma n - m^2)^2 = 0$, o que fornece o espectro de energia

$$k_0^2 = k_3^2 + 2\gamma n + m^2 \ , \tag{3.12}$$

o qual difere de (3.2) apenas pela substituição $m \to m^*$. Sendo $\det A = 0$ uma relação quadrática, temos que o posto da matriz A é igual a dois. Assim, uma solução geral da equação (3.11) tem a forma

$$C = \begin{pmatrix} (k_0 + m)v \\ (\sqrt{2\gamma n}\sigma_1 - k_3\sigma_3)v \end{pmatrix}, \quad C^+C = 2k_0(k_0 + m)v^+v \ , \tag{3.13}$$

onde ν é um espinor arbitrário e σ são as matrizes de Pauli.

Podemos especificar ν selecionando o spin como integral do movimento. Isto fornece um conjunto adicional de equações algébricas, consistentes com (3.11), as quais permitem definir v a menos de um fator de normalização. Estas equações algébricas sempre podem ser escritas na forma

$$(\sigma \mathbf{e})\, v = \zeta v, \quad \zeta = \pm 1,$$

onde $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $\mathbf{e}$ é um versor tridimensional real ($\mathbf{e}^2 = 1$) e ζ é o número quântico de spin, o qual define a orientação do spin no mesmo sentido ($\zeta = 1$), ou no sentido oposto ($\zeta = -1$), do versor $\mathbf{e}$, para maiores detalhes veja [4].

Podemos destacar o caso $n = 0$. Pois, neste caso, precisamos fazer $c_1 = c_3 = 0$ em (3.10), o que corresponde a $v^T = (0,\ c_2)\ , \quad c_2 \neq 0$. Quando isto ocorre, a função de onda de Dirac é uma autofunção do operador Σ_3 com autovalor -1, ou seja,

$$\Sigma_3 \Theta_D = -\Theta_D \ .$$

Isto significa que apenas elétrons com spin direcionado contra o campo magnético podem existir no estado fundamental $n = 0$.

Segue das considerações que as soluções estacionárias das equações de Klein-Gordon e Dirac estão definidas a menos de uma função arbitrária Φ_n (3.4). Dependendo da escolha desta função, obteremos diferentes conjuntos de estados estacionários. Esta função pode ser concretizada, por exemplo, exigindo-se que a função de onda completa seja autofunção de algum operador, o qual representará uma integral do movimento adicional. Esta arbitrariedade corresponde a uma degenerescência infinita nos níveis de energia n.

3.2 Autofunções do operador L_z

Vamos exigir que as funções de onda escalares sejam autofunções do operador L_z, ou J_z no caso espinorial. De acordo com (2.3) e (2.6), isto significa que as funções de onda $\Psi_n(x,y)$ estão sujeitas à condição adicional

$$a_2^+ a_2 \Psi_n(x,y) = s\Psi_n(x,y), \quad s = 0,1,2,\dots \ ,$$
$$L_z = \hbar\,(n-s) = \hbar l, \quad l = n-s, \quad n \geq l > -\infty, \quad J_z = \hbar\left(l - \frac{1}{2}\right) \ . \tag{3.14}$$

O que define a função Φ_n pois, de acordo com (2.12),

$$a_2^+ a_2 \Phi_s(\eta) = s\Phi_s(\eta) \Rightarrow \Phi_s(\eta) = U_s(\eta) \ .$$

Substituindo este resultado em (3.4), a expressão assim obtida em (2.16) e realizando a integral em η encontramos, na representação das coordenadas,

$$\Psi_{n,s}(x,y) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} e^{il\varphi} I_{s,n}(\rho) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{x+iy}{x-iy}\right)^{\frac{n-s}{2}} I_{s,n}(x^2+y^2) \ . \tag{3.15}$$

Onde $I_{s,n}$ são as funções de Laguerre, relacionadas com os polinômios correspondentes $L_n^\alpha(x)$ (veja [15]) por $I_{m,n}(x) = \left(\Gamma(n+1)/\Gamma(m+1)\right)^{1/2} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^\alpha(x)\,, \quad \alpha = m-n$. O resultado (3.15) foi obtido pela primeira vez em [5, 6, 7, 8, 9]. Além de (3.6) e (3.7), as funções (3.15) obedecem também as relações

$$a_2\Psi_{n,s} = \sqrt{s}\Psi_{n,s-1}, \quad a_2^+\Psi_{n,s} = \sqrt{s+1}\Psi_{n,s+1} \ ,$$
$$\Psi_{n,s} = \frac{(a_1^+)^n (a_2^+)^s}{\sqrt{\Gamma(n+1)\Gamma(s+1)}}\Psi_{0,0} \ , \quad \Psi_{0,0}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right] = \frac{e^{-\frac{\rho}{2}}}{\sqrt{\pi}} \ . \tag{3.16}$$

Nos capítulos seguintes, encontraremos novos conjuntos de soluções, impondo condições complementares diferentes de (3.14). Isto resultará em diferentes formas para a função Φ_n.

3.3 Interpretação da degenerescência na energia

Como mencionado anteriormente, a arbitrariedade presente nas soluções (3.4) está relacionada a uma degenerescência infinita nos níveis de energia. Vamos verificar o que esta degenerescência representa, fisicamente, no resultado (3.15).

Usando os operadores (2.5) podemos escrever

$$\mathcal{P}_1^2 + \mathcal{P}_2^2 = \gamma\hbar^2 \left[a_1^+ a_1 + a_1 a_1^+\right] = 2\gamma\hbar^2 \left[\mathcal{N} + \frac{1}{2}\right] \, .$$

Sendo nossa solução (3.15) autofunção do operador $\mathcal{N}$, aplicando o operador acima nesta solução e usando a relação clássica (1.6) temos

$$R^2 = \frac{2}{\gamma}\left(n + \frac{1}{2}\right) \, . \tag{3.17}$$

Se o centro do círculo, que representa a trajetória da partícula (estamos supondo $\mathcal{P}_3\Psi = 0$), está no eixo x^1, a uma distância a da origem, o quadrado médio do raio será

$$\overline{r_{cl}^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \, \left(R^2 + a^2 - 2aR\cos\varphi\right) = R^2 + a^2 \, . \tag{3.18}$$

Por outro lado, de acordo com a teoria quântica, o quadrado médio do raio pode ser calculado por

$$\begin{aligned}\overline{r_{qu}^2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty r^2 r\, dr\, \Psi_{n,s}^+ \Psi_{n,s} \\ &= \frac{2}{\gamma}\int_0^\infty \rho\, d\rho\, I_{n-1,s}^2(\rho) = \frac{2}{\gamma}\left(n + \frac{1}{2} + s\right) \, .\end{aligned} \tag{3.19}$$

Comparando as fórmulas (3.18) e (3.19) e usando (3.17) temos

$$a = \sqrt{\frac{2}{\gamma}s}$$

ou seja, o número quântico s, autovalor do operador $a_2^+ a_2$, caracteriza a distância entre o centro da trajetória e a origem do sistema de coordenadas. Como este valor não influencia na energia, na verdade não passa de uma escolha arbitrária, estas soluções possuem uma degenerescência infinita no número quântico n.

3.4 Estados coerentes

Como os operadores a_2^+, a_2 são integrais do movimento, podemos construir estados estacionários que sejam autofunções de uma combinação linear destes operadores,

$$A_2^{\alpha,\beta} = \alpha a_2 + \beta a_2^+ \ . \tag{3.20}$$

onde α e β são números complexos arbitrários. Devemos tratar, separadamente, três casos:

- $|\alpha|^2 < |\beta|^2$, neste caso, não existe nenhum autovetor normalizado do operador (3.20). Não iremos nos ocupar deste caso.

- $|\alpha|^2 = |\beta|^2$, neste caso, podemos tratar $A_2^{\alpha,\beta}$ como um operador hermitiano fazendo

$$A_2^{\mu} = \mu a_2 + \mu^* a_2^+, \quad A_2^{+\mu} = A_2^{\mu}, \quad \mu \neq 0 \ , \tag{3.21}$$

  com μ um número complexo arbitrário.

- $|\alpha|^2 > |\beta|^2$, neste caso, podemos, sem perda de generalidade, assumir que

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \Longrightarrow \left[A_2^{\alpha,\beta},\ A_2^{+\alpha,\beta}\right] = 1 \ , \tag{3.22}$$

  onde temos que $A_2^{+\ \alpha,\beta}$e $A_2^{\alpha,\beta}$ comportam-se como operadores de criação e aniquilação, relacionados com a_2^+ e a_2 pela expressão

$$a_2 = \alpha^* A_2^{\alpha,\beta} - \beta A_2^{+\ \alpha,\beta}, \quad a_2^+ = \alpha A_2^{+\ \alpha,\beta} - \beta^* A_2^{\alpha,\beta} . \tag{3.23}$$

Inicialmente, vamos procurar por autovetores do operador (3.21), ou seja, $A_2^{\mu}\Psi_{n,z}^{\mu}(x,y) = z\Psi_{n,z}^{\mu}(x,y), \quad z = z^*$, ou na representação de semimomento,

$$A_2^{\mu}\Phi_z^{\mu}(\eta) = z\Phi_z^{\mu}(\eta) \ .$$

Encontrar as funções Φ acima representa resolver a equação diferencial (2.12), o que fornece

$$\Phi_z^{\mu}(\eta) = \left[\frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\,|\mu|\,(\mu-\mu^*)}\right]^{\frac{1}{2}} \exp Q_1,$$

$$4(\mu-\mu^*)\,Q_1 = -2(\mu+\mu^*)\,\eta^2 + 4\sqrt{2}z\eta - z^2(\mu+\mu^*)\,|\mu|^{-2} \ . \tag{3.24}$$

Estas soluções respeitam as seguintes relações de ortogonalidade e completeza (para maiores detalhes veja o Apêndice A)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{z'}^{*\,\mu}(\eta)\Phi_z^{\mu}(\eta)\; d\eta = \delta(z-z')\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_z^{*\,\mu}(\eta')\Phi_z^{\mu}(\eta)\; dz = \delta(\eta-\eta')\,. \tag{3.25}$$

Para funções com μ diferentes podemos calcular o chamado *overlapping* das soluções

$$\begin{aligned}
R^{\mu',\mu}\left(z',z\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{z'}^{*\,\mu'}(\eta)\Phi_z^{*\,\mu}(\eta)\; d\eta = N_1 \exp\left[\frac{Q_2}{4\left(\mu'\mu^* - \mu\mu'^*\right)}\right]\,, \\
N_1^2 &= \frac{\mu'^*\mu}{2\pi^2\left|\mu'\right|\left|\mu\right|\left(\mu\mu'^* - \mu'\mu^*\right)}\,, \\
Q_2 &= \left(z\sqrt{\frac{\mu'}{\mu}} - z'\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}\right)^2 + \left(z\sqrt{\frac{\mu'^*}{\mu^*}} - z'\sqrt{\frac{\mu^*}{\mu'^*}}\right)^2\,,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

com o qual podemos definir a decomposição mútua

$$\Phi_z^{\mu}\left(\eta\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{z'}^{\mu'}\left(\eta\right) R^{\mu',\mu}\left(z',z\right)\; dz'\,. \tag{3.27}$$

A representação em coordenadas (2.16) destas soluções tem a forma

$$\begin{aligned}
\Psi_{n,z}^{\mu}\left(x,y\right) &= \left(\sqrt{2}\pi\left|\mu\right|\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^*}{\mu}\right)^{\frac{n}{2}} U_n\left(p_1\right)\exp iQ_3\,, \\
4\left|\mu\right|^2 Q_3 &= \left[i\left(\mu^*-\mu\right)x + \left(\mu+\mu^*\right)y\right]\left[\left(\mu+\mu^*\right)x + i\left(\mu-\mu^*\right)y - 2z\right]\,, \\
\sqrt{2}\left|\mu\right| p_1 &= \left(\mu+\mu^*\right)x + i\left(\mu-\mu^*\right)y - z\,,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

e seu produto escalar

$$\left(\Psi_{n',z'}^{\mu}, \Psi_{n,z}^{\mu}\right) = \delta_{n,n'}\delta(z-z')\,.$$

A relação (3.27) resulta na seguinte decomposição na representação das coordenadas

$$\Psi_{n,z}^{\mu}\left(x,y\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{n,z'}^{\mu'}\left(x,y\right) R^{\mu',\mu}\left(z',z\right)\; dz'\,. \tag{3.29}$$

Estas soluções são bem conhecidas para valores de μ puramente real ou puramente imaginário [4].

Vamos agora considerar autofunções do operador (3.22), i.e., $A_2^{\alpha,\beta}\Psi_{n,z}^{\alpha,\beta}(x,y) = z\Psi_{n,z}^{\alpha,\beta}(x,y)$ onde z é um número complexo. **Neste caso, a lei de comutação deste operador**

$$\left[A_2^{\alpha,\beta}, A_2^{+\,\alpha,\beta}\right] = 1$$

permite tratá-lo com um operador de aniquilação e consequentemente suas autofunções serão estados coerentes estacionários. Estes estados são numerados por z e pelos parâmetros complexos α e β, que estão relacionados pela condição (3.22). Na representação de semimomento nossa equação de autovalores torna-se

$$A_2^{\alpha,\beta}\Phi_z^{\alpha,\beta}(\eta) = z\Phi_z^{\alpha,\beta}(\eta) \ . \tag{3.30}$$

Como mostrado no Apêndice A, estas soluções formam um conjunto completo para todo α e β fixos. Contudo, soluções em cada conjunto não são ortogonais, mas, podem ser usadas para construir um conjunto ortogonal de soluções.

