Universidade de São Paulo

Instituto de Física

DIAGNÓSTICO DE PLASMAS POR EMISSÃO ELETROCICLOTRÔNICA NO TOKAMAK TCABR: UM ESTUDO TEÓRICO.

SBI-IFUSP

305M810T4437

EDUARDO RODRIGUES CALDERON

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física para a obtenção do título de Mestre em Ciências

Banca Examinadora

Prof. Dr. Ruy Pepe da Silva – IFUSP (orientador)

Prof. Dr. Renato Sergio Dallaqua – INPE

Prof. Dr. Ibere Luiz Caldas – IFUSP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
T4437
INSTITUTO DE FÍSICA

São Paulo

2005

Prof. Celso Luiz Lima
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Calderon, Eduardo Rodrigues

Diagnóstico de Plasmas por Emissão Eletrociclotrônica no Tokamak TCABR: Um Estudo Teórico.
São Paulo, 2005

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física - Depto. de Física Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Ruy Pepe da Silva
Área de Concentração: Física

Unitermos:

1. Física de Plasmas;
2. Eletrodinamica – Radiação Eletrociclotrônica;
3. Tokamaks.

USP/IF/SBI-094/2005

Dedico este trabalho:

Aos meus pais Oswaldo e Alzira pelo amor, compreensão e cuidado desde os primeiros instantes desta maravilhosa caminhada.
Aos meus irmãos.
À Edinéia pelo amor, carinho e confiança.

Agradecimentos

Ao meu orientador, prof. Dr. Ruy Pepe da Silva, pela orientação profícua e, principalmente, pela confiança e apoio constante ao longo deste trabalho.

Ao prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva Rosa, da Universidade do Mato Grosso do Sul, pelas discussões e inestimáveis sugestões na parte computacional deste trabalho.

Ao colega Antonio pelas muitas e agradáveis conversas.

Aos colegas Luiz Guidolin e Edgar pelo agradável convívio.

Às simpáticas e atenciosas Eleonora, secretária do Grupo de Plasmas, Lia e Inês – secretárias do departamento de Física Aplicada.

A todo o pessoal da biblioteca.

Por fim, agradeço ao CNPQ pelo apoio financeiro deste trabalho na forma de bolsa.

Resumo

A emissão eletrociclotrônica –EEC– atualmente é um diagnóstico utilizado rotineiramente em tokamaks para a medida da temperatura de elétrons e também para a obtenção de informações sobre a função distribuição de elétrons em situações onde se têm populações de elétrons não térmicos. Neste trabalho discute-se, a partir de simulações, aspectos da emissão eletrociclotrônica no plasma do tokamak TCABR (R_0=0,615m; a=0,18m; $B_{\phi 0}$=1,2T; $n_{e0} \sim 3\times10^{19} m^{-3}$, $T_{e0} \sim 500\text{eV}$). A acessibilidade é examinada com base no modelo de plasmas frios. A partir dos modelos de plasmas tênue e dielétrico (Vlasov-Maxwell) discute-se a emissão e absorção da radiação-EC. São utilizados resultados da teoria das flutuações para a obtenção da emissividade a partir do tensor dielétrico e do tensor das correlações das microcorrentes. Os resultados numéricos são obtidos a partir de programas desenvolvidos em MAPLE e também de um código para emissão eletrociclotrônica. Verifica-se, para o TCABR, que, devido ao entrelaçamento com a terceira harmônica, a banda útil da segunda harmônica fica limitada ao intervalo 52-74 GHz ($\sim$70 % da coluna de plasma). As condições de acessibilidade para a segunda harmônica (modo *X*) restringem a densidade de pico a valores abaixo de $n_{e0} = 2{,}3\times10^{19} m^{-3}$. Para plasmas térmicos, mostra-se espectros da emissão da radiação eletrociclotrônica para harmônicas 2 e 3, modos X e *O*, obtidos a partir de um método simples que também considera os efeitos da absorção. Resultados obtidos com um modelo dielétrico são também apresentados. Mostra-se a dependência radial da emissividade e do coeficiente de absorção, em ambos os modos para a segunda harmônica. A dependência radial do índice de refração verificando-se que este se desvia dos valores previstos pelo modelo de plasmas frios na região de ressonância. A largura da região ressonante é $\Delta r \approx 2mm$. A dependência radial da profundidade óptica, $\tau(r)$, para os modos *O* e *X*, obtida com o modelo dielétrico é comparada com expressões obtidas da literatura verificando-se boa concordância entre os valores. Para $n_{e0} = 2{,}0\times10^{19} m^{-3}$ tem-se $\tau \sim 2{,}5$ no centro da coluna para *m=2* (modo *X*). A partir do modelo dielétrico obteve-se o perfil radial da emissão eletrociclotrônica. Os resultados indicam que, para cenários típicos de plasma do TCABR, a segunda harmônica no modo X é a mais indicada para fins de diagnóstico.

Abstract

The *ECE* radiation is nowdays routinely used as a diagnostic tool in tokamaks for electron temperature measurements and, also, for obtaining informations about the electron distribution function in plasmas with non-thermal electron population. Based in simulations, this work discuss aspects of the emission, absorption and propagation of the *ECE* waves in plasmas confined by the *TCABR* tokamak (R_0=*0.615m;* a=*0.18m;* $B_{\phi 0}$=*1.2T;* $n_{e0} \sim 3\times10^{19}m^{-3}$, $T_{e0}\sim 500eV$). The accessibility conditions for the *TCABR* is also discussed. Both the emission and absorption of *ECE* radiation are examined with the tenuous and dieletric (Vlasov-Maxwell) plasma models. Results obtained from the theory of fluctuations, based in the dielectric and microscopic current correlation tensors, are used to calculate the plasma emissivity. All the numerical results are obtained using computer programs, which were developed in MAPLE for this work, and also using a *ECE* code. Due to the harmonic overlapping, the detection of the second harmonic, in the lower field side, is limited to the *52-74 GHz* band ($\sim 70\%$ of the plasma column). The accessibility conditions for the second harmonic (X mode) restrict the maximum electron density to values bellow $n_{e0} = 2.3\times10^{19}m^{-3}$. For thermal plasmas, and using a simple model that considers the radiation absorption, we obtained the emission spectra (X and O modes) for the harmonics 1, 2 and 3. The radial profiles of the emissivity and the absorption coefficient for the second and third harmonics are shown. The resonant layer width was calculated to be $\Delta r \approx 2mm$. The radial dependence of the refraction index was determined and it is shown that it deviates from the values obtained with the cold plasma model in the resonant region. The radial profiles of the optical depth, $\tau(r)$, for the O and X modes, are also shown. The $\tau(r)$ profiles, obtained with the dielectric model and also using some expressions found in the literature, are observed to be in good agreement. In the center of the plasma, for the second harmonic X-mode, we obtained $\tau\sim 2.5$ (for $n_{e0} = 2.0\times10^{19}m^{-3}$). Finally, the radial profiles of the ECE emission, obtained with the dielectric model, is shown. The results of this study indicate that, for the typical TCABR plasma discharges, the second harmonic X-mode of the ECE radiation can be used as a diagnostic tool.

Índice

I – Introdução **8**

II – Diagnóstico de plasmas magnetizados por emissão eletrociclotrônica em tokamaks **11**

II. 1 – O tokamak 11

II. 2 – Aspectos gerais sobre o diagnóstico de plasmas de tokamaks por radiação eletrociclotrônica. 15

II. 3 – Os limites de aplicação do diagnóstico por EEC 20

II.4 – Alargamentos do espectro da radiação eletrociclotrônica e regimes de EEC 21

III. – Propagação da radiação em meios materiais **23**

III.1 – Equação de transporte de radiação 23

III. 2 – Determinação das condições de acessibilidade via modelo de plasmas frios 32

IV. Modelo de plasma tênue **44**

IV.1. – Radiação emitida por elétrons acelerados sob ação do campo magnético uniforme – Equação de Schott-Trubnikov 45

IV.2. – Cálculo da emissividade espectral e do coeficiente de absorção de plasmas térmicos não-relativísticos via modelo de plasma tênue 51

V. – Modelo dielétrico de plasmas quentes e magnetizados **58**

V.1 – Cálculo formal do tensor dielétrico de plasmas quentes num campo magnético uniforme61

V.2 – Propagação, absorção e emissão para plasmas quentes magnetizados. 72

V.3. – Modelagem da coluna de plasma em tokamaks 75

V.4 – Determinação numérica do espectro de EEC via modelo dielétrico. 77

VI – Resultados e Discussões **82**

VI.1 – Entrelaçamento de harmônicas 83

VI. 2 – Condições de acessibilidade para a radiação eletrociclotrônica no TCABR 84

VI. 3 –Condições de absorvibilidade 87

VI. 4 – Espectro de emissão da radiação eletrociclotrônica 92

VI.5 – Resultados obtidos com o modelo dielétrico 94

VI.5.1 – Emissividade espectral *94*

VI.5.2 – Coeficiente de absorção e profundidade óptica *95*

VI.5.3 – Índice de refração *99*

VI.5.4 – Espectro da radiação eletrociclotrônica *101*

VII. – Conclusões e trabalhos futuros **103**

VIII – Referências Bibliográficas. **107**

Apêndice **110**

I – Introdução

O estudo da radiação emitida por elétrons em seu movimento de rotação em torno de campos magnéticos – denominada radiação eletrociclotrônica (radiação-EC) – tem merecido muita atenção nos trabalhos desenvolvidos com plasmas magneticamente confinados. Essa radiação foi apontada por B. A. Trubnikov como um importante mecanismo de perdas energéticas nos futuros reatores baseados em reações de fusão nuclear [Tru58]. Nos últimos 30 anos, a radiação de ciclotron emitida por elétrons tem despertado interesse, também, como instrumento de diagnóstico. Inicialmente os interesses eram voltados para a medida da temperatura eletrônica de descargas térmicas. Em 1973, F. Engelmann e M. Curatolo apresentaram um trabalho discutindo a possibilidade de usar a radiação-EC como ferramenta de diagnóstico de plasmas de máquinas tokamak[Eng73]. Nesse trabalho discute-se a possibilidade do uso dessa radiação, para determinação da temperatura eletrônica, da densidade eletrônica e do campo magnético poloidal. No que diz respeito à medida da temperatura eletrônica foram propostas duas abordagens. Na primeira considera-se o plasma como um emissor que irradia como um corpo negro e, para a determinação da temperatura de elétrons, toma-se uma harmônica e um modo de polarização da emissão eletrociclotrônica para a qual o plasma é considerado como um meio opticamente espesso. Nessa situação, usando a relação clássica de Rayleigh-Jeans, determina-se temperatura de elétrons. Essa abordagem simples e direta é, ainda hoje, a mais utilizada. Na segunda abordagem, utiliza-se uma harmônica em que o plasma é opticamente transparente e, a partir de duas medidas simultâneas das intensidades da radiação-EC para os dois modos de polarização, determina-se a temperatura.

Experimentalmente a radiação-EC foi usada em máquinas tokamak, com fins de diagnóstico, a partir dos anos 70 [Cos74]. Hoje seu uso é obrigatório nessas máquinas, para a determinação da temperatura eletrônica. Esse diagnóstico está em contínuo desenvolvimento e, mais recentemente, vem sendo utilizado experimentalmente tanto para caracterização de distribuições não térmicas de elétrons [Bru94] como para estudos de transporte envolvendo flutuações de temperatura [Cim95, Hea99]. Estudos teóricos e experimentais apontam para a utilização de ondas de Bernstein fazendo uso da mesma metodologia usada na determinação da temperatura de elétrons com emissão eletrociclotrônica –EEC [Eff99]. Esses estudos parecem ser particularmente interessantes em tokamaks onde as condições de acessibilidade e absorvibilidade não são satisfeitas para as bandas de radiação até aqui utilizadas com EEC.

Neste trabalho discutimos vários aspectos envolvendo a EEC de plasmas de tokamaks tendo em vista o uso dessa radiação com finalidade de diagnóstico. Discutem-se a emissão, absorção e propagação dessa radiação. Os parâmetros associados a esses três processos são obtidos a partir dos modelos de plasma tênue e do modelo dielétrico. A discussão desses modelos é feita para uma situação de um plasma homogêneo imerso em um campo magnético também homogêneo. Para o emprego dessas teorias na situação específica dos plasmas gerados em tokamaks algumas considerações devem ser feitas, pois nessas máquinas há uma dependência espacial do campo magnético e dos parâmetros do plasma.

A seguir apresentamos, de forma resumida, os tópicos abordados nos capítulos que se seguem.

No capítulo II, descrevemos alguns aspectos relacionados com as máquinas tokamak e apresentamos os parâmetros dessa máquina que são relevantes para o diagnóstico por EEC. Em seguida, abordam-se algumas questões e conceitos ligados à emissão eletrociclotrônica. Discutem-se a relação entre a posição de emissão da radiação-EC e a freqüência num tokamak, o transporte de radiação e os limites associados ao diagnóstico por emissão ciclotrônica de elétrons. É, a seguir, feita uma breve discussão sobre os mecanismos de alargamento associados aos espectros da EEC.

No capítulo III aborda-se inicialmente a questão da emissão, absorção e propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas a partir de considerações sobre o balanço da energia radiante. Chega-se a equação de transporte de radiação onde a intensidade da radiação-EC pode ser calculada a partir da emissividade, do coeficiente de absorção e do índice de refração. Discute-se, a seguir, a questão da acessibilidade à radiação eletrociclotrônica em tokamaks.

No capítulo IV a questão da emissão de radiação-EC, a partir do modelo de plasmas tênues, é discutida. Obtém-se a distribuição espectral da potência irradiada por ângulo sólido de um elétron em movimento arbitrário (equação de Schott-Trubnikov). Uma discussão de alguns aspectos relevantes da física da radiação-EC é feita com base nessa equação. A seguir a emissividade espectral é obtida pela integração da equação de Schott-Trubnikov usando-se a função distribuição dos elétrons como peso. Expressões para a emissividade e o coeficiente de absorção são obtidas para um plasma térmico.

No capítulo V discutimos o modelo dielétrico para plasmas térmicos magnetizados. A grandeza mais importante desse modelo é o tensor dielétrico que é calculado a partir do sistema de equações de Vlasov-Maxwell. O tensor dielétrico depende da função distribuição. Com esse tensor, obtém-se a relação de dispersão e o índice de refração. Com a parte imaginária do índice

de refração calcula-se o coeficiente de absorção. O cálculo da emissividade espectral é feito a partir de expressões obtidas a partir do modelo de Klimontovich-Maxwell e da teoria das flutuações. A teoria apresentada aqui pode ser utilizada em plasmas térmicos e não térmicos. Finalmente descreve-se sucintamente a estrutura de um código desenvolvido a partir do modelo apresentado e utilizado para a obtenção de vários parâmetros de interesse para a emissão eletrociclotrônica em máquinas tokamaks.

No capítulo VI, apresentamos e discutimos resultados obtidos, a partir de simulações, para cenários típicos do plasma no tokamak TCABR. Essas simulações foram feitas com programas desenvolvidos especialmente para este trabalho em MAPLE e também com o código para a emissão EC descrito no capítulo V. Analisam-se inicialmente o entrelaçamento de harmônicas. A seguir, são discutidas as condições de acessibilidade para o TCABR. A acessibilidade é abordada a partir dos diagramas freqüência-raio e CMA (Clemmow-Mullary-Allis). Com o intuito de estudar as condições de absorvibilidade, determina-se a profundidade óptica, para os modos ordinário e extraordinário para as primeiras harmônicas. A profundidade óptica é calculada a partir de expressões obtidas da literatura e também é calculada com base no modelo dielétrico. Os espectros de emissão da radiação-EC para o plasma do TCABR são mostrados.

Finalmente no capítulo VII apresentam-se as principais conclusões deste trabalho e indica-se os possíveis caminhos para a continuidade do que foi aqui apresentado.

II – Diagnóstico de plasmas magnetizados por emissão eletrociclotrônica em tokamaks

Neste capítulo, vamos introduzir aspectos básicos do diagnóstico por radiação eletrociclotrônica, para plasmas confinados em máquinas tokamak. Essa espécie de radiação, que está na faixa das microondas, é um atributo específico de plasmas sob ação de campos magnéticos. Esse tipo de radiação aparece não somente em tokamaks, mas em outros dispositivos tais como *stellarators*, *Z-pinch*, *θ-pinch* e espelhos magnéticos dentre outros [Wes87, Den93]. Em tokamaks, quando o plasma está em equilíbrio térmico, essa radiação é rotineiramente utilizada para a determinação da temperatura eletrônica [Cos82] e também da densidade eletrônica[Eng73, Fon04]. A possibilidade de medida desses parâmetros se deve à forma bem conhecida do perfil do módulo do campo magnético toroidal. Essa forma permite associar biunivocamente a freqüência de ciclotron eletrônica com suas harmônicas e a posição de emissão da radiação, ou seja, à chamada relação raio-freqüência $\omega = \omega(r)$. Descrevem-se as características básicas das máquinas tokamak, o tokamak TCABR e alguns aspectos básicos ligados à emissão eletrociclotrônica como o transporte da radiação através do plasma, a emissão, a absorção espectral e o alargamento do espectro.

II. 1 – O tokamak

No fim da Segunda Guerra Mundial os Estados Unidos da América, o Reino Unido e a antiga União Soviética começaram isoladamente programas de pesquisa com o objetivo de construir reatores nucleares que produziriam energia por meio da fusão termonuclear controlada. Embora fossem inicialmente secretos, esses projetos, apontavam para o caminho que indicava que o melhor meio de se obter energia seria por meio indicavam que as reações de fusão termonuclear em plasmas são meios promissores para a obtenção de energia, ou seja, através do mesmo processo que ocorre nas estrelas. Isso seria feito através da utilização de plasmas quentes confinados por meio de campos magnéticos estáticos. Nos Estados Unidos, os esforços estavam concentrados em experimentos baseados no efeito *pinch*, com máquinas de geometria linear tipo *Z-pinch* ou *θ-pinch*. Outras linhas de pesquisas estavam concentradas em

máquinas de geometria toroidal denominadas *stellarators*. Os *stellarators* foram criados e desenvolvidos nos Estados Unidos, no projeto secreto chamado *Matterhorn* chefiado pelo Astrofísico Lyman Spitzer, na época chefe do departamento de Astronomia. Nesta mesma época, na extinta União Soviética, pesquisas no Instituto I. V. Kurchatov de Energia Atômica utilizavam espelhos magnéticos e um novo dispositivo denominado tokamak [Miy00].

O conceito de máquinas tokamaks foi apresentado em 1951 pelos físicos I. E. Tamm e A. D. Sakharov num artigo publicado em três partes separadas [Sak51]. Nesse artigo, há uma discussão pormenorizada da nova máquina e a apresentação de estudos teóricos sobre a possibilidade de obter energia por meio de reatores baseados em fusão termonuclear controlada. Na parte II, de autoria do Sakharov, mostra-se as questões essenciais ligadas a área que até hoje são estudadas, tais como, bremsstrahlung, interação de plasmas com a parede do vaso, equilíbrio e estabilidade de plasmas quentes em campos magnetostáticos. Para Sakharov o plasma quente poderia ser confinado numa câmara toroidal, ou "vaso", por um forte campo magnético toroidal, $\mathbf{B}_\phi$, da ordem de alguns teslas, combinado com outro campo, menos intenso $\mathbf{B}_\theta$, chamado campo poloidal, criado pela própria corrente de plasma. As direções toroidal $\boldsymbol{\phi}$ e poloidal $\boldsymbol{\theta}_p$ são indicadas na Fig. II. 1.

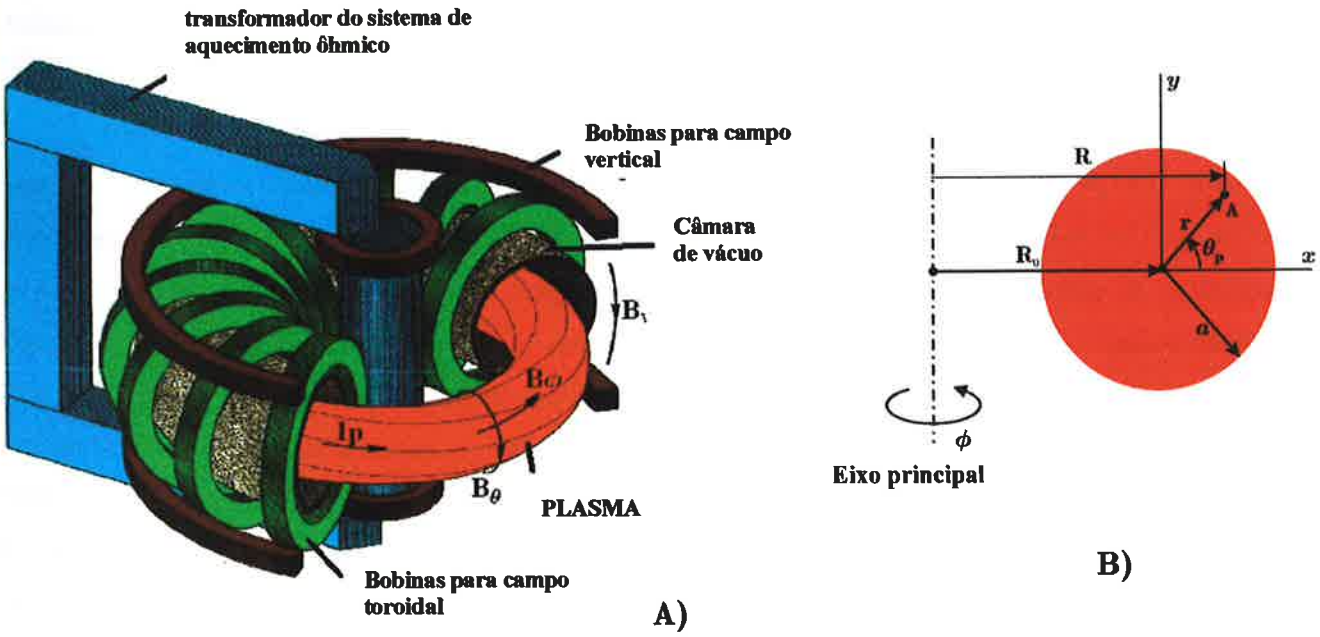


Fig. II.1: A) Ilustração de um tokamak mostrando seus principais sistemas: o transformador do sistema de aquecimento ôhmico, as bobinas para campos toroidal e vertical. Em B) vemos um corte transversal da coluna de plasma toroidal indicando os parâmetros geométricos raio maior R_0 e raio menor a e o sistema de coordenadas toroidal $(\mathbf{r},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}_p)$.

Foi em 1968, na Rússia, que o físico Lev A. Artsimovich, diretor do programa soviético para fusão controlada apresentou resultados, obtidos em um tokamak, bastante superiores aos conseguidos até então. Após a confirmação desses resultados, muitos centros de pesquisas atuando em fusão termonuclear começaram a construir tokamaks ou a transformar os antigos *stellarators* em tokamaks. Por exemplo, no laboratório de Física de Plasmas em Princeton os experimentos com *stellarator* C foram encerrados e essa máquina foi convertida num tokamak.[Miy00].

Em um tokamak, o campo magnético toroidal é gerado por grandes bobinas igualmente espaçadas onde circulam correntes na direção poloidal. Um cálculo simples usando a lei de Ampère mostra que a magnitude do campo toroidal, desprezando a configuração discreta das bobinas toroidais, tem a forma:

$$B_\phi \sim \frac{1}{R} \quad , \tag{II.1.1}$$

onde R é a distância entre o centro do tokamak e um ponto no vaso. O fator de proporcionalidade depende da corrente que circula das bobinas, do número de espiras dessa bobina e das unidades adotadas. Esta forma radial assumida por $\mathbf{B}_\phi$ é fundamental para o diagnóstico por radiação eletrociclotrônica pois implica numa relação $\omega = \omega(r)$ um para um.

Além de $\mathbf{B}_\phi$ que é um campo magnético bem conhecido, e gerado de forma controlada, tem-se também o campo magnético poloidal $\mathbf{B}_\theta$ que é gerado pela corrente $\mathbf{J}_\phi(\mathbf{r},t)$ na direção toroidal. A corrente de plasma $\mathbf{I}_P$ é dada pela integral $\int \mathbf{J}_\phi(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{A}$. Além das bobinas toroidais e da coluna de plasma temos outro conjunto de espiras que formam o sistema de aquecimento ôhmico. Essas bobinas, juntamente com a coluna de plasma, formam basicamente um transformador. Na Fig. II.1 é mostrado um núcleo ferromagnético sobre o qual é enrolada a bobina de aquecimento ôhmico. A corrente que circula nessas bobinas gera um campo elétrico toroidal $\mathbf{E}_\phi$ responsável pela formação e aquecimento do plasma. O plasma é o secundário do transformador e o primário, a bobina de aquecimento ôhmico que, em tokamaks pequenos, é alimentada por um banco de capacitores. Os primeiros tokamaks tinham núcleos de ferro, mas atualmente o acoplamento é feito através do ar.

O exame das condições de estabilidade da corrente de plasma impõe uma relação envolvendo a corrente de plasma e o campo toroidal que implicam num limite mínimo para o campo toroidal. Os estudos de estabilidade do confinamento toroidal mostram que a magnitude

do campo poloidal deve ser menor do que o campo toroidal para manter a grandeza q (fator de segurança) superior a unidade ($q(r) > 1$). O fator de segurança é dado por

$$q(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{B_\phi}{R_0 B_\theta} r d\theta_p \approx \frac{r B_\phi}{R_0 B_\theta(r)} \quad , \tag{II.1.2}$$

válida para tokamaks de grande razão de aspecto (R_0/a) e seção circular [Wes87]. Uma das condições mais importantes para a estabilidade do plasma (para o modo dobra $m=1$) é dada por:

$$q(r) > 1 \quad , \tag{II.1.3}$$

conhecida como condição de Kruskal-Shafranov [Wes87]. Se numa coluna de plasma toroidal existisse apenas o campo magnético $\mathbf{B}_\phi$ não teríamos confinamento. Em virtude da não-homogeneidade descrita por (II.1.1), os elétrons e íons rapidamente adquiririam uma velocidade de deriva na direção perpendicular ao gradiente do campo $\partial\mathbf{B}/\partial\mathbf{r}$ [1] produzindo, em conseqüência, uma separação entre os elétrons e íons dando origem a um campo elétrico com direção paralela ao eixo do tokamak, isto é, $\mathbf{E}_v = E_v\hat{\mathbf{j}}$ [Che74]. A combinação dos campos $\mathbf{E}_v$ e $\mathbf{B}_\phi$ produziriam um novo movimento de elétrons na direção $\mathbf{E}_v \times \mathbf{B}_\phi$ que destruiria o confinamento. Uma estimativa da ordem de grandeza do campo poloidal na borda da coluna de plasma pode ser obtida facilmente pela simples relação $B_\theta \sim \mu_0 I_P/(2\pi a)$, onde aproximamos a coluna de plasma para um cilindro. A formação do campo poloidal pela corrente de plasma é uma das principais características que distingue o tokamak de outros sistemas toroidais.

Os resultados apresentados no presente trabalho foram obtidos com base nas características do tokamak TCABR [Nas99, Cha84], uma máquina em operação no laboratório de Física de Plasmas do Instituto de Física da Universidade de São Paulo (LEP-IFUSP), transferida do laboratório CRPP *"Centre de Recherches de Plasmas"* em Lausanne, na Suíça. Os parâmetros principais do TCABR são apresentados na tabela II.1.

O vaso do TCABR tem seção retangular mas a coluna de plasma é ainda um toróide com seção circular devido ao uso de limitadores mecânicos circulares. Para o TCABR $B_\theta \sim 0{,}13T$, ou seja $\sim 9\%$ do campo toroidal.

---

[1] Usamos neste trabalho a notação $\partial/\partial\mathbf{a} = \partial/\partial a_x\,\hat{\mathbf{e}}_x + \partial/\partial a_y\,\hat{\mathbf{e}}_y + \partial/\partial a_z\,\hat{\mathbf{e}}_z$

PARÂMETRO	SÍMBOLO (UNIDADE)	VALOR
raio maior (geométrico)	R_0 (m)	0,615
raio da coluna de plasma	a (m)	0,18
corrente de plasma	$I_P(kA)$	≤120
temperatura eletrônica de pico	T_e (eV)	≈500
campo toroidal máxima	$B_\phi(T)$	≈1,2
densidade eletrônica de pico	$n_{e0}(m^{-3})$	≈ 2,6 x 10^{19}

Tabela II.1: Parâmetros principais do Tokamak TCABR

II. 2 – Aspectos gerais sobre o diagnóstico de plasmas de tokamaks por radiação eletrociclotrônica.

A radiação de ciclotron ou síncrotron é uma conseqüência direta do movimento de cargas elétricas em torno das linhas do campo magnético. Esse movimento é descrito pela parcela magnética da força de Lorentz $\mathbf{F}_M$ dada por:

$$\mathbf{F}_M = q_e(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \quad . \tag{II.2.1}$$

onde $q_e = -e$ é a carga do elétron e $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$, a velocidade. O subscrito "$\perp$" e "$\parallel$" referem-se, respectivamente, às direções perpendicular e paralela ao campo $\mathbf{B}$, respectivamente. O uso da lei do movimento de Newton com a força (II.2.1) permite mostrar que as trajetórias adquiridas pelos elétrons são linhas helicoidais em torno do campo magnético aplicado. A aceleração centrípeta experimentada pela carga é responsável pela emissão de radiação eletromagnética. O espectro é formado por uma coleção de linhas cujas freqüências têm valores bem definidos e múltiplos de uma freqüência fundamental dada por:

$$\omega_\gamma = \frac{\omega_B}{\gamma} = \frac{eB}{\gamma m_e} \quad , \tag{II.2.2}$$

onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ é o fator relativístico, e e m_e representam a carga e a massa do elétron, respectivamente. A existência dos múltiplos harmônicos da freqüência fundamental está relacionada ao caráter periódico do movimento e também à distribuição angular da radiação que tem um caráter direcional bastante acentuado, principalmente para velocidades relativísticas. Se o movimento se dá em baixas velocidades em comparação com a velocidade da luz, $v/c \ll 1$, o padrão de emissão da radiação tem uma grande semelhança com a radiação de um dipolo elétrico [Jac83, Gri89, Fre96]. Nesse caso a radiação é denominada de ciclotron. Por outro lado, para velocidades da ordem da velocidade da luz, $v/c \sim 1$, a radiação é emitida de forma bastante direcionada e recebe a denominação de radiação de síncrotron. Na Fig.II.2 é ilustrado o movimento do elétron, e a radiação emitida, para ambos os casos. Esses padrões de emissão são obtidos a partir dos potenciais de Liénard-Wiechert para cargas elétricas em movimento helicoidal [Bek66, Hut87].

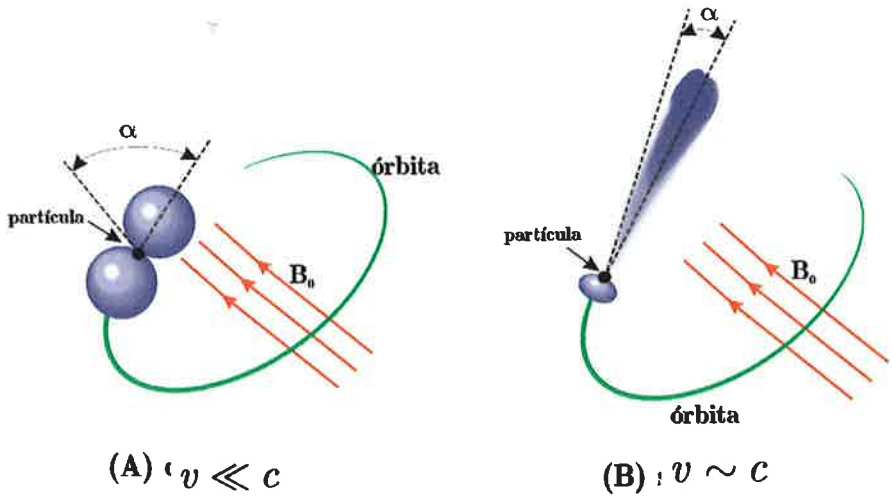


Fig. II.2: Ilustração do padrão de emissão da radiação de ciclotron para $v \ll c$ (A) e $v \sim c$ (B) por uma partícula eletricamente carregada. Mostra-se que $\alpha = \cos^{-1}(v_\perp/c)$.

Para se obter a dependência radial da freqüência de ciclotron, vamos partir da dependência radial do campo dada por:

$$B_\phi(R) = \frac{B_{\phi 0} R_0}{R} \qquad \text{(II.2.3)}$$

$B_{\phi 0} = B_\phi(R_0)$ é o campo magnético no centro da coluna de plasma e R é a distância do ponto ao eixo maior da máquina (Fig.II.1). Deve-se observar que a coluna de plasma somente é definida na região $-a \leq r \leq a$. É mais conveniente estabelecer uma descrição em termos das variáveis r e o ângulo poloidal θ_p, relacionadas por $R = R_0 + r\cos\theta_p$. Assim, obtemos:

$$B_\phi(r) = \frac{B_{0\phi}}{1 + r\cos\theta_p/R_0} \quad . \tag{II.2.4}$$

Da combinação da equação (II.2.4) com a (II.2.2) obtém-se a relação $\omega_m(r)$ dada por:

$$\omega_m(r) = m\frac{\omega_B(R_0)}{\left(1 + r\cos\theta_p/R_0\right)\gamma} \quad , \tag{II.2.5}$$

onde temos a dependência entre a freqüência emitida ω_m, e o ponto de emissão na coluna de plasma r, para um dado ângulo θ_p. A freqüência ω_{B0} é definida pela equação (II.2.2) com $B_0 = B(R_0)$. Embora há emissão em todos os pontos da coluna de plasma, a relação raio-freqüência nos mostra a existência de certas regiões com entrelaçamentos de harmônicas, principalmente para altos harmônicos. Para tokamaks de baixa razão de aspecto essa sobreposição de harmônicas é mais acentuada.

Outro parâmetro importante é a intensidade da radiação eletrociclotrônica I_ω ao se propagar pelo plasma. Os processos que governam o comportamento de I_ω envolvem a emissão, a absorção e o índice de refração, caracterizados respectivamente pela emissividade espectral j_ω, coeficiente de absorção α_ω e pelo índice de refração N. Estas quantidades são estudadas nos capítulos que se seguem. A solução da equação de transporte de radiação é dada por [Cos82]:

$$I_\omega = \frac{j_\omega}{N^2\alpha_\omega}\left(1 - e^{-\tau}\right) \quad . \tag{II.2.6}$$

A quantidade τ nessa equação é um importante parâmetro do plasma conhecido como profundidade óptica definido como:

$$\tau := \int_{\substack{\text{percurso}\\ \text{óptico}}} \alpha_\omega ds \quad , \tag{II.2.7}$$

onde ds representa o elemento de trajetória da radiação. O termo $j_\omega/(N^2\alpha_\omega)$, na equação (II.2.6) é conhecido como função fonte [Bek66] que define as características ópticas do meio. Para um plasma térmico, a função fonte é dada pela lei de Kirchhoff:

$$\frac{j_\omega}{N_r^2\alpha_\omega} = I_N \quad . \tag{II.2.8}$$

Nessa situação, a equação (II.2.6) pode ser escrita como:

$$I_\omega = I_{\omega N}\left(1-e^{-\tau}\right) \quad , \tag{II.2.9}$$

$I_{\omega N}$ é a intensidade específica de corpo negro dada pela fórmula de Planck

$$I_{\omega N} = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3c^2}\frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_BT_e)-1} \quad . \tag{II.2.10}$$

Para plasmas com $\tau \gg 1$ a equação (II.2.9) é simplificada para:

$$I_\omega = I_{\omega N} \quad . \tag{II.2.11}$$

Para cenários típicos do plasma no TCABR temos $T_e \sim 500eV$ e considerando que as freqüências da EEC estão na faixa de dezenas de GHz, temos que $\hbar\omega \ll k_BT_e$, o que permite o uso da aproximação de Rayleigh-Jeans dado por:

$$I_\omega \approx I_{\omega N} = \frac{k_B\omega^2T_e}{8\pi^3c^2} \quad , \tag{II.2.12}$$

onde T_e é a temperatura eletrônica do plasma. A equação (II.2.12) mostra o princípio básico para a medida de temperatura usando a EEC. Esta equação, associada com a relação raio-freqüência (II.2.5), estabelece uma relação entre o espectro da radiação-EC com a temperatura T_e. Portanto, podemos reconstruir o perfil de temperatura $T_e(r)$ da coluna de plasma num tokamak.

Na Fig.II.3. apresentam-se gráficos ilustrativos da relação raio freqüência e do espectro de EEC para os tokamaks T-10 e JET. Do lado esquerdo da figura temos as curvas $\omega_m(R)$ e do lado direito os espectros da EC para as primeiras 5 harmônicas.

