

**Universidade de São Paulo**

Instituto de Física

**Determinação de alguns  
parâmetros da teoria de  
perturbação quiral**

Gabriel Rocha de Santana Zarnauskas

Orientador: Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de doutor em Ciências.

**Banca Examinadora**

Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta (Orientador - IFUSP)

Prof. Dr. Airton Deppman (IFUSP)

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar (IFT)

Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes (IFUSP)

Prof. Dr. Tereza Mendes (IFSC)

São Paulo

2010

**FICHA CATALOGRÁFICA**  
**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação**  
**do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Zarnauskas, Gabriel Rocha de Santana

Determinação de alguns parâmetros da teoria de perturbação quiral. São Paulo, 2010.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.  
Instituto de Física – Depto. de Física Nuclear

Orientador: Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta  
Área de Concentração: Física das Partículas  
Elementares e Campos

Unitermos: 1. Partículas; 2. Cromodinâmica Quântica;  
3. Teoria Quântica Relativística

USP/IF/SBI-064/2010

Para os meus pais, Ana e José,  
e meu irmão, Frederico.

**“Infinito**

Ó múmia longa,  
ante os teus séculos,  
eu durmo ainda...”

João Guimarães Rosa, *Magma*.

# Agradecimentos

- Agradeço aos meus pais, Ana e José, e ao meu irmão, Frederico, pelo apoio e imenso carinho e amor durante cada momento da minha vida.
- I would like to thank my wife, Emma, without whose love, encouragement and help I would have had a much harder time finishing this thesis.
- Agradeço ao meu orientador, Prof. Mané, pela orientação, apoio e paciência durante todos esses 8 anos.
- I would like to thank Prof. Gasser for the supervision of the work performed during the year I spent at the University of Bern.
- Agradeço a minha família, em especial, a minha prima Fabíola, pelo apoio e carinho.
- Agradeço aos meus amigos da USP e do colégio que me apoiaram e incentivaram durante todo o doutorado.
- I would like to thank my friends in Switzerland for the support during my stay there.
- Eu agradeço ao pessoal do GRHAFITE pelo ambiente agradável e pelo apoio.
- Agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro no Brasil e à CAPES pelo apoio financeiro durante o ano que passei na Suíça.



# Resumo

A teoria de perturbação quiral (ChPT) é aceita, atualmente, como a teoria efetiva da cromodinâmica quântica (QCD) para baixas energias. Ela foi colocada na sua versão moderna com os artigos de Gasser e Leutwyler, na primeira metade da década de 80 e, durante os 25 anos que se seguiram, ocorreu um aumento considerável da variedade de fenômenos por ela descritos, sempre acompanhando a precisão crescente dos resultados experimentais. Os trabalhos que apresentamos nesta tese de doutorado se inserem neste contexto e envolvem duas partes, ambas relacionadas à determinação de alguns dos parâmetros que compõem a lagrangiana da ChPT. Por ser uma teoria efetiva, tais constantes só podem ser fixadas por experimentos, modelos ou por cálculos da QCD na rede. Em um dos trabalhos, discutimos a constante de decaimento do pión,  $F_\pi$ , e os efeitos decorrentes do acréscimo de interações eletromagnéticas à ChPT. Nós argumentamos que as incertezas estimadas para o valor mais aceito de  $F_\pi$  podem estar subestimadas. Mostramos, também, que não se pode determinar esta constante na presença das interações eletromagnéticas, pois a grandeza de onde ela é extraída adquire uma dependência no calibre utilizado no cálculo e tem suas propriedades alteradas drasticamente. No outro trabalho, abordamos os fatores de forma escalares dos mésons pseudoescalares em três sabores. A partir dos resultados obtidos com a ChPT e do uso de um modelo que trata dos fatores de forma no espaço das posições, conseguimos escrevê-los em termos apenas das constantes presentes na lagrangiana em ordem dominante da ChPT,  $F_\pi$  e as massas dos mésons pseudoescalares. Nós determinamos, também, os respectivos raios quadráticos médios e, comparando-os com os calculados com a ChPT, obtivemos as LECs  $L_4^r(\mu) = -0,26 \cdot 10^{-3}$  e  $L_5^r(\mu) = 0,85 \cdot 10^{-3}$ , para  $\mu = 770$  MeV. Esses valores são compatíveis com as principais estimativas vindas da ChPT.





# Abstract

At present, chiral perturbation theory (ChPT) is considered the effective theory of quantum chromodynamics (QCD) at low energies. It was established in its modern version by the papers of Gasser and Leutwyler written in the first half of the 80's. For the last 25 years, there has been considerable increase in the number of phenomena described by ChPT, always following the growing precision of experiments. The two works we present in this Ph.D. thesis are related to ChPT and discuss the determination of some of the parameters that appear in the ChPT lagrangian. As ChPT is an effective theory, such constants can only be fixed by experiments, models or calculations in the lattice. In the first presented work, we discuss the pion decay constant,  $F_\pi$ , and how it is changed by the inclusion of electromagnetic interactions. We argue that the uncertainty of the most accepted value of  $F_\pi$  might be underestimated. We also show that we cannot determine this constant in the presence of electromagnetic interactions because the function from which it is extracted acquires a gauge dependence and the function's properties drastically change. In the other work, we deal with pseudoscalar meson scalar form factor in three flavors. We manage to write the form factors only in terms of constants present in ChPT lagrangian at leading order,  $F_\pi$  and masses of pseudoscalar mesons, using ChPT results and the model that deals with form factors in coordinate space. We also determine the respective square radii and, comparing these to those calculated using ChPT, we have obtained  $L_4^r(\mu) = -0,26 \cdot 10^{-3}$  and  $L_5^r(\mu) = 0,85 \cdot 10^{-3}$ , for  $\mu = 770$  MeV. These values are compatible with the main estimates evaluated with ChPT.



# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| Agradecimentos   | i         |
| Resumo   | iii       |
| Abstract   | v         |
| <b>1 Introdução</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1 QCD . . . . .  | 4         |
| 1.2 Simetria quiral . . . . .                                | 5         |
| 1.3 Teorias efetivas . . . . .                               | 10        |
| 1.4 Teoria de perturbação quiral . . . . .                   | 12        |
| 1.4.1 $SU(2)$ . . . . .                                      | 13        |
| 1.4.2 $SU(3)$ . . . . .                                      | 20        |
| <b>2 <math>F_\pi</math> e as interações eletromagnéticas</b> | <b>23</b> |
| 2.1 O decaimento do pión e $F_\pi$ . . . . .                 | 24        |
| 2.2 A função de dois pontos da corrente axial . . . . .      | 31        |
| 2.2.1 Apenas QCD . . . . .                                   | 31        |
| 2.2.2 QCD + QED . . . . .                                    | 35        |
| 2.3 Resultados e discussão . . . . .                         | 42        |
| <b>3 Fatores de forma escalares</b>                          | <b>51</b> |
| 3.1 Introdução ao modelo . . . . .                           | 52        |
| 3.2 Mésons . . . . .   | 56        |
| 3.3 Fatores de forma mesônicos em $SU(2)$ . . . . .          | 61        |
| 3.3.1 ChPT . . . . .   | 61        |
| 3.3.2 Modelo . . . . .                                       | 66        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 3.4      | Fatores de forma em $SU(3)$ . . . . .                     | 70         |
| 3.4.1    | ChPT . . . . .  | 70         |
| 3.4.2    | Modelo - Resultados completos . . . . .                   | 74         |
| 3.4.3    | Modelo - Resultados perturbativos . . . . .               | 85         |
| <b>4</b> | <b>Conclusão</b>  | <b>93</b>  |
| <b>A</b> | <b>Convenções e notação</b>                               | <b>97</b>  |
| A.1      | Constantes . . . . .                                      | 97         |
| A.2      | Matrizes de Pauli e de Gell-Mann . . . . .                | 98         |
| <b>B</b> | <b>Crítica à determinação de <math>F_\pi</math> atual</b> | <b>99</b>  |
| <b>C</b> | <b>As componentes <math>L</math> e <math>S</math></b>     | <b>105</b> |
| C.1      | Píon . . . . .  | 105        |
| C.2      | Káon . . . . .  | 109        |
| C.3      | Eta . . . . .   | 114        |
| <b>D</b> | <b>Integrais de <i>loop</i></b>                           | <b>119</b> |
| <b>E</b> | <b>Artigos</b>  | <b>123</b> |

# Lista de Figuras

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Diagrama de Feynman representando o decaimento do pión. As mesmas convenções se aplicam às figuras que seguem. . . . .  | 24 |
| 2.2 | Diagramas que entram no cálculo das correções radiativas para o decaimento do pión, no limite $M_Z$ e $M_W \rightarrow \infty$ , determinadas em [1]. O fóton é indicado pela linha ondulada e o vértice entre o pión e o $W$ , representado pela linha tracejada, é a bola cinza. O lépton é a linha superior direita a qual o fóton se conecta. . . . . | 27 |
| 2.3 | Diagramas de contribuições para o decaimento do pión consideradas no cálculo realizado com a ChPT em [2]. Em [3] não se considerou os diagramas com <i>loops</i> de pions (a) e (b). É importante notar que o propagador do $W$ tornou-se um ponto. . . . .   | 28 |
| 2.4 | Diagramas de emissão de fótons livres consideradas em [3] e [2]. . . . .  | 28 |
| 2.5 | A linha tracejada representa a fonte axial externa e a sólida, o pión. O símbolo $\times$ representa a inserção de um vértice provindo de $\mathcal{L}_{p^4}$ . . . . .   | 32 |
| 2.6 | A linha ondulada representa o fóton e $\otimes$ inserções de termos de $\mathcal{L}_{e^2p^2}$ . . . . .   | 36 |
| 2.7 | Limites em que estudamos as integrais de <i>loop</i> . A região situa-se em torno de $w = 0$ e $z = 1$ . . . . .  | 38 |
| 3.1 | Contribuições dos diagramas contato e triângulo para o termo sigma do núcleon. A linha reta e fina representa o núcleon, a grossa, a delta, e a ondulada, uma fonte escalar. . . . .  | 54 |
| 3.2 | Dependência espacial do fator de forma escalar do núcleon, linha cheia, e contribuições parciais devidas aos estados intermediários $N$ , linha tracejada, e $\Delta$ , linha pontilhada. . . . .   | 55 |
| 3.3 | Contribuições parciais e total, seguindo as mesmas convenções da figura 3.2, mas com escala diferente. . . . .  | 57 |

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 3.4 | Diagramas de Feynman que contribuem para os fatores de forma escalares discutidos neste capítulo. A linha cheia representa um méson escalar, enquanto que a ondulada, a fonte escalar externa. A inserção de um termo contendo uma LEC $l_3$ ou $l_4$ é representada pelo quadrado. Os círculos nas pernas externas representam a inserção de um campo externo pseudoescalar. . . . . | 62  |
| 3.5 | Contribuições para a massa do pión. . . . .   | 65  |
| B.1 | Gráfico que ilustra a diferença entre as constantes de acoplamento na teoria completa e na puramente forte, assim como a ambiguidade presente na determinação desta última. . . . .   | 102 |
| D.1 | Limites em que estudamos as integrais de <i>loop</i> . A região situa-se em torno de $w = 0$ e $k^2 = M^2$ . . . . .  | 121 |

# Lista de Tabelas

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Valores para as constantes de baixa energia e os resultados experimentais de onde foram extraídas. . . . .   | 18 |
| 1.2 | Valores para as constantes de baixa energia extraídos de [4, 5], <i>fit</i> 10. . . . .  | 22 |
| 2.1 | Razão de ramificação para os principais canais de decaimento do $\pi^-$ de acordo com o PDG [6]. É importante ressaltar que a indicação $\gamma$ indica que foram consideradas reações apenas com fótons de energia maior que um certo $E_\gamma$ , da ordem de alguns MeV. Quando não se coloca $\gamma$ , incluíram-se todos os fótons até $E_\gamma$ . Além disso, por definição $[\Gamma(\mu^- \bar{\nu}_\mu) + \Gamma(e^- \bar{\nu}_e)]/\Gamma_{total} = 100\%$ . . . . . | 26 |
| 3.1 | Contribuições parciais para $\sigma_N$ , relativas ao caroço, $\tilde{\sigma}_{NN}$ e $\tilde{\sigma}_{N\Delta}$ , em MeV, em função da constante de acoplamento $g_{\pi N\Delta}$ . Foi colocado também o valor para $R$ , o raio do caroço, em fm. . . . .   | 56 |
| 3.2 | Contribuições para $\sigma_\Delta^R$ vindas do caroço e da integração de $\tilde{\sigma}_{\Delta N}^R$ e $\tilde{\sigma}_{\Delta\Delta}$ , em MeV, em função das constantes de acoplamento $g_{\pi N\Delta}$ e $g_{\pi\Delta\Delta}$ . Há também os valores de $R$ , o raio do caroço, em fm. . . . .  | 57 |
| 3.3 | Valores para os raios das componentes 0, 8, $L$ e $S$ . . . . .  | 81 |
| 3.4 | Valores para os raios quadráticos médios para a componente 0, 8, $L$ e $S$ . . . . .   | 84 |
| 3.5 | Valores para a diferença relativa entre $K_0(2M_P R)$ e sua expansão, tomando $R = 0,527$ fm e incluindo termos até diferentes ordens. . . . .   | 86 |
| 3.6 | Valores para a diferença relativa entre $K_1(2M_P R)$ e sua expansão, tomando $R = 0,527$ fm e incluindo diferente número de termos. . . . .   | 86 |

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 3.7 | Valores para os raios de corte das componentes 0 e 8. Na primeira linha está o valor exato, seguido pelo expandido até $\mathcal{O}(M_P^2)$ e $\mathcal{O}(M_P^0)$ , acompanhados da diferença relativa entre os valores aproximado e exato. Apresentamos, também, na última coluna, o raio de corte do fator de forma do pión em $SU(2)$ . . . . . | 88  |
| C.1 | Valores para os raios quadráticos médios para $F_\pi^0(t)$ , $F_\pi^8(t)$ e $F_\pi^L(t)$ . . . . .  | 107 |
| C.2 | Valores para os raios de corte das componentes 0, 8 e $L$ com a comparação com o caso $SU(2)$ . Na primeira linha está o valor exato, seguido pelo expandido até $\mathcal{O}(M_P^2)$ e $\mathcal{O}(M_P^0)$ , acompanhados da diferença relativa entre os valores aproximado e exato. . . . .  | 108 |
| C.3 | Valores para os raios quadráticos médios para $F_\pi^0(t)$ , $F_\pi^8(t)$ , $F_\pi^L(t)$ e $F_\pi^S(t)$ . . . . .   | 112 |
| C.4 | Valores para os raios de corte das componentes 0, 8, $L$ e $S$ . Na primeira linha está o valor exato, seguido pelo expandido até $\mathcal{O}(M_P^2)$ e $\mathcal{O}(M_P^0)$ , acompanhados da diferença relativa entre os valores aproximado e exato. . . . .   | 113 |
| C.5 | Valores para os raios quadráticos médios para os fatores de forma do eta. . . . .   | 116 |
| C.6 | Valores para os raios de corte das componentes 0, 8 e $L$ . Na primeira linha está o valor exato, seguido pelo expandido até $\mathcal{O}(M_P^2)$ e $\mathcal{O}(M_P^0)$ , acompanhados da diferença relativa entre os valores aproximado e exato. . . . .  | 118 |



# Capítulo 1

## Introdução

A cromodinâmica quântica (QCD, do inglês *quantum chromodynamics*) é vista, atualmente, como a teoria fundamental das interações fortes. Devido ao seu caráter não abeliano, não é possível efetuar cálculos perturbativos a energias baixas, em relação à escala  $\Lambda_{QCD} = 1$  GeV. Isso motivou o desenvolvimento de técnicas alternativas como teorias efetivas, modelos e cálculos na rede. A teoria efetiva mais completa é a teoria de perturbação quiral (ChPT, do inglês *chiral perturbation theory*), proposta, em 1979, em um artigo de Weinberg [7] e elaborada, em 1984, por Gasser e Leutwyler [8]. Esses autores consideraram, inicialmente, o caso de dois sabores e o estenderam para o caso de três no ano seguinte [9]. A aplicação das técnicas da ChPT possibilitou o cálculo de muitos observáveis físicos. Em particular, as interações dos mésons pseudoescalares mais leves puderam ser estudadas com base em expansões perturbativas nos seus momentos ou massas. Ao longo do tempo, a comunidade dos pesquisadores desta área cresceu e novos trabalhos incorporaram, por exemplo, bárions, ressonâncias e interações eletrofracas à lagrangiana da ChPT.

Por ser uma teoria efetiva, a ChPT depende de constantes externas, chamadas de constantes de baixa energia (LEC, do inglês *low energy constant*) que não podem ser determinadas pela própria ChPT. Estas constantes carregam informações sobre os graus de liberdade mais pesados, que não foram incluídos explicitamente na teoria e seus valores vêm, portanto, de resultados experimentais. Determinadas estas constantes, pode-se utilizar a ChPT para fazer previsões. Nos últimos 25 anos houve um grande progresso na determinação destas constantes, com o conseqüente aumento na precisão de previsões de inúmeros processos envolvendo mésons pseudoescalares e interações nucleares [10, 11].

Nesta tese de doutorado, apresentamos dois trabalhos que se inserem no contexto da ChPT e que envolvem a determinação de parâmetros desta teoria. Um deles trata da constante de decaimento do pión,  $F_\pi$ , na presença de interações eletromagnéticas e o outro, de algumas LECs presentes nos fatores de forma escalares dos mésons pseudoescalares em três sabores.

### Constante de decaimento do pión

O cálculo de  $F_\pi$  incluindo interações fortes e eletromagnéticas foi realizado durante o estágio de doutorado sanduíche, de um ano, realizado na Universidade de Berna, sob a supervisão do Prof. Gasser. Na segunda metade da década de 90, apareceram os primeiros trabalhos [2, 12–14] em que se incluiu, sistematicamente, o eletromagnetismo à ChPT. Isso possibilitou aumentar a qualidade das previsões teóricas, bem como o entendimento dos efeitos eletromagnéticos em diversos processos hadrônicos. O decaimento do pión é um exemplo desse tipo de processo e a precisão na determinação de  $F_\pi$  aumentou significativamente com a inclusão de correções radiativas: o valor encontrado no PDG é  $F_\pi = (92, 21 \pm 0, 03 \pm 0, 14)$  MeV [6] e tem barras de erro bastante pequenas.

No trabalho apresentado aqui, argumentamos que a incerteza deste resultado pode estar subestimada por dois motivos:

1. O resultado adotado pelo PDG em [6] é livre de interações eletromagnéticas. Entretanto, a separação entre contribuições puramente eletromagnéticas e puramente fortes de uma grandeza calculada na teoria completa (eletromagnética + forte) é ambígua [15, 16].
2. toma-se, por convenção, a massa do pión que aparece na expressão para  $F_\pi$  como sendo a do pión neutro e as implicações decorrentes dessa escolha devem ser consideradas.

Uma saída para o problema do desacoplamento de teorias seria definir um  $F_\pi$  na ChPT, que incluísse o eletromagnetismo. Na ChPT puramente forte, a constante de decaimento do pión pode ser definida em termos do resíduo da função de dois pontos da corrente axial. Nós aqui mostramos que, ao se efetuar o mesmo cálculo para a corrente axial carregada, os resultados passam a depender do calibre adotado e que as propriedades analíticas da função de dois pontos mudam drasticamente.

Isto impede que se defina um  $F_\pi$  independente de convenções. Como um produto deste cálculo, obtivemos as massas dos píons carregados e neutro na teoria completa, assim como o resíduo da função de dois pontos da corrente axial neutra.

### Os fatores de forma escalares em $SU(3)$

Fatores de forma escalares carregam informação sobre os efeitos da quebra explícita de simetria quiral sobre sistemas hadrônicos. De modo geral, eles podem ser escritos em termos dos raios quadráticos médios que, por sua vez, são extraídos de experimentos. Há, na literatura, resultados para os fatores de forma mesônicos incluindo contribuições de um *loop* e que dependem de algumas das LECs [17, 18]. Neste trabalho, nós usamos um modelo que trata destas grandezas no espaço das posições, já utilizado com sucesso para o caso do núcleon [19, 20], da ressonância delta [20] e do pión em dois sabores [21], para obter previsões para as LECs em  $SU(3)$ . Os nossos resultados são  $L_4^r(770) = -0,26 \cdot 10^{-3}$  e  $L_5^r(770) = 0,85 \cdot 10^{-3}$ , valores compatíveis com os extraídos de ajustes aos dados experimentais para o decaimento do káon  $K_{\ell 4}$  [4, 5],  $L_4^r(770) \equiv 0$  (os autores estimam que a incerteza de  $L_4^r(770)$  seja em torno de  $0,5 \cdot 10^{-3}$ ) e  $L_5^r(770) = (0,97 \pm 0,11) \cdot 10^{-3}$ .

Esta tese contém quatro capítulos e três apêndices. No primeiro capítulo, na introdução dedicada à ChPT, expomos conceitos relacionados à QCD, à simetria quiral e à idéia de teorias efetivas. Ele é fechado com a apresentação da ChPT e das lagrangianas, em dois sabores, incluindo interações eletromagnéticas, e a puramente forte, em três sabores. O capítulo dois aborda a constante de decaimento do pión e as interações eletromagnéticas. Inicialmente, discutimos a determinação de  $F_\pi$  incluindo correções radiativas e, em seguida, apresentamos os cálculos completos para a função de dois pontos da corrente axial neutra e carregada. O capítulo é fechado com uma discussão dos resultados. O capítulo três trata dos fatores de forma escalares e se inicia com a discussão dos resultados para o núcleon, como uma introdução ao modelo. Passamos, depois, para os mésons, primeiro em dois sabores e, então, para três, que é uma das partes do trabalho de doutorado. As conclusões são apresentadas no quarto capítulo.

## 1.1 QCD

Atualmente, acredita-se que a cromodinâmica quântica (QCD) seja a teoria das interações fortes. A sua formulação, no início da década de 70, incorporou diversas características da física hadrônica que estavam sendo desenvolvidas naquela época. Ela englobou, por exemplo, os conceitos de quarks, pártons, cor, álgebra de correntes, PCAC e simetria quiral.

Na QED, a simetria de calibre gera, naturalmente, a interação do campo eletromagnético com a matéria. Basicamente, nota-se que a lagrangiana de um elétron livre, por exemplo, possui uma simetria global abeliana  $U(1)$ . Depois faz-se com que esta simetria se torne local, modificando-se a derivada usual para uma derivada covariante, que contém um termo identificado com o campo de calibre. Este campo tem propriedades de transformação bem definidas e passa a ser uma variável dinâmica, quando se acrescenta à lagrangiana um termo que depende apenas dele. Ao alterar-se a derivada, cria-se uma interação do campo de calibre (fóton) com o campo do elétron. Na QCD, as interações fortes surgem de um processo semelhante, baseado na simetria global não abeliana  $SU(3)$  de cor, onde os campos de matéria são os quarks, férmions de spin  $1/2$ , que podem ter 6 sabores diferentes: *up*, *down*, *strange*, *charm*, *bottom* e *top* ( $u$ ,  $d$ ,  $s$ ,  $c$ ,  $b$  e  $t$ ). Junto com o sabor, os quarks têm uma outra característica, que é a cor: vermelha (*red*), verde (*green*) e azul (*blue*) ( $r$ ,  $g$  e  $b$ ), as cargas da QCD, desempenhando o mesmo papel que a carga elétrica na QED. Oito campos de calibre representam os glúons, que possuem cor e anticor. Podemos designar um quark genericamente por  $q_k = (q_{k,r} \ q_{k,g} \ q_{k,b})^T$ , com  $k = 1, 2, \dots, 6$ , que representa os sabores  $u$ ,  $d$ ,  $s$ ,  $c$ ,  $b$  e  $t$ . Incluir a cor como um grau de liberdade no modelo de quarks permitiu que se satisfizesse o princípio de Pauli no tratamento de bárions como sendo estados de três quarks. Ela é uma simetria exata da QCD, que não altera o sabor dos quarks. Junto com isto postula-se que apenas singletos de cor são observados na natureza.

A QED e a QCD são teorias de calibre, entretanto a primeira é abeliana enquanto que a segunda é não abeliana. Esta diferença faz com que as duas teorias possuam características bastante diversas. A QED possui apenas termos quadráticos no campo de calibre, enquanto que os da QCD são carregados e ela contém termos cúbicos e quárticos de auto-interação. O caráter não abeliano da QCD faz com que a constante de acoplamento diminua em energias altas, ao contrário do que ocorre

na QED. Na QED, à medida que se aumenta a distância entre duas partículas, a constante de acoplamento diminui, devido à blindagem da carga produzida pela criação de pares elétron-pósitron no vácuo. Na QCD, a carga do campo de calibre e as suas auto-interações produzem uma anti-blindagem da cor, fazendo com que a constante de acoplamento aumente com a distância.

A liberdade assintótica, ao mesmo tempo que possibilita o tratamento perturbativo no regime de altas energias, impede que se faça o mesmo em baixas energias. Ou seja, a QCD não permite um entendimento direto da fenomenologia hadrônica em baixas energias, apesar de podermos reconhecer suas propriedades e simetrias neste regime.

A lagrangiana da QCD pode ser escrita na seguinte forma

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{2}Tr(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) + \sum_{k=1}^6 \bar{q}_k (i\gamma^\mu D_\mu - m_k) q_k , \quad (1.1)$$

em que  $q_k$  é o campo dos quarks dado acima,  $m_k$  são as massas dos diferentes sabores e

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] , \quad (1.2)$$

$$D_\mu q_k = (\partial_\mu - igA_\mu) q_k , \quad (1.3)$$

$$A_\mu = \sum_{a=1}^8 \frac{A_\mu^a \lambda^a}{2} , \quad (1.4)$$

onde  $\lambda^a$  são as matrizes de Gell-Mann,  $A_\mu^a$  é o campo de calibre que representa os glúons e  $g$  é a constante de acoplamento da QCD.

## 1.2 Simetria quiral

Neste trabalho empregamos extensivamente a teoria de perturbação quiral, a teoria efetiva da QCD para energias baixas. Um dos ingredientes básicos na construção de teorias efetivas são as simetrias da teoria mais fundamental. A simetria quiral está presente na lagrangiana da QCD, quando desconsideramos os termos de massa, e exprime a invariância de uma certa grandeza com respeito às transformações do grupo  $SU(N)_L \otimes SU(N)_R$ , onde  $N$  é o grau da transformação e  $(N^2 - 1)$  é o número

de geradores  $Q_i$ . A álgebra abstrata que caracteriza tal grupo é

$$\begin{aligned} [Q_i^L, Q_j^L] &= ic_{ijk}Q_k^L, \\ [Q_i^R, Q_j^R] &= ic_{ijk}Q_k^R, \\ [Q_i^L, Q_j^R] &= 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

onde  $Q_i$  são os geradores das transformações do grupo e  $c_{ijk}$ , as constantes de estrutura. O grupo  $SU(N)_L \otimes SU(N)_R$  pode também ser escrito como  $SU(N)_V \otimes SU(N)_A$ , para as transformações vetoriais  $V$  e axiais  $A$ , em que as relações de comutação são

$$\begin{aligned} [Q_i^V, Q_j^V] &= ic_{ijk}Q_k^V, \\ [Q_i^V, Q_j^A] &= ic_{ijk}Q_k^A, \\ [Q_i^A, Q_j^A] &= ic_{ijk}Q_k^V, \end{aligned} \tag{1.6}$$

dado que

$$\begin{aligned} Q_i^L &= \frac{1}{2} (Q_i^V - Q_i^A), \\ Q_i^R &= \frac{1}{2} (Q_i^V + Q_i^A). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Ao contrário das transformações  $L$ ,  $R$  e  $V$ , as axiais não formam um grupo, pois  $[Q_i^A, Q_j^A] = ic_{ijk}Q_k^V$ . Alguns fatos experimentais levaram ao reconhecimento, antes da formulação da QCD, de que uma teoria das interações fortes deveria conter tal simetria no regime de baixas energias.

A existência de uma simetria pode ser percebida na natureza de diferentes formas. Experimentalmente, encontram-se partículas com massas aproximadamente iguais. A simetria de isospin das interações fortes é uma transformação do tipo vetorial, associada ao grupo  $SU(2)_V$ , e foi primeiramente identificada na observação de que as propriedades dos núcleos não eram alteradas pela troca de um próton por um nêutron. A álgebra abstrata deste grupo é determinada pelas relações de comutação entre os geradores  $Q_i$ ,

$$[Q_i, Q_j] = i\epsilon_{ijk}Q_k, \tag{1.8}$$

onde  $i, j$  e  $k = 1, 2, 3$  e  $\epsilon_{ijk}$ , as constantes de estrutura, são os elementos do tensor de Levi-Civita. A representação matricial fundamental do grupo  $SU(2)_V$  é composta por três matrizes de Pauli  $2 \times 2$ , denotadas por  $\tau_k/2$  e dadas no apêndice A.

A simetria de isospin é realizada no modo normal ou de Wigner-Weyl, pois ela se manifesta na existência de multipletos de partículas degeneradas em massa. Uma indicação de quão boa é a simetria associada a um multipletto pode ser dada pela razão entre a diferença das massas de seus componentes e a massa média. No caso dos núcleons, esta razão é  $\frac{\Delta m}{\bar{m}} = 0,14\%$ , enquanto que, para os píons, temos  $\frac{\Delta m}{\bar{m}} = 3,34\%$ .

Com o surgimento da estranheza, conseguiu-se organizar os hádrons em multipletos maiores, associados ao grupo  $SU(3)$ , cuja álgebra é determinada pelas relações de comutação

$$[Q_i, Q_j] = if_{ijk}Q_k, \quad (1.9)$$

em que  $i, j$  e  $k = 1, 2, \dots, 8$  e  $f_{ijk}$  são constantes de estrutura. A representação fundamental é formada pelas oito matrizes  $3 \times 3$  de Gell-Mann,  $\lambda_k/2$ , dadas no apêndice A. Com isto, colocou-se em um mesmo multipletto, no caso dos bárions de spin  $1/2$  e paridade positiva, por exemplo, os núcleons e o  $\Xi^-$ . Neste multipletto temos  $\frac{\Delta m}{\bar{m}} = 16,7\%$ , indicando que  $SU(3)$  é pior que  $SU(2)$ .

Os multipletos em  $SU(3)_V$  correspondem à realização de uma simetria no modo de Wigner-Weyl. A simetria sob as transformações axiais, por outro lado, não é observada na forma de multipletos, pois não há multipletos de partículas com paridades opostas e massas iguais. Ela se manifesta na forma de um octeto de mésons pseudoescalares muito mais leves do que os outros estados hadrônicos. Este fato foi interpretado como um outro modo de realização da simetria, conhecido como de Nambu-Goldstone, no qual o vácuo não é um invariante. No limite em que as massas dos mésons pseudoescalares são tomadas como sendo nulas, o chamado limite quiral, isso corresponde a uma simetria oculta, que se manifesta com o surgimento de partículas sem massa, os bósons de Goldstone.

A simetria oculta, usualmente chamada de simetria espontaneamente quebrada, implica a existência de um vácuo cheio [22], no qual os estados  $\bar{q}q$  têm valor esperado diferente de zero. Em outras palavras, a natureza sugere, pela ausência de multipletos de paridade oposta e por meio do octeto de mésons pseudoescalares leves, que o vácuo é composto por um condensado de quarks e antiquarks.

O octeto de mésons pseudoescalares é representado pelos três píons, com  $M_\pi \approx 138$  MeV, 4 káons, com  $M_k \approx 496$  MeV e o  $\eta$ , com  $M_\eta \approx 548$  MeV (valores mais precisos encontram-se no apêndice A). De acordo com a teoria, se a simetria não fosse quebrada explicitamente, teríamos todo o octeto com massas nulas e correntes axiais conservadas. É importante notar que  $M_\pi$  é significativamente menor que  $M_k$  ou  $M_\eta$ , o que mostra que a simetria  $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$  é quebrada de modo mais drástico que  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ . No contexto da QCD, a explicação reside no fato de que as massas dos quarks  $u$  e  $d$ ,  $m_u$  e  $m_d$ , são menores que a massa do quark  $s$   $m_s$ :  $m_u \approx 2,7$  MeV,  $m_d \approx 5,0$  MeV e  $m_s \approx 105$  MeV [6].

Excluindo a quebra explícita de simetria, as correntes são conservadas e as respectivas cargas comutam com a hamiltoniana, isto é

$$[H, Q_i^V] = 0 = [H, Q_i^A] . \quad (1.10)$$

As cargas axiais, ao contrário das vetoriais, não aniquilam o vácuo, apesar de ambas correntes serem conservadas. Isto pode ser escrito como

$$Q_i^A |0\rangle \neq 0 . \quad (1.11)$$

De acordo com o teorema de Goldstone [23], para cada gerador que não aniquila o vácuo, existe um bóson com massa nula, cujas propriedades estão ligadas às características do gerador. No caso da expressão acima, são gerados os mésons pseudoescalares, por exemplo, os píons, se nos restringirmos aos 3 geradores das transformações axiais de  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ . A relação (1.10), junto com (1.11), levam a

$$H (Q_i^A |0\rangle) = 0 , \quad (1.12)$$

que permite-nos concluir que a carga axial conecta o vácuo com outros autoestados de mesma energia, os bósons de Goldstone.

Depois da formulação da QCD, essas características foram sistematizadas na sua lagrangiana, dada na equação (1.1), isto é,

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{2} Tr(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) + \sum_{k=1}^6 \bar{q}_k (i\gamma^\mu D_\mu - m_k) q_k .$$

Para explicitar a simetria quiral desta lagrangiana, reescrevemos os campos dos quarks como

$$q_L = P_L q = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) q \quad \text{e} \quad q_R = P_R q = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) q , \quad (1.13)$$



onde

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = P_L^\dagger \quad \text{e} \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = P_R^\dagger, \quad (1.14)$$

que satisfazem as relações de completeza, idempotência e ortogonalidade

$$\begin{aligned} P_R + P_L &= 1, \\ P_R^2 &= P_R \quad \text{e} \quad P_L^2 = P_L, \\ P_L P_R &= 0 = P_R P_L. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Usando as relações [23]

$$\bar{q}\Gamma_i q = \begin{cases} \bar{q}_R \Gamma_1 q_R + \bar{q}_L \Gamma_1 q_L & \text{para } \Gamma_1 \in \{\gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5\} \\ \bar{q}_L \Gamma_2 q_R + \bar{q}_R \Gamma_2 q_L & \text{para } \Gamma_2 \in \{1, \gamma_5, \sigma^{\mu\nu}\} \end{cases}, \quad (1.16)$$

escrevemos a lagrangiana da QCD como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= -\frac{1}{2} \text{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) \\ &+ \sum_{k=1}^6 [\bar{q}_{kL} i\gamma^\mu D_\mu q_{kL} + \bar{q}_{kR} i\gamma^\mu D_\mu q_{kR} - m_k (\bar{q}_{kL} q_{kR} + \bar{q}_{kR} q_{kL})]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

As transformações dos campos  $q_L$  e  $q_R$  são implementadas pelos operadores

$$U_L(\boldsymbol{\alpha}_L) = e^{i\alpha_a^L Q_a^L}, \quad U_R(\boldsymbol{\alpha}_R) = e^{i\alpha_a^R Q_a^R}, \quad (1.18)$$

onde  $\alpha_a$  são os parâmetros da transformação e  $Q_a$ , as cargas, que seguem as relações (1.5), da álgebra do grupo  $SU(N)$ . No caso de transformações infinitesimais, chegamos a

$$q_{Li} \mapsto e^{-i\alpha_a^L G_{aij}} q_{Lj} \simeq q_{Li} - i\alpha_a^L G_{aij} q_{Lj}, \quad (1.19)$$

$$q_{Ri} \mapsto e^{-i\alpha_a^R G_{aij}} q_{Rj} \simeq q_{Ri} - i\alpha_a^R G_{aij} q_{Rj}, \quad (1.20)$$

em que  $G_a$  é o  $a$ -ésimo elemento da representação matricial de  $SU(N)$  de dimensão  $N$ . Da expressão acima, tiramos que as transformações infinitesimais dos campos são

$$\begin{aligned} \delta q_{Li} &= -i\alpha_a^L G_{aij} q_{Lj}, & \delta q_{Ri} &= -i\alpha_a^R G_{aij} q_{Rj}, \\ \delta \bar{q}_{Li} &= i\alpha_a^L G_{aji} \bar{q}_{Lj}, & \delta \bar{q}_{Ri} &= i\alpha_a^R G_{aji} \bar{q}_{Rj}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Se aplicamos as transformações na lagrangiana, vemos que apenas o termo de massa não é invariante, e que ele quebra explicitamente a simetria quiral. A seguir, nos restringimos aos três quarks mais leves,  $u$ ,  $d$  e  $s$  e escrevemos as massas  $m_k$  como pertencentes à seguinte matriz diagonal  $M = \text{diag}\{m_u, m_d, m_s\}$ . A representação matricial das transformações, neste caso, é dada pelas matrizes  $\lambda_a/2$  e escrevemos a variação da lagrangiana como

$$\delta\mathcal{L}_{QCD} = -i\alpha_a^L \left( \bar{q}_L \frac{\lambda_a}{2} M q_R - \bar{q}_R M \frac{\lambda_a}{2} q_L \right) + i\alpha_a^R \left( \bar{q}_L M \frac{\lambda_a}{2} q_R - \bar{q}_R \frac{\lambda_a}{2} M q_L \right). \quad (1.22)$$

Esse termo é não nulo e indica a quebra de simetria provocada pelo termo de massa. Mesmo que a simetria quiral seja quebrada, é possível que simetrias vetoriais continuem a existir. Aplicando uma transformação vetorial ao termo de massa, temos

$$\begin{aligned} \delta^V \mathcal{L}_{QCD} &= -i\alpha_a^V \left( \bar{q}_L \left[ \frac{\lambda_a}{2}, M \right] q_R - \bar{q}_R \left[ M, \frac{\lambda_a}{2} \right] q_L \right) \\ &= -i\alpha_a^V \bar{q} \left[ \frac{\lambda_a}{2}, M \right] q. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Portanto, desde que as massas dos quarks sejam iguais, temos invariância com respeito às transformações vetoriais, pois  $\left[ \frac{\lambda_a}{2}, M \right] = 0$ . Isto é o que se observa nos casos das simetrias aproximadas de isospin e  $SU(3)$ : invariâncias das interações fortes pela troca de partículas pertencentes a um mesmo multipletto. No caso das transformações axiais, chegamos a

$$\begin{aligned} \delta^A \mathcal{L}_{QCD} &= i\alpha_a^A \left( \bar{q}_L \left\{ \frac{\lambda_a}{2}, M \right\} q_R - \bar{q}_R \left\{ M, \frac{\lambda_a}{2} \right\} q_L \right) \\ &= i\alpha_a^A \bar{q} \left\{ \frac{\lambda_a}{2}, M \right\} \gamma_5 q. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Dessa forma, para termos invariância também sob as transformações axiais, devemos ter  $M = 0$ . Dizemos, então, que as massas dos quarks causam a quebra explícita da simetria quiral ainda que se possa ter a simetria vetorial preservada.

### 1.3 Teorias efetivas

Um dos principais objetivos da física atual é encontrar os constituintes básicos da natureza, juntamente com uma teoria unificada que explique a sua dinâmica. Queremos ter, dessa forma, a capacidade de descrever e prever todos os tipos de fenômenos,

por meio de uma única teoria. Que explique, por exemplo, desde o espalhamento profundamente inelástico, passando pela descrição das reações químicas, das estruturas dos materiais, até a expansão do universo [24].

Mesmo que conhecêssemos uma teoria unificada, escrita em termos dos constituintes básicos da natureza, ela não possibilitaria uma compreensão rápida e intuitiva das propriedades dos sistemas mais complexos. A QED, por exemplo, é considerada uma teoria muito bem sucedida na descrição das interações eletromagnéticas. Entretanto, é uma tarefa extremamente complicada descrever as propriedades químicas de uma molécula orgânica em termos dos graus de liberdade fundamentais da QED. Este tipo de dificuldade está associado a uma escolha inadequada dos graus de liberdade relevantes. Por isso, o uso de teorias efetivas é interessante: elas permitem-nos propagar as propriedades mais relevantes da teoria fundamental para outras escalas físicas.

Uma idéia crucial na elaboração de uma teoria efetiva é que as dinâmicas em baixas e altas energias são desacopladas. Em outras palavras, que deve ser possível separar os dois regimes por uma certa escala de energia. No caso da QCD não perturbativa, toma-se  $\Lambda_{QCD} \approx 1$  GeV como sendo tal parâmetro. Quando as energias são baixas com relação a este parâmetro, os operadores hadrônicos de campo mais pesados não são excitados e podemos ignorá-los. As informações relativas a eles ficam, então, embutidas em constantes de acoplamento efetivas.