Como os operadores $A_2^{+\,\alpha,\beta}$ e $A_2^{\alpha,\beta}$ são integrais do movimento, para funções escalares e espinoriais, a ação destes operadores em uma solução fornece novamente uma solução. Por exemplo, aplicando o operador

$$(\Gamma(1+s))^{-1/2}\left(A_2^{+\,\alpha,\beta} - z^*\right)^s, \quad s = 0,1,2,\dots \ ,$$

em soluções normalizadas da equação (3.30), obteremos novas soluções normalizadas, rotuladas pelo índice s. Estas novas soluções são ortogonais com respeito a s

$$\Phi_{s,z}^{\alpha,\beta}(\eta) = \frac{\left(A_2^{+\,\alpha,\beta} - z^*\right)^s}{\sqrt{\Gamma(1+s)}}\Phi_z^{\alpha,\beta}(\eta)\,, \quad \Phi_{0,z}^{\alpha,\beta}(\eta) = \Phi_z^{\alpha,\beta}(\eta) \ ,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_{s',z}^{*\,\alpha,\beta}(\eta)\,\Phi_{s,z}^{\alpha,\beta}(\eta)\ d\eta = \delta_{s,s'}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\Phi_z^{\alpha,\beta}(\eta)\right|^2\ d\eta \ . \tag{3.31}$$

Estas funções serão chamadas estados coerentes generalizados. É possível fornecer uma forma explícita destes estados

$$\Phi_{s,z}^{\alpha,\beta}\left(\eta\right)=\left[\frac{\alpha}{\left|\alpha\right|\left(\alpha-\beta\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha^{*}-\beta^{*}}{\alpha-\beta}\right)^{\frac{s}{2}}e^{Q_{4}}U_{s}\left(p_{2}\right),$$
$$4\left|\alpha-\beta\right|^{2}Q_{4}=2\left(\alpha\beta^{*}-\alpha^{*}\beta\right)\eta^{2}+2\sqrt{2}\eta\left[z\left(\alpha^{*}-\beta^{*}\right)-z^{*}\left(\alpha-\beta\right)\right]$$
$$+z^{*\,2}\left(\alpha-\beta\right)^{2}-z^{2}\left(\alpha^{*}-\beta^{*}\right)^{2},$$
$$2\left|\alpha-\beta\right|p_{2}=2\eta-\sqrt{2}z\left(\alpha^{*}-\beta^{*}\right)-\sqrt{2}z^{*}\left(\alpha-\beta\right)\ . \tag{3.32}$$

A funções (3.32) formam um conjunto completo (veja Apêndice A) para um z fixo

$$\sum_{s=0}^{\infty}\Phi_{s,z}^{*\,\alpha,\beta}(\eta')\Phi_{s,z}^{\alpha,\beta}(\eta)=\delta(\eta'-\eta)\ , \tag{3.33}$$

e para um s fixo

$$\int\frac{d^{2}z}{\pi}\Phi_{s,z}^{*\,\alpha,\beta}(\eta')\Phi_{s,z}^{\alpha,\beta}(\eta)=\delta(\eta-\eta'),\quad d^{2}z=d\,\mathrm{Re}\,z\;d\,\mathrm{Im}\,z\ . \tag{3.34}$$

O *overlapping*

$$R_{s',s}^{\alpha',\beta';\alpha,\beta}(z',z)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{s',z'}^{*\,\alpha',\beta'}(\eta)\Phi_{s,z}^{\alpha,\beta}(\eta)\;d\eta\ , \tag{3.35}$$

permite a decomposição mútua

$$\Phi_{s,z}^{\alpha,\beta}(\eta)=\sum_{s'=0}^{\infty}R_{s',s}^{\alpha',\beta';\alpha,\beta}(z',z)\Phi_{s',z'}^{\alpha',\beta'}(\eta),\ \Phi_{s,z}^{\alpha,\beta}(\eta)=\int d^{2}z'\ R_{s',s}^{\alpha',\beta';\alpha,\beta}(z',z)\Phi_{s',z'}^{\alpha',\beta'}(\eta)\ . \tag{3.36}$$

O *overlapping* (3.35) possui uma forma extremamente complicada, através de uma soma finita das funções de Hermite. Entretanto, em alguns casos, esta soma pode ser simplificada. Por exemplo, se $\alpha'=\alpha$ e $\beta'=\beta$, o *overlapping* não dependerá de α nem β e terá a forma

$$R_{s',s}^{\alpha,\beta;\alpha,\beta}(z',z)=R_{s',s}(z',z)$$
$$=\left(\frac{z-z'}{z^{*}-z'^{*}}\right)^{\frac{s'-s}{2}}\exp\left[\frac{1}{2}\left(zz'^{\,*}-z^{*}z'\right)\right]I_{s',s}\left(\left|z-z'\right|^{2}\right). \tag{3.37}$$

Para $s = s' = 0$ temos

$$R_{0,0}^{\alpha',\beta';\alpha,\beta}(z',z) = \sqrt{\frac{\alpha\alpha'^*}{|\alpha\alpha'|}}\,(\alpha\alpha'^* - \beta\beta'^*)^{-\frac{1}{2}}\exp Q_5\,,$$

$$2Q_5 = \frac{z^2(\alpha'^*\beta^* - \alpha^*\beta'^*) + (z'^*)^2(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + 2zz'^*}{\alpha\alpha'^* - \beta\beta'^*} - z'z^* - zz'^* - |z - z'^*|^2\,. \quad (3.38)$$

A função $\Psi_{n,s,z}^{\alpha,\beta}(x,y)$ tem uma forma bastante complicada no caso geral. Contudo, podemos efetuar algumas simplificações para alguns casos particulares, e.g.,

$$\Psi_{n,s,z}^{1,0}(x,y) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x+iy-z}{x-iy-z^*}\right)^{\frac{n-s}{2}} e^M I_{s,n}\left(|x+iy-z|^2\right)\,,$$

$$M = z(x-iy) - z^*(x+iy)\,. \quad (3.39)$$

Para $z = 0$ obteremos novamente o conjunto (3.15).

Para $s = 0$, temos uma forma compacta para o conjunto de estados coerentes estacionários

$$\Psi_{n,0,z}^{\alpha,\beta}(x,y) = \Psi_{n,z}^{\alpha,\beta}(x,y) = (-1)^n\frac{\pi^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{|\alpha|}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{n}{2}} U_n\left(\frac{p_3}{\sqrt{2\alpha\beta}}\right)\exp Q_6\,,$$

$$p_3 = z - \alpha(x+iy) - \beta(x-iy)\,, \quad (3.40)$$

$$4\alpha\beta Q_6 = (1+2|\beta|^2)z^2 - 2\alpha\beta|z|^2 + (z+p_3)\left[\beta(x-iy) - \alpha(x+iy)\right]\,.$$

Uma simplificação adicional pode ser obtida fazendo $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, o que fornece

$$\Psi_{n,z}^{1,0}(x,y) = \Psi_{n,z}(x,y) = \varphi_{n,z}(x,y)\exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right)\,,$$

$$\varphi_{n,z}(x,y) = \frac{(x+iy-z)^n}{\sqrt{\pi\Gamma(n+1)}}\exp\left[z(x-iy) - \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right]\,. \quad (3.41)$$

Estes estados já haviam sido obtidos anteriormente [10].

Para α e β arbitrários, as funções $\Psi_{n,s,z}^{\alpha,\beta}(x,y)$ obedecem, além de (3.6), às seguintes relações

$$A_2^{\alpha,\beta}\Psi_{n,s,z}^{\alpha,\beta} = z\Psi_{n,s,z}^{\alpha,\beta} + \sqrt{s}\Psi_{n,s-1,z}^{\alpha,\beta}\,,\quad A_2^{+\,\alpha,\beta}\Psi_{n,s,z}^{\alpha,\beta} = z^*\Psi_{n,s,z}^{\alpha,\beta} + \sqrt{s+1}\Psi_{n,s+1,z}^{\alpha,\beta}\,. \quad (3.42)$$

Como a função $\varphi_{n,z}$ (3.41) obedece a igualdade

$$a_2^+\varphi_{n,z} = \frac{\partial}{\partial z}\varphi_{n,z}\,,$$

podemos construir um novo conjunto de estados estacionários aplicando sucessivas diferenciações,

$$
\begin{aligned}
\bar{\Psi}_{n,s,z}(x,y) &= \frac{\partial^s}{\partial z^s}\varphi_{n,z} \Rightarrow \\
\bar{\Psi}_{n,s,z}(x,y) &= \frac{(-1)^n N}{\sqrt{\pi}} \exp\left[i(n-s)\varphi + \frac{\rho - q}{2}\right]\left(\frac{q}{\rho}\right)^{\frac{n-s}{2}} I_{s,n}(q) \\
&= \frac{(-1)^n N}{\sqrt{\pi}} \exp\left[\frac{z}{2}(x+iy)\right]\left(\frac{x+iy-z}{x-iy}\right)^{\frac{n-s}{2}} I_{s,n}(q)\ , \\
q &= \rho - z\sqrt{\rho}e^{-i\varphi} = (x-iy)(x+iy-z)\ .
\end{aligned} \tag{3.43}
$$

Para $N=1$ o conjunto acima obedece, além de (3.6), as relações

$$
a_2\bar{\Psi}_{n,s,z} = z\bar{\Psi}_{n,s,z} + \sqrt{s}\bar{\Psi}_{n,s-1,z}\ ,\quad a_2^{+}\bar{\Psi}_{n,s,z} = \frac{\partial}{\partial z}\bar{\Psi}_{n,s,z} = \sqrt{s+1}\bar{\Psi}_{n,s+1,z}\ . \tag{3.44}
$$

O conjunto (3.15) é um caso particular de (3.43), correspondendo a $z=0$. As soluções (3.43) não são ortogonais,

$$
\begin{aligned}
&\left(\bar{\Psi}_{n',s',z'}, \bar{\Psi}_{n,s,z}\right) = N'^{*} N \delta_{n,n'} \mathcal{J}_{s,s'}(z,z')\ , \\
&\mathcal{J}_{s,s'}\left(z,z'\right) = \sqrt{\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s'+1)}} z^{s'-s} e^{zz'^{*}} L_s^{s'-s}(-zz'^{*}), \quad s \le s'\ , \\
&\mathcal{J}_{s,s'}\left(z,z'\right) = \sqrt{\frac{\Gamma(s'+1)}{\Gamma(s+1)}} (z'^{*})^{s-s'} e^{zz'^{*}} L_{s'}^{s-s'}(-zz'^{*}), \quad s' \le s\ ,
\end{aligned} \tag{3.45}
$$

onde $L_a^b\left(x\right)$ são polinônios de Laguerre. As soluções (3.43) são normalizadas para a unidade quando

$$
N = N_s(z) = \exp\left(-|z|^2/2\right)\left[L_s\left(-|z|^2\right)\right]^{-1/2}\ .
$$

Para $N=1$ temos a seguinte decomposição mútua:

$$
\begin{aligned}
\bar{\Psi}_{n,s+k,z'}(x,y) &= \sqrt{\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(s+k+1)}} \int \frac{d^2z}{\pi} z^{*s} e^{\left(z'z^{*}-|z|^2\right)} \bar{\Psi}_{n,k,z}(x,y), \\
\bar{\Psi}_{n,s,z'}(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(k+s+1)}{\Gamma(s+1)}} \frac{(z'-z)^k}{k!} \bar{\Psi}_{n,s+k,z}(x,y)\,.
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

Isto significa que o conjunto (3.43) é completo, pois o conjunto (3.15) é completo.

Outros conjuntos de soluções estacionárias podem ser obtidos, selecionando diferentes formas para a função $\Phi\left(\eta\right)$.

Capítulo 4

Estados não-estacionários

Um dos mais interessantes exemplos de estados não-estacionários são os estados coerentes. Vamos discutir estes estados para partículas, com e sem spin, movendo-se num campo magnético constante e uniforme. Estes estados foram apresentados pela primeira vez em [11, 12, 13, 14], veja também [4]. Além dos resultados já conhecidos, vamos apresentar aqui novas famílias de soluções não-estacionárias, as quais incluem os estados coerentes como um caso particular.

4.1 Forma geral dos estados não-estacionários

Neste capítulo faremos uso extensivo das chamadas variáveis de cone de luz (u^0, u^3) [4],

$$u^0 = x^0 - x^3,\ u^3 = x^0 + x^3 \ .$$

Nestas variáveis, os correspondentes operadores de momento tornam-se

$$\widetilde{\mathcal{P}}_0 = i\hbar\tilde{\partial}_0 = \frac{1}{2}\left(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_3\right), \quad \widetilde{\mathcal{P}}_3 = i\hbar\tilde{\partial}_3 = \frac{1}{2}\left(\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_3\right) \ ,$$

com $\tilde{\partial}_0 = \partial/\partial u^0, \quad \tilde{\partial}_3 = \partial/\partial u^3$, e a equação de Klein-Gordon toma a forma

$$\mathcal{K} = 4\hbar^{-2}\widetilde{\mathcal{P}}_3\widetilde{\mathcal{P}}_0 - 2\gamma\mathcal{N} - m^{*\,2} \ , \tag{4.1}$$

enquanto a equação de Dirac

$$4\hbar^{-2}\widetilde{\mathcal{P}}_3\widetilde{\mathcal{P}}_0\Theta_{(-)} = \left(2\gamma\mathcal{N}_D + m^{*2}\right)\Theta_{(-)}\ , \quad 2\widetilde{\mathcal{P}}_3\Theta_{(+)} = \left[(\alpha\mathcal{P}_\perp) + \hbar\rho_3 m\right]\Theta_{(-)}\ ,$$
$$\mathcal{P}_\perp = -\left(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, 0\right)\ , \quad \mathbf{\Theta} = \Theta_{(+)} + \Theta_{(-)}\ , \quad \Theta_{(\pm)} = p_\pm \mathbf{\Theta}, \quad 2p_\pm = 1 \pm \alpha_3\ . \tag{4.2}$$

Onde Θ é um biespinor de Dirac, α e β são matrizes de Dirac [4] e $p_\pm$ possui a propriedade

$$p_+\Theta_{(-)} = 0,\ p_-\Theta_{(+)} = 0\ ,$$

o que nos permite tratá-los como operadores de projeção.

Para campos magnéticos constantes e uniformes, os operadores $\widetilde{\mathcal{P}}_3$ e $\widetilde{\mathcal{P}}_0$ são integrais do movimento. Assim, consideraremos soluções que sejam autofunções do operador $\widetilde{\mathcal{P}}_3$, ou seja,

$$\widetilde{\mathcal{P}}_3\Psi = \hbar\frac{\lambda}{2}\Psi\ . \tag{4.3}$$

Procuraremos por funções escalares,

$$\Psi(x^\mu) = N\exp\left(-i\frac{\lambda}{2}u^3 - i\frac{m^{*\,2}}{2\lambda}u^0\right)\psi(u^0, x, y)\ , \tag{4.4}$$

soluções da equação de Klein-Gordon e que obedecem a relação (4.3). Como estamos procurando por soluções não-estacionárias, a função ψ acima passa a depender explicitamente de u^0. Substituindo a função (4.4) em (4.1), obteremos que a função ψ deve obedecer uma equação de primeira ordem, a qual podemos tratar como uma equação de Schrödinger,

$$\bar{\mathcal{K}}\Psi(x^\mu) = 0,\ \bar{\mathcal{K}} = i\tilde{\partial}_0 - \omega a_1^+ a_1 - \frac{m^{*\,2}}{2\lambda},\ \omega = \frac{\gamma}{\lambda} \tag{4.5}$$

ou, mais explicitamente,

$$i\tilde{\partial}_0\psi\left(u^0, x, y\right) = \omega a_1^+ a_1\psi\left(u^0, x, y\right)\quad . \tag{4.6}$$

Vamos procurar por soluções da equação de Dirac (4.2) na forma,

$$\Theta_{(-)}(x^\mu) = N\exp\left(-i\frac{\lambda}{2}u^3 - i\frac{m^{*\,2}}{2\lambda}u^0\right)W\left(1-\alpha_3\right)C\psi(u^0, x, y)\ , \tag{4.7}$$

onde C é um biespinor constante, $\psi(u^0,x,y)$ uma função escalar e W uma matriz unitária dada por

$$W=\cos\kappa-i\Sigma_3\sin\kappa,\quad 2\kappa=\omega u^0+\varphi_0,\quad W^+W=I\ , \tag{4.8}$$

sendo φ_0 uma fase constante. A função $\psi(u^0,x,y)$ obedece a equação (4.6). Encontrada a função $\Theta_{(-)}$ podemos encontrar a projeção $\Theta_{(+)}$ de (4.2), isto é,

$$\Theta_{(+)}=(\hbar\lambda)^{-1}\left[(\alpha\mathcal{P}_\perp)+\hbar m\rho_3\right]\Theta_{(-)}\ .$$

Com as relações acima, notamos que tanto no caso escalar, quanto no espinorial, precisamos resolver uma única equação (4.6).