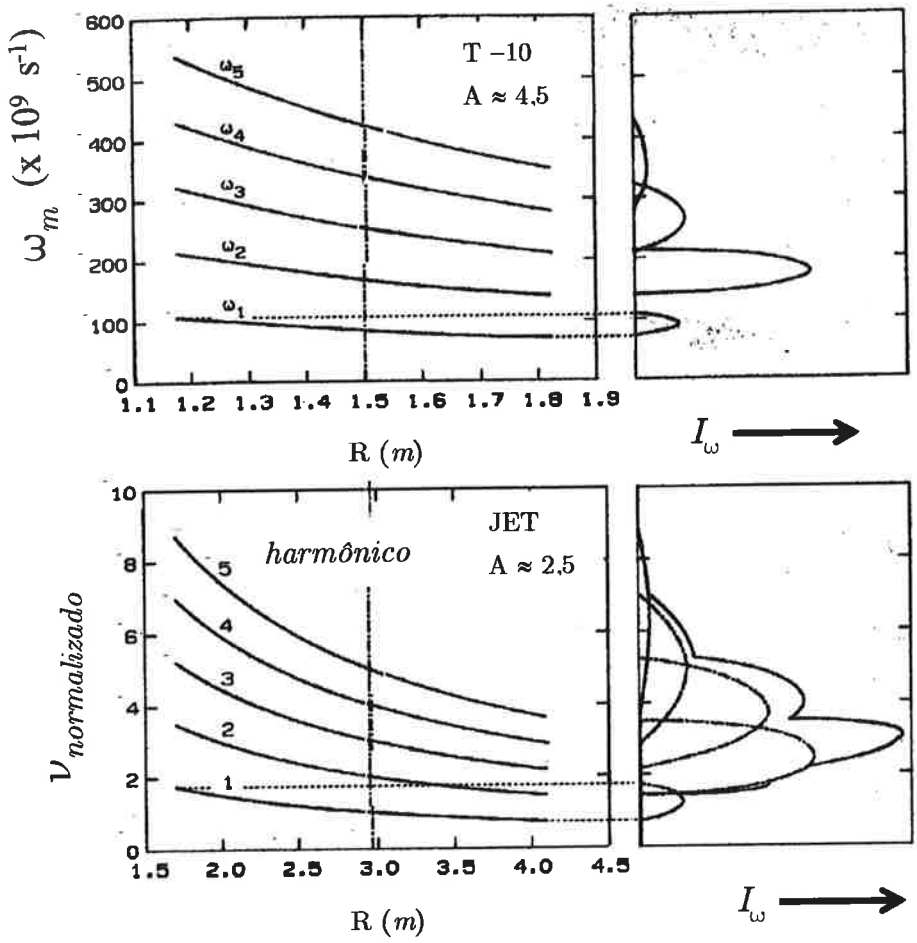


Fig. II.3: Gráficos da relação raio-freqüência $\omega_m(R)$ e $\nu(R)$ normalizado, mostrados à esquerda. À direita temos os espectros da emissão eletrociclotrônica I_ω. Os dois gráficos superiores são para o tokamak $T-10$ de alta razão de aspecto ($A \sim 4{,}5$) e abaixo temos os gráficos para o JET que tem razão de aspecto mais baixa ($A \sim 2{,}5$). Note a influência da profundidade óptica – que é baixa – para grandes harmônicos $m > 2$ [Kei89]

A Fig. II.3 mostra claramente o entrelaçamento de harmônicas. Esse efeito é mais visível para harmônicas superiores e ocorre de maneira mais forte em máquinas de menor razão de aspecto $A = R_0/a$ [Gro84], tal como no tokamak JET com $A \sim 2{,}5$. Essa máquina apresenta grandes regiões de entrelaçamento dificultando a aplicação do método de diagnóstico por EEC.

II. 3 – Os limites de aplicação do diagnóstico por EEC

A implementação do diagnóstico por emissão eletrociclotrônica para plasmas de máquinas tokamaks é limitada por fatores inerentes aos possíveis cenários de plasma, bem como, a própria geometria das máquinas. As limitações estão ligadas principalmente às condições de acessibilidade, às de absorvibilidade e, como vimos, ao entrelaçamento de harmônicas. As duas primeiras condições são afetadas pela polarização da onda EEC. Tem-se basicamente dois tipos de polarização: a onda ordinária – polarização O – onde o campo elétrico da onda, $\mathbf{E}$, é paralelo ao campo magnético toroidal $\left(\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_\phi\right)$ e a onda extraordinária – polarização X – onde o campo $\mathbf{E}$ é perpendicular ao campo magnético toroidal $\left(\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_\phi\right)$

As condições de acessibilidade estão ligadas à propagação da radiação-EC no plasma e principalmente às várias freqüências de corte e de ressonância. O corte ocorre no plasma quando o índice de refração tende a zero e, conseqüentemente, com o comprimento de onda tendendo ao infinito. Uma ressonância ocorre quando o índice de refração vai para o infinito e o comprimento de onda vai a zero. No caso de plasmas magneticamente confinados por tokamaks, uma onda propaga-se através de uma região onde tanto freqüência de plasma $\omega_P = \left(nq_e^2/\epsilon_0 m_e\right)^{1/2}$ como a freqüência eletrociclotrônica ω_B estão mudando – ω_P é proporcional a raiz quadrada da densidade e ω_B proporcional ao campo toroidal. É de se esperar que essa onda passe por regiões onde sofra cortes ou ressonâncias. O efeito físico de um corte é a reflexão total da radiação enquanto que, na ressonância, a radiação é absorvida. Em ambos os casos a radiação é barrada nas regiões onde ocorrem esses fenômenos fazendo com que a onda não seja acessível a um observador externo.

As condições de acessibilidade podem ser determinadas a partir da relação de dispersão de plasmas frios. Essa abordagem é possível pois os efeitos cinéticos sobre a propagação de EEC somente são importantes nas regiões ressonantes que são estreitas em relação às dimensões da coluna de plasma. A região de interação, para o TCABR, como veremos é da ordem de alguns milímetros. No capítulo III, as expressões para as freqüências de corte e ressonância são obtidas e discutidas a partir do modelo de plasmas frios.

As condições de absorvibilidade envolvem estudos sobre o transporte de radiação pelo plasma. A radiação-EC percorre a coluna de plasma podendo sofrer diversos graus de re-absorção, dependendo das características físicas do plasma, da polarização e da freqüência da radiação-EC. A análise do grau de opacidade do plasma em relação à radiação-EC é feita

considerando a profundidade óptica τ. Veremos posteriormente que a profundidade óptica é uma grandeza local, devido ao caráter ressonante da radiação-EC. Quando o plasma apresenta uma profundidade óptica pequena ($\tau \ll 1$) ocorre pouca re-absorção de radiação pelo plasma, e este comporta-se como um meio transparente. Por outro lado, considera-se um plasma opaco quando se tem $\tau \gg 1$.

II.4 – Alargamentos do espectro da radiação eletrociclotrônica e regimes de EEC

As linhas de emissão da radiação-EC ω_m sofrem vários mecanismos de alargamento [Bek66]. Desses mecanismos, os mais relevantes para o diagnóstico por EEC em máquinas tokamaks, são: o alargamento relativístico, o alargamento Doppler e o alargamento devido a não homogeneidade do campo magnético.

O alargamento relativístico é um efeito da dependência da massa da partícula devido ao seu movimento. Assim, a freqüência eletrociclotrônica ω_B é deslocada em direção às baixas freqüências visto que na equação (II.2.2) a massa será expressa por γm_e, onde m_e é a massa de repouso do elétron. O alargamento Doppler também é uma deformação do espectro devido ao movimento relativo dos elétrons mas o deslocamento das linhas ocorre de maneira simétrica em relação a ω_m. Finalmente, o alargamento devido a não-uniformidade do campo magnético toroidal é o mais importante em nosso estudo. Este alargamento é o que permite a visualização dos espectros mostrados na Fig. II.2.

Na abordagem teórica do problema da emissão eletrociclotrônica em plasmas magnetizados fazem-se hipóteses que permitem simplificar o tratamento analítico ou numérico das quantidades importantes para a determinação do espectro de emissão. Com tais hipóteses podemos identificar dois importantes regimes para os plasmas magnetizados e que são de interesse para a EEC. O primeiro está relacionado ao espectro de energias dos elétrons sendo denominado regime de plasma pouco-relativístico. Esse regime é definido pela condição:

$$m\frac{v_T}{c} \ll 1 \quad , \tag{II.4.1}$$

onde m é o harmônico e $v_T = (k_B T_e/m_e)^{1/2}$ é a velocidade térmica dos elétrons. Fisicamente essa relação implica que não há sobreposição de harmônicas sucessivas devido ao alargamento relativístico.

O segundo, relaciona-se com os valores da densidade de elétrons e do campo magnético toroidal sendo definido pela relação:

$$\frac{\omega_P^2}{m^2\omega_B^2} \ll 1 \quad , \tag{II.4.2}$$

onde ω_P é a freqüência de plasma e ω_B é a freqüência ciclotrônica. Este é o regime de plasma tênue.

Para o TCABR com uma temperatura máxima de $0{,}5\,\mathrm{keV}$ a velocidade térmica é $\sim 9\%$ da velocidade da luz, portanto, considerando harmônicas menores que 4, a relação (II.4.1) é satisfeita. Além disso, usando os parâmetros dados na tabela II.1, a relação (II.4.2) é da ordem de $0{,}4$, para $m = 1$. Se a condição (II.4.2) não for satisfeita temos que abordar a radiação-EC a partir do modelo dielétrico que é discutido no capítulo V.

III. – Propagação da radiação em meios materiais

Neste capítulo vamos examinar questões relacionadas ao transporte da radiação eletromagnética no plasma em meios dielétricos [Bek66, Sch50]. Partimos da conservação de energia considerando a interação da radiação com o meio. Nestes cálculos não se faz hipóteses sobre o meio material e portanto os resultados apresentados podem ser utilizados para outros materiais que não o plasma. Discute-se a profundidade óptica τ que é um parâmetro importante nos estudos das condições de absorvibilidade do plasma. Outro ponto de grande interesse para o diagnóstico por EEC é a determinação das condições de acessibilidade da radiação-EC. Essa determinação é feita a partir de resultados do modelo de plasmas frios com os quais podemos calcular as regiões de propagação e não-propagação da radiação. Essas regiões são delimitadas pelos cortes e ressonâncias.

III.1 – Equação de transporte de radiação

Seja uma superfície de área da cuja orientação é dada pelo versor normal $\hat{\mathbf{n}}$. O vetor de Poynting $\mathbf{F} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ nessa superfície dá a densidade de energia (W/m^2). Fazendo a transformada de Fourier desse vetor temos $\mathbf{F}_\omega$ a densidade espectral de fluxo (fluxo médio – W/m^{2}s^{-1}). O fluxo que atravessa a área da dentro de um cone de ângulo sólido $d\Omega$ (fig. III.1) é dado por:

$$d\mathbf{F}_\omega \cdot \hat{\mathbf{n}} = I_\omega \cos\xi d\Omega \quad , \tag{III.1.1}$$

onde ξ é o ângulo entre $\mathbf{F}_\omega$ e $\hat{\mathbf{n}}$. A quantidade I_ω é conhecida como intensidade específica espectral, ou simplesmente intensidade espectral, sendo importante em diagnóstico de plasmas. E uma grandeza escalar que mede a potência espectral da radiação eletromagnética numa banda de freqüências muito estreita entre ω e $\omega + d\omega$, por unidade de área emissora, por freqüência e por ângulo sólido. No Sistema Internacional de unidades (SI) a unidade de I_ω é watt por metro quadrado por esferorradiano por segundo. A potência espectral numa determinada banda de freqüências $d\omega$ que atravessa a área da é dada por:

$$dP_\omega = I_\omega \cos\xi da d\omega d\Omega \quad . \tag{III.1.2}$$

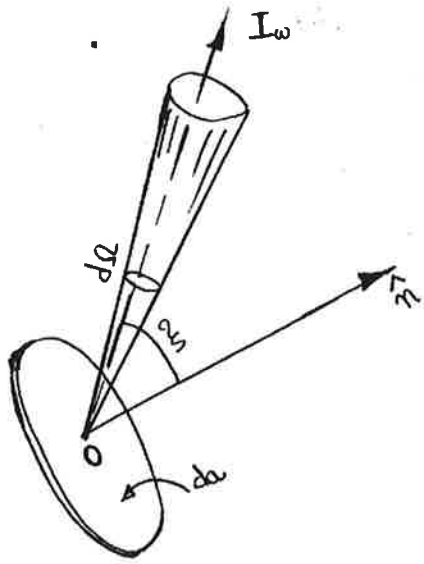


Fig III.1 :Elemento de área emissora de radiação mostrando as principais quantidades radiométricas.

Supondo que a radiação de intensidade I_ω atinja uma antena receptora de área A, então a potência total incidente (por intervalo de freqüência) nessa antena é dada por:

$$I_\omega(\xi,\Phi)A\cos\xi d\Omega \quad . \tag{III.1.3}$$

Entretanto, no caso de uma antena real sabemos que, pelo fato dela ter sensibilidade dependente da direção o fator simples $A\cos\xi$ deve ser substituído por $A_{ef}(\xi,\Phi)$, grandeza que é denominada área efetiva da antena [Kra66, Ste63]. $A_{ef}(\xi,\Phi)$ depende das coordenadas ξ e Φ definidas a partir do eixo da antena. Essa dependência angular está relacionada com fenômenos de interferência e depende do desenho particular de cada antena. No caso do diagnóstico de EEC utiliza-se antenas altamente direcionais, ou seja, antenas com valores muito altos da área efetiva para $\xi = 0$. Nessas condições a potência entregue pela antena ao detector do radiômetro é dada por:

$$P_\omega = \int_{4\pi} I_\omega(\xi,\Phi)A_{ef}(\xi,\Phi)d\Omega \quad . \tag{III.1.4}$$

A equação de transporte descreve o comportamento da intensidade específica I_ω de uma radiação ao propagar-se num meio material podendo ser amplificada ou atenuada. A potência espectral emitida por unidade de ângulo sólido $d\Omega$ e por unidade de freqüência pode ser considerada proporcional ao volume dV do emissor:

$$dP_\omega = j_\omega \cos\xi dV d\Omega d\omega \quad , \tag{III.1.5}$$

onde j_ω é o coeficiente de emissão ou emissividade espectral do meio, definido pela taxa de energia (potência) irradiada pelo meio por unidade de volume, por unidade de ângulo sólido e por unidade de freqüência. Considerando um meio através do qual um feixe de radiação se propaga podemos admitir que a potência absorvida durante a propagação é proporcional ao caminho óptico (ds) percorrido pela radiação e proporcional a intensidade do feixe, isto é:

$$dP_\omega = -\alpha_\omega ds I_\omega \cos\xi da d\omega d\Omega \quad , \tag{III.1.6}$$

onde α_ω é o coeficiente de absorção do meio, ou seja, a taxa de absorção da radiação por unidade de percurso do feixe.

Uma vez definidas as quantidades j_ω e α_ω, a equação de transporte de radiação pode ser obtida pelo balanço energético da radiação ao se propagar num meio. Tomamos um elemento de volume com base de área da e com espessura ds conforme mostrado na Fig. III.2. Nessa figura representamos um feixe que atinge o elemento de volume segundo a direção ξ_1 em relação à normal, é refratado, e sai segundo a direção ξ_2. Nessa situação a potência emitida por esse elemento de volume através do elemento "da" no interior de um cone elementar $d\Omega$ é dada por:

$$dP_\omega = j_\omega \cos\xi da ds d\Omega d\omega \quad . \tag{III.1.7}$$

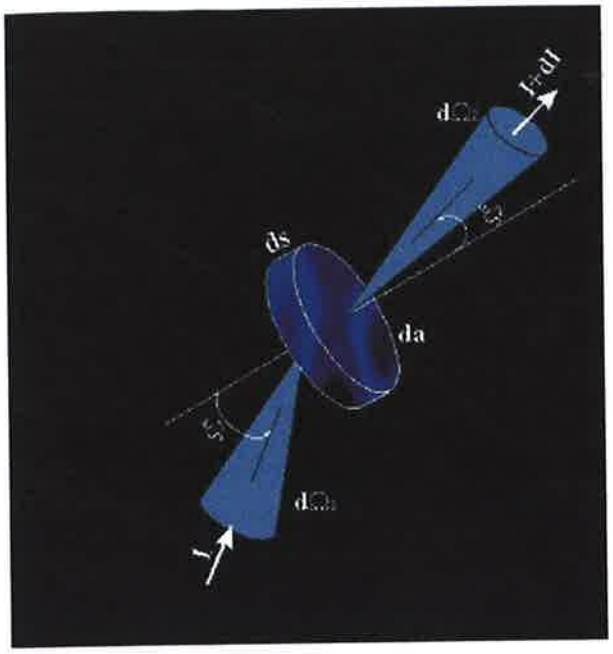


Fig III.2: Ilustração de um elemento de volume de material no qual uma radiação eletromagnética de intensidade específica I, com ângulo de incidência ξ_1 e ângulo sólido $d\Omega_1$ alterada para uma intensidade $I + dI$ com ângulo ξ_2 e ângulo sólido $d\Omega_2$. A pastilha de material, tem um volume $dV = dads$

Para examinar o balanço energético da radiação, consideramos um pequeno volume de material um pincel de radiação monocromático de ângulo sólido $d\Omega_1$ e inclinação ξ_1 com intensidade I_ω. Do outro lado, emerge um pincel de ângulo $d\Omega_2$ e inclinação ξ_2 com intensidade $I_\omega + dI_\omega$. Admitindo que o meio com características não-homogêneas, o feixe sofrerá um desvio devido às mudanças do índice de refração nesse meio. Portanto teremos $\xi_1 \neq \xi_2$. Estamos interessados em encontrar a equação que rege o comportamento da intensidade. Para isso, vamos considerar o balanço de energia:

$$dP_{\omega 2} - dP_{\omega 1} \quad , \tag{III.1.8}$$

onde $dP_{\omega 1}$ e $dP_{\omega 2}$ são as potências incidentes e emergentes respectivamente. Essas quantidades são dadas pela equação (III.1.2) e o balanço acima pode ser escrito como:

$$(I_\omega + dI_\omega) da \cos\xi_2 d\Omega_2 d\omega - I_\omega da \cos\xi_1 d\Omega_1 d\omega \quad , \tag{III.1.9}$$

onde I_ω é a intensidade específica que entra na pastilha. A diferença $dP_{\omega 2} - dP_{\omega 1}$ é nula se o meio não absorve nem emite radiação, isto é, se o meio for perfeitamente transparente. Para uma situação em que o meio é emissor e/ou absorvedor, como o plasma, deve-se considerar os termos (III.1.5) e (III.1.6) e a relação (III.1.9) deve então ser igualada a:

$$j_\omega \cos\xi dadsd\Omega d\omega - \alpha_\omega \cos\xi I_\omega(s) dsdad\Omega d\omega \quad . \tag{III.1.10}$$

onde o primeiro termo se deve a emissão e o segundo a absorção.

Num meio dielétrico não homogêneo, onde a escala espacial de variação das grandezas é bem maior que o comprimento de onda da radiação, podemos assumir a validade da lei de Snell-Descartes, ou seja [Mar55]:

$$N_{r1}\text{sen}\xi_1 = N_{r2}\text{sen}\xi_2 \quad , \tag{III.1.11}$$

onde N_r é o índice de refração na direção de propagação do raio. Note que, num meio anisotrópico como é o caso de um plasma magnetizado, o índice de refração depende da direção de propagação. Derivando implicitamente a equação (III.1.11) em relação a ξ_1 $(\xi_2 = \xi_2(\xi_1))$, obtemos

$$\frac{d\xi_1}{d\xi_2} = \frac{N_{r1}\cos\xi_1}{N_{r2}\cos\xi_2} \quad . \tag{III.1.12}$$

Examinado a Fig. III.3, e considerando uma pequena rotação do raio incidente em relação ao eixo z de $d\phi$ temos que os pontos A_1 e A_2 se deslocam, respectivamente de $d\ell_1$ e $d\ell_2$ dados por:

$$d\ell_1 = r\text{sen}\xi_1 d\phi \quad \text{e} \tag{III.1.13}$$

$$d\ell_2 = r\text{sen}\xi_2 d\phi \quad . \tag{III.1.14}$$

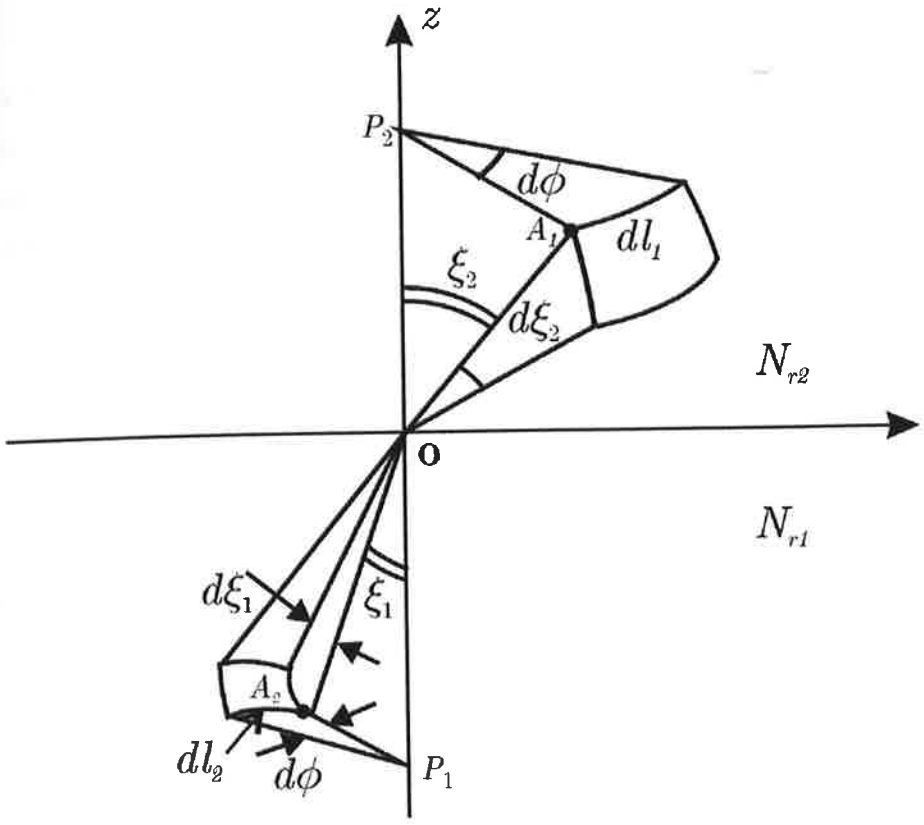


Fig. III.3: Geometria para o cálculo da lei de Snell-Descartes para um ângulo sólido.

Assim, considerando os deslocamentos $d\phi$ e $d\xi$ nos dois meios, temos os ângulos sólidos:

$$d\Omega_1 = \text{sen}\xi_1 d\xi_1 d\phi \text{ e} \tag{III.1.15}$$

$$d\Omega_2 = \text{sen}\xi_2 d\xi_2 d\phi \,. \tag{III.1.16}$$

Dividindo (III.1.15) por (III.1.16) e usando a relação (III.1.12) chegamos ao resultado

$$N_{r2}^2 \cos\xi_2 d\Omega_2 = N_{r1}^2 \cos\xi_1 d\Omega_1 \quad . \tag{III.1.17}$$

Esta equação nos mostra que quando um feixe de radiação que sofre refração, ao passar por um meio óptico não-homogêneo, a quantidade $N_r^2 \cos\xi d\Omega$ é mantida constante. Portanto, a lei de Snell-Descartes pode ser escrita na forma:

$$N_r^2 \cos\xi d\Omega = \text{constante no caminho óptico} \quad . \tag{III.1.18}$$

O balanço da energia dentro do volume dV, levando-se em conta a absorção e emissão da radiação, pode ser obtido igualando-se as expressões (III.1.9) e (III.1.10). Fazendo uso da lei de Snell-Descartes na forma da equação (III.1.18) chega-se a equação de transferência da radiação que pode ser colocada na forma[Bek66]:

$$N_r^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{I_\omega}{N_r^2}\right) = j_\omega - \alpha_\omega I_\omega \quad . \tag{III.1.19}$$

Vamos agora integrar essa equação para se obter a dependência de I_ω com o percurso s da radiação. O coeficiente de emissão j_ω, o coeficiente de absorção α_ω e o índice de refração do raio N_r permitem a definição de S_ω dado por:

$$S_\omega = \frac{1}{N_r^2}\frac{j_\omega}{\alpha_\omega} \quad , \tag{III.1.20}$$

grandeza conhecida como função fonte. Podemos reescrever a equação de transporte da seguinte forma:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{I_\omega}{N_r^2}\right) = \frac{j_\omega}{N_r^2} - \alpha_\omega \frac{I_\omega}{N_r^2} \Rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{I_\omega}{N_r^2}\right) = \alpha_\omega S_\omega - \alpha_\omega \frac{I_\omega}{N_r^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{I_\omega}{N_r^2}\right) = \alpha_\omega\left(S_\omega - \frac{I_\omega}{N_r^2}\right) \Rightarrow -\frac{1}{\alpha_\omega}\frac{d}{ds}\left(\frac{I_\omega}{N_r^2}\right) = \frac{I_\omega}{N_r^2} - S_\omega \Rightarrow$$

ou seja:

$$-\frac{1}{\alpha_\omega}\frac{d}{ds}\left(\frac{I_\omega}{N_r^2}\right) = \frac{I_\omega}{N_r^2} - S_\omega \quad , \tag{III.1.21}$$

de onde, fazendo a mudança de variável $d\tau = -\alpha_\omega ds$, obtemos:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{I_\omega}{N_r^2}\right) = \frac{I_\omega}{N_r^2} - S_\omega \quad . \tag{III.1.22}$$

Multiplicando esta equação por fator $\exp(-\tau)$, encontramos:

$$e^{-\tau}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{I_\omega}{N_r^2}\right)=e^{-\tau}\frac{I_\omega}{N_r^2}-e^{-\tau}S_\omega \Rightarrow e^{-\tau}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{I_\omega}{N_r^2}\right)-e^{-\tau}\frac{I_\omega}{N_r^2}=e^{-\tau}S_\omega \Rightarrow \frac{d}{d\tau}\left(e^{-\tau}\frac{I_\omega}{N_r^2}\right)=e^{-\tau}S_\omega \quad ,$$

ou seja:

$$d\left(e^{-\tau}\frac{I_\omega}{N_r^2}\right)=e^{-\tau}S_\omega d\tau \quad . \qquad \text{(III.1.23)}$$

Tomando um percurso determinado e integrando essa equação entre um ponto A até um ponto B temos:

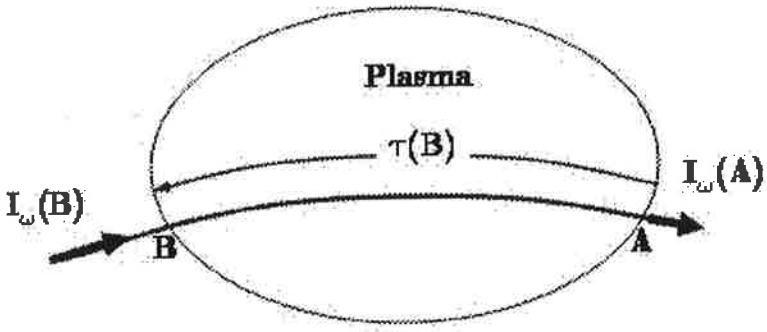


Fig. III.4: trajetória de um raio num meio (plasma).

$$\int_A^B d\left(e^{-\tau}\frac{I_\omega}{N_r^2}\right)=\int_{\tau(B)}^{\tau(A)} e^{-\tau}S_\omega d\tau \Rightarrow \quad e^{-\tau}\frac{I_\omega}{N_r^2}\Bigg|_A^B=\int_{\tau(B)}^{\tau(A)} e^{-\tau}S_\omega d\tau \Rightarrow$$

$$e^{-\tau_B}\frac{I_\omega(B)}{N_r^2(B)}-e^{-\tau(A)}\frac{I_\omega(A)}{N_r^2(A)}=\int_{\tau(B)}^{\tau(A)} e^{-\tau}S_\omega d\tau \Rightarrow \frac{I_\omega(A)}{N_r^2(A)}e^{-\tau(A)}=\frac{I_\omega(B)}{N_r^2(B)}e^{-\tau(B)}+\int_{\tau(A)}^{\tau(B)} e^{-\tau}S_\omega d\tau$$

ou seja:

$$I_\omega(A)=\frac{N_r^2(A)}{N_r^2(B)}I_\omega(B)e^{\tau(A)-\tau(B)}+N_r^2(A)e^{\tau(A)}\int_{\tau(A)}^{\tau(B)} e^{-\tau}S_\omega d\tau \quad . \qquad \text{(III.1.24)}$$

onde τ é a profundidade óptica dada por:

$$\tau = \int_A^B \alpha_\omega ds \quad . \tag{III.1.25}$$

A profundidade óptica é calculada a partir de uma origem de τ - em geral o ponto de emergência do raio do meio – e integrada no sentido oposto ao percurso do raio. Isso decorre da relação $d\tau = -\alpha_\omega ds$, utilizada anteriormente. Examinando a relação (III.1.24), consideramos $I_\omega(B)$ a intensidade incidente na coluna de plasma e $I_\omega(A)$ a intensidade no ponto de saída da radiação da coluna que será detectada pelo radiômetro. Se assumirmos que o meio externo à coluna de plasma é vácuo como ocorre nos tokamaks , temos então os índices de refração do raio nos pontos A e B como sendo $N_r(A) = N_r(B) = 1$, e a equação (III.1.24) assume a forma simplificada:

$$I_\omega(A) = I_\omega(B)e^{-\tau(B)} + \int_0^{\tau(B)} e^{-\tau} S_\omega d\tau \quad . \tag{III.1.26}$$

Essa expressão muito útil para o diagnóstico por EEC ou aquecimento, mostra como a intensidade específica é alterada pela interação da radiação eletromagnética com um meio material.

Nos capítulos seguintes, mostraremos dois modelos utilizados para determinar a emissividade j_ω, o coeficiente de absorção α_ω e o índice de refração N_r.

Para plasmas de tokamak, toda a radiação-EC é gerada no interior da coluna não havendo qualquer intensidade incidente $I_\omega(B)$[2]. Supomos agora uma lâmina de plasma com j_ω e α_ω uniformes e um plasma tênue ($N_r \approx 1$). Com essas suposições, a equação (III.1.26) assume a forma

$$I_\omega(A) = \frac{j_\omega}{\alpha_\omega}\left(1 - e^{-\tau(B)}\right) \quad . \tag{III.1.27}$$

Essa relação, apesar de ter sido obtida para um meio uniforme, é utilizada em trabalhos envolvendo emissão eletrociclotrônica pois, como veremos nos capítulos que se seguem a região

[2] Neste trabalho, não consideramos as reflexões da radiação-EC nas paredes do vaso [Cos82].

de emissão é bastante estreita – pelo fato de ser um fenômeno ressonante. Portanto, a emissão bem como a absorção ocorrem em regiões de espessura muito pequena se comparadas com as dimensões da coluna e o mesmo ocorre com τ. Se $\tau \gg 1$, o meio é denominado opticamente espesso e, portanto, $I_\omega = j_\omega / \alpha_\omega$. Por outro lado, se $\tau \ll 1$, o meio é denominado opticamente fino ou transparente.

III. 2 – Determinação das condições de acessibilidade via modelo de plasmas frios

Uma onda propagando-se através de um plasma não homogêneo pode atingir regiões onde, para uma dada freqüência, não há propagação. Isso pode impedir que a radiação-EC, numa dada freqüência, emitida de algum ponto no plasma atinja uma antena colocada fora da coluna de plasma. Essas regiões de não propagação são delimitadas pelos cortes e ressonâncias. Se a condição de corte é atingida há reflexão e na ressonância temos absorção. Os cortes e ressonâncias são determinados a partir da relação de dispersão $g(\omega,k)=0$ para esse meio. Ocorrerá reflexão da onda quando o índice de refração tender a zero ($N \to 0$) naquele ponto. No caso em que $N \to \infty$ teremos uma ressonância.

Do ponto de vista do diagnóstico por EEC aplicado a tokamaks a acessibilidade é estudada a partir do modelo de plasmas frios [Bit95, Che74]. O uso deste modelo numa situação de plasmas quentes é aceitável pois os efeitos cinéticos somente são importantes na região de ressonância. Fora dessas regiões pode-se empregar a teoria de plasmas frios que nos permite obter as freqüências de corte e ressonância bem como as regiões de propagação e não propagação na coluna de plasma do tokamak. Apresentamos, a seguir, de forma resumida a teoria de ondas em plasmas frios. Consideramos ondas de pequena amplitude pois isso nos permite a linearização das equações. Para a obtenção de $g(\omega,k)=0$ o plasma é assumido homogêneo e infinito e não levando em conta os efeitos de borda. O campo magnético externo é considerado uniforme.

A seguir, vamos obter as relações de dispersão para os modos ordinário e extraordinário, as condições de corte e ressonância que nos permite discutir a questão da acessibilidade da radiação-EC. Essa discussão é feita a partir da dependência radial de freqüências relevantes e

também do chamado diagrama CMA (Clemmow-Mullary-Allis). Esses dois métodos possibilitam uma verificação explícita das regiões de propagação da onda.

Podemos utilizar a teoria de plasmas frios quando a velocidade de fase da onda é muito maior que a velocidade térmica das partículas. Do ponto de vista da Teoria Cinética de Plasmas, o modelo de plasma frio implica em assumir que a função de distribuição é uma função delta de Dirac centrada na velocidade média das partículas.

A teoria de plasmas frios parte basicamente de um sistema de cinco equações: a equação da conservação do momento, na forma da equação de Langevin, e as quatro equações de Maxwell. Somente o movimento dos elétrons é levado em conta, pois para a faixa de freqüências da radiação-EC os íons podem ser considerados em repouso devido a sua grande inércia. As equações são:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{u} = \frac{q_e}{m_e}(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \upsilon \mathbf{u} \quad , \tag{III.2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \tag{III.2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \tag{III.2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{e} \tag{III.2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B} = -\mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \quad , \tag{III.2.5}$$

onde $\mathbf{u}$, m_e e $q_e = -e$ são a massa, a velocidade média e a carga elétrica dos elétrons, respectivamente. A freqüência de colisões é representado por υ. As fontes do campo eletromagnético nesse modelo de plasmas frios são dadas por:

$$\rho = -en \quad \text{e} \tag{III.2.6}$$

$$J = -en\mathbf{u} \quad , \tag{III.2.7}$$

onde n representa a densidade dos elétrons.

A equação de Langevin contém um termo não linear $\left(\mathbf{u}\cdot\partial/\partial\mathbf{r}\right)\mathbf{u}$ e forma com o termo $\partial\mathbf{u}/\partial t$ a aceleração convectiva, mostrando que mesmo para esse modelo simples as equações são de difícil solução analítica geral. Desprezamos esse termo não linear admitindo que as perturbações são pequenas, ou seja, utiliza-se o procedimento de linearização. Mesmo com essa restrição, a diversidade de fenômenos ondulatórios possíveis num ambiente de plasmas é muito grande. Considera-se aqui as várias quantidades envolvidas – velocidades, campos eletromagnéticos, densidades, etc. – como formadas por uma parte em equilíbrio e outra oscilatória com pequena amplitude, isto é, dada uma quantidade $\mathbf{A}$, podemos escrever:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1(\mathbf{r},t) \quad , \tag{III.2.8}$$

onde $\mathbf{A}_0$ é constante e $\mathbf{A}_1(\mathbf{r},t)$ é a perturbação com $\mathbf{A}_1(\mathbf{r},t) \ll \mathbf{A}_0$. No caso, as quantidades de interesse são os campos magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ e elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, a densidade de partículas $n(\mathbf{r},t)$ e a velocidade. Assumimos que a parte oscilatória tem a forma de ondas planas e harmônicas, isto é, $\mathbf{A}_1(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}_\omega \exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\right]$. Assim, temos[Bit95]:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_\omega \exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\right] \quad , \tag{III.2.9}$$

$$n(\mathbf{r},t) = n_0 + n_\omega \exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\right] \quad \text{e} \tag{III.2.10}$$

$$\mathbf{E}(r,t) = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_\omega \exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\right] \quad , \tag{III.2.11}$$

onde $\mathbf{B}_0$ e n_0 são constantes reais que representam, respectivamente, o campo magnético e a densidade uniformes. Não vamos considerar a presença de campos elétricos externos, portanto $\mathbf{E}_0 = 0$. $\mathbf{B}_\omega$, $\mathbf{E}_\omega$ e n_ω são, respectivamente, as amplitudes das oscilações dos campos magnético, elétrico e densidade.

Na solução usando ondas planas e harmônicas, os operadores diferenciais $\partial/\partial\mathbf{r}$ e $\partial/\partial t$ são substituídos por $i\mathbf{k}$ e $-i\omega$ respectivamente. Portanto as equações (III.2.1), (III.2.4), e (III.2.5) tornam-se:

$$-i\omega m_e \mathbf{u} = -e\left(\mathbf{E}_\omega + \mathbf{u}\times\mathbf{B}_0\right) - m_e \upsilon \mathbf{u} \quad , \tag{III.2.12}$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\omega} = \omega\mathbf{B}_{\omega} \qquad \text{e} \tag{III.2.13}$$

$$-i\mathbf{k}\times\mathbf{B}_{\omega} = -\mu_0\left(en_0\mathbf{u} + i\omega\epsilon_0\mathbf{E}_{\omega}\right) \quad . \tag{III.2.14}$$

Essas três equações envolvendo as variáveis dependentes $\mathbf{u}$, $\mathbf{B}_{\omega}$ e $\mathbf{E}_{\omega}$ podem ser usadas para derivar a relação de dispersão da propagação da onda. Assim, combinando as equações (III.2.13) e (III.2.14) e rearranjando a equação (III.2.12), obtemos:

$$\mathbf{k}\times\left(\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\omega}\right) + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}_{\omega} = \frac{in_0e\omega}{\epsilon_0c^2}\mathbf{u} \qquad \text{e} \tag{III.2.15}$$

$$\mathbf{u}\left(1 + i\frac{v}{\omega}\right) + i\frac{e}{m_e\omega}\mathbf{u}\times\mathbf{B}_0 = -\frac{ie}{m_e\omega}\mathbf{E}_{\omega} \quad . \tag{III.2.16}$$

Chamaremos φ o ângulo entre o vetor de onda $\mathbf{k}$ e o campo magnético externo $\mathbf{B}_0$ e escolheremos um sistema de coordenadas cartesiano no qual a direção do eixo z coincide com o campo magnético e o eixo y é orientado na perpendicular ao plano formado por $\mathbf{k}$ e $\mathbf{B}_0$.

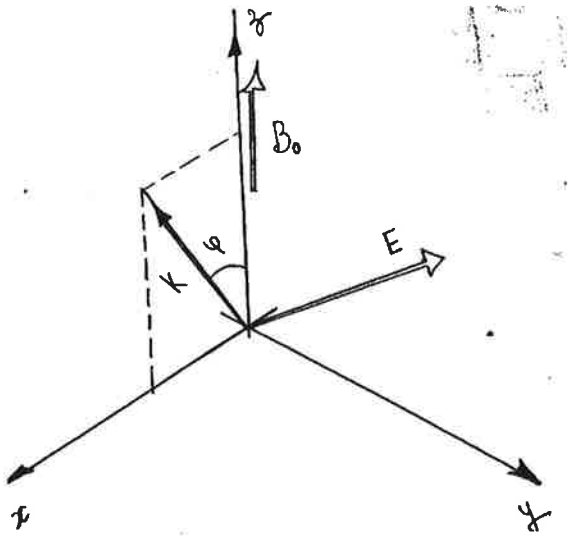


Fig. III.5: Definição dos vetores em termos das coordenadas canônicas.