Do ponto de vista formal, o funcional gerador  $Z$  da teoria quântica de campos,

$$Z = \int D\phi \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L}(\phi) \right) , \quad (1.25)$$

contém toda a informação necessária para obtenção dos observáveis físicos. No caso de teorias efetivas, supomos que se pode escrever o funcional gerador distinguindo diferentes regimes de energia [25] da seguinte forma

$$Z = \int D\phi_L \int D\phi_P \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L}_{QCD}(\phi_L, \phi_P) \right) , \quad (1.26)$$

onde

$$\phi = \begin{cases} \phi_L & \text{para } p < \Lambda \\ \phi_P & \text{para } p > \Lambda \end{cases} . \quad (1.27)$$

e  $\phi_L$  representa os campos mais leves e  $\phi_P$ , os pesados. Na teoria efetiva, voltamos nossa atenção para os graus de liberdade mais leves e os pesados são integrados,

dando origem a constantes de acoplamento indeterminadas. Essa decomposição pode ser implementada na função  $Z$  com a introdução de

$$1 = \int D\varphi \delta(\varphi - f_\Lambda(\phi_L)) \quad (1.28)$$

e integrando os graus de liberdade mais pesados. O campo  $\varphi$  é o grau de liberdade hadrônico, função dos graus de liberdade mais leves ( $f_\Lambda(\phi_L)$ ) da teoria fundamental. Com isto,

$$\begin{aligned} Z &= \int D\phi_L \int D\phi_P \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}_{QCD}(\phi_L, \phi_P)\right) \times \int D\varphi \delta(\varphi - f_\Lambda(\phi_L)) \\ &= \int D\varphi \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}_{ef}(\varphi)\right), \end{aligned} \quad (1.29)$$

em que  $\mathcal{L}_{ef}$  é a lagrangiana efetiva.

Na referência [7], Weinberg chamou atenção para o fato de que, se escrevermos a lagrangiana efetiva mais geral possível e que obedeça às mesmas simetrias da teoria fundamental, os resultados obtidos em qualquer ordem de perturbação seguirão, por construção, todos os princípios básicos da teoria quântica de campos, incorporando as simetrias. A lagrangiana efetiva, elaborada deste modo é, então, completamente compatível com a teoria mais fundamental.

Como foi visto na seção 1.1, a QCD não permite, atualmente, compreender a fenomenologia das interações fortes a baixas energias. Entretanto, se construirmos uma lagrangiana bastante geral, com os graus de liberdade hadrônicos mais leves, que siga as simetrias observadas na QCD, teremos uma teoria completamente compatível com ela, ainda que com constantes de acoplamento indeterminadas.

## 1.4 Teoria de perturbação quiral

A teoria de perturbação quiral (ChPT) é a teoria efetiva das interações fortes, capaz de reproduzir a fenomenologia hadrônica a baixas energias. E, em particular, ela descreve a interação entre os mésons pseudoescalares mais leves, incluindo contribuições eletromagnéticas e fracas. Sua construção como teoria efetiva é baseada na simetria quiral. O artigo de Weinberg de 1979 sobre lagrangianas efetivas, [7], abriu caminho para o de Gasser e Leutwyler de 1984 [8], em que a ChPT foi desenvolvida até um *loop* e colocada na sua forma mais moderna.

No regime de energias de aplicação da ChPT,  $E < M_\rho$ , os graus de liberdade relevantes são os mésons pseudoescalares mais leves: píons, no caso de dois sabores, sendo káons e eta incluídos no caso de três sabores.

### 1.4.1 $SU(2)$

Como vimos acima, a lagrangiana da QCD possui simetria quiral  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$  na ausência do termo de massa. Nesse limite, essa simetria é espontaneamente quebrada e os píons teriam massa nula. Devido a um termo de quebra explícita relativamente pequeno, eles adquirem uma massa pequena em comparação com o resto do espectro hadrônico.

A idéia básica de Weinberg [7] é que, se construirmos uma lagrangiana efetiva com todos os termos possíveis em acordo com as simetrias da teoria fundamental, obtemos uma teoria compatível com esta teoria fundamental. A lagrangiana assim construída pode possuir um infinito número de termos e constantes indeterminadas e é necessário, portanto, organizá-los em uma ordem que reflita sua importância relativa. No caso da lagrangiana da ChPT, que é a lagrangiana efetiva da QCD, essa organização permite uma descrição muito boa da fenomenologia hadrônica a baixas energias, relativamente às incertezas experimentais. A organização das contribuições da lagrangiana é feita com base na contagem do número de derivadas dos campos e das massas dos mésons pseudoescalares. Nas amplitudes, as derivadas tornam-se momentos dos mésons, da mesma ordem de grandeza das massas, e pequenos em relação à escala de energia.

Dessa forma, a lagrangiana da ChPT é construída como uma expansão nos momentos e massas dos píons. A contagem é feita supondo que esses momentos sejam da ordem de  $p$  e  $M_\pi^2$  da ordem de  $p^2$ , chamada de ordem quiral, e representada por  $\mathcal{O}(p^n)$ , onde  $n$  é a ordem. Os píons são introduzidos por meio do campo  $U$ , que se transforma como

$$U(x) \rightarrow RU(x)L^\dagger, \quad (1.30)$$

onde  $L$  e  $R$ , são transformações pertencentes a  $SU(2)_L$  e  $SU(2)_R$ . Na parametrização exponencial,  $U$  incorpora os píons de modo não linear, como

$$U(x) = \exp\left(i\frac{\Phi(x)}{F}\right), \quad (1.31)$$

com

$$\phi = \sum_{i=1}^3 \tau_i \phi_i(x) = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

O parâmetro  $F$  é a constante de decaimento do pión no limite quiral. Uma outra parametrização bastante útil do campo  $U$  é a do modelo sigma,

$$U = \sigma + i \frac{\boldsymbol{\pi}}{F} \quad , \quad \sigma = \sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{F^2}} \quad , \quad \boldsymbol{\pi} = \hat{\phi} \sin \phi. \quad (1.33)$$

Em ordem mais baixa de perturbação, a lagrangiana da ChPT com simetria quiral exata contém duas derivadas dos campos  $U$  e é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{F^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \rangle, \quad (1.34)$$

onde  $\langle \rangle$ , representa o traço.

A ChPT torna-se mais poderosa com a introdução de acoplamentos com campos externos. Por meio desta técnica, acrescentam-se as interações com os campos externos dados por

$$v^\mu = \frac{\tau_i}{2} v_i^\mu \quad , \quad a^\mu = \frac{\tau_i}{2} a_i^\mu \quad , \quad s = \tau_i s_i \quad , \quad p = \tau_i p_i. \quad (1.35)$$

onde  $v_\mu$ ,  $a_\mu$ ,  $s$  e  $p$  são fontes externas vetoriais, axiais, escalares e pseudoescalares, respectivamente. Os campos  $v^\mu$  e  $a^\mu$  descrevem as interações eletrofracas e a fonte escalar, a quebra explícita de simetria quiral, que resulta na massa não nula dos quarks e, por consequência, na massa não nula do pión. A fonte escalar externa incorpora a matriz de massa dos quarks,

$$s = \mathcal{M} + \dots = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} + \dots, \quad (1.36)$$

onde  $\dots$  representam flutuações. A ordem quiral de cada termo a ser incluído na lagrangiana da ChPT é

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(p^0) &\rightarrow U, \\ \mathcal{O}(p) &\rightarrow \partial_\mu U, M_P, v_\mu, a_\mu, \\ \mathcal{O}(p^2) &\rightarrow s, p. \end{aligned} \quad (1.37)$$

A lagrangiana em ordem mais baixa, compatível com a simetria quiral, incluindo a quebra explícita de simetria quiral e as fontes externas é dada por [8]

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{F^2}{4} \left\langle d_\mu U (d^\mu U)^\dagger + \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right\rangle , \quad (1.38)$$

onde a derivada covariante  $d_\mu U$  contém as fontes externas  $v^\mu$  e  $a^\mu$

$$d_\mu U = \partial_\mu U - i(v_\mu + a_\mu)U + iU(v_\mu - a_\mu) . \quad (1.39)$$

As fontes escalar e pseudoescalar estão presentes no campo  $\chi$ ,

$$\chi = 2B(s + ip) . \quad (1.40)$$

Se expandimos o termos de massa da lagrangiana dada acima, encontramos a massa do pión em ordem dominante

$$M^2 = 2B\hat{m} , \quad (1.41)$$

onde  $\hat{m} = (m_u + m_d)/2$  e  $B$  é proporcional ao valor esperado do condensado de quarks-antiquarks no limite quiral ( $m_u = m_d = 0$ )

$$\langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{d}d | 0 \rangle = -F^2 B . \quad (1.42)$$

Com o aumento da precisão dos experimentos e das predições teóricas tornou-se necessário incluir interações eletromagnéticas à ChPT. Isto foi feito em 1995 em  $SU(3)$  por Urech [12]. No caso de  $SU(2)$ , incluíram-se as interações eletromagnéticas em 1997, em um trabalho de Meissner, Müller e Steininger [13] e, em 1998, em um de Knecht e Urech [14]. A incorporação de fótons virtuais à lagrangiana da ChPT acima resulta em [8, 13, 14]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} = & \frac{F^2}{4} \left\langle d_\mu U (d^\mu U)^\dagger + \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right\rangle \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 + C \langle QUQU^\dagger \rangle , \end{aligned} \quad (1.43)$$

onde a derivada covariante  $d_\mu U$  recebe um termo proporcional ao campo do fóton

$$d_\mu U = \partial_\mu U - i(v_\mu + QA_\mu + a_\mu)U + iU(v_\mu + QA_\mu - a_\mu) , \quad (1.44)$$

o que implica que a carga  $e$  é de ordem  $p$ . O tensor eletromagnético é  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , que contém o campo do fóton,  $A_\mu$ ,  $\lambda$  é o parâmetro fixador de calibre,

$C = ZF^4$  ( $C$  e  $Z$  são constantes) e  $Q$ , a matriz que contém as cargas dos quarks mais leves

$$Q = \frac{e}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{e}{2} \left( \frac{1}{3} + \tau_3 \right) . \quad (1.45)$$

Considerando o termo proporcional a  $Z$ , passamos a ter massas distintas para os píons carregados e neutro

$$M_{\pi^\pm}^2 = 2B\hat{m} + 2e^2ZF^2 , \quad (1.46)$$

$$M_{\pi^0}^2 = 2B\hat{m} . \quad (1.47)$$

A lagrangiana da teoria de perturbação quirial possui apenas termos de ordem par. Em primeira ordem, ela é  $\mathcal{O}(p^2)$ . Na ordem seguinte,  $\mathcal{O}(p^4)$ , seus termos são organizados da seguinte maneira [13, 14]

$$\mathcal{L}^{(4)} = \mathcal{L}_{p^4} + \mathcal{L}_{e^2p^2} + \mathcal{L}_{e^4} . \quad (1.48)$$

Na lagrangiana  $\mathcal{L}_{p^4}$  encontram-se os termos relacionados apenas às interações fortes, enquanto que nas  $\mathcal{L}_{e^2p^2}$  e  $\mathcal{L}_{e^4}$  há termos proporcionais a  $\alpha$  ou  $\alpha^2$ , onde  $\alpha$  é a constante de estrutura fina, dada por  $\alpha = e^2/(4\pi)$ . A lagrangiana  $\mathcal{L}_{p^4}$  em presença do eletromagnetismo (há termos proporcionais ao campo do fóton na derivada covariante  $d_\mu$  e nos tensores  $G_{\mu\nu}$ ) é [13, 14]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{p^4} = & \frac{l_1}{4} \langle d^\mu U^+ d_\mu U \rangle^2 + \frac{l_2}{4} \langle d^\mu U^+ d^\nu U \rangle \langle d_\mu U^+ d_\nu U \rangle \\ & + \frac{l_3}{16} \langle \chi^+ U + U^+ \chi \rangle^2 + \frac{l_4}{4} \langle d^\mu U^+ d_\mu \chi + d^\mu \chi^+ d_\mu U \rangle \\ & + l_5 \langle G_{\mu\nu}^R U G^{L\mu\nu} U^+ \rangle + \frac{il_6}{2} \langle G_{\mu\nu}^R d^\mu U d^\nu U^+ + G_{\mu\nu}^L d^\mu U^+ d^\nu U \rangle \\ & - \frac{l_7}{16} \langle \chi^+ U - U^+ \chi \rangle^2 + \frac{1}{4} (h_1 + h_3) \langle \chi^+ \chi \rangle \\ & + \frac{1}{2} (h_1 - h_3) \text{Re}(\det \chi) - h_2 \langle G_{\mu\nu}^R G^{R\mu\nu} + G_{\mu\nu}^L G^{L\mu\nu} \rangle , \end{aligned} \quad (1.49)$$

onde

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^I &= \partial_\mu G_\nu^I - \partial_\nu G_\mu^I - i[G_\mu^I, G_\nu^I] \quad , \quad I = R, L . \\ G_\mu^L &= v_\mu + Q_L A_\mu - a_\mu , \\ G_\mu^R &= v_\mu + Q_R A_\mu + a_\mu . \end{aligned} \quad (1.50)$$



Na lagrangiana  $\mathcal{L}_{p^4}$  aparecem as constantes de baixa energia (LECs, do inglês *Low-energy constants*). As LECs  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$  não possuem significado físico, pois não estão relacionadas a nenhum observável. As demais, sete constantes do tipo  $l_i$ , ao mesmo tempo em que renormalizam os diagramas de *loop* obtidos com  $\mathcal{O}(p^2)$ , contêm partes constantes que carregam informações acerca dos graus de liberdade mais pesados. A relação entre as  $l_i$  e suas partes regulares,  $l_i^r$ , é

$$l_i = l_i^r + \gamma_i L, \quad i = 1, \dots, 7, \quad (1.51)$$

onde  $L$  contém a divergência e é escrito como

$$L = \frac{\mu^{d-4}}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{d-4} - \frac{1}{2} [\ln(4\pi) - \gamma + 1] \right\}, \quad (1.52)$$

sendo  $\mu$  a escala de renormalização,  $d$  é a dimensão do espaço-tempo e  $\gamma$ , a constante de Euler. As constantes que multiplicam  $L$  são dadas por

$$\gamma_1 = \frac{1}{3}, \quad \gamma_2 = \frac{2}{3}, \quad \gamma_3 = -\frac{1}{2}, \quad \gamma_4 = 2, \quad \gamma_5 = -\frac{1}{6}, \quad \gamma_6 = -\frac{1}{3}, \quad \gamma_7 = 0. \quad (1.53)$$

É importante notar que as LECs dependem da escala de renormalização, mas essa dependência é compensada pela existência dos logaritmos quirais, que surgem das integrais de *loop*. Deste modo, as grandezas físicas tornam-se independentes de  $\mu$ . Em  $SU(2)$ , é possível definir LECs independentes da escala de renormalização ( $\bar{l}_i$ ), de modo que os resultados físicos, escritos em termos destas LECs, são explicitamente independentes de  $\mu$ . Elas são dadas por

$$l_i^r = \frac{\gamma_i}{32\pi^2} \left( \bar{l}_i + \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right), \quad (1.54)$$

para  $i = 1, \dots, 6$ , dado que  $l_7$  não possui uma parte divergente.

As constantes de baixa energia não podem ser determinadas por meio da própria ChPT, pois refletem a nossa ignorância a respeito da dinâmica dos graus de liberdade mais pesados, que foram deixados de fora por meio de integração. Deste modo, a informação a respeito delas deve vir da comparação com resultados experimentais. Na tabela 1.4.1, baseada nos trabalhos de revisão de Scherer [23] e de Bijmans [10], mostramos os valores empíricos obtidos.

Os valores mais precisos das LECs  $\bar{l}_1$ ,  $\bar{l}_2$  e  $\bar{l}_4$  vêm do estudo realizado por Colangelo, Gasser e Leutwyler, em 2001, [26]. Neste trabalho, eles analisaram os

Tabela 1.1: Valores para as constantes de baixa energia e os resultados experimentais de onde foram extraídas.

| $\bar{l}_i$ | Valor                               | Como foi obtido  |
|-------------|-------------------------------------|--|
| $\bar{l}_1$ | $-0,4 \pm 0,6$ [26]                 | Espalhamento $\pi\pi$ $\mathcal{O}(p^6)$ + equações de Roy |
| $\bar{l}_2$ | $4,3 \pm 0,1$ [26]                  | Espalhamento $\pi\pi$ $\mathcal{O}(p^6)$ + equações de Roy |
| $\bar{l}_3$ | $2,9 \pm 2,4$ [8]                   | Relações entre massas dos mésons em SU(3)                  |
| $\bar{l}_4$ | $4,4 \pm 0,2$ [26]                  | Espalhamento $\pi\pi$ $\mathcal{O}(p^6)$ + equações de Roy |
| $\bar{l}_5$ | $12,24 \pm 0,21$ [27]               | Decaimento hadrônico do tau                                |
| $\bar{l}_6$ | $16,0 \pm 0,5 \pm 0,7$ [28]         | Raio de carga do pión $\mathcal{O}(p^6)$                   |
|             | $15,22 \pm 0,39$ [27]               | Decaimento hadrônico do tau                                |
| $l_7$       | $\mathcal{O}(5 \times 10^{-3})$ [8] | Mistura $\pi^0$ - $\eta$                                   |

resultados experimentais para o espalhamento  $\pi\pi$ , impondo a simetria quiral, analiticidade, unitaridade e *crossing*. Os comprimentos de espalhamento para a onda  $S$ ,  $a_0^0$  e  $a_0^2$  desempenham papéis fundamentais e foram analisados em detalhe no trabalho de Ananthanarayan *et al.* [29], também de 2001, com o uso das equações de Roy. Estas equações são baseadas em relações de dispersão e decorrem do emprego das propriedades de analiticidade e *crossing* e do limite de Froissart aplicados ao espalhamento  $\pi\pi$ . De acordo com [26], estas equações, aplicadas ao espalhamento  $\pi\pi$  a energias intermediárias, determinam o comportamento da amplitude com precisão em função de  $a_0^0$  e  $a_0^2$ . Em outras palavras, em [26], compara-se a representação para o espalhamento  $\pi\pi$  vinda da ChPT com a obtida fenomenologicamente em [29]. Pode-se, dessa forma, obter os valores das LECs,  $\bar{l}_1$ ,  $\bar{l}_2$  e  $\bar{l}_4$ , que participam deste cálculo.

A principal determinação de  $\bar{l}_3$  vem do trabalho de Gasser e Leutwyler, [8], em que eles usaram equações que relacionam as massas dos mésons pseudoescalares em SU(3). O caso de  $l_7$  é semelhante, e os autores determinaram a sua ordem de grandeza por meio da mistura  $\pi^0$ - $\eta$ . Em [27], encontra-se uma determinação recente de  $\bar{l}_5$  e  $\bar{l}_6$ , a partir da comparação de resultados experimentais para os decaimentos hadrônicos do  $\tau$ . A outra estimativa de  $\bar{l}_6$  foi obtida em [28], com o estudo do raio de carga do pión.

Quando apresentamos a lagrangiana em ordem dominante, equação (1.43) já in-

cluímos os termos decorrentes da introdução do eletromagnetismo: termos contendo o campo do fóton e o proporcional à constante  $C$ . Os diagramas de *loop* calculados com esta lagrangiana contêm divergências proporcionais a  $e^2$  e, portanto, devem-se introduzir LECs eletromagnéticas. Estas são dadas na lagrangiana  $\mathcal{L}_{e^2p^2}$ , dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{e^2p^2} = & F^2 \{ k_1 \langle d^\mu U^\dagger d_\mu U \rangle \langle Q^2 \rangle + k_2 \langle d^\mu U^\dagger d_\mu U \rangle \langle QUQU^\dagger \rangle \\
& + k_3 (\langle d^\mu U^\dagger QU \rangle \langle d_\mu U^\dagger QU \rangle + \langle d^\mu U QU^\dagger \rangle \langle d_\mu U QU^\dagger \rangle) \\
& + k_4 \langle d^\mu U^\dagger QU \rangle \langle d_\mu U QU^\dagger \rangle + k_5 \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle \langle Q^2 \rangle \\
& + k_6 \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle \langle QUQU^\dagger \rangle + k_7 \langle (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) Q + (\chi^\dagger U + U^\dagger \chi) Q \rangle \langle Q \rangle \\
& + k_8 \langle (\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) QUQU^\dagger + (\chi^\dagger U - U^\dagger \chi) QU^\dagger QU \rangle \\
& + k_9 \langle d_\mu U^\dagger [(c_R^\mu Q), Q] U + d_\mu U [(c_L^\mu Q), Q] U^\dagger \rangle + k_{10} \langle (c_R^\mu Q) U (c_{L\mu} Q) U^\dagger \rangle \\
& + k_{11} \langle (c_R Q) \cdot (c_R Q) + (c_L Q) \cdot (c_L Q) \rangle \} , \tag{1.55}
\end{aligned}$$

onde

$$c_\mu^I = \partial_\mu Q_I - i[G_\mu^I, Q_I] , \quad I = R, L . \tag{1.56}$$

Nos cálculos efetuados neste trabalho não incluímos correções  $\mathcal{O}(e^4)$ , mas, por completeza, damos a lagrangiana  $\mathcal{L}_{e^4}$

$$\mathcal{L}_{e^4} = F^4 \{ k_{12} \langle Q^2 \rangle^2 + k_{13} \langle QUQU^\dagger \rangle \langle Q^2 \rangle + k_{14} \langle QUQU^\dagger \rangle^2 \} . \tag{1.57}$$

As constantes de baixa energia para a parte eletromagnética são decompostas do mesmo modo que as da parte forte

$$k_i = k_i^r(\mu) + \sigma_i L , \quad i = 1, \dots, 14 , \tag{1.58}$$

onde

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= -\frac{27}{20} - \frac{1}{5}Z , & \sigma_2 &= 2Z , & \sigma_3 &= -\frac{3}{4} , \\
\sigma_4 &= 2Z , & \sigma_5 &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{5}Z , & \sigma_6 &= \frac{1}{4} + 2Z , \\
\sigma_7 &= 0 , & \sigma_8 &= \frac{1}{8} - Z , & \sigma_9 &= \frac{1}{4} , \\
\sigma_{10} &= 0 , & \sigma_{11} &= 0 , & \sigma_{12} &= \frac{3}{2} - \frac{12}{5}Z + \frac{84}{25}Z^2 , \\
\sigma_{13} &= -3 - \frac{3}{5}Z - \frac{12}{5}Z^2 , & \sigma_{14} &= \frac{3}{2} + 3Z + 12Z^2 . \tag{1.59}
\end{aligned}$$

### 1.4.2 $SU(3)$

Logo após o artigo de 1984 [8], Gasser e Leutwyler publicaram um outro trabalho, ampliando a teoria de perturbação quiral para englobar as interações entre os oito mésons pseudoescalares mais leves [9]. Na versão em dois sabores, supõe-se que as massas  $m_u \approx 2,7$  MeV e  $m_d \approx 5,0$  MeV dos quarks  $u$  e  $d$  são pequenas em relação à escala da teoria, em torno de 1 GeV. Em  $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$ , consideramos, adicionalmente, a massa do quark  $m_s \approx 105$  MeV como sendo também pequena em relação a tal escala.

A ChPT em  $SU(3)$  é uma simples extensão da teoria em  $SU(2)$  e, nesta seção, apenas introduzimos as diferenças entre elas. Como não precisamos do eletromagnetismo na ChPT em três sabores nesta tese, restringimo-nos ao setor puramente forte da teoria.

O campo não linear continua sendo

$$U(x) = \exp\left(i\frac{\phi(x)}{F}\right), \quad (1.60)$$

com  $\phi$  dado por

$$\phi = \sum_{\alpha=1}^8 \lambda_\alpha \phi_\alpha(x) = \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

Em  $SU(3)$ , não se conhece parametrização análoga à do modelo sigma linear, equação (1.33).

Em geral, diferencia-se a constante de decaimento do pión no limite quiral em  $SU(2)$  e  $SU(3)$ , colocando-se um índice 0 neste último caso. Tal distinção não desempenha papel algum neste trabalho e, por isso, denotamos ambas por  $F$ . O mesmo vale para a constante  $B$ .

A lagrangiana em ordem dominante é dada por

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{F^2}{4} \left\langle d_\mu U (d^\mu U)^\dagger + \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right\rangle, \quad (1.62)$$

com

$$d_\mu U = \partial_\mu U - i(v_\mu + a_\mu)U + iU(v_\mu - a_\mu). \quad (1.63)$$

As fontes externas são análogas às de  $SU(2)$  com a identificação  $\tau \leftrightarrow \lambda$ . A forma do campo  $\chi = 2B(s+ip)$ , equação (1.40), não é alterada, mas a fonte escalar externa

torna-se

$$s = \mathcal{M} + \dots = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} + \dots . \quad (1.64)$$

Em ordem dominante, as massas dos mésons são

$$M_\pi^2 = 2B\hat{m} , \quad (1.65)$$

$$M_K^2 = B(m_s + \hat{m}) , \quad (1.66)$$

$$M_\eta^2 = \frac{4}{3}B \left( m_s + \frac{\hat{m}}{2} \right) . \quad (1.67)$$

A lagrangiana em  $\mathcal{O}(p^4)$  é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{p^4} = & L_1 \langle D_\mu U (D^\mu U)^\dagger \rangle^2 + L_2 \langle D_\mu U (D_\nu U)^\dagger \rangle \langle D^\mu U (D^\nu U)^\dagger \rangle \\ & + L_3 \langle D_\mu U (D^\mu U)^\dagger D_\nu U (D^\nu U)^\dagger \rangle + L_4 \langle D_\mu U (D^\mu U)^\dagger \rangle \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle \\ & + L_5 \langle D_\mu U (D^\mu U)^\dagger (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \rangle + L_6 \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle^2 \\ & + L_7 \langle \chi U^\dagger - U \chi^\dagger \rangle^2 + L_8 \langle U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger \rangle \\ & - iL_9 \langle f_{\mu\nu}^R D^\mu U (D^\nu U)^\dagger + f_{\mu\nu}^L (D^\mu U)^\dagger D^\nu U \rangle + L_{10} \langle U f_{\mu\nu}^L U^\dagger f^{R\mu\nu} \rangle \\ & + H_1 \langle f_{\mu\nu}^R f^{R\mu\nu} + f_{\mu\nu}^L f^{L\mu\nu} \rangle + H_2 \langle \chi \chi^\dagger \rangle , \end{aligned} \quad (1.68)$$

onde

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu}^I &= \partial_\mu f_\nu^I - \partial_\nu f_\mu^I - i[f_\mu^I, f_\nu^I], \quad I = L, R , \\ f_\mu^L &= v_\mu - a_\mu , \quad f_\mu^R = v_\mu + a_\mu . \end{aligned} \quad (1.69)$$

Como as LECs  $H_i$  multiplicam apenas termos que dependem de campos externos, elas não possuem relevância física. Como antes, as LECs  $L_i$  contêm uma parte divergente, que renormaliza os diagramas contendo *loops* e são escritas como

$$L_i = L_i^r + \Gamma_i L , \quad i = 1, \dots, 10 . \quad (1.70)$$

Os valores dos  $\Gamma_i$  encontram-se na tabela 1.4.2.

A determinação das LECs em  $SU(3)$  mais aceita na literatura vem dos trabalhos [4, 5]. Os autores empregam dados para o decaimento  $K_{\ell 4}$ ,  $K \rightarrow \pi \pi \ell \nu_\ell$  ( $K^\pm \rightarrow \pi^+ \pi^- e^\pm \nu_e (\bar{\nu}_e)$ , por exemplo) para efetuar ajustes. Uma descrição detalhada destes ajustes vai além do escopo deste trabalho, e nós nos restringimos a mostrar na

tabela 1.4.2 os valores encontrados em [4, 5] na principal determinação, chamado de *fit* 10. A única exceção é a LEC  $L_{10}^r$ , que só aparece em ordem  $\mathcal{O}(p^6)$  e a sua determinação vem da descrição do decaimento do  $\tau$  [27]. Como em  $SU(3)$  não é possível definir uma LEC independente de escala, temos de escolher um valor para  $\mu$ . Nos resultados do *fit* 10, os autores adotaram  $\mu = 770$  MeV, aproximadamente a massa do méson  $\rho$ , valor comumente usado na literatura. A diferença na ordem de grandeza das LECs da tabela 1.4.2 e das independentes da escala da teoria em dois sabores, tabela 1.4.1, vem do fator  $32\pi^2$  que, grosso modo, relaciona as LECs  $l_i^r$  e  $\bar{l}_i$ , equação (1.54).

Tabela 1.2: Valores para as constantes de baixa energia extraídos de [4, 5], *fit* 10.

| $10^3 L_i$    | Valor            | $\Gamma_i$       |
|---------------|------------------|------------------|
| $10^3 L_1$    | $0,43 \pm 0,12$  | $\frac{3}{32}$   |
| $10^3 L_2$    | $0,73 \pm 0,12$  | $\frac{3}{16}$   |
| $10^3 L_3$    | $-2,53 \pm 0,37$ | 0                |
| $10^3 L_4$    | $\equiv 0$       | $\frac{1}{8}$    |
| $10^3 L_5$    | $0,97 \pm 0,11$  | $\frac{3}{8}$    |
| $10^3 L_6$    | $\equiv 0$       | $\frac{11}{144}$ |
| $10^3 L_7$    | $-0,31 \pm 0,14$ | 0                |
| $10^3 L_8$    | $0,60 \pm 0,18$  | $\frac{5}{48}$   |
| $10^3 L_9$    | $5,93 \pm 0,43$  | $\frac{1}{4}$    |
| $10^3 L_{10}$ | $-5,22 \pm 0,06$ | $-\frac{1}{4}$   |

## Capítulo 2

# $F_\pi$ e as interações eletromagnéticas

A constante de decaimento do pión,  $F_\pi$ , juntamente com as massas dos mésons pseudoescalares, aparece na lagrangiana em ordem dominante da ChPT. Ela está presente em inúmeras grandezas calculadas no contexto das interações fortes em baixas energias e determina o coeficiente de contribuições de ordem mais alta, que são, tipicamente, potências de  $1/(4\pi F_\pi)$ .

A teoria de perturbação quiral, colocada em sua forma moderna com os trabalhos de Gasser e Leutwyler da metade da década de 80, [8, 9], tem sido extremamente bem sucedida na descrição e previsão de resultados experimentais. A partir da metade da década de 90, com os trabalhos de Urech [12], Meissner, Müller e Steininger [13] e também Knecht e Urech [14] acrescentaram-se fótons virtuais à ChPT, acompanhando a redução das incertezas observada nos resultados experimentais. Após isso, veio a incorporação, por exemplo, de léptons virtuais e ressonâncias. A ChPT tornou-se, então, a teoria efetiva da QCD hegemônica.

A constante de decaimento do pión, crucial para a ChPT, é também determinada com grande precisão, quando se incluem as interações eletromagnéticas [6]. O que fazemos, neste capítulo, é estudar a constante de decaimento quando incluímos interações eletromagnéticas, trabalho que foi, em grande parte, realizado durante o tempo que passei na Universidade de Berna, sob a orientação do Prof. Gasser. Nós mostramos que a principal estimativa de  $F_\pi$ , dada no PDG [6], possui uma incerteza que deve estar subestimada e concluimos que não é possível determinar com facilidade um  $F_\pi$ , na ChPT, incluindo interações eletromagnéticas.

Este capítulo organiza-se da seguinte forma: na próxima seção abordamos o cálculo da largura de decaimento do pión na ChPT pura e incluindo interações ele-

tromagnéticas. Vemos, também, como se determina o valor de  $F_\pi$  a partir de dados da largura de decaimento do pión. Em seguida, entramos na parte principal do trabalho: a determinação da função de dois pontos da corrente axial cujo resíduo, na QCD pura, é  $F_\pi$ . Lá, vemos que, com a introdução das interações eletromagnéticas, este resíduo passa a depender do calibre usado no tratamento do fóton e há uma transformação das propriedades da função de dois pontos. Fechamos com uma discussão dos resultados, apontando os motivos pelos quais acreditamos que a incerteza de  $F_\pi$  dada em [6] deve ser revista. Os detalhes a respeito deste último ponto são feitos no apêndice B.

## 2.1 O decaimento do pión e $F_\pi$

### Cálculo em ordem dominante

No modelo padrão, o decaimento do  $\pi^-$  é representado, em primeira ordem, pelo aniquilamento de um quark  $d$  com um antiquark  $\bar{u}$ , como apresentado na figura 2.1. Isto dá origem a um bóson  $W^-$ , que, por sua vez, decai no par  $\ell \nu_\ell$ .

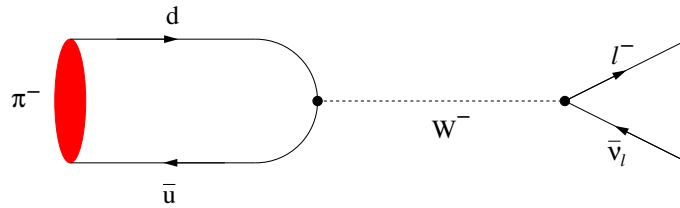


Figura 2.1: Diagrama de Feynman representando o decaimento do pión. As mesmas convenções se aplicam às figuras que seguem.

Para obter o acoplamento entre o pión e o bóson  $W$ , introduzimos o campo deste último por meio das fontes externas, apresentadas na seção 1.4.1, equações (1.43) e (1.44). Colocamos

$$r_\mu = 0 \quad \text{e} \quad l_\mu = -\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ T_+ + W_\mu^- T_-), \quad (2.1)$$



onde

$$T_+ = \begin{pmatrix} 0 & V_{ud} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V_{ud} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$g$  é a constante de acoplamento e  $V_{ud}$  é um elemento da matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Deste modo, a lagrangiana de interação fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W\pi} &= Fl_i^\mu \partial_\mu \phi_i = -\frac{F}{2} g V_{ud} (W_\mu^+ \partial^\mu \pi^- + W_\mu^- \partial^\mu \pi^+) \\ &= -\frac{F}{2} g V_{ud} (W_\mu^1 \partial^\mu \pi^1 + W_\mu^2 \partial^\mu \pi^2), \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde a segunda versão é escrita em termos dos índices de isospin cartesianos.

O propagador do  $W$  pode ser aproximado por

$$\frac{-i}{k^2 - M_W^2} \left( g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{M_W^2} \right) \approx i \frac{g^{\mu\nu}}{M_W^2}, \quad (2.4)$$

válida para momentos muito menores que  $M_W \approx 80,4$  GeV, o que é aplicável ao caso aqui considerado. No caso dos diagramas de Feynman, isso equivale a substituir o propagador do  $W$  por um ponto.

O acoplamento entre o bóson  $W$  e os léptons é dado por

$$\mathcal{L}_{W \rightarrow \bar{\nu}\mu} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} [W_\mu^+ \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu + W_\mu^- \bar{\mu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_\mu], \quad (2.5)$$

para o caso do múon, que é o canal de decaimento mais frequente, como se vê na tabela abaixo abaixo. O decaimento em elétron é suprimido, uma vez que o acoplamento e conservação de momentos linear e angular requerem que a partícula massiva saia com helicidade positiva (de mão direita). Se ele tivesse massa nula, isso não seria possível, dado que o elétron deveria ser de mão esquerda. Portanto, ainda que o espaço de fase para o decaimento em  $e \nu_e$  seja maior, a pequena massa do elétron suprime este canal.

A amplitude do decaimento  $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$  é

$$\begin{aligned} iT &= -\frac{ig}{2\sqrt{2}} \bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) v_{\mu^+} \frac{ig_{\mu\nu}}{M_W^2} \left( -F \frac{g}{2} V_{ud} k^\mu \right) \\ &= -G_F V_{ud} F m_l \bar{u}_{\nu_\mu} (1 - \gamma_5) v_{\mu^+}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde a constante de Fermi é  $G_F = \frac{g^2}{4\sqrt{2}M_W^2}$ . A largura de decaimento em ordem dominante e sem correções radiativas é dada por

$$\Gamma(\pi \rightarrow \ell \bar{\nu}_\ell) = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 F_\pi^2 m_\ell^2 M_\pi}{4\pi} \left( 1 - \frac{m_\ell^2}{M_\pi^2} \right)^2. \quad (2.7)$$

Tabela 2.1: Razão de ramificação para os principais canais de decaimento do  $\pi^-$  de acordo com o PDG [6]. É importante ressaltar que a indicação  $\gamma$  indica que foram consideradas reações apenas com fótons de energia maior que um certo  $E_\gamma$ , da ordem de alguns MeV. Quando não se coloca  $\gamma$ , incluíram-se todos os fótons até  $E_\gamma$ . Além disso, por definição  $[\Gamma(\mu^- \bar{\nu}_\mu) + \Gamma(e^- \bar{\nu}_e)]/\Gamma_{total} = 100\%$ .

| $\Gamma_i$                   | $\Gamma_i/\Gamma$ (%)             |
|------------------------------|-----------------------------------|
| $\mu^- \bar{\nu}_\mu$        | $99,98770 \pm 0,00004$            |
| $\mu^- \bar{\nu}_\mu \gamma$ | $(2,00 \pm 0,25) \cdot 10^{-2}$   |
| $e^- \bar{\nu}_e$            | $(1,230 \pm 0,004) \cdot 10^{-2}$ |
| $e^- \bar{\nu}_e \gamma$     | $(1,61 \pm 0,23) \cdot 10^{-5}$   |
| $\pi^0 e^- \bar{\nu}_e$      | $(1,036 \pm 0,006) \cdot 10^{-6}$ |

Nota-se que a supressão devida à helicidade aparece na forma de uma dependência na massa do lépton,  $m_\ell$ .

### Correções radiativas

No final da década de 1950, experimentos dedicados ao estudo do decaimento do pión atingiram uma precisão suficiente para motivar o interesse teórico no estudo de correções radiativas. O foco principal dos experimentos e das investigações teóricas da época era a razão

$$R_{e/\mu}^{(\pi)} = \frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e(\gamma))}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu(\gamma))}, \quad (2.8)$$

onde  $\gamma$  indica que fótons foram incluídos. Um importante resultado experimental da década de 1960 [30] fornecia  $R_{e/\mu}^{(\pi)} = (1,21 \pm 0,07) \cdot 10^{-4}$  e o resultado mais recente encontrado no PDG [6] é  $R_{e/\mu}^{(\pi)} = (1,2346 \pm 0,0035 \pm 0,0036) \cdot 10^{-4}$  [31], com uma incerteza bastante menor. A estimativa teórica mais recente (e mais precisa) foi feita com base na ChPT em [32, 33] por Cirigliano e Rosell, resultando em  $R_{e/\mu}^{(\pi)} = (1,2352 \pm 0,0001) \cdot 10^{-4}$ . Desde a década de 60, buscou-se incluir correções radiativas à largura de decaimento dada acima, (2.7), de modo a alcançar precisão comparável com os experimentos.

A seguir, discutimos a inclusão dessas correções à largura de decaimento do pión. Abordamos dois modos de acrescentá-las: a primeira, no âmbito apenas do modelo

padrão e a segunda, complementada pela teoria efetiva.

Começamos pela expressão obtida com o modelo padrão. Seguimos o trabalho de Marciano e Sirlin de 1993 [34], em que foram sistematizadas as principais contribuições. O resultado que encontramos é

$$\begin{aligned} \Gamma(\pi \rightarrow \ell \bar{\nu}_\ell(\gamma)) = & \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 F_\pi^2 m_\ell^2 M_\pi}{4\pi} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{M_\pi^2}\right)^2 \left[1 + \frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{M_Z}{m_\rho}\right] \\ & \times \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \frac{3}{2} \ln \frac{m_\rho}{M_\pi} + C_1 + C_2 \frac{m_\ell^2}{m_\rho^2} \ln \frac{m_\rho^2}{m_\ell^2} + C_3 \frac{m_\ell^2}{m_\rho^2} + \dots \right\}\right] \\ & \times \left[1 + \frac{\alpha}{\pi} F(x)\right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $\alpha = e^2/4\pi$  é a constante de estrutura fina,  $M_Z$  é a massa do bóson  $Z$  e  $m_\rho$  é a massa do méson  $\rho$ , empregada pelos autores como uma escala hadrônica que demarca a separação entre contribuições de *loop* de curtas e longas distâncias. O significado das constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  será discutido a seguir e  $F(x)$  é uma função de  $x = m_\ell/M_\pi$ , tal que,

$$\begin{aligned} F(x) = & 3 \ln x + \frac{13 - 19x^2}{8(1 - x^2)} - \frac{8 - 5x^2}{2(1 - x^2)^2} x^2 \ln x - 2 \left[ \left( \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \right) \ln x + 1 \right] \ln(1 - x^2) \\ & + 2 \left( \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \right) L(1 - x^2) \end{aligned} \quad (2.10)$$

e

$$L(z) = \int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t} dt. \quad (2.11)$$

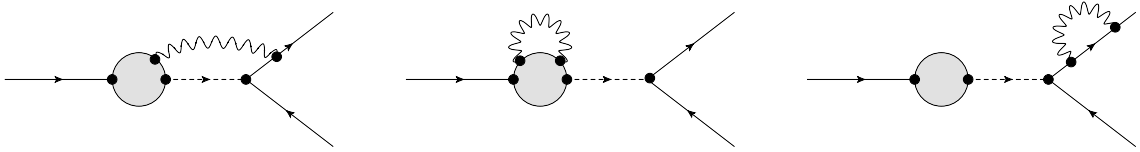


Figura 2.2: Diagramas que entram no cálculo das correções radiativas para o decaimento do pión, no limite  $M_Z$  e  $M_W \rightarrow \infty$ , determinadas em [1]. O fóton é indicado pela linha ondulada e o vértice entre o pión e o  $W$ , representado pela linha tracejada, é a bola cinza. O lépton é a linha superior direita a qual o fóton se conecta.