Na representação de semimomento, a função transformada $\psi(u^0,\xi,\eta)$ obedece a mesma relação (4.6), com o operador $\mathcal{N}=a_1^+a_1$ sendo dado por (2.13) e a relação entre as funções $\psi(u^0,x,y)$ e $\psi(u^0,\xi,\eta)$ dada por (2.16). Vamos introduzir os operadores

$$A_1^{f,g}=fa_1+ga_1^+,\quad A_1^{+\,f,g}=f^*a_1^++g^*a_1\,, \tag{4.9}$$

onde as funções complexas f e g podem depender de u^0. Para serem integrais do movimento, os operadores acima devem comutar com o operador $\bar{\mathcal{K}}$ (4.5). Levando em conta as comutações $\left[a_1^+a_1,a_1\right]=-a_1$, $\left[a_1^+a_1,a_1^+\right]=a_1^+$, temos as seguintes equações para os coeficientes f e g:

$$i\dot{f}+\omega f=0\,,\quad i\dot{g}-\omega g=0\ , \tag{4.10}$$

onde o ponto indica a derivação por u^0. Desta equação temos

$$f=f_0\exp\left(i\omega u^0\right)\ ,\quad g=g_0\exp\left(-i\omega u^0\right)\ , \tag{4.11}$$

com f_0 e g_0 constantes complexas. Assim, como no caso do operador (3.20), no que segue analisaremos apenas dois casos distintos. No primeiro caso, vamos considerar $|f|^2=|g|^2$ ou, equivalentemente, $|f_0|^2=|g_0|^2$, isto nos leva ao operador

$$A_1^\nu=\nu a_1+\nu^*a_1^+,\quad \nu=\nu_0e^{i\omega u^0},\quad \nu_0=\mathrm{const}\,. \tag{4.12}$$

No segundo caso, temos $|f|^2>|g|^2$ e podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$|f|^2-|g|^2=|f_0|^2-|g_0|^2=1\ . \tag{4.13}$$

Em ambos os casos, os operadores (4.9) se comportam como operadores de criação e aniquilação.

Podemos agora incluir os operadores (4.12) e (3.21) em um conjunto completo de integrais do movimento, assim,

$$A_1^\nu \psi_{z_1,z_2}^{\nu,\mu} = z_1 \psi_{z_1,z_2}^{\nu,\mu}, \quad A_2^\mu \psi_{z_1,z_2}^{\nu,\mu} = z_2 \psi_{z_1,z_2}^{\nu,\mu}, \quad z_k^* = z_k, \quad k = 1, 2\,. \tag{4.14}$$

Na representação de semimomento temos

$$\widetilde{\psi}\left(u^0, \xi, \eta\right) = \Phi_{z_1}^\nu\left(\xi\right) \Phi_{z_2}^\mu\left(\eta\right) \tag{4.15}$$

e, como analisado anteriormente, a condição $A_2^\mu \psi_{z_1,z_2}^{\nu,\mu} = z_2 \psi_{z_1,z_2}^{\nu,\mu}$ leva a $A_2^\mu \Phi_{z_2}^\mu\left(\eta\right) = z_2 \Phi_{z_2}^\mu\left(\eta\right)$, e temos como soluções as funções (3.24). Da mesma forma, $A_1^\nu \psi_{z_1,z_2}^{\nu,\mu} = z_1 \psi_{z_1,z_2}^{\nu,\mu}$ fornece $A_1^\nu \Phi_{z_1}^\nu\left(\xi\right) = z_1 \Phi_{z_1}^\nu\left(\xi\right)$ e podemos encontrar estas funções utilizando a forma explícita dos operadores a_1 e a_1^+ em (2.12). Com isto, podemos resolver a integral (2.16) e determinar a representação em coordenadas das soluções procuradas, o que fornece

$$\begin{aligned}
\psi_{z_1,z_2}^{\nu,\mu}(u^0, x, y) &= \left[\frac{\mu\nu}{2\pi^2|\mu||\nu|(\mu\nu - \mu^*\nu^*)}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{Q_6}{4\left(\mu^*\nu^* - \mu\nu\right)}\right]\,, \\
Q_6 &= 2(\mu+\mu^*)(\nu+\nu^*)x^2 + 2(\mu-\mu^*)(\nu-\nu^*)y^2 + 4i(\mu\nu^* - \mu^*\nu)xy \\
&\quad - 4x\left[z_1(\mu+\mu^*) + z_2(\nu+\nu^*)\right] - 4iy\left[z_1(\mu-\mu^*) - z_2(\nu-\nu^*)\right] \\
&\quad + \left(z_1\sqrt{\frac{\mu^*}{\nu}} + z_2\sqrt{\frac{\nu}{\mu^*}}\right)^2 + \left(z_1\sqrt{\frac{\mu}{\nu^*}} + z_2\sqrt{\frac{\nu^*}{\mu}}\right)^2\,.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Estas soluções são ortogonais para qualquer valor fixo de u^0, i.e.,

$$\left(\psi_{z_1',z_2'}^{\nu,\mu}, \psi_{z_1,z_2}^{\nu,\mu}\right) = \delta\left(z_1 - z_1'\right)\delta\left(z_2 - z_2'\right)\,,$$

e obedecem a relação de completeza

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2\; \psi_{z_1,z_2}^{*\,\nu,\mu}(u^0, x', y')\psi_{z_1,z_2}^{\nu,\mu}(u^0, x, y) = \delta\left(x - x'\right)\delta\left(y - y'\right)\,. \tag{4.17}$$

Vamos considerar agora estados coerentes generalizados, os quais podem ser construídos, na representação de semimomento, de forma análoga a (3.31). Estaremos procurando autofunções do operador (4.9), supondo que as relações (4.10), (4.11), (4.13), e (3.22) sejam satisfeitas, com isto,

$$\widetilde{\psi}^{f,g;\alpha,\beta}_{n,s;z_1,z_2}(u^0,\xi,\eta) = \Phi^{f,g}_{n,z_1}(\xi)\,\Phi^{\alpha,\beta}_{s,z_2}(\eta) \quad , \tag{4.18}$$

onde as funções $\Phi^{a,b}_{n,z}(x)$ estão definidas em (3.32). Atuando nas soluções acima com os operadores $\left(A_1^{+\,f,g} - z_1^*\right)$ e $\left(A_2^{+\,\alpha,\beta} - z_2^*\right)$ o resultado obtido continua sendo uma solução. Isto nos permite construir as funções

$$\begin{aligned}
&\psi^{f,g;\alpha,\beta}_{n,s;z_1,z_2}(u^0,x,y) = \frac{\left(A_1^{+\,f,g} - z_1^*\right)^n \left(A_2^{+\,\alpha,\beta} - z_2^*\right)^s}{\sqrt{\Gamma(n+1)\Gamma(s+1)}}\psi^{f,g;\alpha,\beta}_{z_1,z_2}(u^0,x,y),\\
&\psi^{f,g;\alpha,\beta}_{z_1,z_2} = \psi^{f,g;\alpha,\beta}_{0,0;z_1,z_2}\,,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

as quais obedecem as relações

$$\begin{aligned}
\left(A_1^{f,g} - z_1\right)\psi^{f,g;\alpha,\beta}_{n,s;z_1,z_2} &= \sqrt{n}\,\psi^{f,g;\alpha,\beta}_{n-1,s;z_1,z_2}\,,\\
\left(A_1^{+\,f,g} - z_1^*\right)\psi^{f,g;\alpha,\beta}_{n,s;z_1,z_2} &= \sqrt{n+1}\,\psi^{f,g;\alpha,\beta}_{n+1,s;z_1,z_2}\,,\\
\left(A_2^{\alpha,\beta} - z_2\right)\psi^{f,g;\alpha,\beta}_{n,s;z_1,z_2} &= \sqrt{s}\,\psi^{f,g;\alpha,\beta}_{n,s-1;z_1,z_2}\,,\\
\left(A_2^{+\,\alpha,\beta} - z_2^*\right)\psi^{f,g;\alpha,\beta}_{n,s;z_1,z_2} &= \sqrt{s+1}\,\psi^{f,g;\alpha,\beta}_{n,s+1;z_1,z_2}\,.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

A equação (4.19) descreve a forma mais geral da solução da equação de onda relativística em um campo magnético constante e uniforme. Todas as soluções formalmente conhecidas podem ser obtidas desta equação, através de uma escolha conveniente de seus parâmetros. Por exemplo, escolhendo $f_0 = \alpha = 1,\ g = \beta = 0,\ z_1 = 0,\ z_2 = z$ com $z = 0$ obteremos os estados (3.15), enquanto se fizermos $s = 0,\ z \neq 0$ obteremos os estados (3.41). Para $n = s = 0,\ f_0 = \alpha = 1,\ g = \beta = 0$ teremos os estados coerentes [11, 12, 13, 14].

No caso geral, a forma explícita da representação das coordenadas das soluções (4.19) é extremamente complicada. Entretanto, podemos realizar simplificações consideráveis para certos casos particulares, e.g., suponha $f_0 = \alpha = 1,\ g = \beta = 0$, com isto

$$
\begin{aligned}
&\Psi^{1,0;1,0}_{n,s;z_1,z_2}(u^0,x,y) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x+iy-\bar{z}_1^*-z_2}{x-iy-\bar{z}_1-z_2^*}\right)^{\frac{n-s}{2}} e^{M_1} I_{s,n}(p_4)\ , \\
&2M_1 = (\bar{z}_1 - z_2^*)\,(x+iy) - (\bar{z}_1^* - z_2)\,(x-iy) + \bar{z}_1^* z_2 - \bar{z}_1 z_2^* - 2in\omega u^0\ , \\
&p_4 = |x+iy-\bar{z}_1^*-z_2|^2\,, \quad \bar{z}_1 = z_1 \exp(-i\omega u^0)\ .
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

Para $n = s = 0$ temos a seguinte representação em coordenadas para os estados coerentes

$$
\begin{aligned}
&\Psi^{f;g;\alpha,\beta}_{z_1,z_2}(u^0,x,y) = \left[\frac{\alpha f}{(\alpha f - \beta g)\pi|\alpha||f|}\right]^{\frac{1}{2}} \exp Q_7\ , \\
&Q_7 = -\frac{1}{2}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) + \frac{q}{2(\alpha f - \beta g)}\quad , \\
&q = -(\alpha+\beta)(f+g)x^2 - (\alpha-\beta)(f-g)y^2 + 2i(\beta f - \alpha g)xy \\
&\qquad + 2x\left[(\alpha+\beta)z_1 + (f+g)z_2\right] + 2iy\left[(\alpha-\beta)z_1 - (f-g)z_2\right] \\
&\qquad + (\alpha g^* - \beta f^*)z_1^2 + (\beta^* f - \alpha^* g)z_2^2 - 2z_1 z_2\ .
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

Soluções dos casos tratados em [11, 12, 13, 14] são casos particulares de (4.22) para $f_0 = \alpha = 1,\ g = \beta = 0$.

O cálculo dos valores médios nos estados (4.19) fornece

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{P}}_1 &= i\hbar\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\left[(f^*+g^*)\,z_1 - (f+g)\,z_1^*\right]\ , \\
\overline{\mathcal{P}}_2 &= -\hbar\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\left[(f^*-g^*)\,z_1 + (f-g)\,z_1^*\right].
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

Este mesmo resultado pode ser obtido utilizando suluções espinoriais. Para obter o resultado acima, levamos em conta as relações (2.5), (3.23), (4.20), bem como a ortogonalidade dos estados com respeito aos índices n e s. Lembrando que na teoria clássica os momentos correspondentes P_1^{cl} e P_2^{cl} possuem a seguinte representação paramétrica

$$
P_1^{cl} = \hbar\gamma R \sin 2\kappa, \quad P_2^{cl} = -\hbar\gamma R \cos 2\kappa\ , \tag{4.24}
$$

onde u^0 é o parâmetro de evolução, R o raio da órbita clássica e κ é dado por (4.8). Não é difícil verificar que (4.23) coicide com (4.24) quando $z_1 = (\gamma/2)^{1/2}\,R\,(f_0 e^{-i\varphi_0} + g_0 e^{i\varphi_0})$.

Calculando valores médios das coordenadas $\overline{x^1}$ e $\overline{x^2}$, encontramos que estes fornecem as quantidades clássicas correspondentes

$$x^{1\ cl} = R\cos\kappa + x^1_{(0)}, \quad x^{2\ cl} = R\sin\kappa + x^2_{(0)}\ . \tag{4.25}$$

Para $z_2 = (\gamma/2)^{1/2}\left[(\alpha+\beta)x^1_{(0)} + i(\alpha-\beta)x^2_{(0)}\right]$. Na equação acima, $x^1_{(0)}$ e $x^2_{(0)}$ são as coordenadas do centro da órbita. Assim, vemos que, os valores médios das trajetórias no plano x^1 e x^2 não dependem dos números quânticos n e s, e estas trajetórias adquirem a forma clássica para escolhas apropriadas de z_1 e z_2.

Calculando a flutuação quadrática nos estados (4.19), obteremos

$$\begin{aligned}
&2\overline{(\Delta\mathcal{P}_1)^2} = \hbar^2\gamma|f+g|^2(2n+1), \quad 2\overline{(\Delta\mathcal{P}_2)^2} = \hbar^2\gamma\,|f-g|^2\,(2n+1)\ , \\
&2\gamma\overline{(\Delta x^1)^2} = |f-g|^2(2n+1) + |\alpha-\beta|^2(2s+1)\ , \\
&2\gamma\overline{(\Delta x^2)^2} = |f+g|^2(2n+1) + |\alpha+\beta|^2(2s+1)\ , \\
&\sigma_1\ = -\sigma_2 = i\,(fg^* - gf^*)\,(2n+1)\ , \\
&\sigma_k = \overline{(\Delta x^k)\,(\Delta P_k) + (\Delta P_k)\,(\Delta x^k)}, \quad k = 1,2\ .
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Estas flutuações não dependem de z_1 nem z_2, mas dependem dos números quânticos n e s e dos parâmetros f_0, g_0, α e β. As relações (4.26) implicam nas seguintes desigualdades generalizadas de Heisenberg

$$\begin{aligned}
&4\mathcal{J}_1 = \hbar^2(2n+1)\left[(2n+1) + (2s+1)\,|(\alpha-\beta)(f+g)|^2\right] \geq \hbar^2\ , \\
&4\mathcal{J}_2 = \hbar^2(2n+1)\left[(2n+1) + (2s+1)\,|(\alpha+\beta)(f-g)|^2\right] \geq \hbar^2\ . \\
&\mathcal{J}_k = \overline{(\Delta x^k)^2}\ \overline{(\Delta\mathcal{P}_k)^2} - \frac{1}{4}\sigma_k^2, \quad k = 1,2\ .
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Selecionando os parâmetros f_0, g_0, α e β pode-se construir estados, para um "tempo" fixo u^0, em que as dispersões $\overline{(\Delta x^k)^2}$ ou $\overline{(\Delta\mathcal{P}_k)^2}$ possuam qualquer valor desejado. Estes valores evoluirão com o "tempo" u^0 de acordo com as relações (4.26).

4.2 Autofunções do operador L_z

Vamos agora apresentar um outro tipo de estado não-estacionário, completamente diferente dos estados coerentes apresentados acima. Encontrar estados não-estacionários resume-se em resolver a equação (4.6) com a condição (4.3). As demais integrais do movimento do problema podem ser construídas como uma combinação funcional dos operadores

$$fa_1, \quad ga_1^+, \quad a_2, \quad a_2^+, \tag{4.28}$$

onde as funções f e g devem obedecer as relações (4.10) e, consequentemente, (4.11). A construção de integrais do movimento através de uma combinação linear destes operadores fornece os estados coerentes. É interessante notar que nenhuma destas combinações lineares comuta com o operador L_z (2.6) ou J_z (2.3). Assim, estados coerentes com valores definidos destas quantidades não podem ser construídos. De acordo com (4.20), os estados coerentes generalizados (3.31) e (4.19) são autofunções dos operadores $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$, estes operadores são integrais do movimento e são quadráticos nos operadores de criação e aniquilação,

$$\mathcal{N}_1 = \left(A_1^{+\,f,g} - z_1^*\right)\left(A_1^{f,g} - z_1\right), \quad \mathcal{N}_2 = \left(A_2^{+\,\alpha,\beta} - z_2^*\right)\left(A_2^{\alpha,\beta} - z_2\right) , \tag{4.29}$$

com os operadores $A_1^{f,g}$ e $A_2^{\alpha,\beta}$ definidos em (4.9) e (3.22) respectivamente. Os operadores (4.29) também não comutam com L_z ou J_z.