Nesta situação temos:

$$\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}} \qquad \text{e} \tag{III.2.17}$$

$$\mathbf{k} = k_{\perp}\hat{\mathbf{x}} + k_{\parallel}\hat{\mathbf{z}} \quad , \tag{III.2.18}$$

onde $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ são os versores nas direções dos eixos x, y e z respectivamente. Com essa escolha e uma pequena álgebra, as (III.2.15) e (III.2.16) podem ser escritas, na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 1 - N^2\cos^2\varphi & 0 & N^2\text{sen}\varphi\cos\varphi \\ 0 & 1 - N^2 & 0 \\ N^2\text{sen}\varphi\cos\varphi & 0 & 1 - N^2\text{sen}^2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\omega x} \\ E_{\omega y} \\ E_{\omega z} \end{bmatrix} = \frac{ien_0}{\epsilon_0\omega} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad \text{e} \tag{III.2.19}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{i\upsilon}{\omega} & i\frac{\omega_B}{\omega} & 0 \\ i\frac{\omega_B}{\omega} & 1 + \frac{i\upsilon}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{i\upsilon}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \frac{ien_0}{\epsilon_0\omega} \begin{bmatrix} E_{\omega x} \\ E_{\omega y} \\ E_{\omega z} \end{bmatrix} \quad , \tag{III.2.20}$$

onde a quantidade $\mathbf{N} = \mathbf{k}c/\omega$ é o índice de refração do meio. Usando a notação $U = 1 + i\upsilon/\omega$, $X = \left(\omega_P/\omega\right)^2$ e $Y^2 = \left(\omega_B/\omega\right)^2$ e invertendo a matriz 3x3, obtemos:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = -\frac{ie}{m_e\omega U\left(U^2 - Y^2\right)} \begin{bmatrix} U^2 & -iUY & 0 \\ iUY & U^2 & 0 \\ 0 & 0 & U^2 - Y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\omega x} \\ E_{\omega y} \\ E_{\omega z} \end{bmatrix} \quad , \tag{III.2.21}$$

onde $\omega_P = \left(nq_e^2/\epsilon_0 m_e\right)^{1/2}$ e $\omega_B = eB_0/m_e$ são as freqüências de plasma e eletrociclotrônica respectivamente. Combinando as equações (III.2.19) com (III.2.21), obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1-N^2\cos^2\varphi & 0 & N^2\text{sen}\varphi\cos\varphi \\ 0 & 1-N^2 & 0 \\ N^2\text{sen}\varphi\cos\varphi & 0 & 1-N^2\text{sen}^2\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{\omega x} \\ E_{\omega y} \\ E_{\omega z} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{ien_0}{\epsilon_0\omega} - \frac{n_0e^2}{\epsilon_0 m_e\omega}\frac{1}{U\left(U^2-Y^2\right)}\begin{bmatrix} U^2 & -iUY & 0 \\ iUY & U^2 & 0 \\ 0 & 0 & U^2-Y^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{\omega x} \\ E_{\omega y} \\ E_{\omega z} \end{bmatrix} \quad . \tag{III.2.22}$$

Definindo agora as quantidades:

$$S = 1 - \frac{XU}{U^2-Y^2} \quad , \tag{III.2.23}$$

$$D = 1 - \frac{XY}{U^2-Y^2} \quad \text{e} \tag{III.2.24}$$

$$P = 1 - \frac{X}{U} \quad , \tag{III.2.25}$$

chegamos a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} S-N^2\cos^2\varphi & -iD & N^2\text{sen}\varphi\cos\varphi \\ iD & S^2-N^2 & 0 \\ N^2\text{sen}\varphi\cos\varphi & 0 & P-N^2\text{sen}^2\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{\omega x} \\ E_{\omega y} \\ E_{\omega z} \end{bmatrix} = 0 \quad . \tag{III.2.26}$$

Para que se tenha a solução não trivial ($\mathbf{E} \neq 0$), o determinante da matriz dos coeficientes deve ser nulo, isto é:

$$\left[S\text{sen}^2\varphi + P\cos^2\varphi\right]N^4 - \left[RL\text{sen}\varphi + SP\left(1+\cos^2\varphi\right)\right]N^2 + PRL = 0 \quad , \tag{III.2.27}$$

onde $R := S + D$ e $L := S - D$.

A equação (III.2.27) é a relação de dispersão procurada sendo uma equação quadrática em N^2, gerando, portanto, duas soluções. Isto significa que para cada freqüência existem dois

modos de propagação possíveis no plasma. Note, entretanto, que se tomarmos a raiz quadrada de N^2, obtemos outros dois valores de N, que correspondem as direções opostas de propagação.

Como estamos interessados na propagação de ondas eletrociclotrônicas a serem utilizadas com fins de diagnóstico do plasma no tokamak TCABR, e como a antena receptora é colocada de tal forma que observe o plasma na direção perpendicular ao campo magnético tomamos $\varphi = 90°$. Nesta situação, a equação (III.2.27) assume a forma mais simples

$$\left[S\left(S - N^2\right) - D^2\right]\left(P - N^2\right) = 0 \quad , \tag{III.2.28}$$

que nos dá as seguintes soluções para N^2:

$$N_O^2 = P \quad \text{e} \tag{III.2.29}$$

$$N_X^2 = \frac{RL}{S} \quad , \tag{III.2.30}$$

onde os índices "O" e "X" referem-se à polarização ordinária $(\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0)$ e extraordinária $(\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0)$, respectivamente. Como para os plasmas típicos do TCABR a freqüência de colisões dos elétrons é muito menor que a freqüência da onda na região eletrociclotrônica temos $\nu \ll \omega / 2\pi$ e podemos desprezar as colisões, ou seja vamos fazer $\nu_e \to 0$. Nessas condições obtemos:

$$N_O^2 = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \quad \text{e} \tag{III.2.31}$$

$$N_X^2 = \frac{\left(\omega^2 - \omega_L^2\right)\left(\omega^2 - \omega_R^2\right)}{\omega^2\left(\omega^2 - \omega_{HS}^2\right)} \quad , \tag{III.2.32}$$

onde

$$\omega_L = \frac{1}{2}\left[-\omega_B + \left(\omega_B^2 + 4\omega_P^2\right)^{1/2}\right] \quad , \tag{III.2.33}$$

$$\omega_R = \frac{1}{2}\left[\omega_B + \left(\omega_B^2 + 4\omega_P^2\right)^{1/2}\right] \quad \text{e} \tag{III.2.34}$$

$$\omega_{HS} = \left(\omega_B^2 + \omega_P^2\right)^{1/2} \quad , \tag{III.2.35}$$

onde ω_L e ω_R são as duas freqüências de corte do modo extraordinário e ω_{HS} é a freqüência híbrida superior. Da relação (III.2.31) temos que, para o modo ordinário, a freqüência de corte é dada por $\omega = \omega_P$.

Resumindo, das relações de dispersão obtidas e para o modo O, tem-se uma freqüência de corte e que não há ressonâncias. Para o modo X temos dois cortes, $\omega = \omega_L$ e $\omega = \omega_R$, e uma ressonância que ocorre quando $\omega = \omega_{HS}$. Temos portanto as freqüências necessárias para se estudar as condições de acessibilidade da radiação eletrociclotrônica. No decorrer do trabalho discutiremos as condições de propagação para os dois modos de propagação, entretanto o modo extraordinário será discutido com mais detalhes, pois como ficará claro este é o modo mais utilizado para o diagnóstico de plasmas por EEC no TCABR.

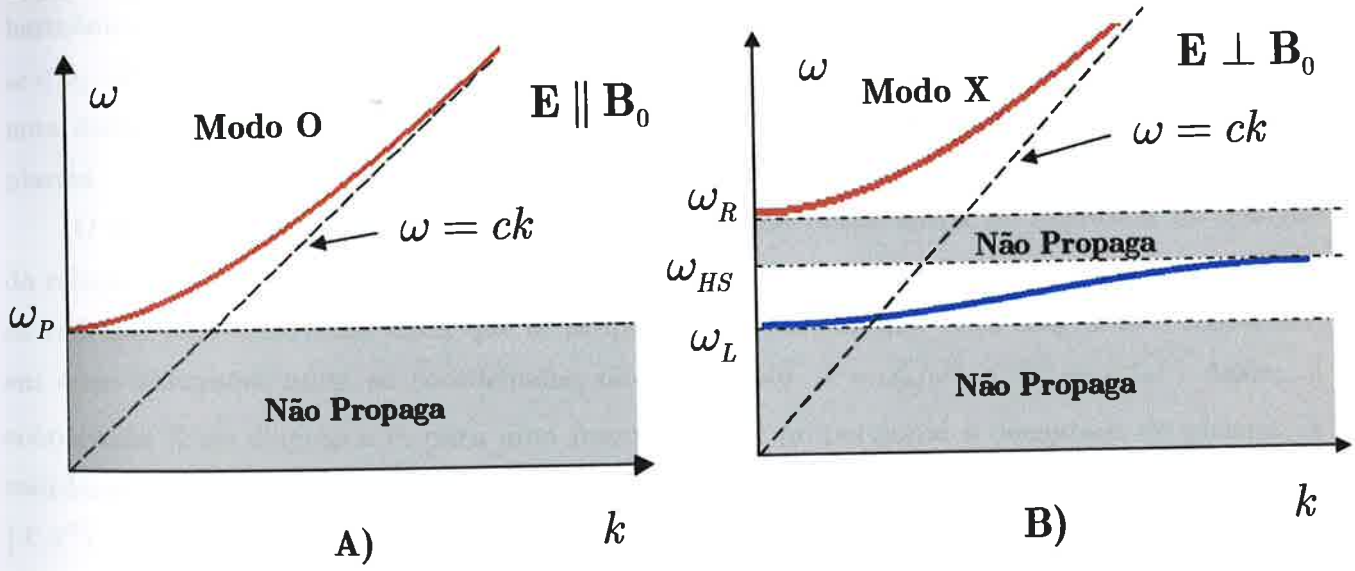


Fig. III.6: gráfico da relação de dispersão para plasmas frios e propagação paralela ao campo magnético

Na Fig. III.6 apresentam-se graficamente as relações de dispersão para propagação perpendicular ao campo magnético para os modos ordinário (A) e extraordinário (B). Esses gráficos foram gerados a partir das relações (III.2.31) e (III.2.32) onde se utilizou $N = kc/\omega$. Observamos que, para o modo ordinário, não existe onda se propagando para freqüências inferiores a ω_P. Assim, quando uma onda ordinária atinge esse valor, ela se torna evanescente sendo refletida. Para o modo extraordinário (Fig. III.6B) vemos duas regiões onde não há propagação. Uma onda no modo X não propaga para freqüências inferiores a freqüência de corte ω_L e para freqüências no intervalo entre ω_R e ω_{HS}.

Esses dois gráficos da Fig.III.6, são baseados nas relações de dispersão para um plasma homogêneo, isto é, sem variação espacial da densidade e do campo magnético. No caso de um tokamak temos uma dependência típica de campo magnético com a distância ao eixo maior da máquina. Além disso, existe uma dependência espacial da densidade, em geral considerada parabólica com o raio menor r. Neste caso usamos as mesmas relações de dispersão porém incorporando essas dependências espaciais em ω_P e ω_B. Para tokamaks, é útil estudar as condições de acessibilidade à radiação-EC apresentando graficamente as dependências radiais das harmônicas de $\omega = m\omega_B$, ω_P, ω_R, ω_L e ω_{HS}. Na Fig. III.7 mostramos um gráfico desse tipo. Nesta figura vemos, por exemplo, que, para um observador situado no lado de baixo campo da máquina, a segunda harmônica é parcialmente acessível para o modo X é acessível para o modo O. Reduzindo-se a densidade de tal forma a que tenhamos uma situação em que $\omega_R < 2\omega_B$, a segunda harmônica do modo X será totalmente acessível. A emissão na primeira harmônica no modo X é parcialmente inacessível do lado de campo baixo pois encontra a região $\omega < \omega_L$. Dessa forma, a partir de um gráfico desse tipo podemos examinar a acessibilidade para uma dada harmônica e para os dois modos, X e O, da radiação-EC emitida pela coluna de plasma.

O diagrama CMA (Clemmow-Mullary-Allis) é uma outra forma de expressar as soluções da relação de dispersão[Sti92]. Nesse diagrama é possível mostrar todas as ressonâncias e pontos de reflexão para uma dada onda que se propaga num plasma frio. Este diagrama é construído em duas dimensões onde as coordenadas são dadas por $X = \omega_P^2/\omega^2$ e $Y^2 = \omega_B^2/\omega^2$. Assim, a coordenada X no diagrama é, para uma freqüência ω, proporcional a densidade de plasma. A coordenada Y^2 é proporcional ao campo externo aplicado $\mathbf{B}_0$. Esse diagrama divide o plano (X, Y^2) em regiões a partir das curvas que representam os cortes e ressonâncias. Para encontrar as curvas de corte e ressonância vamos retornar às equações (III.2.29) e (III.2.30) e substituir as quantidades R, L e S pelas definições dadas pelas expressões (III.2.23) até (III.2.25),

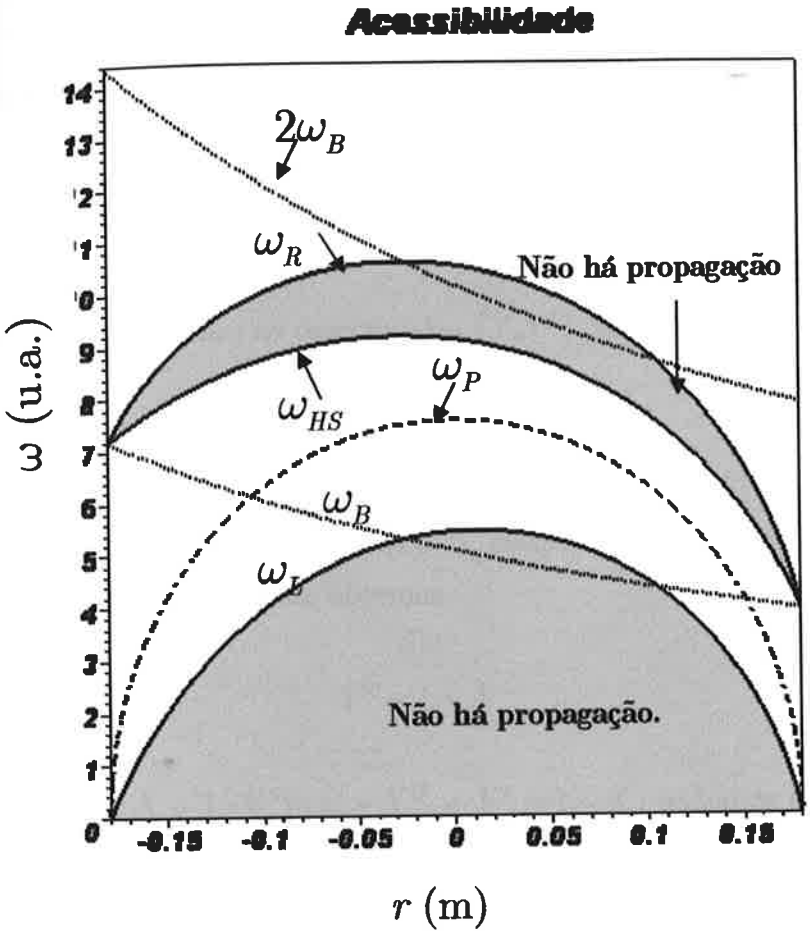


Fig.III.7: Gráfico típico mostrando a dependência radial das harmônicas de ω_B, e das freqüências ω_P, ω_B, ω_L e ω_{HS} para o tokamak TCABR. Não há propagação dentro das regiões $\omega < \omega_L$ e $\omega_{HS} < \omega < \omega_R$, indicadas em cinza.

Assim, obtemos:

$$N_o^2 = P = 1 - \frac{X}{U} = 1 - X \quad , \tag{III.2.36}$$

onde desprezamos aqui os efeitos das colisões, $\upsilon = 0$. Logo a condição de corte para o modo O ($N_o = 0$) é representado, no diagrama CMA pela reta $X = 1$. Como vimos, para o modo O não há ressonâncias.

Tomando agora a relação de dispersão para o modo X temos:

$$N_X^2 = \frac{RL}{S} = \frac{(S+D)(S-D)}{S} = \left(1 + \frac{D}{S}\right)\left(1 - \frac{D}{S}\right) \quad .$$

Ocorrerá o fenômeno de corte $(N \to 0)$ quando $D = S$ ou $D = -S$, então:

$$D = S \Rightarrow \frac{XY}{1-Y^2} = 1 - \frac{X}{1-Y^2} \Rightarrow \frac{XY+X}{1-Y^2} = 1 \Rightarrow \frac{X(Y+1)}{(1-Y)(1+Y)} = 1 \Rightarrow Y = 1 - X .$$

Como no diagrama CMA usamos as coordenadas (X, Y^2), tomamos a curva de corte como:

$$Y^2 = (1-X)^2 \tag{III.2.37}$$

É fácil mostrar que para $D = -S$ obtemos o mesmo resultado (III.2.37). A condição de ressonância é dada por $S = 0$, de onde obtemos :

$$Y^2 = 1 - X \quad . \tag{III.2.38}$$

Com os resultados $X = 1$, $Y^2 = (1-X)^2$ e $Y^2 = 1 - X$, podemos traçar no plano (X, Y^2) as curvas que dividem o plano em regiões onde há propagação ou não. O diagrama CMA é mostrado na Fig. III.8. A reta $X = 1$ divide o plano em duas partes. Para o modo O somente há propagação à esquerda dessa reta. As linhas $Y^2 = (1-X)^2$ e $Y^2 = 1 - X$ determinam as regiões de propagação e evanescência para o modo X. Num tokamak, por exemplo, uma onda EC emitida num dado ponto da coluna de plasma e que caminha para as bordas interna $(R_0 - a)$ e externa $(R_0 + a)$ percorre uma trajetória no diagrama que pode encontrar eventualmente regiões de não propagação.

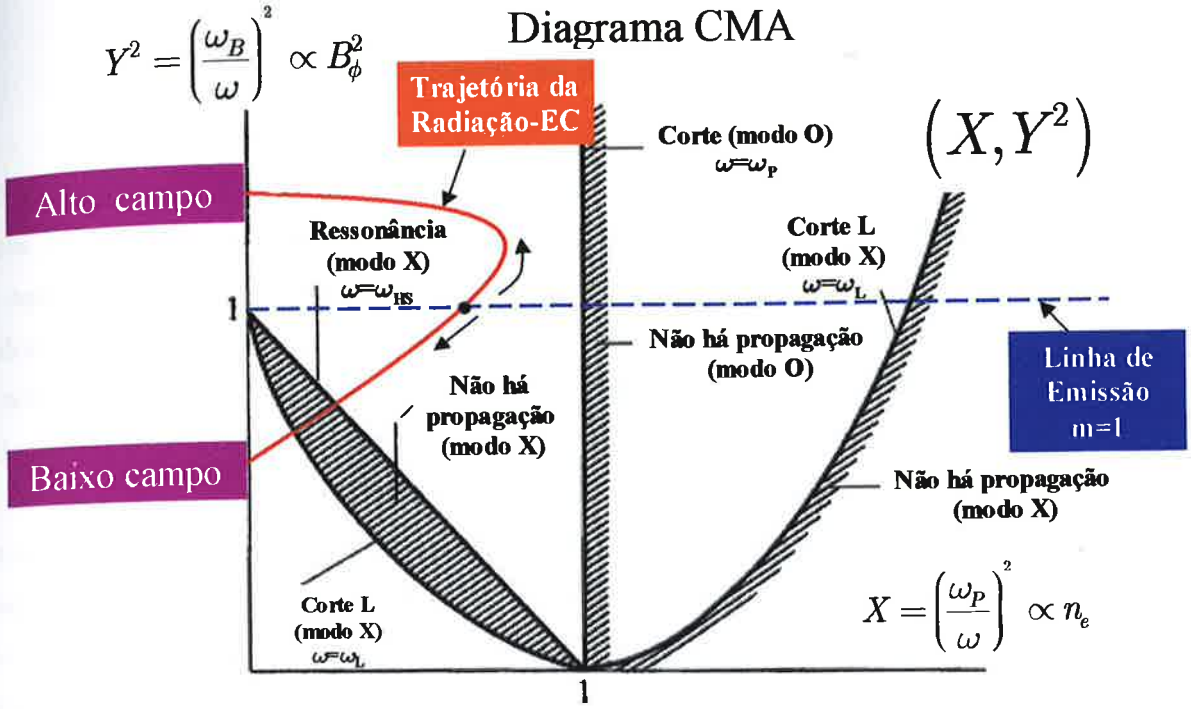


Fig. III.8: Diagrama CMA. As linhas determinadas pelas curvas $X = 1$, $Y^2 = (1-X)^2$ e $Y^2 = 1 - X$ dividem o plano em regiões de propagação e evanescência para os modos O e X. Num tokamak uma onda EC emitida num dado ponto da coluna de plasma caminha para as bordas interna $(R_0 - a)$ e externa $(R_0 + a)$ atravessando regiões com densidade e campos magnéticos diferentes e podendo encontrar regiões de não propagação que são indicadas no diagrama.

IV. Modelo de plasma tênue

Na equação do transporte de radiação (III.1.19), vista no capítulo anterior, temos duas grandezas importantes: a emissividade espectral j_ω e o coeficiente de absorção espectral α_ω. Vamos agora discutir a determinação dessas quantidades que é baseada em modelos físicos adequados que dependem do meio material considerado. Em nosso caso, o meio é um plasma quente não-homogêneo em relação à densidade, à temperatura e também em relação ao campo magnético no qual o plasma é imerso. Num primeiro momento, essas não-homogeneidades não serão consideradas tendo em vista que a escala espacial de variação dessas grandezas são muito maiores que a dos fenômenos estudados e portanto o plasma pode ser considerado homogêneo e sob a ação de campos magnéticos uniformes. Essa situação simplificada será posteriormente aplicada em cenários de plasmas confinados em tokamaks onde as não homogeneidades serão consideradas .

Conforme discutimos sucintamente no capítulo II podemos estimar a forma do espectro da emissão EC, para plasmas térmicos, considerando o plasma como um corpo negro ($I_{\omega N} \propto T_e\omega^2$) e utilizar expressões conhecidas para a profundidade óptica. Com perfis radiais típicos da densidade e da temperatura para o tokamak considerado pode-se calcular a intensidade da radiação que chega até a antena, ou seja, pode-se determinar $I_\omega = I_{\omega N}\left(1-e^{-\tau}\right)$.

Neste capítulo vamos discutir o modelo de plasmas tênues que tem uma estrutura matemática mais simples e nos permite ver de forma mais clara os processos físicos associados ligados a emissão eletrociclotrônica. Nesse modelo, a determinação de j_ω é baseada na emissão de radiação-EC ou síncrotron por elétrons individuais [Bek66, Hut87]. Parte-se dos potenciais de Liénard e Wiechert e determina-se, a partir deles, os campos de radiação para uma carga elétrica puntiforme em movimento arbitrário. O conhecimento da forma desses campos permite, em seguida, calcular a potência espectral por unidade de ângulo sólido $d^2P/d\omega d\Omega$ para um elétron em movimento em um campo magnético uniforme. Nas situações onde o meio é um plasma denso, isto é $\omega \sim \omega_P$, os efeitos dielétricos afetam o processo de emissão da radiação e uma abordagem pelo modelo dielétrico se faz necessária.

No modelo de pasma tênue, a partir da quantidade $d^2P/d\omega d\Omega$, resultado conhecido como equação de Schott-Trubnikov calcula-se a emissividade espectral j_ω a partir da integração de $d^2P/d\omega d\Omega$ utilizando-se a função distribuição como peso. Nessas condições, j_ω pode ser calculada para um plasma fora do equilíbrio térmico, ou seja com uma distribuição de

velocidades dos elétrons arbitrária. Nesse modelo vamos assumir a condição de plasma tênue ou seja $m\omega_B \ll \omega_P$, onde $\omega_P = (q_e^2 n_e / \epsilon_0 m_e)^{1/2}$ e $\omega_B = eB/m_e$ são, respectivamente, as freqüências de plasma e eletrociclotrônica. Aqui a emissão de um elétron não será afetada pela presença dos elétrons vizinhos e, portanto, a radiação-EC emitida um pequeno volume de plasma será dado simplesmente pela somatória de todas as emissões dos elétrons individuais. Podemos também admitir que $N_r \approx 1$. Esse modelo oferece resultados interessantes e j_ω pode ser calculado para plasmas térmicos e não térmicos mas α_ω só pode ser determinado para plasmas térmicos a partir da lei de Kirchhoff. Para estudos mais elaborados envolvendo plasmas densos e também onde tem-se, por exemplo, a presença de elétrons de alta energia (*runaway electrons*), esse modelo é inadequado sendo necessário a utilização de modelos mais elaborados que possibilitem a determinação de j_ω e α_ω em um espectro mais amplo de situações. Esses modelos serão examinados no próximo capítulo.

IV.1. – Radiação emitida por elétrons acelerados sob ação do campo magnético uniforme – Equação de Schott-Trubnikov

Considere uma carga puntiforme q em movimento arbitrário descrito pelo raio-vetor $\mathbf{r}_q(t)$ e com velocidade $\mathbf{v}_q(t)$ como mostra a Fig. IV.1. Partindo dos potenciais de Liénard-Wiechert pode-se mostrar que os campos elétricos e magnéticos totais num ponto P resultante do movimento arbitrário são dados pelas relações [Jac83]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\left(\hat{\mathbf{R}}-\boldsymbol{\beta}\right)}{\gamma^2\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)^3}\frac{1}{R^2} + \frac{\hat{\mathbf{R}}}{c\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)^3}\frac{1}{R}\times\left\{\left(\hat{\mathbf{R}}-\boldsymbol{\beta}\right)\times\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt}\right\}\right]_{t_r} \quad \text{e} \tag{IV.1.1}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\left[\hat{\mathbf{R}}\right]_{t_r}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \quad , \tag{IV.1.2}$$

onde $\gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$ com $\beta = v/c$ e $\hat{\mathbf{R}} = (\mathbf{R}/R)$ é o versor definido pela posição da carga no tempo retardado ($t_r = t - R/c$) e a posição do observador (antena) e $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_r)$. A notação "$[\ ]_{t_r}$" indica que as grandezas devem ser calculadas no tempo retardado.

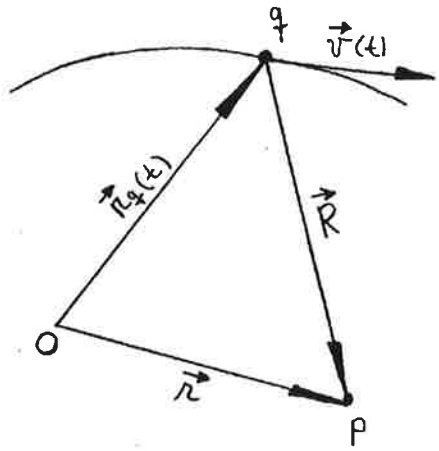


Fig. IV.1: Geometria para o cálculo dos campos da radiação de uma carga puntiforme q, que descreve uma trajetória no espaço $\mathbf{r}_q(t)$.

Um exame do campo $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ indica a presença de dois termos. Um deles, que cai com $1/R^2$, é conhecido como campo de velocidade. O outro termo, que varia com $1/R$, está relacionado com a radiação da energia eletromagnética sendo conhecido como campo de aceleração ou de radiação, e só é produzido por cargas aceleradas. Este é o termo que nos interessa para o cálculo da radiação-EC produzida pelo movimento de giro dos elétrons ao redor do campo magnético.

Como nosso interesse é determinar o espectro de emissão, vamos descrever $\mathbf{E}(t)$ em termos de amplitudes de Fourier $\mathbf{E}_\omega$ através da transformada

$$\mathbf{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\mathbf{E}_\omega d\omega \quad . \tag{IV.1.3}$$

Usando somente o termo de radiação, o coeficiente de Fourier $\mathbf{E}_\omega$ é dado por:

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left[\frac{\hat{\mathbf{R}}}{\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)^3}\frac{1}{cR}\times\left\{\left(\hat{\mathbf{R}}-\boldsymbol{\beta}\right)\times\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt}\right\}\right]_{t_r} dt \quad . \tag{IV.1.4}$$

Considerando pontos bastante afastados da carga emissora, $R \gg r_q$, podemos, nesta relação, assumir que o versor $\hat{\mathbf{R}}$ é constante e empregar a aproximação $R \simeq r - \hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{r}_q$ somente

no termo de fase $\exp i\omega t$. Fazendo uma mudança de variável de t para t_r, usando $t_r = t - R(t_r)/c$ e $dt = \left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right) dt_r$, obtemos após a integração por partes de (IV.1.4):

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{-i\omega q}{4\pi\epsilon_0 c R} \int_{-\infty}^{\infty} dt_r \hat{\mathbf{R}} \times \left(\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta}\right) \exp i\omega \left(t_r - \frac{\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{r}_q(t_r)}{c}\right) \quad , \tag{IV.1.5}$$

onde omitimos o termo não importante $\exp(i\omega r/c)$ que não é importante no cálculo da radiação.

No caso da radiação-EC vamos considerar elétrons movendo-se sob a ação de um campo magnetostático uniforme $\mathbf{B}_0$. As trajetórias $\mathbf{r}_e(t)$ dos elétrons são determinadas usando a segunda lei de Newton e a parte magnética da força de Lorentz:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_e \mathbf{v}) = q_e (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \quad , \tag{IV.1.6}$$

onde $q_e = -e$. Temos em (IV.1.6), um sistema de três equações acopladas que pode facilmente ser resolvido. Obtemos para a trajetória $\mathbf{r}_e(t)$ e velocidade $\boldsymbol{\beta}(t)$ do elétron:

$$\frac{\mathbf{r}_e(t)}{c} = \frac{\boldsymbol{\beta}_\perp}{\omega_\gamma}\left(\operatorname{sen}\omega_\gamma t\ \hat{\mathbf{x}} - \cos\omega_\gamma t\ \hat{\mathbf{y}}\right) + \boldsymbol{\beta}_\parallel t\hat{\mathbf{z}} \quad \text{e} \tag{IV.1.7}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_\perp\left(\cos\omega_\gamma t\ \hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\omega_\gamma t\ \hat{\mathbf{y}}\right) + \boldsymbol{\beta}_\parallel \hat{\mathbf{z}} \quad . \tag{IV.1.8}$$

Nestas relações, os versores $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ estão respectivamente nas direções x, y e z. Definimos por razões de cálculo a quantidade $\omega_\gamma := \omega_B/\gamma$. De acordo com a equação (IV.1.7), os elétrons tem trajetórias helicoidais em torno das linhas de campo magnético $\mathbf{B}_0$ como mostra a Fig IV.2. Por simplicidade, vamos supor que o observador esteja no plano definido pelos eixos x e z, isto é:

$$\hat{\mathbf{R}} = \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}. \tag{IV.1.9}$$

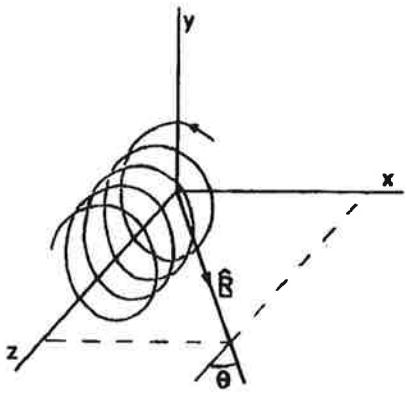


Fig. IV.2: trajetória de um elétron num campo magnético uniforme. θ é o ângulo de observação da radiação emitida em relação ao eixo z.

Assim, substituindo as equações da trajetória e da velocidade da partícula (IV.1.7), (IV.1.8) e o $\hat{\mathbf{R}}$ definido por (IV.1.9) no integrando da equação (IV.1.5) obtemos:

$$\hat{\mathbf{R}}\times\left(\hat{\mathbf{R}}\times\boldsymbol{\beta}\right)\exp i\omega\left(t-\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{r}_e\left(t_r\right)/c\right)= \tag{IV.1.10}$$

$$=\exp i\omega\left(t-\frac{\beta_\perp}{\omega_\gamma}\left(\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\omega_\gamma t\right)+\cos\theta\beta_\parallel t\right)\left\{\left(\beta_\parallel\mathrm{sen}\theta\cos\theta-\beta_\perp\cos^2\theta\cos\omega_\gamma t\right)\hat{\mathbf{x}}-\right.$$

$$\left.-\beta_\perp\mathrm{sen}\omega_\gamma t\hat{\mathbf{y}}+\left(\beta_\perp\cos\theta\mathrm{sen}\theta\cos\omega_\gamma t-\beta_\parallel\mathrm{sen}^2\theta\right)\hat{\mathbf{z}}\right\}.$$

Notamos na equação acima que a parte exponencial contém o fator $-i(\beta_\perp\omega/\omega_\gamma)(\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\omega_\gamma t)=-i\xi\mathrm{sen}\omega_\gamma t$, com $\xi=(\omega/\omega_\gamma)\beta_\perp\mathrm{sen}\theta$. Esse termo pode ser expandido em série usando a função geratriz das funções de Bessel [Arf70], que é dada por:

,

$$e^{-i\xi\mathrm{sen}\varrho}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-im\varrho}J_m(\xi) \tag{IV.1.11}$$

onde $\varrho=\omega_\gamma t$. Derivadas a equação (IV.1.11) em relação a ξ e ϱ e substituindo esse resultado na equação (IV.1.10), obtemos $\mathbf{E}_\omega$ na forma de uma série dada por:

$$\mathbf{E}_\omega=\frac{-i\omega e}{4\pi\epsilon_0 cR}\int_{-\infty}^{\infty}dt\hat{\mathbf{R}}\times\left(\hat{\mathbf{R}}\times\boldsymbol{\beta}\right)\exp i\omega\left(t-\frac{\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{r}_e(t)}{c}\right)=$$

$$= \frac{i\omega e}{4\pi\epsilon_0 cR} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt \Big\{ \hat{\mathbf{x}} \Big(\beta_\parallel \cos\theta \mathrm{sen}\theta - \beta_\perp \cos\theta\, m/\xi \Big) J_m(\xi) + \hat{\mathbf{y}} \left(-i\beta_\perp\right) J_n'(\xi) +$$

$$+ \hat{\mathbf{z}} \Big(-\beta_\parallel \mathrm{sen}^2\theta + \beta_\perp \mathrm{sen}\theta \cos\theta\, m/\xi \Big) J_m(\xi) \Big\} \exp i \Big[\big(1 - \beta_\parallel \cos\theta\big)\omega - m\omega_\gamma \Big] t \quad .$$

onde $J_m' := dJ_m/d\xi$. Na expressão acima, vemos que somente o termo exponencial depende do tempo, o que nos permite simplificá-la:

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{i\omega e}{4\pi\epsilon_0 cR} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big\{ \hat{\mathbf{x}} \Big(\beta_\parallel \cos\theta \mathrm{sen}\theta - \beta_\perp \cos\theta\, m/\xi \Big) J_m(\xi) + \hat{\mathbf{y}} \left(-i\beta_\perp\right) J_m'(\xi) +$$

$$+ \hat{\mathbf{z}} \Big(-\beta_\parallel \mathrm{sen}^2\theta - \beta_\perp \mathrm{sen}\theta \cos\theta\, m/\xi \Big) J_m(\xi) \Big\} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp i \Big[\big(1 - \beta_\parallel \cos\theta\big)\omega - m\omega_\gamma \Big] t \quad . \qquad \text{(IV.1.12)}$$

Usando a propriedade da função delta de Dirac dada por $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} dt = 2\pi\delta(\alpha)$, obtemos:

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{i\omega e}{4\pi\epsilon_0 cR} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big\{ \hat{\mathbf{x}} \Big(\beta_\parallel \cos\theta \mathrm{sen}\theta - \beta_\perp \cos\theta\, m/\xi \Big) J_m(\xi) + \hat{\mathbf{y}} \left(-i\beta_\perp\right) J_m'(\xi) +$$

$$+ \hat{\mathbf{z}} \Big(-\beta_\parallel \mathrm{sen}^2\theta - \beta_\perp \mathrm{sen}\theta \cos\theta\, m/\xi \Big) J_m(\xi) \Big\} \delta\Big(\omega \big[1 - \beta_\parallel \cos\theta\big] - m\omega_\gamma \Big) \quad . \qquad \text{(IV.1.13)}$$

Dessa expressão vemos que o campo somente não é nulo para $\omega = \omega_m = m\omega_\gamma / \big[1 - \beta_\parallel \cos\theta\big]$ e portanto podemos substituir a quantidade m/ξ por $\big(1 - \beta_\parallel \cos\theta\big)/\beta_\perp \mathrm{sen}\theta$[3]. Fazendo algumas simplificações nas três componentes do campo, chegamos à expressão:

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{i\omega e}{4\pi\epsilon_0 cR} \sum_{m=1}^{\infty} \Big\{ \hat{\mathbf{x}} \Big(-\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta} \big(\cos\theta - \beta_\parallel\big) \Big) J_m(\xi) + \hat{\mathbf{y}} \left(-i\beta_\perp\right) J_m'(\xi) +$$

$$+ \hat{\mathbf{z}} \big(\cos\theta - \beta_\parallel\big) J_m(\xi) \Big\} \delta\Big(\omega \big[1 - \beta_\parallel \cos\theta\big] - m\omega_\gamma \Big) \quad , \qquad \text{(IV.1.14)}$$

---

[3] $\dfrac{m}{\xi_m} = \dfrac{\big(\omega_m/\omega_\gamma\big)\big(1 - \beta_\parallel \cos\theta\big)}{\big(\omega_m/\omega_\gamma\big)\beta_\perp \mathrm{sen}\theta} = \dfrac{\big(1 - \beta_\parallel \cos\theta\big)}{\beta_\perp \mathrm{sen}\theta}$

onde os termos negativos da expressão acima foram combinados com o auxílio da propriedade $J_m(\xi) = J_{-m}(-\xi)$.