O primeiro colchete da expressão (2.9) representa correções da teoria eletrofraca, vindas de processos mediados pelo  $W$ , onde são incluídos fóton virtuais, no limite

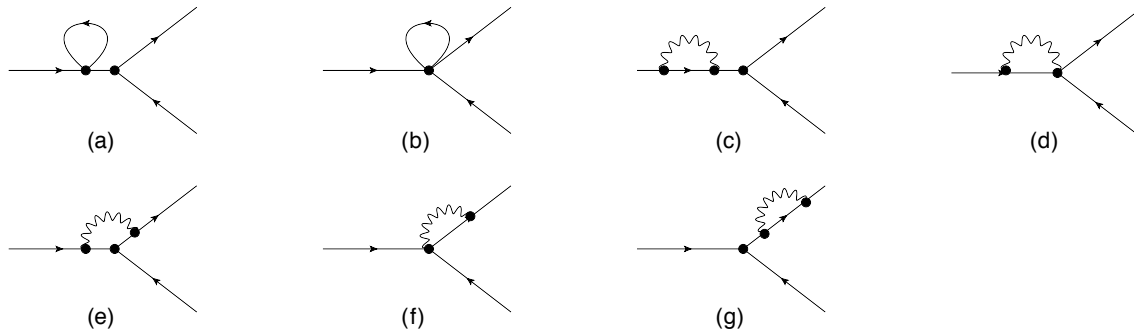


Figura 2.3: Diagramas de contribuições para o decaimento do pión consideradas no cálculo realizado com a ChPT em [2]. Em [3] não se considerou os diagramas com *loops* de pions (a) e (b). É importante notar que o propagador do  $W$  tornou-se um ponto.

para grandes valores de  $M_Z$  e  $M_W$ . Tais contribuições, dadas pelos diagramas da figura 2.2, foram estudadas pelo próprio Sirlin em 1982 [1] e não dependem do processo hadrônico aos quais se conectam. Se colocamos  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ , temos as correções obtidas por Kinoshita em 1959 [3] nos segundo e terceiro colchetes. Elas são representadas nas figuras 2.3(c)-(g) e 2.4 (lembramos que o propagador do  $W$  tornou-se um ponto) e tratam-se de correções obtidas com a QED, tomando o pión como uma partícula pontual. Deste modo, os termos restantes, contendo as constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , correspondem a correções de estrutura hadrônica.

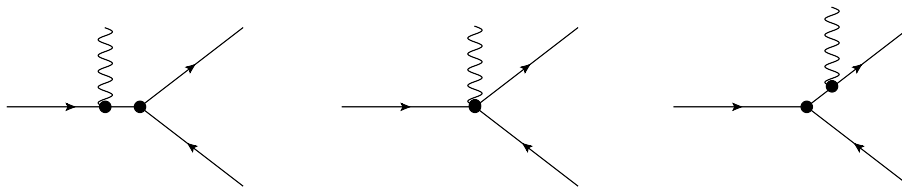


Figura 2.4: Diagramas de emissão de fótons livres consideradas em [3] e [2].

Com a teoria efetiva da QCD, podemos ter acesso acerca das correções de estrutura. O primeiro trabalho que incluiu léptons virtuais a esta teoria é de 2000 [2] e nele se considerou as contribuições de 2.3 e 2.4. Nele encontramos a seguinte

expressão para a largura de decaimento

$$\begin{aligned} \Gamma(\pi \rightarrow \ell \bar{\nu}_\ell(\gamma)) = & \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 F^2 m_\ell^2 M_\pi}{4\pi} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{M_\pi^2}\right)^2 \left\{1 \right. \\ & + \frac{8}{F^2} [L_4^r(\mu)(M_\pi^2 + 2M_K^2) + L_5^r(\mu)M_\pi^2] \\ & - \frac{1}{2(4\pi)^2 F^2} \left[ 2M_{\pi^\pm}^2 \ln \frac{M_{\pi^\pm}^2}{\mu^2} + 2M_\pi^2 \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} \right. \\ & \left. + M_{K^\pm}^2 \ln \frac{M_{K^\pm}^2}{\mu^2} + M_K^2 \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} \right] \\ & \left. + \frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{3}{4} \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} + \frac{1}{2} + F(x) \right] + 4\pi\alpha E^r(\mu) \right\}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde  $L_i^r$  são as LECs relativas à lagrangiana puramente hadrônica da ChPT em três sabores e  $E^r(\mu)$  é uma combinação de termos da lagrangiana envolvendo fótons ( $K_i$ ) e léptons ( $X_i$ ) [2]

$$\begin{aligned} E^r(\mu) = & \frac{8}{3} (K_1^r(\mu) + K_2^r(\mu)) + \frac{20}{9} (K_5^r(\mu) + K_6^r(\mu)) + 4K_{12}^r(\mu) \\ & - \frac{4}{3} X_1^r(\mu) - 4X_2^r(\mu) + 4X_3^r(\mu) - X_6^r(\mu). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nota-se que na largura de decaimento acima, (2.12), aparece a constante de decaimento no limite quiral ( $F$ ); mais a frente vemos como relacioná-la com  $F_\pi$ . Extraem-se as constantes  $C_i$  através da comparação entre as larguras de decaimento obtidas com o modelo padrão, equação (2.9), e a provinda da ChPT, (2.12). Na ordem de perturbação considerada em [2], não é possível obter uma expressão para as constantes  $C_2$  e  $C_3$ , que são  $\mathcal{O}(e^2 p^4)$ . Para  $C_1$ ,  $\mathcal{O}(e^2 p^2)$ , eles fornecem o seguinte resultado

$$C_1 = \ln \left( \frac{M_Z^2}{m_\rho^2} \right) - \frac{1}{2} - 4\pi^2 E^r(m_\rho) + \frac{Z}{4} \left( 3 + \ln \frac{M_K^2}{m_\rho^2} + 2 \ln \frac{M_\pi^2}{m_\rho^2} \right). \quad (2.14)$$

Nos trabalhos [32, 33], de 2007, Cirigliano e Rosell não efetuam um cálculo completo da largura de decaimento em  $\mathcal{O}(e^2 p^4)$ . Como o objetivo principal do artigo é obter uma expressão para a razão  $R_{e/\mu}^{(\pi)}$  na ordem citada, faltam alguns diagramas para dar um resultado completo para a largura de decaimento do pión. De qualquer modo, eles atualizaram a expressão fornecida por Knecht *et al.* com as contribuições parciais. Colocaram o resultado na forma introduzida por Marciano e Sirlin [34], acrescentando uma outra constante  $C_4(m_\ell/M_\pi)$ , função da razão entre as massas do lépton e do pión. Não convém colocar os resultados para todas as constantes aqui,

pois não é este o foco desta seção (elas são dadas nas expressões (8.5), (8.6) e (8.7) de [32]). Enfatizamos apenas que a adição das contribuições calculadas com a teoria efetiva fornece a informação adicional sobre as correções de estrutura  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ .

### Determinação de $F_\pi$

A extração de  $F_\pi$  dos dados para a largura de decaimento  $\Gamma(\pi \rightarrow \ell \bar{\nu}_\ell(\gamma))$ , realizada pelo PDG com base nos trabalhos mencionados acima, inicia-se com a definição de  $F_\pi$  como sendo a constante de decaimento do pión calculada na QCD pura, sem interações eletromagnéticas, como dado em [9],

$$F_\pi = F \left\{ 1 + \frac{4}{F^2} [L_4^r(M_\pi^2 + 2M_K^2) + L_5^r] - \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left( 2M_\pi^2 \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} + M_K^2 \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} \right) \right\} . \quad (2.15)$$

Vale lembrar que as equações para a largura de decaimento e  $F_\pi$  dadas nesta seção são todas obtidas em  $SU(3)$ . Em seguida, fatora-se o  $F_\pi$ , na QCD pura, da largura de decaimento, equação (2.12). O mesmo poderia ser feito com a largura de decaimento obtida em [32], com a diferença de que deveríamos estimar as demais constantes que aparecem naquela expressão vindas das correções em  $\mathcal{O}(e^2 p^4)$ . Assim, temos

$$\Gamma(\pi \rightarrow \ell \bar{\nu}_\ell(\gamma)) = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 F_\pi^2 m_\ell^2 M_\pi}{4\pi} \left( 1 - \frac{m_\ell^2}{M_\pi^2} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \left[ -2Z \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} - Z \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} - 3Z + 3 \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} + 2 + 4F(x) + 16\pi^2 E^r(\mu) \right] \right\} . \quad (2.16)$$

É com o resultado experimental para a largura de decaimento e com uma estimativa para a combinação das LECs eletromagnéticas encontradas em  $E^r(\mu)$  (sem falar das outras constantes já citadas anteriormente), que o PDG obtém o seguinte valor

$$F_\pi = (92, 21 \pm 0, 03 \pm 0, 14) \text{ MeV} , \quad (2.17)$$

em que a primeira incerteza refere-se à incerteza em  $V_{ud}$  e a segunda, a correções de ordem mais alta.

Na seção 2.2, calculamos a função de dois pontos da corrente axial, cujo resíduo, na teoria puramente forte, está ligado a  $F_\pi$ . Inicialmente, o fazemos na ChPT sem a adição de correções radiativas e, depois, com elas. Vemos que não podemos

determinar facilmente um  $F_\pi$  a partir do resíduo da função de dois pontos após incluir o eletromagnetismo, pois aparece uma dependência no calibre deste resíduo e a estrutura da função é mudada drasticamente.

Ao final da seção 2.3, argumentamos que provavelmente a incerteza de  $F_\pi$  fornecida pelo PDG, equação (2.17), está subestimada por dois principais motivos (mais detalhes se encontram na seção 2.3 e no apêndice B):

1. a constante de decaimento do pión obtida de tais trabalhos é livre de correções radiativas e, devido à ambiguidade na separação entre contribuições obtidas com as teorias das interações fortes e eletromagnéticas, ela depende de uma escala que define o ponto no qual as constantes da teoria completa (interações fortes com correção radiativa) são iguais às da teoria puramente forte. Dever-se-ia levar em conta essa variação com a escala como uma outra fonte de incerteza;
2. o uso da massa do pión neutro ou carregado para determinar  $F_\pi$  depende de convenção. O que se observa é que a variação resultante da uso de uma ou outra massa já está acima da incerteza dada no valor do PDG. Isso deveria ser levado em conta, também, na determinação das incertezas.

## 2.2 A função de dois pontos da corrente axial

Nesta seção, consideramos a função de dois pontos da corrente axial em dois sabores. Primeiramente, incluímos apenas as interações fortes e, depois, acrescentamos as eletromagnéticas, com o objetivo de estudar o comportamento da constante de decaimento do pión nos dois casos. No caso da QCD pura, o resíduo da função de dois pontos da corrente axial determina  $F_\pi$ . A introdução de interações eletromagnéticas resulta no surgimento de uma dependência no calibre deste resíduo e na alteração das propriedades da função de dois pontos.

### 2.2.1 Apenas QCD

Nesta primeira parte, empregamos a ChPT sem incluir interações eletromagnéticas. Este cálculo já foi feito no artigo de Gasser e Leutwyler de 1984 [8] e aqui serve para ilustrar o que faremos em seguida, ao incluir as interações eletromagnéticas. A

função de dois pontos da corrente axial é dada por

$$T_{\mu\nu}^{ij} = i \int dx e^{ik \cdot (x-y)} \langle 0 | T A_\mu^i(x) A_\nu^j(y) | 0 \rangle = \delta_{ij} \frac{F_{\pi^i}^2 k_\mu k_\nu}{M_{\pi^i}^2 - k^2} + R_{\mu\nu}^{ij} , \quad (2.18)$$

onde a corrente axial é

$$A_\mu^i = \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^i}{2} q \quad (2.19)$$

e  $R_{\mu\nu}^{ij}$  não contém pólos. Consideramos apenas casos em que  $i = j$  e, como os resultados são invariantes sob a troca  $1 \leftrightarrow 2$ , necessitamos apenas de 11 e 33.

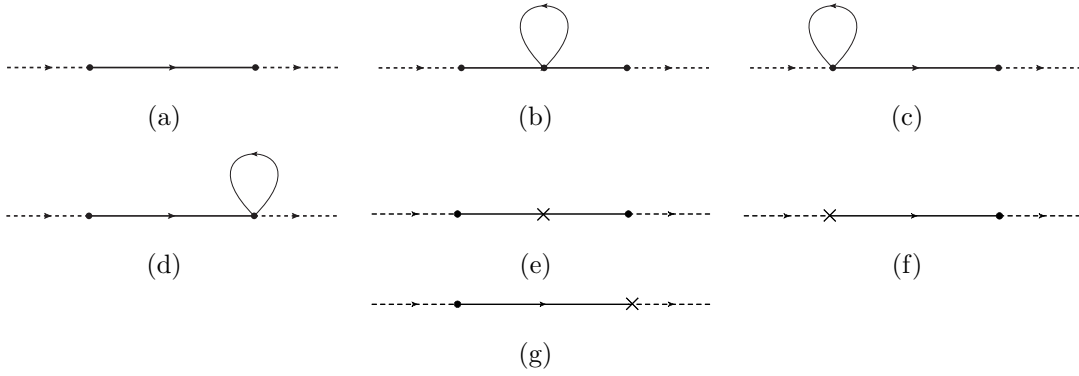


Figura 2.5: A linha tracejada representa a fonte axial externa e a sólida, o pión. O símbolo  $\times$  representa a inserção de um vértice provindo de  $\mathcal{L}_{p^4}$ .

A contribuição do pólo do diagrama da figura 2.5(a) é

$$P_{\mu\nu}^{ii(0)} = F^2 \frac{k_\mu k_\nu}{M_i^2 - k^2} , \quad (2.20)$$

sendo  $F$  a constante de decaimento do pión no limite quiral,  $k$  o momento da fonte externa e

$$M_i^2 = M^2 \left( 1 + \frac{2M^2}{F^2} l_3 \right) . \quad (2.21)$$

A LEC  $l_3$ , vinda da lagrangiana dada em (1.49), pode ser decomposta em uma parte regular e divergente como  $l_3 = l_3^r - \frac{1}{2}L$ , onde

$$L = \frac{\mu^{d-4}}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{d-4} - \frac{1}{2} [\ln(4\pi) - \gamma + 1] \right\} \quad (2.22)$$

e a massa do pión em ordem dominante é

$$M^2 = 2B\hat{m} . \quad (2.23)$$



A massa  $M_i$  é colocada na forma acima por conveniência. A inclusão da LEC  $l_3$  na massa do pión decorre da observação de que o termo na lagrangiana que contém  $l_3$  possui a mesma estrutura do termo de massa e, de qualquer forma, deveria ser incluída na conta (diagrama 2.5(e)) de modo a eliminar parte da divergência introduzida pelo diagrama de *loop* 2.5(b). Deve-se tomar cuidado para levar em conta corretamente a contagem de potências. Este procedimento equivale a incluir essa correção na massa em todos os lugares possíveis.

Agora, consideramos os diagramas de um *loop*, de ordem quiral  $\mathcal{O}(p^2)$ , iniciando com o diagrama da figura 2.5(b), cuja amplitude é dada por

$$T_{\mu\nu}^{ii(p^2,1)} = P_{\mu\nu}^{ii(0)} \left( P_{p^2,1}^{ii}(k^2) + \frac{1}{M_1^2 - k^2} Q_{p^2,1}^{ii}(k^2) \right), \quad (2.24)$$

onde

$$P_{p^2,1}^{11}(k^2) = -\frac{T_{M_1}}{F^2}, \quad (2.25)$$

$$Q_{p^2,1}^{11}(k^2) = \frac{1}{2F^2} [4(M_1^2 - M^2) T_{M_1} - M^2 T_{M_3}] \quad (2.26)$$

e

$$P_{p^2,1}^{33}(k^2) = -\frac{T_{M_3}}{F^2}, \quad (2.27)$$

$$Q_{p^2,1}^{33}(k^2) = \frac{1}{2F^2} [(4M_3^2 - 3M^2) T_{M_3} - 2M^2 T_{M_1}]. \quad (2.28)$$

O índice 1 serve apenas para diferenciar estas contribuições das dos diagramas das figuras 2.5(c) e 2.5(d) (denotadas de 2). A ordem quiral do diagrama é indicada pelo  $p^2$ . A integral de *loop*,  $T_M$ , é escrita como

$$T_{M_i} = \left\langle \frac{1}{M_i^2 - l^2} \right\rangle = M_i^2 \left[ 2L + \frac{1}{16\pi^2} \ln \left( \frac{M_i^2}{\mu^2} \right) \right]. \quad (2.29)$$

Maiores detalhes podem ser encontrados no apêndice D.

É importante notar que distinguimos as contribuições dos pions neutro e carregados. A princípio não seria necessário fazer isso nessa seção, mas estes resultados serão úteis na próxima, quando incluirmos interações eletromagnéticas.

Os diagramas das figuras 2.5(c) e 2.5(d) fornecem

$$T_{\mu\nu}^{ii(p^2,2)} = P_{\mu\nu}^{ii(0)} P_{p^2,2}^{ii}(k^2), \quad (2.30)$$

com

$$P_{p^2,2}^{11}(k^2) = -\frac{T_{M_3}}{F^2} \quad (2.31)$$

e

$$P_{p^2,2}^{33}(k^2) = \frac{1}{F^2} (T_{M_3} - 2T_{M_1}) . \quad (2.32)$$

Para completar o cálculo, acrescentamos os diagramas com os contratermos, figuras 2.5(f) e 2.5(g) e obtemos

$$T_{\mu\nu}^{ii(p^4)} = P_{\mu\nu}^{ii(0)} P_{p^4}^{ii}(k^2) , \quad (2.33)$$

onde

$$P_{p^4}^{ii}(k^2) = 2l_4 \frac{M^2}{F^2} , \quad (2.34)$$

com  $l_4 = l_4^r + 2L$ .

Usando a seguinte expansão

$$\frac{1}{M^2 + \Sigma - k^2} \simeq \frac{1}{M^2 - k^2} \left( 1 - \frac{\Sigma}{M^2 - k^2} \right) , \quad (2.35)$$

temos

$$M_{\pi^i, QCD}^2 = M_i^2 - Q_{p^2,1}^{ii}(M^2) + \mathcal{O}(M^4) , \quad (2.36)$$

$$F_{\pi^i, QCD} = F \left[ 1 + \frac{1}{2} (P_{p^2,1}^{ii}(M^2) + P_{p^2,2}^{ii}(M^2) + P_{p^4}^{ii}(M^2)) + \mathcal{O}(M^4) \right] .$$

Portanto, os resultados são

$$\begin{aligned} M_{\pi^1, QCD}^2 &= M_{\pi^3, QCD}^2 = M^2 \left[ 1 + 2\frac{M^2}{F^2} l_3^r + \frac{M^2}{32\pi^2 F^2} \ln \left( \frac{M^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(M^4) \right] \\ &= M^2 \left[ 1 - \frac{M^2}{32\pi^2 F^2} \bar{l}_3 + \mathcal{O}(M^4) \right] , \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} F_{\pi^1, QCD}^2 &= F_{\pi^3, QCD}^2 = F^2 \left[ 1 + 2l_4^r \frac{M^2}{F^2} - \frac{M^2}{8\pi^2 F^2} \ln \left( \frac{M^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(M^4) \right] \\ &= F^2 \left[ 1 + \frac{M^2}{8\pi^2 F^2} \bar{l}_4 + \mathcal{O}(M^4) \right] . \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde o índice  $QCD$  indica que levaram-se em conta apenas efeitos da QCD. Esses resultados concordam com os encontrados na literatura (ver [8], por exemplo).

### 2.2.2 QCD + QED

Nesta parte, acrescentamos as interações eletromagnéticas ao cálculo da função de dois pontos da corrente axial. Antecipamos que isso muda drasticamente as propriedades desta grandeza. No caso do pión neutro, a única alteração decorre da distinção entre as massas dos píons neutros e carregados. Para os píons carregados, temos que acrescentar diagramas com *loop* de fótons virtuais. Inicialmente, consideramos o termo da lagrangiana, equação (1.43), em ordem  $p^2$ , que confere massas diferentes ao píons neutros e carregados,

$$C \langle QUQU^\dagger \rangle = 2C \frac{e^2}{F^2} \pi^+ \pi^- = -C \frac{e^2}{F^2} [(\pi^1)^2 + (\pi^2)^2] , \quad (2.39)$$

onde  $C$  é uma constante também escrita em termos de uma outra constante  $Z$ , como  $C \equiv ZF^4$  e usamos

$$\pi^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi^1 + i\pi^2) , \quad \pi^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\pi^+ + \pi^-) , \quad (2.40)$$

$$\pi^0 = \pi^3 , \quad \pi^2 = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\pi^+ + \pi^-) , \quad (2.41)$$

$$\pi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\pi^1 + i\pi^2) , \quad \pi^3 = \pi^0 . \quad (2.42)$$

Com o termo dado acima, há uma modificação nas massas  $M_i^2$

$$M_1^2 = M_2^2 \rightarrow M^2 \left( 1 + \frac{2M^2}{F^2} l_3 \right) + 2e^2 Z F^2 , \quad (2.43)$$

$$M_3^2 \rightarrow M^2 \left( 1 + \frac{2M^2}{F^2} l_3 \right) . \quad (2.44)$$

A massa dos píons carregados em ordem em primeira ordem é, portanto,

$$M_{\pm}^2 = M^2 + 2e^2 Z F^2 . \quad (2.45)$$

O próximo passo é acrescentar as contribuições de um *loop* contendo fótons virtuais. Nós usamos o seguinte propagador para o fóton

$$iD_{\mu\nu} = -\frac{i}{k^2} \left( g_{\mu\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) , \quad (2.46)$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro de calibre.

O primeiro diagrama que discutimos é mostrado na figura 2.6(a) e depois calculamos os das figuras 2.6(b) e 2.6(c).

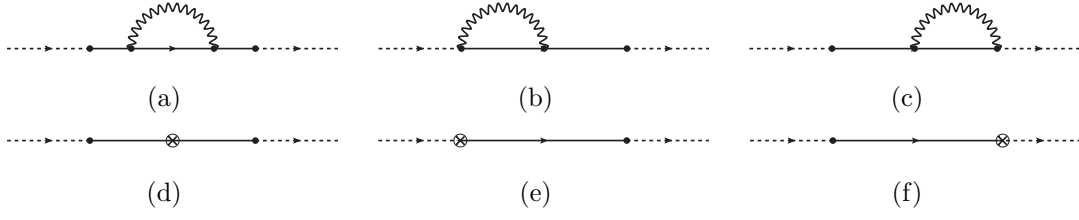


Figura 2.6: A linha ondulada representa o fóton e  $\otimes$  inserções de termos de  $\mathcal{L}_{e^2 p^2}$ .

Para o diagrama da figura 2.6(a), ainda usando a mesma notação, temos

$$T_{\mu\nu}^{11(e^2,1)} = P_{\mu\nu}^{11(0)} T_{e^2,1}^{11}(k^2) = P_{\mu\nu}^{11(0)} \left( P_{e^2,1}^{11}(k^2) + \frac{1}{M_1^2 - k^2} Q_{e^2,1}^{11}(k^2) \right), \quad (2.47)$$

em que

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{11(e^2,1)} &= e^2 \frac{1}{M_1^2 - k^2} \left\{ - \left\langle \frac{(2k-l)^2}{[M_1^2 - (k-l)^2](-l^2)} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\lambda}{\lambda} \left\langle \frac{[l \cdot (2k-l)]^2}{[M_1^2 - (k-l)^2](-l^2)^2} \right\rangle \right\} \\ &= e^2 \frac{1}{1-z} \left\{ - \frac{T_M}{M_1^2} - 2(z+1) J^{\pi\gamma}(k^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\lambda}{\lambda} (1-z) [-J^{\pi\gamma}(k^2) - 2M_1^2 z J_1^{\pi\gamma\gamma}(k^2)] \right\} \end{aligned} \quad (2.48)$$

e  $z = k^2/M_1^2$  (daqui para frente usamos  $z$  com frequência). Empregamos a seguinte notação para as integrais de *loop*

$$\langle P(l) \rangle = \int \frac{d^d l}{i(2\pi)^d} P(l). \quad (2.49)$$

Mais especificamente, trabalhamos com as integrais

$$J^{\pi\gamma}(k^2) = \left\langle \frac{1}{M_1^2 - (k-l)^2} \frac{1}{-l^2} \right\rangle \quad (2.50)$$

e

$$J_\mu^{\pi\gamma\gamma}(k^2) = k_\mu J_1^{\pi\gamma\gamma}(k^2) = \left\langle \frac{l_\mu}{M_1^2 - (k-l)^2} \frac{1}{(-l^2)^2} \right\rangle. \quad (2.51)$$

Antes de discutir o resultado deste diagrama, analisamos as integrais de *loop* individualmente. Quando trabalhamos com *loops* de fótons, devemos regularizar as divergências infravermelhas das integrais. No caso do decaimento do pión, com

a introdução de fótons virtuais e tendo regularizado as integrais, ao calcularmos a largura de decaimento  $\Gamma(\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l(\gamma))$  (o observável composto pelos processos  $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$  e  $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l + n\gamma$ ) cancelamos as divergências infravermelhas. Contudo, a função de dois pontos das correntes axiais carregadas pode, em princípio, tanto possuir divergências infravermelhas, quanto ser dependente de calibre.

Uma alternativa para regularizar as integrais é fornecer uma massa para o fóton  $m_\gamma \neq 0$  [2, 32, 35]. A divergência aparece, então, como um logaritmo de  $m_\gamma$ . A regularização dimensional é uma outra alternativa, que se usa tanto para regularizar as divergências infravermelhas, quanto as ultravioletas. É este procedimento que adotamos aqui. Assim, resolvemos as integrais e, por consequência, as amplitudes dos diagramas de *loop*, em  $d$  dimensões. Como as grandezas que nos interessam são calculadas para  $k^2 \rightarrow M_\pi^2$  (equivalente a  $z \rightarrow 1$ ), consideramos também este limite.

Começamos pela integral  $J^{\pi\gamma}(k^2)$ . No apêndice D detalhamos os cálculos e aqui chamamos atenção aos aspectos mais relevantes. Basicamente, escrevemos esta integral em termos de uma função hipergeométrica (seção 15 do livro de Abramowitz e Stegun [36]),

$$\begin{aligned} J^{\pi\gamma}(k^2) &= \left\langle \frac{1}{M^2 - (k-l)^2} \frac{1}{-l^2} \right\rangle = \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{M^2}{4\pi} \right)^w \Gamma(-w) \int_0^1 dx (1-x)^w (1-zx)^w \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{M^2}{4\pi} \right)^w \frac{\Gamma(-w)}{1+w} F(-w, 1; 2+w; z), \end{aligned} \quad (2.52)$$

com

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dx x^{b-1} (1-x)^{c-b-1} (1-zx)^{-a} \quad (2.53)$$

e  $w = \frac{d}{2} - 2$ . Para separar o resíduo da função de dois pontos da correção da massa, é conveniente definir

$$\bar{J}^{\pi\gamma}(k^2) \equiv J^{\pi\gamma}(k^2) - J^{\pi\gamma}(M^2), \quad (2.54)$$

onde

$$J^{\pi\gamma}(M^2) = -2L + \frac{1}{16\pi^2} \left[ 1 - \ln \left( \frac{M_i^2}{\mu^2} \right) \right]. \quad (2.55)$$

Com o uso de propriedades das funções hipergeométricas, podemos escrever que, em torno de  $w \rightarrow 0$  e  $z \rightarrow 1$ ,  $\bar{J}^{\pi\gamma}(k^2)$  é

$$\bar{J}^{\pi\gamma}(k^2) = \left[ 2L + \frac{1}{16\pi^2} \left( \ln \frac{M^2}{\mu^2} - 1 \right) \right] \frac{1-z}{2z} [(1-z)^{2w} - 1] + \mathcal{O}[w, (1-z)^2]. \quad (2.56)$$

Estudamos as integrais e as grandezas que delas dependem nos diferentes limites ilustrados na figura 2.7. No limite (1) e (3), tomamos primeiro o limite  $w \rightarrow 0$ , sendo que em (1)  $w$  se aproxima de 0 ( $d = 4$ ) por valores negativos e em (3), pelos positivos e, apenas depois disso, tomamos  $z = 1$ . Esse limite, em que primeiro faz-se  $w \rightarrow 0$ , é útil nos procedimentos de renormalização. Nos limites (2) e (4) fazemos inicialmente  $z \rightarrow 1$  para  $w < 0$  e  $w > 0$ , respectivamente, que é empregado no caso do formalismo LSZ.

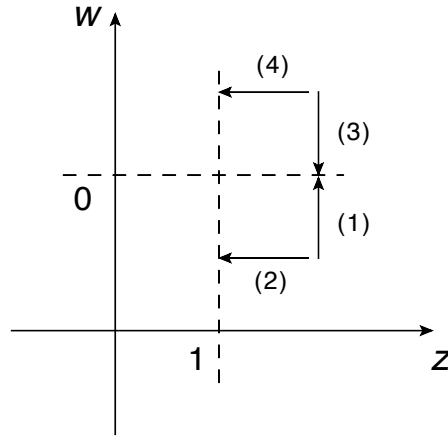


Figura 2.7: Limites em que estudamos as integrais de *loop*. A região situa-se em torno de  $w = 0$  e  $z = 1$ .

No caso de  $\bar{J}^{\pi\gamma}(k^2)$ , para os propósitos deste trabalho, é mais conveniente fatorarmos o termo  $(1 - z)$ . Assim, os limites para essa integral são

$$(1) \text{ e } (3) : \frac{1}{1-z} \bar{J}^{\pi\gamma}(k^2) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{z} \ln(1-z) , \quad (2.57)$$

$$(4) : \frac{1}{1-z} \bar{J}^{\pi\gamma}(k^2) = -\frac{1}{2} \left[ 2L + \frac{1}{16\pi^2} \left( \ln \frac{M^2}{\mu^2} - 1 \right) \right] \quad (2.58)$$

e o limite (2) resulta em uma divergência.

Olhamos, agora, para a integral  $J_1^{\pi\gamma\gamma}(k^2)$ ,

$$J_1^{\pi\gamma\gamma}(k^2) = \frac{-1}{16\pi^2} \frac{1}{M^2} \left( \frac{M^2}{4\pi} \right)^w \frac{w\Gamma(-w)}{(1+w)(2+w)} F(1-w, 2; 3+w; z) . \quad (2.59)$$

De acordo com as propriedades das funções hipergeométricas, podemos relacionar as duas integrais de *loop* da seguinte maneira

$$J_1^{\pi\gamma\gamma}(k^2) = \frac{1}{M^2} \frac{d\bar{J}^{\pi\gamma}(k^2)}{dz} . \quad (2.60)$$

Portanto, nos limites de interesse, temos

$$(1) \text{ e } (3) : J_1^{\pi\gamma\gamma}(k^2) = \frac{-1}{16\pi^2 M^2} \frac{1}{z} \left[ 1 + \frac{1}{z} \ln(1-z) \right] , \quad (2.61)$$

$$(4) : J_1^{\pi\gamma\gamma}(k^2) = \frac{1}{2M^2} \left[ 2L + \frac{1}{16\pi^2} \left( \ln \frac{M^2}{\mu^2} - 1 \right) \right] . \quad (2.62)$$

A seguir, apresentamos os resultados finais para a amplitude  $T_{\mu\nu}^{11(e^2,1)}$ . Começamos pelos limites (1) e (3), que fornecem resultados iguais

$$\begin{aligned} P_{e^2,1}^{11}(k^2) = & \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ -16\pi^2 4L + 2 - 2 \ln \frac{M_1^2}{\mu^2} - 4 \ln(1-z) \right. \\ & \left. + \frac{1-\lambda}{\lambda} \left[ 16\pi^2 2L + 1 + \ln \frac{M_1^2}{\mu^2} + 2 \ln(1-z) \right] \right. \\ & \left. + \mathcal{O}(1-z, w) \right\} , \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$Q_{e^2,1}^{11}(k^2) = e^2 \frac{M_1^2}{16\pi^2} \left( 16\pi^2 6L - 4 + 3 \ln \frac{M_1^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(1-z, w) \right) . \quad (2.64)$$

Para o limite (4), temos

$$P_{e^2,1}^{11}(k^2) = \mathcal{O}(1-z, w) , \quad (2.65)$$

$$Q_{e^2,1}^{11}(k^2) = e^2 \frac{M_1^2}{16\pi^2} \left( 16\pi^2 6L - 4 + 3 \ln \frac{M_1^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(1-z, w) \right) . \quad (2.66)$$

Para os diagramas das figuras 2.6(b) e 2.6(c), temos

$$T_{\mu\nu}^{11(e^2,2)} = P_{\mu\nu}^{11(0)} T_{e^2,2}^{11}(k^2) , \quad (2.67)$$

onde

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{11(e^2,2)} = & 2e^2 F^2 \frac{k_\mu}{M_1^2 - k^2} \left\{ - \left\langle \frac{(2k-l)_\nu}{[M_1^2 - (k-l)^2](-l^2)} \right\rangle \right. \\ & \left. + \frac{1-\lambda}{\lambda} \left\langle \frac{l \cdot (2k-l) l_\nu}{[M_1^2 - (k-l)^2](-l^2)^2} \right\rangle \right\} , \end{aligned} \quad (2.68)$$

com

$$\begin{aligned} T_{e^2,2}^{11}(k^2) = P_{e^2,2}^{11}(k^2) = & 2e^2 \left\{ -\frac{1}{2} \left( 3 + \frac{1}{z} \right) J^{\pi\gamma}(k^2) - \frac{T_M}{2M_1^2 z} \right. \\ & \left. + \frac{1-\lambda}{\lambda} [-(1-z)M_1^2 J_1^{\pi\gamma\gamma}(k^2)] \right\} . \end{aligned} \quad (2.69)$$

Portanto, para os limites (1) e (3), obtemos o seguinte resultado

$$P_{e^2,2}^{11}(k^2) = \frac{e^2}{16\pi^2} \left( 16\pi^2 6L - 4 + 3 \ln \frac{M_1^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(1-z, w) \right). \quad (2.70)$$

Para o limite (4), encontramos expressão semelhante, na ordem considerada, isto é,

$$P_{e^2,2}^{11}(k^2) = \frac{e^2}{16\pi^2} \left( 16\pi^2 6L - 4 + 3 \ln \frac{M_1^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(1-z, w) \right). \quad (2.71)$$

Vale observar que os diagramas 2.6(b) e 2.6(c), não alteram a massa, isto é,  $Q_{e^2,2}^{11}(k^2) = 0$ .

Agora, somamos as contribuições vindas de *loops* de fótons

$$\begin{aligned} T_{e^2,1}^{11}(k^2) + T_{e^2,2}^{11}(k^2) = e^2 \frac{1}{1-z} \left\{ \left[ -\frac{T_{M_1}}{M^2 z} - \left( 4 - z + \frac{1}{z} \right) J^{\pi\gamma}(k^2) \right] \right. \\ \left. + \frac{1-\lambda}{\lambda} (1-z) [-J^{\pi\gamma}(k^2) - 2M^2 J_1^{\pi\gamma\gamma}(k^2)] \right\}. \quad (2.72) \end{aligned}$$

Com estes resultados, podemos escrever a soma dos diagramas de um *loop* contendo um fóton. Novamente, temos resultados iguais para os limites (1) e (3)

$$\begin{aligned} P_{e^2,1}^{11}(k^2) + P_{e^2,2}^{11}(k^2) = \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ 16\pi^2 2L - 2 + \ln \frac{M_1^2}{\mu^2} - 4 \ln(1-z) \right. \\ \left. + \frac{1-\lambda}{\lambda} \left[ 16\pi^2 2L + 1 + \ln \frac{M_1^2}{\mu^2} + 2 \ln(1-z) \right] \right. \\ \left. + \mathcal{O}(1-z, w) \right\}, \quad (2.73) \end{aligned}$$

$$Q_{e^2,1}^{11}(k^2) = e^2 \frac{M_1^2}{16\pi^2} \left[ 16\pi^2 6L - 4 + 3 \ln \frac{M_1^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(1-z, w) \right]. \quad (2.74)$$

Já para o limite (4) chegamos a

$$P_{e^2,1}^{11}(k^2) + P_{e^2,2}^{11}(k^2) = \frac{e^2}{16\pi^2} \left( 16\pi^2 6L - 4 + 3 \ln \frac{M_1^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(1-z, w) \right), \quad (2.75)$$

$$Q_{e^2,1}^{11}(k^2) = e^2 \frac{M_1^2}{16\pi^2} \left( 16\pi^2 6L - 4 + 3 \ln \frac{M_1^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(1-z, w) \right). \quad (2.76)$$

Como era esperado, a contribuição para a massa não sofre alteração. As divergências que encontramos em (2.73) e (2.74) são removidas com a introdução das LECs vindas da lagrangiana de ordem  $e^2 k^2$ . Os termos derivados desta lagrangiana são representados nos diagramas das figuras 2.6(d), 2.6(e) e 2.6(f). O primeiro remove as divergências das correções na massa e os segundo e terceiro, no resíduo.



As amplitudes para o diagrama da figura 2.6(d) são

$$T_{\mu\nu}^{ii(e^2p^2,1)} = P_{\mu\nu}^{ii(0)} \left( P_{e^2p^2,1}^{ii}(k^2) + \frac{1}{M_i^2 - k^2} Q_{e^2p^2,1}^{ii}(k^2) \right), \quad (2.77)$$

com

$$P_{e^2p^2,1}^{11}(k^2) = -\frac{20}{9}e^2(k_1 + k_2), \quad (2.78)$$

$$Q_{e^2p^2,1}^{11}(k^2) = e^2M^2\frac{4}{9}(5k_1 + 5k_2 - 5k_5 - 23k_6 - k_7 - 18k_8) \quad (2.79)$$

e

$$P_{e^2p^2,1}^{33}(k^2) = -\frac{20}{9}e^2(k_1 + k_2 - \frac{9}{5}k_3 + \frac{9}{10}k_4), \quad (2.80)$$

$$Q_{e^2p^2,1}^{33}(k^2) = e^2M^2\frac{4}{9} \left( 5k_1 + 5k_2 - 9k_3 + \frac{9}{2}k_4 - 5k_5 - 5k_6 - k_7 \right). \quad (2.81)$$

Vemos que há também contratermos para as contribuições para o pión neutro. Isto ocorre, pois há divergências vindas dos diagramas de *loop* com um pión apenas, que dependem da carga elétrica. A seguir damos as amplitudes para os diagramas das figuras 2.6(e) e 2.6(f)

$$T_{\mu\nu}^{ii(e^2p^2,2)} = P_{\mu\nu}^{ii(0)} P_{e^2p^2,2}^{ii}(k^2), \quad (2.82)$$

onde

$$P_{e^2p^2,2}^{11}(k^2) = \frac{40}{9}e^2(k_1 + k_2 + \frac{9}{10}k_9) \quad (2.83)$$

e

$$P_{e^2p^2,2}^{33}(k^2) = \frac{40}{9}e^2(k_1 + k_2 - \frac{9}{5}k_3 + \frac{9}{10}k_4). \quad (2.84)$$

O termo contendo  $k_9$  remove também o infinito da parte dependente de calibre. Nós usamos o resultado dado na equação (C.10) de [15],

$$k_9 = k_9^r + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \left( L - \frac{1}{32\pi^2} \right). \quad (2.85)$$

## 2.3 Resultados e discussão

Com os cálculos apresentados acima, podemos determinar a função de dois pontos da corrente axial, incluindo interações eletromagnéticas, escrita, neste caso, como

$$T_{\mu\nu}^{ij(e)} = i \int dx e^{ik \cdot (x-y)} \langle 0 | T A_\mu^i(x) A_\nu^j(y) | 0 \rangle_e = \delta_{ij} \frac{\kappa_{\pi^i}^2 k_\mu k_\nu}{M_{\pi^i}^2 - k^2} + R_{\mu\nu}^{ij} , \quad (2.86)$$

em que não mais identificamos o resíduo da função de dois pontos ( $\kappa_{\pi^i}^2$ ) com a constante de decaimento do pión, dado que esta agora possui uma dependência de calibre. O desenvolvimento de uma contribuição dependente de calibre pode ocorrer, também, para o resíduo da função de dois pontos do pión neutro. Isto não aparece na ordem considerada neste trabalho, mas nada impede que aconteça em ordens mais altas. A posição do pólo, contudo, continua representando a massa do pión.