Além dos operadores a_1a_2 e $a_1^+a_2^+$, a única combinação quadrática que comuta com L_z e J_z é dada por

$$\bar{A} = fa_1a_2 + ga_1^+a_2^+ . \tag{4.30}$$

É um fato conhecido [17], que as autofunções do operador acima podem ser normalizadas apenas para $|f| > |g|$, ou $|f| = |g|$. No primeiro caso, as autofunções têm norma finita, e no segundo caso podem ser normalizadas usando funções δ. Vamos considerar o caso $|f| \geq |g|$. Neste caso, (4.30) difere do operador

$$A^p = e^{i\kappa}\left(a_1a_2 - \bar{p}^2a_1^+a_2^+\right) , \; \bar{p} = pe^{-i\kappa}, \, -1 \leq p \leq 1, \; \kappa = \omega u^0 + \kappa_0, \, \kappa_0 = \text{const} \tag{4.31}$$

apenas por um fator complexo, o que nos permite considerar apenas este operador. Vamos exigir que as funções $\psi\left(u^0,\rho,\varphi\right)$ sejam simultaneamente soluções da equação (4.6), e autofunções dos operadores A^p e L_z,

$$A^p\psi^p_{q,l}=-q\psi^p_{q,l},\quad L_z\psi^p_{q,l}=\hbar l\psi^p_{q,l},\quad l=0,\pm1,\pm2,\dots\ . \tag{4.32}$$

Estas soluções podem ser construídas através das funções de Laguerre $I_{m,n}\left(x\right)$ com índices não inteiros,

$$\begin{aligned}
&\psi^p_{q,l}\left(u^0,\rho,\varphi\right)=N\exp\left(il\varphi-\Gamma\right)\left(1+\bar{p}\right)^{-\alpha}\left(1-\bar{p}\right)^{-\beta}I_{|l|+s,s}\left(x\right)\ ,\\
&\Gamma=i\frac{l\omega u^0}{2}+\frac{1+\bar{p}^2}{2\left(1-\bar{p}^2\right)}\rho,\quad \alpha=\frac{p-q}{2p},\quad \beta=\frac{p+q}{2p}\ ,\\
&s=\frac{q}{2p}-\frac{|l|+1}{2},\quad x=\frac{2\bar{p}\rho}{1-\bar{p}^2}\ ,\\
&I_{n,m}\left(x\right)=\sqrt{\frac{\Gamma\left(1+n\right)}{\Gamma\left(1+m\right)}}\frac{\exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(1+n-m\right)}x^{\frac{n-m}{2}}\Phi\left(-m,n-m+1;x\right)\ ,
\end{aligned} \tag{4.33}$$

onde $\Phi\left(\alpha,\beta;x\right)$ são as funções hipergeométricas degeneradas (veja [15], 9.210). Para $p^2=1$ o operador (4.31) é anti-hermitiano e q é imaginário ($\mathrm{Re}\, q=0$). Enquanto, para $p=0$ as soluções têm uma forma simples,

$$\psi^0_{q,l}\left(u^0,\rho,\varphi\right)=N_0\exp\left(il\varphi+\bar{q}-\Gamma_0\right)J_{|l|}\left(2\sqrt{\bar{q}\rho}\right)\ ,\quad \Gamma_0=\frac{i}{2}l\omega u^0+\frac{\rho}{2},\quad \bar{q}e^{-ik}\ , \tag{4.34}$$

onde $J_\nu(x)$ são as funções de Bessel (veja [15], 8.402). As funções (4.34) podem ser obtidas de (4.33) com o limite $p\to0$, como pode ser visto com a ajuda da propriedade

$$\lim_{r\to\infty}I_{r+\alpha,r+\beta}\left(\frac{x^2}{4r}\right)=J_{\alpha-\beta}\left(x\right)\ . \tag{4.35}$$

As funções (4.33) e (4.34) são ortogonais apenas em relação ao número quântico l,

$$\begin{aligned}
&\left(\psi^p_{q',l'},\psi^p_{q,l}\right)=\delta_{l,l'}QF\left(-s,-s'^*;1+|l|\,;y\right),\quad y=\left(\frac{2p}{1+p^2}\right)^2\ ,\\
&Q=\left[\frac{\Gamma\left(1+|l|+s\right)\Gamma\left(1+|l|+s'^*\right)}{p^2\Gamma\left(1+s\right)\Gamma\left(1+s'^*\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\pi NN'^*}{\Gamma\left(1+|l|\right)}y^{\frac{1+|l|}{2}}\left(1-y\right)^{-\frac{q+q^*}{4p}}\ ,\\
&\left(\psi^0_{q',l'},\psi^0_{q,l}\right)=\delta_{l,l'}2\pi N_0N_0'^*I_{|l|}\left(2\sqrt{qq'^*}\right)\ ,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

onde $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ são as funções hipergeométricas (veja [15], 9.100), e $I_\alpha(x)$ são funções de Bessel com argumentos imaginários (veja [15], 8.404).

As soluções (4.33) não são estados coerentes, entretanto, possuem propriedades similares a estes estados. Pois, substituindo os operadores (2.5) por seus equivalentes clássicos (seção 1.1), obteremos a trajetória

$$\rho = \rho\left(u^0\right) = \sqrt{L_z^2 \hbar^{-2} + 4\left|a_1 a_2\right|^2} - a_1 a_2 - a_1^+ a_2^+ \ . \tag{4.37}$$

Enquanto, para $p = 0$, usando (4.32), temos $a_1 a_2 = -\bar{q} = -q e^{-i\kappa}$, $L_z = \hbar l$. Com isto, podemos escrever (4.37) na forma

$$\rho\left(u^0\right) = \rho_0^{cl} + \bar{q} + \bar{q}^*, \quad \rho_0^{cl} = \sqrt{l^2 + 4\left|q\right|^2} \ . \tag{4.38}$$

Calculando o valor médio $\bar{\rho}$, com a ajuda da fórmula (4.34), encontramos

$$\bar{\rho} = \rho_0 + \bar{q} + \bar{q}^*, \quad \rho_0 = |l| - 1 - 2\left|q\right| \frac{I_{|l|-1}\left(2\left|q\right|\right)}{I_{|l|}\left(2\left|q\right|\right)} \ . \tag{4.39}$$

Então, a dependência temporal do valor médio $\bar{\rho}$ é clássica, e apenas a constante ρ_0 difere do valor clássico.

4.3 Limite para campos magnéticos nulos

Outra característica importante dos estados coerentes, considerados anteriormente, está no fato destes, diferentes dos estados estacionários, permitirem um processo contínuo para o limite do campo magnético tendendo a zero. Explicitamente, estes estados fornecem as soluções para partículas livres ao tomarmos $H \to 0$ (ou equivalentemente $\gamma \to 0$). Muitos trabalhos foram dedicados à busca de soluções com esta característica [10]. Vamos considerar tal limite para as funções (4.22). Entretanto, será mais conveniente escrever estas soluções na forma

$$
\begin{aligned}
&\Psi^{f;g;\alpha,\beta}_{z_1,z_2}(u^0,x,y) = \left[\frac{\alpha f}{(\alpha f-\beta g)\pi|\alpha||f|}\right]^{\frac{1}{2}} \exp Q, \\
&Q = -\frac{1}{2}\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right) + \frac{q}{2(\alpha f-\beta g)} + Q_1\,, \\
&Q_1 = \frac{(\alpha g^* - \beta f^*)z_1^2 + (\beta^* f - \alpha^* g)z_2^2 - 2z_1 z_2}{2(\alpha f-\beta g)}\,, \\
&q = -(\alpha+\beta)(f+g)x^2 - (\alpha-\beta)(f-g)y^2 + 2i(\beta f-\alpha g)xy \\
&\qquad + 2x\left[(\alpha+\beta)z_1 + (f+g)z_2\right] + 2iy\left[(\alpha-\beta)z_1 - (f-g)z_2\right]\,, \qquad (4.40)
\end{aligned}
$$

e apresentar as quantidades q e Q_1 como

$$
\begin{aligned}
q = &-\frac{\gamma}{2}(\alpha+\beta)(f+g)\left(x^1\right)^2 - \frac{\gamma}{2}(\alpha-\beta)(f-g)\left(x^2\right)^2 \\
&+ i\gamma(\beta f-\alpha g)x^1x^2 + \sqrt{2\gamma}x^1\left[(\alpha+\beta)z_1+(f+g)z_2\right] \\
&+ i\sqrt{2\gamma}x^2\left[(\alpha-\beta)z_1-(f-g)z_2\right]\,, \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

$$
Q_1 = \bar{Q}_1 + Q_1^0, \quad Q_1^0 = Q_1(f=f_0, g=g_0)\,. \qquad (4.42)
$$

Podemos verificar que

$$
\begin{aligned}
\bar{Q}_1 &= Q_1 - Q_1^0 \\
&= \frac{i\sin\omega u^0}{(\alpha f-\beta g)(\alpha f_0-\beta g_0)}(\alpha z_1+g_0z_2)(\beta z_1+f_0z_2) - \frac{z_1z_2(1-\cos\omega u^0)}{\alpha f-\beta g}\,. \qquad (4.43)
\end{aligned}
$$

A quantidade Q_1^0 é uma constante, logo, pode ser incluída no fator de normalização de (4.40). Substituímos as quantidades $\sqrt{2\gamma}z_1$ e $\sqrt{2\gamma}z_2$ em (4.43) por

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2\gamma}z_1 &= -(f_0+g_0)p_2 - i(f_0-g_0)p_1\,, \\
\sqrt{2\gamma}z_2 &= (\alpha+\beta)p_2 - i(\alpha-\beta)p_1\,, \qquad (4.44)
\end{aligned}
$$

onde p_1 e p_2 são números reais arbitrários. Esta expressão restringe os possíveis valores de z_1 e z_2. Podemos agora tomar o limite $\gamma \to 0$. Levando em conta

$$
\lim_{\gamma\to 0}\frac{\sin\omega u^0}{\gamma} = \frac{u^0}{\lambda}, \quad \lim_{\gamma\to 0}\frac{1-\cos\omega u^0}{\gamma} = 0\,, \qquad (4.45)
$$

e retornando às coordenadas x_1 e x_2 temos,

$$\Psi(x^\mu) = N \exp(-iS),$$
$$S = \frac{\lambda}{2}u^3 + \frac{p_1^2 + p_2^2 + m^2}{2\lambda}u^0 + p_1 x^1 + p_2 x^2 \ . \tag{4.46}$$

Mudando das variáveis de cone de luz para as cartesianas, S assume a forma

$$S = \frac{\lambda^2 + p_1^2 + p_2^2 + m^2}{2\lambda}x^0 + p_1 x^1 + p_2 x^2 + \frac{\lambda^2 - p_1^2 - p_2^2 - m^2}{2\lambda}x^3. \tag{4.47}$$

Tomando em conta que os autovalores λ em (4.3) podem ser relacionados com os momentos p_0 e p_3, explicitamente, $\lambda = p_0 + p_3$, podemos escrever

$$p_0 = \frac{\lambda^2 + p_1^2 + p_2^2 + m^2}{2\lambda}, \quad p_3 = \frac{\lambda^2 - p_1^2 - p_2^2 - m^2}{2\lambda}, \tag{4.48}$$

e as seguintes relações são válidas

$$S = p_\mu x^\mu, \quad p_\mu p^\mu - m^2 = 0 \ . \tag{4.49}$$

Assim, a função de onda (4.46) corresponde ao estado da partícula livre com um determinado quadrimomento.

Capítulo 5

Campos longitudinais

Outro tipo de campo no qual podemos utilizar o formalismo de semimomento desenvolvido é o campo longitudinal. Estes campos têm a forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{n}E, \quad \mathbf{H} = \mathbf{n}H \,, \tag{5.1}$$

onde $\mathbf{n}$ é um vetor unitário, $\mathbf{n}^2 = 1$. Escolhendo $\mathbf{n}$ na direção x^3 e utilizando as equações de Maxwell, podemos escrever,

$$\left.\begin{array}{l} \partial_i H^i = 0 \Rightarrow \partial_3 H^3 = 0 \\ \varepsilon^{ijk}\partial_j E_k = \partial_0 H^i \Rightarrow \partial_2 E^3 = 0 \\ \partial_1 E^3 = 0, \quad \partial_0 H^3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} E = E\left(x^0, x^3\right) \\ H = H\left(x^1, x^2\right) \end{array} \,,$$

onde $E\left(x^0, x^3\right)$ e $H\left(x^1, x^2\right)$ são funções arbitrárias de seus argumentos. Isto nos permite escolher os potenciais na forma

$$E^i = -\partial_0 A^i + \partial^i A^0 \Rightarrow E = -\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A_0 = A_0\left(x^0, x^3\right) \\ A_3 = A_3\left(x^0, x^3\right) \end{array}\right. \,,$$

$$\varepsilon_{ijk}\partial_i H_k = 0 \Rightarrow H = \partial_2 A_1 - \partial_1 A_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A_1 = A_1\left(x^1, x^2\right) \\ A_2 = A_2\left(x^1, x^2\right) \end{array}\right. \,. \tag{5.2}$$

Este resultado mostra que os operadores definidos em (2.5) não dependerão de A_0 nem A_3 e, consequentemente, não irão depender do campo elétrico. Assim, impondo restrições apenas sobre o campo magnético, podemos manter as relações (2.5-2.10), bem como as relações de comutação (2.8) dos operadores a_k. Como vimos anteriormente, estas leis de comutação permitem encontrar uma representação onde estes operadores atuam em variáveis diferentes (2.16), a qual foi obtida utilizando as equações (2.9-2.11).

As equações de Lorentz, para o campo em consideração, fornecem

$$
\begin{aligned}
c^2 m_0 \ddot{x}^0 + eE\dot{x}^3 = 0, \quad c^2 m_0 \ddot{x}^3 + eE\dot{x}^0 = 0\ , \\
c^2 m_0 \ddot{x}^1 + eH\dot{x}^2 = 0, \quad c^2 m_0 \ddot{x}^2 + eH\dot{x}^1 = 0\ ,
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

com isto, e a condição $\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = 1$, podemos derivar,

$$
\begin{aligned}
c^2 m_0^2 \left((\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 \right) = k_1^2, \quad c^2 m_0^2 \left((\dot{x}_0)^2 - (\dot{x}_3)^2 \right) = c^2 m_0^2 + k_1^2\ , \\
\left((P_1)^2 + (P_2)^2 \right) = k_1^2, \quad \left((P_0)^2 - (P_3)^2 \right) = c^2 m_0^2 + k_1^2\ ,
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

onde k_1 é uma constante de integração e $P_\mu = m_0 c \dot{x}_\mu$ o momento cinético.