Com esse resultado podemos determinar a potência emitida pelo elétron por ângulo sólido $dP/d\Omega$. Essa grandeza pode ser obtida a partir do vetor de Poynting e é dado pela relação:

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 \langle S \rangle = R^2 \frac{c\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}(t)|^2 \quad , \tag{IV.1.15}$$

onde $S := |\mathbf{S}|$ o módulo do vetor de Poynting promediado sobre um ciclo e $\mathbf{E}(t)$ obtido pela transformada de Fourier dada por (IV.1.3). Devido a função $\delta\left(\omega\left[1-\beta_\parallel \cos\theta\right] - m\omega_\gamma\right)$ vamos considerar $\omega = \omega_m = m\omega_\gamma/(1-\beta_\parallel \cos\theta)$ para o argumento das funções de Bessel que aparecem em (IV.1.14) e portanto, nessa expressão, somente as funções Dirac tem dependência em ω. Temos, então:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\Bigg\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ie\omega_m}{2\pi\epsilon_0 cR} \Bigg[\hat{\mathbf{x}}\left(-\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta}\left(\cos\theta - \beta_\parallel\right) \right) J_m(\xi_m) + \\ + \hat{\mathbf{y}}\left(-i\beta_\perp\right) J'_m(\xi_m) + \hat{\mathbf{z}}\left(\cos\theta - \beta_\parallel\right) J_m(\xi_m) \Bigg] \frac{e^{-i\omega_m t}}{\left(1-\beta_\parallel \cos\theta\right)} \Bigg\} = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{E}_m(t) \right\} \end{aligned} \quad . \tag{IV.1.16}$$

Nesta expressão usamos a seguinte propriedade das funções de Dirac:

$$\int \psi(x)\delta[f(x)-\chi]dx = \left(\psi(x)/|f'(x)|\right)_{f(x)=\chi} \quad , \tag{IV.1.17}$$

que explica o termo $1-\beta_\parallel \cos\theta$ no denominador (IV.1.16). Consideramos, também, que o campo elétrico $\mathbf{E}(t)$ é a parte real da soma das contribuições de cada harmônico, que $1-\beta_\parallel \cos\theta \neq 0$. Assim usando (IV.1.16) em (IV.1.15), obtemos a equação de Schott-Trubnikov:

$$\frac{d^2P}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{8\pi^2\epsilon_0 c} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\cos\theta - \beta_\parallel}{\mathrm{sen}\theta} \right)^2 J_m^2(\xi) + \beta_\perp^2 J_m'^2(\xi) \right\} \frac{\delta\left(\omega\left[1-\beta_\parallel \cos\theta\right] - m\,\omega_B/\gamma\right)}{1-\beta_\parallel \cos\theta} \quad , \tag{IV.1.18}$$

onde $\xi = \left(\gamma\omega/\omega_B\right)\beta_\perp \text{sen}\theta$, $\omega_B = eB/m_e$, que expressa a potência por unidade de freqüência por unidade de ângulo sólido emitida por um elétron individual ao se mover em trajetória helicoidal.

Examinando a equação de Schott-Trubnikov vemos que o espectro da radiação-EC é formado por um conjunto de linhas bem definidas de freqüências ω_m, múltiplas da harmônica fundamental, isto é, $\omega_m = m\omega_B/\gamma\left(1-\beta_\parallel \cos\theta\right)$. Para a radiação-EC, pode ser mostrado com o auxílio da potência total irradiada por harmônico P_m^T que as linhas do espectro formam uma seqüência decrescente com $P_m^T/P_{m+1}^T \sim \beta^2$ [Bek66].

A presença de γ e $\left(1-\beta_\parallel \cos\theta\right)$ na freqüência eletrociclotrônica ω_m indica a existência de dois importantes mecanismos de alargamento do espectro: a)- o alargamento Doppler, que depende do movimento do elétron na direção do campo magnético $(\beta_\parallel)$ e do ângulo θ de observação (veja Fig. IV.2) e b)- o alargamento relativístico, que está associado com a energia total da partícula.

IV.2. – Cálculo da emissividade espectral e do coeficiente de absorção de plasmas térmicos não-relativísticos via modelo de plasma tênue

O modelo de plasma tênue é elaborado a partir da hipótese de que o processo de emissão dos diversos elétrons não está correlacionado e cada elétron pode ser considerado como uma fonte de radiação que emite conforme a equação de Schott-Trubnikov (IV.1.18). Desta forma, a emissividade espectral de um volume de plasma tênue j_ω, que é a taxa de energia irradiada do plasma por unidade de volume por unidade de ângulo sólido por unidade de freqüência, é calculada pela integração sobre a função de distribuição eletrônica, no espaço de velocidades:

$$j_\omega = c^3 \int \frac{d^2P}{d\omega d\Omega}\left(1-\beta_\parallel \cos\theta\right) f\left(\beta_\perp, \beta_\parallel\right) 2\pi\beta_\perp d\beta_\perp d\beta_\parallel \quad , \tag{IV.2.1}$$

onde o núcleo $d^2P/d\omega d\Omega$ é dado por (IV.1.18). Vamos também assumir que o plasma é não-relativístico, ou seja, $m\xi \ll 1$ e dessa forma podemos calcular cada harmônico isoladamente.

Na expressão (IV.2.1), j_ω exprime a emissão local (na fonte da radiação) enquanto que $d^2P/d\omega d\Omega$, em (IV.1.18), é a radiação detectada por um observador a uma certa distância da fonte. Isso explica o termo $\left(1-\beta_\parallel \cos\theta\right)$ em (IV.2.1).

Na aproximação não-relativística podemos fazer uma simplificação no tratamento matemático assumindo que, para valores baixos dos harmônicos, podemos aproximar a função de Bessel e sua forma assintótica para pequenos argumentos dada por [Abr64]:

$$J_m(\xi) \approx \frac{1}{m!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^m \quad . \tag{IV.2.2}$$

Essa aproximação, juntamente com a consideração de pequeno alargamento relativístico $(\omega_m \approx m\omega_B)$ nos permite determinar a emissividade espectral por harmônica. Isso é feito substituindo a equação (IV.1.18) e (IV.2.2) na (IV.2.1) que nos permite obter:

$$j_\omega^m = \frac{e^2\omega_m^2}{8\pi^2\epsilon_0 c}\frac{m^{2(m-1)}}{\left[(m-1)!\right]^2}(\text{sen}\theta)^{2(m-1)}\left(\cos^2\theta+1\right)\times$$
$$c^3\int_0^\infty 2\pi\beta_\perp d\beta_\perp d\beta_\parallel\left(\frac{\beta_\perp}{2}\right)^{2m} f\left(\beta_\perp,\beta_\parallel\right)\delta\left[\left(1-\beta_\parallel\cos\theta\right)\omega - m\,\omega_B/\gamma\right] \quad . \tag{IV.2.3}$$

Muitas vezes é mais conveniente determinar a emissividade total por harmônico $j_m = \int j_\omega^m d\omega$. Vamos fazer isso para plasmas térmicos onde a função $f\left(\beta_\perp,\beta_\parallel\right)$ é dada pela função de distribuição de Maxwell-Boltzmann:

$$f\left(\beta_\perp,\beta_\parallel\right) = n_e\left(\frac{m_e}{2\pi T_e}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m_e c^2}{2T_e}\left(\beta_\perp^2+\beta_\parallel^2\right)\right] \quad , \tag{IV.2.4}$$

onde T_e é dado em unidades de energia. Substituindo (IV.2.4) na equação (IV.2.3) e usando

$$\int_0^\infty x^{2m}\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)2xdx = a^{2(m+1)}m! \quad , \tag{IV.2.5}$$

a integração de (IV.2.3) nos dá a emissividade por harmônica:

$$j_m = \frac{e^2\omega_B^2 n_e}{8\pi^2\epsilon_0 c}\frac{m^{2m+1}}{(m-1)!}(\text{sen}\theta)^{2(m-1)}\left(\cos^2\theta+1\right)\left(\frac{T_e}{2m_e c^2}\right)^m \quad , \qquad \text{(IV.2.6)}$$

onde $\omega_m = m\omega_B/\gamma$.

Como ilustração da ordem de grandeza de j_m, vamos aplicar expressão (IV.2.6) fazendo o uso de parâmetros típicos do tokamak TCABR. Vamos utilizar para a temperatura eletrônica de pico $T_e \approx 500eV$, para a densidade de pico $n_{e0} = 2,3\times10^{19}m^{-3}$ e para o campo magnético no centro da coluna $B_\phi = 1,14T$. O resultado desse cálculo é mostrado na tabela IV.1, que apresenta alguns valores calculados de j_m para as 4 primeiras harmônicas. Note que os valores apresentados são para o centro da coluna de plasma ($r = 0$) e para $\theta = 90^0$.

harmônico m	j_m (W/m^3) ($\theta = 90°$)
1	55,5
2	0,9
3	0,014
4	0,0003

Tabela IV.1:Valores da emissividade total para as 4 primeiras harmônicas para o TCABR. Utilizou-se, para o plasma os parâmetros $T_{e0} \approx 500eV$, $n_{e0} = 2,3\times10^{19}m^{-3}$ **e** $B_{\phi 0} = 1,14T$.

Estes valores indicam que praticamente toda a energia irradiada pelo volume de plasma está concentrada na primeira harmônica. Com base nestes resultados, podemos calcular a emissividade total j a partir de (IV.2.6)como:

$$j(\theta = 90^0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m T_e^m \approx \frac{\omega_B^2 n_e}{16 m_e \pi^2 \epsilon_0 c} T_e \quad . \qquad \text{(IV.2.7)}$$

Podemos agora determinar a emissividade espectral por harmônico j_ω^m usando o resultado (IV.2.6) e uma função de forma $\phi_m(\omega)$ é obtida a partir da integral que aparece na expressão (IV.2.3). A forma dessa função depende da função distribuição $f(\beta_\perp,\beta_\parallel)$e é normalizada segundo a relação

$$\int \phi_m(\omega)\,d\omega = 1 \quad . \qquad \text{(IV.2.8)}$$

Assim, a emissividade espectral por harmônico pode ser colocada como:

$$j_\omega^m = j_m \phi_m(\omega - \omega_m). \tag{IV.2.9}$$

A função de forma expressa o alargamento da emissão numa dada harmônica. Para uma situação em que $\cos\theta \ll \beta$ onde o efeito Doppler supera o relativístico temos, para a função de forma de um plasma térmico a expressão:

$$\phi_m(\omega - \omega_m) = \left(\frac{m_e c^2}{2\pi T_e}\right)^{1/2} \frac{\exp\left\{-\left(m_e c^2/2T_e\right)\left[(\omega - \omega_m)/\omega_m \cos\theta\right]^2\right\}}{\omega_m \cos\theta} \quad . \tag{IV.2.10}$$

Vemos, portanto, que a expressão (IV.2.10) é uma gaussiana como é esperado do alargamento Doppler. Essa função é centrada em ω_m deformando o espectro tanto para cima como para baixo de $m\omega_B$. Para ângulos de observação próximos de $\theta = \pi/2$ o efeito Doppler é pequeno.

Para uma observação perpendicular ao campo magnético ($\theta \approx \pi/2$) o efeito relativístico é dominante e mostra-se que, na aproximação $T_e \ll m_e c^2$, tem-se para a função de forma [Hut87]:

$$\phi_m(\omega) = \frac{\omega}{2\sqrt{\pi}\,(m\omega_B)^2}\left(\frac{2m_e c^2}{T_e}\right)^{m+3/2} \frac{m!}{(2m+1)!}\left(1 - \frac{\omega^2}{m^2 \omega_B{}^2}\right)^{m+1/2} \exp\left[\frac{-m_e c^2}{2T_e}\left(1 - \frac{\omega^2}{m^2 \omega_B{}^2}\right)\right]. \tag{IV.2.11}$$

Uma análise da expressão (IV.2.11) mostra que o alargamento relativístico sempre deforma o espectro em direção às freqüências menores. Este é um efeito que está sempre presente na emissão EC independentemente do ângulo de observação.

Nas montagens experimentais para a detecção da radiação-EC o efeito Doppler é, em geral, desprezado devido às observações serem feitas na direção perpendicular ao campo magnético do tokamak.

Para plasmas térmicos, os alargamentos da linha de emissão devido aos efeitos Doppler e relativístico podem ser estimados, respectivamente por [Bor83] :

$$\Delta\omega_{\text{Dopp}} \simeq m\frac{eB_\phi}{m_e}\frac{v_T}{c}\left|N_r\cos\theta\right| \quad \text{e} \tag{IV.2.12}$$

$$\Delta\omega_{\text{Rel}} \simeq \frac{meB_\phi}{m_e}\left(\frac{v_T}{c}\right)^2 \quad , \tag{IV.2.13}$$

onde $v_T = \left(k_B T_e / m_e\right)^{1/2}$ é a velocidade térmica dos elétrons.

Um vez determinado a emissividade espectral j_ω, o coeficiente de absorção α_ω pode ser obtido, para plasmas térmicos, usando a lei de Kirchoff. Essa lei, na aproximação de Rayleigh-Jeans é dada por:

$$\frac{j_\omega}{\alpha_\omega} = I_{\omega N} = \frac{k_B\omega^2 T}{4\pi^3 c^2} \quad . \tag{IV.2.14}$$

Nesta expressão as duas polarizações estão incluídas (fator 4 no denominador). Quando estamos interessados na detecção de somente um dos modos, como é o caso do radiômetro do TCABR, temos a metade da intensidade dada em (IV.2.14), ou seja temos um fator 8 no denominador.

Nessas condições, o coeficiente de absorção pode ser obtido usando (IV.2.9) que assume a forma:

$$\alpha_\omega^m = \alpha_m\phi(\omega) = \frac{\pi}{2c}\frac{e^2 n_e}{m_e\epsilon_0}\frac{m^{2m-1}}{(m-1)!}(\text{sen}\theta)^{2(m-1)}\left(\cos^2\theta + 1\right)\left(\frac{T_e}{2m_e c^2}\right)^{m-1}\phi(\omega) \quad . \tag{IV.2.15}$$

As equações (IV.2.9) e (IV.2.15) são os resultados procurados para a emissividade espectral e coeficiente de absorção espectral necessários para definir opticamente o plasma dentro do modelo de plasmas tênues. Estes resultados podem ser utilizados se a condição de plasma tênue for satisfeita, ou seja, $\omega_P^2 / m^2\omega_B^2 \ll 1$.

Vimos pela definição de profundidade óptica que esta é obtida a partir da integral ao longo da trajetória do coeficiente de absorção, ou seja $\int \alpha_\omega ds$. Como a emissão e absorção eletrociclotrônicas são efeitos ressonantes, a profundidade óptica pode ser colocada como uma função da freqüência, ou seja podemos escrever $\tau = \tau(\omega_0)$. Isso pode ser mostrado com o auxílio da função de forma $\phi_m(\omega)$ que reflete o alargamento da emissão na região de ressonância. A

região ressonante, em torno da freqüência ω_0, é tal que a emissão ou absorção só ocorrem em uma pequena região em torno de ω_0 (ou s_0). Essa região é definida por $(m\Omega(s)-\omega_0) \ll \omega_0$, onde s é a distância ao longo da trajetória da radiação-EC no plasma. Nessa situação, a profundidade óptica τ_m para uma particular harmônica pode ser considerada como função da freqüência de ressonância ω_0. Podemos, então considerar o gradiente de $m\omega_B$ em relação a s como constante na região de ressonância e podemos escrever:

$$\tau_m = \int \alpha_m(\omega_0)ds = \int \alpha_m(\omega_0)\left|\frac{d(m\omega_B)}{ds}\right|^{-1} d(m\omega_B) = \alpha_m(s)\left|\frac{d(m\omega_B)}{ds}\right|^{-1} \int \phi(\omega_0 - m\omega_B)d\omega_B \,. \tag{IV.2.16}$$

Usando a propriedade de normalização da função ϕ, obtemos:

$$\int \phi(\omega_0 - m\omega_B)d\omega_B = \frac{1}{m}\int \phi(\omega_0 - m\omega_B)d(m\omega_B) = \frac{1}{m} \quad .$$

Então podemos colocar τ_m na forma:

$$\tau_m = \frac{\alpha_m(s)}{m\left|d\omega_B/ds\right|} = \frac{L\alpha_m(s)}{m\omega_B} \quad , \tag{IV.2.17}$$

onde $L := \omega_B \Big/ \left|d\omega_B/ds\right|$ é a escala de variação do campo magnético. No cálculo de $\alpha_\omega(s)$ devemos usar os parâmetros do plasma na região de ressonância, ou seja $m\omega_B(s) = \omega_0$.
Do que foi discutido, pode-se considerar a intensidade específica detectada por uma antena colocada externamente à coluna de plasma como função somente da freqüência de ressonância, ou seja:

$$I(\omega_0) = \frac{\omega_0^2 T(s)}{4\pi^3 c^2}\left(1 - e^{-\tau_m(s)}\right) \quad . \tag{IV.2.18}$$

Assim, a intensidade detectada depende apenas dos parâmetros locais do plasma. Esse é um resultado importante no uso da radiação-EC como meio de diagnóstico.

Finalmente o modelo apresentado permite explicitar fisicamente um aspecto de interesse no diagnóstico por emissão eletrociclotrônica que é a polarização da radiação. Fizemos a

distinção entre polarização ordinária (O) e a extraordinária (X). Observando-se a radiação perpendicularmente ao campo magnético ($\theta = 90^0$) e examinado a relação (IV.1.16) e a figura IV.2 vemos que o termo em que aparece J'_m está ligado a componente na direção y do campo de radiação ou seja a componente perpendicular ao campo magnético (modo X). O termo em que aparece J_m está ligado a componente na direção z do campo da onda, ou seja esse termo corresponde a radiação no modo O. Examinado a equação de Schott-Trubnikov (IV.1.18) temos que a radiação nos modos O e X de um elétron em movimento num campo magnético são dadas, respectivamente por:

$$\frac{d^2P^{(O)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{8\pi^2\epsilon_0 c}\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{\parallel}^2 J_m^2\left(m\beta_{\perp}\right)\delta\left(\omega - m\,\omega_B/\gamma\right) \quad \text{e} \tag{IV.2.19}$$

$$\frac{d^2P^{(X)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{8\pi^2\epsilon_0 c}\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{\perp}^2 J_m'^2\left(m\beta_{\perp}\right)\delta\left(\omega - m\,\omega_B/\gamma\right) \quad . \tag{IV.2.20}$$

A equação (IV.2.19) mostra que somente há emissão de radiação na polarização O para elétrons com componente paralela da velocidade.

V. – Modelo dielétrico de plasmas quentes e magnetizados

Neste capítulo apresentamos um modelo onde um plasma quente e imerso em um campo magnético homogêneo é tomado como um meio dielétrico. Aqui, as características físicas do plasma bem como a interação onda-plasma e fenômenos associados, como a absorção e a refração da radiação, são determinadas pelo tensor dielétrico $\overleftrightarrow{\epsilon}$. O cálculo desse tensor é o problema central abordado neste capítulo. Na literatura encontramos vários caminhos para a sua obtenção [Sti92, Bra98, Sit95, Swa89, Kra73]. A forma assumida pelo tensor dielétrico dependerá de um conjunto de parâmetros do plasma e do campo magnético aplicado.

A determinação do tensor dielétrico envolve a solução das equações de Vlasov e Maxwell. As fontes dos campos magnético $\mathbf{B}$ e elétrico $\mathbf{E}$ são a densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ e a densidade de carga $\rho(\mathbf{r},t)$ que são dadas pelos momentos da função de distribuição $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ e dadas por:

$$\rho(\mathbf{r},t) = q_e \int d^3p \; f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) \qquad \text{e} \tag{V.0.1}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = q_e \int d^3p \; \mathbf{v} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) \qquad , \tag{V.0.2}$$

onde $q_e = -e$ é a carga do elétron. Além disso, assumindo somente meios lineares, o vetor polarização $\mathbf{P}$ tem uma dependência linear com o campo elétrico $\mathbf{E}$ dada por $\mathbf{P} = \epsilon_0 \overleftrightarrow{\chi} \cdot \mathbf{E}$, onde $\overleftrightarrow{\chi}$ é o tensor susceptibilidade elétrica do meio. Portando, o vetor deslocamento elétrico toma a forma:

$$\mathbf{D} := \mathbf{P} + \epsilon_0 \mathbf{E} = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \qquad , \tag{V.0.3}$$

onde $\overleftrightarrow{\epsilon} := \epsilon_0(\overleftrightarrow{\mathbf{I}} + \overleftrightarrow{\chi})$ é o tensor dielétrico que está relacionado ao tensor condutividade elétrica $\overleftrightarrow{\sigma}$ pela relação:

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \epsilon_0 \overleftrightarrow{\mathbf{I}} + \frac{i\overleftrightarrow{\sigma}}{\omega} \qquad . \tag{V.0.4}$$

Nesta equação, i é a unidade imaginária e $\vec{\mathbf{I}}$ é o tensor identidade. O método de cálculo usado para determinar $\vec{\boldsymbol{\sigma}}$ será o assunto da seção V.2.

A função distribuição $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ satisfaz a equação de Vlasov [Sti92, Bit95, Ich73, Ale84]:

$$\frac{\partial f(\mathbf{r},p,t)}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f(\mathbf{p},\mathbf{v},t)}{\partial \mathbf{r}} + q_e(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad , \tag{V.0.5}$$

sendo $\mathbf{p} = \gamma m_e \mathbf{v}$ o momento relativístico e $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ os campos elétrico e magnético totais [Ich73]. Na análise que será feita aqui, somente serão considerados os campos da radiação-EC e um campo magnetostático uniforme externo $\mathbf{B}_0$. O sistema formado pelas equações de Maxwell e de Vlasov é conhecido como "sistema de Vlasov-Maxwell". Este sistema é a base para a determinação de $\vec{\boldsymbol{\epsilon}}$. Como pode ser observado, trata-se de um sistema de equações não-lineares e acopladas que descreve o comportamento dos campos e da $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$. A presença de $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ nas equações para $\rho(\mathbf{r},t)$ e $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ mostra que o sistema deve ser resolvido de forma auto-consistente. Vemos que a variação das densidades de cargas e correntes no plasma provoca uma variação nos campos. Estes provocam uma variação na função distribuição que determina as densidades de cargas e correntes, assim por diante. O conhecimento de $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ permite a obtenção das variáveis macroscópicas do sistema [Bit95]. Em nosso caso estamos interessados no tensor dielétrico $\vec{\boldsymbol{\epsilon}}$.

Na Fig V.1 tem-se um diagrama de blocos onde são mostrados os principais passos a serem seguidos para obtermos o espectro de emissão da radiação-EC de plasmas quentes e magnetizados a partir do modelo dielétrico. O plasma é descrito através de uma função de distribuição $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ e a grandeza final a ser obtida é a intensidade espectral I_ω. O ramo (1) representa o percurso seguido para se obter o tensor dielétrico $\vec{\boldsymbol{\epsilon}}$. Parte-se do sistema Vlasov–Maxwell de equações e, em seguida, esse sistema é linearizado usando-se o método das perturbações. Com a linearização, a equação de Vlasov assume a forma de uma equação diferencial parcial cuja solução nos dá o termo perturbativo da função de distribuição. A equação de Vlasov linearizada é resolvida usando o método das características. A seguir obtém-se o tensor dielétrico.

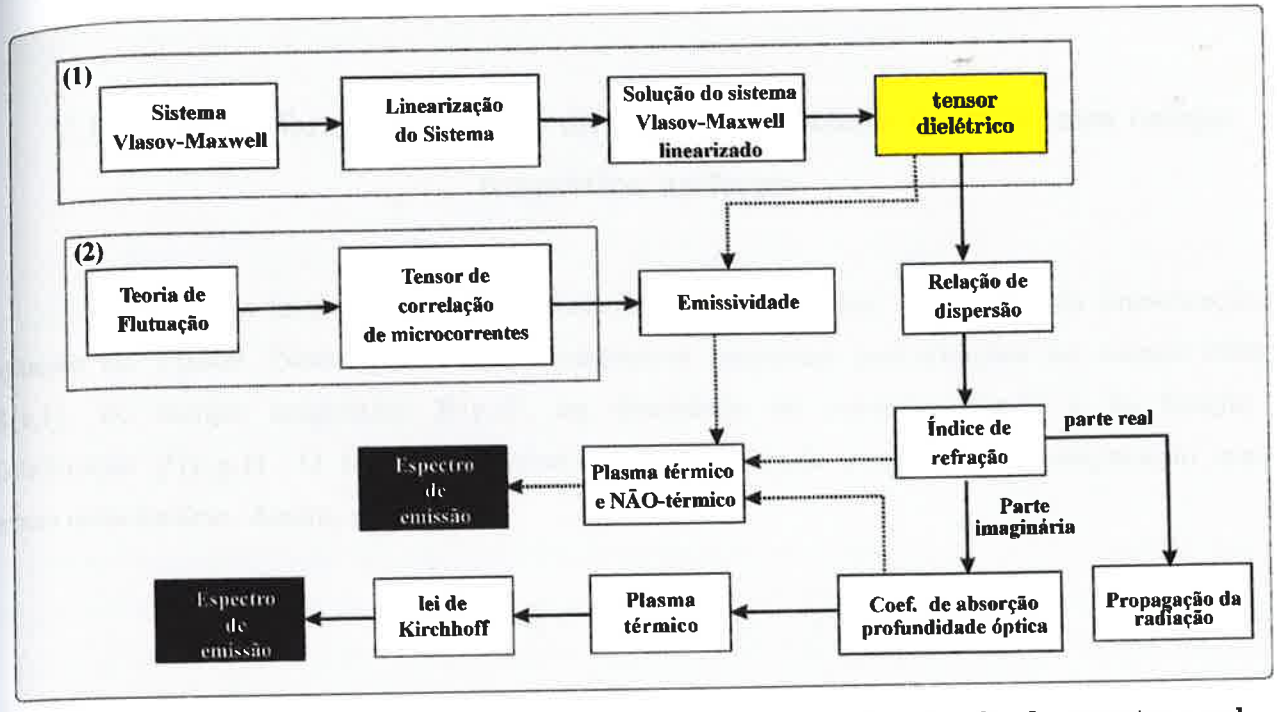


Fig. V.1: Diagrama de blocos indicando o procedimento para a determinação do espectro usado no contexto do modelo dielétrico de plasmas

Uma vez calculado $\vec{\epsilon}$, o passo seguinte é a obtenção da relação de dispersão de onde se obtém o índice de refração N. Com a parte real de N tem-se as características de propagação da radiação-EC para as polarizações ordinária e extraordinária. Com a parte imaginária obtém-se o coeficiente de absorção espectral α_ω. A integração do coeficiente de absorção sobre a trajetória da radiação-EC, desde o ponto de emissão até a borda do plasma nos dá a profundidade óptica τ. Com o coeficiente de absorção, para plasmas térmicos, podemos calcular a emissividade espectral j_ω usando a lei de Kirchhoff.

Para a determinação da emissividade espectral j_ω numa situação geral, onde se incluem plasmas não térmicos, temos que fazer uso de resultados da teoria das flutuações conforme mostra o ramo (2) do diagrama da figura.

Dessa forma, conhecidas as três quantidades N, α_ω e j_ω, estamos em condições de calcular o espectro de emissão através da equação de transporte da radiação discutida no capítulo III.

No último item deste capítulo vamos descrever sucintamente um algoritmo para o cálculo numérico das grandezas envolvidas na emissão, absorção e propagação da EEC. Um código computacional tendo por base esse algoritmo foi utilizado como ferramenta para a determinação de j_ω, α_ω, N, τ e do espectro de EEC.

V.1 – Cálculo formal do tensor dielétrico de plasmas quentes num campo magnético uniforme

Vamos iniciar o cálculo formal do tensor dielétrico $\vec{\epsilon}$ a partir da linearização da equação de Vlasov. Nesse processo consideram-se pequenas perturbações no campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, no campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, na densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ e na função de distribuição $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$. O termo perturbativo é considerado pequeno em comparação com o termo estacionário. Assim, obtemos:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{r},t) \quad , \tag{V.1.1}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1(\mathbf{r},t) \quad , \tag{V.1.2}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_1(\mathbf{r},t) \quad \text{e} \tag{V.1.3}$$

$$f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = f_0(\mathbf{p}) + f_1(\mathbf{r},t) \quad . \tag{V.1.4}$$

onde o subscrito "0" e "1" refere-se ao estado estacionário e ao perturbado respectivamente. Vamos assumir a inexistência de campos elétricos e densidades de correntes externas ao plasma ($\mathbf{J}_0 = \mathbf{E}_0 = 0$). Para o regime estacionário definido pela função de distribuição estacionária $f_0(\mathbf{p})$ a equação de Vlasov (V.0.5) fica:

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0)\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad , \tag{V.1.5}$$

onde a função distribuição estacionária é somente dependente do momento $f_0(\mathbf{p}) = f_0(p_\perp, p_\parallel)$. Substituindo as equações (V.1.1), (V.1.2) e (V.1.4) na equação de Vlasov (V.0.5), e desprezando os termos de segunda ordem, obtemos a equação de Vlasov linearizada:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + q_e(\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0)\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} = -q_e\left[\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t) + \mathbf{v}\times\mathbf{B}_1(\mathbf{r},t)\right]\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \quad . \tag{V.1.6}$$

A solução dessa equação nos permite determinar $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ que será dada por:

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{r},t) = q_e \int d^3p\ \mathbf{v} f_1(\mathbf{r},\mathbf{p},t) \quad . \tag{V.1.7}$$

A equação linearizada de Vlasov (V.1.6) é uma equação diferencial parcial não-homogênea para uma função de sete variáveis $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_6, t)$ e tem a forma:

$$b(x_1,\ldots,x_6,t)\frac{\partial u}{\partial t} + a_1(x_1,\ldots,x_6,t)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_6(x_1,\ldots,x_6,t)\frac{\partial u}{\partial x_6} = g \quad .$$

Essa equação pode ser resolvida parametrizando as variáveis $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ e t fazendo uso de um parâmetro ς obtendo-se dessa forma $(\mathbf{r}(\varsigma),\mathbf{p}(\varsigma),t(\varsigma))$. Com isso transformamos a equação diferencial parcial de Vlasov linearizada em uma equação diferencial ordinária. Essa é a base do método das características [Swa89]. Com esse procedimento, a derivada de $f_1(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ em relação a ς é dada por:

$$\frac{df_1}{d\varsigma} = \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\varsigma} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{d\varsigma} + \frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{dt}{d\varsigma} \quad . \tag{V.1.8}$$

Assim, comparando o resultado (V.1.8) com a equação de Vlasov linearizada (V.1.6) e usando $\omega_B = q_e B_0 / m_e$ encontramos as seguintes relações que são as equações das curvas características:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{d\varsigma} = \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{p}'}{\gamma' m_e} \quad , \tag{V.1.9}$$

$$\frac{d\mathbf{p}'}{d\varsigma} = \omega_\gamma \left(\mathbf{p}' \times \frac{\mathbf{B}_0}{B_0}\right) \quad \text{e} \tag{V.1.10}$$

$$\frac{dt'}{d\varsigma} = 1 \quad , \tag{V.1.11}$$

onde $\omega_\gamma := \omega_B / \gamma$ e o sobrescrito "linha" se refere a trajetória característica, isto é $\mathbf{r}' = \mathbf{r}(\varsigma)$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}(\varsigma)$ e $t' = t(\varsigma)$.

Vamos estabelecer as condições iniciais:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t' = t) = \mathbf{r} \text{ e} \tag{V.1.12}$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}'(t' = t) = \mathbf{p} \tag{V.1.13}$$

Substituindo as equações das curvas características (V.1.9), (V.1.10) e (V.1.11) em (V.1.8) obtemos a derivada temporal total feita sobre a curva característica que, comparada com a equação de Vlasov linearizada (V.1.6), nos dá o seguinte resultado:

$$\frac{df_1'}{dt'} = \frac{\partial f_1'}{\partial t'} + \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial f_1'}{\partial \mathbf{r}'} + \omega_\gamma \left(\mathbf{v}' \times \frac{\mathbf{B}_0}{B_0} \right) \cdot \frac{\partial f_1'}{\partial \mathbf{p}'} \quad . \tag{V.1.14}$$

Neste trabalho, vamos adotar a notação compacta $u := u(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Note que a função distribuição estacionária é uma constante de movimento, $f_0 = f_0'$. Assim, na curva característica descrita no espaço $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ de fase, a equação de Vlasov linearizada assume simplesmente a forma de uma equação diferencial ordinária na variável t', como pode ser visto comparando as expressões (V.1.14) e (V.1.6). Esta equação pode ser integrada obtendo-se:

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_1(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t_0) + q_e \int_{t_0}^{t} dt' \left(\mathbf{E}_1' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}_1' \right) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}'} \quad . \tag{V.1.15}$$

Vamos considerar que o meio está em equilíbrio antes das ondas serem injetadas, isto é para $t' \to \infty$ tem-se $f_1(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t_0) = 0$. Então podemos escrever o limite inferior da equação (V.1.15) como:

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = q_e \int_{-\infty}^{t} dt' \left(\mathbf{E}_1' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}_1' \right) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}'} \quad . \tag{V.1.16}$$

Essa relação permite a determinação da função de distribuição perturbativa $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ em função dos campos da onda $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{B}_1$ e da função distribuição estacionária f_0.

Até aqui não ficaram definidos os tipos de campos perturbativos que aparecem na expressão (V.1.16). Como em nosso trabalho o interesse é a radiação-EC, esses campos podem

ser considerados como componentes de uma onda eletromagnética e portanto devem satisfazer as equações de Maxwell.

Vamos agora usar a equação de Faraday $(\partial/\partial\mathbf{r})\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$, assumir os campos na forma de ondas harmônicas e também assumir que $\mathrm{Im}[\omega] > 0$, para convergência da integração. Nestas condições, a função distribuição perturbativa fica:

$$f_1(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = q_e \int_{-\infty}^{t} dt' \left[\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} + \mathbf{v}' \times \left(\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}}{\omega}\right)\right] \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}'} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'-\omega t')} \quad . \tag{V.1.17}$$

Para se fazer essa integração temos que desenvolver o integrando dessa equação. No desenvolvimento que se segue, não pretende-se mostrar os cálculos em todos os seus detalhes pois são bastante extensos[Bra98].

As trajetórias características obtidas pela solução do sistema de equações (V.1.9) e (V.1.10) com as condições iniciais (V.1.12) e (V.1.13) são:

$$\mathbf{v}' = v_\perp \left\{\cos\left[\omega_\gamma\left(t-t'\right)+\phi\right]\hat{\mathbf{x}} + \mathrm{sen}\left[\omega_\gamma\left(t-t'\right)+\phi\right]\hat{\mathbf{y}}\right\} + v_\parallel\hat{\mathbf{z}} \quad \text{e} \tag{V.1.18}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'-\mathbf{r} = &-\frac{v_\perp}{\omega_\gamma}\left\{\mathrm{sen}\left[\phi+\omega_\gamma\left(t-t'\right)\right]-\mathrm{sen}\phi\right\}\hat{\mathbf{x}} + \frac{v_\perp}{\omega_\gamma}\left\{\cos\left[\phi+\omega_\gamma\left(t-t'\right)\right]-\cos\phi\right\}\hat{\mathbf{y}} - \\ &-v_\parallel\left(t-t'\right)\hat{\mathbf{z}} \quad ,\end{aligned} \tag{V.1.19}$$

onde $(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}},\hat{\mathbf{z}})$ são os versores na direção do eixo x, y e z, respectivamente.

Considerando $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$ e usando o sistema de coordenadas cilíndricas (Fig. V.2), o momento $\mathbf{p}$ é dado por:

$$\mathbf{p} = p_\perp \cos\phi\hat{\mathbf{x}} + p_\perp \mathrm{sen}\phi\hat{\mathbf{y}} + p_\parallel\hat{\mathbf{z}} \quad \text{e} \tag{V.1.20}$$

o vetor de onda fica:

$$\mathbf{k} = k_\perp\hat{\mathbf{x}} + k_\parallel\hat{\mathbf{z}} \quad , \tag{V.1.21}$$

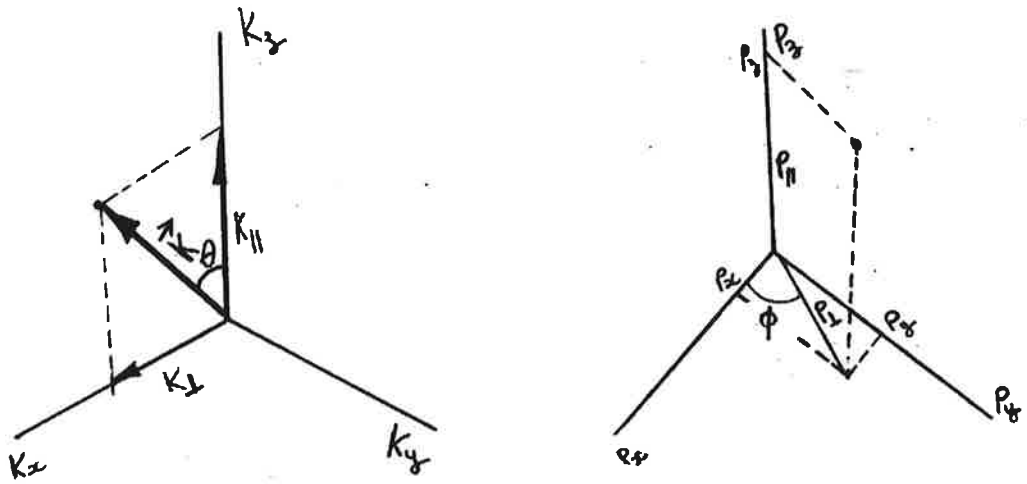


Fig. V.2: sistema de coordenadas cilíndricas para o espaço de momento e definição da direção de propagação da radiação-EC.