Para o pión carregado, temos dois diferentes limites em que podemos fornecer os resultados: (1) e (3) ( $w \rightarrow 0$ ) e (4) ( $z \rightarrow 1$  e depois  $w \rightarrow 0^+$ ). Tratamos primeiramente dos limites (1) e (3). Nestes limites, que produzem resultados iguais, a divergência infravermelha provoca uma mudança drástica na estrutura de  $T_{\mu\nu}^{11(e)}$ : o pólo em  $k^2 = M_{\pi^\pm}^2$  deixa de ser um pólo para tornar-se um ponto de ramificação, como vemos a seguir. Na soma das contribuições dos *loops* de fótons para o resíduo, (2.73), existem termos proporcionais a  $\ln(1-z)$ . É por meio destes termos divergentes em  $z = 1$ , que se nota a ocorrência da transformação mencionada. O primeiro passo é considerar a seguinte expansão

$$\frac{1}{Dg} = e^{-g \ln D} \simeq 1 - g \ln D . \quad (2.87)$$

Com ela, vemos que essa divergência logarítmica é manifestação do aparecimento do ponto de ramificação. Escrevemos  $T_{\mu\nu}^{11(e)}$ , portanto, como

$$T_{\mu\nu}^{11(e)} \stackrel{[w \rightarrow 0]}{=} \frac{\kappa_{\pi^1}^2 k_\mu k_\nu}{M_{\pi^1}^2 (1 - k^2/M_{\pi^1}^2)^{1+e^2 f_1}} + \dots , \quad (2.88)$$

onde  $\dots$  representam termos regulares em  $k^2 = M_{\pi^\pm}^2$ . Definimos  $\bar{P}$ , como sendo a contribuição ao resíduo, livre de logaritmos, isto é,

$$P^{11}(k^2) = \bar{P}^{11}(k^2) + e^2 L^{11} \ln(1-z) . \quad (2.89)$$

Os coeficientes dos logaritmos dão origem a  $f_1$ ,

$$f_1 \stackrel{[w \rightarrow 0]}{=} - (L_{e^2,1}^{11} + L_{e^2,2}^{11}) . \quad (2.90)$$

Na sequência, escrevemos a massa do pión e o resíduo em termos das contribuições apresentadas anteriormente,

$$M_{\pi^\pm}^2 = M_1^2 - (Q_{p^2,1}^{11}(M_\pm^2) + Q_{e^2,1}^{11}(M_\pm^2) + Q_{e^2p^2,1}^{11}(M_\pm^2)) + \mathcal{O}(M^4) , \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\pi^\pm}^2 = & F^2 \left[ 1 + P_{p^2,1}^{11}(M_\pm^2) + P_{p^2,2}^{11}(M_\pm^2) + P_{p^4}^{11}(M_\pm^2) \right. \\ & \left. + \bar{P}_{e^2,1}^{11}(M_\pm^2) + \bar{P}_{e^2,2}^{11}(M_\pm^2) + P_{e^2p^2,1}^{11}(M_\pm^2) + P_{e^2p^2,2}^{11}(M_\pm^2) + \mathcal{O}(M^4) \right] , \quad (2.92) \end{aligned}$$

Efetuada a soma, encontramos que, na ordem estudada, a massa do pión carregado é

$$\begin{aligned} M_{\pi^\pm}^2 = & M_\pm^2 + 2\frac{M^4}{F^2}l_3^r + \frac{e^2M^2}{4\pi^2} - \frac{e^2M^2}{16\pi^2}(3 + 4Z) \ln\left(\frac{M_\pm^2}{\mu^2}\right) + \frac{M^4}{32\pi^2F^2} \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) \\ & + e^2M^2\frac{4}{9}(-5k_1^r - 5k_2^r + 5k_5^r + 23k_6^r + k_7^r + 18k_8^r) + \mathcal{O}(M^6) + \mathcal{O}(e^4) . \quad (2.93) \end{aligned}$$

A massa, como esperado, não varia com o limite tomado. Entretanto, o resíduo do pólo sim e, a seguir, encontra-se o obtido nos limites (1) e (3),

$$\begin{aligned} \kappa_{\pi^\pm}^2 \stackrel{[w \rightarrow 0]}{=} & F^2 \left\{ 1 + \frac{2M^2}{F^2}l_4^r - \frac{M_\pm^2}{16\pi^2F^2} \ln\left(\frac{M_\pm^2}{\mu^2}\right) - \frac{M^2}{16\pi^2F^2} \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) \right. \\ & + e^2 \left[ \frac{1}{16\pi^2} \left( -2 + \ln\frac{M_\pm^2}{\mu^2} \right) + \frac{20}{9}(k_1^r + k_2^r) + 4k_9^r \right. \\ & \left. \left. + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{1}{16\pi^2} \left( \ln\frac{M^2}{\mu^2} + 1 \right) \right] + \mathcal{O}(M^4) + \mathcal{O}(e^4) \right\} , \quad (2.94) \end{aligned}$$

sendo que, no caso do pión carregado, o pólo passa a ser um ponto de ramificação, com

$$f_1 = \frac{2}{16\pi^2} \left( 2 - \frac{1-\lambda}{\lambda} \right) . \quad (2.95)$$

Este expoente é dependente de calibre, estando diretamente ligado às divergências infravermelhas e, portanto, à adição de fótons como graus de liberdade explícitos. Se analisarmos a origem dos termos contribuindo para  $f_1$ , vemos que, no limite  $z \rightarrow 1$ , apenas o diagrama da figura 2.6(a), contendo um *loop* conectando uma mesma linha de pión, contribui para  $f_1$ . Dessa forma, espera-se que algo igual aconteça em processos que recebam contribuições de diagramas semelhantes. No livro de Brown [37], capítulo 8, há um cálculo completo da auto energia do elétron, onde aparece diagrama semelhante ao da figura 2.6(a). Ele calcula a correção devida ao

*loop* do fóton e coloca o resultado em forma semelhante à equação (2.88), obtendo um expoente exatamente igual ao dado em (2.95). Isto exemplifica a generalidade da alteração que ocorre nas propriedades da função de dois pontos decorrente da inclusão de fótons virtuais.

Agora, nos voltamos ao resíduo da função de dois pontos do pión carregado no limite (4). Neste caso, ainda temos um pólo, isto é,  $f_1 = 0$  e a divergência infravermelha se manifesta no resíduo como um termo proporcional a  $L$ , e

$$\begin{aligned} \kappa_{\pi^\pm}^2 \stackrel{[k^2 \rightarrow M_{\pi^\pm}^2, w \rightarrow 0^+]}{=} F^2 \left\{ 1 + \frac{2M^2}{F^2} l_4^r - \frac{M_\pm^2}{16\pi^2 F^2} \ln \left( \frac{M_\pm^2}{\mu^2} \right) - \frac{M^2}{16\pi^2 F^2} \ln \left( \frac{M^2}{\mu^2} \right) \right. \\ \left. + e^2 \left[ 4L + \frac{1}{16\pi^2} \left( -4 + 3 \ln \frac{M_\pm^2}{\mu^2} \right) + \frac{20}{9} (k_1^r + k_2^r) + 4k_9^r \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1-\lambda}{\lambda} (-2L) \right] + \mathcal{O}(M^4) + \mathcal{O}(e^4) \right\}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

A função de dois pontos da corrente axial carregada possui um resíduo que é dependente de calibre e pode conter divergências infravermelhas. Isto ocorre, pois ela é relacionada à apenas uma parte das contribuições ao observável físico, que é a largura de decaimento. Para ver isso em mais detalhes, nos voltamos uma vez mais à  $\Gamma(\pi \rightarrow \ell\nu(\gamma))$ . Podemos escrevê-la separando as diferentes contribuições como

$$\Gamma(\pi \rightarrow \ell\nu(\gamma)) = \langle\langle |C_I \kappa + C_{II} e^2 F|^2 \rangle\rangle + \langle\langle |C_{III} e F|^2 \rangle\rangle, \quad (2.97)$$

onde  $\langle\langle \rangle\rangle$  representa integrações no espaço de fase, incluindo os fatores cinemáticos apropriados. Os termos  $C$  são ligados a amplitudes decorrentes do cálculo de diferentes classes de diagramas. A contribuição proporcional a  $\kappa$  vem da classe I de diagramas, os quais não possuem léptons virtuais e que são os mesmos que aparecem no cálculo da função de dois pontos da corrente axial (figuras 2.5 e 2.6), mas com uma das correntes axiais amputada e a outra, substituída pelo par de léptons (ver os diagramas 2.3(a)-(d)). A classe II é a dos diagramas com um lépton virtual, figura 2.3(e)-(g), e a III denota os gráficos da emissão de fótons livres, figura 2.4. O observável físico é a soma de todas estas contribuições e tanto a dependência de calibre quanto a divergência infravermelha são canceladas com esta operação.

Para o pión neutro, como não lidamos com *loops* de fótons, não é necessário distinguir diferentes limites para obter os resultados. Ainda sim, existem contribuições proporcionais a  $e^2$  que decorrem tanto dos *loops* de pión carregados, quanto dos termos contendo LECs da lagrangiana de ordem  $e^2 p^2$ . A massa e o resíduo do pión

carregado são dados em termos da soma dos termos apresentados anteriormente,

$$M_{\pi^0}^2 = M_3^2 - (Q_{p^2,1}^{33}(M^2) + Q_{e^2 p^2,1}^{33}(M^2)) + \mathcal{O}(M^4), \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\pi^0}^2 = & F^2 [1 + P_{p^2,1}^{33}(M^2) + P_{p^2,2}^{33}(M^2) + P_{p^4}^{33}(M^2) \\ & + P_{e^2 p^2,1}^{33}(M^2) + P_{e^2 p^2,2}^{33}(M^2) + \mathcal{O}(M^4)] . \end{aligned} \quad (2.99)$$

Somando tais termos, temos

$$\begin{aligned} M_{\pi^0}^2 = & M^2 \left[ 1 + \frac{2M^2}{F^2} l_3^r + \frac{M_{\pm}^2}{16\pi^2 F^2} \ln \left( \frac{M_{\pm}^2}{\mu^2} \right) - \frac{M^2}{32\pi^2 F^2} \ln \left( \frac{M^2}{\mu^2} \right) \right. \\ & \left. - e^2 \frac{20}{9} \left( k_1^r + k_2^r - \frac{9}{5} k_3^r + \frac{9}{10} k_4^r - k_5^r - k_6^r - \frac{1}{7} k_7^r \right) + \mathcal{O}(M^4) \right] + \mathcal{O}(e^4) . \end{aligned} \quad (2.100)$$

E o resíduo é

$$\begin{aligned} \kappa_{\pi^0}^2 = & F^2 \left\{ 1 + \frac{2M^2}{F^2} l_4^r - \frac{2M_{\pm}^2}{16\pi^2 F^2} \ln \left( \frac{M_{\pm}^2}{\mu^2} \right) + e^2 \left[ \frac{20}{9} (k_1^r + k_2^r) - 4k_3^r + 2k_4^r \right] \right. \\ & \left. + \mathcal{O}(M^4) + \mathcal{O}(e^4) \right\} . \end{aligned} \quad (2.101)$$

Até onde sabemos, este trabalho foi o primeiro a calcular  $\kappa_{\pi^{\pm}}$ , entretanto, é possível encontrar resultados para as massas  $M_{\pi^0}$  e  $M_{\pi^{\pm}}$  e para o resíduo  $\kappa_{\pi^0}$  em dois artigos: de Meissner, Müller e Steininger de 1997 [13] e o de Knecht e Urech de 1998 [14]. Começamos pela massa do pión carregado: ela foi calculada apenas em [14] e o nosso resultado concorda com o deles. A massa do pión neutro foi também calculada naquele artigo e em [13], e encontramos equação idêntica. Quanto a  $\kappa_{\pi^0}$ , existem expressões em ambos artigos, mas com discordâncias entre eles e entre o nosso resultado e cada um deles. O termo proporcional a  $e^2$  em  $\kappa_{\pi^0}$ , equação (2.101), é metade do mesmo termo em [14], enquanto que o nosso termo contendo o logaritmo, proporcional a  $M_{\pi^{\pm}}^2$ , é duas vezes maior que o de [13]. Nós entramos em contato com Knecht e Urech e eles concordaram que o nosso resultado para  $\kappa_{\pi^0}$  é a versão correta.

Em um trabalho de 1995 de Neufeld e Rupertsberger [35] há um resultado para  $\kappa_{\pi^{\pm}}$  em  $SU(3)$  e no calibre de Feynman, isto é,  $\lambda = 1$ . Além disso, os autores empregam uma massa não nula para o fóton como regularização infravermelha. Nós comparamos o nosso resultado com o deles, efetuando uma tradução do nosso resultado em  $SU(2)$  para  $SU(3)$ , após colocar  $\lambda = 1$  e substituir o termo da regularização

infravermelha dimensional pelo termo envolvendo uma massa não nula do fóton  $m_\gamma$ . A tradução entre os dois métodos de regularização é implementada por

$$L \rightarrow -\frac{1}{32\pi^2} \left( 1 + \ln \frac{m_\gamma^2}{\mu^2} \right). \quad (2.102)$$

Nós encontramos tal relação regularizando uma mesma integral de *loop* por meio dos dois diferentes métodos. Para a tradução de  $SU(2)$  para  $SU(3)$ , tivemos que calcular alguns diagramas adicionais contendo káons e usar as relações entre as LECs em 2 e 3 sabores. Para as LECs fortes, tal informação é encontrada em [9] e, em [38], achamos as mesmas equações para as LECs eletromagnéticas.

Traduzindo o nosso resultado para  $SU(3)$ , no calibre de Feynman, mas sem ainda mudar o método de regularização infravermelha, temos

$$\begin{aligned} \kappa_{\pi^\pm}^2 = & F^2 \left\{ 1 + \frac{8}{F_0^2} [(M_\pi^2 + 2M_K^2) L_4^r + M_\pi^2 L_5^r] \right. \\ & - \frac{1}{2(4\pi)^2 F_0^2} \left( 2M_{\pi^\pm}^2 \ln \frac{M_{\pi^\pm}^2}{\mu^2} + 2M_\pi^2 \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} + M_{K^\pm}^2 \ln \frac{M_{K^\pm}^2}{\mu^2} + M_K^2 \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} \right) \\ & \left. + e^2 \left[ \frac{8}{3} (K_1^r + K_2^r) + \frac{20}{9} (K_5^r + K_6^r) + 4K_{12}^r \right] + \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left( -2 + \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Empregando uma massa não nula para o fóton ao invés de usar a regularização dimensional, o resíduo torna-se

$$\begin{aligned} \kappa_{\pi^\pm}^2 = & F^2 \left\{ 1 + \frac{8}{F_0^2} [(M_\pi^2 + 2M_K^2) L_4^r + M_\pi^2 L_5^r] \right. \\ & - \frac{1}{2(4\pi)^2 F_0^2} \left( 2M_{\pi^\pm}^2 \ln \frac{M_{\pi^\pm}^2}{\mu^2} + 2M_\pi^2 \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} + M_{K^\pm}^2 \ln \frac{M_{K^\pm}^2}{\mu^2} + M_K^2 \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} \right) \\ & + e^2 \left[ \frac{8}{3} (K_1^r + K_2^r) + \frac{20}{9} (K_5^r + K_6^r) + 4K_{12}^r \right] \\ & \left. + \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left( -6 + 3 \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} - 2 \ln \frac{m_\gamma^2}{\mu^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.104)$$

o que concorda com a mesma grandeza dada em [35].

Como adiantamos na introdução deste capítulo, acreditamos que a incerteza do valor para  $F_\pi$  encontrado no PDG [6] está subestimada,  $F_\pi = (92, 21 \pm 0, 03 \pm 0, 14)$  MeV. Uma das razões reside no processo de separação entre as contribuições de correções radiativas e as puramente fortes, lembrando que o  $F_\pi$  determinado em [6] é o obtido na ChPT sem eletromagnetismo (este assunto é detalhado no apêndice B).

Devido ao processo de renormalização em teorias quânticas de campos, tal separação é ambígua. As grandezas físicas calculadas em uma teoria quântica de campos dependem de parâmetros renormalizados que, por sua vez, dependem da escala de renormalização. Essa dependência na escala de renormalização é diferente se os parâmetros pertencem à teoria puramente forte ou à completa, ver equações (B.3)-(B.6) e a figura B.1. Com resultados experimentais, podemos fixar os parâmetros da teoria completa, mas não podemos “desligar” as interações eletromagnéticas na natureza e determinar como correm os parâmetros da teoria puramente forte.

Há diferentes abordagens desta ambiguidade na separação entre efeitos puramente fortes e correções radiativas [15, 16, 39, 40], mas, neste trabalho, nos concentramos nos artigos de Gasser, Rusetsky e Scimemi [15, 16]. Neles, os autores definem uma nova escala, em adição à escala de renormalização, cujo nome traduzimos como escala de emparelhamento<sup>1</sup>,  $\mu_1$ . Segundo a convenção de [15, 16], quando a escala de renormalização  $\mu$  iguala-se a  $\mu_1$ , os parâmetros da teoria forte são iguais aos parâmetros da teoria completa. A impossibilidade de se fixar os parâmetros da teoria livre de correções radiativas é refletida na dependência em  $\mu_1$  destes parâmetros (ver (B.5) e (B.6)).

Em [15, 16], há uma estimativa da variação da constante de decaimento do pión no limite quiral,  $F$ , com  $\mu_1$  no contexto do modelo sigma linear. O que se encontra é uma variação da mesma ordem de grandeza da incerteza de  $F_\pi$  dada pelo PDG, equação (B.16),  $F(\mu_1 = 0,5 \text{ GeV}) - F(\mu_1 = 1 \text{ GeV}) \simeq 0,1 \text{ MeV}$ . Gasser e Leutwyler, em um trabalho de 82 [41], lembram que  $F$ , por estar no limite quiral, é proporcional à escala da QCD,  $\Lambda$ . Na seção 11 de [41], equação (11.6), vê-se uma indicação de que a variação de  $F$  com  $\mu_1$ , na QCD, deve ser pequena: aproximadamente uma ordem de grandeza menor do que no caso do modelo sigma linear. De qualquer maneira, a realização de um mapeamento completo da dependência na escala dos parâmetros tanto da ChPT com correções radiativas, quanto da teoria puramente forte, é uma tarefa extremamente complexa, mas essencial para se conhecer a variação da constante de decaimento do pión puramente forte com  $\mu_1$ .

A segunda fonte de incerteza que deveria ser considerada é a variação de  $F_\pi$  na QCD pura com a massa do pión. De acordo com as referências [2, 32], de onde o PDG extraiu o resultado dado em (2.17), determinou-se  $F_\pi$  em QCD pura, empregando as massas dos pions neutros. Contudo, isto é apenas uma convenção e, ao fazermos

---

<sup>1</sup>Em inglês, o termo é *matching scale*.

a diferença entre a constante de decaimento do pión calculada com a massa do pión neutro ou com a massa do pión carregado, encontramos

$$F(M_{\pi^\pm}) = F(M_{\pi^0}) + \frac{M_{\pi^\pm}^2 - M_{\pi^0}^2}{16\pi^2 F} (\bar{l}_4 - 1) + \mathcal{O}[p^4, (M_{\pi^\pm}^2 - M_{\pi^0}^2)^2] . \quad (2.105)$$

onde

$$M_{\pi^\pm}^2 = M_{\pi^0}^2 + 2e^2 Z F^2 + \mathcal{O}(p^4) \quad (2.106)$$

e

$$\bar{l}_4 = 16\pi^2 l_4^r - \ln \frac{M_{\pi^\pm}^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(p^4) . \quad (2.107)$$

Usando a estimativa de  $\bar{l}_4$  de [26],  $\bar{l}_4 = 4,4$ , chegamos ao seguinte resultado

$$F_\pi(M_{\pi^\pm}) - F_\pi(M_{\pi^0}) = 0,4 \text{ MeV} . \quad (2.108)$$

o que resulta em uma diferença significativa, aproximadamente duas vezes a incerteza dada pelo PDG.

Nós calculamos a função de dois pontos da corrente axial, incluindo o eletromagnetismo e mostramos que não é possível definir com facilidade  $F_\pi$  na teoria completa, pois o resíduo passa a ter uma dependência no calibre e as propriedades analíticas da função de dois pontos mudam profundamente: o pólo na massa do pión se torna um ponto de ramificação.

Em vista do que apresentamos, vemos duas possibilidades principais de como proceder futuramente na determinação da constante de decaimento do pión, com uma incerteza adequada:

1.  $F_\pi$  em QCD pura: caso o intuito seja obter a constante de decaimento do pión considerando apenas as interações fortes, devemos estimar a incerteza decorrente da dependência na escala de emparelhamento. O conhecimento da dependência da escala só será atingido quando se fizer para a QCD o que se fez em [15] para o modelo sigma linear: a determinação da maneira como os parâmetros da teoria efetiva variam com a escala de renormalização da teoria mais fundamental, tanto na teoria puramente forte quanto na completa. Esta tarefa não é simples, mas crucial para que se tenha uma idéia clara do limite inferior das incertezas de grandezas em QCD pura;



2.  $F_\pi$  em QCD + QED: ainda que tenhamos verificado a dependência de  $\kappa_{\pi^\pm}$  no calibre, poder-se-ia empregar este resíduo nos cálculos teóricos. Uma possibilidade seria determinar  $\kappa_{\pi^\pm}$  num certo calibre, adotando coerentemente o mesmo calibre para o resto da expressão teórica. Por exemplo, poderíamos colocar em evidência  $\kappa_{\pi^\pm}$  no calibre de Feynman na largura de decaimento do pión, equação (2.12), e, escolhendo o mesmo calibre para as demais contribuições, teríamos um “ $F_\pi$ ” na teoria completa. Ele poderia ser usado então nas demais previsões teóricas, com o cuidado de se adotar consistentemente o mesmo calibre. A outra possibilidade seria encontrar um modo de se fatorar a dependência no calibre do resíduo. Ainda assim, seria crucial verificar que a grandeza obtida não varia com a escala  $\mu_1$ .



# Capítulo 3

## Fatores de forma escalares

Neste capítulo, lidamos com os fatores de forma escalares dos mésons pseudoescalares mais leves: píons, káons e eta. No contexto da ChPT, as grandezas calculadas em ordem de um *loop* dependem das constantes de baixa energia, as LECs, que têm o papel de parâmetros livres. O que fazemos neste trabalho é empregar um modelo, desenvolvido em [19, 20], que fornece resultados para os fatores de forma, usando apenas as constantes que aparecem na lagrangiana em ordem dominante,  $F_\pi$  e  $M_\pi$ . Como consequência, os valores de uma classe de LECs podem ser previstos.

Para tanto, comparamos os resultados das expansões quirais dos fatores de forma escalares obtidos por Gasser e Leutwyler em 1985, [17], e por Meissner e Oller em 2001, [18] com os do modelo desenvolvido em [19–21], cujos resultados não envolvem as LECs da lagrangiana de ordem  $p^4$ . Este capítulo é dividido em quatro seções. Na primeira, revemos os resultados por nós obtidos para o núcleon e a delta [20, 42] com uma introdução ao modelo. Na seção seguinte, expomos as principais definições relacionadas aos fatores de forma escalares dos mésons na ChPT, discutindo o teorema de Feynman-Hellman. Na terceira seção, tratamos da determinação do fator de forma do pión com a ChPT e com o modelo em  $SU(2)$ . Este assunto foi abordado em [21, 43] e, aqui, ele serve como introdução para o que fazemos em  $SU(3)$ . Em seguida, temos a seção que é o cerne deste capítulo e um dos frutos do trabalho de doutorado. Nela, aplicamos as idéias apresentadas nas seções anteriores para chegar aos fatores de forma em  $SU(3)$ , assim como os raios quadráticos médios correspondentes. Nela há, também, uma expansão dos resultados em termos do momento e é neste ponto que determinamos as LECs, entre outras coisas. Fornecemos no apêndice C os resultados para os demais fatores de forma escalares.

### 3.1 Introdução ao modelo

Na minha tese de mestrado [42] discutimos a determinação dos termos sigma do núcleon e da delta, tendo sido os resultados publicados em [20]. Ela foi baseada em um cálculo incipiente do termo sigma do núcleon ( $\sigma_N$ ) de 2001 [19], aprimorado e estendido ao caso da ressonância delta ( $\sigma_\Delta$ ), em 2005 [20]. Com respeito a  $\sigma_N$ , é possível obter um valor experimental que decorre do uso de relações de dispersão aplicadas aos dados do espalhamento  $\pi N$  e, em [44, 45] encontramos o valor mais aceito na literatura,  $\sigma_N = 45$  MeV. O modelo que desenvolvemos em [19, 20], por outro lado, produz resultados no intervalo  $43 \text{ MeV} < \sigma_N < 49 \text{ MeV}$ , que deriva do uso de diferentes valores para as constantes de acoplamento. Pode-se notar a proximidade das suas previsões, sem o uso de LECs ou outros parâmetros livres, com o resultado experimental.

De modo geral, a determinação do fator de forma começa com o cálculo, por meio de diagramas de Feynman, de uma amplitude  $F(t)$  no espaço dos momentos. A principal característica dos modelos aqui utilizados é o tratamento que se dá ao fator de forma no espaço das posições, o qual é denotado por  $\tilde{F}(r)$  ( $r$  é a distância ao centro do sistema) e escrito formalmente como

$$\tilde{F}(r) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} F(t) = 4\pi \int_0^\infty \frac{dq}{(2\pi)^3} \frac{q}{r} \sin qr F(t), \quad (3.1)$$

onde trabalhamos no referencial de Breit,  $t = -\mathbf{q}^2$ .

O trabalho no espaço das posições é motivado pelo fato de que as propriedades das funções escalares na QCD são fortemente influenciadas pela existência de um condensado de quarks. A idéia de que o vácuo da QCD não é vazio e de que a realização da simetria quiral na natureza se dá no modo de Nambu-Goldstone não é nova. Já no trabalho de Gell-Mann e Lévy, de 1960 [46], há uma discussão a respeito do modelo sigma linear e do vácuo forte. Nele, os graus de liberdade são os campos  $\sigma$  e  $\pi$ , que obedecem a restrição  $\sigma^2 + \pi^2 = F^2$ , sendo que, na fase condensada, temos  $\langle \sigma \rangle = F$ . Esse vínculo sugere o uso da parametrização

$$\sigma = F \cos \theta, \quad \boldsymbol{\pi} = F \hat{\boldsymbol{\pi}} \sin \theta, \quad (3.2)$$

onde  $\theta = \phi/F$  é o ângulo quiral. Na ChPT, assim como acontece no modelo sigma não linear, o campo  $\sigma$  não é um grau de liberdade explícito e, por isso, emprega-se

o campo unitário  $U$ , que satisfaz  $U^\dagger U = 1$ , parametrizado por

$$U(x) = \exp\left(i\frac{\phi}{F}\right) = \frac{1}{F} [\sigma(x) + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x)] , \quad (3.3)$$

onde  $\sigma$ , agora, representa a função

$$\sigma = \sqrt{F^2 - \boldsymbol{\pi}^2} . \quad (3.4)$$

No modelo sigma linear, o vácuo contém um estado clássico de mésons  $\sigma$  que, na ChPT, se traduz no condensado de quark-antiquark. Pelo vínculo expresso por  $\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = F^2$ , vemos que o vácuo é destruído quando píons são criados. No modelo de Skyrme [47, 48] e nos trabalhos sobre o modelo de sacola [49, 50] encontra-se a idéia de que um bárion, quando colocado no vácuo, o perturba bastante. No modelo de Skyrme há a distinção entre um campo do pión perturbativo, para o qual vale  $\pi \approx F\theta \ll F$ , e um outro, forte, em que  $\pi \approx F$ . Neste contexto, a introdução de um hádron no vácuo, cria o seguinte padrão no espaço das posições (seguimos a abordagem de [43]):

1.  $r \rightarrow \infty$ : encontramos apenas o vácuo cheio das interações fortes;
2.  $r \approx r_p$ : com  $r_p$  da ordem de alguns fm, o problema é perturbativo e vale  $\sin \theta \approx \theta$ ;
3.  $r \approx R$ : com  $R \approx 0,5$  fm, a região é não perturbativa e  $\pi$  torna-se comparável a  $F$ .

O modelo que empregamos neste trabalho, e que foi usado em [19, 20] para o caso do núcleon e da ressonância delta, apóia-se sobre a imagem de que uma partícula colocada no vácuo o perturba e que, quando nos aproximamos dela, o vácuo é alterado e os pares quark-antiquark nele presentes passam a dar origem à nuvem de mésons. Partindo da idéia de que este processo não pode continuar indefinidamente, supomos que não há mais alterações quando todos os pares quark-antiquark são excitados, o que ocorre em um raio  $R$ , tal que  $\cos \theta(R) = 0$ . Neste modelo, trata-se perturbativamente a região  $R < r < \infty$  e, na esfera delimitada por  $R$ , fazemos um corte brusco, impondo  $\cos \theta = 0$ . Tal caracterização da região de curtas distâncias (altas energias) elimina de nossas expressões todos os termos de curto alcance e divergências oriundas do uso da teoria. Portanto, os fatores de

forma são cortados no espaço das posições, isto é, assumem um valor constante na região  $r < R$ , de maneira que

$$\tilde{F}(r) \rightarrow \tilde{F}'(r) = \theta(R - r)\tilde{F}(R) + \theta(r - R)\tilde{F}(r) . \quad (3.5)$$

A determinação dos termos sigma do núcleon e da delta, utilizando o modelo descrito acima, foi objeto da minha tese de mestrado [42]. Quando a ChPT engloba os núcleons, de modo a descrever a interação  $\pi N$  no regime de baixas energias, existe a distinção entre a massa nua do núcleon, isto é, a massa colocada na lagrangiana, que se mantém no limite quiral, e a observada, que envolve as contribuições de *loops* e carrega os efeitos da quebra explícita dessa simetria. O termo sigma do núcleon é definido como

$$\langle N(p') | \hat{m}(\bar{u}u + \bar{d}d) | N(p) \rangle = \sigma_N(t) \bar{u}(\mathbf{p}') u(\mathbf{p}) \quad (3.6)$$

e fornece uma estimativa da parcela da massa do núcleon devida à quebra explícita da simetria. O valor mais aceito atualmente, obtido por Gasser, Leutwyler e Sainio em [44, 45], é  $\sigma_N = 45$  MeV, que corresponde a cerca de 5% da massa do núcleon. Em [20, 42], usamos o modelo baseado no corte espacial, incluindo contribuições com o núcleon e a ressonância delta como estados intermediários para obter os termos sigma do núcleon e da delta. A figura 3.1 ilustra o caso do núcleon.

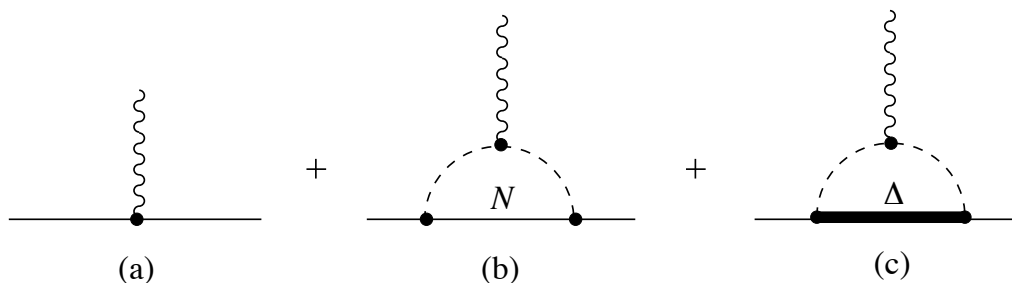


Figura 3.1: Contribuições dos diagramas contato e triângulo para o termo sigma do núcleon. A linha reta e fina representa o núcleon, a grossa, a delta, e a ondulada, uma fonte escalar.

Após obtermos as amplitudes para os diagramas da figura 3.1, determinamos o fator de forma escalar no espaço dos momentos. Passamos, então, para o espaço das posições e aplicamos a equação (3.5). Nota-se que neste ponto as contribuições sem distribuição espacial, como as vindas do diagrama (a), são eliminadas. O resultado deste procedimento pode ser observado na figura 3.2, em que mostramos as

contribuições parciais e a total para o fator de forma escalar no espaço das posições,  $\tilde{\sigma}_N(r)$ . A linha horizontal em  $\tilde{\sigma}_N(R)/(F_\pi^2 M_\pi^2) = 1$  marca a densidade de energia em que se realiza o corte, o valor do fator de forma em  $r = R$ . Nesta figura vemos, também, a divergência do fator de forma para  $r \rightarrow 0$ .

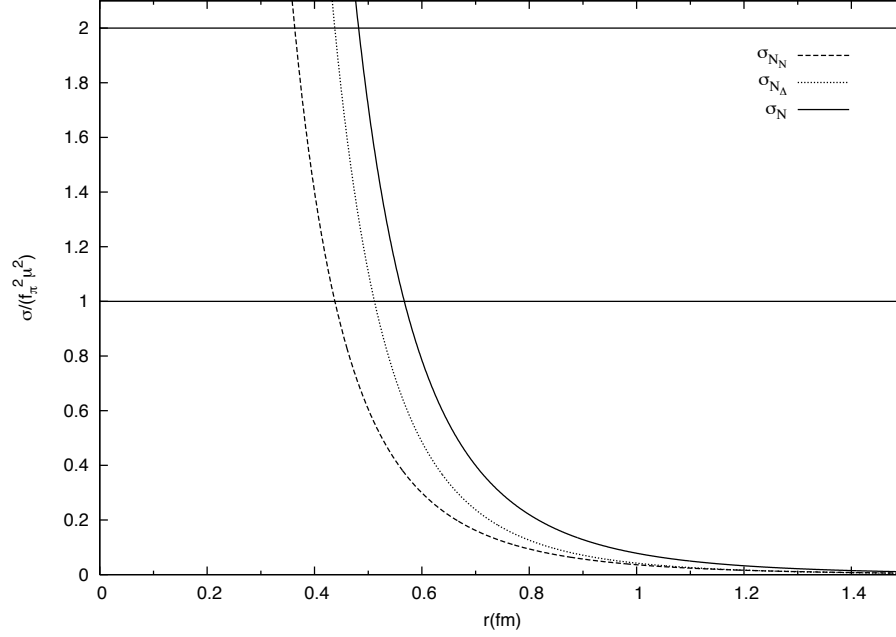


Figura 3.2: Dependência espacial do fator de forma escalar do nucleon, linha cheia, e contribuições parciais devidas aos estados intermediários  $N$ , linha tracejada, e  $\Delta$ , linha pontilhada.

Naquele trabalho estávamos interessados no termo sigma das partículas, dado por

$$\sigma_N = \sigma_N(t = 0) = \int d^3\mathbf{r} \tilde{\sigma}_N(r) . \quad (3.7)$$

Com o uso do corte no espaço das posições, esta equação passa a ser escrita como

$$\sigma_N = \frac{4}{3}\pi R^3 F_\pi^2 M_\pi^2 + 4\pi \int_R^\infty dr r^2 \tilde{\sigma}_N(r) . \quad (3.8)$$

Os resultados para  $\sigma_N$  obtidos com o uso do modelo estão na tabela 3.1, que

mostra contribuições individuais, dependentes da constante de acoplamento  $\pi N\Delta$ . Os resultados são compatíveis com o valor empírico  $\sigma_N = 45$  MeV [44, 45].

Tabela 3.1: Contribuições parciais para  $\sigma_N$ , relativas ao caroço,  $\tilde{\sigma}_{NN}$  e  $\tilde{\sigma}_{N\Delta}$ , em MeV, em função da constante de acoplamento  $g_{\pi N\Delta}$ . Foi colocado também o valor para  $R$ , o raio do caroço, em fm.

| $g_{\pi N\Delta}$ | $R$  | caroço | nuvem $N$ | nuvem $\Delta$ | soma |
|-------------------|------|--------|-----------|----------------|------|
| 1,19              | 0,55 | 15,3   | 13,6      | 13,7           | 42,6 |
| 1,33              | 0,57 | 16,7   | 13,0      | 16,1           | 45,8 |
| 1,47              | 0,59 | 18,4   | 12,4      | 18,6           | 49,4 |

Diferentemente do núcleon, não é possível obter dados experimentais do espalhamento  $\pi\Delta$ , pois a delta é uma ressonância. Assim, somente previsões teóricas existem para  $\sigma_\Delta$ , o que torna o uso de modelos ainda mais importante. Uma outra diferença presente no caso da delta é a existência de uma parte imaginária em  $\sigma_\Delta$ , devida à componente do estado intermediário do núcleon. Como a massa da ressonância delta é maior que a soma das massas do núcleon e do pión, surge esta componente imaginária, que se traduz em uma oscilação, mostrada na figura 3.3.

Os resultados do modelo para a parte real de  $\sigma_\Delta$ , para diferentes constantes de acoplamento, mostrados na tabela 3.2, são da ordem de 30 MeV. Como não existem valores empíricos para  $\sigma_\Delta^R$ , comparamos os nossos resultados com os de outras investigações teóricas. No caso da referência [51], foi feito um ajuste com os dados da QCD na rede para encontrar os coeficientes de uma expansão da massa da delta em função da massa do pión com base em perturbação quiral. Este procedimento forneceu  $\sigma_\Delta^R = 20,6$  MeV. Embora um pouco distante do nosso resultado, ele também indica uma diminuição do valor de  $\sigma_\Delta^R$  em relação a  $\sigma_N$ . Com um modelo quiral de quarks [52] obteve-se  $\sigma_\Delta^R = (32 \pm 3)$  MeV, valor completamente compatível com o nosso.

## 3.2 Mésons

Os fatores de forma escalares de um sistema são definidos, em  $SU(3)$ , como o sanduíche de possíveis combinações dos operadores  $\bar{u}u$ ,  $\bar{d}d$  e  $\bar{s}s$  entre estados deste



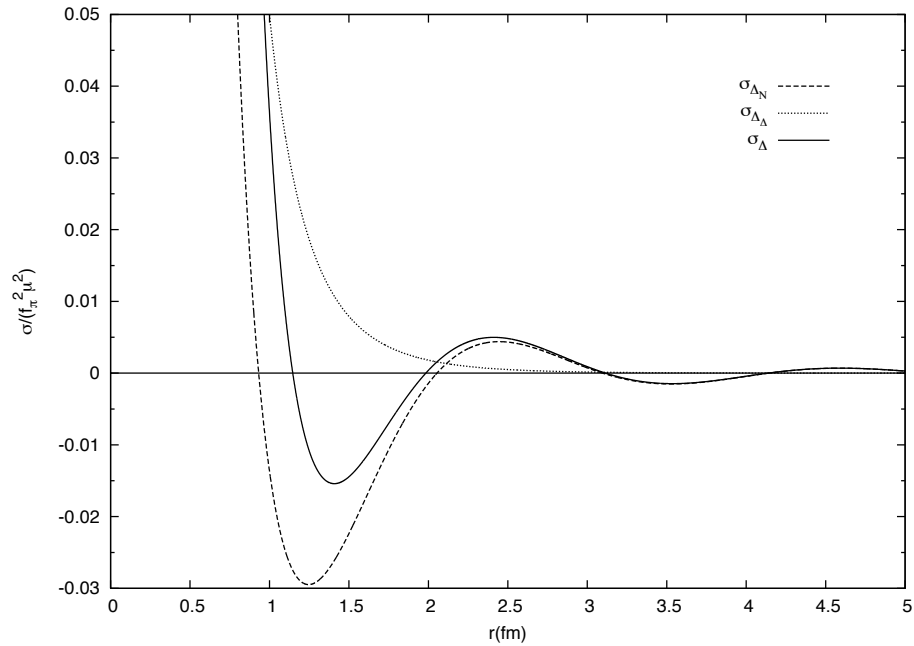


Figura 3.3: Contribuições parciais e total, seguindo as mesmas convenções da figura 3.2, mas com escala diferente.

Tabela 3.2: Contribuições para  $\sigma_\Delta^R$  vindas do caroço e da integração de  $\tilde{\sigma}_{\Delta N}^R$  e  $\tilde{\sigma}_{\Delta\Delta}$ , em MeV, em função das constantes de acoplamento  $g_{\pi N\Delta}$  e  $g_{\pi\Delta\Delta}$ . Há também os valores de  $R$ , o raio do caroço, em fm.

| $g_{\pi N\Delta}$ | $g_{\pi\Delta\Delta}$ | $R$  | caroço | nuvem $N$ | nuvem $\Delta$ | soma |
|-------------------|-----------------------|------|--------|-----------|----------------|------|
| 1,33              | 0,75                  | 0,54 | 14,3   | -1,5      | 19,3           | 32,1 |
| 1,33              | 0,67                  | 0,52 | 12,9   | -0,9      | 16,1           | 28,1 |

sistema ou apenas os dois primeiros, no caso de  $SU(2)$ . No caso dos mésons pseudoescalares, existem os fatores de forma escalares do pión, em  $SU(2)$ , e os do pión, káon e eta, em  $SU(3)$ . Neste trabalho, abordamos principalmente o caso  $SU(3)$ , deixando  $SU(2)$  como um exemplo dos procedimentos e cálculo. Usamos, dessa

forma, as seguintes definições

$$\langle P^i(k') | \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s | P^j(k) \rangle = \delta^{ij} F_P^0(t) , \quad (3.9)$$

$$\langle P^i(k') | \bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s | P^j(k) \rangle = \delta^{ij} F_P^8(t) , \quad (3.10)$$

$$\langle P^i(k') | \bar{u}u + \bar{d}d | P^j(k) \rangle = \delta^{ij} F_P^L(t) , \quad (3.11)$$

$$\langle P^i(k') | \bar{s}s | P^j(k) \rangle = \delta^{ij} F_P^S(t) , \quad (3.12)$$

onde  $t = (k' - k)^2$  e  $P = \pi, K, \eta$ . O méson eta aqui citado pertence ao octeto pseudoescalar e não deve ser confundido com o eta físico, que é uma mistura do eta-octeto e do singlete. Os índices 0 e 8 referem-se às componentes singlete e octeto de  $SU(3)$  e  $L$  e  $S$  representam os quarks leves e o estranho. Neste capítulo, tratamos principalmente das componentes 0 e 8, citando apenas os principais resultados vindos dos cálculos com as  $L$  e  $S$ . As expressões completas para as componentes  $L$  e  $S$  encontram-se no apêndice C.

Estes fatores de forma exibem a reação da partícula a sondas escalares, que trocam apenas momento e energia com ela. Da mesma maneira que o fóton, sonda eletromagnética, revela a densidade de carga do alvo, a sonda escalar revela a distribuição da densidade de massa proveniente da quebra explícita de simetria quiral. Em particular, como veremos adiante, quando abordamos o teorema de Feynman-Hellman, a sonda escalar mostra também como a massa da partícula varia com a massa dos quarks.

No caso do fator de forma eletromagnético, a partícula é sondada por uma entidade bem conhecida, o fóton. Quando lidamos com o fator de forma escalar, não é possível identificar diretamente a sonda com uma certa partícula. Por isso, a sonda é tratada como uma fonte escalar externa genérica. Entretanto, isso não impede que o conteúdo empírico do fator de forma escalar possa ser conhecido por meio de experimentos.