5.1 Soluções da equação de Klein-Gordon

Os resultados acima nos mostram que soluções da equação de Klein-Gordon, correspondendo a estados com um valor definido de k_1, podem ser escritas, sem perda de generalidade, na forma

$$
\Psi = \varphi\left(x^0, x^3\right) \psi\left(x^1, x^2\right), \tag{5.5}
$$

onde

$$
\left(\mathcal{P}_1^2 + \mathcal{P}_2^2 - k_1^2 \right) \psi\left(x^1, x^2\right) = 0, \tag{5.6}
$$

$$
\left(\mathcal{P}_0^2 - \mathcal{P}_3^2 - m^2 - k_1^2 \right) \varphi\left(x^0, x^3\right) = 0\,. \tag{5.7}
$$

Utilizando as variáveis x, y e η, ξ definidas em (2.4) e (2.11) podemos escrever a equação acima para $\psi\left(x^1, x^2\right)$ na forma

$$
\left(\xi^2 - \partial_\xi^2 - k_1'^2 \right) \tilde{\psi} = 0, \quad k_1'^2 = \frac{k_1^2}{\hbar^2 \gamma}\ , \tag{5.8}
$$

onde o operador $\left(\xi^2 - \partial_\xi^2 - k_1'^2\right)$ não depende da variável η. Utilizando agora a representação de semimomento (2.16),

$$\psi\left(x,y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iky} \tilde{\psi}\left(x,k\right)\ dk\ ,$$

e substituindo a integral em k por uma integral em η obteremos,

$$\psi\left(x,y\right) = \frac{e^{ixy}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sqrt{2y}\eta} \tilde{\psi}\left(\xi,\eta\right)\ d\eta, \quad \xi = \sqrt{2}x - \eta. \tag{5.9}$$

Sendo Ψ uma autofunção do operador de número $\mathcal{N}$ (2.13), o qual comuta com os operadores em (5.6) e (5.7), podemos concluir que na representação de semimomento temos,

$$\mathcal{N}\tilde{\psi}_n = n\tilde{\psi}_n \Rightarrow \tilde{\psi}_n\left(\xi,\eta\right) = U_n\left(\xi\right)\Phi\left(\eta\right)\ .$$

Onde, novamente, $\Phi\left(\eta\right)$ é uma função arbitrária de seu argumento. Das equações (2.6) e (5.6), podemos derivar a relação entre os números quânticos n e k_1,

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_1^2 + \mathcal{P}_2^2 = 2\hbar^2\gamma\mathcal{N} + \hbar^2\gamma = k_1^2\ , \\ &k_1^2 = 2\hbar^2\gamma n + \hbar^2\gamma \quad . \end{aligned}$$

Soluções da equação (5.7) podem ser encontradas para campos que admitem uma separação nas variáveis x^0 e x^3. Como exemplo, vamos considerar os campos obtidos pelo potencial

$$\left|e\right| A_0 = A\left(x^3\right), \quad A_3 = 0 \Rightarrow \left|e\right| E = -\partial_3 A\ , \tag{5.10}$$

neste caso, encontramos soluções estacionárias de (5.7) na forma,

$$\varphi\left(x^0,x^3\right) = e^{-ik_0x^0}\chi\left(x^3\right), \quad \chi'' + R\chi = 0, \quad R\left(x^3\right) = \left(k_0 + A\right)^2 - m^2 - k_1^2\,. \tag{5.11}$$

Com isto, podemos escrever a função (5.5), na representação de semimomento, como

$$\Psi_n = e^{-ik_0x^0}\chi\left(x^3\right)U_n\left(\xi\right)\Phi\left(\eta\right)\ . \tag{5.12}$$

A equação (5.11) pode ser resolvida para as seguintes escolhas do potencial $A_3\left(x^3\right)$,

$$\begin{aligned}
&A\left(x^3\right)=\alpha x, \quad A\left(x^3\right)=\alpha\exp\left(\beta x^3\right), \quad A\left(x^3\right)=\frac{\alpha}{x^3}, \\
&A\left(x^3\right)=\alpha\tanh\left(\beta x^3\right), \quad A\left(x^3\right)=\alpha\tan\left(\beta x^3\right), \quad A\left(x^3\right)=\beta\coth\left(\beta x^3\right)\ ,
\end{aligned}$$

estas soluções estão presentes em [4].

Novamente, para determinar a função $\Phi\left(\eta\right)$ precisamos impor condições complementares. Por exemplo, se exigirmos que nosso resultado seja uma autofunção do operador L_z (2.15) teremos

$$\begin{aligned}
&a_2^+a_2\Phi\left(\eta\right)=s\Phi\left(\eta\right)\Rightarrow\Phi\left(\eta\right)=U_s\left(\eta\right), \\
&L_z\Psi_{ns}=\hbar\left(n-s\right)\Psi_{ns}\ .
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Substituindo este resultado em (5.12), e realizando a integral, (5.9) obtemos

$$\Psi_{n,s}=e^{-ik_0x^0}\chi\left(x^3\right)\frac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{x+iy}{x-iy}\right)^{\frac{n-s}{2}}I_{n,s}\left(x^2+y^2\right)\ ,$$

onde $I_{n,s}$ são funções de Laguerre. Soluções para outras combinações dos operadores a_2^+ e a_2 foram analisadas nas seções anteriores.

5.2 Soluções da equação de Dirac

Para o caso da equação de Dirac em um campo longitudinal surgem novas dificuldades, pois a determinação dos coeficientes c_k em (3.10) não pode mais ser feita através de um sistema algébrico como (3.11), uma vez que ainda não determinamos a dependência das soluções nas variáveis x_0 e x_3. Vamos, então, procurar soluções na forma

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Theta}=\mathbf{M}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_{-1}\end{pmatrix}\varphi\left(x^0,x^3\right)v,\\
&\mathbf{M}=\begin{pmatrix} k_1\left(m+F-ik_1\sigma_2\right) & \left(P_1-iP_2\right)\left(m+F-ik_1\sigma_2\right)\\ \left(P_1+iP_2\right)\left[\left(m-F\right)\sigma_3-k_1\sigma_1\right] & k_1\left[\left(m-F\right)\sigma_3-k_1\sigma_1\right]\end{pmatrix}\\
&F=\mathcal{P}_0+\mathcal{P}_3\ ,
\end{aligned}
$$

onde, v é um espinor arbitrário, que poderá ser fixado impondo condições complementares. Além da expressão acima, temos ainda,

$$
\left(\mathcal{P}_0^2-\mathcal{P}_3^2-m^2-k'\right)\varphi\left(x^0,x^3\right)=0,\quad k'=k_1^2+ieE, \tag{5.14}
$$

$$
\left(\mathcal{P}_1+i\mathcal{P}_2\right)\psi_1\left(x^1,x^2\right)=\hbar k_1\psi_{-1}\left(x^1,x^2\right), \tag{5.15}
$$

$$
\left(\mathcal{P}_1-i\mathcal{P}_2\right)\psi_{-1}\left(x^1,x^2\right)=\hbar k_1\psi_1\left(x^1,x^2\right). \tag{5.16}
$$

Das equações (5.15) e (5.16) podemos concluir

$$
a_1\psi_{-1}=-i\sqrt{n}\psi_1\ ,\ a_1^+\psi_1=i\sqrt{n}\psi_{-1}\ ,\ k_1^2=2\gamma n\ .
$$

Isto permite definir as funções ψ_1 e ψ_{-1} através das funções ψ_n calculadas anteriormente

$$
\psi_1=\psi_{n-1}\ ,\ \psi_{-1}=-i\psi_n\ .
$$

Com isto, nosso problema se resume a solucionar a equação (5.14), que possui a mesma forma da equação (5.7). Para o exemplo tratado anteriormente, de um campo elétrico constante e uniforme na direção x^3 na forma (1.1) e um campo elétrico na forma (5.10) teremos como solução

$$
\varphi\left(x^0,x^3\right)=\exp\left(-ik_0x^0\right)\chi\left(x^3\right),\quad \chi''+\left(i\partial_3+k_0+A\right)\chi=0\,.
$$

Soluções desta equação para várias funções χ podem ser encontradas em [4].

Capítulo 6

A função de evolução

Seja $\psi_n(x)$ um conjunto ortogonal e completo de soluções da equação de Klein-Gordon, em relação ao poduto escalar (1.15). Uma vez que este produto escalar é independente do tempo, podemos calcular (ψ_n, Ψ) em

$$\Psi(x) = \sum_n c_n \psi_n(x)\,,\ c_n = \frac{(\psi_n, \Psi)}{(\psi_n, \psi_n)}\ , \tag{6.1}$$

(veja (1.16)) para um instante arbitrário do tempo y^0, diferente de x^0. Desta forma, temos uma relação entre soluções $\Psi(x)$ da equação de Klein-Gordon para diferentes instantes do tempo,

$$\Psi(x) = \int G(x,y)\left(i\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y^0} - 2eA_0(y)\right)\Psi(y)\ d\mathbf{y}\ . \tag{6.2}$$

A função $G(x,y)$ em (6.2) recebe o nome de função de evolução. Esta função resolve o problema de condições iniciais da equação de Klein-Gordon e possui a forma

$$G(x,y) = \sum_n \frac{\psi_n(x)\,\psi_n^*(y)}{(\psi_n, \psi_n)}\ . \tag{6.3}$$

A função $G(x,y)$ satisfaz a equação de Klein-Gordon (2.1) e as condições

$$\begin{aligned}
&G(x,y)|_{x^0=y^0} = 0\ ,\\
&i\frac{\partial}{\partial x^0}\,G(x,y)|_{x^0=y^0} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\ ,\\
&\int G(x,y)\left(i\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial y^0} - 2eA_0(y)\right)G(y,z)\ d\mathbf{y} = G(x,z)\ ,
\end{aligned}$$

as quais podem ser verificadas usando as equações (6.1) e (6.2).

6.1 A função de evolução e a representação de semimomento

De acordo com o formalismo desenvolvido da representação de semimomento, podemos escrever as soluções estacionárias da equação de Klein-Gordon em um campo magnético constante e uniforme (3.3) como

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\Psi}_n\left(x^0, x^3, \xi, \eta\right) = N \exp\left(-ik_0x^0 - ik_3x^3\right) \widetilde{\Psi}_n\left(\xi, \eta\right) \\
&\widetilde{\Psi}_n\left(\xi, \eta\right) = U_n\left(\xi\right) \Phi\left(\eta\right), \quad \xi = \sqrt{2}x - \eta\,. \\
&k_0^2 = m^2 + \gamma + k_3^2 + 2\gamma n = m^{*\,2} + k_3^2 + 2\gamma n, \quad m^{*\,2} = m^2 + \gamma,
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

onde $U_n(x)$ são funções de Hermite e as variáveis ξ e η são definidas em (2.11). Das funções (6.4) acima podemos obter soluções na representação das coordenadas usando (2.16).

Nosso objetivo aqui é usar as soluções (6.4) para construir a função de evolução da equação de Klein-Gordon (6.3). Para isto, precisamos determinar a constante de normalização em (3.3), usando (1.15) temos:

$$
\left(\Psi_{n,k_3}, \Psi_{n',k_3'}\right) = N 2\pi \frac{e\hbar\left(k_0' + k_0\right)}{2m_0c} e^{i\left(k_0 - k_0'\right)x^0} \delta\left(k_3 - k_3'\right) \int dx^1 dx^2 \Psi_n^*\left(x^1, x^2\right) \Psi_n\left(x^1, x^2\right)
$$

$$
\int dx^1 dx^2 \Psi_n^*\left(x^1, x^2\right) \Psi_n\left(x^1, x^2\right) \;=\; \frac{2}{\gamma} \int \Psi_n^*\left(x, y\right) \Psi_n\left(x, y\right)\, dx\, dy\ ,
$$

usando (2.17), podemos escrever

$$
\left(\Psi_{n,k_3}, \Psi_{n',k_3'}\right) = N^2 \frac{4}{\gamma} \pi \frac{e\hbar\left(k_0' + k_0\right)}{2m_0c} e^{i\left(k_0 - k_0'\right)x^0} \delta\left(k_3 - k_3'\right) \int \widetilde{\Psi}_n^*\left(\xi, \eta\right) \widetilde{\Psi}_{n'}\left(\xi, \eta\right)\; d\xi d\eta\ .
$$

Assim, se as soluções $\Psi_n(\xi, \eta)$ formarem um conjunto ortonormal de funções obteremos

$$
N^2 = \frac{m_0 c \gamma}{4\pi e\hbar k_0}\ .
$$

Substituindo este resultado em (3.3), podemos escrever (6.3) na forma

$$G\left(x^0, x^3, x, y, x^{0\prime}, x^{3\prime}, x', y'\right) = \int \sum_n \Psi^*_{n,k_3}\left(x^0, x^3, x, y\right) \Psi_{n,k_3}\left(x^{0\prime}, x^{3\prime}, x', y'\right)\ dk_3$$

$$= \frac{m_0 c\gamma}{4\pi e\hbar} \int \sum_n \frac{\exp\left(ik_3\left(x^3 - x^{3\ \prime}\right)\right)}{\sqrt{m^{*\,2} + k_3^2 + 2\gamma n}} \times$$

$$\exp\left(i\sqrt{m^{*\,2} + k_3^2 + 2\gamma n}\left(x^0 - x^{0\ \prime}\right)\right) \Psi^*_n(x, y)\, \Psi_n(x', y')\ \ dk_3$$

Usando agora a transformação (2.16) temos

$$G = \frac{m_0 c\gamma}{4\pi e\hbar} \frac{e^{-i(xy - x'y')}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{2}(y\eta - y'\eta')} \int \sum_n \frac{\exp\left(ik_3\left(x^3 - x^{3\prime}\right)\right)}{\sqrt{m^{*\,2} + k_3^2 + 2\gamma n}} \times$$

$$\exp\left(i\sqrt{m^{*\,2} + k_3^2 + 2\gamma n}\left(x^0 - x^{0\prime}\right)\right) \widetilde{\Psi}^*_n(\xi, \eta)\ \widetilde{\Psi}_n(\xi', \eta')\ \ dk_3\, d\eta\, d\eta'$$

$$= \frac{m_0 c\gamma}{4\pi e\hbar} \frac{e^{-i(xy - x'y')}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{2}(y\eta - y'\eta')} \widetilde{G}\left(x^0, x^3, \xi, \eta, x^{0\prime}, x^{3\prime}, \xi', \eta'\right)\ d\eta\, d\eta' \qquad (6.5)$$

$$\xi = \sqrt{2}x - \eta, \quad \xi' = \sqrt{2}x' - \eta'\ .$$

Onde a função de evolução, na representação de semimomento, é dada por

$$\widetilde{G}\left(x^0, x^3, \xi, \eta, x^{0\prime}, x^{3\prime}, \xi', \eta'\right) = \int \sum_n \exp\left(i\sqrt{m^{*\,2} + k_3^2 + 2\gamma n}\left(x^0 - x^{0\prime}\right)\right) \times$$

$$\frac{\exp\left(ik_3\left(x^3 - x^{3\prime}\right)\right)}{\sqrt{m^{*\,2} + k_3^2 + 2\gamma n}} \widetilde{\Psi}^*_n(\xi, \eta)\ \widetilde{\Psi}_n(\xi', \eta')\ \ dk_3$$