Introduzindo a variável $\tau = t - t'$, no termo de fase $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}' - \omega t'$, em (V.1.17) temos:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}' - \omega t' = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t - \eta(\tau) \quad , \tag{V.1.22}$$

onde:

$$\eta(\tau) = \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}\left\{\operatorname{sen}\left(\phi + \omega_\gamma \tau\right) - \operatorname{sen}\phi\right\} + \left(k_\parallel v_\parallel - \omega\right)\tau \quad . \tag{V.1.23}$$

O triplo produto vetorial no termo $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} + (1/\omega)\mathbf{v}'\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega})$ que aparece em (V.1.17) pode ser expresso de uma forma mais conveniente usando a identidade $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ e também a propriedade comutativa do produto escalar. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} + \mathbf{v}'\times\left(\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}}{\omega}\right) &= \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} + \frac{1}{\omega}\left[\mathbf{k}\left(\mathbf{v}'\cdot\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}\right) - \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}\left(\mathbf{v}'\cdot\mathbf{k}\right)\right] = \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} + \frac{1}{\omega}\left[\left(\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}\cdot\mathbf{v}'\right)\mathbf{k} - \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}\left(\mathbf{v}'\cdot\mathbf{k}\right)\right]\end{aligned} \tag{V.1.24}$$

Usando as identidades $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{BC})$ e $\mathbf{A}\cdot\vec{\vec{\mathbf{I}}} = \vec{\vec{\mathbf{I}}}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}$ onde $\mathbf{BC}$ é uma díada e $\vec{\vec{\mathbf{I}}}$ é a díada unitária temos, após uma pequena álgebra:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} + \mathbf{v}'\times\left(\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}}{\omega}\right) = \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}\cdot\left[\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\mathbf{k}}{\omega}\right)\vec{\vec{\mathbf{I}}}+\left(\frac{\mathbf{v}'\mathbf{k}}{\omega}\right)\right] \quad , \tag{V.1.25}$$

onde $\mathbf{v}'\mathbf{k}$ é uma díada. Então, fazendo a mudança de variável $\tau = t - t' \rightarrow d\tau = -dt'$, e usando as relações (V.1.22) e (V.1.25) a função de distribuição perturbativa $f_1(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ assume a forma:

$$f_1(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = q_e e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\int_0^\infty d\tau\left\{\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}\cdot\left[\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\mathbf{k}}{\omega}\right)\vec{\vec{\mathbf{I}}}+\left(\frac{\mathbf{v}'\mathbf{k}}{\omega}\right)\right]\right\}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial\mathbf{p}'}e^{-i\eta(\tau)} \quad . \tag{V.1.26}$$

Tendo em vista a presença do fator $\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)]$, podemos interpretar esse resultado como sendo uma perturbação harmônica da forma $f_1(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = f_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{p})\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)]$, ou seja, a amplitude de Fourier da função distribuição $f_1(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ é:

$$f_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{p}) = -q_e\int_0^\infty d\tau\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}\cdot\left[\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\mathbf{k}}{\omega}\right)\vec{\vec{\mathbf{I}}}+\left(\frac{\mathbf{v}'\mathbf{k}}{\omega}\right)\right]\cdot\frac{\partial f_0}{\partial\mathbf{p}'}e^{-i\eta(\tau)} \quad . \tag{V.1.27}$$

Finalmente, substituindo nessa relação as equações (V.1.18) e o gradiente de f_0 no espaço do momento dado por:

$$\frac{\partial f_0}{\partial\mathbf{p}'} = \cos(\omega_\gamma\tau+\phi)\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp}\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}(\omega_\gamma\tau+\phi)\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel}\hat{\mathbf{z}} \quad , \tag{V.1.28}$$

podemos escrever $f_{\mathbf{k}\omega}$ como:

$$f_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{p}) = -q_e\int_0^\infty d\tau e^{-i\eta(\tau)}\left\{\left[E_{\mathbf{k}\omega x}\cos(\phi+\omega_\gamma\tau)+E_{\mathbf{k}\omega y}\operatorname{sen}(\phi+\omega_\gamma\tau)\right]\left[\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp}+\frac{k_\parallel}{\omega}\left(v_\perp\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel}-v_\parallel\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+E_{\mathbf{k}\omega z}\left[\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel}-\frac{k_\perp}{\omega}\left(v_\perp\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel}-v_\parallel\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp}\right)\cos(\phi+\omega_\gamma\tau)\right]\right\} \quad .$$

(V.1.29)

O resultado (V.1.29) apresenta uma forma que envolve o termo $e^{-i\xi \operatorname{sen}\varrho}$, devido a $\eta(\tau)$. Esse termo permite a expansão de $f_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{p})$ em termos envolvendo funções de Bessel de primeira espécie usando a relação $e^{-i\xi \operatorname{sen}\varrho} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\varrho} J_m(\xi)$. Deve-se também notar que em $\eta(\tau)$ temos dois senos, $\operatorname{sen}\left(\phi + \omega_\gamma \tau\right)$ e $\operatorname{sen}\phi$, e portanto temos que considerar duas expansões em funções de Bessel.

Podemos agora escrever $f_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{p})$ numa forma que será útil para a obtenção do tensor condutividade a partir de $\mathbf{J}_{\mathbf{k}\omega} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}$. Para isso vamos reescrever $f_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{p})$ em termos de um produto interno na forma:

$$f_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{p}) = -q_e \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} \cdot \Bigg(\sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} J_{m'}\left(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}\right) J_m\left(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}\right) e^{-i(m'-m)\phi} \int_0^\infty d\tau e^{i\left(\omega - m'\omega_\gamma - k_\parallel v_\parallel\right)\tau} \cos(\phi + \omega_\gamma \tau) U \hat{\mathbf{x}} +$$

$$\sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} J_{m'}\left(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}\right) J_m\left(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}\right) e^{-i(m'-m)\phi} \int_0^\infty d\tau e^{i\left(\omega - m'\omega_\gamma - k_\parallel v_\parallel\right)\tau} \operatorname{sen}\left(\phi + \omega_\gamma \tau\right) U \hat{\mathbf{y}} +$$

$$\sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} J_{m'}\left(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}\right) J_m\left(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}\right) e^{-i(m'-m)\phi} \int_0^\infty d\tau e^{i\left(\omega - m'\omega_\gamma - k_\parallel v_\parallel\right)\tau} \left[A - V\cos\left(\phi + \omega_\gamma \tau\right)\right] \hat{\mathbf{z}} \Bigg),$$

(V.1.30)

onde as quantidades U, V e A são dadas pelas relações:

$$U := \left[\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} + \frac{k_\parallel}{\omega} \left(v_\perp \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel} - v_\parallel \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} \right) \right] \quad , \tag{V.1.31}$$

$$V := \frac{k_\perp}{\omega} \left(v_\perp \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel} - v_\parallel \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} \right) \quad \text{e} \tag{V.1.32}$$

$$A := \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel} \quad . \tag{V.1.33}$$

Substituindo a função $f_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{p})$ no coeficiente de Fourier da densidade de corrente (V.1.7), obtemos

$$\mathbf{J}_{k\omega} = q_e \int_0^{\infty} dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \int_0^{2\pi} d\phi \mathbf{v} f_{k\omega}(\mathbf{p}) \quad , \tag{V.1.34}$$

sendo $\mathbf{J}_{k\omega}$ definido pela relação $\mathbf{J}_1(\mathbf{r},t) = \mathbf{J}_{k\omega} \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)]$. Usamos aqui coordenadas cilíndricas e, portanto, $dp_x dp_y dp_z = p_\perp dp_\perp dp_\parallel d\phi$.

Considerando (V.1.29), o produto $f_{k\omega}(\mathbf{p})\mathbf{v}$ que aparece em (V.1.34) pode ser escrito na forma:

$$f_{k\omega}(\mathbf{p})\mathbf{v} = (\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}\cdot\mathbf{Q})\mathbf{v} = (\mathbf{Q}\mathbf{v})\cdot\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} \tag{V.1.35}$$

onde $\mathbf{Qv}$ é uma díada e usamos a identidade $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{BC})$. O vetor $\mathbf{Q}$ é dado pela seguinte relação:

$$\mathbf{Q} := \Bigg(U \int_0^{\infty} d\tau e^{i(\omega - m'\omega_\gamma - k_\parallel v_\parallel)\tau} \cos(\phi + \omega_\gamma \tau) \sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} J_{m'}\left(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}\right) J_m\left(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}\right) e^{-i(m'-m)\phi} \hat{\mathbf{x}} +$$

$$+ U \int_0^{\infty} d\tau e^{i(\omega - m'\omega_\gamma - k_\parallel v_\parallel)\tau} \operatorname{sen}(\phi + \omega_\gamma \tau) \sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} J_{m'}\left(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}\right) J_m\left(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}\right) e^{-i(m'-m)\phi} \hat{\mathbf{y}} +$$

$$\int_0^{\infty} d\tau e^{i(\omega - m'\omega_\gamma - k_\parallel v_\parallel)\tau} \left[A - V\cos(\phi + \omega_\gamma \tau)\right] \sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} J_{m'}\left(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}\right) J_m\left(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}\right) e^{-i(m'-m)\phi} \hat{\mathbf{z}} \Bigg). \tag{V.1.36}$$

Usando (V.1.35) em (V.1.34) e decompondo $\mathbf{v}$ na forma $\mathbf{v} = v_\perp \cos\phi \hat{\mathbf{x}} + v_\perp \operatorname{sen}\phi \hat{\mathbf{y}} + v_\parallel \hat{\mathbf{z}}$, obtemos uma relação do tipo $\mathbf{J}_{\mathbf{k}\omega} = \vec{\sigma}\cdot\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}$ (lei de Ohm). Nessas condições o tensor condutividade elétrica fica:

$$\vec{\sigma} = \int_0^{\infty} dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \int_0^{2\pi} d\phi \mathbf{Q}\mathbf{v} = \int_0^{\infty} dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \int_0^{2\pi} d\phi \left\{ (Q_x\hat{\mathbf{x}} + Q_y\hat{\mathbf{y}} + Q_z\hat{\mathbf{z}})(v_\perp \cos\phi \hat{\mathbf{x}} + v_\perp \operatorname{sen}\phi \hat{\mathbf{y}} + v_\parallel \hat{\mathbf{z}}) \right\} =$$

$$= -q_e^2 \int_0^{\infty} dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} Q_x v_\perp \cos\phi & Q_x v_\perp \operatorname{sen}\phi & Q_x v_\parallel \\ Q_y v_\perp \cos\phi & Q_y v_\perp \operatorname{sen}\phi & Q_y v_\parallel \\ Q_z v_\perp \cos\phi & Q_z v_\perp \operatorname{sen}\phi & Q_z v_\parallel \end{pmatrix} . \tag{V.1.37}$$

que na representação matricial fica:

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad , \tag{V.1.38}$$

onde as componentes são dadas por:

$$\sigma_{xx} = -q_e^2 \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel v_\perp U \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - m'\omega_\gamma - k_\parallel v_\parallel)\tau} \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} J_{m'}(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) J_m(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) e^{-i(m'-m)\phi} \cos\phi \cos(\phi + \omega_\gamma \tau)$$

$$\sigma_{xy} = -q_e^2 \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel v_\perp U \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - m'\omega_\gamma - k_\parallel v_\parallel)\tau} \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} J_{m'}(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) J_m(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) e^{-i(m'-m)\phi} \operatorname{sen}\phi \cos(\phi + \omega_\gamma \tau)$$

$$\sigma_{xz} = -q_e^2 \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel v_\parallel U \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - m'\omega_\gamma - k_\parallel v_\parallel)\tau} \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} J_{m'}(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) J_m(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) e^{-i(m'-m)\phi} \cos(\phi + \omega_\gamma \tau)$$

$$\sigma_{yx} = -q_e^2 \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel v_\perp U \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - m'\omega_\gamma - k_\parallel v_\parallel)\tau} \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} J_{m'}(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) J_m(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) e^{-i(m'-m)\phi} \cos\phi \operatorname{sen}\left(\phi + \omega_\gamma \tau\right)$$

$$\sigma_{yy} = -q_e^2 \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel v_\perp U \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - m'\omega_\gamma - k_\parallel v_\parallel)\tau} \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} J_{m'}(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) J_m(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) e^{-i(m'-m)\phi} \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\left(\phi + \omega_\gamma \tau\right)$$

$$\sigma_{yz} = -q_e^2 \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel v_\parallel U \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - m'\omega_\gamma - k_\parallel v_\parallel)\tau} \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} J_{m'}(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) J_m(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) e^{-i(m'-m)\phi} \operatorname{sen}\left(\phi + \omega_\gamma \tau\right)$$

$$\sigma_{zx} = -q_e^2 \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel v_\perp \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - m'\omega_\gamma - k_\parallel v_\parallel)\tau} \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} J_{m'}(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) J_m(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) e^{-i(m'-m)\phi} \cos\phi \left[A - V\cos\left(\phi + \omega_\gamma \tau\right)\right]$$

$$\sigma_{zy} = -q_e^2 \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel v_\perp \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - m'\omega_\gamma - k_\parallel v_\parallel)\tau} \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} J_{m'}(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) J_m(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) e^{-i(m'-m)\phi} \operatorname{sen}\phi \left[A - V\cos\left(\phi + \omega_\gamma \tau\right)\right]$$

$$\sigma_{zz} = -q_e^2 \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel v_\parallel \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - m'\omega_\gamma - k_\parallel v_\parallel)\tau} \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} J_{m'}(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) J_m(\tfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_\gamma}) e^{-i(m'-m)\phi} \left[A - V\cos\left(\phi + \omega_\gamma \tau\right)\right]$$

. (V.1.39)

Para finalizar o cálculo é necessário calcular, para as componentes de $\vec{\vec{\sigma}}$, as integrais nas variáveis τ e ϕ. A integração com respeito a ϕ pode ser feita usando o resultado [Bra98]:

$$\int_0^{2\pi} d\phi h(\phi) \left[\sum_{m'=-\infty}^{\infty} J_{m'}(z) e^{im'\phi}\right] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z) e^{-im(\phi + \omega_\gamma \tau)}\right] = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} g_m(z) e^{-im\omega_\gamma \tau} . \tag{V.1.40}$$

As expressões para $h(\phi)$ e $g_m(z)$ são definidas na tabela V.1, na qual adota-se a notação $J'_m := dJ_m/dz$.

$h(\phi)$	$g_m(z)$
1	$J_m^2(z)$
$\cos\phi$	$\left(m/z\right)J_m^2(z)$
$\mathrm{sen}\phi$	$-iJ_m(z)J'_m(z)$
$\cos(\phi+\omega_\gamma\tau)$	$-i\left(m/z\right)J_m^2(z)$
$\cos(\phi+\omega_\gamma\tau)$	$-i\left(m/z\right)J_m^2(z)$
$\mathrm{sen}(\phi+\omega_\gamma\tau)$	$iJ_m(z)J'_m(z)$
$\cos\phi\cos(\phi+\omega_\gamma\tau)$	$\left(m/z\right)^2J_m^2(z)$
$\mathrm{sen}\phi\cos(\phi+\omega_\gamma\tau)$	$-i\left(m/z\right)J_m(z)J'_m(z)$
$\cos\phi\,\mathrm{sen}(\phi+\omega_\gamma\tau)$	$i\left(m/z\right)J_m(z)J'_m(z)$
$\mathrm{sen}\phi\,\mathrm{sen}(\phi+\omega_\gamma\tau)$	$i\left(m/z\right)J_m'^2(z)$

Tabela V.1: Algumas funções $h(\phi)$ e $g_m(z)$ usadas na expressão (V.1.40). As funções $h(\phi)$ mostradas aqui são as que aparecem nas componentes do tensor condutividade elétrica (V.1.39). Nessas componentes tem-se integrais envolvendo funções do tipo: $\cos\phi\cos(\phi+\omega_\gamma\tau)$, $\cos\phi\,\mathrm{sen}(\phi+\omega_\gamma\tau)$, $\mathrm{sen}(\phi+\omega_\gamma\tau)$, **etc.**

A integral na variável τ é obtida a partir da relação [Sti92]

$$\int_0^\infty d\tau \exp\left[i\left(\omega - k_\parallel v_\parallel - m\omega_\gamma\right)\tau\right] = \frac{i}{\omega - k_\parallel v_\parallel - m\omega_\gamma} \quad . \tag{V.1.41}$$

Com as integrais mostradas em (V.1.40) e (V.1.41) desaparecem de (V.1.39) as variáveis τ e ϕ. Usando as componentes do tensor condutividade (V.1.39) e a expressão que relaciona $\overleftrightarrow{\sigma}$ com $\overleftrightarrow{\epsilon}$ dada por $\overleftrightarrow{\epsilon} = \epsilon_0\,\overleftrightarrow{\mathbf{I}} + i\,\overleftrightarrow{\sigma}/\omega$ obtemos, após alguma álgebra, o tensor dielétrico na forma:

$$\vec{\epsilon} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{I}} + 2\pi \frac{\omega_P^2}{\gamma\omega} \int_0^\infty dp_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel \left\{ \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}} \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{p_\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel} - \frac{1}{p_\perp} \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} \right) p_\parallel^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{p_\perp^2 \mathbf{T}_m}{\omega - k_\parallel v_\parallel - m\omega_\gamma} \right) \left[\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} + \frac{k_\parallel}{\omega m_e \gamma} \left(p_\perp \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel} - p_\parallel \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} \right) \right] \right\} \quad , \qquad \text{(V.1.42)}$$

com $\mathbf{p} = \gamma m_e \mathbf{v}$ e $\mathbf{T}_m$ dado por:

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} \frac{mJ_m^2}{z^2} & i\frac{mJ_m J_m'}{z} & \frac{mp_\parallel J_m^2}{zp_\perp} \\ -i\frac{mJ_m J_m'}{z} & J_m'^2 & -i\frac{p_\parallel J_m J_m'}{p_\perp} \\ \frac{mp_\parallel J_m^2}{zp_\perp} & -i\frac{p_\parallel J_m J_m'}{p_\perp} & \frac{p_\parallel^2 J_m'^2}{p_\perp^2} \end{bmatrix} \quad ,$$

onde $J_m := J_m(z)$, $z = k_\perp v_\perp / \omega_\gamma$ e $\gamma = \left[1 + \left(p_\parallel^2 + p_\perp^2\right)/m_e^2 c^4\right]^{1/2}$. Os termos do tensor $\mathbf{T}_m$ foram rearranjados com auxílio das seguintes identidades envolvendo as funções de Bessel: $\Sigma_{m=-\infty}^{\infty} m J_m^2 = 0$, $\Sigma_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2 = 1$ e $\Sigma_{m=-\infty}^{\infty} J_m'^2 J_m^2 = 0$.

O resultado (V.1.42) representa o tensor dielétrico $\vec{\epsilon}$ calculado para plasmas quentes imersos num campo magnetostático uniforme onde consideramos somente os elétrons. Nessa expressão, o plasma sobre o qual a onda interage é definido pela função distribuição estacionária $f_0\left(p_\perp, p_\parallel\right)$, a densidade aparece na grandeza ω_P^2 e o campo magnético em ω_γ. Note que nos cálculos apresentados não foi feita nenhuma hipótese sobre a função distribuição. Esta pode ser uma maxwelliana em situações em que o plasma é térmico ou, por exemplo, uma maxwelliana somada a uma outra função que represente uma população de elétrons não térmicos [Air90].

Um exame do segundo termo do lado direito da expressão (V.1.42) para $\vec{\epsilon}$, mostra a existência de uma multiplicidade m de freqüências ressonantes definidas pela equação:

$$\omega - k_\parallel v_\parallel - m\omega_B/\gamma = 0 \quad . \qquad \text{(V.1.43)}$$

Nesta relação, ω é a freqüência vista pelo observador no laboratório (antena) e $m\omega_B$ a freqüência vista por um observador que se movimenta com $v_\parallel$. O efeito Doppler é expresso pelo termo $k_\parallel v_\parallel$ e o efeito relativístico por γ.

Obtido o tensor dielétrico $\vec{\vec{\epsilon}}$, vamos, na seção que se segue, obter as grandezas que entram na equação de transporte de radiação.

V.2 – Propagação, absorção e emissão para plasmas quentes magnetizados.

Nessa seção, vamos apresentar equações para o índice de refração $\mathbf{N}$, o coeficiente de absorção α_ω e a emissividade espectral j_ω para plasmas térmicos e não térmicos. As grandezas são obtidas a partir do tensor dielétrico $\vec{\vec{\epsilon}}$.

Assumindo campos harmônicos do tipo:

$$\psi(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\psi_{\omega\mathbf{k}} \exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\right]\right\} \quad , \tag{V.2.1}$$

onde $\psi_{\omega\mathbf{k}}$ representa as amplitudes de Fourier dos campos, o índice de refração, $\mathbf{N}$, pode ser obtido das equações de Faraday $\partial/\partial\mathbf{r}\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$, e de Ampère-Maxwell $\partial/\partial\mathbf{r}\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\,\partial\mathbf{D}/\partial t$. Temos então a relação:

$$\mathbf{N}\times(\mathbf{N}\times\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}) + \vec{\vec{\epsilon}}\cdot\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = 0 \quad , \tag{V.2.2}$$

onde usamos a definição de índice de refração $\mathbf{N} = \mathbf{k}c/\omega$ e a relação (V.0.3). Utilizando as identidades $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$, $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{BC})$ e $\mathbf{A}\cdot\vec{\vec{\mathbf{I}}} = \vec{\vec{\mathbf{I}}}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}$, obtemos:

$$\mathbf{N}\times(\mathbf{N}\times\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}) + \vec{\vec{\epsilon}}\cdot\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = \left(\mathbf{NN} - N^2\vec{\vec{\mathbf{I}}} + \vec{\vec{\epsilon}}\right)\cdot\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = 0 \quad , \tag{V.2.3}$$

onde o termo $\vec{\vec{\Lambda}} = \mathbf{NN} - N^2\vec{\vec{\mathbf{I}}} + \vec{\vec{\epsilon}}$ é conhecido como tensor de dispersão[Bor83]. Como vamos considerar somente a propagação de radiação na direção perpendicular ao campo magnético toroidal, assumimos no restante deste trabalho $N = N_\perp$.

Vemos do resultado (V.2.3) que a partir do tensor dielétrico $\vec{\vec{\epsilon}}$ determinam-se os possíveis modos de propagação. No capítulo III, para encontrar as freqüências de corte e ressonância seguimos um caminho na qual obtemos a relação (III.2.26) que nada mais é do que um resultado particular de (V.2.3) na qual o tensor dielétrico é o do plasma frio, definido num sistema de coordenadas $(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}},\hat{\mathbf{z}})$ e assumindo $\mathbf{B} = B_0\mathbf{k}$:

$$\vec{\vec{\epsilon}}_{frio} = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad . \tag{V.2.4}$$

Para obter os possíveis modos de propagação da radiação basta calcular as soluções não triviais da equação (V.2.3), isto é, impondo que $\det(\vec{\vec{\Lambda}}) = 0$. Esta é a relação de dispersão do plasma. Para a propagação perpendicular temos que a relação de dispersão é dada por:

$$\det(\mathbf{\Lambda}) = \epsilon_{xx}\left(\epsilon_{zz} - N^2\right)\left(\epsilon_{yy} - N^2\right) + 2\epsilon_{xy}\epsilon_{yz}\epsilon_{xz} - \epsilon_{xz}^2\left(\epsilon_{yy} - N^2\right) + \epsilon_{yz}^2\epsilon_{xx} = 0 \quad , \tag{V.2.5}$$

onde ϵ_{ij} são componentes do tensor dielétrico.
A parte real do índice de refração determina as características de propagação do meio e a parte imaginária, as de absorção. O coeficiente de absorção é obtido através da relação[Mar80]:

$$\alpha_\omega = 2\frac{\omega}{c}\mathrm{Im}[N] \quad , \tag{V.2.6}$$

onde $\mathrm{Im}[N] > 0$ é a parte imaginária de N e ω é a freqüência da onda. A condição assumida para a parte imaginária está relacionada ao fato de estarmos interessados somente no processo de absorção.

As relações que obtivemos até aqui estão baseadas nas equações de Vlasov-Maxwell e permitem a determinação da absorção para um amplo espectro de cenários. Como é um modelo de fluídos no espaço $(\mathbf{r},\mathbf{p})$, o movimento discreto das partículas não é levado em conta e portanto não é possível a determinação da emissividade. Entretanto, para plasmas térmicos, a emissão pode ser calculada a partir da lei de Kirchhoff: $j_\omega / \alpha_\omega = (k_B\omega^2 T)/(8\pi^3 c^2)$.

Para o cálculo da emissão, numa situação mais geral, tem-se que utilizar o modelo baseado nas equações Klimontovich-Maxwell [Kli67] onde o caráter discreto das partículas é

explicitado. A emissão é calculada a partir de métodos que envolvem a teoria das flutuações e passa pela determinação do tensor de correlação das microcorrentes [Sha67].

A teoria que envolve o cálculo da emissividade baseada na teoria das flutuações é bastante complexa e será abordada na continuação deste trabalho. Vamos aqui somente mostrar resultados para a emissividade obtidos a partir dessa teoria. A emissividade espectral dos modos X e O, para emissão perpendicular ao campo magnético são dadas pelas relações [Gir88]:

$$j_X = \frac{4\pi^2\omega^2}{c^3 N_X}\left|1 - \frac{i\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx}}\right|^2 G_{xx} \qquad \text{e} \tag{V.2.7}$$

$$j_O = \frac{4\pi^2\omega^2}{c^3 N_O} G_{zz} \quad , \tag{V.2.8}$$

onde ω é a freqüência da onda emitida, N_X e N_O são as partes reais do índice de refração para os modos X e O respectivamente e ϵ_{ij} são componentes do tensor dielétrico $\vec{\epsilon}$. As quantidades G_{xx} e G_{zz} são duas componentes do tensor de correlação das microcorrentes dadas por:

$$G_{xx} = \frac{\omega T_e}{(2\pi)^5}\frac{\pi\left(\omega_P/\omega\right)^2}{2^{2m}\left[(m-1)!\right]^2}\left(\frac{N_X\omega}{\nu_{eo}^{1/2}\omega_B}\right)^{2(m-1)}\int d^3u\,\frac{u_\perp^{2m}}{\gamma}f\left(u_\parallel, u_\perp\right)\delta\left(\gamma - \frac{m\omega_B}{\omega}\right) \qquad \text{e} \tag{V.2.9}$$

$$G_{zz} = \frac{\omega T_e}{(2\pi)^5}\frac{\pi\left(\omega_P/\omega\right)^2}{2^{2n}\left(m!\right)^2}\left(\frac{N_O\omega}{\nu_{eo}^{1/2}\omega_B}\right)^{2m}\int d^3u u_\parallel^2\,\frac{u_\perp^{2m}}{\gamma}f_0\left(u_\parallel, u_\perp\right)\delta\left(\gamma - \frac{m\omega_B}{\omega}\right) \quad , \tag{V.2.10}$$

onde $\mathbf{u} = \mathbf{p}/\left(m_e T_e\right)^{1/2}$ é o momentum normalizado, $\nu_{e0} = m_e c^2/T_{e0}$ e m a harmônica.

Os resultados (V.2.7) e (V.2.8) para a emissividade espectral podem ser utilizados para quaisquer cenários de plasmas magnetizados especificados pela função distribuição $f_0\left(u_\perp, u_\parallel\right)$.

Desta forma apresentamos acima de forma sucinta como são obtidas as grandezas envolvidas na emissão, absorção e propagação da emissão eletrociclotrônica.

Vamos apresentar, a seguir, um procedimento para modelar a coluna de plasmas de máquinas tokamak que permite o uso do modelo dielétrico apresentado.

V.3. – Modelagem da coluna de plasma em tokamaks

Na secção anterior mostramos como se obtém os componentes do tensor dielétrico $\overleftrightarrow{\epsilon}$ e de outras grandezas que entram na equação do transporte de radiação. Claramente, mesmo em simetrias simples, esses cálculos são impossíveis de serem feitos analiticamente. Há a necessidade de se calcular numericamente essas grandezas a partir de programas computacionais (códigos). Na literatura temos um número bastante grande de códigos desenvolvidos [Cel77, Air90] para o estudo da absorção e/ou da emissão eletrociclotrônica. Esses programas têm graus de complexidade diferentes. No tokamak JET, por exemplo, utiliza-se um código desenvolvido para estudar a emissão eletrociclotrônica durante a injeção de ondas na região híbrida inferior *HI* (*Lower hybrid*) [Air90, Bru94]. Esse código, bastante complexo, é resultado da fusão de 3 outros códigos: um deles para o cálculo da emissão eletrociclotrônica, outro, denominado de *Fokker-Planck*, determina a evolução da função distribuição durante a interação do plasma com as ondas *HI* e, finalmente, outro para tracejamento de raios (*Ray-tracing*) que permite determinar a trajetória dos raios no plasma.

Na exposição das teorias de plasmas tênue e dielétrico, expostas anteriormente, admitiu-se uma situação de plasmas homogêneos, mas podem ser aplicadas para situações de plasmas não-homogêneos como em tokamaks por meio de uma técnica conhecida como modelo de camadas semi-infinitas [Cel77]. Nesse modelo toma-se a coluna de plasma toroidal como uma lâmina semi-infinita de largura $2a$ (diâmetro da coluna). A camada somente é finita na direção x, ou seja ao longo de um diâmetro no plano equatorial do tokamak. Essa lâmina de plasma é, então, subdividida num grande número de segmentos iguais e de largura uniforme (camadas) $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Admite-se que, dentro de uma camada, os parâmetros envolvidos nos cálculos são constantes. Por exemplo, toma-se para o campo magnético $\mathbf{B}_{\phi i} = \mathbf{B}_{\phi}(x_i)$, a densidade eletrônica $n_{ei} = n_e(x_i)$ e, para plasmas térmicos, a temperatura $T_{ei} = T_e(x_i)$ valores numa

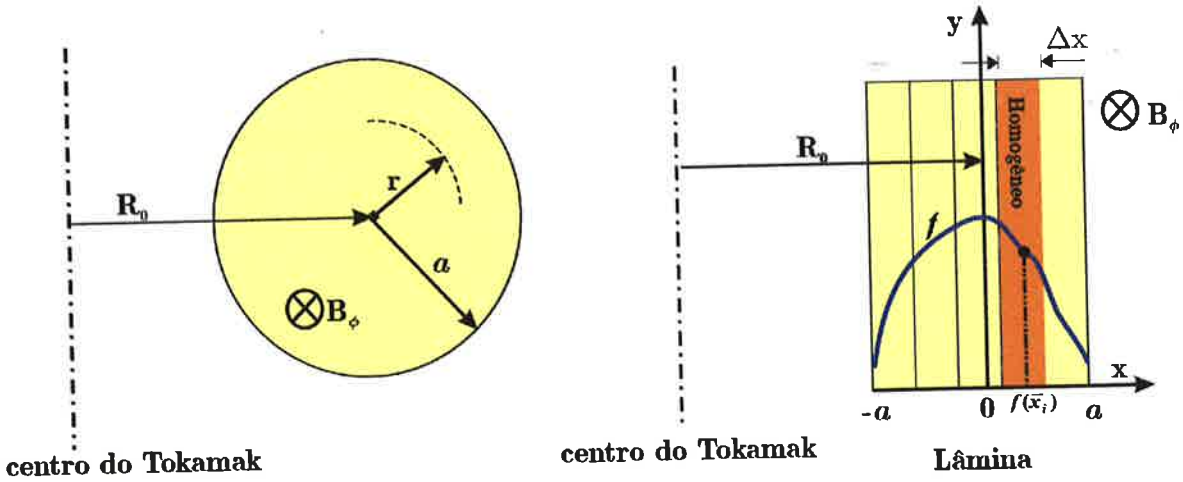


Fig. V.3: Modelo de camadas utilizado para o cálculo de grandezas associadas a emissão eletrociclotrônica em um tokamak. Toma-se a coluna de plasma como uma lâmina semi-infinita com largura $2a$ na direção perpendicular ao eixo principal do tokamak. Essa lâmina de plasma é dividida em segmentos iguais de largura $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Dentro de uma camada os parâmetros do plasma são considerados constantes

determinada posição x_i da coluna "i" [4]. A não-homogeneidade da coluna de plasma é recuperada fazendo os parâmetros do plasma variarem entre as camadas seguindo um perfil dado. Na Fig. V.3 o modelo de camadas é ilustrado onde se mostra um perfil genérico f que representa uma grandeza de interesse. Considera-se, nessa modelagem, uma variação suave dos parâmetros ou seja a escala de variação da grandeza é muito maior que Δx_i.

Neste trabalho, a variação da densidade e da temperatura obedece a perfis parabólicos dados por:

$$T_{ei}(x) = \left(T_{e0} - T_{ea}\right)\left[1 - \left(\frac{x_i}{a}\right)^{\varpi}\right]^{\alpha} + T_{ea} \quad \text{e} \tag{V.3.1}$$

$$n_{ei}(x) = \left(n_{e0} - n_{ea}\right)\left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right)^{\sigma} + n_{ea} \quad , \tag{V.3.2}$$

onde ϖ, α e σ são os parâmetros do perfil e na borda temos $n_e(a) = n(-a) = n_{ea}$ e $T_e(a) = T_e(-a) = T_{ea}$. Em tokamaks, tem-se que em geral as densidades e temperaturas na borda do plasma $(\Delta x_{a,-a})$ são da ordem de 1% dos valores do centro. A coordenada x_i é

[4] Esse ponto x_i é arbitrário tendo-se em vista que se assume a homogeneidade do plasma dentro da camada.

tomada a partir do centro da coluna de plasma até o ponto considerado. No centro da coluna temos $n_{e0} = n_e(0)$ e $T_{e0} = T_e(0)$. Vamos aqui considerar somente o campo magnético toroidal $\mathbf{B}_\phi$ (II.2.4), que para a propagação perpendicular ($\theta = 90^0$) é dado por:

$$\mathbf{B}_{\phi i}(x_i) = \frac{B_{\phi 0}}{1 + x_i/R_0}\mathbf{k} \quad , \tag{V.3.3}$$

com $B_{\phi 0} = B_\phi(0)$.

No cálculo do transporte da radiação, a intensidade específica $I_\omega^{(i+1)}$ que sai da fatia elementar Δx_i (Fig. V.3) é calculada com auxílio da equação de transporte de radiação (II.2.9):

$$I_\omega^{i+1} = I_\omega^{i-1} + \frac{j_{\omega i}}{N_i^2 \alpha_{\omega i}}\left[1 - \exp\left(-\alpha_{\omega i}\Delta x_i\right)\right] \quad , \tag{V.3.4}$$

onde a emissividade espectral $j_{\omega i}$, o coeficiente de absorção $\alpha_{\omega i}$ e o índice de refração são calculados dentro da camada "i" a partir das relações obtidas no modelo apresentado no item anterior. Assim, podemos calcular a intensidade I_ω da radiação-EC recursivamente, fazendo uso da equação. (V.3.4), desde o ponto de emissão até o ponto onde é detectado pela antena.

V.4 – Determinação numérica do espectro de EEC via modelo dielétrico.

Neste trabalho, para o cálculo numérico do tensor dielétrico a partir da função distribuição de elétrons e do espectro da radiação eletrociclotrônica (EEC), $I_\omega(r)$, utilizamos um código computacional chamado *emissão* [Ros02]. Pode-se também calcular numericamente, para cada modo e harmônica, outras quantidades de interesse para o diagnóstico por EEC, tais como, a profundidade óptica τ, a emissividade, o índice de refração N, etc.

Vamos aqui descrever de forma bastante resumida o algoritmo utilizado no código. O modelo dielétrico de plasmas quentes e magnetizados é a base teórica. Apresentam-se, a seguir, as características gerais do programa e também suas principais rotinas, como as que calculam a parte hermitiana e anti-hermitiana do tensor dielétrico e as que determinam as quantidades j_ω, α_ω e N. Finalmente, tem-se a rotina para calcular o espectro $I_\omega(r)$. A linguagem para a implementação computacional do algoritmo foi o Fortran versão 90/95 [Cha98].

A espinha dorsal do código *emissão* é formada por um conjunto pequeno de instruções de chamada que formam o programa principal. Tem-se também um grande número de **sub-rotinas**

que são chamadas pelo programa principal. Essas sub-rotinas podem ser simples, como a usada para calcular o perfil de temperatura ou complexas, como, por exemplo, as que calculam as partes hermitiana e anti-hermitiana do tensor dielétrico

Na Fig. V.4 é mostrado um diagrama de blocos que descreve o algoritmo básico usado no código. Nesse diagrama de blocos representamos os elementos que consideramos essenciais no código. O fluxo principal dos cálculos está representado pelos blocos "(A1)", "(A2)", "(A3)", "(D)", "(F1)", "(F2)", "(F3)". Os cálculos que consideramos essenciais são representadas pelos blocos "(B1)", "(B2)", "(E1)" e "(E2)". O relacionamento entre os blocos é indicado por linhas com setas duplas. Os três primeiros blocos do programa principal, (A1)-(A3), estão agrupados em um bloco maior "(A)". Neles são calculadas as funções de entradas do código que são os perfis parabólicos de temperatura $T_e(x)$ e de densidade $n_e(x)$, a relação raio-freqüência $\omega_B(x)$ e a função de distribuição estacionária $f_0(u,\mu,x)$ para os elétrons. Chamamos de "funções de entrada" os perfis necessários para definir completamente o cenário do plasma no tokamak. No código, os dados de entrada são parâmetros lidos por uma rotina específica que permitem a determinação das "funções de entrada".