Por definição, o fator de forma  $F_P(t)$  e o raio quadrático médio escalar  $\langle r^2 \rangle_P$  são relacionados por

$$F_P(t) = F_P(0) \left( 1 + \frac{t}{6} \langle r^2 \rangle_P + \mathcal{O}(t^2) \right) . \quad (3.13)$$

Este tipo de expressão, análoga à relação entre o fator de forma eletromagnético e o raio de carga, é crucial para este trabalho, pois ela serve como guia na comparação

dos resultados do modelo com os da ChPT. No caso do fator de forma escalar, o raio quadrático médio em  $SU(2)$  pode ser extraído dos dados experimentais do espalhamento  $\pi\pi$ , por meio das equações de Roy e de Muskhelishvili e Omnès [26, 28, 53–55] baseadas em relações de dispersão. Um valor obtido por Colangelo, Gasser e Leutwyler, em 2001, [26] e bastante aceito pela comunidade é  $\langle r^2 \rangle_\pi = (0,61 \pm 0,04) \text{ fm}^2$ . Num artigo mais recente [55], de 2007, Oller e Roca encontram  $\langle r^2 \rangle_\pi = (0,63 \pm 0,05) \text{ fm}^2$ . A partir da determinação de  $\langle r^2 \rangle_\pi$ , pode-se obter as LECs ou combinações delas. Conhecendo  $\langle r^2 \rangle_\pi$ , extrai-se a LEC  $\bar{l}_4$  por meio da expressão

$$\langle r^2 \rangle_\pi = \frac{3}{8\pi^2 F_\pi^2} \left( \bar{l}_4 - \frac{13}{12} \right) + \mathcal{O}(M_\pi^2) . \quad (3.14)$$

sendo esse o método que dá origem ao resultado mais preciso [10]. Existe, também, uma relação envolvendo  $\langle r^2 \rangle_\pi$  e a razão  $F_\pi/F$  [8], dada por

$$\frac{F_\pi}{F} = 1 + \frac{1}{6} M_\pi^2 \langle r^2 \rangle_\pi + \frac{13}{192\pi^2} \frac{M_\pi^2}{F_\pi^2} + \mathcal{O}(M_\pi^4) . \quad (3.15)$$

Na QCD, o termo de massa da lagrangiana é escrito como

$$\mathcal{L}_{SB}^{QCD} = -(m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s) . \quad (3.16)$$

No limite de simetria de isospin exato, colocamos  $m_u = m_d = \hat{m}$ , sendo  $\hat{m} = (m_u + m_d)/2$  e, assim,

$$\mathcal{L}_{SB}^{QCD} = -[\hat{m}(\bar{u}u + \bar{d}d) + m_s \bar{s}s] . \quad (3.17)$$

Na teoria efetiva, esse termo mapeia em

$$\mathcal{L}_{SB}^{ChPT} = \frac{F^2}{4} \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle , \quad (3.18)$$

onde o campo  $\chi$ , equação (1.40), é dado por

$$\chi = 2B(s + ip) ,$$

sendo  $B$  uma constante e  $s$  e  $p$  fontes externas. O termo de quebra de simetria está contido na fonte escalar externa  $s$  e, em três sabores, tem a forma

$$s = \mathcal{M} + \dots = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} + \dots = \frac{2\hat{m} + m_s}{3} I + \frac{\hat{m} - m_s}{\sqrt{3}} \lambda_8 + \dots , \quad (3.19)$$

onde as reticências indicam flutuações. No caso escalar, as massas dos quarks correspondem a um termo clássico e aparecem como o primeiro termo da expansão. Os campos externos incluem interações presentes no modelo padrão, não encontradas originalmente na lagrangiana da QCD, que representa exclusivamente as interações entre quarks e glúons. No caso do modelo padrão, os campos vetorial e axial implementam as interações eletrofracas, enquanto que  $s$  está associado ao bóson de Higgs, que permeia todo o universo. Por meio do chamado mecanismo de Higgs, os quarks adquirem massa, quebrando a simetria quiral. É também por isso que  $s$  tem como primeiro termo da sua expansão termos constantes. Tomando  $p = 0$  e expandido o termo de quebra de simetria dado em (3.18), encontramos

$$\mathcal{L}_{SB}^{ChPT} = 3F^2 B s_0 - B (s_0 \delta_{ij} + s_8 d_{ij8}) \phi_i \phi_j + \mathcal{O}(\phi^4) , \quad (3.20)$$

onde as constantes  $d_{ijk}$  são totalmente simétricas e definidas em termos matrizes de Gell-Mann, como

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{4}{3} \delta_{ij} + 2d_{ijk} \lambda_k . \quad (3.21)$$

De modo geral, na determinação dos fatores de forma de um sistema  $\psi$ , estamos interessados nas contribuições que provêm de valores esperados de  $\bar{q}q$ ,  $\langle \psi | \bar{q}q | \psi \rangle$ . Por outro lado, a lagrangiana da QCD, equação (3.17), fornece elementos de matriz da forma  $\langle \psi | m_q \bar{q}q | \psi \rangle$ . Por isso, para chegar aos valores esperados de  $\bar{q}q$  somente, temos que extrair  $m_q$  do elemento de matriz. Para tanto, usamos o teorema de Feynman-Hellman e, a seguir, mostramos como isto acontece. Matematicamente, o teorema de Feynman-Hellman é dado por

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \langle \psi | \mathcal{O}(\lambda) | \psi \rangle = \langle \psi | \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{O}(\lambda) | \psi \rangle , \quad (3.22)$$

onde  $\mathcal{O}$  é um operador e  $\lambda$ , um parâmetro do qual ele depende. Ainda que o teorema tenha sido obtido no contexto da teoria de perturbação na mecânica quântica, este resultado é válido para qualquer valor de  $\lambda$  [56]. Para os propósitos deste trabalho, podemos pensar que  $\mathcal{O}$  é o termo de massa da hamiltoniana da QCD, equação (3.17), e o parâmetro  $\lambda$  representa as massas dos quarks.

No caso dos condensado de quarks-antiquarks, o teorema fornece [9]

$$\langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{d}d | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle = -F^2 B + \mathcal{O}(M^2) . \quad (3.23)$$

Este resultado é muito importante, pois torna claro o significado da constante  $B$ . Ela é a assinatura do condensado e o seu valor não nulo indica que o vácuo é cheio.

No caso dos mésons, tomando  $\lambda$  como sendo a massa  $m_q$  do quark  $q$ ,

$$\frac{\partial}{\partial m_q} \langle \pi(k') | \mathcal{H} | \pi(k) \rangle = \langle \pi(k') | \bar{q}q | \pi(k) \rangle . \quad (3.24)$$

Quando colocamos  $k' = 0 = k$ , o valor esperado de  $\mathcal{H}$  fornece diretamente a massa da partícula:

$$\langle \pi(0) | \mathcal{H} | \pi(0) \rangle = \frac{M_\pi^2}{2} \quad (3.25)$$

e, portanto,

$$\frac{\partial}{\partial m_q} \frac{M_\pi^2}{2} = \langle \pi(0) | \bar{q}q | \pi(0) \rangle . \quad (3.26)$$

O termo do lado direito dessa igualdade é uma componente do fator de forma escalar para  $t = 0$ . Assim, vemos que, com o uso do teorema de Feynman-Hellman, eliminamos as massas dos quarks dos elementos de matriz, restando apenas o sanduíche dos operadores quark-antiquark. Este resultado mostra, também, que o fator de forma escalar em  $t = 0$  indica como a massa da partícula varia com a massa dos quarks. Na ChPT, as dependências de  $M_P^2$  em  $m_q$  são conhecidas [9] e o uso deste teorema nos permite determinar  $F_P(0)$  para as componentes 0 e 8 por meio das expressões,

$$F_P^0(0) = \left( \frac{\partial}{\partial m_u} + \frac{\partial}{\partial m_d} + \frac{\partial}{\partial m_s} \right) M_P^2 , \quad (3.27)$$

$$F_P^8(0) = \left( \frac{\partial}{\partial m_u} + \frac{\partial}{\partial m_d} - 2 \frac{\partial}{\partial m_s} \right) M_P^2 . \quad (3.28)$$

### 3.3 Fatores de forma mesônicos em $SU(2)$

#### 3.3.1 ChPT

Nesta seção, tratamos do fator de forma escalar do pión em  $SU(2)$ , um problema conceitualmente análogo ao caso  $SU(3)$ . Este último é apenas mais complexo, pelo número adicional de interações a serem consideradas. Assim, esta seção tem o objetivo de fornecer um exemplo das principais idéias envolvidas na determinação dos fatores de forma. Seguimos o trabalho de 1984 de Gasser e Leutwyler [8].

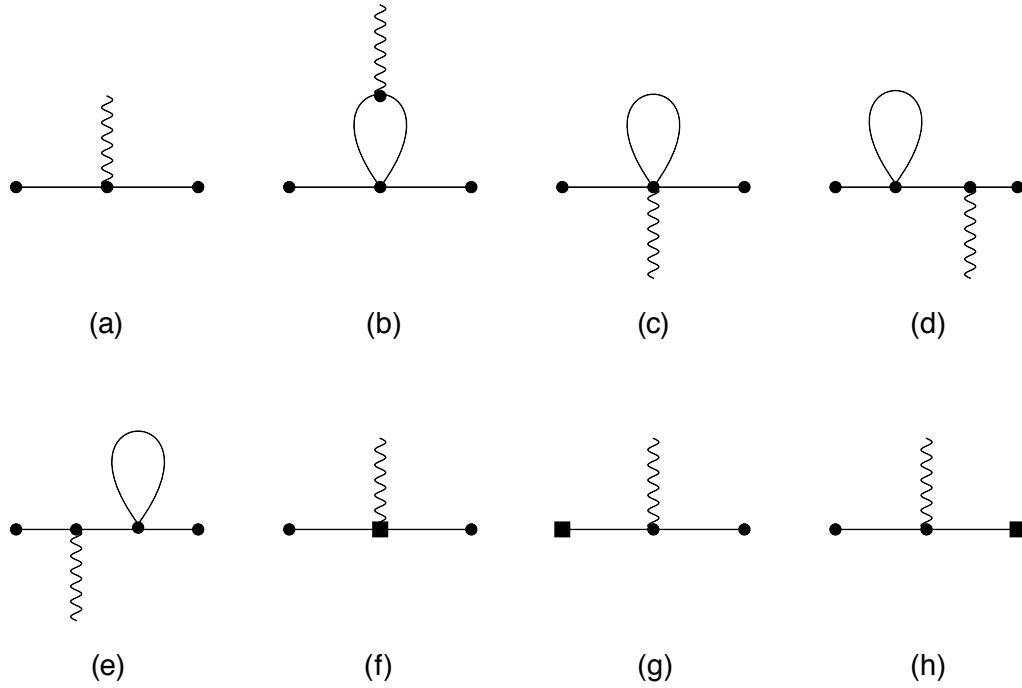


Figura 3.4: Diagramas de Feynman que contribuem para os fatores de forma escalares discutidos neste capítulo. A linha cheia representa um méson escalar, enquanto que a ondulada, a fonte escalar externa. A inserção de um termo contendo uma LEC  $l_3$  ou  $l_4$  é representada pelo quadrado. Os círculos nas pernas externas representam a inserção de um campo externo pseudoescalar.

Em  $SU(2)$ , o fator de forma escalar do pión é definido como

$$\langle \pi^i(k') | \bar{u}u + \bar{d}d | \pi^j(k) \rangle = \delta^{ij} F_\pi(t) . \quad (3.29)$$

Em [8], Gasser e Leutwyler extraíram o fator de forma escalar do pión, a partir do resíduo da função de três pontos de duas correntes pseudoescalares e uma escalar. Desenhamos todos os diagramas de Feynman possíveis até a ordem escolhida. No caso considerado aqui, incluímos contribuições até ordem  $p^4$ . Isto significa levar em conta gráficos de até um *loop*, os dados na figura 3.4. A linha externa é o méson para o qual se calcula o fator de forma, que se conecta ao campo pseudoescalar externo. As linhas cheias internas são os mésons permitidos pela teoria, e a linha ondulada é a fonte escalar externa. O quadrado designa a inserção de um termo contendo uma LEC. Efetuando o cálculo da função de três pontos, encontra-se o seguinte resultado

[8]

$$\begin{aligned}
& i^2 \int dx dy e^{iqx+ip'y-ipz} \langle 0|TS^0(x)P^i(y)P^k(z)|0\rangle \\
&= \delta^{ik} \frac{1}{M_i^2 - p'^2} \frac{1}{M_k^2 - p^2} \frac{G_\pi^3}{F_\pi} G(q^2, p'^2, p^2) , \tag{3.30}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
G(q^2, p'^2, p^2) &= 1 + \frac{1}{2F^2} (2q^2 + p'^2 + p^2 - 3M^2) \bar{J}_{\pi\pi}(q^2) \\
&+ \frac{1}{16\pi^2 F^2} (\bar{l}_4 - 1)(q^2 - p'^2 - p^2) \\
&+ \frac{1}{32\pi^2 F^2} (4\bar{l}_4 - \bar{l}_3 - 3)(p'^2 + p^2 - M^2) . \tag{3.31}
\end{aligned}$$

As grandezas  $G_\pi$  e  $F_\pi$  são os resíduos das funções de dois pontos de correntes pseudoescalares e axiais, respectivamente. Na ordem considerada, são escritas como

$$\begin{aligned}
G_\pi &= 2BF \left[ 1 - \frac{M^2}{16\pi^2 F^2} (\bar{l}_3 - 2\bar{l}_4) + \mathcal{O}(M^4) \right] , \\
F_\pi &= F \left( 1 + \frac{M^2}{16\pi^2 F^2} \bar{l}_4 + \mathcal{O}(M^4) \right) . \tag{3.32}
\end{aligned}$$

A integral de *loop* é apresentada pela função  $J_{\pi\pi}(t)$  e é calculada por meio de regularização dimensional [8]. Sua forma geral é

$$J_{PP}(t) = \frac{1}{i} \int \frac{d^d Q}{(2\pi)^d} \frac{1}{Q^2 - M_P^2} \frac{1}{(Q+q)^2 - M_P^2} = \bar{J}_{PP}(t) + J_{PP}(0) , \tag{3.33}$$

sendo  $\bar{J}_{PP}(t)$  a parte regular, expressa como

$$\bar{J}_{PP}(t) = \frac{1}{16\pi^2} \left( 2 + \sigma_P \ln \frac{\sigma_P - 1}{\sigma_P + 1} \right) , \quad \sigma_P = \sqrt{1 - \frac{4M_P^2}{t}} \tag{3.34}$$

e  $J_{PP}(0)$  um termo constante, dado por

$$J_{PP}(0) = -2L - \frac{1}{16\pi^2} \ln \frac{M_P^2}{\mu^2} - \frac{1}{16\pi^2} . \tag{3.35}$$

O fator divergente é

$$L = \frac{\mu^{d-4}}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{d-4} - \frac{1}{2} [\ln(4\pi) - \gamma + 1] \right\} . \tag{3.36}$$

Ambas as contribuições de diagramas contendo *loops* possuem termos proporcionais a  $L$ . Essas divergências são removidas pelas LECs presentes nos diagramas (f), (g) e (h). As LECs podem ser decompostas em uma parte regular e na divergência proporcional a  $L$

$$l_3 = l_3^r(\mu) - \frac{L}{2}, \quad (3.37)$$

$$l_4 = l_4^r(\mu) + 2L. \quad (3.38)$$

A diferença entre uma mesma LEC, calculada em diferentes escalas, é dada por [9]

$$\Delta_i^r = l_i^r(\mu_2) - l_i^r(\mu_1) = \frac{\gamma_i}{16\pi^2} \ln \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad (3.39)$$

onde  $\gamma_3 = -1/2$  e  $\gamma_4 = 2$ .

Em posse das equações (3.30) e (3.32), chegamos ao seguinte resultado para o fator de forma escalar do pión

$$F_\pi(t) = 2B \left\{ 1 + \frac{M^2}{32\pi^2 F^2} + \frac{M^2}{16\pi^2 F^2} \ln \frac{M^2}{\mu^2} + \frac{4M^2}{F^2} l_3^r + \frac{2t - M^2}{2F^2} \bar{J}_{\pi\pi}(t) + \frac{t}{F^2} \left[ l_4^r - \frac{1}{16\pi^2} \left( \ln \frac{M^2}{\mu^2} + 1 \right) \right] \right\}, \quad (3.40)$$

obtido originalmente por Gasser e Leutwyler em 1984 [8]. Da expressão acima, tiramos que o fator de forma escalar para  $t = 0$  é

$$F_\pi(0) = 2B \left( 1 + \frac{M^2}{32\pi^2 F^2} + \frac{M^2}{16\pi^2 F^2} \ln \frac{M^2}{\mu^2} + \frac{4M^2}{F^2} l_3^r \right). \quad (3.41)$$

Para ilustrar o teorema de Feynman-Hellman, extraímos novamente esse resultado, desta vez por meio dele, usando

$$F_\pi(0) = \left( \frac{\partial}{\partial m_u} + \frac{\partial}{\partial m_d} \right) M_\pi^2. \quad (3.42)$$

Para tanto, é preciso calcular  $M_\pi^2$  em função de  $M^2$ . Os gráficos de Feynman de onde se extrai a correção à massa, incluindo contribuições de ordem  $p^4$ , são exibidos na figura 3.5.

No que segue, mostramos a conexão entre a derivada das amplitudes relativas aos diagramas da figura 3.5 com respeito à massa dos quarks e aqueles da figura 3.4, para  $t = 0$ . Os diagramas 3.5, amputadas as pernas externas, representam a contribuição



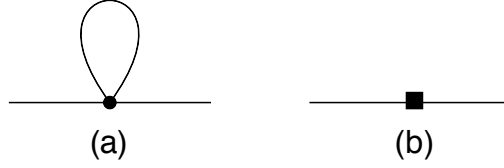


Figura 3.5: Contribuições para a massa do pión.

para  $-i\Sigma(k^2)$ , que descreve a correção de massa. O propagador completo do pión é dado por

$$\frac{i}{k^2 - M^2 - \Sigma(k^2)} = \frac{i}{k^2 - M^2} + \frac{i}{k^2 - M^2} (-i\Sigma(k^2)) \frac{i}{k^2 - M^2} + \dots, \quad (3.43)$$

onde  $M^2$  é a massa em ordem dominante. A posição do pólo deste propagador é a massa física da partícula,  $k^2 = M_\pi^2$ . Ou seja,

$$M_\pi^2 = M^2 + \Sigma(M_\pi^2). \quad (3.44)$$

A amplitude para os diagramas da figura 3.5 é

$$T_M = \frac{M^4}{2F^2} \left( J_{\pi\pi}(0) + \frac{1}{16\pi^2} \right) - \frac{2M^4}{F^2} l_3 = -\frac{M^4}{2F^2} \left( \frac{1}{16\pi^2} \ln \frac{M^2}{\mu^2} + 4l_3^r \right). \quad (3.45)$$

Tomando a derivada deste resultado temos

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial m_u} + \frac{\partial}{\partial m_d} \right) T_M &= \frac{2BM^2}{F^2} \left( J_{\pi\pi}(0) + \frac{1}{32\pi^2} \right) - \frac{2BM^2}{F^2} 4l_3 \\ &= -\frac{2BM^2}{F^2} \left( \frac{1}{16\pi^2} \ln \frac{M^2}{\mu^2} + \frac{1}{32\pi^2} + 4l_3^r \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Quando consideramos as contribuições correspondentes para  $F_\pi(0)$ , equação (3.42), temos

$$T_F = \frac{2BM^2}{F^2} \left( \frac{1}{16\pi^2} \ln \frac{M^2}{\mu^2} + \frac{1}{32\pi^2} + 4l_3^r \right). \quad (3.47)$$

A única diferença entre as equações (3.46) e (3.47) é um sinal negativo, decorrente do fato que

$$T_M \sim -\Sigma(M_\pi^2) \sim -M_\pi^2, \quad (3.48)$$

$$T_F \sim \left( \frac{\partial}{\partial m_u} + \frac{\partial}{\partial m_d} \right) M_\pi^2, \quad (3.49)$$

Com este exemplo, ilustra-se melhor a função desempenhada pelo teorema de Feynman-Hellman: a de ponte entre a massa da partícula e seu fator de forma escalar. Além disso, ele exhibe, também, o papel das LECs, que carregam implicitamente a influência dos graus de liberdade mais pesados. No caso de  $F_\pi(t)$ , expressão (3.40), aparecem as LECs  $l_3^r$  e  $l_4^r$ . No contexto restrito da ChPT, não é possível ter acesso direto aos valores destas constantes. A constante  $l_3^r$  aparece na construção de  $M_\pi^2$  e não é diretamente observável. Por outro lado,  $l_4^r$  poder ser extraída dos observáveis que dela dependem, empregando resultados experimentais para o espalhamento  $\pi\pi$ . Do ponto de vista teórico, a alternativa é, então, efetuar cálculos não perturbativos com a teoria mais fundamental, a QCD, ou empregar modelos.

### 3.3.2 Modelo

Em [21, 43], trabalhos de 2009, determinou-se o fator de forma escalar do pión em  $SU(2)$  com o modelo baseado no corte no espaço das posições, obtendo-se o raio quadrático escalar médio do pión,  $\langle r^2 \rangle_\pi = 0,509 \text{ fm}^2$ , que é compatível com o importante resultado de [26],  $\langle r^2 \rangle_\pi = (0,61 \pm 0,04) \text{ fm}^2$ . No presente trabalho, estamos interessados nos fatores de forma escalares dos mésons pseudoescalares em  $SU(3)$  mas, antes de mostrar os resultados, ilustramos o uso do modelo no cálculo do fator de forma escalar do pión em  $SU(2)$ .

Partindo do resultado (3.40), passamos para o espaço das posições, onde efetuamos o corte, usando (3.5). Voltamos, então, ao espaço dos momentos por meio de outra transformada de Fourier,

$$F'_P(t) = \int d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tilde{F}'_P(r) = 4\pi \int_0^\infty dr \frac{r}{q} \sin qr \tilde{F}'_P(r) . \quad (3.50)$$

Como os resultados da ChPT se aplicam em baixas energias, usamos

$$\frac{\sin qr}{qr} \approx 1 - \frac{q^2 r^2}{6} \quad (3.51)$$

e escrevemos

$$\begin{aligned} F'_P(t) &\approx 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \tilde{F}'_P(r) - \frac{1}{6} 4\pi \int_0^\infty dr r^4 q^2 \tilde{F}'_P(r) \\ &= F'_P(0) + \frac{t}{6} \langle r^2 \rangle_P , \end{aligned} \quad (3.52)$$

que está de acordo com (3.13).

No caso dos mésons, os resultados são obtidos impondo que o fator de forma calculado com o modelo, em  $t = 0$ , resulte no mesmo valor encontrado para esta grandeza na ChPT, isto é,

$$F'_P(0) = F_P(0) . \quad (3.53)$$

Fazemos, inicialmente, uma transformada de Fourier do resultado da ChPT, equação (3.40), o que nos leva a

$$\tilde{F}_\pi(r) = \frac{2BM^3}{32\pi^3 F^2 r^2} \left[ \left( \frac{12}{M^2 r^2} + 7 \right) K_1(2Mr) + \frac{12}{Mr} K_0(2Mr) \right] , \quad (3.54)$$

onde  $K_0(x)$  e  $K_1(x)$  são funções de Bessel que divergem para distâncias pequenas. O ingrediente básico do modelo é que essas contribuições divergentes são descartadas pelo corte efetuado num raio crítico  $R$ . Para determinar o valor desse raio, é preciso identificar o fator de forma do pión a grandes distâncias ao condensado, dado pela equação (3.23), como

$$\langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle = -2BF^2 . \quad (3.55)$$

Este resultado foi obtido por meio do teorema de Feynman-Hellman, a partir de

$$\langle 0 | \hat{m}(\bar{u}u + \bar{d}d) | 0 \rangle = \langle 0 | -\mathcal{L}_{SB} | 0 \rangle = -2B\hat{m}F^2 = -M^2 F^2 < 0 , \quad (3.56)$$

o que indica que a energia do condensado é menor que a do vácuo. Ele é formado por estados de quark-antiquark ligados, daí sua densidade de energia negativa. Por isso, o modelo requer  $\tilde{F}_\pi(r \rightarrow \infty) = -M^2 F^2$ . Entretanto, a equação (3.54), resulta em  $\tilde{F}_\pi(r \rightarrow \infty) = 0$ . Isso é devido a convenções: na ChPT, como em qualquer teoria quântica de campos, as expansões perturbativas são construídas em torno de um vácuo vazio, por meio do ordenamento normal.

Fazendo

$$B = -\frac{\langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle}{2F^2} \quad (3.57)$$

e usando-o na equação (3.54), chegamos a

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\pi(r) &= -\frac{\langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle}{2F^2} \frac{2M^3}{32\pi^3 F^2 r^2} \left[ \left( \frac{12}{M^2 r^2} + 7 \right) K_1(2Mr) + \frac{12}{Mr} K_0(2Mr) \right] \\ &\equiv -\frac{\langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle}{2F^2} \frac{2}{32\pi^2 F^2} \tilde{\Lambda}(r) . \end{aligned} \quad (3.58)$$

Esta equação relaciona o elemento de matriz  $\langle \pi | \bar{u}u + \bar{d}d | \pi \rangle$  e o vácuo e deixa claro que o pión é um bóson de Goldstone: ele não existe sem o condensado. Como  $\tilde{F}_\pi(r \rightarrow \infty) = 0$ , isto é, tende ao vazio e não ao vácuo cheio, desloca-se a origem da seguinte forma

$$\tilde{F}_\pi(r) \rightarrow \tilde{F}_\pi(r)|^V = \tilde{F}_\pi(r) - N \langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle, \quad (3.59)$$

onde  $N$  é uma constante com dimensão de massa. Essa equação implementa a condição de contorno para distâncias grandes, sendo  $\tilde{F}_\pi(r \rightarrow \infty)|^V < 0$ . À medida que a distância ao pión diminui,  $\tilde{F}_\pi(r)|^V$  aproxima-se de 0, uma vez que  $\tilde{F}_\pi(r)$  é monotonicamente crescente. Este processo reflete a destruição dos pares quark-antiquark que compõem o condensado para a criação da nuvem de pions do pión. Nós supomos que ele termina quando o condensado é todo excitado, isto é, quando  $\tilde{F}_\pi(R)|^V = 0$ . Nota-se que isto ocorre no raio crítico  $R$  e, para  $r < R$  há apenas o vazio. Implementamos essa imagem, cortando a expressão da seguinte forma

$$\tilde{F}_\pi(r)|^V \rightarrow N \langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle \theta(r - R) \left[ 1 - \frac{\tilde{\Lambda}(r)}{N 32 \pi^2 F^4} \right] \quad (3.60)$$

e tiramos, também, a seguinte condição para  $N$

$$1 = \frac{\tilde{\Lambda}(R)}{N 32 \pi^2 F^4}. \quad (3.61)$$

Tendo chegado a essa expressão para o corte, voltamos para a convenção usada na ChPT, pois a contribuição do condensado, quando integrada em todo o espaço, dá origem a divergências. Isto é feito com a subtração do condensado desta relação. Dessa forma, temos

$$\tilde{F}_\pi'^L(r) = \theta(R - r) \tilde{F}_\pi(R) + \theta(r - R) \tilde{F}_\pi(r). \quad (3.62)$$

Voltamos ao espaço dos momentos efetuando uma transformada de Fourier

$$\begin{aligned} F_P'(t) &= \int d^3 \mathbf{r} e^{i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \tilde{F}_P'(r) = 4\pi \int_0^\infty dr \frac{r}{q} \sin qr \tilde{F}_P'(r) \\ &= 4\pi \left( \tilde{F}_P(R) \int_0^R dr \frac{r}{q} \sin qr + \int_R^\infty dr \frac{r}{q} \sin qr \tilde{F}_P(r) \right). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Após empregar a aproximação para baixas energias, equação (3.51), obtemos

$$\begin{aligned} F_\pi'^L(t) &= 2B \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M^2 \left[ 15 + tR^2 \left( \frac{2}{M^2 R^2} + \frac{59}{30} \right) \right] K_0(2MR) \right. \\ &\quad \left. + M^2 \left[ \frac{20}{MR} + \frac{14}{3} MR + \frac{7}{15} \frac{tR}{M} \left( \frac{17}{2} + M^2 R^2 \right) \right] K_1(2MR) \right\}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Para completar o cálculo, precisamos ainda determinar  $R$ , fazendo  $F_\pi^{L'}(0) = F_\pi^L(0) = 2B$ . Deste modo, obtemos a seguinte relação

$$1 = \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left[ 15M^2 K_0(2MR) + M^2 \left( \frac{20}{MR} + \frac{14}{3} MR \right) K_1(2MR) \right], \quad (3.65)$$

cujas solução numérica fornece  $R = 0,503$  fm.

O raio quadrático é proporcional ao coeficiente que multiplica  $t$  no fator de forma e é dado por

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_\pi = \frac{6}{16\pi^2 F^2} & \left[ \frac{7}{30} MR (17 + 2M^2 R^2) K_1(2MR) \right. \\ & \left. + \left( 2 + \frac{59}{30} M^2 R^2 \right) K_0(2MR) \right]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Usando o  $R$  determinado acima, temos  $\langle r^2 \rangle_\pi = 0,509$  fm<sup>2</sup>, enquanto que o valor extraído dos resultados experimentais é  $\langle r^2 \rangle_\pi = (0,61 \pm 0,04)$  fm<sup>2</sup> [26]. As precisões numéricas do modelo podem ser aprimoradas com a introdução de ressonâncias escalares como graus de liberdade explícitos da ChPT, o que foi explorado em [43]. Aqui, entretanto, preocupamo-nos principalmente com as suas relações estruturais.

A relação de consistência, da qual extraímos o valor de  $R$ , equação (3.65), permite-nos ir além, expandindo as funções de Bessel e obtendo uma série para  $R$  em termos de  $F$  e  $M$

$$R \approx \frac{\sqrt{10}}{4\pi F} \left\{ 1 + \frac{M^2}{32\pi^2 F^2} \left[ 5 \ln \left( \frac{M\sqrt{10}}{4\pi F} \right) + 5\gamma - \frac{23}{3} \right] \right\} + \mathcal{O}(M^3). \quad (3.67)$$

Para obter a LEC  $l_4^r$ , expandimos o raio quadrático médio, equação (3.66), em relação a  $M$ . As expressões da ChPT e do modelo são

$$\text{ChPT : } \quad \langle r^2 \rangle_\pi = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left( \bar{l}_4 - \frac{13}{12} \right), \quad (3.68)$$

$$\text{Modelo : } \quad \langle r^2 \rangle_\pi = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ \frac{119}{60} - 2(\gamma + \ln MR) \right], \quad (3.69)$$

onde

$$\bar{l}_4 = 16\pi^2 l_4^r - \ln \frac{M^2}{\mu^2}. \quad (3.70)$$

Comparando os resultados da ChPT e do modelo, chegamos a

$$\bar{l}_4 = \frac{46}{15} - 2(\gamma + \ln MR) \quad (3.71)$$

e, para  $l_4^r$ ,

$$l_4^r = \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{46}{15} - 2(\gamma + \ln \mu R) \right]. \quad (3.72)$$

O fator que multiplica o logaritmo acima é o mesmo que o da ChPT, equação (3.39), mostrando que a estrutura de  $l_4^r$  obtida com o modelo é correta. Além disso, o valor obtido para a LEC independente da escala é  $\bar{l}_4 = 3,98$ , a ser comparado com o resultado obtido com o ajuste de expressões da ChPT a resultados experimentais,  $\bar{l}_4 = 4,4 \pm 0,2$ .

No contexto da ChPT, as LECs não devem depender de  $M^2$ . Por isso, tomamos apenas o primeiro termo da expansão (3.67), o único independente de  $M$  e, substituindo-o em  $l_4^r$ , encontramos

$$l_4^r = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \frac{46}{15} - 2 \left[ \gamma + \ln \left( \mu \frac{\sqrt{10}}{4\pi F} \right) \right] \right\} \quad (3.73)$$

e

$$\bar{l}_4 = \frac{46}{15} - 2 \left[ \gamma + \ln \left( M \frac{\sqrt{10}}{4\pi F} \right) \right], \quad (3.74)$$

o que produz  $\bar{l}_4 = 3,85$ , ainda próximo do valor extraído com a ChPT. Esses resultados, bem como os que mostramos a seguir para o caso  $SU(3)$ , indicam que o modelo é bem sucedido tanto na reprodução correta da estrutura de logaritmos, quanto na produção de previsões numéricas.

## 3.4 Fatores de forma em $SU(3)$

### 3.4.1 ChPT

O cálculo dos fatores de forma escalares em  $SU(3)$  é completamente análogo ao caso em  $SU(2)$ . Os diagramas de Feynman que contribuem são os mesmos, dados na figura 3.4, mas, agora, nos *loops* de mésons estão presentes káons e etas, além de píons. Nós trabalhamos, principalmente, com as componentes 0 e 8, expressões (3.9) e (3.10),

$$\begin{aligned} \langle P^i(k') | \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s | P^j(k) \rangle &= \delta^{ij} F_P^0(t), \\ \langle P^i(k') | \bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s | P^j(k) \rangle &= \delta^{ij} F_P^8(t). \end{aligned}$$

Com a lagrangiana da ChPT, Gasser e Leutwyler, em 1985, [17], e Meissner e Oller, em 2001, [18], calcularam os fatores de forma do pión e do káon, que apresentamos a seguir. Os do eta foram calculados por nós. Começamos por  $F_P^0(t)$ , onde  $P$  é  $\pi$ ,  $K$  ou  $\eta$ ,

$$F_\pi^0(t) = F_\pi^0(0) \left\{ 1 + \frac{1}{2F^2}(2t - M_\pi^2)\bar{J}_{\pi\pi}(t) + \frac{t}{2F^2}\bar{J}_{KK}(t) + \frac{M_\pi^2}{6F^2}\bar{J}_{\eta\eta}(t) + \frac{4t}{F^2} \left[ 3L_4^r + L_5^r - \frac{1}{128\pi^2} \left( 2\ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} + \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} + 3 \right) \right] \right\}, \quad (3.75)$$

$$F_K^0(t) = F_K^0(0) \left\{ 1 + \frac{3t}{8F^2}\bar{J}_{\pi\pi}(t) + \frac{3t}{4F^2}\bar{J}_{KK}(t) - \frac{1}{F^2} \left( \frac{M_K^2}{3} - \frac{3t}{8} \right) \bar{J}_{\eta\eta}(t) + \frac{4t}{F^2} \left[ 3L_4^r + L_5^r - \frac{1}{256\pi^2} \left( \frac{3}{2} \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} + 3 \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} + \frac{3}{2} \ln \frac{M_\eta^2}{\mu^2} + 6 \right) \right] \right\}, \quad (3.76)$$

$$F_\eta^0(t) = F_\eta^0(0) \left\{ 1 + \frac{M_\pi^2}{2F^2}\bar{J}_{\pi\pi}(t) + \frac{1}{F^2} \left[ \frac{3t}{2} - \frac{1}{3}(3M_\eta^2 + M_\pi^2) \right] \bar{J}_{KK}(t) + \frac{1}{6F^2} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) \bar{J}_{\eta\eta}(t) + \frac{4t}{F^2} \left[ 3L_4^r + L_5^r - \frac{1}{128\pi^2} \left( 3 \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} + 3 \right) \right] \right\}, \quad (3.77)$$

onde as massas dos mésons pseudoescalares, quando aparecem dentro dos fatores de forma, são em ordem dominante (1.67). A função  $\bar{J}_{PP}(t)$  já apareceu no cálculo do fator de forma escalar do pión em  $SU(2)$  (equação (3.34)),

$$\bar{J}_{PP}(t) = \frac{1}{16\pi^2} \left( 2 + \sigma_P \ln \frac{\sigma_P - 1}{\sigma_P + 1} \right), \quad \sigma_P = \sqrt{1 - \frac{4M_P^2}{t}}.$$

As LECs da lagrangiana em ordem  $p^4$ , equação (1.68), estão também presentes nos fatores de forma. É interessante notar que elas aparecem na mesma combinação ( $3L_4^r + L_5^r$ ). São elas que determinamos após a comparação entre os nossos resultados e os da ChPT.

Obtemos os fatores de forma para  $t = 0$  a partir do teorema de Feynman-Hellman, equações (3.27) e (3.28),

$$F_P^0(0) = \left( \frac{\partial}{\partial m_u} + \frac{\partial}{\partial m_d} + \frac{\partial}{\partial m_s} \right) M_P^2,$$

$$F_P^8(0) = \left( \frac{\partial}{\partial m_u} + \frac{\partial}{\partial m_d} - 2\frac{\partial}{\partial m_s} \right) M_P^2$$

e das massas dos mésons pseudoescalares calculadas em [8] (equação (10.7)),

$$\begin{aligned}
M_\pi^2 &= 2\hat{m}B \left( 1 + \mu_\pi - \frac{1}{3}\mu_\eta + 2\hat{m}K_3 + K_4 \right) , \\
M_K^2 &= (\hat{m} + m_s)B \left[ 1 + \frac{2}{3}\mu_\eta + (\hat{m} + m_s)K_3 + K_4 \right] , \\
M_\eta^2 &= \frac{2}{3}(\hat{m} + 2m_s)B \left[ 1 + 2\mu_K - \frac{4}{3}\mu_\eta + \frac{2}{3}(\hat{m} + 2m_s)K_3 + K_4 \right] \\
&\quad + 2\hat{m}B \left( -\mu_\pi + \frac{2}{3}\mu_K + \frac{1}{3}\mu_\eta \right) + K_5 , \tag{3.78}
\end{aligned}$$

onde

$$\mu_P = \frac{M_P^2}{32\pi^2 F} \ln \frac{M_P^2}{\mu^2} \tag{3.79}$$

e  $M_P$  representa a massa do méson em ordem dominante. As constantes  $K_i$  envolvem as LECs e são escritas como

$$K_3 = \frac{8B}{F^2} (2L_8^r - L_5^r) , \tag{3.80}$$

$$K_4 = (m_u + m_d + m_s) \frac{16B}{F^2} (2L_6^r - L_4^r) , \tag{3.81}$$

$$K_5 = (m_s - \hat{m})^2 \frac{128}{9} \frac{B^2}{F^2} (3L_7^r + L_8^r) . \tag{3.82}$$

Com isso, obtemos

$$\begin{aligned}
F_\pi^0(0) &= 2B \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ \frac{2}{3}M_\pi^2 + 2M_\pi^2 \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} - \frac{2}{9}(M_\pi^2 + 2M_K^2) \ln \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{16}{F^2} [(2M_\pi^2 + M_K^2)(-L_4^r + 2L_6^r) + M_\pi^2(-L_5^r + 2L_8^r)] \right\} , \tag{3.83}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_K^0(0) &= 2B \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ \frac{2}{3}M_K^2 + \frac{2}{9}(7M_K^2 - M_\pi^2) \ln \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{8}{F^2} [(M_\pi^2 + 5M_K^2)(-L_4^r + 2L_6^r) + 2M_K^2(-L_5^r + 2L_8^r)] \right\} , \tag{3.84}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
F_\eta^0(0) = & 2B \left\{ 1 \right. \\
& + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ \frac{2}{3} M_\eta^2 - 2M_\pi^2 \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} + \frac{16M_K^2}{3} \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} - \frac{1}{3} (7M_\eta^2 - M_\pi^2) \ln \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right] \\
& \left. + \frac{16}{F^2} \left[ 3M_K^2(-L_4^r + 2L_6^r) + M_\eta^2(-L_5^r + 2L_8^r) \right] \right\}. \quad (3.85)
\end{aligned}$$

Nos resultados para o fator de forma em  $t = 0$ , aparecem as LECs  $L_4^r$ ,  $L_5^r$ ,  $L_6^r$  e  $L_8^r$ . Ao contrário das que encontramos nos termos proporcionais a  $t$ , estas não podem ser determinadas pelo modelo, dado que usamos  $F_P^0(0)$  em ordem dominante.