Se quebrarmos a degenerescência em (6.4), escolhendo um número quântico apropriado para as funções $\Phi(\eta)$ de forma que $\widetilde{\Psi}_{n,q}(\xi, \eta) = U_n(\xi)\, \Phi_q(\eta)$ teremos

$$\widetilde{G} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \frac{\exp\left(ik_3\left(x^3 - x^{3\ \prime}\right)\right)}{\sqrt{m^{*\,2} + k_3^2 + 2\gamma n}} \times$$

$$\exp\left(i\sqrt{m^{*\,2} + k_3^2 + 2\gamma n}\left(x^0 - x^{0\ \prime}\right)\right) U_n(\xi)\, U_n(\xi')\ \ dk_3$$

$$\sum_q \Phi^*_q(\eta)\, \Phi_{q'}(\eta')\ . \qquad (6.6)$$

Escolhendo convenientemente as funções $\Phi_q(\eta)$, de forma a termos

$$\sum_q \Phi_q^*(\eta)\,\Phi_{q'}(\eta') = \delta(\eta-\eta') \ ,$$

nossa função de evolução (6.6) torna-se

$$\begin{aligned}\widetilde{G} = \delta(\eta-\eta') \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_n \frac{\exp\left(ik_3\left(x^3 - x^{3\ \prime}\right)\right)}{\sqrt{m^{*\,2} + k_3^2 + 2\gamma n}} \times \\ \exp\left(i\sqrt{m^{*\,2} + k_3^2 + 2\gamma n}\left(x^0 - x^{0\ \prime}\right)\right) U_n(\xi)\, U_n(\xi')\ \ dk_3 \ . \qquad (6.7)\end{aligned}$$

Para darmos uma forma mais conveniente à equação acima, usaremos a relação

$$\frac{1}{k_0^2 - \kappa_n^2 + i\varepsilon} = -i \int\limits_0^{\infty} ds\, \exp\left[i\left(k_0^2 - \kappa_n^2 + i\varepsilon\right)s\right] \ ,$$

com isto,

$$\begin{aligned}\frac{\exp\left(i\kappa_n\left(x^0 - x^{0\ \prime}\right)\right)}{2\kappa_n} &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_0\, \frac{\exp\left(ik_0\left(x^0 - x^{0\ \prime}\right)\right)}{k_0^2 - \kappa_n^2 + i\varepsilon}, \quad x^0 - x^{0\ \prime} < 0 \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ik_0\left(x^0 - x^{0\ \prime}\right)\right)\int\limits_0^{\infty} \exp\left[i\left(k_0^2 - \kappa_n^2 + i\varepsilon\right)s\right]\, ds\, dk_0 \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int \exp\left(ik_0\left(x^0 - x^{0\ \prime}\right)\right)\int_0^{\infty} \ e^{i\left(k_0^2 + i\varepsilon\right)s}\exp\left[-i\kappa_n^2 s\right]\, ds\, dk_0 \ .\end{aligned}$$

Usando esta expressão, (6.7) torna-se

$$\begin{aligned}\widetilde{G} = -\frac{1}{\pi}\delta(\eta-\eta')\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_3\, \exp\left(ik_3\left(x^3 - x^{3\ \prime}\right)\right)\int dk_0\, \exp\left(ik_0\left(x^0 - x^{0\ \prime}\right)\right) \times \\ \int\limits_0^{\infty} ds\ e^{i\left(k_0^2 + i\varepsilon\right)s}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left[\xi^2 + \xi'^{\,2}\right]/2\right) e^{-i\left(m^{*\,2} + k_3^2\right)s} \times \\ \sum_n \exp\left[-i2\gamma n s\right]\frac{1}{(2^n n!)} H_n(\xi)\, H_n(\xi') \ ,\end{aligned}$$

aqui usamos a forma explícita das funções de Hermite $U_n(x)$.(3.5) Usando agora a relação (veja [16], 10.13.22)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^n}{n!} H_n(\xi)\, H_n(\xi') = \left(1 - z^2\right)^{-1/2}\exp\left\{\frac{2\xi\xi' z - \left(\xi^2 + \xi'^{\,2}\right)z^2}{1 - z^2}\right\} \ ,$$

onde, em nosso caso, $z = \exp\left[-i2\gamma s\right]$ temos

$$\widetilde{G} = -\frac{1}{\pi}\delta\left(\eta - \eta'\right)\int_{0}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \exp\left(ik_3\left(x^3 - x^{3\ \prime}\right) - ik_3^2 s\right) \times$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \exp\left(ik_0\left(x^0 - x^{0\ \prime}\right) + ik_0^2 s\right)\exp\left(-\left[\xi^2 + \xi^{\prime\,2}\right]/2\right) \times$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-im^{*\,2} s}\left(1 - z^2\right)^{-1/2} \exp\left\{\frac{2\xi\xi' z - \left(\xi^2 + \xi'^2\right) z^2}{1 - z^2}\right\}, \tag{6.8}$$

nesta expressão agrupamos os termos em k_3 e k_0.

Fazendo uso da relação (veja [3], 5A.4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\lambda\left[(x - a)^2 + x^2\right]\right) dx = \exp\left(i\frac{\lambda a^2}{2}\right)\left(\frac{i\pi}{2\lambda}\right)^{1/2},$$

consequentemente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[i\left(bx - ax^2\right)\right] = \exp\left(i\frac{b^2}{4a}\right)\left(-\frac{i\pi}{a}\right)^{1/2},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[i\left(bx + ax^2\right)\right] = \exp\left(-i\frac{b^2}{4a}\right)\left(\frac{i\pi}{a}\right)^{1/2}, \tag{6.9}$$

fazendo $a = \Delta x_3/s$ e $\lambda = -s/2$ podemos resolver a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \exp\left(ik_3\left(x^3 - x^{3\ \prime}\right) - ik_3^2 s\right) = \exp\left(\frac{i}{2s}\left(\Delta x_3\right)^2\right) \times$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \exp\left\{-i\frac{s}{2}\left[\left(k_3 - \frac{\Delta x_3}{s}\right)^2 + k_3^2\right]\right\}$$
$$= \exp\left(\frac{i}{4s}\left(\Delta x_3\right)^2\right)\left(-\frac{i\pi}{s}\right)^{1/2}$$
$$\Delta x_3 = x^3 - x^{3\ \prime}. \tag{6.10}$$

Da mesma forma, fazendo $a = -\Delta x_0/s, \quad \lambda = s/2$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \exp\left(ik_0 \Delta x_0 + ik_0^2 s\right) = \exp\left(-\frac{i}{4s}\left(\Delta x_0\right)^2\right)\left(\frac{i\pi}{s}\right)^{1/2}$$

$$\Delta x_0 = x^0 - x^{0\ \prime}\ . \tag{6.11}$$

Substituindo (6.10) e (6.11) em (6.8) temos

$$\widetilde{G} = -\delta\left(\eta - \eta'\right)\int_0^{\infty} ds \exp\left[\frac{i}{2s}\left(\left(\Delta x_3\right)^2 - \left(\Delta x_0\right)^2\right)\right]\exp\left(-\frac{i}{4s}\left(\Delta x_3\right)^2\right)\times$$
$$\frac{1}{s}\exp\left(\frac{i}{4s}\left(\Delta x_0\right)^2\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left[\xi^2 + \xi'^{\,2}\right]/2\right)\times$$
$$\exp\left(-im^{*\,2}s\right)\left(1 - z^2\right)^{-1/2}\exp\left\{\frac{2\xi\xi' z - \left(\xi^2 + \xi'^2\right)z^2}{1 - z^2}\right\},$$
$$z = \exp\left[-i2\gamma s\right]\ . \tag{6.12}$$

Para voltarmos à representação das coordenadas, precisamos substituir este resultado em (6.5). Fazendo isso,

$$G = -\frac{m_0 c\gamma}{4\pi e\hbar}\frac{e^{-i(xy - x'y')}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, d\eta'\, e^{i\sqrt{2}(y\eta - y'\eta')}\delta\left(\eta - \eta'\right)\int_0^{\infty} ds\,\frac{1}{s}\times$$
$$\exp\left(-\frac{i}{4s}\left[\left(\Delta x_0\right)^2 - \left(\Delta x_3\right)^2\right]\right)\exp\left(-\left[\xi^2 + \xi'^{\,2}\right]/2\right)\exp\left(-im^{*\,2}s\right)\times$$
$$\left(1 - z^2\right)^{-1/2}\exp\left\{\frac{2\xi\xi' z - \left(\xi^2 + \xi'^2\right)z^2}{1 - z^2}\right\}.$$

Usando $\xi = \sqrt{2}x - \eta, \quad \xi' = \sqrt{2}x' - \eta'$ e realizando a integral em $\delta\left(\eta - \eta'\right)$ temos

$$G = -\frac{m_0 c\gamma}{4\pi e\hbar}\frac{e^{-i(xy - x'y')}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(x^2 + x'^2\right)\right)\int_0^{\infty} ds\times$$
$$\exp\left(-\frac{i}{4s}\left[\left(\Delta x_0\right)^2 - \left(\Delta x_3\right)^2\right]\right)\frac{1}{s}\exp\left(-im^{*\,2}s\right)\left(1 - z^2\right)^{-1/2}\times$$
$$\exp\left(\frac{1}{1 - z^2}\left(4xx'z - 2\left(x^2 + x'^2\right)z^2\right)\right)\times$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\ \exp\left\{i\left[\sqrt{2}\left[\left(y - y'\right) + \tan\left(\gamma s\right)\left(x + x'\right)\right]\eta - \tan\left(\gamma s\right)\eta^2\right]\right\}. \tag{6.13}$$

Precisamos agora realizar a integral acima em η, a qual tem a forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\ \exp\left\{i\left[b\eta+a\eta^2\right]\right\} = \exp\left(-\frac{i}{2a}b^2\right)\exp\left(\frac{i}{4a}b^2\right)\left(\frac{i\pi}{a}\right)^{1/2} ,$$

com $a=-\tan(\gamma s)$ e $b=\sqrt{2}\left[(y-y')+\tan(\gamma s)(x+x')\right]$, usando novamente (6.9) temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[i\left(bx+ax^2\right)\right] = \exp\left(\frac{i}{2\tan(\gamma s)}\left[(y-y')+\tan(\gamma s)(x+x')\right]^2\right)\left(-\frac{i\pi}{\tan(\gamma s)}\right)^{1/2} .$$

Com isto, (6.13) toma a forma

$$\begin{aligned} G = &-\frac{m_0 c\gamma}{4\pi e\hbar}\frac{e^{-i(xy-x'y')}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(x^2+x'^2\right)\right)\times \\ &\int_0^{\infty} ds\left(-\frac{i}{4s}\left[(\Delta x_0)^2-(\Delta x_3)^2\right]\right)\frac{1}{s}\exp\left(-im^{*\,2}s\right)\left(1-z^2\right)^{-1/2}\times \\ &\exp\left(\frac{z}{1-z^2}\left[4xx'-2\left(x^2+x'^2\right)z\right]\right)\times \\ &\exp\left(\frac{i}{2\tan(\gamma s)}\left[(y-y')+\tan(\gamma s)(x+x')\right]^2\right)\left(-\frac{i\pi}{\tan(\gamma s)}\right)^{1/2} . \end{aligned}$$

Usando agora $z=\exp(-i2\gamma s)$ e efetuando uma série de manipulações algébricas, obteremos finalmente

$$\begin{aligned} G\left(x^0,x^3,x,y,x^{0\prime},x^{3\prime},x',y'\right) = &-i\frac{m_0 c\gamma}{8\pi^2 e\hbar}\exp\left(i\left[x'y-xy'\right]\right)\times \\ &\int_0^{\infty} ds \exp\left[\frac{i}{4s}\left[(\Delta x_3)^2-(\Delta x_0)^2\right]\right]\frac{\exp\left(-im^2 s\right)}{s\sin(\gamma s)}\times \\ &\exp\left(\frac{i}{2\tan(\gamma s)}\left[(y-y')^2+(x-x')^2\right]\right) . \end{aligned} \quad (6.14)$$

Este resultado pode ser comparado com o obtido em [19]. Contudo, a arbitrariedade nas soluções da equação de Klein-Gordon, explicitada nas soluções (2.16), permitiu simplificar as integrais e somatórias envolvidas originalmente na resolução do problema.

Capítulo 7

Conclusão

O campo magnético uniforme é, provavelmente, o campo externo mais estudado em problemas de mecânica quântica e teoria quântica de campo. Muitos físicos, dentre eles Schrödinger, Landau e Rabi, ocuparam-se deste problema. Entre as razões para este interesse, podemos citar o fato deste campo, diferente do campo elétrico uniforme, permitir estados ligados e possuir aplicações diretas em vários ramos da física, como: a física de estado sólido, a de altas energias e a astrofísica. Pela exaustiva atenção que este problema recebeu, poderia se acreditar que sua análise estivesse esgotada. Entretanto, nosso desenvolvimento possibilitou um estudo mais sistemático deste problema e, além de reproduzir todas as soluções conhecidas, permitiu a descoberta de novas soluções. Assim, os capítulos 2 a 4 contém a mais completa descrição, até o momento, do problema do campo magnético uniforme em mecânica quântica relativística.

Dentre as aplicações físicas do campo magnético, temos: desde os fenômenos microscópicos, como na física de estado sólido, onde campos magnéticos estáticos são usados para estudar a condutividade de metais, através do efeito Haas-van Alphen; na física de altas energias, como sua aplicação no confinamento de partículas carregadas e o estudo do comportamento destas partículas em aceleradores; até a física de escalas astrônomicas, como na astrofísica, onde vários mecanismos de generalização têm sido sugeridos para explicar o campo magnético, da ordem de $\sim 10^{-6}G$, observado em galáxias, e em cosmologia, pois certas teorias propõem um universo primordial preenchido por um intenso *campo magnético primordial*.

Tecnicamente, além da utilização direta em mecânica quântica, onde as soluções exatas encontradas descrevem o comportamento de uma partícula carregada, estas soluções podem ser usadas para o cálculo de propagadores, o que permite utilizá-las para efetuar cálculos exatos em eletrodinâmica quântica, sem a necessidade de decomposições perturbativas. Neste aspecto, é interessante destacarmos as soluções para o campo longitudinal do capítulo 5, pois, a presença de um campo elétrico permite tratar problemas onde haja a criação de pares e, neste caso, o método perturbativo de Furry apresenta uma série de dificuldades [2].

Nosso procedimento para explicitar a arbitrariedade nas soluções das equações de onda relativísticas, no caso do campo magnético uniforme, através de uma transformação que permitiu diminuir o número de variáveis na equação original, levou a questões sobre a generalização deste fenômeno, ou seja, quais devem ser as características do sistema para que um procedimento semelhante possa ser aplicado. Neste sentido, nossos resultados se mostraram uma excelente ilustração de um fenômeno presente na teoria geral das equações diferenciais. O desenvolvimento deste tema foi realizado em conjunto com o matemático Professor Shirokov[1], e permitiu apresentar uma descrição matemática precisa do problema. Nesta descrição, pudemos destacar as características relevantes para a generalização do problema particular tratado neste trabalho. Tais resultados encontram-se no artigo [22] e estão reproduzidos no Apêndice B. Contudo, estes resultados não serão discutidos aqui, uma vez que tal tratamento foge ao escopo desta dissertação.

[1]I.V. Shirokov, Omsk State University, Russia.

Apêndice A

Relações de completeza e ortogonalidade

Neste apêndice, discutiremos algumas propriedades de ortogonalidade das soluções apresentadas neste trabalho. Para isto, estaremos considerando o produto interno (**3.8**),

$$(\Psi_n, \Psi_{n'}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \Psi_n^* (x, y)\, \Psi_{n'} (x, y) = \delta_{n'n} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta\ \Phi^* (\eta)\, \Phi (\eta) \ ,$$

o qual ocorre no espaço de duas dimensões x, y ou ρ, φ. Em virtude da relação acima, e sendo Ψ_n autofunções do operador hermitiano $\mathcal{N}$ (2.6), todas as soluções consideradas são ortogonais em relação ao numero quântico n. Contudo, uma verificação explícita deste fato necessita de certas propriedades das funções de Hermite e Laguerre, e pode conter algumas dificuldades técnicas.