Na figura, os blocos (B1) e (B2), em função de suas semelhanças, são agrupados num bloco maior. Nele temos rotinas simples destinadas aos processos numéricos de partição do espaço (camadas) e do momento. O algoritmo (B1) destina-se a dividir a coluna de plasma em camadas. O algoritmo (B2) destina-se a obter uma "grade" de pontos no espaço de momento (u,μ), onde $u = |\mathbf{u}| = |\mathbf{p}|/(m_e T_{e0})^{1/2}$ é o módulo do momento relativístico normalizado e $\mu = \cos\zeta$, onde ζ é o ângulo entre $\mathbf{p}_z$ e $\mathbf{p}$. A grade de pontos (u_k,μ_l) será utilizada para calcular a função distribuição $f_0(u,\mu,x)$ como indicam as setas que relacionam (B2) com (A3). No código, o parâmetro $u_{\max}$ que fixa o valor máximo de u. Nos resultados apresentados neste trabalho, usamos para $u_{\max}$ o valor 10. Esse valor foi obtido empiricamente de forma a se evitar problemas numéricos. O perfil $\omega_B(x_i) = \omega_{B0}\left(1 + x_i/R_0\right)^{-1}$ é também calculado, onde $\omega_{B0} = \omega_B\left(B_{\phi 0}\right)$ é a freqüência eletrociclotrônica no centro da coluna. A função de distribuição f_0 é determinada de duas formas: via cálculo (*fórmula*) ou pela leitura de um arquivo (*file-in-file*). Nos resultados apresentados neste trabalho, utilizamos para f_0 a função maxwelliana dada por:

$$f_0(u) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(\frac{T}{T_{e0}}\right)\exp\left(-\frac{T}{2T_{e0}}u^2\right) \tag{V.5.1}$$

onde $T_{e0} = T_e(x=0)$ é a temperatura eletrônica no centro da coluna. Nessa expressão, a variável de momento u é determinada a partir da rotina representada por (B2). Note que para distribuições anisotrópicas devemos usar as variáveis u e μ.Uma vez calculadas, as curvas de entrada são armazenadas para serem utilizadas posteriormente.

O passo seguinte é o cálculo do tensor dielétrico $\vec{\vec{\epsilon}}$ (bloco D do diagrama). O algoritmo determina $\vec{\vec{\epsilon}}$ a partir do cálculo de suas partes hermitiana e anti-Hermitiana. A parte hermitiana está associada a propagação e a anti-hermitiana a absorção.
O tensor dielétrico total é dado por [Sti92, Swa89]:

$$\vec{\vec{\epsilon}} = \vec{\vec{\epsilon}}_h + i\,\vec{\vec{\epsilon}}_a\,, \tag{V.5.2}$$

com $\vec{\vec{\epsilon}}_h$ e $\vec{\vec{\epsilon}}_a$ representando respectivamente as partes hermitianas e anti-hermitianas, que são dadas por

$$\vec{\vec{\epsilon}}_h = \frac{1}{2}\left(\vec{\vec{\epsilon}} + \vec{\vec{\epsilon}}^{\dagger}\right) \tag{V.5.3}$$

$$\vec{\vec{\epsilon}}_a = \frac{1}{2i}\left(\vec{\vec{\epsilon}} - \vec{\vec{\epsilon}}^{\dagger}\right) \tag{V.5.4}$$

onde o símbolo † significa matriz "transposta e conjugada".

Na implementação computacional é assumida a aproximação de pequeno raio de Lamor, isto é, o raio da órbita do elétron é considerado pequeno em comparação ao comprimento de onda da radiação. Essa aproximação é válida para os cenários de plasma do TCABR. Com essa aproximação, podemos usar a expansão assintótica para as funções de Bessel como foi feito no caso do modelo de plasmas tênues (capítulo IV):

$$J_m(\xi) \approx \left(\frac{1}{2}\right)^m \frac{\xi^m}{m!} \tag{V.5.5}$$

As sub-rotinas responsáveis pelo o cálculo da parte hermitiana e da parte anti-hermitiana estão representadas respectivamente nos blocos (E1) e (E2) do diagrama na Fig. V.5, que chamamos de "núcleo" do código.

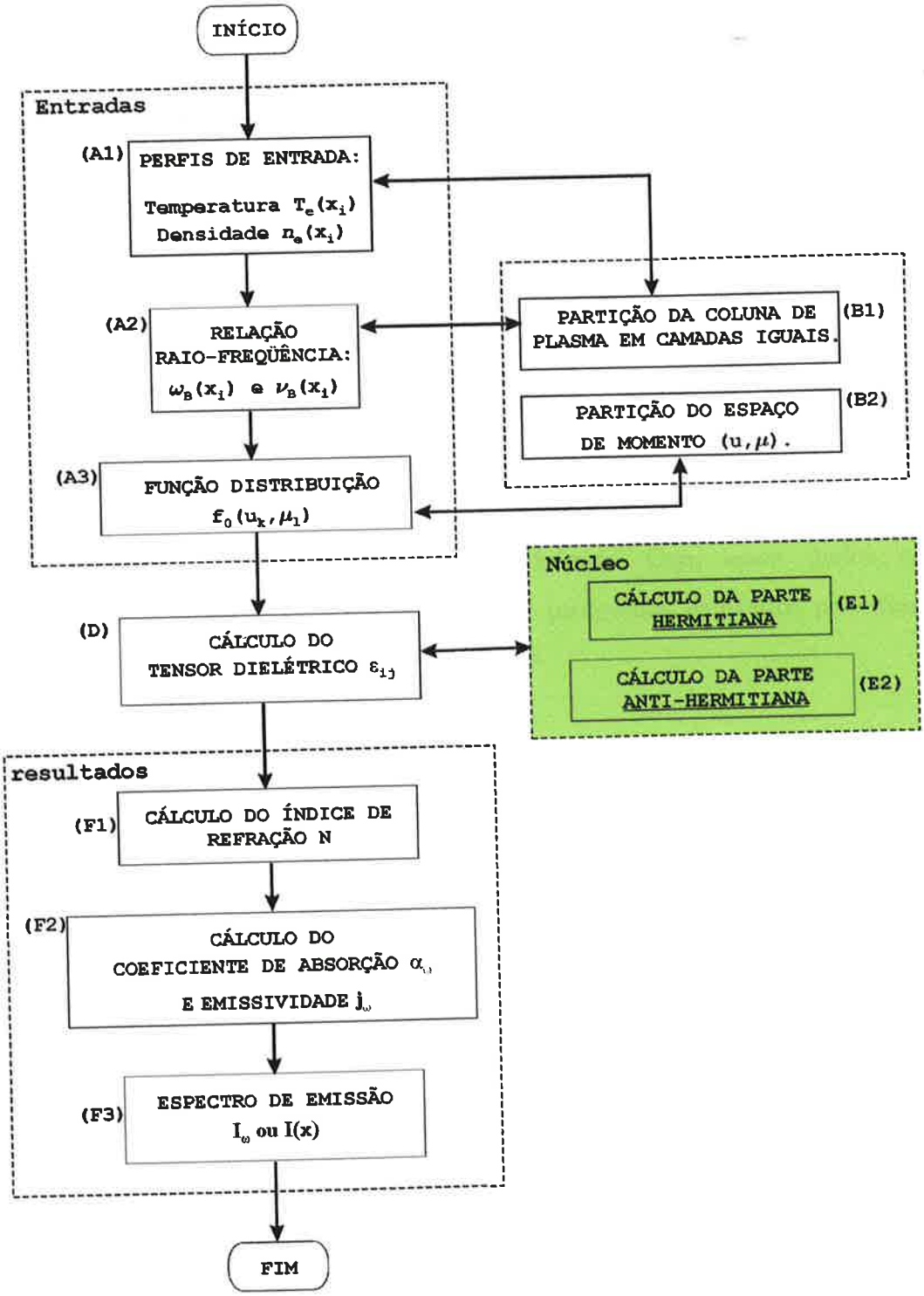


Fig.V 4: Diagrama de blocos do algoritmo básico para o cálculo do espectro de emissão da radiação-EC.

Uma vez determinado o tensor dielétrico, o código calcula o índice de refração usando a relação de dispersão (V.2.5). Neste cálculo pressupõem-se a propagação perpendicular ao campo magnético externo. A sub-rotina responsável por esse cálculo é representada pelo bloco (F1). Em seguida, calcula-se o coeficiente de absorção espectral e a emissividade espectral. As rotinas para esses cálculos são representadas pelo bloco (F2). O coeficiente α_ω é obtido a partir da parte imaginária do índice de refração que é dada pela expressão (V.2.6). Para o cálculo da emissividade usa-se as equações (V.2.7) e (V.2.8). Outro perfil importante é o da profundidade óptica $\tau(r)$ que também é numericamente calculado. Finalmente, o espectro é calculado em (F3), interativamente , usando a relação (V.3.4).

Assim, em resumo, partimos das características macroscópicas do plasma (perfis de temperatura $T_e(x)$ e densidade $n_e(x)$), da função de distribuição em regime estacionário do plasma $f_0\left(p_\perp, p_\parallel\right)$ e de alguns parâmetros do tokamak. Com esses dados calculamos numericamente o espectro de EEC. Com o modelo e programas utilizados podemos também obter resultados numéricos para descargas não térmicas.

VI – Resultados e Discussões

Nesse capítulo vamos apresentar resultados numéricos e gráficos envolvendo a emissão eletrociclotrônica (EEC) do plasma no tokamak TCABR tendo em vista o uso dessa radiação para fins de diagnóstico. Esses resultados envolvem aspectos importantes para a caracterização da EEC no TCABR como o entrelaçamento de harmônicas e as condições de acessibilidade e absorvibilidade. Além disso, apresentam-se também resultados de simulações envolvendo vários parâmetros de interesse para a EEC como perfis radiais de grandezas como a emissividade espectral, o coeficiente de absorção espectral, a profundidade óptica, o índice de refração e espectros de emissão da radiação-EC. Essas simulações foram feitas com programas desenvolvidos especialmente para este trabalho em MAPLE (ver apêndice). Foi também utilizado um código para a ECE escrito em FORTRAN90 baseado no modelo dielétrico de plasmas. Essas simulações foram feitas para os dois modos e para as primeiras harmônicas da radiação-EC. Com os resultados esperamos caracterizar os limites de aplicabilidade do diagnóstico para vários cenários de plasma da máquina e procurar o modo e harmônica mais conveniente para ser utilizado.

Inicialmente discute-se a questão do entrelaçamento de harmônicas para determinar as bandas de freqüências onde é possível associar de forma biunívoca a intensidade da radiação-EC e a posição da emissão. A seguir abordamos a questão da acessibilidade à radiação que depende do modo, da harmônica, do campo magnético e da densidade. Outro aspecto relevante é a determinação do grau de opacidade do plasma no TCABR que será discutido a partir de curvas da profundidade óptica. Em seguida são apresentados os espectros para a EEC no TCABR obtidos a partir de um modelo simples e para plasmas térmicos onde se considerou o efeito de reabsorção. Estes resultados evidenciam a grande influência exercida pela profundidade óptica na forma do espectro. Finalmente apresentam-se resultados, para várias grandezas, obtidos com o modelo dielétrico para cenários de plasmas térmicos no TCABR.

VI.1 – Entrelaçamento de harmônicas

Para a utilização da EEC como meio de diagnóstico uma antena é colocada na parte exterior a coluna de plasma, no plano equatorial do tokamak e dirigida perpendicularmente ao eixo maior da máquina. A antena é colocada na região de baixo campo da máquina. É necessária uma correspondência um-a-um entre a freqüência da radiação e a posição de emissão. A dependência radial da freqüência da m-ézima harmônica $\nu_m(x)$ na região do plasma é dada pela relação raio-freqüência, que para $\theta = \pi/2$, pode ser escrita como:

$$\nu_m(x) = m\nu(x) = 28\frac{mB_{\phi 0}}{1 + x/R_0}\,(\mathrm{GHz}) \quad , \tag{VI.1.1}$$

onde $B_{\phi 0} = B_\phi(0)$ é o campo magnético toroidal no centro da coluna de plasma, R_0 é o raio maior do tokamak. e x é a distância do centro da coluna ao ponto considerado.

Na Fig. VI.1 é apresentado o gráfico da relação raio-freqüência (VI.1.1) para o tokamak TCABR e para as quatros primeiras harmônicas. O campo magnético utilizado foi de $B_{\phi 0} = 1{,}14T$. Para essas harmônicas, há duas bandas de freqüências entrelaçadas, uma delas envolvendo a segunda e terceira harmônicas, entrelaçamento 2-3, e a outra a terceira e a quarta, entrelaçamento 3-4. A faixa de freqüências onde as harmônicas 2 e 3 estão entrelaçadas vai de 74GHz até 90 GHz. Portanto a banda útil para a segunda harmônica vai de 52GHz até 74GHz ($\sim 72\%$ da coluna). O entrelaçamento 3-4 vai de 99 GHz até 155 GHz e a banda útil para essas harmônicas vai de 92 GHz até 99 GHz ($\sim 16\%$ da coluna). Do ponto de vista do entrelaçamento de harmônicas, vemos que, para o TCABR, as duas primeiras harmônicas podem ser usadas para fins de diagnóstico. Para harmônicas mais altas o entrelaçamento é bastante acentuado. A primeira harmônica mostra-se uma forte candidata para o diagnóstico pois não há entrelaçamentos em toda a extensão da coluna de plasma, mas sua detecção é seriamente afetada pelas condições de acessibilidade como veremos na próxima seção.

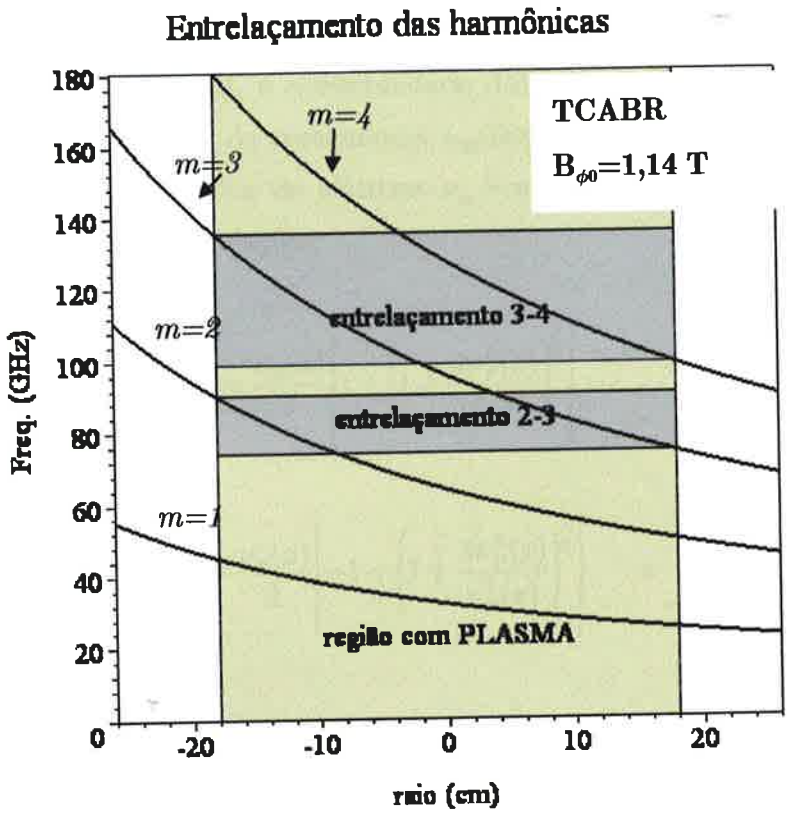


Fig. VI.1: Curvas da relação raio-freqüência para as quatro primeiras harmônicas da radiação-EC para o TCABR, com $B_{\phi 0} = 1{,}14T$. Note o forte entrelaçamento que ocorre para $m \geq 3$.

VI. 2 – Condições de acessibilidade para a radiação eletrociclotrônica no TCABR

A não-homogeneidade do campo magnético toroidal e da densidade de plasma implicam numa dependência radial x (no plano equatorial) das freqüências $\nu_P(x)$, $\nu_L(x)$, $\nu_R(x)$, $\nu_{HS}(x)$ e $\nu_B(x)$. Assim, a propagação da radiação eletrociclotrônica numa dada freqüência ν, e seus harmônicos poderá ser afetada em virtude de atingir regiões no plasma onde essa radiação não pode se propagar. Isso faz com que a radiação não chegue até a antena.

Para fins práticos, no estudo da acessibilidade, queremos determinar valores de densidade de plasma limite, n_{e0}^{L}, para um dado campo toroidal $B_{\phi 0}$ tal que a freqüência da radiação-EC num dado modo, ao se propagar pelo plasma, não entre em regiões de não-propagação. Quando se discute a acessibilidade em termos de n_{e0}^{L} estamos admitindo, em geral, perfis radiais parabólicos da densidade. Como o sistema de EEC tem normalmente sua antena

situada externamente ao tokamak e na região de baixo campo, nossa análise será restrita a ondas propagando-se nessa direção.

Conforme discutimos no capítulo III, a acessibilidade da radiação-EC é verificada a partir das freqüências de corte $\nu_L(x)$ e $\nu_R(x)$, da ressonância $\nu_{HS}(x)$, da freqüência de plasma $\nu_P(x)$ e das harmônicas da freqüência ciclotrônica de elétrons $\nu_m = m\nu_B(x)$. Essas grandezas dependem da posição radial x, e são dadas pelas relações:

$$\nu_R(x) = \frac{\nu_B(x)}{2}\left[1+\left(1+\frac{4\nu_P^2(x)}{\nu_B^2(x)}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad , \tag{VI.2.1}$$

$$\nu_L(x) = \frac{\nu_B(x)}{2}\left[-1+\left(1+\frac{4\nu_P^2(x)}{\nu_B^2(x)}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad \text{e} \tag{VI.2.2}$$

$$\nu_{HS}(x) = \left[\nu_B^2(x)+\nu_P^2(x)\right]^{\frac{1}{2}} \quad , \tag{VI.2.3}$$

onde $\nu_P(r)$ e $\nu_B(r)$ são dadas por:

$$\nu_B(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{q_e B_{\phi 0}}{m_e}\right)\left(1+\frac{x}{R_0}\right)^{-1} \text{.....e} \tag{VI.2.4}$$

$$\nu_P(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{q_e^2 n_{e0}}{\epsilon_0 m_e}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\sigma} - n_{ea}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\sigma}-1\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{VI.2.5}$$

Na Fig. VI.2 (A) são esboçadas as curvas para as freqüências $\nu_L(x)$, $\nu_R(x)$, $\nu_{HS}(x)$, $\nu_P(x)$ e $\nu_m = m\nu_B(x)$ para o tokamak TCABR, onde se utilizou, para a densidade de pico, $n_{e0} = 2,35\times10^{13} cm^{-3}$ e, para o campo magnético no centro da coluna, $B_{\phi 0} = 1,14T$. Examinando essa figura, e tomando uma antena colocada externamente à coluna plasma, no plano equatorial e orientada perpendicularmente ao eixo maior do tokamak, a primeira harmônica no modo O, não é acessível devido a $\nu_P(x)$. Para o modo X, a primeira harmônica só é acessível para uma antena na região de alto campo. Nesse mesmo modo e harmônica, para uma antena na região de campo baixo, a radiação não é acessível pois encontra a região entre as freqüências $\nu_R(x)$ e $\nu_{HS}(x)$. Para a segunda harmônica no modo X, a radiação é totalmente acessível para uma

antena na região de baixo campo e parcialmente acessível para uma antena na região de campo alto. Para a segunda harmônica, no modo O, a radiação é acessível nas regiões de campo alto e baixo. É interessante notar que para densidade maior ou o campo magnético menor do que as utilizadas no resultado, a radiação-EC, nas condições desta figura, torna-se inacessível.

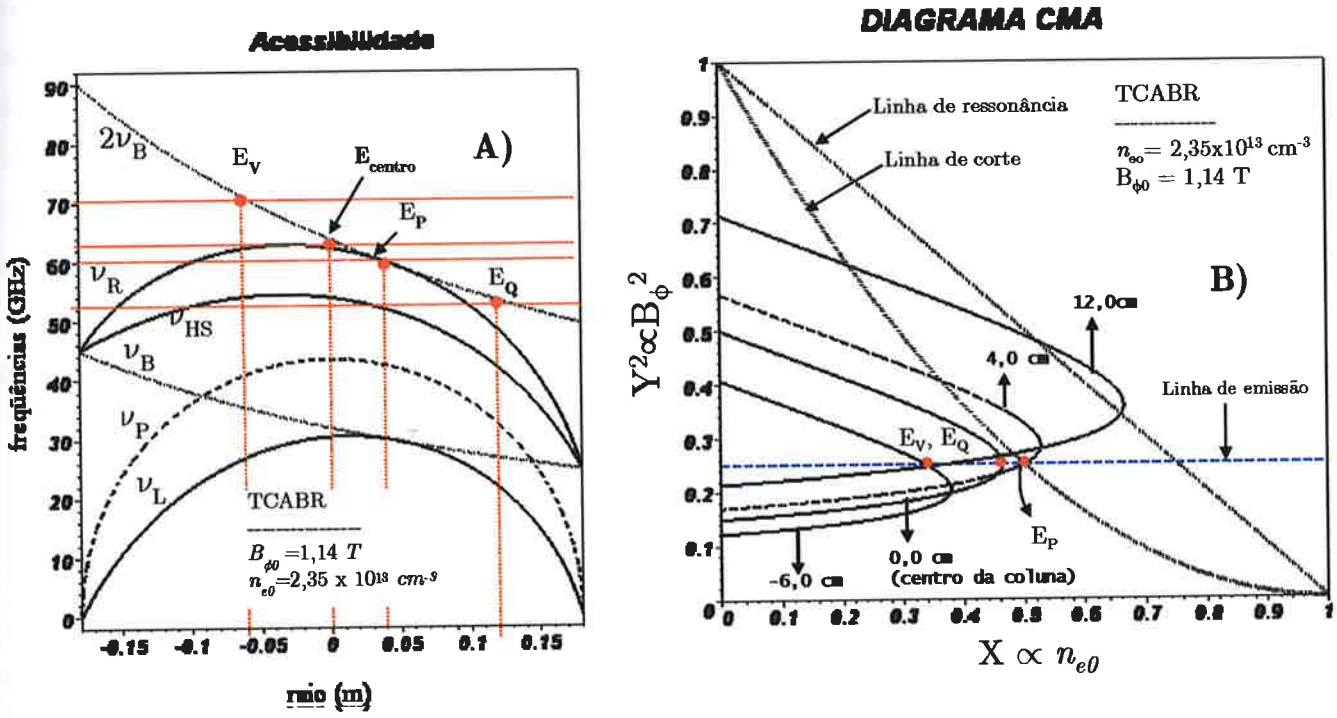


Fig. VI.2: A) Perfis radiais para: as freqüências de corte ν_L, ν_R; de ressonância ν_{HS}; da primeira e segunda harmônicas ν_B e $2\nu_B$, e da freqüência de plasma ν_P. B) Diagrama CMA mostrando trajetórias para 4 freqüências da radiação-EC no plasma. São mostradas as freqüências ν_R (linha de corte) e ν_{HS} (linha de ressonância). A freqüência ν_L não está representada. Mostra-se também a linha de emissão para a segunda harmônica ($Y = 0,25$). Os dados apresentados nessa figura são para $B_{\phi 0} = 1,14T$ e $n_{e0} = 2,35 \times 10^{13} cm^{-3}$.

Portanto, para densidades de pico abaixo do valor limite ($n_{e0} < n_{e0}^{L} = 2,35 \times 10^{13} cm^{-3}$) a radiação eletrociclotrônica na segunda harmônica (modo X) é totalmente acessível. Para valores de densidade superiores ($n_{e0} > n_{e0}^{L}$) a radiação será parcialmente acessível.

Um segundo método para se abordar a questão da acessibilidade, que vimos no capítulo III, é o diagrama CMA. Na Fig. (VI.2.B) apresenta-se esse diagrama onde são mostradas quatro trajetórias de ondas EC, na segunda harmônica, para o mesmo cenário de plasma do TCABR

apresentado na Fig. VI.2.a. São mostradas as curvas representando as freqüências ν_R (linha de corte) e ν_{HS} (linha de ressonância). As coordenadas usadas são $X(x) = [\nu_P(x)/\nu]^2$ e $Y^2(x) = [\nu_B(x)/\nu]^2$. Mostra-se a linha de emissão para a segunda harmônica que é a linha reta formada pelo lugar geométrico $(X, 1/4)$[5]. Uma onda EC emitida em algum ponto da coluna caminha em dois sentidos cruzando a linha $X = 0$ em dois pontos. O ponto superior corresponde à borda interna e o inferior à borda externa. As 4 trajetórias representadas são emitidas nas posições -6,0; 0,0; 4,0 e 12,0cm. Os pontos de emissão, E_V, E_P e E_Q (Fig. VI.2.B) são também mostrados na Fig. (VI.2.A). Note que E_P é o ponto onde a emissão toca ν_R correspondente ao ponto de emissão em $x_E = 4{,}0$ cm. A radiação emitida no ponto E_Q da Fig. VI.2.a corresponde a trajetória que, na Fig. VI.2.b, cruza a região entre as linhas de corte e ressonância. Essa é a trajetória da radiação emitida em $x_E = 12cm$.

Devemos notar que, no que diz respeito a acessibilidade, as informações obtidas com os gráficos freqüência-raio podem também ser obtidas com o diagrama CMA.

VI. 3 –Condições de absorvibilidade

O uso da radiação-EC para diagnóstico de plasmas em tokamaks requer, além dos estudos do entrelaçamento e acessibilidade, a determinação das condições de absorção do plasma. Essa avaliação é feita através da profundidade óptica τ em função da freqüência e da polarização da radiação-EC. Como foi discutido no capítulo III, se o plasma apresentar valores pequenos de profundidade óptica $(\tau < 1)$, ele é considerado um meio transparente. Em tal condição, a intensidade da emissão detectada é menor que a emitida e a relação freqüência-temperatura não é direta. Por outro lado, para valores de profundidade óptica superiores a unidade ($\tau \gtrsim 1$ - critério geralmente adotado na literatura) ocorre significativa re-absorção da radiação-EC. Como vimos, para a medida da temperatura de elétrons, é interessante que se tenha um plasma suficientemente opaco.

A profundidade óptica τ depende do modo de propagação (O ou X) e também da harmônica. Para a determinação de τ para a coluna de plasma no TCABR vamos usar expressões encontradas na literatura. Para os harmônicos $m \geq 2$, e para propagação

---

[5] Como $\nu_E = m\nu_B(x_E)$ temos, no ponto de emissão, $Y_m^{\,2}(x_E) = \left[\nu_B(x_E)/m\nu_B(x_E)\right]^2 = 1/m^2$

perpendicular ($\theta = \pi/2$), os perfis $\tau(x)$ podem ser calculados a partir das equações dadas por [Bor81]:

$$\tau_m^X\left(\theta = \pi/2\right) = \frac{\pi^2 m^{2(m-1)}}{2^{(m-1)}(m-1)!}\left[\frac{\nu_P(x)}{\nu_B(x)}\right]^2\left(\frac{v_T(x)}{c}\right)^{2(m-1)} \upsilon_m^X\left(x,\theta = \pi/2\right)\left(\frac{R_0}{\lambda_0(x)}\right) \quad \text{e} \qquad \text{(VI.3.1)}$$

$$\tau_m^O = \frac{\pi^2 m^{2(m-1)}}{2^{m-1}(m-1)!}\left(\frac{\nu_P(x)}{\nu_B(x)}\right)^2\left(\frac{v_T(x)}{c}\right)^{2m} \upsilon_m^O(x)\frac{R_0}{\lambda_0(x)} \quad , \qquad \text{(VI.3.2)}$$

sendo os termos $\upsilon_m^O(x)$ e $\upsilon_m^X(x,\theta)$ são dados por:

$$\upsilon_m^X(x,\theta = \pi/2) \approx 1 - \left(\frac{m - 3/2 - 2/m}{m^2 - 1}\right)\left(\frac{\nu_P(x)}{\nu_B(x)}\right)^2 \quad \text{e} \qquad \text{(VI.3.3)}$$

$$\upsilon_m^O(x) = \left[1 - \left(\frac{\nu_P(x)}{m\nu_B(x)}\right)^2\right]^{m-1/2} \quad , \qquad \text{(VI.3.4)}$$

onde: $v_T(x) = \left(k_B T_e(x)/m_e\right)^{1/2}$ é a velocidade térmica eletrônica; $\lambda_0(x) = 2\pi c/\omega_B(x)$ é o comprimento de onda no vácuo, R_0 é o raio maior do tokamak e m é a harmônica. A expressão dada para $\upsilon_m^X(x)$ é válida somente para:

$$\chi(x) := \left(\frac{\nu_P(x)}{\nu_B(x)}\right)^2 < m(m-1) \quad . \qquad \text{(VI.3.5)}$$

Para o tokamak TCABR com um campo magnético toroidal $B_{\phi 0} = 1{,}14$ T e densidade de pico $n_{e0} = 2{,}3\text{x}10^{13} cm^{-3}$ temos para a pior situação da condição (VI.3.5) $\chi(x=0) \approx 2$. Nas simulações que apresentamos a seguir usamos densidades $n_{e0} < 2{,}3\text{x}10^{13} cm^{-3}$. Nessas simulações, usamos as expressões (VI.3.1)-(VI.3.4). Para a temperatura e a densidade utilizou-se, respectivamente, os perfis (V.3.1) e (V.3.2), apresentados no capítulo V na qual usamos para os parâmetros do perfil de temperatura os valores $\varpi = 2$ e $\alpha = 1$ e, para o perfil de densidade $\sigma = 1$.

Na Fig. VI.3 apresentamos perfis de profundidade óptica, calculados para a segunda e terceiras harmônicas dos modos O e X para cenários do plasma no tokamak TCABR. Adotou-se

a densidade de pico $n_{e0} = 2{,}0\text{x}10^{13} cm^{-3}$, para satisfazer a condição (VI.3.5) ($\chi(x=0) \approx 1{,}7$) e para o campo magnético toroidal no centro da coluna utilizou-se $B_{\phi 0} = 1{,}14$ T.

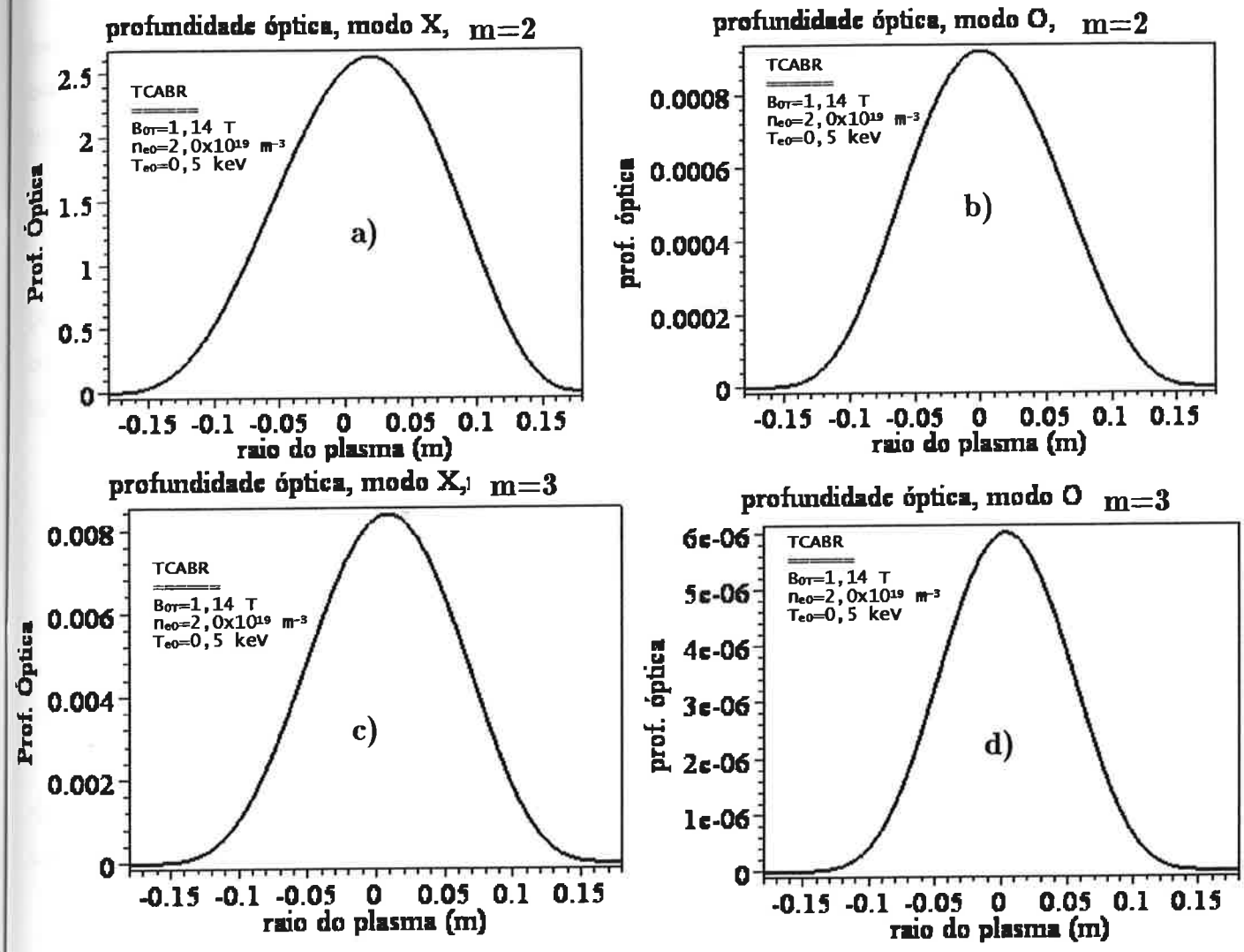


Fig. VI.3: Perfis de profundidade óptica τ nas duas primeiras harmônicas da polarização ordinária (modo O) e extraordinária (modo X) para o tokamak TCABR com B_{T0}=1,14 T, n_{e0}=2,0 x 10^{19} m^{-3}e T_{e0}= 500 eV, obtidos as equações (VI.3.1) e (VI.3.2).

Examinando os perfis da profundidade óptica obtidos, vemos diferenças entre o grau de absorção da radiação-EC para cada polarização. Para a segunda harmônica, gráficos (a) e (b) essa diferença é substancial ($\tau_2^X / \tau_2^O \sim 3000$). Para o modo O ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_\phi$), m=2, o plasma comporta-se como um meio de altamente transparente. Por outro lado, para o modo extraordinário ($\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_\phi$), ocorre significativa re-absorção da radiação-EC ($\tau > 1$) e, portanto, o

plasma comporta-se como um meio opaco na região central da coluna. No caso da terceira harmônica, observamos que o plasma é transparente e temos a relação ($\tau_3^X/\tau_3^O \sim 1300$).

Desses resultados verifica-se que, na região da borda do plasma, para todos os modos e harmônicas a profundidade óptica é menor que a unidade. Nessa situação podemos seguir o caminho proposto por F. Engelmann e M. Curatolo [Eng73] para determinar o perfil de temperatura. Nessa proposta, para situações em que:

$$\tau_m^X, \tau_m^O \ll 1 \quad , \tag{VI.3.6}$$

podemos expandir o termo $\exp(-\tau)$ - na relação $I_\omega(x) = I_{\omega N}\left(1 - e^{-\tau}\right)$ - em séries de Taylor e considerar somente os termos de primeira ordem. Dessa forma obtém-se, para a razão das intensidades específicas dos dois modos a relação:

$$\frac{I_m^O(\nu)}{I_m^X(\nu)} \approx \frac{\upsilon_m^O(x)}{\upsilon_m^X(x)} \frac{k_B T_e(x)}{m_e c^2} \quad , \tag{VI.3.7}$$

sendo que υ_m^X e υ_m^O são dados pelas relações (VI.3.3) e (VI.3.4), respectivamente. A freqüência ν e a posição x estão ligadas pela relação raio-freqüência dada por (VI.1.1). Verificamos, por outro lado, que as relações (VI.3.3) e (VI.3.4) dependem do perfil da densidade, que a princípio é desconhecido. Para contornar esse problema, vamos introduzir o fator $\eta \equiv \upsilon_m^X(x)/\upsilon_m^O(x)$ que depende do cenário de plasma. Nessa situação, a temperatura, obtida a partir de (VI.3.8), pode ser escrita como:

$$T_e(x) \approx \eta \frac{m_e c^2}{k_B} \frac{I_m^O(\nu)}{I_m^X(\nu)} \quad . \tag{VI.3.9}$$

O valor numérico do fator η pode ser determinado comparando um perfil de temperatura de entrada com o perfil de temperatura obtido a partir de (VI.3.9) usando η como parâmetro de ajuste. Isso pode ser visto a partir da Fig. VI.4 onde η é obtido para a segunda (Fig. VI.4a) e terceira (Fig. VI.4b) harmônicas. Em cada uma dessas figuras utilizou-se um perfil parabólico de entrada e, usando as expressões para a profundidade óptica (VI.3.1) e (VI.3.2), obteve-se $I_m^O(\nu)/I_m^X(\nu)$. Com esse valor determinou-se η de tal forma que se conseguisse o melhor ajuste entre o perfil de entrada e o obtido por (VI.3.9) na região de baixa densidade (borda do plasma). Para essas figuras usou-se para a densidade de pico

$n_{e0} = 2{,}0 \times 10^{13} cm^{-3}$ e para o campo magnético $B_{\phi 0}$=1,14T. O valor obtido foi $\eta \sim 0{,}8$. Verificou-se que esse valor de η é pouco dependente dos cenários de temperatura e densidade e também aos parâmetros α, σ e ϖ dos perfis de entrada. Assim a medida simultânea dos espectros nos modos O e X, para a segunda harmônica, pode teoricamente ser utilizada para estimar a temperatura dos elétrons em plasmas de baixa densidade, particularmente nas regiões próximas da borda do plasma de tokamaks. Do ponto de vista experimental a detecção da radiação-EC, particularmente no modo O, pode ser difícil tendo em vista o baixo sinal para esse modo. Cuidados devem ser também tomados com relação a possíveis mudanças na polarização que possam ocorrer na propagação através do plasma [Eng73] dificultando o uso do resultado (VI.3.9).