Para o caso da componente 8, temos

$$\begin{aligned}
F_\pi^8(t) = & F_\pi^8(0) \left\{ 1 + \frac{1}{2F^2} (2t - M_\pi^2) \bar{J}_{\pi\pi}(t) - \frac{t}{4F^2} \bar{J}_{KK}(t) - \frac{M_\pi^2}{6F^2} \bar{J}_{\eta\eta}(t) \right. \\
& \left. + \frac{4t}{F^2} \left[ L_5^r - \frac{1}{256\pi^2} \left( 4 \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} - \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} + 3 \right) \right] \right\}, \quad (3.86)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_K^8(t) = & F_K^8(0) \left\{ 1 - \frac{3t}{4F^2} \bar{J}_{\pi\pi}(t) + \frac{3t}{4F^2} \bar{J}_{KK}(t) - \frac{1}{F^2} \left( \frac{2}{3} M_K^2 - \frac{3t}{4} \right) \bar{J}_{\eta\eta}(t) \right. \\
& \left. + \frac{4t}{F^2} \left[ L_5^r - \frac{3}{256\pi^2} \left( -\ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} + \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} + \ln \frac{M_\eta^2}{\mu^2} + 1 \right) \right] \right\}, \quad (3.87)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_\eta^8(t) = & F_\eta^8(0) \left\{ 1 - \frac{M_\pi^2}{2F^2} \bar{J}_{\pi\pi}(t) + \frac{1}{2F^2} \left[ \frac{3t}{2} - \frac{1}{3} (3M_\eta^2 + M_\pi^2) \right] \bar{J}_{KK}(t) \right. \\
& \left. + \frac{1}{6F^2} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) \bar{J}_{\eta\eta}(t) + \frac{4t}{F^2} \left[ L_5^r - \frac{1}{256\pi^2} \left( 3 \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} + 3 \right) \right] \right\}. \quad (3.88)
\end{aligned}$$

Nas equações acima aparece a LEC  $L_5^r$ . A seguir, mostramos os resultados quando  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned}
F_\pi^8(0) = & 2B \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ \frac{4}{3} M_\pi^2 + 2M_\pi^2 \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} + \frac{4}{9} (M_\pi^2 - M_K^2) \ln \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right] \right. \\
& \left. + \frac{16}{F^2} \left[ \left( \frac{M_\pi^2}{2} + M_K^2 \right) (-L_4^r + 2L_6^r) + M_\pi^2 (-L_5^r + 2L_8^r) \right] \right\}, \quad (3.89)
\end{aligned}$$

$$F_K^8(0) = -B \left\{ 1 + \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left[ \frac{2}{3} M_K^2 + \frac{2}{9} (5M_K^2 - \frac{M_\pi^2}{2}) \ln \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{16}{F^2} \left[ \left( \frac{M_\pi^2}{2} + M_K^2 \right) (-L_4^r + 2L_6^r) + M_K^2 (-L_5^r + 2L_8^r) \right] \right\}, \quad (3.90)$$

$$F_\eta^8(0) = -2B \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ -\frac{M_\eta^2}{3} + \frac{5M_\pi^2}{3} + 2M_\pi^2 \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} + \frac{8M_K^2}{3} \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} \right. \right. \\ \left. \left. - (3M_\eta^2 - \frac{M_\pi^2}{3}) \ln \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right] + \frac{16}{F^2} \left[ \left( \frac{M_\pi^2}{2} + M_K^2 \right) (-L_4^r + 2L_6^r) - M_\eta^2 L_5^r \right. \right. \\ \left. \left. + 8(M_K^2 - M_\pi^2) L_7^r + 2(2M_\eta^2 - M_\pi^2) L_8^r \right] \right\}. \quad (3.91)$$

No caso da componente 8, vemos as LECs  $L_4^r$ ,  $L_5^r$ ,  $L_6^r$  e  $L_8^r$  e, para a eta, também a  $L_7^r$ .

### 3.4.2 Modelo - Resultados completos

Podemos, agora, determinar os fatores de forma escalares dos mésons  $\pi$ ,  $K$  e  $\eta$ , no contexto do modelo, uma das contribuições desta tese. Como anteriormente, os passos a serem seguidos são os resumidos a seguir:

1. usam-se os fatores de forma escalares no espaço dos momentos, empregando as expressões da seção anterior;
2. por meio de uma transformada de Fourier, passa-se para o espaço das posições;
3. corta-se o resultado, de acordo com a equação (3.5):

$$\tilde{F}_P(r) \rightarrow \tilde{F}'_P(r) = \theta(R - r) \tilde{F}_P(R) + \theta(r - R) \tilde{F}_P(r);$$

4. efetua-se uma transformada de Fourier de  $\tilde{F}'_P(r)$ , de modo a obter o novo fator de forma escalar no espaço das posições, através da equação (3.52),

$$F'_P(t) \approx 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \tilde{F}'_P(r) - \frac{1}{6} t 4\pi \int_0^\infty dr r^4 \tilde{F}'_P(r);$$

5. emprega-se a relação de consistência, equação (3.53), para determinar o raio do corte

$$F'_P(0) = F_P(0) .$$

Nós aplicamos este modelo, para o cálculo das componentes 0, 8,  $L$  e  $S$ . Neste capítulo discutimos principalmente a determinação das componentes 0 e 8, deixando para o apêndice C a apresentação dos resultados completos das demais. A aplicação das etapas de 1 a 4 do modelo fornece

$$\begin{aligned}
F_\pi^0(t) = & 2B \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_\pi^2 \left[ 15 + tR^2 \left( \frac{2}{M_\pi^2 R^2} + \frac{59}{30} \right) \right] K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + M_\pi^2 \left[ \frac{20}{M_\pi R} + \frac{14}{3} M_\pi R + \frac{7}{15} tR^2 \left( \frac{17}{2M_\pi R} + M_\pi R \right) \right] K_1(2M_\pi R) \\
& + M_K^2 \left[ 8 + tR^2 \left( \frac{1}{M_K^2 R^2} + \frac{16}{15} \right) \right] K_0(2M_K R) \\
& + M_K^2 \left[ \frac{10}{M_K R} + \frac{8}{3} M_K R + \frac{tR^2}{15} \left( \frac{31}{M_K R} + 4M_K R \right) \right] K_1(2M_K R) \\
& + \frac{M_\pi^2}{3} \left( 1 + \frac{tR^2}{6} \right) K_0(2M_\eta R) \\
& \left. + \frac{M_\pi^2}{9} \left[ 2M_\eta R + \frac{tR^2}{10} \left( \frac{5}{M_\eta R} + 2M_\eta R \right) \right] K_1(2M_\eta R) \right\} , \quad (3.92)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_K^0(t) = & 2B \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_\pi^2 \left[ 6 + tR^2 \left( \frac{3}{4M_\pi^2 R^2} + \frac{4}{5} \right) \right] K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + M_\pi^2 \left[ \frac{15}{2M_\pi R} + 2M_\pi R + tR^2 \left( \frac{31}{20M_\pi R} + \frac{M_\pi R}{5} \right) \right] K_1(2M_\pi R) \\
& + M_K^2 \left[ 12 + tR^2 \left( \frac{3}{2M_K^2 R^2} + \frac{8}{5} \right) \right] K_0(2M_K R) \\
& + M_K^2 \left[ \frac{15}{M_K R} + 4M_K R + tR^2 \left( \frac{31}{10M_K R} + \frac{2M_K R}{5} \right) \right] K_1(2M_K R) \\
& + M_\eta^2 \left[ 6 \left( 1 - \frac{1}{9} \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \right) + tR^2 \left( \frac{3}{4M_\eta^2 R^2} + \frac{4}{5} - \frac{1}{9} \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \right) \right] K_0(2M_\eta R) \\
& + M_\eta^2 \left[ \frac{15}{2M_\eta R} + 2M_\eta R \left( 1 - \frac{2M_K^2}{9M_\eta^2} \right) + tR^2 \left( \frac{31}{20M_\eta R} + \frac{M_\eta R}{5} \right) \right. \\
& \left. + tR^2 \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \left( -\frac{1}{9M_\eta R} - \frac{2M_\eta R}{45} \right) \right] K_1(2M_\eta R) \left. \right\} , \tag{3.93}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_\eta^0(t) = & 2B \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ \frac{M_\pi^2}{6} (6 + tR^2) K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + \frac{M_\pi^2}{15} \left[ 10M_\pi R + tR^2 \left( \frac{5}{2M_\pi R} + M_\pi R \right) \right] K_1(2M_\pi R) \\
& + M_K^2 \left[ \frac{64}{3} + tR^2 \left( \frac{3}{M_K^2 R^2} + \frac{124}{45} \right) \right] K_0(2M_K R) \\
& + M_K^2 \left[ \frac{30}{M_K R} + \frac{56M_K R}{9} + \frac{7tR}{45M_K} (37 + 4M_K^2 R^2) \right] K_1(2M_K R) \\
& + \frac{1}{18} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) (6 + tR^2) K_0(2M_\eta R) \\
& + \frac{M_\eta R}{90} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) \left[ 20 + tR^2 \left( \frac{5}{M_\eta^2 R^2} + 2 \right) \right] K_1(2M_\eta R) \left. \right\} , \tag{3.94}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_\pi^8(t) = & 2B \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_\pi^2 \left[ 15 + tR^2 \left( \frac{2}{M_\pi^2 R^2} + \frac{59}{30} \right) \right] K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + M_\pi^2 \left[ \frac{20}{M_\pi R} + \frac{14}{3} M_\pi R + \frac{7}{15} tR^2 \left( \frac{17}{2M_\pi R} + M_\pi R \right) \right] K_1(2M_\pi R) \\
& + M_K^2 \left[ -4 - \frac{tR^2}{2} \left( \frac{1}{M_K^2 R^2} + \frac{16}{15} \right) \right] K_0(2M_K R) \\
& + M_K^2 \left[ -\frac{5}{M_K R} - \frac{4}{3} M_K R - \frac{tR^2}{30} \left( \frac{31}{M_K R} + 4M_K R \right) \right] K_1(2M_K R) \\
& - \frac{M_\pi^2}{3} \left( 1 + \frac{tR^2}{6} \right) K_0(2M_\eta R) \\
& \left. - \frac{M_\pi^2}{9} \left[ 2M_\eta R + \frac{tR^2}{10} \left( \frac{5}{M_\eta R} + 2M_\eta R \right) \right] K_1(2M_\eta R) \right\} , \quad (3.95)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_K^8(t) = & -B \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_\pi^2 \left[ -12 + tR^2 \left( -\frac{3}{2M_\pi^2 R^2} - \frac{8}{5} \right) \right] K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + M_\pi^2 \left[ -\frac{15}{M_\pi R} - 4M_\pi R + tR^2 \left( -\frac{31}{10M_\pi R} - \frac{2M_\pi R}{5} \right) \right] K_1(2M_\pi R) \\
& + M_K^2 \left[ 12 + tR^2 \left( \frac{3}{2M_K^2 R^2} + \frac{8}{5} \right) \right] K_0(2M_K R) \\
& + M_K^2 \left[ \frac{15}{M_K R} + 4M_K R + tR^2 \left( \frac{31}{10M_K R} + \frac{2M_K R}{5} \right) \right] K_1(2M_K R) \\
& + M_\eta^2 \left[ 12 \left( 1 - \frac{1}{9} \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \right) + tR^2 \left( \frac{3}{2M_\eta^2 R^2} + \frac{8}{5} - \frac{2}{9} \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \right) \right] K_0(2M_\eta R) \\
& + M_\eta^2 \left[ \frac{15}{M_\eta R} + 4M_\eta R \left( 1 - \frac{2M_K^2}{9M_\eta^2} \right) + tR^2 \left( \frac{31}{10M_\eta R} + \frac{2M_\eta R}{5} \right) \right. \\
& \left. + tR^2 \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \left( -\frac{2}{9M_\eta R} - \frac{4M_\eta R}{45} \right) \right] K_1(2M_\eta R) \right\} , \quad (3.96)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_\eta^8(t) = & -2B \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ -\frac{M_\pi^2}{6} (6 + tR^2) K_0(2M_\pi R) \right. \\
& -\frac{M_\pi^2}{15} \left[ 10M_\pi R + tR^2 \left( \frac{5}{2M_\pi R} + M_\pi R \right) \right] K_1(2M_\pi R) \\
& + M_K^2 \left[ \frac{32}{3} + tR^2 \left( \frac{3}{2M_K^2 R^2} + \frac{62}{45} \right) \right] K_0(2M_K R) \\
& + M_K^2 \left[ \frac{15}{M_K R} + \frac{28M_K R}{9} + \frac{7tR^2}{90} \left( \frac{37}{M_K R} + 4M_K R \right) \right] K_1(2M_K R) \\
& + \frac{1}{18} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) (6 + tR^2) K_0(2M_\eta R) \\
& \left. + \frac{M_\eta R}{90} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) \left[ 20 + tR^2 \left( \frac{5}{M_\eta^2 R^2} + 2 \right) \right] K_1(2M_\eta R) \right\} . \quad (3.97)
\end{aligned}$$

Neste estágio, já é possível observar que não existe dependência dos nossos resultados nas LECs. Eles dependem apenas na constante de decaimento do pión no limite quiral e nas massas dos mésons em ordem dominante. É este fato que torna o modelo preditivo.

Como esses resultados são longos e complicados, é conveniente considerá-los como desvios de dois limites importantes, os em que as simetrias  $SU(2)$  e  $SU(3)$  são válidas.

O **limite  $SU(2)$**  é obtido fazendo  $m_s \rightarrow \infty$ , o que corresponde a considerar  $M_K$  e  $M_\eta$  como sendo muito pesados. Para valores grandes do argumento, as funções de Bessel tendem a zero exponencialmente e os termos envolvendo o quark  $s$  desapare-

cem, gerando resultados iguais para as componentes 0 e 8 de cada méson,

$$F_{\pi}^0(t) = F_{\pi}^8(t) = 2B \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_{\pi}^2 \left[ 15 + tR^2 \left( \frac{2}{M_{\pi}^2 R^2} + \frac{59}{30} \right) \right] K_0(2M_{\pi}R) \right. \\ \left. + M_{\pi}^2 \left[ \frac{20}{M_{\pi}R} + \frac{14}{3} M_{\pi}R + \frac{7}{15} tR^2 \left( \frac{17}{2M_{\pi}R} + M_{\pi}R \right) \right] K_1(2M_{\pi}R) \right\} , \quad (3.98)$$

$$F_K^0(t) = F_K^8(t) = 2B \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_{\pi}^2 \left[ 6 + tR^2 \left( \frac{3}{4M_{\pi}^2 R^2} + \frac{4}{5} \right) \right] K_0(2M_{\pi}R) \right. \\ \left. + M_{\pi}^2 \left[ \frac{15}{2M_{\pi}R} + 2M_{\pi}R + tR^2 \left( \frac{31}{20M_{\pi}R} + \frac{M_{\pi}R}{5} \right) \right] K_1(2M_{\pi}R) \right\} , \quad (3.99)$$

$$F_{\eta}^0(t) = F_{\eta}^8(t) = 2B \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ \frac{M_{\pi}^2}{6} (6 + tR^2) K_0(2M_{\pi}R) \right. \\ \left. + \frac{M_{\pi}^2}{15} \left[ 10M_{\pi}R + tR^2 \left( \frac{5}{2M_{\pi}R} + M_{\pi}R \right) \right] K_1(2M_{\pi}R) \right\} . \quad (3.100)$$

O **limite SU(3)** é obtido fazendo  $m_u = m_d = m_s$ , isto é,  $M_{\pi} = M_K = M_{\eta} = M_P$ . Neste caso, os resultados para a componente 0 convergem para

$$F_P^0(t) = 2B \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_P^2 \left[ \frac{70}{3} + tR^2 \left( \frac{3}{M_P^2 R^2} + \frac{139}{45} \right) \right] K_0(2M_P R) \right. \quad (3.101)$$

$$\left. + M_P^2 \left[ \frac{30}{M_P R} + \frac{68}{9} M_P R + \frac{tR^2}{45} \left( \frac{274}{M_P R} + 34M_P R \right) \right] K_1(2M_P R) \right\} . \quad (3.102)$$

Para a componente 8, por outro lado, os resultados diferem para cada méson por uma constante multiplicativa

$$F_{\pi}^8(t) = 2B \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_P^2 \left[ \frac{32}{3} + tR^2 \left( \frac{3}{2M_P^2 R^2} + \frac{62}{45} \right) \right] K_0(2M_P R) \right. \quad (3.103)$$

$$\left. + M_P^2 \left[ \frac{15}{M_P R} + \frac{28}{9} M_P R + \frac{tR^2}{90} \left( \frac{259}{M_P R} + 28M_P R \right) \right] K_1(2M_P R) \right\} ,$$

$$F_K^8(t) = -\frac{1}{2} F_{\pi}^8(t) , \quad (3.104)$$

$$F_{\eta}^8(t) = -F_{\pi}^8(t) . \quad (3.105)$$

### Raios de corte

A etapa 5 do modelo envolve a determinação dos raios  $R$ , implementando as relações de consistência. Antecipamos que esses raios são diferentes para cada fator de forma

por razões que são discutidas adiante. No caso da componente 0, temos

$$\begin{aligned}
F_\pi^0(t) \Rightarrow 1 = & \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left[ M_\pi^2 \left( \frac{20}{M_\pi R} + \frac{14}{3} M_\pi R \right) K_1(2M_\pi R) + 15M_\pi^2 K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + M_K^2 \left( \frac{10}{M_K R} + \frac{8}{3} M_K R \right) K_1(2M_K R) + 8M_K^2 K_0(2M_K R) \\
& \left. + \frac{2M_\pi^2}{9} M_\eta R K_1(2M_\eta R) + \frac{M_\pi^2}{3} K_0(2M_\eta R) \right], \quad (3.106)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_K^0(t) \Rightarrow 1 = & \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_\pi^2 \left( \frac{15}{2M_\pi R} + 2M_\pi R \right) K_1(2M_\pi R) + 6M_\pi^2 K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + M_K^2 \left( \frac{15}{M_K R} + 4M_K R \right) K_1(2M_K R) + 12M_K^2 K_0(2M_K R) \\
& + M_\eta^2 \left[ \frac{15}{2M_\eta R} + 2M_\eta R \left( 1 - \frac{2M_K^2}{9M_\eta^2} \right) \right] K_1(2M_\eta R) \\
& \left. + 6M_\eta^2 \left( 1 - \frac{1}{9} \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \right) K_0(2M_\eta R) \right\}, \quad (3.107)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_\eta^0(t) \Rightarrow 1 = & \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ \frac{2}{3} M_\pi^3 R K_1(2M_\pi R) + M_\pi^2 K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + M_K^2 \left( \frac{30}{M_K R} + \frac{56M_K R}{9} \right) K_1(2M_K R) + \frac{64}{3} M_K^2 K_0(2M_K R) \\
& \left. + \frac{2M_\eta R}{9} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) K_1(2M_\eta R) + \frac{1}{3} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) K_0(2M_\eta R) \right\}. \quad (3.108)
\end{aligned}$$

Para a componente 8, achamos

$$\begin{aligned}
F_\pi^8(t) \Rightarrow 1 = & \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left[ M_\pi^2 \left( \frac{20}{M_\pi R} + \frac{14}{3} M_\pi R \right) K_1(2M_\pi R) + 15M_\pi^2 K_0(2M_\pi R) \right. \\
& - M_K^2 \left( \frac{5}{M_K R} + \frac{4}{3} M_K R \right) K_1(2M_K R) - 4M_K^2 K_0(2M_K R) \\
& \left. - \frac{2M_\pi^2}{9} M_\eta R K_1(2M_\eta R) - \frac{M_\pi^2}{3} K_0(2M_\eta R) \right], \quad (3.109)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
F_K^8(t) \Rightarrow 1 = & \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ -M_\pi^2 \left( \frac{15}{M_\pi R} + 4M_\pi R \right) K_1(2M_\pi R) - 12M_\pi^2 K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + M_K^2 \left( \frac{15}{M_K R} + 4M_K R \right) K_1(2M_K R) + 12M_K^2 K_0(2M_K R) \\
& + M_\eta^2 \left[ \frac{15}{M_\eta R} + 4M_\eta R \left( 1 - \frac{2M_K^2}{9M_\eta^2} \right) \right] K_1(2M_\eta R) \\
& \left. + 12M_\eta^2 \left( 1 - \frac{1}{9} \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \right) K_0(2M_\eta R) \right\} , \tag{3.110}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_\eta^8(t) \Rightarrow 1 = & \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ -\frac{2}{3} M_\pi^3 R K_1(2M_\pi R) - M_\pi^2 K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + M_K^2 \left( \frac{15}{M_K R} + \frac{28M_K R}{9} \right) K_1(2M_K R) + \frac{32}{3} M_K^2 K_0(2M_K R) \\
& \left. + \frac{2M_\eta R}{9} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) K_1(2M_\eta R) + \frac{1}{3} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) K_0(2M_\eta R) \right\} . \tag{3.111}
\end{aligned}$$

Destas relações, podemos extrair numericamente os valores dos raios de corte  $R$ , dados na tabela 3.3. Os resultados completos para as componentes  $L$  e  $S$  são dados no apêndice C. Lá vemos também que o termo dominante da componente  $S$  do fator de forma do pión é nula e, portanto, não há como definir-se um  $R$  neste caso.

Tabela 3.3: Valores para os raios das componentes 0, 8,  $L$  e  $S$ .

|            | $\pi$ | $K$   | $\eta$ |
|------------|-------|-------|--------|
| $R^0$ (fm) | 0,548 | 0,480 | 0,449  |
| $R^8$ (fm) | 0,473 | 0,282 | 0,356  |
| $R^L$ (fm) | 0,527 | 0,540 | 0,510  |
| $R^S$ (fm) |       | 0,417 | 0,409  |

Para interpretar esses resultados, invocamos novamente os limites  $m_s \rightarrow \infty$  e  $m_s = \hat{m}$ . No primeiro deles, ainda que as equações (3.98)-(3.100) mostrem que as componentes 0 e 8 dos fatores de forma são iguais, o mesmo não acontece com o termo dominante do resultado da ChPT no caso do káon e do eta. Por este motivo,

apenas os raios de corte do pión são iguais,  $R_0 = R_8 = 0,503$  fm, mesmo valor obtido em  $SU(2)$ . Para o káon pode-se extrair um raio apenas, o da componente 0 em  $SU(2)$ ,  $R_0 = 0,320$  fm. Para o eta, a aproximação não permite encontrar uma raiz para as relações de consistências.

No caso em que as massas dos quarks  $u$ ,  $d$  e  $s$  são iguais, não temos diferenças entre os  $R$  para uma mesma componente, não importando o méson considerado. Podemos observar isso, tomando o limite  $SU(3)$  nas equações (3.106)-(3.108) e (3.109)-(3.111), o que leva a resultados comuns para os três mésons,

$$F_P^0(t) \Rightarrow 1 = \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left[ M_P^2 \left( \frac{30}{M_P R} + \frac{68}{9} M_P R \right) K_1(2M_P R) + \frac{70}{3} M_P^2 K_0(2M_P R) \right], \quad (3.112)$$

$$F_P^8(t) \Rightarrow 1 = \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left[ M_P^2 \left( \frac{15}{M_P R} + \frac{28}{9} M_P R \right) K_1(2M_P R) + \frac{32}{3} M_P^2 K_0(2M_P R) \right]. \quad (3.113)$$

A variação nos valores para os  $R$  das componentes 0 e 8, decorre, assim, da diferença  $\hat{m} - m_s$ . Este assunto será abordado novamente, quando discutirmos os resultados perturbativos para  $R$  e a interpretação ficará mais clara.

A diferença entre os valores das componentes 0 e 8 fica evidente substituindo uma massa média do octeto e observando o valor resultante para  $R$ . Essa média é  $m = 368$  MeV e, ao substituir nas relações acima temos  $\bar{R}^0 = 0.496$  fm e  $\bar{R}^8 = 0.378$  fm, onde a barra denota o uso de uma mesma massa nas relações de consistência. É por isso que os  $R^8$  são sistematicamente menores que os  $R^0$ . As expressões acima permitem-nos, assim, entender a diferença entre os  $R^0$  e  $R^8$  para um mesmo méson.

### Raios quadráticos

Em posse dos raios conseguidos por meio das relações de consistência, podemos obter os raios quadráticos médios. É importante dizer que estes  $R$  usados nos raios quadráticos são diferentes para cada méson e cada componente. Para não carregar a notação, não os diferenciamos. Primeiramente, damos os raios quadráticos para a

componente 0

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_\pi^0 &= \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ \frac{7}{30} M_\pi R (17 + 2M_\pi^2 R^2) K_1(2M_\pi R) + \left( 2 + \frac{59}{30} M_\pi^2 R^2 \right) K_0(2M_\pi R) \right. \\ &\quad + \frac{M_K R}{15} (31 + 4M_K^2 R^2) K_1(2M_K R) + \left( 1 + \frac{16}{15} M_K^2 R^2 \right) K_0(2M_K R) \\ &\quad \left. + \frac{M_\pi^2 R}{90M_\eta} (5 + 2M_\eta^2 R^2) K_1(2M_\eta R) + \frac{M_\pi^2 R^2}{18} K_0(2M_\eta R) \right], \end{aligned} \quad (3.114)$$

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_K^0 &= \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_\pi R \left( \frac{31}{20} + \frac{M_\pi^2 R^2}{5} \right) K_1(2M_\pi R) + \left( \frac{3}{4} + \frac{4}{5} M_\pi^2 R^2 \right) K_0(2M_\pi R) \right. \\ &\quad + M_K R \left( \frac{31}{10} + \frac{2M_\pi^2 R^2}{5} \right) K_1(2M_K R) + \left( \frac{3}{2} + \frac{8}{5} M_K^2 R^2 \right) K_0(2M_K R) \\ &\quad + M_\eta R \left[ \left( \frac{31}{20} + \frac{M_\eta^2 R^2}{5} \right) - \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \left( \frac{1}{9} + \frac{2M_\eta^2 R^2}{45} \right) \right] K_1(2M_\eta R) \\ &\quad \left. + \left[ \frac{3}{4} + M_\eta^2 R^2 \left( \frac{4}{5} - \frac{1}{9} \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \right) \right] K_0(2M_\eta R) \right\}, \end{aligned} \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_\eta^0 &= \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ \frac{M_\pi R}{15} \left( \frac{5}{2} + M_\pi^2 R^2 \right) K_1(2M_\pi R) + \frac{M_\pi^2 R^2}{6} K_0(2M_\pi R) \right. \\ &\quad + \frac{7M_K R}{45} (37 + 4M_K^2 R^2) K_1(2M_K R) + \left( 3 + \frac{124}{45} M_K^2 R^2 \right) K_0(2M_K R) \\ &\quad + \frac{M_\eta R}{90} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) R^2 \left( \frac{5}{M_\eta^2 R^2} + 2 \right) K_1(2M_\eta R) \\ &\quad \left. + \frac{1}{18} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) R^2 K_0(2M_\eta R) \right]. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Os raios quadráticos referentes à componente 8 são

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_\pi^8 &= \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ \frac{7}{30} M_\pi R (17 + 2M_\pi^2 R^2) K_1(2M_\pi R) + \left( 2 + \frac{59}{30} M_\pi^2 R^2 \right) K_0(2M_\pi R) \right. \\ &\quad - \frac{M_K R}{30} (31 + 4M_K^2 R^2) K_1(2M_K R) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{16}{15} M_K^2 R^2 \right) K_0(2M_K R) \\ &\quad \left. - \frac{M_\pi^2 R}{90M_\eta} (5 + 2M_\eta^2 R^2) K_1(2M_\eta R) - \frac{M_\pi^2 R^2}{18} K_0(2M_\eta R) \right], \end{aligned} \quad (3.117)$$

$$\begin{aligned}
\langle r^2 \rangle_K^8 = & \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left\{ -M_\pi R \left( \frac{31}{10} + \frac{2M_\pi^2 R^2}{5} \right) K_1(2M_\pi R) - \left( \frac{3}{2} + \frac{8}{5} M_\pi^2 R^2 \right) K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + M_K R \left( \frac{31}{10} + \frac{2M_\pi^2 R^2}{5} \right) K_1(2M_K R) + \left( \frac{3}{2} + \frac{8}{5} M_K^2 R^2 \right) K_0(2M_K R) \\
& + M_\eta R \left[ \left( \frac{31}{10} + \frac{2M_\eta^2 R^2}{5} \right) - \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \left( \frac{2}{9} + \frac{4M_\eta^2 R^2}{45} \right) \right] K_1(2M_\eta R) \\
& \left. + \left[ \frac{3}{2} + M_\eta^2 R^2 \left( \frac{8}{5} - \frac{2M_K^2}{9M_\eta^2} \right) \right] K_0(2M_\eta R) \right\}, \quad (3.118)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle r^2 \rangle_\eta^8 = & \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ -\frac{M_\pi R}{15} \left( \frac{5}{2} + M_\pi^2 R^2 \right) K_1(2M_\pi R) - \frac{M_\pi^2 R^2}{6} K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + \frac{7M_K R}{90} (37 + 4M_K^2 R^2) K_1(2M_K R) + \left( \frac{3}{2} + \frac{62}{45} M_K^2 R^2 \right) K_0(2M_K R) \\
& + \frac{M_\eta R}{90} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) R^2 \left( \frac{5}{M_\eta^2 R^2} + 2 \right) K_1(2M_\eta R) \\
& \left. + \frac{1}{18} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) R^2 K_0(2M_\eta R) \right]. \quad (3.119)
\end{aligned}$$

O resultado numérico para os raios quadráticos é encontrado utilizando os raios de corte de cada um dos fatores de forma. Os valores obtidos encontram-se na tabela 3.4.

Tabela 3.4: Valores para os raios quadráticos médios para a componente 0, 8,  $L$  e  $S$ .

|  | $\pi$ | $K$    | $\eta$ |
|--|-------|--------|--------|
| $\langle r^2 \rangle^0$ (fm <sup>2</sup> ) | 0,536 | 0,354  | 0,248  |
| $\langle r^2 \rangle^8$ (fm <sup>2</sup> ) | 0,490 | -0,128 | 0,156  |
| $\langle r^2 \rangle^L$ (fm <sup>2</sup> ) | 0,523 | 0,484  | 0,320  |
| $\langle r^2 \rangle^S$ (fm <sup>2</sup> ) |       | 0,210  | 0,206  |

No limite  $m_s \rightarrow \infty$ , recuperamos o valor  $\langle r^2 \rangle = 0,509$  fm<sup>2</sup> para o pión. No caso de massas físicas, encontramos na literatura apenas uma determinação de um dos

raios quadráticos médios dados acima,  $\langle r^2 \rangle_\pi^8 = (0, 55 \pm 0, 10) \text{ fm}^2$ , em [17], resultado compatível com o obtido com o modelo. As diferenças entre os valores encontrados na tabela 3.4 podem ser compreendidos também pela idéia de que os quarks  $u$ ,  $d$  e  $s$ , quando pesados pela função de onda dos mésons, resultam em contribuições distintas. Esse raciocínio é utilizado em [17] para explicar as diferenças nos raios quadráticos médios vetoriais (equação (5.10) de [17]). Podemos entender os valores aproximadamente iguais de  $\langle r^2 \rangle_\pi^0$ ,  $\langle r^2 \rangle_\pi^8$  e  $\langle r^2 \rangle_\pi^L$  como sendo decorrentes da pequena contribuição vinda do quark estranho. Por outro lado, o quark  $s$  no káon determina a grande diferença entre  $\langle r^2 \rangle_K^0$  e  $\langle r^2 \rangle_K^8$ . Lembrando que a componente 0 é relativa à soma de operadores  $\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s$ , que a 8 refere-se a  $\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s$  e supondo que metade de  $\langle r^2 \rangle_K^0$  vem do quark  $s$  e a outra dos quarks leves, podemos entender  $\langle r^2 \rangle_K^8$  como sendo, aproximadamente,  $\langle r^2 \rangle_K^8 \approx -\frac{1}{2}\langle r^2 \rangle_K^0 = -0,177 \text{ fm}^2$ , não muito distante de  $\langle r^2 \rangle_K^8$ .

### 3.4.3 Modelo - Resultados perturbativos

Na ChPT, todas as grandezas são obtidas como perturbações nos momentos ou massas dos mésons pseudoescalares, tidos como pequenos em relação a uma escala  $\Lambda_{QCD} \approx 1 \text{ GeV}$ . Para comparar as grandezas calculadas com a ChPT e com o modelo descrito acima, nesta seção expandimos os fatores de forma nas massas dos mésons escalares. Isto equivale a expandir as funções de Bessel  $K_0$  e  $K_1$ , para pequenos argumentos. As expansões das funções com o argumento típico que ocorre em nossos cálculos são

$$\begin{aligned} K_0(2M_P R) &= -(\ln(M_P R) + \gamma) - M_P^2 R^2 [(\ln M_P R + \gamma) - 1] \\ &\quad - \frac{1}{8} M_P^4 R^4 [2(\ln M_P R + \gamma) - 3] \\ &\quad - \frac{1}{216} M_P^6 R^6 [6(\ln M_P R + \gamma) - 11] + \mathcal{O}(M^7), \end{aligned} \quad (3.120)$$

$$\begin{aligned} K_1(2M_P R) &= \frac{1}{2M_P R} + M_P R \left[ (\ln M_P R + \gamma) - \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{8} M_P^3 R^3 [4(\ln M_P R + \gamma) - 5] \\ &\quad + \frac{1}{36} M_P^5 R^5 [3(\ln M_P R + \gamma) - 5] + \mathcal{O}(M^6). \end{aligned} \quad (3.121)$$

Nas duas tabelas que seguem, encontram-se as diferenças relativas entre a função exata e sua expansão. Como vemos, a expansão não é boa para argumentos contendo massas do káon ou eta. Entretanto, mostramos a seguir que as expansões

obtidas para o raio, a partir da expansão das relações de consistência, são mais bem comportadas.

Tabela 3.5: Valores para a diferença relativa entre  $K_0(2M_P R)$  e sua expansão, tomando  $R = 0,527$  fm e incluindo termos até diferentes ordens.

| Méson  | $2M_P R$ | $\mathcal{O}(M_P^0)$ | $\mathcal{O}(M_P^2)$ | $\mathcal{O}(M_P^4)$ | $\mathcal{O}(M_P^6)$   |
|--------|----------|----------------------|----------------------|----------------------|------------------------|
| $\pi$  | 0,746    | 33,4%                | 1,53%                | 0,027%               | $2,65 \cdot 10^{-4}\%$ |
| $K$    | 2,64     | 1712%                | 1234%                | 310%                 | 40,1%                  |
| $\eta$ | 2,93     | 2637%                | 2400%                | 754%                 | 121%                   |

Tabela 3.6: Valores para a diferença relativa entre  $K_1(2M_P R)$  e sua expansão, tomando  $R = 0,527$  fm e incluindo diferente número de termos.

| Méson  | $2M_P R$ | $\mathcal{O}(M_P^{-1})$ | $\mathcal{O}(M_P)$ | $\mathcal{O}(M_P^3)$ | $\mathcal{O}(M_P^5)$    |
|--------|----------|-------------------------|--------------------|----------------------|-------------------------|
| $\pi$  | 0,746    | -40,0%                  | -4,63%             | -0,13%               | $-1,73 \cdot 10^{-3}\%$ |
| $K$    | 2,64     | -509%                   | -1259%             | -529%                | -95,1%                  |
| $\eta$ | 2,93     | -680%                   | -2211%             | -1166%               | -261%                   |

Com as expansões para  $K_0$  e  $K_1$  apresentadas acima, obtemos a expansão para o raio de corte de cada um dos fatores de forma da componente 0

$$R_\pi^0 = \frac{1}{4\pi F} \sqrt{15} \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ M_\pi^2 \left( -\frac{68}{9} + \frac{14}{3}\gamma + 5 \ln \left( \frac{M_\pi}{4\pi F} \sqrt{15} \right) \right. \right. \right. \quad (3.122)$$

$$\left. \left. \left. - \frac{1}{3} \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{15} \right) \right) + M_K^2 \left( 2 \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{15} \right) + 2\gamma - \frac{11}{3} \right) \right] + \mathcal{O}(M^4) \right\} ,$$

$$R_K^0 = \frac{1}{4\pi F} \sqrt{15} \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ M_\pi^2 \left( -\frac{11}{4} + \frac{3}{2}\gamma + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{M_\pi}{4\pi F} \sqrt{15} \right) \right) \right. \right. \quad (3.123)$$

$$\left. \left. + M_K^2 \left( -\frac{103}{18} + \frac{11}{3}\gamma + 3 \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{15} \right) \right) \right. \right. \left. \left. + M_\eta^2 \left( -\frac{11}{4} + \frac{3}{2}\gamma + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{15} \right) \right) \right] + \mathcal{O}(M^4) \right\} ,$$

$$\begin{aligned}
R_\eta^0 = & \frac{1}{4\pi F} \sqrt{15} \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ M_\pi^2 \left( -\ln \left( \frac{M_\pi}{4\pi F} \sqrt{15} \right) + \frac{1}{3} \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{15} \right) \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \frac{2}{3} \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{15} \right) \right) \right] + M_K^2 \left( -11 + 6\gamma + 6 \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{15} \right) \right) \right. \\
& \left. \left. + M_\eta^2 \left( -\frac{2}{9} + \frac{2}{3} \gamma + 2 \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{15} \right) - \frac{4}{3} \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{15} \right) \right) \right] + \mathcal{O}(M^4) \right\} . \tag{3.124}
\end{aligned}$$

Agora, para a componente 8, temos

$$\begin{aligned}
R_\pi^8 = & \frac{1}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ M_\pi^2 \left( -\frac{70}{9} + \frac{16}{3} \gamma + 5 \ln \left( \frac{M_\pi}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{3} \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} \right) \right) \right] + M_K^2 \left( \frac{11}{6} - \gamma - \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} \right) \right) \right] + \mathcal{O}(M^4) \right\} , \tag{3.125}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_K^8 = & \frac{1}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ M_\pi^2 \left( \frac{11}{2} - 3\gamma - 3 \ln \left( \frac{M_\pi}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} \right) \right) \right. \right. \\
& + M_K^2 \left( -\frac{107}{18} + \frac{13}{3} \gamma + 3 \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} \right) + \frac{4}{3} \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} \right) \right) \\
& \left. \left. + M_\eta^2 \left( -\frac{11}{2} + 3\gamma + 3 \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} \right) \right) \right] + \mathcal{O}(M^4) \right\} , \tag{3.126}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_\eta^8 = & \frac{1}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ M_\pi^2 \left( -\frac{5}{9} + \frac{5}{3} \gamma + \ln \left( \frac{M_\pi}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} \right) \right) \right. \right. \\
& + \frac{1}{3} \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} \right) + \frac{1}{3} \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} \right) \left. \right] \\
& + M_K^2 \left( -\frac{11}{2} + 3\gamma + 3 \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} \right) \right) \\
& \left. \left. + M_\eta^2 \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \gamma + \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} \right) - \frac{4}{3} \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} \right) \right) \right] + \mathcal{O}(M^4) \right\} . \tag{3.127}
\end{aligned}$$

Os raios de corte para cada componente têm o mesmo termo dominante. Nós os definimos como  $\rho_0$  e  $\rho_8$  e são dados por

$$\rho_0 = \frac{1}{4\pi F} \sqrt{15} , \quad \rho_8 = \frac{1}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} . \tag{3.128}$$

Tabela 3.7: Valores para os raios de corte das componentes 0 e 8. Na primeira linha está o valor exato, seguido pelo expandido até  $\mathcal{O}(M_P^2)$  e  $\mathcal{O}(M_P^0)$ , acompanhados da diferença relativa entre os valores aproximado e exato. Apresentamos, também, na última coluna, o raio de corte do fator de forma do pión em  $SU(2)$ .

| $SU(3)$           | $\pi$ | $K$   | $\eta$ | $SU(3)$           | $\pi$ | $K$   | $\eta$ | $SU(2) \pi$ |
|-------------------|-------|-------|--------|-------------------|-------|-------|--------|-------------|
| $R_P^0$ (fm)      | 0,548 | 0,480 | 0,449  | $R_P^8$ (fm)      | 0,473 | 0,282 | 0,356  | 0,503       |
| $R_P^{0(2)}$ (fm) | 0,526 | 0,470 | 0,420  | $R_P^{8(2)}$ (fm) | 0,478 | 0,223 | 0,367  | 0,500       |
| Dif. rel.         | -4,0% | -2,1% | -6,5%  | Dif. rel.         | 1,1%  | -21%  | 3,1%   | 0,6%        |
| $\rho_0$ (fm)     | 0,658 | 0,658 | 0,658  | $\rho_8$ (fm)     | 0,465 | 0,465 | 0,465  | 0,537       |
| Dif. rel.         | 20%   | 38%   | 47%    | Dif. rel.         | -1,7% | 65%   | 31%    | 7,4%        |

Apesar de a expansão das funções de Bessel não funcionar bem quando o seu argumento envolve massas do káon ou eta (ver tabelas 3.5 e 3.6), o mesmo não acontece para os  $R$  (tabela 3.7). Nas relações de consistência obtemos uma certa combinação de funções de Bessel todas com um mesmo argumento do tipo  $2M_P R$ , onde  $M_P$  é a massa de um dos mésons pseudoescalares. Essas contribuições vem de *loops* contendo tais partículas e, ainda que a expansão das funções de Bessel com argumentos contendo  $M_K$  ou  $M_\eta$  não sejam boas, quando substituídas nas relações de consistência, resultam em aproximações decentes na determinação de  $R$ . Isso acontece por duas principais razões:

1. uma particular combinação das funções de Bessel possui uma série mais convergente. Isso acontece nas contribuições vindas do káon para  $R_\pi^0$ , por exemplo;
2. a contribuição é pequena em relação às outras partículas. Isto é o que ocorre com a combinação vinda do  $\eta$  para  $R_\pi^0$ .

Com as expansões dos raios quadráticos médios, os calculados com a ChPT e com o modelo, podemos extrair uma expressão para as LECs  $L_4^t$  e  $L_5^t$  em termos das massas dos mésons,  $F$ , a escala  $\mu$  e  $R$ . Se vamos além, e substituímos o termo dominante dos raios (comum para todos os mésons), temos um resultado para as LECs que depende apenas de  $F$  e  $\mu$ . Os raios quadráticos obtidos com a ChPT são



escritos como

$$\langle r^2 \rangle_\pi^0 = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ 64\pi^2(3L_4^r + L_5^r) - \frac{19}{12} + \frac{M_\pi^2}{36M_\eta^2} - \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} \right], \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_K^0 = \frac{6}{16\pi^2 F^2} & \left[ 64\pi^2(3L_4^r + L_5^r) - \frac{37}{24} - \frac{M_\pi^2}{72M_\eta^2} \right. \\ & \left. - \frac{3}{8} \left( \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} + 2 \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} + \ln \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.130)$$

$$\langle r^2 \rangle_\eta^0 = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ 64\pi^2(3L_4^r + L_5^r) - \frac{55}{36} - \frac{M_\pi^2}{36M_\eta^2} - \frac{3}{2} \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} \right]. \quad (3.131)$$

Para a componente 8, encontramos

$$\langle r^2 \rangle_\pi^8 = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ 64\pi^2 L_5^r - \frac{5}{6} - \frac{M_\pi^2}{36M_\eta^2} - \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} + \frac{1}{4} \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} \right], \quad (3.132)$$

$$\langle r^2 \rangle_K^8 = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ 64\pi^2 L_5^r - \frac{5}{6} - \frac{M_\pi^2}{36M_\eta^2} + \frac{3}{4} \left( \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} - \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} - \ln \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (3.133)$$

$$\langle r^2 \rangle_\eta^8 = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ 64\pi^2 L_5^r - \frac{5}{6} - \frac{M_\pi^2}{36M_\eta^2} - \frac{3}{4} \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} \right]. \quad (3.134)$$

É importante notar que aparecem as mesmas combinações de LECs nos raios quadráticos para os mésons em uma dada componente.