Por exemplo, fazendo $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ em (3.32) teremos, na representação das coordenadas, as seguintes soluções

$$\Phi_{n,s,z} (x, y) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x + iy - z}{x - iy - z^*} \right)^{\frac{n-s}{2}} e^M I_{n.s} \left(|x + iy - z|^2 \right), \tag{A.1}$$

$$M = z (x - iy) - z^* (x + iy) \ ,$$

usando a ortogonalidade das funções de Laguerre, podemos verificar que estas soluções obedecem a seguinte relação de ortonormalidade

$$\left(\Phi_{n',s',z}, \Phi_{n,s,z}\right) = \delta_{n,n'}\delta_{s,s'} \; . \tag{A.2}$$

Consequentemente, o conjunto (3.15) obedecerá a mesma relação. Esta ortogonalidade não está presente para diferentes valores de z. Pois, neste caso, a seguinte relação entre as funções de Hermite:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_n\left(x+a\right) U_m\left(x+b\right) e^{\alpha x}\, dx = \left(\frac{b-a+\alpha}{b-a-\alpha}\right)^{\frac{m-n}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2}(a+b)} I_{m,n}\left[\frac{\left(b-a\right)^2-\alpha^2}{2}\right] , \tag{A.3}$$

nos permite escrever

$$\left(\Phi_{n',s',z'}, \Phi_{n,s,z}\right) = \delta_{n,n'} R_{s',s}\left(z', z\right) \; , \tag{A.4}$$
$$R_{s',s}\left(z',z\right) = \left(\frac{z-z'}{z^*-z'^*}\right)^{\frac{s'-s}{2}} \exp\left[\frac{1}{2}\left(zz'^*-z^*z'\right)\right] I_{s',s}\left(\left|z-z'\right|^2\right) \; .$$

Para as funções (3.32), o produto interno não depende de α e β e coincide com (A.4), ou seja, $\left(\Phi^{\alpha,\beta}_{n',s',z'}, \Phi^{\alpha,\beta}_{n,s,z}\right) = \delta_{n',n} R_{s',s}\left(z',z\right)$. Apenas o conjunto (3.28) é ortogonal em relação ao índice z,

$$\left(\Psi^{\mu}_{n',z'}, \Psi^{\mu}_{n,z}\right) = \delta_{n.n'}\delta\left(z-z'\right) \; . \tag{A.5}$$

Todos os outros conjuntos de funções (com exceção de (3.32), pois é ortogonal em relação aos dois índices n e s), são ortogonais apenas em relação ao índice n. Vamos considerar alguns casos.

Para o conjunto (3.40) temos

$$\left(\Psi^{\alpha,\beta}_{n',z'}, \Psi^{\alpha,\beta}_{n,z}\right) = \delta_{n,n'} \exp S,\ 2S = zz'^* - z^*z' - \left|z-z'\right|^2 \; . \tag{A.6}$$

A mesma relação é válida para as funções (3.41), as quais são um caso particular de (3.40). Usando (3.41) podemos derivar de (A.6) a relação

$$\left(\varphi_{n',z'}, \varphi_{n,z}\right) = \delta_{n.n'} \exp\left(zz'^*\right) \; , \tag{A.7}$$

com as funções $\varphi_{n,z}$ definidas em (3.41).

Para o conjunto (3.43), podemos derivar a relação de ortonormalidade da seguinte forma. Primeiramente, podemos encontrar

$$\left(\bar{\Psi}_{n',s',z'}, \bar{\Psi}_{n,s,z}\right) = N^* N \delta_{n,n'} \mathcal{J}^n_{s,s'}\left(z, z'\right) \ ,$$
$$\mathcal{J}^n_{s,s'}\left(z, z'\right) = \left[\Gamma\left(s+1\right)\Gamma\left(s'+1\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^{s'}}{\partial z'^{*\,s'}} \frac{\partial^{s}}{\partial z^{s}} \left(\varphi_{n',z'}, \varphi_{n,z}\right) \ .$$

Utilizando a equação (A.7) temos

$$\mathcal{J}^n_{s,s'} = \sqrt{\frac{\Gamma\left(s+1\right)}{\Gamma\left(s'+1\right)}} z^{s'-s} e^{zz'^*} L_s^{s'-s}\left(-zz'^*\right), \ s \leq s' \ ,$$
$$\mathcal{J}^n_{s,s'} = \sqrt{\frac{\Gamma\left(s'+1\right)}{\Gamma\left(s+1\right)}} z^{s-s'} e^{zz'^*} L_{s'}^{s-s'}\left(-zz'^*\right), \ s' \leq s \ . \tag{A.8}$$

Onde $L_s^{\alpha}\left(x\right)$ são os polinômios de Laguerre. Então, podemos ver que as funções $\bar{\Psi}_{n,s,z}$ são normalizadas à unidade se o fator de normalização em (3.43) tiver a forma

$$N = N_s\left(z\right) = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right)\left[L_s\left(-|z|^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \ . \tag{A.9}$$

A normalização acima sempre existe, uma vez que $L_s\left(x\right) > 0$ para $x < 0$ (todas as raízes dos polinômios de Laguerre são positivas).

Vamos tratar agora as relações de completeza para alguns dos conjuntos de soluções obtidos.

Comecemos pelas soluções (3.15). Considere a soma

$$F\left(x, y; x', y'; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \Psi^*_{n,s}(x', y')\Psi_{n,s}(x, y) z^n, \ |z| < 1 \ . \tag{A.10}$$

Esta soma pode ser calculada utilizando as propriedades da função de Laguerre [15],

$$F = \frac{1}{\pi\left(1-z\right)} \exp\left[-\mu\left(x-x'\right)^2 - \mu\left(y-y'\right)^2 + i\left(xy' - x'y\right)\right] \ ,$$
$$\mu = \frac{1}{1-z} - \frac{3}{2} \ . \tag{A.11}$$

Agora, vamos considerar a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' F\left(x, y; x', y'; z\right) f\left(x', y'\right) = \mathcal{J}\left(x, y; z\right) \ , \tag{A.12}$$

a qual existe no domínio

$$\left|z-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{3}\,, \tag{A.13}$$

se, por exemplo, a função $f\left(x,y\right)$ é uma função de crescimento limitado. A restrição (A.13) é mais rígida que $|z|<1$. Realizando a seguinte mudança de variável

$$x'=\frac{p}{\sqrt{\mu}}+x-\frac{iy}{2\mu},\; y'=\frac{q}{\sqrt{\mu}}+y+\frac{ix}{2\mu},\; dx'\,dy'=\frac{1}{\mu}dp\,dq\,,$$

em (A.12), podemos reduzir $\mathcal{J}$ à seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}&=\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}dq\,f\left(x+\frac{p}{\sqrt{\mu}}-\frac{iy}{2\mu},y+\frac{q}{\sqrt{\mu}}+\frac{ix}{2\mu}\right)G\,,\\
G&=\frac{1}{\mu}F\left(x,y;x+\frac{p}{\sqrt{\mu}}-\frac{iy}{2\mu},y+\frac{q}{\sqrt{\mu}}+\frac{ix}{2\mu};z\right)\,.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Tomando o limite $z\to 1$ pela esquerda, z permanecerá na área (A.13). Neste caso, $\mu\to\infty$. Então, segue de (A.11) e (A.14) que

$$\lim_{z\to 1-0}G=\frac{1}{\pi}\exp\left(-p^2-q^2\right),\;\lim_{z\to 1-0}\mathcal{J}\left(x,y;z\right)=f\left(x,y\right)\,.$$

Assim, pela arbitrariedade da função $f\left(x,y\right)$ podemos obter a relação

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\Psi_{n,s}^{*}(x',y')\Psi_{n,s}(x,y)=\delta\left(x-x'\right)\delta\left(y-y'\right)\,, \tag{A.15}$$

que representa a relação de completeza para as funções $\Psi_{n,s}(x,y)$.

De forma semelhante, usando (A.3),podemos obter tais relações para as funções $\Psi_{n,z}^{\mu}$ (3.28),

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_{n,z}^{\mu\,*}\left(x',y'\right)\Psi_{n,z}^{\mu}\left(x,y\right)=\delta\left(x-x'\right)\delta\left(y-y'\right)\,. \tag{A.16}$$

Para o conjunto ortonormal (3.41) de funções $\Psi_{n,z}$ a relação de completeza

$$\begin{aligned}
&\int d^2z\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_{n,z}^{*}(x',y')\Psi_{n,z}(x,y)=\pi\delta\left(x-x'\right)\delta\left(y-y'\right)\\
&d^2z=d\,\mathrm{Re}\,z d\,\mathrm{Im}\,z,
\end{aligned} \tag{A.17}$$

pode ser derivada da seguinte maneira. Utilizando a forma explícita das funções $\Psi_{n,z}$ podemos determinar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Psi^*_{n,z}(x',y')\Psi_{n,z}(x,y) = \frac{1}{\pi}\exp\left[iw - \frac{1}{2}(x-x')^2 - \frac{1}{2}(y-y')^2\right],$$

$$w = yx' - xy' + (x-x')(z+z^*) + i(y-y')(z^*-z)\ .$$

Se usarmos as relações $z+z^* = 2\,\mathrm{Re}\,z,\ i(z^*-z) = 2\,\mathrm{Im}\,z$, obteremos (A.17).

Cálculos mais complicados, envolvendo a fórmula (A.3), permitem estabelecer relações de completeza semelhantes à (A.17) para as funções (3.40).

O conjunto (3.39) é completo para um dado z,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \Psi^*_{n,s,z}(x',y')\Psi_{n,s,z}(x,y) = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\ , \tag{A.18}$$

onde $\Psi_{n,s,z}(x,y) = \Psi^{1,0}_{n,s,z}(x,y)$, e em relação ao índice s

$$\int d^2z \sum_{n=0}^{\infty} \Psi^*_{n,s',z}(x',y')\Psi_{n,s,z}(x',y') = \pi\delta_{s,s'}\delta(x-x')\,\delta(y-y')\ . \tag{A.19}$$

A verificação de (A.18) é similar à realizada para obter (A.15), enquanto a verificação de (A.19) se assemelha à de (A.17).

Para obter uma relação de completeza para as funções $\Phi^{\alpha,\beta}_{s,z}(\eta)$ (3.32), podemos usar a igualdade

$$\int d^2z \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{*\,\alpha,\beta}_{s',z}(\eta')\,\Phi^{\alpha,\beta}_{s,z}(\eta) = \pi\delta_{s,s'}\delta(\eta-\eta')\ , \tag{A.20}$$

e a forma explícita das funções $\Phi^{\alpha,\beta}_{s,z}(\eta)$ na representação de semimomento. Para estas funções obteremos as relações (A.18) e (A.19).

Apêndice B

Peculiaridades na integração de equações diferenciais lineares com simetrias não comutativas

Vamos retornar aos resultados obtidos anteriormente do ponto de vista da teoria geral das equações diferenciais. Lembrando que tivemos sucesso em obter explicitamente as transformações (2.9)-(2.12), as quais reduzem o número de variáveis nas equações iniciais. De fato, este foi o ponto principal de toda a construção. Entretanto, pode-se ver que esta "redução" de variáveis é um exemplo particular de uma situação mais geral, a qual descreveremos sucintamente a seguir.

Considere inicialmente o caso de um sistema hamiltoniano clássico integrável de dimensão $2N$ e com hamiltoniana H. Suponha que este sistema possui N integrais do movimento independentes que estão em involução. É bem conhecido que, em tal caso, temos variáveis do tipo ângulo-ação (J, φ), e o hamiltoniano depende apenas das variáveis de ação, $H = H(J)$. Vamos supor que este sistema possua mais uma integral do movimento independente Y. Sendo Y independente, ela não pode comutar com as integrais anteriores e, portanto, Y precisa depender das variáveis de ângulo. Pode-se demonstrar que, em tal caso, o sistema hamiltoniano é degenerado, $\det ||\partial H(J)/\partial J_i \partial J_j|| = 0$ e, portanto, o hamiltoniano não depende de algumas combinações das variáveis de ação. Por exemplo, suponha que a integral Y não comute apenas com J_N. Então, o hamiltoniano pode depender apenas das variáveis $J_1, \ldots, J_{N-1}$, caso contrário, H não comutaria com Y. Assim, vemos que a álgebra não comutativa das integrais do movimento permite encontrar variáveis canônicas, nas quais parte das variáveis de ação correspondentes desaparecem do hamiltoniano. Este fenômeno está intimamente relacionado com as propriedades topológicas das órbitas do sistema hamiltoniano. Explicitamente, trajetórias do sistema hamiltoniano integrável com um conjunto comutativo N-dimensional de integrais do movimento formam (no caso compacto) uma espiral de N torus num espaço de fase de dimensão $2N$. Se o conjunto de integrais não é comutativo, a dimensão deste torus é $r < N$ (veja [20]).

O fenômeno de "redução" das variáveis tem lugar também num sistema hamiltoniano integrável quântico. Como demonstraremos a seguir, construindo um isomorfismo especial do espaço das funções lineares, podemos transformar o operador diferencial de uma equação inicial em um outro, com um número reduzido de variáveis. O método que iremos usar para esta demonstração é, de fato, a análise harmônica das funções de álgebras não comutativas.

Considere a equação diferencial

$$H(x, \partial_x)\psi(x) = 0\,, \tag{B.1}$$

para funções $\psi(x) \in \mathcal{L}$ de N variáveis independentes $x \in R^N$. O espaço $\mathcal{L} \subset C^\infty(R^N)$ e depende do problema em consideração. Algumas suposições sobre $\mathcal{L}$ serão introduzidas a seguir. Suponha que a equação (B.1) admite uma álgebra não comutativa de operadores de simetria funcionalmente independentes $\mathcal{F} = \{X_a(x, \partial_x)\}$. A relação de comutação correspondente é, no caso geral não linear,

$$\frac{i}{\hbar}[X_a, X_b] = \Omega_{ab}(X), \quad a, b = 1, \ldots, n \equiv \dim \mathcal{F}.. \tag{B.2}$$

Aqui $\Omega_{ab}(X)$ são funções de operadores de simetria. O caso linear, quando $\Omega_{ab}(X) = C^c_{ab}X_c$, corresponde à álgebra de Lie, as funções simétricas quadráticas $\Omega_{ab}(X)$ correspondem a uma álgebra quadrática, e assim por diante. A álgebra $\mathcal{F}$ corresponde à álgebra $\mathcal{F}' = \{Y_\alpha(x, \partial_x)\}$ dos operadores invariantes em $\mathcal{L}$:

$$[X_a, Y_\alpha] = 0, \quad \frac{i}{\hbar}[Y_\alpha, Y_\beta] = \omega_{\alpha\beta}(Y), \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n' \equiv \dim \mathcal{F}'. \tag{B.3}$$

Denotaremos por $E(\mathcal{F})$ e $E(\mathcal{F}')$ "*envelopping fields*" para as álgebras $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$, respectivamente. Elementos de $E(\mathcal{F})$ e $E(\mathcal{F}')$ são funções de operadores simetrizados, dos operadores geradores X_a Y_α. Está claro que os centros dos *envelopping fields* coincidem, i.e., $Z(E(\mathcal{F})) = Z(E(\mathcal{F}'))$. Os elementos do centro $Z = Z(E(\mathcal{F}))$ são chamados operadores de Casimir. O número de operadores de Casimir independentes, os quais geram o centro Z, é chamado o índice da álgebra $\mathcal{F}$: $r \equiv \operatorname{ind} \mathcal{F} = \operatorname{ind} \mathcal{F}'$. Se substituirmos os operadores X e Y nas funções de operadores $\omega_{\alpha\beta}(Y)$ e $\Omega_{ab}(X)$ por números complexos arbitrários ξ e f, então o índice das álgebras $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ pode ser calculado, de acordo com a fórmula

$$r = \sup_{\xi \in C} \operatorname{corank} \Omega_{ab}(\xi) = \sup_{f \in C} \operatorname{corank} \omega_{\alpha\beta}(f)\,. \tag{B.4}$$

Pode-se mostrar que a seguinte relação é válida

$$n + n' = 2N. \tag{B.5}$$

Vamos introduzir a noção da representação λ da álgebra $\mathcal{F}$ [21]. De fato, a representação λ é o resultado da quantização dos parênteses de Poisson clássicos e pode ser entendida como a realização da álgebra $\mathcal{F}$ por um conjunto irredutível de operadores $\tilde{X} = \tilde{X}(q, \partial_q, j)$, dependentes de r parâmetros $j = (j_1, \ldots, j_r)$, e atuando num espaço de funções de $[q] = (n - r)/2$ variáveis independentes [1], $q \in Q$, ou seja,

$$\frac{i}{\hbar}[\tilde{X}_a, \tilde{X}_b] = -\Omega_{ab}(\tilde{X}), \quad K_\mu(\tilde{X}(q, \partial_q, j)) = \kappa_\mu(j), \quad \det \left\| \frac{\partial \kappa_\mu(j)}{\partial j_\nu} \right\| \neq 0\,. \tag{B.6}$$

Aqui, K_μ são todos os operadores de Casimir independentes da álgebra $\mathcal{F}$. De forma similar, construiremos a representação λ $\{\tilde{Y}\}$ de $\mathcal{F}$, em um espaço de funções de $[q'] = (n' - r)/2$ variáveis independentes, $q' \in Q'$,

$$\frac{i}{\hbar}[\tilde{Y}_\alpha, \tilde{Y}_\beta] = \omega_{\alpha\beta}(\tilde{Y}), \quad K'_\mu(\tilde{Y}(q', \partial_{q'}, j)) = K_\mu(\tilde{X}(q, \partial_q, j)) = \kappa_\mu(j)\,. \tag{B.7}$$

[1] Por $[q]$ denotamos o número de variáveis q, uma notação similar será usada no que segue.