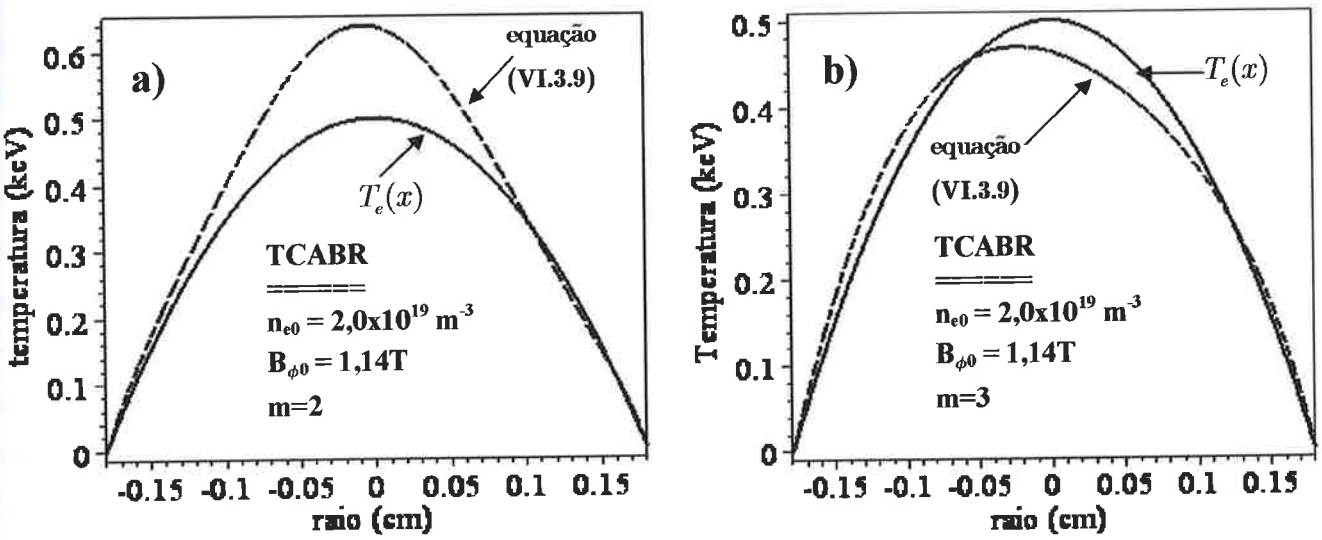


Fig. VI.4. Comparação entre o perfil parabólico $T_{e0}(x)$ de temperatura usando como entrada nas simulações do espectro e o perfil de temperatura reconstruído usando a relação (VI.3.9), para a segunda harmônica (a) e terceira harmônica (b). Nesse cenário do plasma para o TCABR utilizou-se uma densidade de pico $n_{e0} = 2{,}0 \times 10^{19} m^{-3}$ e um campo magnético central de $B_{\phi 0} = 1{,}14T$. Obteve-se $\eta \sim 0{,}8$

VI. 4 – Espectro de emissão da radiação eletrociclotrônica

Vamos apresentar nessa seção os resultados de simulações de espectros de EEC, para plasmas térmicos, aplicados ao tokamak TCABR. Inicialmente mostraremos espectros obtidos usando o modelo simples discutido no capítulo II, onde o plasma emite como um corpo negro. Nesta abordagem é possível obter os espectros sem conhecer os detalhes da função fonte S_ω que é substituída pela intensidade de emissão de corpo negro $I_{\omega N}$. Vamos também considerar a profundidade óptica para simular cenários de plasmas com baixa reabsorção, ou seja baixo τ, particularmente para a radiação-EC no modo O da segunda harmônica e harmônicos mais altos de ambos os modos. Usamos portanto, nos resultados a seguir mostrados, a relação $I_\omega = I_{\omega N}\left(1-e^{-\tau}\right)$ com $I_{\omega N} = \left(k_B T\omega^2/8\pi^3 c^2\right)$. Para calcular τ foram usadas as relações (VI.3.1) e (VI.3.2). A análise dos espectros determinados para o modo O e X separadamente permite mostrar quais as melhores opções de harmônicos e polarizações para uso como diagnóstico por EEC em uma dada máquina. Na Fig. VI. 5 apresentamos os espectros da radiação-EC para o tokamak TCABR.

Na Fig. VI.5. (a) mostra-se o espectro de EEC para a segunda harmônica do modo X e, para fins de comparação, também a curva do corpo negro $I_{\omega N}$, calculada para a temperatura do centro da coluna de $500eV$ ($T_{e0} = 5{,}8\times10^6 K$). Também mostramos o espectro em cenários de $\tau \gg 1$. A comparação do espectro de EEC com a curva de corpo negro mostra, como é esperado pelos dados apresentados anteriormente para a profundidade óptica, que o plasma emite radiação-EC próxima a do corpo negro para a segunda harmônica do modo X. Para a freqüência de 64 GHz, por exemplo, temos para a intensidade da radiação do corpo negro $I_{\omega N} \approx 0{,}6$ pW/(m^{2}srHz), bastante próxima a do valor da intensidade para a segunda harmônica (modo X) $I_\omega \approx 0{,}53$pW/(m^{2}srHz). Para os cenários de plasmas do TCABR, esta característica é observada somente para essa combinação de modo e harmônico. Para os demais espectros, apresentados nas Fig. VI.5.(b), (c) e (d), a intensidade da radiação detectada é muito menor que a intensidade emitida por um corpo negro, dificultando assim o uso dessas harmônicas e modos com fins de diagnóstico. Nessas últimas situações podemos usar o caminho alternativo expresso pela relação (VI.3.9) para determinar o perfil de temperatura.

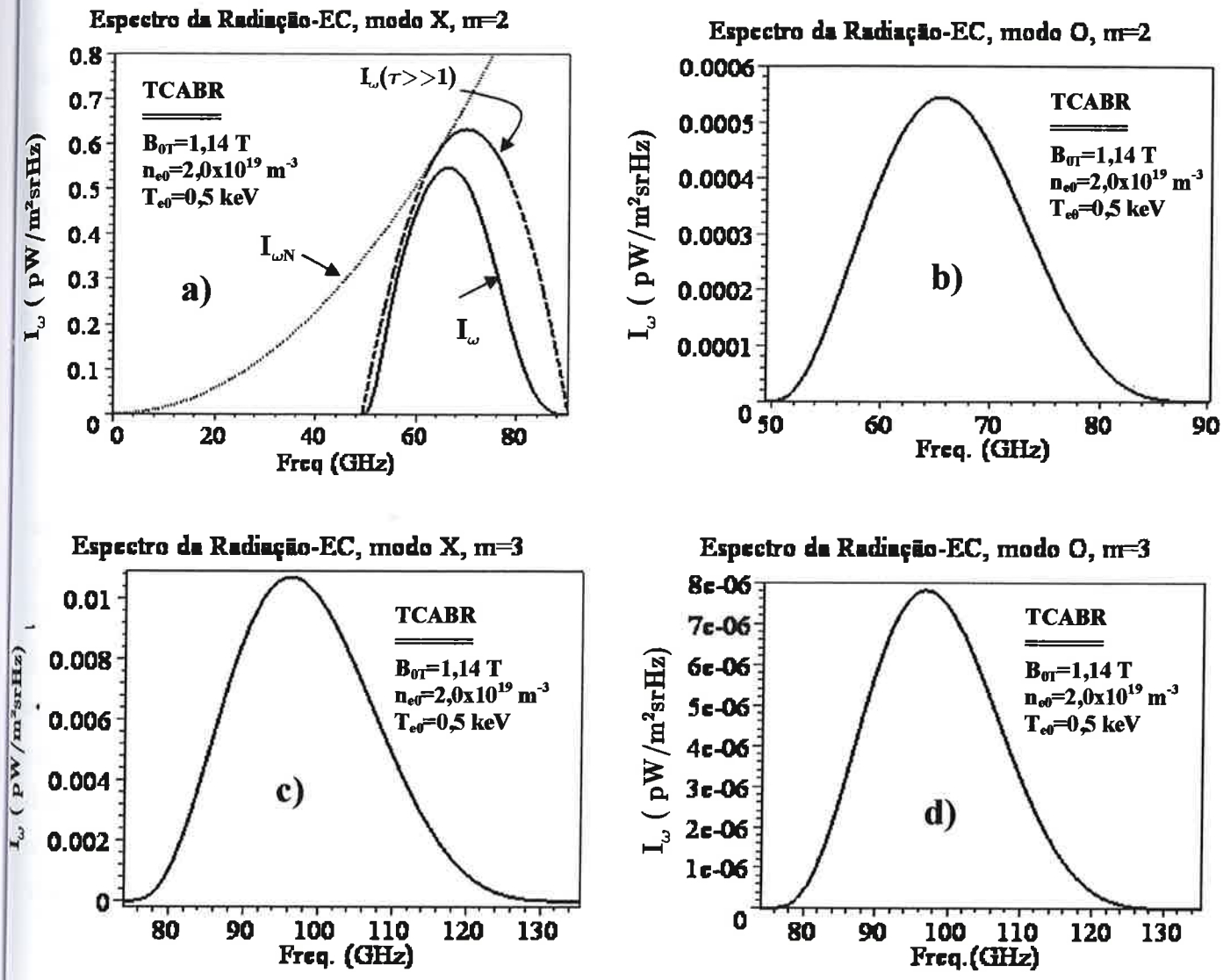


Fig. VI.5. Espectro de emissão térmica da radiação-EC para o TCABR. A figura (a) apresenta o espectro de corpo negro (aproximação clássica) $I_{\omega N}$ e o espectro para a segunda harmônica do modo X. Em (b) mostra-se as curvas para a segunda harmônica para o modo O. Em (c) e (d) mostra-se as curvas para a terceira harmônica do modo X, terceira do modo O, respectivamente.

VI.5 – Resultados obtidos com o modelo dielétrico

Nesta seção vamos apresentar os resultados obtidos da simulação dos espectros de emissão e o coeficiente de absorção, α_ω, a emissividade espectral, j_ω e o índice de refração do raio, N (na direção perpendicular) a partir do modelo dielétrico discutido no capítulo V. Para a determinação dessas quantidades é necessária a definição de uma função distribuição estacionária f_0 e também dos perfis de densidade e temperatura, bem como de características do tokamak. Todas as simulações são feitas para o tokamak TCABR e, para f_0, utilizou-se uma função distribuição maxwelliana.

VI.5.1 – Emissividade espectral

Os resultados típicos para a emissividade espectral são apresentados na Fig. VI.6 para a segunda e terceiras harmônicas do modo ordinário e extraordinário e para a freqüência $f = 68\text{GHz}$, que corresponde a uma região muito próxima do centro da coluna de plasma do TCABR. Comparando os gráficos para o mesmo harmônico, os resultados indicam que a maior parte da energia irradiada na forma da radiação-EC está no modo X, sendo que o modo O apresenta níveis de emissividade bastante baixos. A forma assimétrica assumida pela curva de emissão é típica do efeito do alagamento relativístico. A região ressonante é obtida diretamente dos gráficos se considerarmos a largura à meia altura da curva de emissividade. O resultado obtido mostra que essa região é bastante estreita, $\Delta x \sim 2mm$. Essa largura de ressonância tem valores ainda menores nas regiões próximas da borda da coluna de plasma.

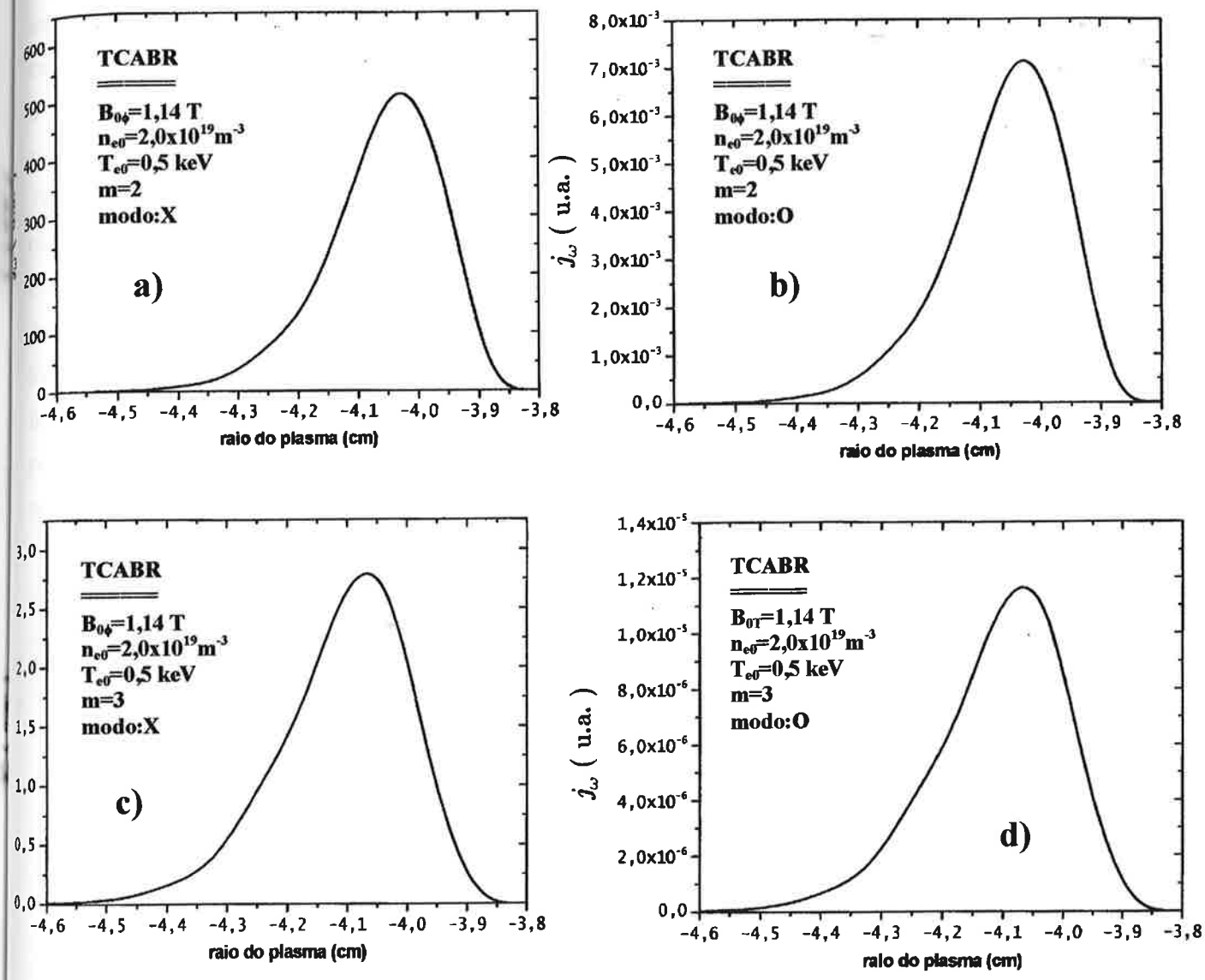


Fig. VI.6. Curvas de emissividade espectral para o tokamak TCABR com densidade de pico n_{e0}=2,0x10^{19}m^{-3}, campo magnético $B_{\phi 0}$=1,14T. Em (a) m=2 e modo X, (b) m=2 e modo O, (c) m=3 e modo X e (d) m=3 e modo O.

VI.5.2 – Coeficiente de absorção e profundidade óptica

Na Fig. VI.7 são apresentados, para a freqüência $f = 68$ GHz perfis do coeficiente de absorção da radiação-EC para os modos ordinário e extraordinário e para a segunda e terceiras harmônicas. Notamos que há uma correlação entre as curvas do coeficiente de absorção e de emissividade. Assim como na emissividade, as curvas de α_ω indicam que a maior parte da

energia da radiação-EC re-absorvida está no modo X. O plasma é bastante opaco para a radiação na segunda harmônica do modo extraordinário, enquanto que, para o modo ordinário, o plasma se comporta como um meio transparente. Podemos, também, ver que a largura da região ressonante, da mesma forma que para a emissividade, é também bastante estreita com $\Delta x \sim 2mm$. Comparando essa largura Δx com a largura total da coluna $a = 18cm$ vemos que os fenômenos que envolvem a interação entre a radiação-EC e as partículas do plasmas ocorrem em uma região correspondente a 1% da coluna. No restante da coluna, para uma dada freqüência ν, o plasma comporta-se como um meio perfeitamente transparente. Esse fato, como foi discutido no capítulo IV, permite colocar a profundidade óptica como uma função da freqüência (ou da posição na coluna de plasma). Em outras palavras, a profundidade óptica, pode ser tomada como uma quantidade de caráter local, e a integração é feita só nessa na região ressonante.

Na Fig. VI.8 são apresentadas curvas obtidas para a profundidade óptica para os modos ordinário e extraordinário e para o segundo e terceiro harmônicos. Para melhor comparação, esboçamos os perfis de profundidade óptica obtidos anteriormente como as expressões (VI.3.1) e (VI.3.2) a partir de programas desenvolvidos na linguagem MAPLE. Notamos um significativo acordo entre esses dois resultados nos dois modos, principalmente para altas freqüências.

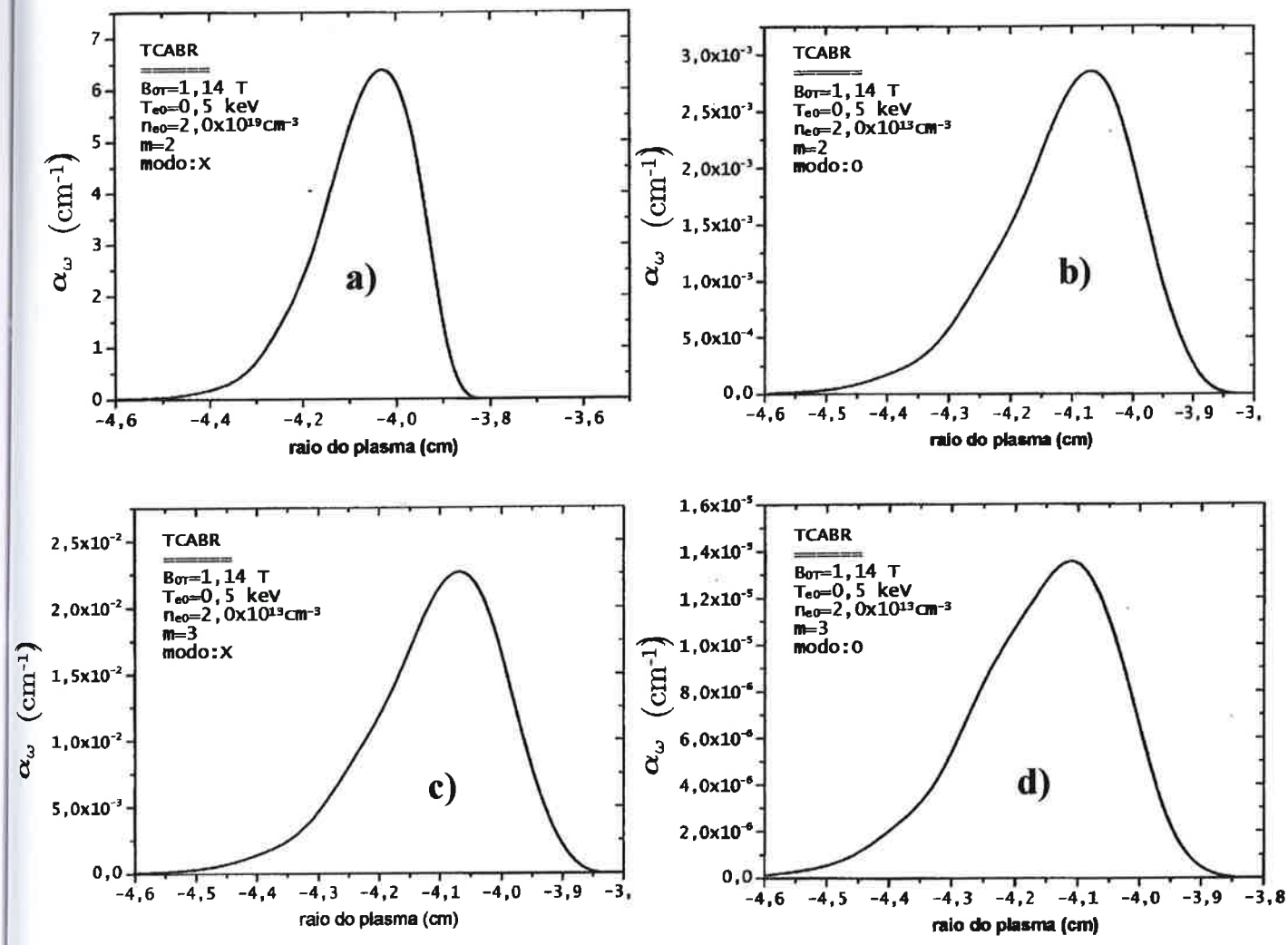


Fig. VI.7. Curvas do coeficiente de absorção para o tokamak TCABR com densidade de pico n_{e0}=2,0x10^{19} m^{-3}, campo magnético $B_{\phi 0}$=1,14T. (a) m=2 e modo X, (b) m=2 e modo O, (c) m=3 e modo X e (d) m=3 e modo O, ν=68 GHz.

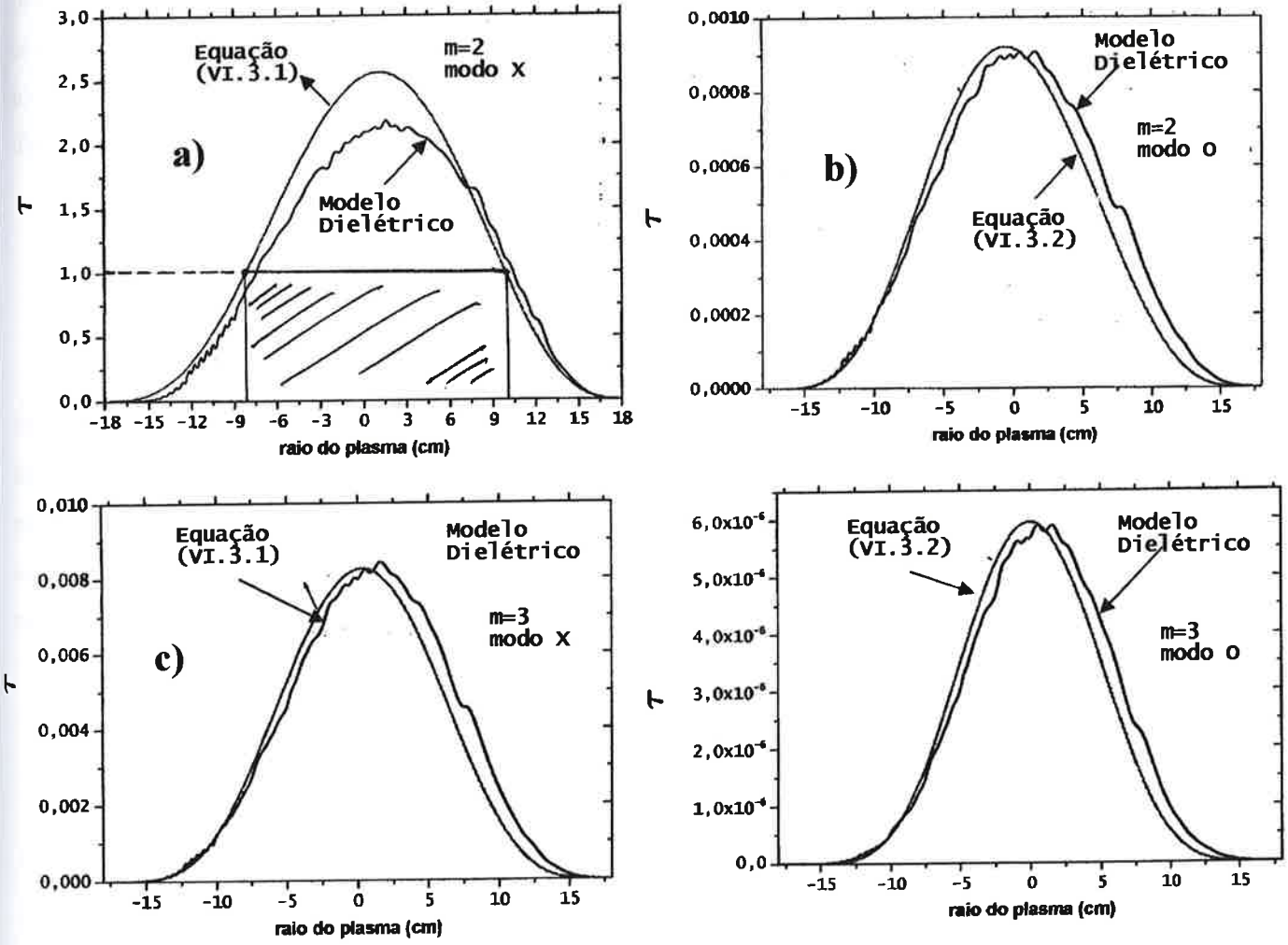


Fig. VI.8: Curvas de profundidade óptica para o modo ordinário e extraordinário calculada a partir do modelo dielétrico: (a) m=2 e modo X; (b) m=2 e modo O; (c) m=3 e modo X e (d) m=3 e modo O. Para fins de comparação, temos também os perfis de τ obtidos como as expressões (VI.3.1) **e** (VI.3.2) **a partir de programas desenvolvidos em MAPLE.**

VI.5.3 – Índice de refração

Para comparar os resultados obtidos a partir do modelo dielétrico com os obtidos com o modelo de plasmas frios, foi devolvido um programa (em MAPLE) que permite calcular vários parâmetros ópticos de propagação a partir da teoria do plasma frio. Isso foi feito para se testar, corrigindo os possíveis erros, os cálculos obtidos com o programa desenvolvido com base no modelo dielétrico. O programa calcula o quadrado do índice de refração partindo do tensor dielétrico de plasmas frios (V.2.4). O quadrado do índice de refração é dado por [Sit95]:

$$N_X^2 = \epsilon_{xx} - \frac{\epsilon_{xy}^2}{\epsilon_{xx}} \quad \text{e} \tag{VI.5.1}$$

$$N_O^2 = \epsilon_{zz} \quad , \tag{VI.5.2}$$

onde ϵ_{xx}, ϵ_{zz} e ϵ_{xy} são elementos do tensor dielétrico. Na fig.VI.9 temos os perfis radiais do índice de refração, obtidos usando o modelo dielétrico (linha contínua) e com o modelo de plasmas frios (linha pontilhada) para o tokamak TCABR e freqüência $f = 68$ GHz. Observando as curvas, vemos que as duas coincidem fora da região ressonante. Nessa região o índice de refração aumenta.

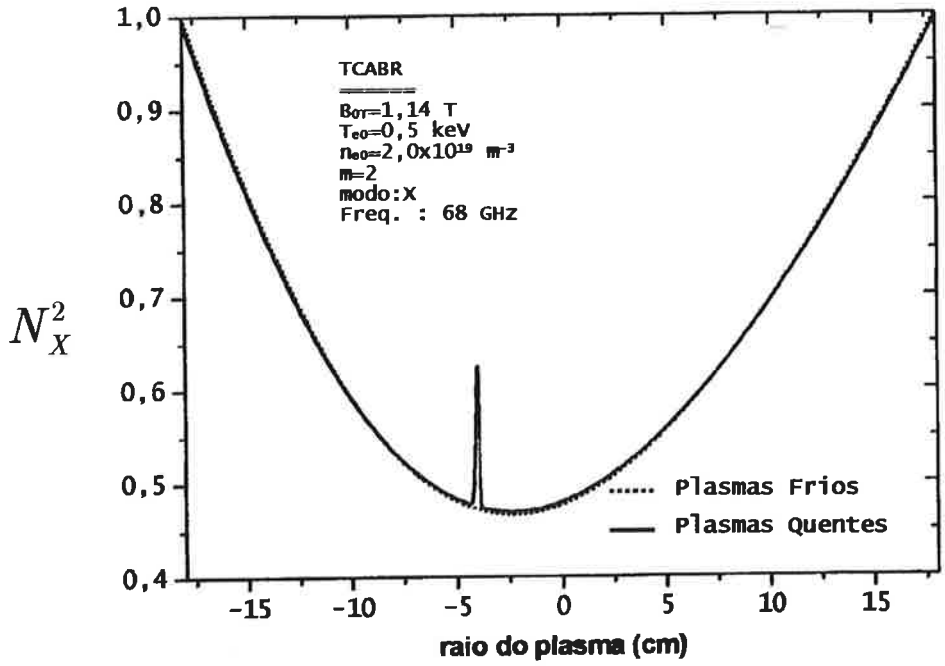


Fig. VI.9: Curvas de N_X^2 na direção $\theta = \pi/2$ obtida a partir do modelo de plasma frio, linha pontilhada. A curva para o mesmo parâmetro, obtida a partir do modelo dielétrico, é mostrada pela linha contínua. Dados obtidos para o TCABR, na freqüência f =68 GHz (modo X, m=2).

Na Fig. VI. 10 são apresentadas a parte real e imaginária do índice de refração para a segunda harmônica do modo extraordinário. Na Fig. VI.10 (a) mostra-se curvas da parte real do índice de refração para 5 freqüências. Na borda do plasma temos $N_X = 1$ e dentro da coluna $N_X < 1$. Os pontos de ressonância são claramente vistos. A parte imaginária é vista na Fig. VI.10 (b) e está relacionada com o coeficiente de absorção da radiação α_ω que é, como vimos, dado pela relação $\alpha_\omega = (2\omega/c)\,\mathrm{Im}[N]$. Vemos que, para estes dados, a região de ressonância tem a largura de $\sim$ 2mm.

Note que a parte imaginária do índice de refração se anula a medida que nos afastamos da região de ressonância. Notamos, também, que a altura do pico na ressonância diminui a medida que aumentamos a freqüência da radiação-EC.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
T443f
INSTITUTO DE FÍSICA

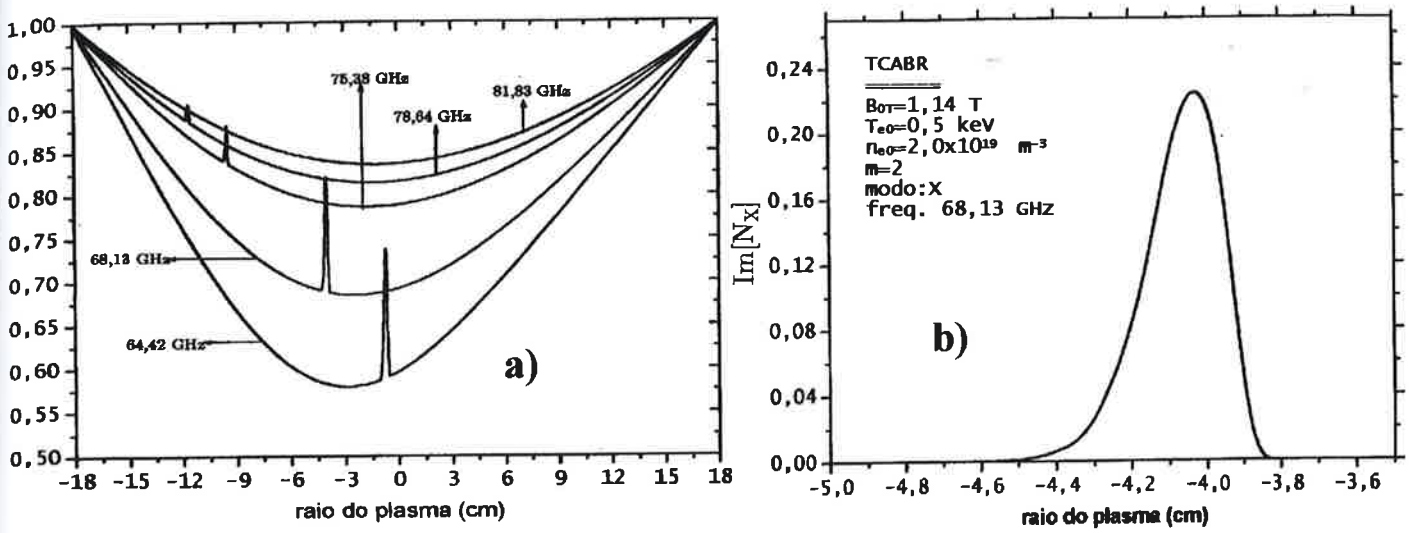


Fig. VI 10: Em (a) curvas da parte real do índice de refração na direção. $\theta = \pi/2$ para algumas freqüências. Em (b) curva da parte imaginária para a freqüência $\nu = 68{,}13GHz$. Estas curvas são obtidas com o modelo dielétrico para o tokamak TCABR com campo magnético $B_{0\phi} = 1{,}14T$, densidade de pico $n_{e0} = 2{,}0 \times 10^{19} m^{-3}$, temperatura de pico $T_{e0} = 0{,}5keV$, modo X e m=2.

VI.5.4 – Espectro da radiação eletrociclotrônica

Os resultados da simulação do espectro de emissão eletrociclotrônica calculado a partir do modelo dielétrico será mostrado nessa seção. Calcula-se esse espectro a partir da emissividade espectral, do coeficiente de absorção e do índice de refração do meio. Os resultados para o tokamak TCABR para a segunda e terceira harmônicas do modo ordinário e extraordinário são apresentadas na Fig. VI.11. Esses resultados, novamente, mostram que a segunda harmônica do modo X é a mais adequada para ser usada no diagnóstico por EEC.

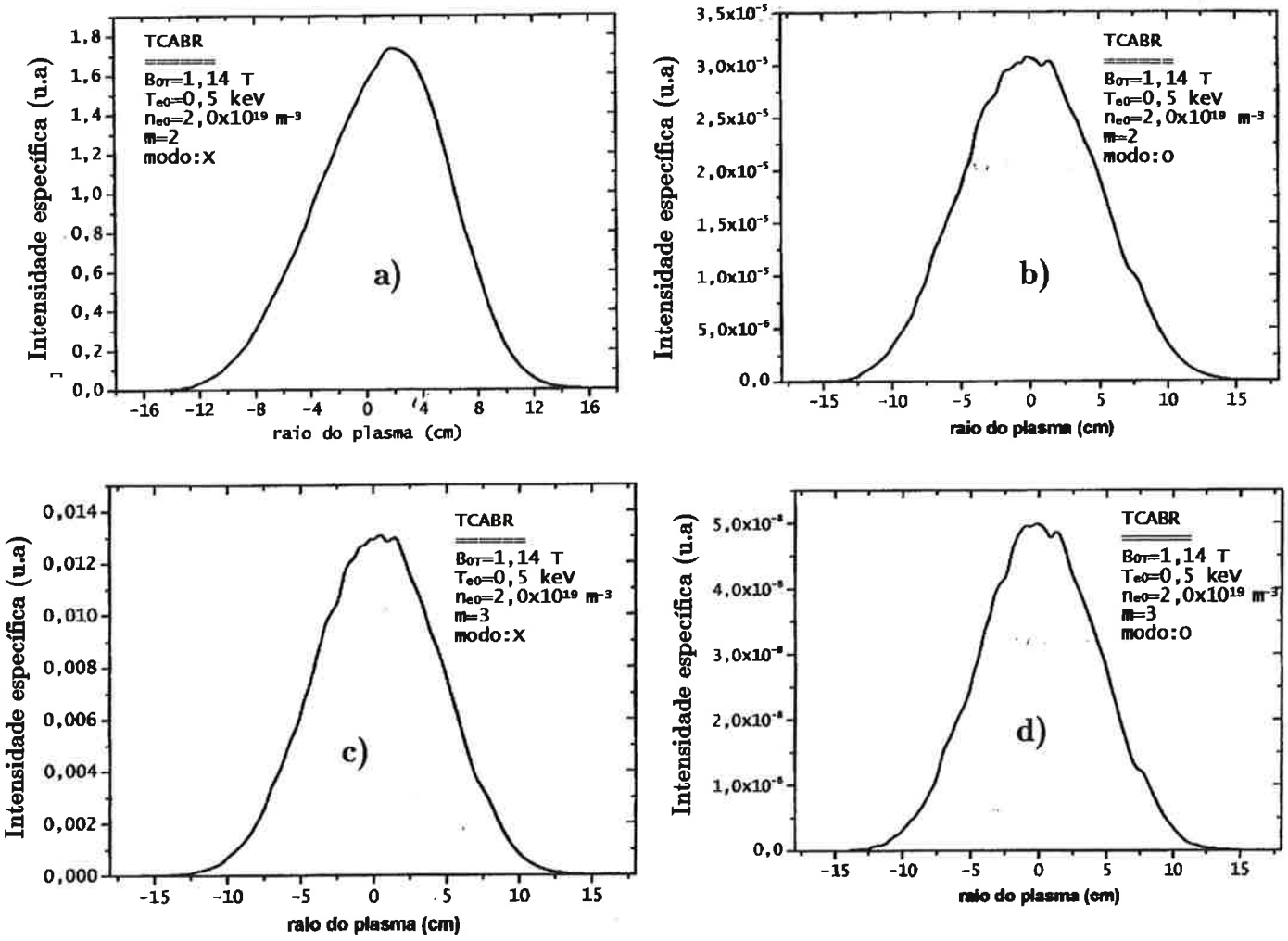


Fig. VI.11: Curvas da intensidade específica para o modo ordinário e extraordinário calculada a partir do modelo dielétrico. (a) m=2 e modo X; (b) m=2 e modo O; (c) m=3 e modo X e (d) m=3 e modo O.

VII. – Conclusões e trabalhos futuros

A seguir apresentamos as principais conclusões deste estudo envolvendo a radiação-EC no tokamak TCABR motivado principalmente pelo uso dessa radiação como ferramenta de diagnóstico. Os principais pontos envolvem as questões do entrelaçamento de harmônicas, das condições de acessibilidade e da emissão e absorção da radiação-EC para cenários típicos de plasmas do TCABR. Outro ponto abordado foi a determinação de espectros de emissão da radiação-EC para plasmas térmicos. A simulação dos espectros envolveu o estudo de modelos físicos para a determinação das três quantidades necessárias para a definição do comportamento óptico do plasma, a emissividade espectral j_ω, o coeficiente de absorção espectral α_ω e o índice de refração N. As conclusões abaixo discutidas dizem respeito principalmente à radiação-EC detectada por uma antena, colocada na região de baixo campo, cujo eixo está no plano equatorial da máquina e dirigida perpendicularmente a seu eixo menor.