Ao expandirmos as funções de Bessel no resultado provindo do modelo, obtemos os raios quadráticos que seguem (por simplicidade, mais uma vez escrevemo-os em termos de um só  $R$ )

$$\langle r^2 \rangle_\pi^0 = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left( \frac{181}{60} - 3\gamma + \frac{M_\pi^2}{36M_\eta^2} - 2 \ln M_\pi R - \ln M_K R \right), \quad (3.135)$$

$$\langle r^2 \rangle_K^0 = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ \frac{367}{120} - 3\gamma - \frac{M_\pi^2}{72M_\eta^2} - \frac{3}{4} (\ln M_\pi R + 2 \ln M_K R + \ln M_\eta R) \right], \quad (3.136)$$

$$\langle r^2 \rangle_\eta^0 = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left( \frac{553}{180} - 3\gamma - \frac{M_\pi^2}{36M_\eta^2} - 3 \ln M_K R \right). \quad (3.137)$$

Para a componente 8 temos,

$$\langle r^2 \rangle_\pi^8 = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left( \frac{22}{15} - \frac{3}{2}\gamma - \frac{M_\pi^2}{36M_\eta^2} - 2 \ln M_\pi R + \frac{1}{2} \ln M_K R \right), \quad (3.138)$$

$$\langle r^2 \rangle_K^8 = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ \frac{22}{15} - \frac{3}{2}\gamma - \frac{M_\pi^2}{36M_\eta^2} - \frac{3}{2} (-\ln M_\pi R + \ln M_K R + \ln M_\eta R) \right], \quad (3.139)$$

$$\langle r^2 \rangle_\eta^8 = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left( \frac{22}{15} - \frac{3}{2}\gamma - \frac{M_\pi^2}{36M_\eta^2} - \frac{3}{2} \ln M_K R \right). \quad (3.140)$$

Comparando-os com raios quadráticos da ChPT, obtemos os seguintes resultados para as LECs,

$$3L_4^r(\mu) + L_5^r(\mu) = \frac{1}{64\pi^2} \left( \frac{23}{5} - 3\gamma - 3 \ln \mu \rho_0 \right), \quad (3.141)$$

$$L_5^r(\mu) = \frac{1}{64\pi^2} \left( \frac{23}{10} - \frac{3}{2}\gamma - \frac{3}{2} \ln \mu \rho_8 \right). \quad (3.142)$$

Como os fatores de forma para uma dada componente dependem de modo semelhante nas LECs, os resultados acima são os mesmos para cada méson. Podemos escrever  $L_4^r(\mu)$  como

$$L_4^r(\mu) = \frac{1}{64\pi^2} \left( \frac{23}{30} - \frac{1}{2} \ln \frac{\rho_0}{\rho_8} - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2} \ln \mu \rho_0 \right). \quad (3.143)$$

Se substituirmos os raios explicitamente, encontramos os seguintes resultados

$$L_4^r(\mu) = \frac{1}{64\pi^2} \left( \frac{23}{30} - \frac{1}{2} \ln \sqrt{2} - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2} \ln \frac{\mu}{4\pi F} \sqrt{15} \right), \quad (3.144)$$

$$L_5^r(\mu) = \frac{1}{64\pi^2} \left( \frac{23}{10} - \frac{3}{2}\gamma - \frac{3}{2} \ln \frac{\mu}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} \right). \quad (3.145)$$

Na ChPT, as LECs regularizadas possuem uma dependência na escala de renormalização dada implicitamente pela equação que relaciona  $L_i$  (a LEC que contém a parte divergente  $L$ ) e  $L_i^r$  (a LEC regularizada e dependente da escala)

$$L_i = L_i^r + \Gamma_i L. \quad (3.146)$$

Derivando ambos os lados da equação acima, temos

$$\mu \frac{dL_i^r}{d\mu} = -\frac{\Gamma_i}{16\pi^2}. \quad (3.147)$$

Lembrando que  $\Gamma_4 = \frac{1}{8}$  e  $\Gamma_5 = \frac{3}{8}$ , vemos que os resultados do modelo têm rigorosamente a mesma dependência em  $\mu$  que as LECs da ChPT. Tal fato permite-nos obter resultados numéricos para  $L_4^r$  e  $L_5^r$ . As LECs em  $SU(3)$  não podem ter sua dependência na escala removida. Assim, as estimativas são sempre ligadas a uma escala que, em geral, é tomada como sendo aproximadamente a massa do méson  $\rho$ ,  $\mu = 770$  MeV. Usando  $F = 92,4$  MeV, chegamos aos seguintes valores

$$L_4^r(770) = -0,26 \cdot 10^{-3}, \quad (3.148)$$

$$L_5^r(770) = 0,85 \cdot 10^{-3}. \quad (3.149)$$

Um dos conjuntos de resultados empíricos mais aceitos para as LECs é encontrado em [4, 5]. No principal ajuste feito em [5] (*fit 10*) acham-se os valores  $L_4^r(770) \equiv 0$  e  $L_5^r(770) = (0,97 \pm 0,11) \cdot 10^{-3}$ . Como se vê nesta referência, as maiores incertezas residem nas LECs  $L_4^r$  e  $L_6^r$ . Nas estimativas tomando o limite de grande número de cores ( $N_C \rightarrow \infty$ ), ambas LECs são nulas e a incerteza para  $L_4^r$  é da ordem de  $0,5 \cdot 10^{-3}$ . O nosso resultado, mesmo fazendo uso apenas das constantes presentes na lagrangiana de ordem dominante, fornece previsões para os valores das LECs que são compatíveis com os melhores ajustes aos dados experimentais já feitos com os resultados da ChPT. Ao mesmo tempo, não são apenas os resultados numéricos que concordam com a ChPT: estruturalmente há uma total concordância do modelo empregado com a teoria efetiva.

É interessante obter a LEC  $l_4^r$  da ChPT em  $SU(2)$  a partir de sua relação com as  $L_4^r$  e  $L_5^r$  e, então, comparar este resultado com o valor empírico. A relação entre as LECs é [9]

$$l_4^r = 8L_4^r + 4L_5^r - \frac{1}{64\pi^2} \left( \ln \frac{M_K^2 - \frac{M_\pi^2}{2}}{\mu^2} + 1 \right). \quad (3.150)$$

Com as equações (3.144) e (3.145), chegamos a

$$l_4^r = \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{43}{12} - \frac{5}{2}\gamma + \frac{1}{2} \ln \sqrt{2} - \frac{5}{2} \ln \frac{\mu}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{4} \ln \frac{M_K^2 - \frac{M_\pi^2}{2}}{\mu^2} \right). \quad (3.151)$$

A LEC  $\bar{l}_4$ , independente de escala, é dada por

$$\bar{l}_4 = \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{43}{12} - \frac{5}{2}\gamma + \frac{1}{2} \ln \sqrt{2} - \frac{5}{2} \ln \frac{M_\pi}{4\pi F} \sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{4} \ln \frac{M_K^2 - \frac{M_\pi^2}{2}}{M_\pi^2} \right), \quad (3.152)$$

que, após substituírmos os valores das massas e da constante de decaimento do pión, resulta em

$$\bar{l}_4 = 4,47, \quad (3.153)$$

resultado bastante próximo ao da ChPT,  $\bar{l}_4 = 4,4 \pm 0,2$ . Trata-se de outra indicação bastante forte do poder preditivo do modelo.

# Capítulo 4

## Conclusão

Este trabalho foi dividido em dois principais assuntos. O primeiro abordou a constante de decaimento do pión e sua relação com as interações eletromagnéticas. O segundo tratou dos fatores de forma dos mésons pseudoescalares mais leves, o pión, o káon e o eta. Estes assuntos conectam-se, por um lado, pelo contexto em que se inserem: a teoria das interações fortes a baixas energias. A teoria de perturbação quirial é a teoria efetiva da QCD e tem tido grande sucesso na descrição das interações hadrônicas. Ela foi colocada na sua forma moderna nos artigos de Gasser e Leutwyler [8, 9] e, com a incorporação das interações eletromagnéticas na década de 90, viu-se um aumento da precisão dos parâmetros que a compõe e, assim, das suas previsões. Por outro lado, os trabalhos que abordamos nessa tese têm em comum a determinação dos parâmetros que compõem a ChPT. No primeiro, tratamos da constante de decaimento do pión e no segundo, dos fatores de forma escalares, usando-os para estimar duas das LECs. A seguir colocamos as conclusões de cada trabalho.

### **$F_\pi$ e as interações eletromagnéticas**

A constante de decaimento do pión desempenha papel fundamental na descrição da fenomenologia das interações fortes a baixas energias. Ela é encontrada na lagrangiana de ordem dominante da ChPT e em muitas das grandezas calculadas com ela. Atualmente, a constante de decaimento do pión é extraída da largura de decaimento calculada com a ChPT, incluindo interações eletromagnéticas, em conjunto com dados experimentais para a largura. O valor determinado pelo PDG [6] é  $F_\pi = (92, 21 \pm 0, 03 \pm 0, 14)$  MeV.

Com a precisão atingida pelos experimentos e previsões teóricas, tornou-se necessário adicionar interações eletromagnéticas à ChPT. Esse passo diminuiu as incertezas, mas trouxe, ao mesmo tempo, uma dificuldade na separação entre os efeitos da teoria forte e da eletromagnética. Os parâmetros da teoria mais fundamental variam com a escala de renormalização de modos distintos quando consideramos apenas a teoria forte ou a teoria forte mais a eletromagnética. Este assunto foi discutido em detalhes em [15, 16] por Gasser, Rusetsky e Scimemi. Esses autores usaram o modelo sigma linear como teoria fundamental, fazendo o papel da QCD, e observaram, entre outras coisas, como  $F_\pi$  na QCD pura depende da escala. No PDG [6],  $F_\pi$  é definida em QCD pura, mas é extraída de uma grandeza calculada com a ChPT, incluindo interações eletromagnéticas. No cálculo com o modelo sigma linear, viu-se que a ordem de magnitude da variação devida à escala é  $F(\mu_1 = 0,5 \text{ GeV}) - F(\mu_1 = 1 \text{ GeV}) \simeq 0,1 \text{ MeV}$ . Uma estimativa baseada no trabalho [41] indica que essa variação é uma ordem de grandeza menor no caso da QCD. De todo modo, para conhecer com precisão a maneira como  $F_\pi$  muda com a escala, seria necessário obter a dependência dos parâmetros da ChPT com esta escala. A indicação de que a incerteza dada pelo PDG é subestimada vem também da variação de  $F_\pi$  com as massas dos píons. O que vimos é que  $(F_\pi(M_{\pi^\pm}) - F_\pi(M_{\pi^0})) = 0,4 \text{ MeV}$ , duas vezes maior que a incerteza do PDG.

Como vimos no final do capítulo 2, não se pode determinar  $F_\pi$  em uma teoria que une as interações fortes com as eletromagnéticas. Neste caso, o resíduo da função de dois pontos passa a ter uma dependência no calibre e as propriedades da função são alteradas. Um próximo passo para determinar a constante de decaimento do pión com uma incerteza apropriada seria obter a dependência dos parâmetros da ChPT na escala de renormalização da teoria completa e da puramente forte. Isto traria um conhecimento da variação de  $F_\pi$  com a escala e, portanto, uma incerteza mais bem estimada. Outra possibilidade seria buscar fatorar a dependência no calibre de alguma forma ou mesmo definir o resíduo da função de dois pontos na teoria completa,  $\kappa_{\pi^\pm}$ , em um calibre específico. Ainda sim, seria necessário verificar a invariância desse “ $F_\pi$ ” com a escala.

### Fatores de forma escalares

Os fatores de forma escalares carregam informação sobre a parte da densidade de massa do sistema que decorre da quebra explícita de simetria quiral. Eles são

também ligados ao raio quadrático médio escalar do sistema e, na ChPT, podemos relacionar  $\langle r^2 \rangle_\pi^L$  a  $F_\pi/F$ , por exemplo. As principais determinações dos fatores de forma escalares na ChPT em  $SU(3)$  foram feitas em [13, 17]. São cálculos em  $\mathcal{O}(p^4)$  e, por isso, dependem das constantes de baixa energia, as LECs. Como a ChPT é uma teoria efetiva, ela não pode ser usada para calcular essas constantes, que são fixadas por meio de resultados experimentais. O modelo que empregamos neste trabalho foi desenvolvido em [19–21, 43] e permite obter os fatores de forma escalares apenas em termos dos dois únicos parâmetros da lagrangiana da ChPT em ordem dominante.

O modelo se baseia na idéia de que uma partícula colocada no vácuo o perturba: a uma distância grande,  $r \approx 5$  fm, encontramos apenas o vácuo da QCD. À medida que nos aproximamos da partícula, existe a destruição deste condensado de quark-antiquark para dar origem à nuvem mesônica ao redor dela. Este processo não pode continuar indefinidamente e nós supomos que ele para quando se atinge a densidade de energia do vácuo, isto é, quando os pares  $\bar{q}q$  do vácuo são completamente extintos. Neste raio  $r = R$ , ocorre uma transição de fase e a região interna a ele possui uma densidade constante de energia. Esta imagem é implementada matematicamente cortando o fator de forma escalar no espaço das posições, sendo o ponto de corte o raio  $R$ . Este modelo elimina as contribuições de curto alcance e, impondo que para  $t = 0$  o resultado reproduza a ChPT em ordem dominante, tiramos os fatores de forma escalares apenas em termos de  $F_\pi$  e as massas dos mésons pseudoescalares mais leves.

Com os fatores de forma, determinamos os raios quadráticos médios. Não encontramos na literatura todos  $\langle r^2 \rangle_P$  que calculamos. Obtivemos  $\langle r^2 \rangle_\pi^8 = 0,490$  fm<sup>2</sup>, enquanto que o valor determinado com a ChPT é  $\langle r^2 \rangle_\pi^8 = (0,55 \pm 0,10)$  fm<sup>2</sup>. Acharmos também  $\langle r^2 \rangle_\pi = 0,523$  fm<sup>2</sup>, a ser comparado com o valor da ChPT  $\langle r^2 \rangle_\pi = (0,61 \pm 0,04)$  fm<sup>2</sup>. Ambos resultados são compatíveis. Com os raios quadráticos médios, podemos determinar duas LECs,  $L_4^r$  e  $L_5^r$ , após expandi-los e compará-los com os resultados da ChPT. Os valores que encontramos são  $L_4^r(770) = -0,26 \cdot 10^{-3}$  e  $L_5^r(770) = 0,85 \cdot 10^{-3}$ . Na ChPT, usam-se diferentes esquemas para extrair as LECs dos resultados experimentais. Um conjunto de valores obtido a partir de ajustes a resultados experimentais e respeitado na literatura é dado em [4, 5]. Nestes trabalhos, no principal ajuste (*fit 10*), acham-se os valores  $L_4^r(770) \equiv 0$  e  $L_5^r(770) = (0,97 \pm 0,11) \cdot 10^{-3}$ . Nota-se que  $L_4^r$  é definida como sendo nula, com o

argumento de que, no limite  $N_C \rightarrow \infty$ , ela tende a zero. Eles admitem que a incerteza em  $L_4^r$  pode chegar a  $0,5 \times 10^{-3}$ . Considerando as incertezas dos resultados da ChPT, podemos dizer que encontramos valores compatíveis. Outra característica que indica a adequação do nosso resultado com os da teoria de perturbação quiral é a manutenção da correta estrutura de logaritmos após a aplicação do corte no espaço das posições e da volta ao espaço dos momentos.

Uma direção para o aprimoramento deste trabalho é a inclusão de ressonâncias escalares. Tal procedimento representa tornar explícita a influência dos graus de liberdade mais pesados que antes decorria das LECs. Em [21, 43] isto foi feito para o caso  $SU(2)$ , o que aproximou os resultados do modelo aos da ChPT.



# Apêndice A

## Convenções e notação

### A.1 Constantes

Neste trabalho empregamos o sistema natural de unidades, no qual  $\hbar = c = 1$ .

Para obter os resultados numéricos, usamos os seguintes valores para as constantes:

$$\hbar c = 197,326968 \text{ MeV}\cdot\text{fm} , \quad (\text{A.1})$$

$$M_{\pi^\pm} = 139,57 \text{ MeV} \text{ (massa dos píons carregados)} , \quad (\text{A.2})$$

$$M_{\pi^0} = 134,98 \text{ MeV} \text{ (massa do pión neutro)} , \quad (\text{A.3})$$

$$M_{K^\pm} = 493,68 \text{ MeV} \text{ (massa dos káons carregados)} , \quad (\text{A.4})$$

$$M_{K^0} = 497,61 \text{ MeV} \text{ (massa dos káons neutros)} , \quad (\text{A.5})$$

$$M_{K^*0} = 547,85 \text{ MeV} \text{ (massa do eta)} , \quad (\text{A.6})$$

$$F_\pi = 92,2 \text{ MeV} \text{ (constante de decaimento do pión)} . \quad (\text{A.7})$$

Se não foi feita menção específica sobre a massa utilizada é porque se empregou a do méson carregado.

## A.2 Matrizes de Pauli e de Gell-Mann

As matrizes de Pauli  $\tau_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , são dadas por

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

e implementam as relações de comutação

$$\left[ \frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\tau_k}{2}. \quad (\text{A.9})$$

As matrizes de Gell-Mann  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, 8$ , são dadas por

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

e satisfazem as seguintes relações de comutação

$$\left[ \frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2} \right] = if_{ijk} \frac{\lambda_k}{2}. \quad (\text{A.11})$$

# Apêndice B

## Crítica à determinação de $F_\pi$ atual

Nesta seção, mostramos que uma constante de decaimento do pión livre de contribuições eletromagnéticas não pode possuir uma precisão arbitrária. Para tanto, seguimos de perto os trabalhos de Gasser, Rusetsky e Scimemi [15], de 2003, e de Rusetsky [16], de 2009. É particularmente relevante a discussão encontrada na seção 2 de [16], em que se mostra que a existência de uma ambiguidade inerente ao processo de separação entre contribuições vindas das interações fortes e eletromagnéticas impede que determinemos  $F_\pi$  com uma precisão arbitrária. Posto de outro modo, podemos enxergar esta seção como uma possível resposta à seguinte questão: como a separação entre efeitos das interações forte e eletromagnética afeta a constante de decaimento do pión?

Nesta parte, é importante distinguirmos entre grandezas obtidas considerando a união das forças forte e eletromagnética e a puramente forte. Quando levamos em conta ambas QCD e QED, temos resultados dependentes dos acoplamentos  $g$  (QCD) e  $e$  (QED) e das massas dos quarks  $m_q$ . Ao passarmos para a teoria puramente forte, tomamos  $e = 0$  e os outros parâmetros passam a ter uma barra:  $\bar{g}$  e  $\bar{m}_q$ .

A separação entre as partes forte e eletromagnética contribuindo a uma grandeza é complicada porque lidamos com uma teoria quântica de campos, onde os parâmetros que a compõem são renormalizados. Nestas teorias, os observáveis físicos dependem destes parâmetros que, por sua vez, devido à renormalização, dependem da escala de renormalização  $\mu$ . É claro que, na teoria completa, os observáveis não variam com a escala de renormalização.

O problema da separação surge porque a renormalização afeta os parâmetros da teoria completa e da teoria puramente forte de modo distinto, isto é, os parâmetros

correm diferentemente em cada uma delas. No caso da teoria completa, pode-se fixar o modo como os parâmetros variam com a escala de renormalização por meio de experimentos, mas não se pode fazer o mesmo com a teoria puramente forte. Há diferentes modos de se lidar com isso [15, 16, 39, 40], mas, aqui, nós adotamos a abordagem dos trabalhos de Gasser, Rusetsky e Scimemi [15, 16]. Estes autores definem uma escala adicional,  $\mu_1$ , a escala de emparelhamento. Ela incorpora a impossibilidade de se fixar a variação dos parâmetros com a escala de renormalização  $\mu$  e é definida de modo que, no valor  $\mu = \mu_1$ , os parâmetros da teoria puramente forte coincidem com aqueles da teoria completa.

É uma tarefa bastante complexa extrair a dependência na escala de emparelhamento dos parâmetros da QCD, após incluir interações eletromagnéticas, além de não ser possível ter acesso a cálculos explícitos na QCD, nas energias consideradas. Por estes motivos, os autores de [15, 16] estudam a dependência na escala de emparelhamento em um modelo da QCD com o qual se pode efetuar cálculos perturbativos explícitos, o modelo sigma linear, cuja lagrangiana, incluindo interações eletromagnéticas é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \frac{1}{2} d_\mu \phi^T d^\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi^T \phi - \frac{g}{4} (\phi^T \phi)^2 + c\phi^0 + \frac{\delta m^2}{2} (Q\phi)^T (Q\phi) \\ & - \frac{\delta g}{2} (Q\phi)^T (Q\phi) (\phi^T \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

onde o campo  $\sigma$  e os campos dos píons são dados em  $\phi = (\phi^0, \boldsymbol{\phi})$  e o campo eletromagnético e o tensor eletromagnético são, respectivamente,  $A_\mu$  e  $F_{\mu\nu}$ . A derivada covariante é  $d^\mu \phi = \partial^\mu \phi + (F^\mu + eQA^\mu)\phi$ , em que  $F^\mu$  contém os campos vetoriais e axiais-vetoriais externos. O parâmetro de calibre é  $\xi$  e  $Q$  é

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

No modelo sigma linear acima, a fase espontaneamente quebrada ocorre quando  $m^2 > 0$ . A quebra explícita de simetria decorre de  $c \neq 0$  e os parâmetros  $\delta m^2$  e  $\delta g$  representam a quebra de simetria de isospin, sendo proporcionais a  $e^2$ .

Observamos agora como os parâmetros deste modelo variam com  $\mu_1$ . Tal informação decorre das equações do grupo de renormalização, que nos mostram como os parâmetros da teoria variam com a escala de renormalização. É a diferença entre estas equações na teoria completa e na teoria puramente forte que gera a dependência na escala de emparelhamento. As equações do grupo de renormalização

para os parâmetros  $m^2$  e  $g$  do modelo sigma linear, que faz o papel da teoria mais fundamental (QCD), incluindo interações eletromagnéticas, são

$$\mu \frac{dm^2}{d\mu} = \frac{1}{4\pi^2} [(3g + \delta g)m^2 + g\delta m^2] , \quad (\text{B.3})$$

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = \frac{1}{2\pi^2} (3g^2 + g\delta g) . \quad (\text{B.4})$$

Quando desligamos as interações eletromagnéticas, chegamos a

$$\mu \frac{d\bar{m}^2}{d\mu} = \frac{3}{4\pi^2} \bar{g}\bar{m}^2 , \quad (\text{B.5})$$

$$\mu \frac{d\bar{g}}{d\mu} = \frac{3}{2\pi^2} \bar{g}^2 . \quad (\text{B.6})$$

Apesar de a variação dos parâmetros ser determinada sem ambiguidades em ambas situações, o mesmo não pode ser dito dos valores dos parâmetros. Os resultados experimentais devem, obviamente, ser utilizados para efetuar uma comparação com a teoria completa. Assim, podemos fixar  $m^2(\mu)$  e  $g(\mu)$ . Em outras palavras, os resultados experimentais servem como uma condição de contorno para as equações (B.3) e (B.4). Mas não há como desligar as interações eletromagnéticas na natureza e obter os mesmos dados experimentais novamente. Não existe, portanto, uma condição de contorno para as expressões (B.5) e (B.6). Essa é a essência da ambiguidade na remoção dos efeitos eletromagnéticos: para a teoria completa, temos dados experimentais que fixam a maneira como os parâmetros variam com a escala de renormalização, mas, para a teoria puramente forte, não. Dessa forma, é necessário adotar uma convenção de maneira a obter a variação das grandezas obtidas apenas com a QCD com  $\mu_1$ . Os autores de [15] e [16] usam a convenção de que os parâmetros  $\bar{m}^2$  e  $\bar{g}$  recaem nos da teoria completa quando  $\mu = \mu_1$ . Resolvendo as equações diferenciais em (B.5) e (B.6) e usando as condições de contorno  $\bar{m}^2(\mu_1) = m^2(\mu_1)$  e  $\bar{g}(\mu_1) = g(\mu_1)$ , eles obtêm

$$m^2(\mu) = \bar{m}^2(\mu, \mu_1) + \frac{1}{4\pi^2} (m^2\delta g + g\delta m^2) \ln \frac{\mu}{\mu_1} , \quad (\text{B.7})$$

$$g(\mu) = \bar{g}(\mu, \mu_1) + \frac{1}{2\pi^2} g\delta g \ln \frac{\mu}{\mu_1} . \quad (\text{B.8})$$

Explicitando a dependência em  $e^2$  de  $\delta g$  e  $\delta m^2$ ,

$$\delta m^2 = e^2 m^2 c_m , \quad (\text{B.9})$$

$$\delta g = e^2 g c_g , \quad (\text{B.10})$$

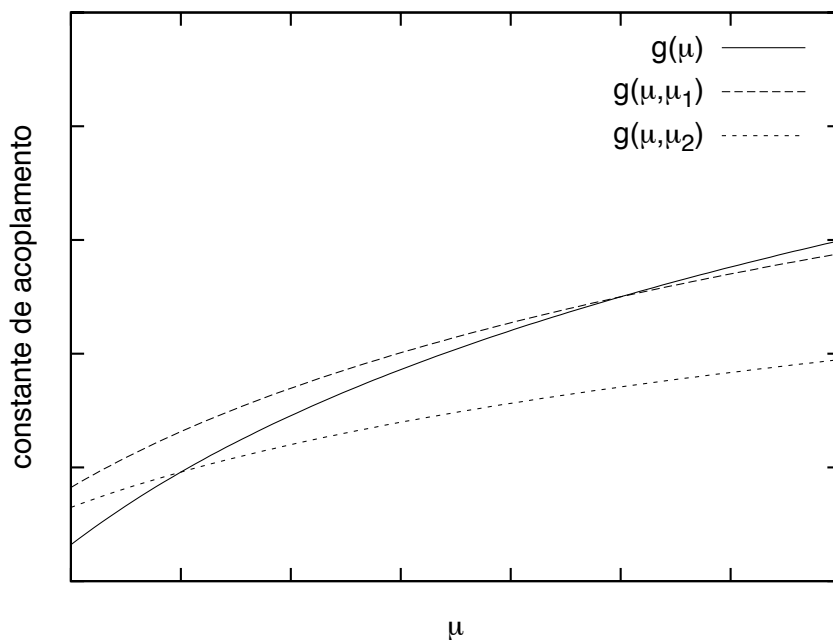


Figura B.1: Gráfico que ilustra a diferença entre as constantes de acoplamento na teoria completa e na puramente forte, assim como a ambiguidade presente na determinação desta última.

onde se assume que as constantes  $c_m$  e  $c_g$  são independentes de  $e$  na ordem considerada. Podemos escrever  $m^2(\mu)$  e  $g(\mu)$  como

$$m^2(\mu) = \bar{m}^2(\mu, \mu_1) \left[ 1 + (c_g + c_m) \frac{e^2 \bar{g}}{4\pi^2} \ln \frac{\mu}{\mu_1} \right], \quad (\text{B.11})$$

$$g(\mu) = \bar{g}(\mu, \mu_1) \left[ 1 + c_g \frac{e^2 \bar{g}}{2\pi^2} \ln \frac{\mu}{\mu_1} \right]. \quad (\text{B.12})$$

Na figura B.1, ilustramos como as constantes de acoplamento variam com a escala de renormalização  $\mu$ . Nota-se que a linha cheia é a constante de acoplamento na teoria completa,  $g(\mu)$ , e esta mesma constante na teoria puramente forte é  $\bar{g}(\mu, \mu_1)$ . Por definição, a linha cheia intercepta as curvas definidas por  $\bar{g}(\mu, \mu_1)$  e  $\bar{g}(\mu, \mu_2)$  quando  $\mu = \mu_1$  e  $\mu = \mu_2$ . Nestes pontos os parâmetros da teoria puramente forte coincidem com a completa.

Com as equações acima, vemos também que os parâmetros da teoria puramente

forte dependem da escala de emparelhamento  $\mu_1$  da seguinte forma

$$\mu_1 \frac{d\bar{g}}{d\mu_1} = \frac{e^2 c_g}{2\pi^2} \bar{g}^2, \quad (\text{B.13})$$

$$\mu_1 \frac{d\bar{m}^2}{d\mu_1} = \frac{e^2 \bar{g} (c_g + c_m)}{4\pi^2} \bar{m}^2. \quad (\text{B.14})$$

A dependência em  $\mu_1$  que aparece nos parâmetros da teoria livre de interações eletromagnéticas reflete-se nos parâmetros da teoria efetiva. Em [16], encontramos que a constante de decaimento do pión, no limite quiral (no modelo sigma linear isto se traduz em  $c = 0$ ), desprezando as interações eletromagnéticas, é dada por

$$F = \frac{\bar{m}}{\sqrt{\bar{g}}} \left( 1 - \frac{3\bar{g}}{16\pi^2} \ln \frac{2\bar{m}^2}{16\pi^2} + \frac{7\bar{g}}{32\pi^2} \right). \quad (\text{B.15})$$

Esta constante é independente de  $\mu$  ( $\mu \frac{dF}{d\mu} = 0$ ), mas depende de  $\mu_1$  ( $\mu_1 \frac{dF}{d\mu_1} \neq 0$ ). Em outras palavras, ainda que  $F$  não dependa da escala de renormalização da teoria completa, ela varia com a escala de emparelhamento entre as teorias forte e eletromagnética.

Como os parâmetros  $\delta g$  e  $\delta m^2$  (ou  $c_g$  e  $c_m$ ) são encontrados também na expressão para a diferença entre as massas dos pions carregados e neutro, é possível fazer uma estimativa numérica da variação de  $F$ , devida à mudança na escala  $\mu_1$ ,

$$F(\mu_1 = 0,5 \text{ GeV}) - F(\mu_1 = 1 \text{ GeV}) \simeq 0,1 \text{ MeV}. \quad (\text{B.16})$$

Portanto, como  $F_\pi$  depende de  $F$ , a dependência em  $\mu_1$  é encontrada também na constante de decaimento do pión. É necessário, então, incluir uma contribuição para a incerteza vinda da dependência com a escala, o que coloca um limite na precisão de  $F_\pi$ .





# Apêndice C

## As componentes $L$ e $S$

Neste apêndice, mostramos os resultados para as componentes  $L$  e  $S$  do fator de forma escalar, definidos como

$$\langle P^i | \bar{u}u + \bar{d}d | P^j \rangle = \delta^{ij} F_P^L(t) , \quad (\text{C.1})$$

$$\langle P^i | \bar{s}s | P^j \rangle = \delta^{ij} F_P^S(t) , \quad (\text{C.2})$$

onde  $L$  refere-se aos quarks leves  $u$  e  $d$  e  $S$ , ao quark  $s$ . Estas componentes relacionam-se com 0 e 8 do seguinte modo

$$F_P^L(t) = \frac{1}{3}(2F_P^0(t) + F_P^8(t)) , \quad (\text{C.3})$$

$$F_P^S(t) = \frac{1}{3}(F_P^0(t) - F_P^8(t)) . \quad (\text{C.4})$$

Além de darmos os resultados para estas componentes, nesta seção seguimos uma abordagem diferente: procedemos méson a méson.

### C.1 Píon

As componentes  $L$  e  $S$  do píon são dadas a seguir

$$F_\pi^L(t) = F_\pi^L(0) \left\{ 1 + \frac{1}{2F^2}(2t - M_\pi^2)\bar{J}_{\pi\pi}(t) + \frac{t}{4F^2}\bar{J}_{KK}(t) + \frac{M_\pi^2}{18F^2}\bar{J}_{\eta\eta}(t) + \frac{4t}{F^2} \left[ 2L_4^r + L_5^r - \frac{1}{256\pi^2} \left( 4 \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} + \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} + 5 \right) \right] \right\} , \quad (\text{C.5})$$

onde

$$F_{\pi}^L(0) = 2B \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ \frac{8}{9} M_{\pi}^2 + 2M_{\pi}^2 \ln \frac{M_{\pi}^2}{\mu^2} - \frac{4}{9} M_K^2 \ln \frac{M_{\eta}^2}{\mu^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{16}{F^2} \left[ \left( \frac{3M_{\pi}^2}{2} + M_K^2 \right) (-L_4^r + 2L_6^r) + M_{\pi}^2 (-L_5^r + 2L_8^r) \right] \right\}. \quad (C.6)$$

O sanduíche do condensado estranho resulta em

$$F_{\pi}^S(t) = 2B \left\{ 8 \frac{M_{\pi}^2}{F^2} (-L_4^r + 2L_6^r) - \frac{M_{\pi}^2}{16\pi^2 F^2} \frac{1}{9} \left( 1 + \ln \frac{M_{\eta}^2}{\mu^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{t}{4F^2} \bar{J}_{KK}(t) + \frac{M_{\pi}^2}{9F^2} \bar{J}_{\eta\eta}(t) + \frac{4t}{F^2} \left[ L_4^r - \frac{1}{256\pi^2} \left( \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} + 1 \right) \right] \right\}. \quad (C.7)$$

neste caso não há como fatorar  $F_{\pi}^S(0)$ , pois o termo dominante é cancelado na subtração  $F_{\pi}^0(t) - F_{\pi}^8(t)$ .

Quando empregamos o modelo apresentado acima, obtemos

$$F_{\pi}^L(t) = 2B \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_{\pi}^2 \left[ 15 + tR^2 \left( \frac{2}{M_{\pi}^2 R^2} + \frac{59}{30} \right) \right] K_0(2M_{\pi}R) \right. \\ + M_{\pi}^2 \left[ \frac{20}{M_{\pi}R} + \frac{14}{3} M_{\pi}R + \frac{7}{15} tR^2 \left( \frac{17}{2M_{\pi}R} + M_{\pi}R \right) \right] K_1(2M_{\pi}R) \\ + M_K^2 \left[ 4 + \frac{tR^2}{2} \left( \frac{1}{M_K^2 R^2} + \frac{16}{15} \right) \right] K_0(2M_K R) \\ + M_K^2 \left[ \frac{5}{M_K R} + \frac{4}{3} M_K R + \frac{tR^2}{30} \left( \frac{31}{M_K R} + 4M_K R \right) \right] K_1(2M_K R) \\ + \frac{M_{\pi}^2}{9} \left( 1 + \frac{tR^2}{6} \right) K_0(2M_{\eta}R) \\ \left. + \frac{M_{\pi}^2}{27} \left[ 2M_{\eta}R + \frac{tR^2}{10} \left( \frac{5}{M_{\eta}R} + 2M_{\eta}R \right) \right] K_1(2M_{\eta}R) \right\}, \quad (C.8)$$

e para a componente  $S$

$$F_{\pi}^S(t) = 2B \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_K^2 \left[ 4 + \frac{tR^2}{2} \left( \frac{1}{M_K^2 R^2} + \frac{16}{15} \right) \right] K_0(2M_K R) \right. \\ + M_K^2 \left[ \frac{5}{M_K R} + \frac{4}{3} M_K R + \frac{tR^2}{30} \left( \frac{31}{M_K R} + 4M_K R \right) \right] K_1(2M_K R) \\ + \frac{2M_{\pi}^2}{9} \left( 1 + \frac{tR^2}{6} \right) K_0(2M_{\eta}R) \\ \left. + \frac{2M_{\pi}^2}{27} \left[ 2M_{\eta}R + \frac{tR^2}{10} \left( \frac{5}{M_{\eta}R} + 2M_{\eta}R \right) \right] K_1(2M_{\eta}R) \right\}. \quad (C.9)$$

Como no caso do pión, o termo dominante da componente  $S$  é nula, temos apenas uma relação de consistência para apresentar,

$$\begin{aligned}
F_\pi^L(t) \Rightarrow 1 = & \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left[ M_\pi^2 \left( \frac{20}{M_\pi R} + \frac{14}{3} M_\pi R \right) K_1(2M_\pi R) + 15M_\pi^2 K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + M_K^2 \left( \frac{5}{M_K R} + \frac{4}{3} M_K R \right) K_1(2M_K R) + 4M_K^2 K_0(2M_K R) \\
& \left. + \frac{2M_\pi^2}{27} M_\eta R K_1(2M_\eta R) + \frac{M_\pi^2}{9} K_0(2M_\eta R) \right]. \quad (C.10)
\end{aligned}$$

Os raios quadráticos, por sua vez, são

$$\begin{aligned}
\langle r^2 \rangle_\pi^L = & \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ \frac{7}{30} M_\pi R (17 + 2M_\pi^2 R^2) K_1(2M_\pi R) + \left( 2 + \frac{59}{30} M_\pi^2 R^2 \right) K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + \frac{M_K R}{30} (31 + 4M_K^2 R^2) K_1(2M_K R) + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{16}{15} M_K^2 R^2 \right) K_0(2M_K R) \\
& \left. + \frac{M_\pi^2 R}{270 M_\eta} (5 + 2M_\eta^2 R^2) K_1(2M_\eta R) + \frac{M_\pi^2 R^2}{54} K_0(2M_\eta R) \right], \quad (C.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle r^2 \rangle_\pi^S = & \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ \frac{M_K R}{30} (31 + 4M_K^2 R^2) K_1(2M_K R) \right. \\
& + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{16}{15} M_K^2 R^2 \right) K_0(2M_K R) \\
& \left. + \frac{M_\pi^2 R}{135 M_\eta} (5 + 2M_\eta^2 R^2) K_1(2M_\eta R) + \frac{M_\pi^2 R^2}{27} K_0(2M_\eta R) \right]. \quad (C.12)
\end{aligned}$$

Na tabela que segue estão os raios quadráticos médios para todas as componentes do pión.

Tabela C.1: Valores para os raios quadráticos médios para  $F_\pi^0(t)$ ,  $F_\pi^8(t)$  e  $F_\pi^L(t)$ .

| $\langle r^2 \rangle_\pi^0$ (fm <sup>2</sup> ) | $\langle r^2 \rangle_\pi^8$ (fm <sup>2</sup> ) | $\langle r^2 \rangle_\pi^L$ (fm <sup>2</sup> ) |
|--|--|--|
| 0,536  | 0,490  | 0,523  |

Agora apresentamos a parte perturbativa. O raio para a componente  $L$  é dado

por

$$\begin{aligned}
R_\pi^L = & \frac{1}{4\pi F} \sqrt{\frac{25}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \right. \\
& \cdot \left[ M_\pi^2 \left( -\frac{206}{27} + \frac{44}{9}\gamma + 5 \ln \left( \frac{M_\pi}{4\pi F} \sqrt{\frac{25}{2}} \right) - \frac{1}{9} \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{\frac{25}{2}} \right) \right) \right. \\
& \left. \left. + M_K^2 \left( \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{\frac{25}{2}} \right) + \gamma - \frac{11}{6} \right) \right] + \mathcal{O}(M^4) \right\}. \quad (C.13)
\end{aligned}$$

Na tabela abaixo colocamos os raios aproximados para todas as componentes.