Suponha que nos espaços das funções de x, q e q' estão definidos os produtos escalares

$$(\varphi, \psi) = \int_{R^N} \overline{\varphi(x)}\psi(x)d\mu(x),\ (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = \int_{Q} \overline{\tilde{\varphi}(q)}\tilde{\psi}(q)d\mu(q),\ (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})' = \int_{Q'} \overline{\tilde{\varphi}(q')}\tilde{\psi}(q')d\mu(q'), \tag{B.8}$$

onde $d\mu(x)$, $d\mu(q)$, e $d\mu(q')$ são as medidas em R^N, Q e Q', respectivamente. E suponha que os operadores $X_a(x, \partial_x)$, $Y_\alpha(x, \partial_x)$ e os operadores $\tilde{X}_a(q, \partial_q, j), \tilde{Y}(q', \partial_{q'}, j)$ são autoconjugados, com respeito ao produto escalar correspondente (esta suposição não é necessária e é introduzida para simplificar as considerações). Agora, definimos o conjunto das distribuições $D^j_{qq'}(x)$ como uma solução do sistema de equações superdeterminado:

$$\left[X_a(x, \partial_x) - \tilde{X}_a(q, \partial_q, j)\right] D^j_{qq'}(x) = 0;\ \left[Y_\alpha(x, \partial_x) - \tilde{Y}_a(q', \partial_{q'}, j)\right] D^j_{qq'}(x) = 0\,. \tag{B.9}$$

A distribuição $D^j_{qq'}(x)$ obedece as seguintes relações de completeza e ortogonalidade

$$\int \overline{D^j_{qq'}(x)} D^{\tilde{j}}_{\tilde{q}\tilde{q}'}(x)\, d\mu(x) = \delta(j, \tilde{j})\delta(q, \tilde{q})\delta(q', \tilde{q}'); \tag{B.10}$$

$$\int \overline{D^j_{qq'}(x)} D^j_{qq'}(\tilde{x})\, d\mu(j)d\mu(q)d\mu(q') = \delta(x, \tilde{x}). \tag{B.11}$$

Aqui, $d\mu(j)$ é a medida espectral dos operadores de Casimir $K(X)$ $(= K'(Y))$. Pelas equações (B.6), (B.7) e (B.9) temos que as distribuições $D^j_{qq'}(x)$ são autofunções dos operadores de Casimir,

$$K_\mu(X(x, \partial_x))D^j_{qq'}(x) = \kappa_\mu(j)D^j_{qq'}(x), \quad \mu = 1, \ldots, r\,. \tag{B.12}$$

Usualmente, pode-se encontrar $D^j_{qq'}(x)$ por integração, ao menos nos casos em que $\mathcal{F}$ é uma álgebra de Lie. Como consequência de (B.11) e (B.10), podemos definir as transformadas de Fourier direta e inversa

$$\tilde{\psi}(q, q', j) = \int D^j_{qq'}(x)\overline{\psi(x)}\, d\mu(x)\,, \tag{B.13}$$

$$\psi(x) = \int D^j_{qq'}(x)\overline{\tilde{\psi}(q, q', j)}d\mu(j)d\mu(q)d\mu(q')\,. \tag{B.14}$$

As equações (B.13) e (B.14) estabelecem um isomorfismo entre os espaços $\mathcal{L}$ e $\tilde{\mathcal{L}} = \{\tilde{\psi}\}$. É importante salientar que sob este isomorfismo os operadores X e Y são transformados em operadores diferentes $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$, os quais atuam num espaço de funções que dependem de um número menor de variáveis,

$$X(x,\partial_x)\psi(x) \leftrightarrow \tilde{X}(q,\partial_q,j)\tilde{\psi}(q,q',j), \quad Y(x,\partial_x)\psi(x) \leftrightarrow \tilde{Y}(q',\partial_{q'},j)\tilde{\psi}(q,q',j). \qquad \text{(B.15)}$$

Retornemos à equação (B.1). Aqui, podemos concluir que $H \in E(\mathcal{F}')$, uma vez que o operador H comuta com todos os operadores da álgebra $\mathcal{F} = \{X_a\}$. Por sua vez, isto implica na existência de um operador funcional $H(Y)$, tal que $H(x,\partial_x) = H(Y(x,\partial_x))$. Vamos procurar por soluções da equação (B.1) na forma (B.14). Usando o isomorfismo (B.15), temos:

$$H(\tilde{Y}(q',\partial_{q'},j))\tilde{\psi}(q,q',j) = 0. \qquad \text{(B.16)}$$

Então, partindo da equação (B.1), sem a perda de qualquer informação, podemos obter uma equação diferencial com $\tilde{N} = [q'] = (n'-r)/2$ variáveis independentes. Levando em conta (B.5), pode-se obter

$$\tilde{N} = N - \frac{1}{2}(\dim\mathcal{F} + \operatorname{ind}\mathcal{F}). \qquad \text{(B.17)}$$

Então, a existência de uma álgebra simétrica não comutativa resulta no fenômeno de redução de variáveis. Realmente, começamos com $N = [q'] + [q] + r$ variáveis, $[q]$ variáveis desapareceram completamente e $r = [j]$ variáveis permaneceram nas equações como alguns parâmetros. A solução da equação (B.16) contém como fator uma função arbitrária das variáveis q e j. O número de variáveis q é igual a $[q] = (n-r)/2 = (\dim\mathcal{F} - \operatorname{ind}\mathcal{F})/2$. No caso comutativo, $\operatorname{ind}\mathcal{F} = \dim\mathcal{F}$ e $[q] = 0$. Já no caso não comutativo, $\dim\mathcal{F} > \operatorname{ind}\mathcal{F}$ e $[q] > 0$. Então, a redução de variáveis sempre tem lugar quando existe uma álgebra não comutativa das integrais do movimento.

Vamos aplicar as considerações acima para a equação de Klein-Gordon (2.1) num campo magnético uniforme. Neste caso, temos quatro ($N = 4$) variáveis e cinco ($n = 5$) operadores de simetria independentes, $\mathcal{F} = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_3, a_2, a_2^+, L_z = \hbar L\}$,

$$\mathcal{P}_0 = i\hbar\partial_0,\ \mathcal{P}_3 = i\hbar\partial_3,\ L = u\partial_u - \bar{u}\partial_{\bar{u}}\,,\ a_2 = \partial_{\bar{u}} + u/2,\ a_2^+ = -\partial_u + \bar{u}/2\,,\ u \equiv x + iy\,.$$

As relações de comutação não nulas são $[a_2, a_2^+] = 1$, $[L, a_2] = a_2$, $[L, a_2^+] = -a_2^+$. Segue de (B.4) que $r = \operatorname{ind}\mathcal{F} = 3$ e, de acordo com (B.17), $\tilde{N} = [q'] = 0$ $\mathcal{K} \in Z$. Então, a equação (B.16) apresenta relações algébricas nos parâmetros j (e nos parâmetros da própria equação). Além disto, $\dim \mathcal{F}' = 3 = r$, em virtude de (B.5). Então, a álgebra dos operadores invariantes está completamente localizada no centro. Ou, de forma mais simples, não existem operadores $Y, \tilde{Y}$ e variáveis q' no caso em consideração. O centro Z é gerado pelos três operadores de Casimir, os quais são $K_1 = \mathcal{P}_0$, $K_2 = \mathcal{P}_3$, $K_3 = \mathcal{N} = L + a_2^+ a_2 = L + \frac{1}{2}(a_2^+ a_2 + a_2 a_2^+ - 1)$.

Vamos construir a representação λ da álgebra $\mathcal{F}$:

$$\tilde{\mathcal{P}}_0 = j_1 = \hbar k_0\,,\ \tilde{\mathcal{P}}_3 = j_2 = \hbar k_3\,,\ \tilde{a}_2 = q\,,\ \tilde{a}_2^+ = \partial_q\,,\ \tilde{L} = -q\partial_q + n\,,\ n = j_3 = 0, 1, \ldots\,.$$

Os operadores $\tilde{a}_2$ e $\tilde{a}_2^+$ são mutuamente conjugados, com respeito ao produto escalar (B.8) e com a medida $d\mu(q) = \exp(-q\bar{q})d^2q/\pi$, $(d^2q \equiv dq_1 dq_2,\ q = q_1 + iq_2)$. Os operadores $\tilde{L}$ são autoconjugados, e o espaço $\tilde{\mathcal{L}}$ é construído das funções analíticas dependentes da variável q e dos parâmetros $j = (k_0, k_3, n)$. Aqui, os operadores de Casimir $\tilde{\mathcal{N}}$ possuem a seguinte forma $\tilde{\mathcal{N}} = \tilde{L} + \frac{1}{2}(\tilde{a}_2^+ \tilde{a}_2 + \tilde{a}_2 \tilde{a}_2^+ - 1) = n$.

Das equações (B.9) podemos encontrar o conjunto $D_q^j(x)$, o qual obedece as devidas relações de completeza e ortogonalidade. Tal conjunto tem a forma

$$D_q^j(x) = e^{i(k_0 x^0 + k_3 x^3)} e^{q\bar{u} - u\bar{u}/2} (u - q)^n / (2\pi\sqrt{\pi n!})\,, \tag{B.18}$$

$$\int \overline{D_q^j(x)} D_{\tilde{q}}^{\tilde{j}}(x)\, dx = \delta(k_0 - \tilde{k}_0)\delta(k_3 - \tilde{k}_3)\delta(\tilde{q}, q)\delta_{n\tilde{n}}\,, \tag{B.19}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int \overline{D_q^j(x)} D_q^j(\tilde{x})\, dk_0 dk_3 d\mu(q) = \delta(x^0 - \tilde{x}^0)\delta(x^3 - \tilde{x}^3)\delta(x - \tilde{x})\delta(y - \tilde{y}). \tag{B.20}$$

Na equação (B.19) $\delta(\tilde{q}, q) = \exp(\bar{q}\tilde{q})$ é uma função δ com respeito à medida $d\mu(q)$. Para justificar a validade de (B.19) e (B.20) pode-se usar as seguintes relações [18]

$$\int \overline{v_n(q)} v_m(q)\, d\mu(q) = \delta_{nm},\ \sum_{n=0}^{\infty} \overline{v_n(q)} v_n(\tilde{q}) = \delta(\tilde{q}, q) = \exp(\bar{q}\tilde{q})\,,\ v_n(q) \equiv q^n/\sqrt{n!}\,.$$

Como mencionamos anteriormente, o operador de Klein-Gordon $\mathcal{K}$ pertence ao centro Z e, portanto, pode ser representado na forma de um polinômio dos operadores de Casimir

$\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_3, \mathcal{N}$, os quais geram este centro. Tal representação é dada pela equação (2.7). A equação de Klein-Gordon no espaço $\tilde{\mathcal{L}}$, i.e., a equação (B.16) é, de fato, a relação (3.2) para os parâmetros $j = (k_0, k_3, n)$. Então, as funções (B.18) formam uma base da equação de Klein-Gordon (2.1) (levando em conta (3.2).

Referências Bibliográficas

[1] S.S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, (Harper and Row, NY 1961)

[2] E.S. Fradkin, D.M. Gitman and S.M. Shvartsman, *Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum* (Springer-Verlag, Berlin 1991)

[3] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, (Cambrudge University Press, NY 1986)

[4] V.G. Bagrov and D.M. Gitman, *Exact Solutions of Relativistic Wave Equations*, (Kluwer, Dordrecht, Boston, London 1990)

[5] I.I. Rabi, Zeit. Phys. **49** (1928) 507

[6] L. Page, Phys. Rev. **36** (1930) 444

[7] M.S. Plesset, Phys.Rev. **36** (1930) 1728

[8] L.D. Huff, Phys. Rev. **38** (1931) 501

[9] F. Sauter, Zeit. Phys. **39** (1931) 742

[10] A. Jannussis, Zeit. Phys. **190** (1966) 129

[11] A.A. Borgard and D.Ja. Karpenko, Ukr.Fiz.Journ. **19** (1974) 227; **20** (1975) 566

[12] V.G. Bagrov, I.L. Buchbinder, and D.M. Gitman, Sov. Phys. Journ. **18** (1975) 134

[13] V.V. Dodonov, I.A. Malkin, and V.I. Man'ko, Physica A **82** (1976) 113

[14] V.G. Bagrov, I.L. Buchbinder, and D.M. Gitman, Journ. Phys. **A9** (1976) 1955

[15] I.S. Gradshtein and I.W. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic. New-York, 1994)

[16] H. Bateman, A. Erdélyi, *Higher Transcendental Functions* (McGraw-Hill, NY 1955)

[17] V.G. Bagrov, D.M. Gitman, and V.A. Kuchin, Sov. Phys. Journ. **9** (1975) 13

[18] A.M. Perelomov, *Generalized coherent states*, (Nauka, Moscow 1987)

[19] S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, A.E. Gonçalves, Jounal of Mathematical Physics, **7** (1988) 3547

[20] A.T. Fomenko, *Symplectic geometry*, (Moscow Univ. Press, Moscow 1983)

[21] I.V. Shirokov, Theor. and Math. Phys. **123** (2000) 754; math-ph/0101028

[22] V.G. Bagrov, M.C. Baldiotti, D.M. Gitman, *New solutions of relativistic wave equations in magnetic fields and longitudinal fields*, Journal of Mathematical Physics, **43** (2002) 2284