Tabela C.2: Valores para os raios de corte das componentes 0, 8 e L com a comparação com o caso  $SU(2)$ . Na primeira linha está o valor exato, seguido pelo expandido até  $\mathcal{O}(M_P^2)$  e  $\mathcal{O}(M_P^0)$ , acompanhados da diferença relativa entre os valores aproximado e exato.

| $SU(3)$            | 0     | 8     | L     | $SU(2) \pi$ |
|--------------------|-------|-------|-------|-------------|
| $R_\pi$            | 0,548 | 0,473 | 0,527 | 0,503       |
| $R_\pi^{(2)}$ (fm) | 0,526 | 0,478 | 0,515 | 0,500       |
| Dif. rel.          | -4,0% | 1,1%  | -2,3% | 0,6%        |
| $R_\pi^{(0)}$ (fm) | 0,658 | 0,465 | 0,601 | 0,537       |
| Dif. rel.          | 20%   | -1,7% | 14%   | 7,4%        |

A expansão dos raios quadráticos médios dos resultados da ChPT resulta em

$$\langle r^2 \rangle_\pi^L = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ 64\pi^2 (2L_4^r + L_5^r) - \frac{4}{3} + \frac{M_\pi^2}{108M_\eta^2} - \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} - \frac{1}{4} \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} \right], \quad (C.14)$$

$$\langle r^2 \rangle_\pi^S = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ 64\pi^2 L_4^r - \frac{1}{4} + \frac{M_\pi^2}{54M_\eta^2} - \frac{1}{4} \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} \right] \quad (C.15)$$

e com o modelo temos

$$\langle r^2 \rangle_\pi^L = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left( \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\gamma + \frac{M_\pi^2}{108M_\eta^2} - 2 \ln M_\pi R - \frac{1}{2} \ln M_K R \right), \quad (C.16)$$

$$\langle r^2 \rangle_\pi^S = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left( \frac{31}{60} - \frac{\gamma}{2} + \frac{M_\pi^2}{54M_\eta^2} - \frac{1}{2} \ln M_K R \right). \quad (C.17)$$

## C.2 Káon

Para o caso do káon, os fatores de forma para as componentes  $L$  e  $S$  são

$$F_K^L(t) = F_K^L(0) \left\{ 1 + \frac{3t}{4F^2} \bar{J}_{\pi\pi}(t) + \frac{3t}{4F^2} \bar{J}_{KK}(t) - \frac{1}{F^2} \left( \frac{2}{9} M_K^2 - \frac{t}{4} \right) \bar{J}_{\eta\eta}(t) \right. \\ \left. + \frac{4t}{F^2} \left[ 4L_4^r + L_5^r - \frac{1}{256\pi^2} \left( 3 \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} + 3 \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} + \ln \frac{M_\eta^2}{\mu^2} + 7 \right) \right] \right\}, \quad (\text{C.18})$$

onde

$$F_K^L(0) = B \left\{ 1 + \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left[ \frac{2}{9} M_K^2 + \frac{2}{9} \left( 3M_K^2 - \frac{M_\pi^2}{2} \right) \ln \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{8}{F^2} \left[ (M_\pi^2 + 6M_K^2) (-L_4^r + 2L_6^r) + 2M_K^2 (-L_5^r + 2L_8^r) \right] \right\}. \quad (\text{C.19})$$

A componente estranha é

$$F_K^S(t) = F_K^S(0) \left\{ 1 + \frac{3t}{4F^2} \bar{J}_{KK}(t) - \frac{1}{F^2} \left( \frac{4}{9} M_K^2 - \frac{t}{2} \right) \bar{J}_{\eta\eta}(t) \right. \\ \left. + \frac{4t}{F^2} \left[ 2L_4^r + L_5^r - \frac{1}{256\pi^2} \left( 3 \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} + 2 \ln \frac{M_\eta^2}{\mu^2} + 5 \right) \right] \right\}, \quad (\text{C.20})$$

onde

$$F_K^S(0) = B \left\{ 1 + \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left[ \frac{4}{9} M_K^2 + \frac{1}{9} (8M_K^2 - M_\pi^2) \ln \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{8}{F^2} \left[ (M_\pi^2 + 4M_K^2) (-L_4^r + 2L_6^r) + 2M_K^2 (-L_5^r + 2L_8^r) \right] \right\}. \quad (\text{C.21})$$

A aplicação do modelo resulta em

$$\begin{aligned}
F_K^L(t) = & B \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_\pi^2 \left[ 12 + tR^2 \left( \frac{3}{2M_\pi^2 R^2} + \frac{8}{5} \right) \right] K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + M_\pi^2 \left[ \frac{15}{M_\pi R} + 4M_\pi R + tR^2 \left( \frac{31}{10M_\pi R} + \frac{2M_\pi R}{5} \right) \right] K_1(2M_\pi R) \\
& + M_K^2 \left[ 12 + tR^2 \left( \frac{3}{2M_K^2 R^2} + \frac{8}{5} \right) \right] K_0(2M_K R) \\
& + M_K^2 \left[ \frac{15}{M_K R} + 4M_K R + tR^2 \left( \frac{31}{10M_K R} + \frac{2M_K R}{5} \right) \right] K_1(2M_K R) \\
& + M_\eta^2 \left[ 4 \left( 1 - \frac{1}{9} \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \right) + tR^2 \left( \frac{1}{2M_\eta^2 R^2} + \frac{8}{15} - \frac{2}{27} \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \right) \right] K_0(2M_\eta R) \\
& + M_\eta^2 \left[ \frac{5}{M_\eta R} + \frac{4}{3} M_\eta R \left( 1 - \frac{2M_K^2}{9M_\eta^2} \right) + tR^2 \left( \frac{31}{30M_\eta R} + \frac{2M_\eta R}{15} \right) \right. \\
& \left. + tR^2 \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \left( -\frac{2}{27M_\eta R} - \frac{4M_\eta R}{135} \right) \right] K_1(2M_\eta R) \left. \right\} \quad (C.22)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
F_K^S(t) = & B \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_K^2 \left[ 12 + tR^2 \left( \frac{3}{2M_K^2 R^2} + \frac{8}{5} \right) \right] K_0(2M_K R) \right. \\
& + M_K^2 \left[ \frac{15}{M_K R} + 4M_K R + tR^2 \left( \frac{31}{10M_K R} + \frac{2M_K R}{5} \right) \right] K_1(2M_K R) \\
& + M_\eta^2 \left[ 8 \left( 1 - \frac{1}{9} \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \right) + tR^2 \left( \frac{1}{M_\eta^2 R^2} + \frac{16}{15} - \frac{4}{27} \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \right) \right] K_0(2M_\eta R) \\
& + M_\eta^2 \left[ \frac{10}{M_\eta R} + \frac{8}{3} M_\eta R \left( 1 - \frac{2M_K^2}{9M_\eta^2} \right) + tR^2 \left( \frac{31}{15M_\eta R} + \frac{4M_\eta R}{15} \right) \right. \\
& \left. + tR^2 \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \left( -\frac{4}{27M_\eta R} - \frac{8M_\eta R}{135} \right) \right] K_1(2M_\eta R) \left. \right\} . \quad (C.23)
\end{aligned}$$

Para obtermos os raios, fazemos uso das relações de consistência

$$\begin{aligned}
F_K^L(t) \Rightarrow 1 = & \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_\pi^2 \left( \frac{15}{M_\pi R} + 4M_\pi R \right) K_1(2M_\pi R) + 12M_\pi^2 K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + M_K^2 \left( \frac{15}{M_K R} + 4M_K R \right) K_1(2M_K R) + 12M_K^2 K_0(2M_K R) \\
& + M_\eta^2 \left[ \frac{5}{M_\eta R} + \frac{4}{3}M_\eta R \left( 1 - \frac{2M_K^2}{9M_\eta^2} \right) \right] K_1(2M_\eta R) \\
& \left. + 4M_\eta^2 \left( 1 - \frac{1}{9} \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \right) K_0(2M_\eta R) \right\} \quad (C.24)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
F_K^S(t) \Rightarrow 1 = & \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_K^2 \left( \frac{15}{M_K R} + 4M_K R \right) K_1(2M_K R) + 12M_K^2 K_0(2M_K R) \right. \\
& + M_\eta^2 \left[ \frac{10}{M_\eta R} + \frac{8}{3}M_\eta R \left( 1 - \frac{2M_K^2}{9M_\eta^2} \right) \right] K_1(2M_\eta R) \\
& \left. + 8M_\eta^2 \left( 1 - \frac{1}{9} \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \right) K_0(2M_\eta R) \right\} . \quad (C.25)
\end{aligned}$$

Com o uso do modelo, extraímos os raios quadráticos médios dados por

$$\begin{aligned}
\langle r^2 \rangle_K^L = & \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_\pi R \left( \frac{31}{10} + \frac{2M_\pi^2 R^2}{5} \right) K_1(2M_\pi R) + \left( \frac{3}{2} + \frac{8}{5}M_\pi^2 R^2 \right) K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + M_K R \left( \frac{31}{10} + \frac{2M_\pi^2 R^2}{5} \right) K_1(2M_K R) + \left( \frac{3}{2} + \frac{8}{5}M_K^2 R^2 \right) K_0(2M_K R) \\
& + M_\eta R \left[ \left( \frac{31}{30} + \frac{2M_\eta^2 R^2}{15} \right) - \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \left( \frac{2}{27} + \frac{4M_\eta^2 R^2}{135} \right) \right] K_1(2M_\eta R) \\
& \left. + \left[ \frac{1}{2} + M_\eta^2 R^2 \left( \frac{8}{15} - \frac{2}{27} \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \right) \right] K_0(2M_\eta R) \right\} \quad (C.26)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle r^2 \rangle_K^S = & \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_K R \left( \frac{31}{10} + \frac{2M_\pi^2 R^2}{5} \right) K_1(2M_K R) \right. \\
& + \left( \frac{3}{2} + \frac{8}{5}M_K^2 R^2 \right) K_0(2M_K R) \\
& + M_\eta R \left[ \left( \frac{31}{15} + \frac{4M_\eta^2 R^2}{15} \right) - \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \left( \frac{4}{27} + \frac{8M_\eta^2 R^2}{135} \right) \right] K_1(2M_\eta R) \\
& \left. + \left[ 1 + M_\eta^2 R^2 \left( \frac{16}{15} - \frac{4}{27} \frac{M_K^2}{M_\eta^2} \right) \right] K_0(2M_\eta R) \right\} . \quad (C.27)
\end{aligned}$$

Na tabela a seguir (C.3) encontramos os valores para os raios quadráticos médios

Tabela C.3: Valores para os raios quadráticos médios para  $F_\pi^0(t)$ ,  $F_\pi^8(t)$ ,  $F_\pi^L(t)$  e  $F_\pi^S(t)$ .

| $\langle r^2 \rangle_K^0$ (fm <sup>2</sup> ) | $\langle r^2 \rangle_K^8$ (fm <sup>2</sup> ) | $\langle r^2 \rangle_K^L$ (fm <sup>2</sup> ) | $\langle r^2 \rangle_K^S$ (fm <sup>2</sup> ) |
|--|--|--|--|
| 0,354  | -0,128                                       | 0,484  | 0,210  |

Se efetuamos expansões dos resultados obtidos com o modelo, podemos extrair os raios de corte. Para a componente  $L$ , temos

$$\begin{aligned}
R_K^L = & \frac{1}{4\pi F} \sqrt{\frac{35}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ M_\pi^2 \left( -\frac{11}{2} + 3\gamma + 3 \ln \left( \frac{M_\pi}{4\pi F} \sqrt{\frac{35}{2}} \right) \right) \right. \right. \\
& + M_K^2 \left( -\frac{305}{54} + \frac{31}{9} \gamma + 3 \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{\frac{35}{2}} \right) + \frac{4}{9} \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{\frac{35}{2}} \right) \right) \\
& \left. \left. + M_\eta^2 \left( -\frac{11}{6} + \gamma + \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{\frac{35}{2}} \right) \right) \right] + \mathcal{O}(M^4) \right\}. \quad (C.28)
\end{aligned}$$

Para a componente  $S$ ,

$$\begin{aligned}
R_K^S = & \frac{1}{4\pi F} \sqrt{\frac{35}{2}} \left\{ 1 \right. \\
& + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ M_K^2 \left( -\frac{313}{54} + \frac{35}{9} \gamma + 3 \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{\frac{35}{2}} \right) + \frac{8}{9} \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{\frac{35}{2}} \right) \right) \right. \\
& \left. \left. + M_\eta^2 \left( -\frac{11}{3} + 2\gamma + 2 \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{\frac{35}{2}} \right) \right) \right] + \mathcal{O}(M^4) \right\}. \quad (C.29)
\end{aligned}$$

Na tabela que segue, C.4, temos os resultados (aproximações e valores exatos) para todas as componentes do fator de forma do káon



Tabela C.4: Valores para os raios de corte das componentes 0, 8,  $L$  e  $S$ . Na primeira linha está o valor exato, seguido pelo expandido até  $\mathcal{O}(M_P^2)$  e  $\mathcal{O}(M_P^0)$ , acompanhados da diferença relativa entre os valores aproximado e exato.

| $SU(3)$          | 0     | 8     | L     | S     |
|------------------|-------|-------|-------|-------|
| $R_K$ (fm)       | 0,480 | 0,282 | 0,540 | 0,417 |
| $R_K^{(2)}$ (fm) | 0,470 | 0,223 | 0,531 | 0,340 |
| Dif. rel.        | -2,1% | -21%  | -1,7% | -19%  |
| $R_K^{(0)}$ (fm) | 0,658 | 0,465 | 0,711 | 0,601 |
| Dif. rel.        | 38%   | 65%   | 32%   | 44%   |

No caso dos raios quadráticos médios a expansão resulta em

$$\langle r^2 \rangle_K^L = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ 64\pi^2 (4L_4^r + L_5^r) - \frac{7}{4} - \frac{M_K^2}{27M_\eta^2} - \frac{1}{4} \left( 3 \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} + 3 \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} + \ln \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (\text{C.30})$$

$$\langle r^2 \rangle_K^S = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ 64\pi^2 (2L_4^r + L_5^r) - \frac{5}{4} - \frac{2M_K^2}{27M_\eta^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} + \ln \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (\text{C.31})$$

para a ChPT. E

$$\langle r^2 \rangle_K^L = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ \frac{217}{60} - \frac{7}{2}\gamma - \frac{M_K^2}{27M_\eta^2} - \frac{1}{2} (3 \ln M_\pi R + 3 \ln M_K R + \ln M_\eta R) \right], \quad (\text{C.32})$$

$$\langle r^2 \rangle_K^S = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ \frac{31}{12} - \frac{5}{2}\gamma - \frac{2M_K^2}{27M_\eta^2} - \frac{3}{2} \ln M_K R - \ln M_\eta R \right], \quad (\text{C.33})$$

para o modelo.

### C.3 Eta

O fator de forma na componente  $L$  é dado por

$$F_{\eta}^L(t) = F_{\eta}^L(0) \left\{ 1 + \frac{3M_{\pi}^2}{2F^2} \bar{J}_{\pi\pi}(t) + \frac{1}{2F^2} \left[ \frac{9t}{2} - (3M_{\eta}^2 + M_{\pi}^2) \right] \bar{J}_{KK}(t) \right. \\ \left. + \frac{1}{6F^2} (4M_{\eta}^2 - M_{\pi}^2) \bar{J}_{\eta\eta}(t) + \frac{4t}{F^2} \left[ 6L_4^r + L_5^r - \frac{1}{256\pi^2} \left( 9 \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} + 9 \right) \right] \right\}, \quad (\text{C.34})$$

onde

$$F_{\eta}^L(0) = \frac{2B}{3} \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ \frac{5}{3} M_{\eta}^2 - \frac{5}{3} M_{\pi}^2 - 6M_{\pi}^2 \ln \frac{M_{\pi}^2}{\mu^2} + 8M_K^2 \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{3} (5M_{\eta}^2 - M_{\pi}^2) \ln \frac{M_{\eta}^2}{\mu^2} \right] + \frac{16}{F^2} \left[ \left( 5M_K^2 - \frac{M_{\pi}^2}{2} \right) (-L_4^r + 2L_6^r) - M_{\eta}^2 L_5^r \right. \right. \\ \left. \left. - 8(M_K^2 - M_{\pi}^2) L_7^r + 2M_{\pi}^2 L_8^r \right] \right\}. \quad (\text{C.35})$$

Para a componente  $S$ , temos

$$F_{\eta}^S(t) = F_{\eta}^S(0) \left\{ 1 + \frac{1}{4F^2} \left[ \frac{9t}{2} - (3M_{\eta}^2 + M_{\pi}^2) \right] \bar{J}_{KK}(t) + \frac{1}{6F^2} (4M_{\eta}^2 - M_{\pi}^2) \bar{J}_{\eta\eta}(t) \right. \\ \left. + \frac{4t}{F^2} \left[ \frac{3}{2} L_4^r + L_5^r - \frac{1}{256\pi^2} \left( \frac{9}{2} \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} + \frac{9}{2} \right) \right] \right\}, \quad (\text{C.36})$$

onde

$$F_{\eta}^S(0) = \frac{4B}{3} \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ \frac{M_{\eta}^2}{6} + \frac{5M_{\pi}^2}{6} + 4M_K^2 \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{3} (8M_{\eta}^2 - M_{\pi}^2) \ln \frac{M_{\eta}^2}{\mu^2} \right] + \frac{16}{F^2} \left[ \left( 2M_K^2 + \frac{M_{\pi}^2}{4} \right) (-L_4^r + 2L_6^r) - M_{\eta}^2 L_5^r \right. \right. \\ \left. \left. + 4(M_K^2 - M_{\pi}^2) L_7^r + 4 \left( M_K^2 - \frac{M_{\pi}^2}{2} \right) L_8^r \right] \right\}. \quad (\text{C.37})$$

Por meio do procedimento de corte e voltando ao espaço dos momentos conse-

guimos

$$\begin{aligned}
F_\eta^L(t) = & \frac{2B}{3} \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ \frac{M_\pi^2}{2} (6 + tR^2) K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + \frac{M_\pi^2}{5} \left[ 10M_\pi R + tR^2 \left( \frac{5}{2M_\pi R} + M_\pi R \right) \right] K_1(2M_\pi R) \\
& + M_K^2 \left[ 32 + tR^2 \left( \frac{9}{2M_K^2 R^2} + \frac{62}{15} \right) \right] K_0(2M_K R) \\
& + M_K^2 \left[ \frac{45}{M_K R} + \frac{28M_K R}{3} + \frac{7tR^2}{30} \left( \frac{37}{M_K R} + 4M_K R \right) \right] K_1(2M_K R) \\
& + \frac{1}{18} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) (6 + tR^2) K_0(2M_\eta R) \\
& \left. + \frac{M_\eta R}{90} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) \left[ 20 + tR^2 \left( \frac{5}{M_\eta^2 R^2} + 2 \right) \right] K_1(2M_\eta R) \right\} \quad (C.38)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
F_\eta^S(t) = & \frac{4B}{3} \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_K^2 \left[ 16 + tR^2 \left( \frac{9}{4M_K^2 R^2} + \frac{31}{15} \right) \right] K_0(2M_K R) \right. \\
& + M_K^2 \left[ \frac{45}{2M_K R} + \frac{14M_K R}{3} + \frac{7tR^2}{60} \left( \frac{37}{M_K R} + 4M_K R \right) \right] K_1(2M_K R) \\
& + \frac{1}{18} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) (6 + tR^2) K_0(2M_\eta R) \\
& \left. + \frac{M_\eta R}{90} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) \left[ 20 + tR^2 \left( \frac{5}{M_\eta^2 R^2} + 2 \right) \right] K_1(2M_\eta R) \right\} . \quad (C.39)
\end{aligned}$$

As relações de consistência para as componentes  $L$  e  $S$  do eta são

$$\begin{aligned}
F_\eta^L(t) \Rightarrow 1 = & \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ 2M_\pi^3 R K_1(2M_\pi R) + 3M_\pi^2 K_0(2M_\pi R) \right. \\
& + M_K^2 \left( \frac{45}{M_K R} + \frac{28M_K R}{3} \right) K_1(2M_K R) + 32M_K^2 K_0(2M_K R) \\
& \left. + \frac{2M_\eta R}{9} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) K_1(2M_\eta R) + \frac{1}{3} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) K_0(2M_\eta R) \right\} \quad (C.40)
\end{aligned}$$

e

$$F_\eta^S(t) \Rightarrow 1 = \frac{1}{16\pi^2 F^2} \left\{ M_K^2 \left( \frac{45}{2M_K R} + \frac{14M_K R}{3} \right) K_1(2M_K R) + 16M_K^2 K_0(2M_K R) \right. \\ \left. + \frac{2M_\eta R}{9} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) K_1(2M_\eta R) + \frac{1}{3} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) K_0(2M_\eta R) \right\}. \quad (C.41)$$

Os raios quadráticos médios, por sua vez, podem ser escritos como

$$\langle r^2 \rangle_\eta^L = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ M_\pi R \left( \frac{1}{2} + \frac{M_\pi^2 R^2}{5} \right) K_1(2M_\pi R) + \frac{M_\pi^2 R^2}{2} K_0(2M_\pi R) \right. \\ \left. + \frac{7M_K R}{30} (37 + 4M_K^2 R^2) K_1(2M_K R) + \left( \frac{9}{2} + \frac{62}{15} M_K^2 R^2 \right) K_0(2M_K R) \right. \\ \left. + \frac{1}{18} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) R^2 K_0(2M_\eta R) \right. \\ \left. + \frac{M_\eta R}{90} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) R^2 \left( \frac{5}{M_\eta^2 R^2} + 2 \right) K_1(2M_\eta R) \right] \quad (C.42)$$

e

$$\langle r^2 \rangle_\eta^S = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ \frac{7M_K R}{60} (37 + 4M_K^2 R^2) K_1(2M_K R) + \left( \frac{9}{4} + \frac{31}{15} M_K^2 R^2 \right) K_0(2M_K R) \right. \\ \left. + \frac{1}{18} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) R^2 K_0(2M_\eta R) \right. \\ \left. + \frac{M_\eta R}{90} (4M_\eta^2 - M_\pi^2) R^2 \left( \frac{5}{M_\eta^2 R^2} + 2 \right) K_1(2M_\eta R) \right]. \quad (C.43)$$

A seguir, na tabela C.5, encontramos os valores para o raios quadráticos médios para o eta.

Tabela C.5: Valores para os raios quadráticos médios para os fatores de forma do eta.

| $\langle r^2 \rangle_\eta^0$ (fm <sup>2</sup> ) | $\langle r^2 \rangle_\eta^8$ (fm <sup>2</sup> ) | $\langle r^2 \rangle_\eta^L$ (fm <sup>2</sup> ) | $\langle r^2 \rangle_\eta^S$ (fm <sup>2</sup> ) |
|---|---|---|---|
| 0,248   | 0,156   | 0,320   | 0,206   |

A expansão das relações de consistência fornece os raios de corte

$$\begin{aligned}
R_\eta^L = & \frac{1}{4\pi F} \sqrt{\frac{45}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ M_\pi^2 \left( \frac{5}{9} - \frac{5}{3}\gamma - 3 \ln \left( \frac{M_\pi}{4\pi F} \sqrt{\frac{45}{2}} \right) \right. \right. \right. \\
& + \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{\frac{45}{2}} \right) + \frac{1}{3} \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{\frac{45}{2}} \right) \Bigg) \\
& + M_K^2 \left( -\frac{33}{2} + 9\gamma + 9 \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{\frac{45}{2}} \right) \right) \\
& \left. \left. \left. + M_\eta^2 \left( -\frac{5}{9} + \frac{5}{3}\gamma + 3 \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{\frac{45}{2}} \right) - \frac{4}{3} \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{\frac{45}{2}} \right) \right) \right] + \mathcal{O}(M^4) \right\}
\end{aligned} \tag{C.44}$$

e

$$\begin{aligned}
R_\eta^S = & \frac{1}{4\pi F} \sqrt{\frac{45}{4}} \left\{ 1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} \left[ M_\pi^2 \left( -\frac{5}{18} + \frac{5}{6}\gamma + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{\frac{45}{4}} \right) \right. \right. \right. \\
& + \frac{1}{3} \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{\frac{45}{4}} \right) \Bigg) \\
& + M_K^2 \left( -\frac{33}{4} + \frac{9}{2}\gamma + \frac{9}{2} \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{\frac{45}{4}} \right) \right) \\
& \left. \left. \left. + M_\eta^2 \left( -\frac{1}{18} + \frac{1}{6}\gamma + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{M_K}{4\pi F} \sqrt{\frac{45}{4}} \right) - \frac{4}{3} \ln \left( \frac{M_\eta}{4\pi F} \sqrt{\frac{45}{4}} \right) \right) \right] + \mathcal{O}(M^4) \right\} .
\end{aligned} \tag{C.45}$$

Na tabela C.6 temos os raios de corte para o eta, aproximados e exato.

A expansão dos resultados para os fatores de forma obtidos com a ChPT produz

$$\langle r^2 \rangle_\eta^L = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ 64\pi^2 (6L_4^r + L_5^r) - \frac{20}{9} - \frac{M_\pi^2}{36M_\eta^2} - \frac{9}{4} \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} \right], \tag{C.46}$$

$$\langle r^2 \rangle_\eta^S = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left[ 64\pi^2 \left( \frac{3}{2} L_4^r + L_5^r \right) - \frac{85}{72} - \frac{M_\pi^2}{36M_\eta^2} - \frac{9}{8} \ln \frac{M_K^2}{\mu^2} \right]. \tag{C.47}$$

Enquanto que o modelo resulta em

$$\langle r^2 \rangle_\eta^L = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left( \frac{421}{90} - \frac{9}{2}\gamma - \frac{M_\pi^2}{36M_\eta^2} - \frac{9}{2} \ln M_K R \right), \tag{C.48}$$

$$\langle r^2 \rangle_\eta^S = \frac{6}{16\pi^2 F^2} \left( \frac{817}{360} - \frac{9}{4}\gamma - \frac{M_\pi^2}{36M_\eta^2} - \frac{9}{4} \ln M_K R \right). \tag{C.49}$$

Tabela C.6: Valores para os raios de corte das componentes 0, 8 e L. Na primeira linha está o valor exato, seguido pelo expandido até  $\mathcal{O}(M_P^2)$  e  $\mathcal{O}(M_P^0)$ , acompanhados da diferença relativa entre os valores aproximado e exato.

| $SU(3)$             | 0      | 8     | L     | S     |
|---------------------|--------|-------|-------|-------|
| $R_\eta$            | 0,449  | 0,356 | 0,510 | 0,409 |
| $R_\eta^{(2)}$ (fm) | 0,420  | 0,367 | 0,584 | 0,361 |
| Dif. rel.           | -6,5 % | 3,1 % | 15%   | -12%  |
| $R_\eta^{(0)}$ (fm) | 0,658  | 0,465 | 0,806 | 0,570 |
| Dif. rel.           | 47%    | 31%   | 58%   | 39%   |

# Apêndice D

## Integrais de *loop*

Nesta seção, nós discutimos as integrais de *loop* usadas no capítulo 2 em mais detalhes. A notação utilizada é

$$\langle P(l) \rangle = \int \frac{d^d l}{i(2\pi)^d} P(l) , \quad (\text{D.1})$$

onde  $d$  é a dimensão do espaço-tempo.

A integral com apenas um propagador é escrita como

$$T_M = \left\langle \frac{1}{M^2 - l^2} \right\rangle = -\frac{M^2}{16\pi^2} \left( \frac{M^2}{4\pi} \right)^w \frac{\Gamma(-w)}{1+w} , \quad (\text{D.2})$$

onde  $w = \frac{d}{2} - 2$ . Tomando  $w \rightarrow 0$ , temos

$$\lim_{w \rightarrow 0} T_M = M^2 \left[ 2L + \frac{1}{16\pi^2} \ln \left( \frac{M^2}{\mu^2} \right) \right] . \quad (\text{D.3})$$

A constante  $\mu$  é uma escala de massa e

$$L = \frac{\mu^{d-4}}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{d-4} - \frac{1}{2} [\ln(4\pi) - \gamma + 1] \right\} . \quad (\text{D.4})$$

Outra integral empregada é dada por

$$\begin{aligned} J^{\pi\gamma}(k^2) &= \left\langle \frac{1}{M^2 - (k-l)^2} \frac{1}{-l^2} \right\rangle = \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{M^2}{4\pi} \right)^w \Gamma(-w) \int_0^1 dx (1-x)^w (1-zx)^w \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{M^2}{4\pi} \right)^w \frac{\Gamma(-w)}{1+w} F(-w, 1; 2+w; z) , \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

onde a função hipergeométrica é definida como (equação 15.3.1 de [36])

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dx x^{b-1} (1-x)^{c-b-1} (1-zx)^{-a} . \quad (\text{D.6})$$

A variável  $z$  é definida como  $z = k^2/M^2$ . Para  $z = 1$ , nós chegamos a (equação 15.1.20 de [36])

$$J^{\pi\gamma}(M^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{M^2}{4\pi} \right)^w \frac{\Gamma(-w)}{1+2w} \quad (\text{D.7})$$

e

$$\lim_{w \rightarrow 0} J^{\pi\gamma}(M^2) = -2L + \frac{1}{16\pi^2} \left( 1 - \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right), \quad (\text{D.8})$$

A integral de *loop*  $J^{\pi\gamma}(k^2)$  pode também ser escrita como (equação 15.3.6 de [36])

$$J^{\pi\gamma}(k^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{M^2}{4\pi} \right)^w \frac{\Gamma(-w)}{1+w} \left[ \frac{1+w}{1+2w} F(-w, 1; -2w; 1-z) \right. \\ \left. + (1-z)^{1+2w} \frac{\Gamma(2+w)\Gamma(-1-2w)}{\Gamma(-w)} F(2+2w, 1+w; 2+2w; 1-z) \right]. \quad (\text{D.9})$$

Empregando a definição das funções hipergeométricas, temos

$$J^{\pi\gamma}(k^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{M^2}{4\pi} \right)^w \frac{\Gamma(-2w)}{1+2w} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\Gamma(-w+n)}{\Gamma(-2w+n)} \right. \right. \\ \left. \left. - (1-z)^{1+2w} \frac{\Gamma(1+w+n)}{\Gamma(1+n)} \right] (1-z)^n \right\}. \quad (\text{D.10})$$

Manipulando a equação acima e usando a identidade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+w+n)}{\Gamma(1+n)} (1-z)^n = \frac{\Gamma(1+w)}{z^{1+w}}, \quad (\text{D.11})$$

reescrevemos  $J^{\pi\gamma}(k^2)$  como

$$J^{\pi\gamma}(k^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{M^2}{4\pi} \right)^w \frac{\Gamma(-w)}{1+2w} \left\{ 1 - \frac{\Gamma(-2w)}{\Gamma(-w)} (1-z) \right. \\ \left. \cdot [(1-z)^{2w} g_1(w, z) + g_2(w, z)] \right\}, \quad (\text{D.12})$$

onde

$$g_1(w, z) = \frac{\Gamma(1+w)}{z^{1+w}}, \quad (\text{D.13})$$

$$g_2(w, z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n-w)}{\Gamma(n-2w)} (1-z)^{n-1}. \quad (\text{D.14})$$



Observamos que

$$\frac{\Gamma(1+w)}{z^{1+w}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n-w)}{\Gamma(n-2w)} (1-z)^{n-1} = \frac{1}{z} - 1 + w \left[ -\gamma \left( \frac{1}{z} - 1 \right) - \frac{\ln z}{z} \right] + w^2 h(w, z) + \dots, \quad (\text{D.15})$$

e  $h(w, z)$  é regular para  $w \rightarrow 0$  e  $z \rightarrow 1$ . Assim,

$$g_2(w, z) \approx -g_1(w, z) + w^2 h(w, z) \quad (\text{D.16})$$

e

$$J^{\pi\gamma}(k^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{M^2}{4\pi} \right)^w \frac{\Gamma(-w)}{1+2w} \left\{ 1 - \frac{\Gamma(-2w)}{\Gamma(-w)} (1-z) [(1-z)^{2w} - 1] g_1(w, z) \right\}. \quad (\text{D.17})$$

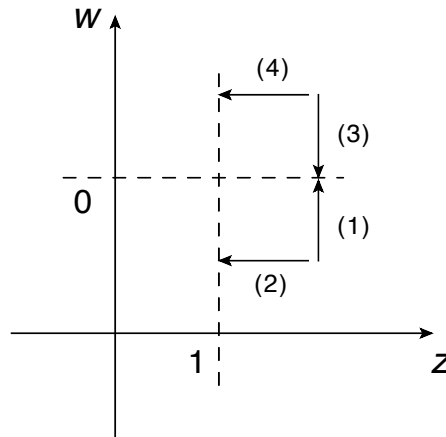


Figura D.1: Limites em que estudamos as integrais de *loop*. A região situa-se em torno de  $w = 0$  e  $k^2 = M^2$ .

A função  $g_1(w, z)$  é aproximadamente  $g_1(w, z) \approx 1/z$ , assim, na região em torno de  $z = 1$  e  $w = 0$ , escrevemos

$$\begin{aligned} \bar{J}^{\pi\gamma}(k^2) &\equiv J^{\pi\gamma}(k^2) - J^{\pi\gamma}(M^2) \\ &= \left[ L + \frac{1}{32\pi^2} \left( \ln \frac{M^2}{\mu^2} - 1 \right) \right] [(1-z)^{2w} - 1] \frac{1-z}{z}. \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Nos limites (1) e (3) (como mostrado na figura D.1), obtemos

$$\bar{J}^{\pi\gamma}(k^2) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1-z}{z} \ln(1-z) \quad (\text{D.19})$$

e, no limite (4),

$$\bar{J}^{\pi\gamma}(k^2) = -(1-z) \left[ L + \frac{1}{32\pi^2} \left( \ln \frac{M^2}{\mu^2} - 1 \right) \right]. \quad (\text{D.20})$$

No limite (2) não se pode definir  $\bar{J}^{\pi\gamma}(k^2)$ .

Nós usamos a integral de *loop* com um propagador adicional  $-1/l^2$

$$J_\mu^{\pi\gamma\gamma}(k^2) = k_\mu J_1^{\pi\gamma\gamma}(k^2) = \left\langle \frac{l_\mu}{M^2 - (k-l)^2} \frac{1}{(-l^2)^2} \right\rangle, \quad (\text{D.21})$$

onde

$$J_1^{\pi\gamma\gamma}(k^2) = \frac{-1}{16\pi^2} \frac{1}{M^2} \left( \frac{M^2}{4\pi} \right)^w \frac{w\Gamma(-w)}{(1+w)(2+w)} F(1-w, 2; 3+w; z). \quad (\text{D.22})$$

Aplicando a equação 15.2.1 de [36], nós temos

$$J_1^{\pi\gamma\gamma}(k^2) = \frac{1}{M^2} \frac{d\bar{J}^{\pi\gamma}(k^2)}{dz}. \quad (\text{D.23})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J_1^{\pi\gamma\gamma}(k^2) &= \frac{1}{16\pi^2 M^2} \left( \frac{M^2}{4\pi} \right)^w \frac{\Gamma(-2w)}{1+2w} \left\{ (1+2w)\Gamma(1+w) \frac{(1-z)^{2w}}{z^{1+w}} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[ 1 - \frac{1+w}{1+2w} \frac{1-z}{z} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\Gamma(n-w)}{\Gamma(n-2w)} (1-z)^{n-1} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

Tomando os limites (1) e (3), chegamos a

$$J_1^{\pi\gamma\gamma}(k^2) = \frac{1}{16\pi^2 M^2} \frac{1}{z} \left[ 1 + \frac{1}{z} \ln(1-z) \right], \quad (\text{D.25})$$

enquanto que o limite (4) resulta em

$$J_1^{\pi\gamma\gamma}(k^2) = -\frac{1}{M^2} \left[ L + \frac{1}{32\pi^2} \left( \ln \frac{M^2}{\mu^2} - 1 \right) \right]. \quad (\text{D.26})$$

# Apêndice E

## Artigos

1. **On the pion decay constant**

Autores: J. Gasser e G. R. S. Zarnauskas.

Referência: J. Gasser and G. R. S. Zarnauskas, Phys. Lett. B **693** (2010) 122  
[arXiv:1008.3479 [hep-ph]].

2. Está em preparação um artigo sobre os fatores de forma escalares em  $SU(3)$ .



# Referências Bibliográficas

- [1] A. Sirlin, Nucl. Phys., **B196**, 83 (1982).
- [2] M. Knecht, H. Neufeld, H. Rupertsberger, and P. Talavera, Eur. Phys. J., **C12**, 469 (2000), arXiv:hep-ph/9909284 .
- [3] T. Kinoshita, Phys. Rev. Lett., **2**, 477 (1959).
- [4] G. Amoros, J. Bijnens, and P. Talavera, Nucl. Phys., **B602**, 87 (2001), arXiv:hep-ph/0101127 .
- [5] J. Bijnens, N. Danielsson, and T. A. Lahde, Acta Phys. Polon., **B38**, 2777 (2007), arXiv:hep-ph/0701267 .
- [6] C. Amsler *et al.* (Particle Data Group), Phys. Lett., **B667**, 1 (2008).
- [7] S. Weinberg, Physica, **A96**, 327 (1979).
- [8] J. Gasser and H. Leutwyler, Ann. Phys., **158**, 142 (1984).
- [9] J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys., **B250**, 465 (1985).
- [10] J. Bijnens, (2009), arXiv:0904.3713 [hep-ph] .
- [11] B. R. Holstein, PoS, **CD09**, 113 (2009).
- [12] R. Urech, Nucl. Phys., **B433**, 234 (1995), arXiv:hep-ph/9405341 .
- [13] U.-G. Meissner, G. Muller, and S. Steininger, Phys. Lett., **B406**, 154 (1997), arXiv:hep-ph/9704377 .
- [14] M. Knecht and R. Urech, Nucl. Phys., **B519**, 329 (1998), arXiv:hep-ph/9709348 .

- [15] J. Gasser, A. Rusetsky, and I. Scimemi, *Eur. Phys. J.*, **C32**, 97 (2003), arXiv:hep-ph/0305260 .
- [16] A. Rusetsky, (2009), arXiv:0910.5151 [hep-ph] .
- [17] J. Gasser and H. Leutwyler, *Nucl. Phys.*, **B250**, 517 (1985).
- [18] U.-G. Meissner and J. A. Oller, *Nucl. Phys.*, **A679**, 671 (2001), arXiv:hep-ph/0005253 .
- [19] M. R. Robilotta, *Phys. Rev.*, **C63**, 044004 (2001), arXiv:nucl-th/0009001 .
- [20] I. P. Cavalcante, M. R. Robilotta, J. Sa Borges, D. de O. Santos, and G. R. S. Zarnauskas, *Phys. Rev.*, **C72**, 065207 (2005), arXiv:hep-ph/0507147 .
- [21] M. R. Robilotta, (2009), arXiv:0909.5484 [nucl-th] .
- [22] G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler, *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 5008 (2001), arXiv:hep-ph/0103063 .
- [23] S. Scherer, *Adv. Nucl. Phys.*, **27**, 277 (2003), arXiv:hep-ph/0210398 .
- [24] A. Pich, (1998), arXiv:hep-ph/9806303 .
- [25] U. Van Kolck, L. J. Abu-Raddad, and D. M. Cardamone, (2002), arXiv:nucl-th/0205058 .
- [26] G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler, *Nucl. Phys.*, **B603**, 125 (2001), arXiv:hep-ph/0103088 .
- [27] M. Gonzalez-Alonso, A. Pich, and J. Prades, *Phys. Rev.*, **D78**, 116012 (2008), arXiv:0810.0760 [hep-ph] .
- [28] J. Bijnens, G. Colangelo, and P. Talavera, *JHEP*, **05**, 014 (1998), arXiv:hep-ph/9805389 .
- [29] B. Ananthanarayan, G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler, *Phys. Rept.*, **353**, 207 (2001), arXiv:hep-ph/0005297 .
- [30] H. L. Anderson, T. Fujii, and R. H. Miller, *Phys. Rev.*, **119**, 2050 (1960).
- [31] G. Czapek *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 17 (1993).

- [32] V. Cirigliano and I. Rosell, JHEP, **10**, 005 (2007), arXiv:0707.4464 [hep-ph] .
- [33] V. Cirigliano and I. Rosell, Phys. Rev. Lett., **99**, 231801 (2007), arXiv:0707.3439 [hep-ph] .
- [34] W. J. Marciano and A. Sirlin, Phys. Rev. Lett., **71**, 3629 (1993).
- [35] H. Neufeld and H. Rupertsberger, Z. Phys., **C71**, 131 (1996), arXiv:hep-ph/9506448 .
- [36] M. Abramowitz, *Handbook of mathematical functions* (Dover Publications, New York, 1972).
- [37] L. Brown, *Quantum field theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
- [38] C. Haefeli, M. A. Ivanov, and M. Schmid, Eur. Phys. J., **C53**, 549 (2008), arXiv:0710.5432 [hep-ph] .
- [39] B. Moussallam, Nucl. Phys., **B504**, 381 (1997), arXiv:hep-ph/9701400 .
- [40] B. Ananthanarayan and B. Moussallam, JHEP, **05**, 052 (2002), arXiv:hep-ph/0205232 .
- [41] J. Gasser and H. Leutwyler, Phys. Rept., **87**, 77 (1982).
- [42] G. R. S. Zarnauskas, *Os termos sigma do núcleo e da delta*, Master's thesis, Universidade de São Paulo, Brasil, São Paulo (2006).
- [43] M. R. Robilotta, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, **37**, 075014 (2010).
- [44] J. Gasser, H. Leutwyler, and M. E. Sainio, Phys. Lett., **B253**, 252 (1991).
- [45] J. Gasser, H. Leutwyler, and M. E. Sainio, Phys. Lett., **B253**, 260 (1991).
- [46] M. Gell-Mann and M. Levy, Nuovo Cim., **16**, 705 (1960).
- [47] T. H. R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. Lond., **A247**, 260 (1958).
- [48] T. H. R. Skyrme, Nucl. Phys., **31**, 556 (1962).

- [49] A. Chodos and C. B. Thorn, *Phys. Rev.*, **D12**, 2733 (1975).
- [50] M. Rho, A. S. Goldhaber, and G. E. Brown, *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 747 (1983).
- [51] V. Bernard, T. R. Hemmert, and U.-G. Meissner, *Phys. Lett.*, **B622**, 141 (2005), arXiv:hep-lat/0503022 .
- [52] V. E. Lyubovitskij, T. Gutsche, A. Faessler, and E. G. Drukarev, *Phys. Rev.*, **D63**, 054026 (2001), arXiv:hep-ph/0009341 .
- [53] J. Gasser and U. G. Meissner, *Nucl. Phys.*, **B357**, 90 (1991).
- [54] B. Ananthanarayan, I. Caprini, G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler, *Phys. Lett.*, **B602**, 218 (2004), arXiv:hep-ph/0409222 .
- [55] J. A. Oller and L. Roca, *Phys. Lett.*, **B651**, 139 (2007), arXiv:0704.0039 [hep-ph] .
- [56] S. T. Epstein, *American Journal of Physics*, **22**, 613 (1954).