No que diz respeito ao entrelaçamento entre as harmônicas, para o tokamak TCABR, a primeira harmônica é totalmente visível pela antena. Para segunda harmônica, devido ao entrelaçamento com a terceira harmônica, o acesso a radiação-EC fica restrito a cerca $\sim 72\%$ da coluna de plasma (de 52GHz até 74GHz). A terceira harmônica, devido ao entrelaçamento com a quarta harmônica, tem uma banda útil de somente $\sim 16\%$ da coluna, ou seja, cerca de 84% da coluna de plasma fica comprometida. Para harmônicas superiores a situação ainda é pior. Portanto, do ponto de vista do entrelaçamento de harmônicas, a radiação-EC nas duas primeiras harmônicas pode ser utilizada no TCABR. Para essas harmônicas temos uma correspondência um-a-um na relação raio-freqüência.

A radiação-EC que chega à antena a partir do ponto de emissão não pode passar por regiões onde a onda é evanescente. Para o TCABR e tomando-se uma densidade de pico de $n_{e0} = 2,35 \times 10^{19} m^{-3}$ com $B_{\phi 0} = 1,14T$ os resultados indicam que, para a primeira harmônica no modo O a radiação é quase que totalmente inacessível. Par o modo X a radiação é totalmente inacessível vista da região de baixo campo. Para a segunda harmônica, no modo X, a radiação é acessível para uma antena na região de baixo campo e parcialmente acessível se detectada na região de alto campo. As harmônicas superiores à segunda são acessíveis. A acessibilidade das harmônicas 1 e 2 depende fortemente da densidade e do campo magnético.

As condições de absorvibilidade foram analisadas a partir da profundidade óptica τ. O perfil radial desse parâmetro foi obtido por dois caminhos, a partir de relações da literatura e

através de um código baseado no modelo dielétrico. Nessa análise adotou-se perfis parabólicos para a temperatura e a densidade eletrônicas. Para os cenários do TCABR, com $n_{e0} = 2,0 \times 10^{19} m^{-3}$ e $B_{\phi 0} = 1,14T$, e considerando a segunda e terceiras harmônicas, os resultados mostram uma substancial re-absorção da radiação-EC na segunda harmônica do modo X, onde a profundidade óptica atinge o valor de $\sim 2,5$ no centro da coluna. Se assumirmos a condição $\tau \gtrsim 1$ como critério para se ter uma relação simples entre temperatura e posição radial, os resultados mostram que temos uma região útil da coluna de plasma desde a posição $x_1 \sim -8cm$ até $x_2 \sim 10cm$. Nessa região pode-se utilizar a relação $I_{\omega N} \propto T_e \omega^2$ que permite a determinação fácil da temperatura. Para harmônicas mais altas os resultados apontam para valores muito baixos de τ e, meios mais elaborados para a determinação de T_e tem que ser utilizados. Nesses casos (para $\tau \ll 1$) pode-se utilizar, no TCABR, a relação $T_e(x) \sim \eta\left(m_e c^2/k_B\right)\left[I_m^O(\nu)/I_m^X(\nu)\right]$ para a determinação de T_e a partir de medidas simultâneas das intensidades para os modos O e X. Para a segunda harmônica verificou-se que, para situações típicas do plasma no TCABR, deve-se utilizar um valor $\eta \sim 0,8$. Nesse caso, esse método pode ser útil para regiões onde $|x| \geq 10cm$, onde não podemos utilizar a radiação na segunda harmônica no modo X. Essa proposta pode, entretanto, esbarrar em dificuldades experimentais.

Obtivemos também o traçado de espectros da EEC para plasmas térmicos a partir da distribuição espectral do corpo negro e da profundidade óptica onde pode-se visualizar as intensidades para as várias harmônicas bem como a questão do entrelaçamento entre elas.

O exame das curvas de emissividade espectral $j_\omega(x)$ obtidas a partir do modelo dielétrico mostra que a emissão é mais alta para a segunda harmônica na polarização X, muito superior a emitida na polarização O. Observou-se um comportamento similar para as curvas de absorção $\alpha_\omega(x)$. Aqui é interessante lembrar que $j_\omega(x)$ foi calculado a partir de resultados da teoria das flutuações e $\alpha_\omega(x)$ diretamente do modelo dielétrico. Os resultados para a emissividade e coeficiente de absorção mostram que a região ressonante tem largura de $\Delta x \sim 2mm$. A distribuição espectral para cada harmônica é devida ao alargamento relativístico. Para os parâmetros típicos de um plasma térmico do TCABR pode-se, pois, tratar cada harmônica isoladamente. Temos portanto que o alargamento preponderante é o alargamento devido a não homogeneidade do campo magnético. A condição $\Delta x \ll a$ justifica o uso do modelo de plasmas frios para o estudo da acessibilidade. Somente próximo das freqüências ressonantes o efeito devido ao movimento térmico dos elétrons são importantes. Essa condição permite também admitir o caráter local da profundidade óptica e conseqüentemente pode-se obter facilmente perfis de τ. A comparação dos perfis da profundidade óptica obtidos com o código baseado no

modelo dielétrico com os obtidos por expressões da literatura mostraram boa concordância. Essa comparação foi de grande utilidade como meio de remoção de erros (*debug*) do código.

As curvas para as partes imaginária e real do índice de refração mostram que os desvios entre os resultados obtidos a partir do modelo dielétrico e o modelo de plasma frio ocorrem somente na região de ressonância. Essa comparação foi também usada na depuração do código. Por fim, obtivemos perfis radiais do índice de refração a partir do modelo dielétrico. Num primeiro momento, com a intenção de ganhar uma maior segurança com relação aos resultados obtidos com o código baseado no modelo dielétrico fizemos um estudo comparado com o modelo de plasmas frios, através das curvas de N^2. Os resultados mostram que o índice de refração de plasmas quentes somente difere do modelo de plasmas frios na região ressonante. Fora dessa região, as simulações com os dois modelos apresentam o mesmo resultado, como é esperado. Observa-se, também, que os efeitos cinéticos diminuem para as freqüências mais altas da radiação-EC.

Conhecidos j_ω, α_ω e N, utilizou-se a equação de transporte de radiação para a determinação do espectro de emissão da radiação-EC para cenários do TCABR para os modos X e O na primeira e segunda harmônicas. Esses resultados mostram que a intensidade da radiação detectada para a segunda harmônica no modo X é muito mais alta. Esse resultado é devido às diferentes condições de absorção para essas harmônicas e modos.

Verificamos que, no TCABR, a emissão EC na faixa de freqüências correspondente a $m = 2$ (modo X) é a mais indicada para uso, como diagnóstico, para a medida rotineira da temperatura eletrônica. As condições de acessibilidade e absorvibilidade para o TCABR impedem o uso da radiação-EC para densidades acima de $n_{e0} = 2,3 \times 10^{19} m^{-3}$. Isso se deve ao baixo campo magnético dessa máquina. Para baixas densidades, a operação do TCABR em regime de plasmas térmicos, torna-se mais difícil devido ao aparecimento de elétrons fugitivos. [Kno79, Cha84]. Portanto outros diagnósticos devem ser utilizados na medida de T_e para superar as restrições que são inerentes a um sistema baseado na EEC.

O estudo que aqui realizamos nos permitiu a familiarização com o problema bastante complexo da emissão eletrociclotrônica em tokamaks. Fizemos um estudo razoavelmente aprofundado dos modelos de plasmas tênues, feito com base na equação de Schott-Trubnikov, e do modelo dielétrico em cujo estudo partimos do sistema de equações de Vlasov-Maxwell. Usamos resultados da teoria das flutuações mas não nos preocupamos com seu desenvolvimento.

Finalmente, discutimos abaixo alguns pontos que pretendemos abordar para dar continuidade ao presente trabalho.

Uma extensão natural ao estudo que fizemos, será examinar o espectro da radiação-EC no tokamak TCABR para situações em que se têm populações de elétrons não térmicos. Isso ocorre quando, por exemplo, se têm descargas com elétrons fugitivos (*runaway electrons*) [Kno79] ou quando se tem geração de correntes não indutivas [Bru94]. Nessas situações, mesmo quando se tem uma percentagem pequena de elétrons não térmicos, há em geral uma nítida mudança na forma do espectro quando comparado a espectros gerados por plasmas térmicos. Nessa situação, usando um código para o cálculo de espectros da EEC e variando parâmetros da função distribuição, podemos ajustar o espectro simulado com o obtido experimentalmente. Dessa forma é possível obter informações sobre o volume e localização da população não térmica de elétrons.

Outro estudo interessante seria a obtenção de informações sobre a função distribuição de elétrons de plasmas não térmicos no TCABR a partir da detecção da radiação-EC com uma antena cujo eixo está na vertical [Hut86]. Desta forma não temos o alargamento devido a não homogeneidade do campo magnético mas somente o alargamento relativístico devido ao fator γ. Estudos realizados em outras máquinas indicam que esse método é experimentalmente viável [Kat86]. O radiômetro acoplado ao TCABR [Sil04] poderia ser utilizado em estudos deste tipo.

Para os trabalhos em andamento no tokamak TCABR seria interessante verificar-se os efeitos da interação das ondas Alfvén [Elf04] com o plasma no espectro da emissão eletrociclotrônica. Nesse sentido, para o TCABR, um estudo teórico das duas propostas anteriores, nesse cenário, seria de muito interesse.

Neste trabalho fizemos um estudo do modelo dielétrico de plasmas e sua aplicação no estudo da emissão EC. Entretanto, como vimos, esse modelo pode ser aplicado, numa situação geral, somente para análise da propagação e absorção. Para estudar mais a fundo a emissão temos que utilizar um modelo onde o caráter discreto das partículas emissoras da radiação, no caso os elétrons, fique explícito. Para isso pretende-se estudar a radiação a partir do modelo de Klimontovich-Maxwell e da teoria das flutuações [Sha67].

VIII – Referências Bibliográficas.

[Air90]- A. Airoldi, S. Nowak, A. Orefice e G.Ramponi, *Study of Electron Cyclotron Emission from Non-thermal Plasmas during LHCD in Jet*, Final Report on JET Contract JJ8/9009, Milão(1990).

[Abr64]- M. Abramowitz, I. A. Stegun *Handbook of mathematical functions*, National bureau of standards applied mathematics series, 55(1964)

[Ale84]- A. F. Alexandrov, L. S. Bogdankevich e A. A. Rukhadze, *Principles of Plasma Electrodynamics*, editora. Springer-Verlag, New York (1984).

[Arf70]- , G. B. Arfken, *Mathematical methods for physicists* 2ª ed., editora Academic Press, New York(1970)

[Bit95]- J. A. Bittencourt, *Fundamentals of plasmas physics* FAPESP/inpe, São José dos Campos, SP (1995).

[Bru94]- M. Brusati, D.V.Bartlett, A. Ekedahl, P. Froissard, A.Airoldi, G. Ramponi, R.P. da Silva and Y. Peysson *Determination of the suprathermal electron distribution function during lower hybrid current drive in Jet, NuclearFusion,* 23, 34(1), (1994).

[Bra98]- M. Brambilla, *Kinetic Theory of Plasma Waves- Homogeneous Plasmas*, editora Oxford Science Publications, Oxford (1998).

[Bek66]- G. Bekefi, *Radiation processes in plasmas*, editora Wiley, New York (1966).

[Bor81]- M. Bornatici, F. Engelmann, S. Novak and V. Petrillo, Plasma Physics **23** 12 1127(1981).

[Bor83]- M. Bornatici, R. Cano, O. de Barbieri, F. Engelmann, Nuclear Fusion, **23** 9 1153 (1983).

[Cha98]- S. J. Chapman, *Fortran 90/95 for scientists and engineers*, 1ª ed., editora WCB/McGraw-Hill, Boston (1998).

[Cha84]- A. de Chambrier, G. A. Collins, C. Hollenstein, B. Joye, J. B. Lister, M. Moret, S. Nowak, A. Pochelon e W. Simm, Report LRP 241/84, CRPP- Association Euraton, Ecóle Polytechnique Fédérale, Lausane Suisse (1984)

[Che74]- F. F.Chen, *Introduction to plasma physics* editora Plenum Press, New York (1974).

[Cel77]- C. M.Celata e D. A. Boyd, Nuclear Fusion, **17** 4 735 (1977).

[Cim95]- G. Cima et. al., "Core temperature fluctuations and related heat transport in the Texas Experimental Tokamak-Upgrade", *Phys. Plasmas*, 2(3), 720(1995).

[Cos74]- A.E.Costley, R.J.Hastie,J.W.M.Paul, and J. Chamberlain, "Electron Cyclotron Emission from a Tokamak Plasma: Experiment and Theory", *Physical Review Letters*, 33(13),758,(1974).

[Cos82]- A. E. Costley, International school of the plasma physics course on diagnostic for fusion reactor conditions 129 (1982)

[Den93]- R. O. Deny (editor), *Plasma Physucs an introdutory couse*, editora Press, Cambridge University Cambridge (1993).

[Eff99]- P.C. Effthimion, et. al, *Rev. Sci. Instrum.*, 70(1), 1018(1999).

[Elf04]-A. G. Elfimov, E. A. Lerche, R. M. O. Galvão, L. F. Ruchko, A. M. M. Fonseca, R. P. da Silva and V. Bellintani, *Brazilian Journal of Physics* 34 4B 1707 (2004)

[Eng73]- F.Engelmann, M. Curatolo, Nuclear Fusion, **13** 497 (1973)

[Fon04]- A. M. M. Fonseca, R. P. da Silva, R. M. O. Galvão, Y. K. Kuznetzov, J. I. Elizondo, E. R. Calderon, L. F. Ruchko and J. H. Vuolo, Brazilian Journal of Physics **34** 4B 1780 (2004).

[Fre96]- J. Frenkel, *Princípios da Eletrodinâmica Clássica*, editora da Universidade de São Paulo, São Paulo (1996).

[Gir88]- G. Giruzzi, Nuclear Fusion **28** 8 1413 (1988).

[Gri89]- D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*, 2ª ed., editora Prentice Hall, New Jersey (1996)

[Gro84]- R. A. Gross *Fusion Energy*, School of Engineering & Applied Science, Columbia University, New York ed. John Wiley & Sons (1984).

[Hut86]- I. H. Hutchinson e K. Kato, **26** 2 179 (1986).

[Hut87]- I. L. Hutchinson *Principles of plasma diagnostics* editora Cambridge Univ. Press, Cambridge (1987).

[Hea99]- J.W.Heard, et. al. "High resolution electron cyclotron emission temperature profile and fluctuation diagnostic for Alcator C-Mod", *Rev. Sci. Instrum.*, 70(1), 1011(1999).

[Ich73]- S. Ichimaru, *Basic Principles of Plasma Physics: a statistical approach*, W.A.Benjamin – advanced book program, Massachsetts (1973).

[Jac83]- J. D. Jackson, *Eletrodinâmica clássica* 2ª ed., editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro (1983).

[Kat86]- K. Kato e H. Hutchinson, Rev. Sci. Instrum., **57** 8, 1959 (1986).

[Kei89]- M. Keilhacker, *Diagnostics for Magnetically Confined Plasmas*, JET-IR(89)09, Jet Joint Undertaking Abingdon, Oxon(1989)

[Kno79]-H. Knoepfel and D. A. Spong, Nuclear Fusion, **19** 6 785 (1979).

[Kra66]- Kraus J. D. *Radio Astronomy*, editora McGraw-Hill, New York(1966).

[Kra73]- N. A. Krall e A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics international series in pure and applied physics*, editora McGraw-Hill, Tokyo (1973).

[Kli67]- Y. L.Klimontovich, *The statistical theory of non-equilibrium processes in a plasma*, editora pergamon press, oxford (1967)

[Mar55]- L. C. Martin, *Geometrical Optics*, editora Sir Issac Pitman & Sons, Ltd., London (1955).

[Mar80]- J.B. Marion e M. A. Heald, *Classical Electromagnetic Radiation*, 2ª ed., editora Academic Press, New York (1980).

[Miy00]- K. Miyamoto, *Fundamentals of Plasma Physics and Controlled Fusion*, notas de aula, Universidade de Tokyo (2000).

[Nas99]- I. C. Nascimento, et al., *Preliminary results from the TCABR Tokamak*, IAEA Technical Committee Meeting on Research Using Small Fusion Devices, , F1-TC-536.15, Southwestern Institute of Physics Chengdu, China.(1999).

[Ros02]- P. R. S. Rosa, Código para emissão eletrociclotrônica, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, relatório interno (2002).

[Sil04]- R. P. da Silva, A. M. M. Fonseca, J. H. Vuolo, E. R. Calderon, R. M. O. Galvão, Yu. K. Kuznetzov, J. C. Raffaelli, and the TCABR Team, Brazilian Journal of Physics, **34** 4B 1771 (2004).

[Sti92]- T. H. Stix, *Waves in Plasmas*, editora American institute of physics, New York (1992).

[Swa89]- D.G.Swanson, *Plasma Waves*, editora Academic Press, San Diego (1989)

[Sit95]- A.Sitenko e V.Malnev, *Plasma Phisics theory*, editora Chapman & hall, London (1995).

[Sha67]- V. D. Shafranov Review of Plasma Physics, editado por M. A. Leontovitch, consultants Bureau, vol 3, New York (1966).

[Ste63]- J. L Steinberg e J. Lequeux, *Radio Astronomy*, editora McGraw-Hill, New York(1963).

[Sch50]- S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer*, editora Oxford (1950).

[Sak51]- A.D. Sakharov e I.E.Tamm, editado por A. M. Leontovich, vol.1, Pergamon, New York (1960)

[Tru58]- B. A. Trubnikov e V. S. Kudryavtsev *Plasma radiation in a magnetic field.* In proceedings of the second United Nations international conference on the peaceful uses of atomic energy, Genebra, United Nations (1958).

[Wes87]- J. Wesson, *Tokamaks*, editora Clarendon Press, Oxford (1987).

Apêndice

Programas em MAPLE

1) Entrelaçamento de harmônicas em tokamaks.

2) Condições de acessibilidade.

3) Profundidade óptica e espectro de emissão eletrociclotrônica.

4) Tensor dielétrico para magnetoplasma frio.

Entrelaçamento de Harmônicas em Tokamaks

```
> restart:
> with(linalg): with(plots): with(student):with(plottools):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected

Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined
```

créditos

```
> #
  #        data                    autor

  #        ====                    ====

  #        set/ 2004               E. R. Calderon
```

Constantes Físicas

```
> me:=9.1096e-31;                 #massa do elétron (kg)
  e:=1.6022e-19;                  #carga do elétron (C)
  kb:=1.3806e-23;                 #constante de Boltzmann (J/K)
  c:=2.9979246e8;                     #velocidade da luz no
  vácuo (m/s)
  e0:=8.85e-12;
```

$$me := .91096\ 10^{-30}$$

$$e := .16022\ 10^{-18}$$

$$kb := .13806\ 10^{-22}$$

$$c := .29979246\ 10^{9}$$

$$e0 := .885\ 10^{-11}$$

Entradas

```
> b0              :=  1.14;            #campo magnético no
  centro da coluna de plasma(T)
  r0              :=  61.5;           #raio maior do
  tokamak(cm)
  a               :=  18.0;             #raio da coluna de
  plasma (cm)
  theta           :=  0.0;               #ângulo poloidal
  razãodeASPECTO  := r0/a;
>
```

$$b0 := 1.14$$

$$r0 := 61.5$$

$$a := 18.0$$

$$\theta := 0.$$

$$razãodeASPECTO := 3.416666667$$

```
>
```

Equações Básicas

```
> fn:=(n,r)->(n*28*b0)/(1+r/r0);
>
```

$$fn := (n, r) \rightarrow 28\,\frac{n\,b0}{1+\frac{r}{r0}}$$

```
> fn(2,-a);
```

$$90.25655173$$

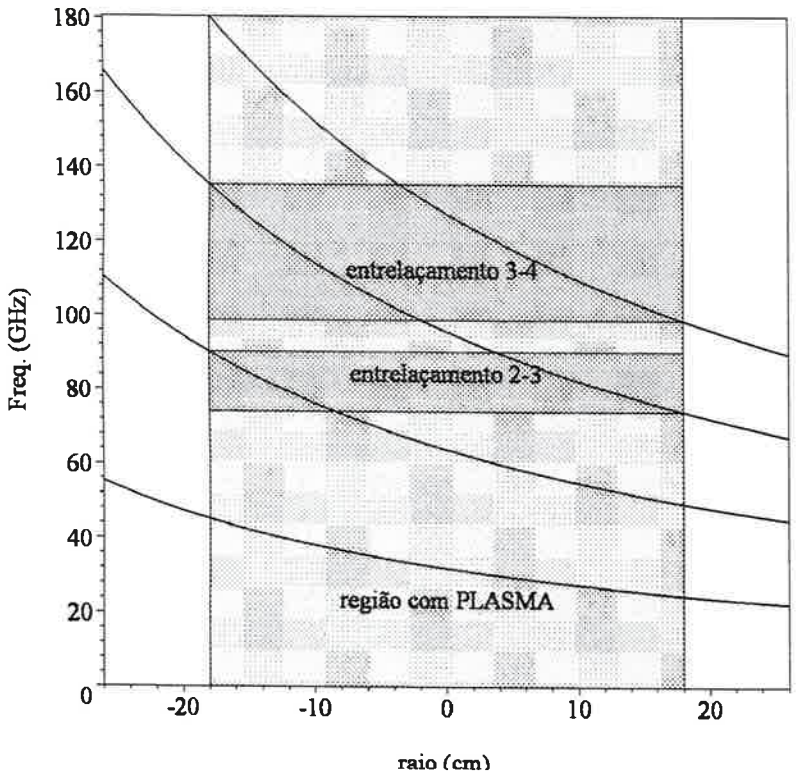
RESULTADOS

```
> t := 8;
  p1:=plot([fn(1,r),fn(2,r),fn(3,r),fn(4,r)],r=-a-t..a+t,0..fn(
  4,-a),color=[black,black,black,black],title=`Entrelaçamento
  das
  harmônicas`,titlefont=[TIMES,ROMAN,17],axes=frame,thickness=2
  ,linestyle=0,axes=boxed,axesfont=[TIMES,ROMAN,14],labels=[`ra
  io (cm) `,`Freq.
  (GHz)`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIME
  S,ROMAN,14]):
  #
  #linha1:=plot([fn(1,a),fn(2,a),fn(3,a)],r=(-a-t)..(a+t),color
  =[red,blue,brown],linestyle=2):
  #linha2:=plot([fn(1,(-a)),fn(2,(-a)),fn(3,(-a))],R=(-a-t)..(+
  a+t),color=[red,blue,brown],linestyle=2):
  #
  r5:=rectangle([-a,0],[a,fn(4,-a)],color=wheat):
  r4:=rectangle([-a,fn(2,-a)],[a,fn(3,a)],color=gray):
  r6:=rectangle([-a,fn(3,-a)],[a,fn(4,a)],color=gray):
  #
  texto1:=textplot([[0,fn(3,a-10),`entrelaçamento
  2-3`],[0,fn(4,a-10),`entrelaçamento 3-4
  `]],align={central,central},font=[TIMES,ROMAN,14]):
  texto2:=textplot([0,(fn(1,0)-8),`região com
  PLASMA`],align={central,central},font=[TIMES,ROMAN,14]):
  #
  plots[display](p1,r6,r4,r5,texto1,texto2);
  `==================================================`;
  `campo central=` ,b0;
```

```
`r0 e a=`,r0 ,a;  r0/a;
`ENTRELAÇAMENTO 2-3=`, fn(3,a),`-`,fn(2,-a);
`ENTRELAÇAMENTO 3-4=`, fn(4,a),`-`,fn(3,-a);
fn(3,a);
```

$t := 8$

Entrelaçamento das harmônicas



==========

campo central=, 1.14

r0 e a=, 61.5, 18.0

3.416666667

ENTRELAÇAMENTO 2-3=, 74.07849056, -, 90.25655173

ENTRELAÇAMENTO 3-4=, 98.77132073, -, 135.3848276

74.07849056

```
[ >
[ >
[ >
[ >
[ >
[ >
[ >
[ >
[ >
[ >
[ >
[ >
[ >
```

Condições de acessibilidade.

```
> restart:
> with(student):
  with(plots):
  with(plottools):
Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined
```

0. Créditos

data	autor	descrição de mudanças
15/junho/2003	E. R. Calderon	Original

```
>
```

1. Constantes Físicas

```
> e:=1.6022*10^(-19);          #Carga do elétron          (C)
  me:=9.1096*10^(-31);         #Massa do elétron          (kg)
  e0:=8.85*10^(-12);           #Permissividade do vácuo   (S.I.)
```

$$e := .1602200000\ 10^{-18}$$

$$me := .9109600000\ 10^{-30}$$

$$e0 := .8850000000\ 10^{-11}$$

Entradas

```
> ne0:=2.35e19:          #Densidade no centro da coluna
  (m^-3)
  nea:=2.0e15:           #Densidade na borda do plasma (m^-3)
  beta_ne:=2:
> alfa_ne:=1:
> theta:=0.:          #ângulo de observação
> b0:=1.14:           #campo magnético no centro da coluna
> r0:=0.615:          #raio maior da máquina
> a:=0.18:             #raio menor da máquina
>
```

3. Equações Básicas

```
> #-----------------------------------
  #Definições
  #-----------------------------------
  #
  parabolico:=r->(1-(r/a)^beta_ne)^alfa_ne;
  fatortokamak:=r->1+r*cos(theta)/r0;
  #
```

$$parabolico := r \rightarrow \left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^{beta_ne}\right)^{alfa_ne}$$

$$fatortokamak := r \rightarrow 1+\frac{r\cos(\theta)}{r0}$$

```
> #-------------------------
  #campo magnético toroidal
  #-------------------------
  bt:=r->b0/fatortokamak(r);
```

$$bt := r \rightarrow \frac{b0}{\text{fatortokamak}(r)}$$

```
> #-------------------------
  #perfil de densidade
  #-------------------------
  #
  ne:=(ne0,r)->(ne0-nea)*parabolico(r)+nea;
```

$$ne := (ne0, r) \rightarrow (ne0 - nea)\ \text{parabolico}(r) + nea$$

```
> #-----------------------------------------------
  #freqüência de plasma "fpe" e freqüência de ciclotron "fce"
  (GHz)
  #o fator 1/10^9 -> Hz->GHz
  #-----------------------------------------------
  fce_GHz:=(b0,r)->(1/(2*Pi))*(e*b0/(me*fatortokamak(r)))*(1/10
  ^9);

  fpe_GHz:=(ne0,r)->(1/(2*Pi))*sqrt((ne(ne0,r)*e^2)/(me*e0))*(1
  /10^9);
```

$$fce_GHz := (b0, r) \rightarrow \frac{1}{2000000000}\ \frac{e\ b0}{\pi\ me\ \text{fatortokamak}(r)}$$

$$fpe_GHz := (ne0, r) \rightarrow \frac{1}{2000000000}\ \frac{\sqrt{\frac{\text{ne}(ne0, r)\ e^2}{me\ e0}}}{\pi}$$

```
> #-----------------------------------------------
  # freqüência Hibrida Superior(ressonância híbrida superior
  "fh",
  # freqüência de corte à direita "fr" e a freqüência de corte
  à esquerda "fl"
  #fonte: Chen, "plasma physics and controlled fusion"
  #-----------------------------------------------
  fh_GHz:=(ne0,b0,r)->(fpe_GHz(ne0,r)^2+fce_GHz(b0,r)^2)^(1/2);
```

```
#
fr_GHz:=(ne0,b0,r)->(fce_GHz(b0,r)/2)*(1+(1+4*(fpe_GHz(ne0,r)
^2/fce_GHz(b0,r)^2))^(1/2));
#
fl_GHz:=(ne0,b0,r)->(fce_GHz(b0,r)/2)*(-1+(1+4*(fpe_GHz(ne0,r
)^2/fce_GHz(b0,r)^2))^(1/2));
>
>
```

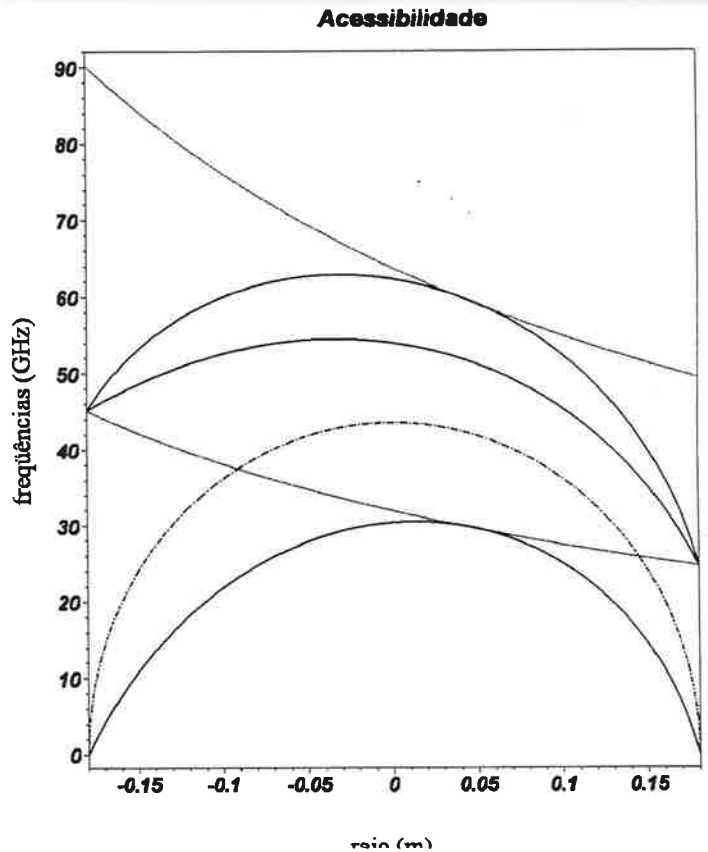
$$fh_GHz := (ne0, b0, r) \rightarrow \sqrt{\mathrm{fpe_GHz}(ne0, r)^2 + \mathrm{fce_GHz}(b0, r)^2}$$

$$fr_GHz := (ne0, b0, r) \rightarrow \frac{1}{2}\,\mathrm{fce_GHz}(b0, r)\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\,\mathrm{fpe_GHz}(ne0, r)^2}{\mathrm{fce_GHz}(b0, r)^2}}\right)$$

$$fl_GHz := (ne0, b0, r) \rightarrow \frac{1}{2}\,\mathrm{fce_GHz}(b0, r)\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\,\mathrm{fpe_GHz}(ne0, r)^2}{\mathrm{fce_GHz}(b0, r)^2}}\right)$$

4.Gráficos de Acessibilidade

```
> plot([fpe_GHz(ne0,r),fce_GHz(b0,r),2*fce_GHz(b0,r),fh_GHz(ne0
,b0,r),fr_GHz(ne0,b0,r),fl_GHz(ne0,b0,r)],r=-a..a,color=[blac
k,black,black,black,black,black],linestyle=[4,2,2,1,1,1],reso
lution=500,title=`
Acessibilidade`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,14],axes=box
ed,labels=[`raio (m) `,`freqüências
(GHz)`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIME
S,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],thickness=2,y
tickmarks=10);
#
`==================================================`;
`ne0=`,ne0;
`nea=`,nea;
`beta_ne=`,beta_ne;
> `alfa_ne=`,alfa_ne;
> `b0=`,b0;
>
> `r0=`,r0;
> `a=`,a;
`==================================================`;
```



==========

ne0=, .235 10^{20}

nea=, .20 10^{16}

beta_ne=, 2

alfa_ne=, 1

b0=, 1.14

r0=, .615

a=, .18

==========

```
>
>
```

5. Diagrama Clemmow-Mullaly-Allis (CMA)

5.1 Equações Básicas

```
> #-----------------------------------------------
  # Definição das variáveis X e Y
  #-----------------------------------------------
  X:=(ne0,r,f_GHz)->(fpe_GHz(ne0,r)/f_GHz)^2;
  Y:=(b0,r,f_GHz)->(fce_GHz(b0,r)/f_GHz)^2;
```

$$X := (ne0, r, f_GHz) \rightarrow \frac{\mathrm{fpe_GHz}(ne0, r)^2}{f_GHz^2}$$

$$Y := (b0, r, f_GHz) \rightarrow \frac{\mathrm{fce_GHz}(b0, r)^2}{f_GHz^2}$$

```
>
```

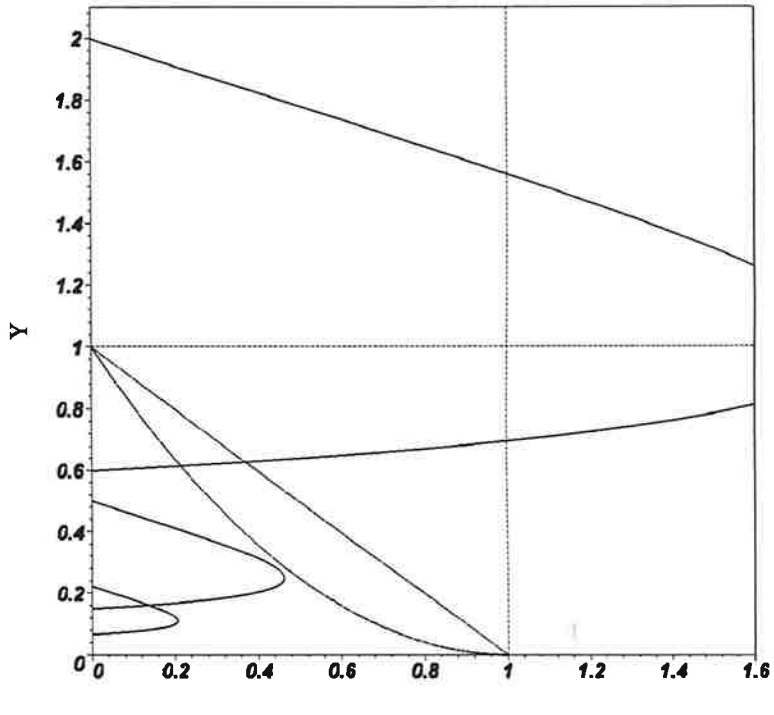
6. Diagramas

Diagramas para as três primeiras harmônicas.

```
> a1:=plot([X(ne0,r,1*fce_GHz(b0,0)),Y(b0,r,1*fce_GHz(b0,0))
  ,r=-a..a],color=black,thickness=2,title=`DIAGRAMA
  CMA`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,15],labels=[`X`,`Y`]
  ,axes=boxed,labeldirections=[horizontal,vertical],labelfon
  t=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],thi
  ckness=2, ytickmarks=10,xtickmarks=5):
  #
  a2:=plot([X(ne0,r,2*fce_GHz(b0,0)),Y(b0,r,2*fce_GHz(b0,0))
  ,r=-a..a],color=black,thickness=2,title=`DIAGRAMA
  CMA`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,15],labels=[`X`,`Y`]
  ,axes=boxed,labeldirections=[horizontal,vertical],labelfon
  t=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],thi
  ckness=2):
  #
  a3:=plot([X(ne0,r,3*fce_GHz(b0,0)),Y(b0,r,3*fce_GHz(b0,0))
  ,r=-a..a],color=black,thickness=2,title=`DIAGRAMA
  CMA`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,15],labels=[`X`,`Y`]
  ,axes=boxed,labeldirections=[horizontal,vertical],labelfon
  t=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],thi
  ckness=2):
  #-------------------------------------------------
  a_ress:=plot(1-X,X=0..1.6,thickness=3,color=black,linestyl
  e=2):
  a_corte:=plot((1-X)^2,X=0..1,Y=0..2.1,thickness=3,color=bl
  ack,linestyle=2):
  #-------------------------------------------------
  a7v:=line([1,0],[1,2.1],color=blue,linestyle=3):
  a7h:=line([0,1],[28,1],color=blue,linestyle=3):
  #
  #-------------------------------------------------
  #
```

```
  plots[display](a1,a2,a3,a7h,a7v,a_ress,a_corte);
  #
  `=================================================`;
  `Condições de Contorno:`;
  `ne0=`,ne0;
  `beta_ne=`,beta_ne;
> `alfa_ne=`,alfa_ne;
>
  `b0=`,b0;
> `r0=`,r0;
> `a=`,a;
  `=================================================`;
```

DIAGRAMA CMA




```
=================================================\
  ===
```

Condições de Contorno:

ne0=, .235 10^{20}

beta_ne=, 2

alfa_ne=, 1

b0=, 1.14

r0=, .615

a=, .18

==========\

==

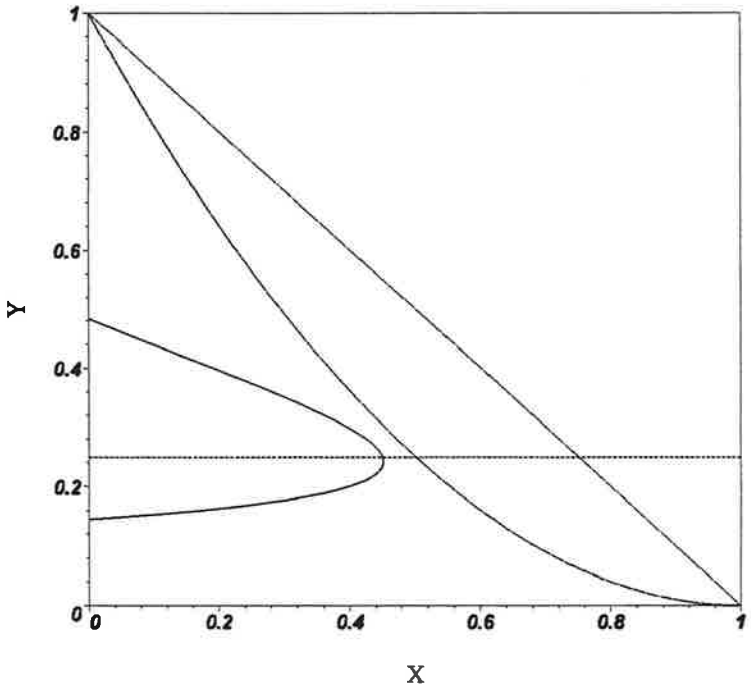
Diagrama estudo com a 2ª harmônica

```
> r2:=-0.01;
  b1:=plot([X(ne0,r,2*fce_GHz(b0,r2)),Y(b0,r,2*fce_GHz(b0,r2
  )),r=-a..a],color=black,thickness=2,title=`DIAGRAMA
  CMA`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,15],labels=[`X`,`Y`]
  ,axes=boxed,labeldirections=[horizontal,vertical],labelfon
  t=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11]):
  #
  #b2:=plot([X(ne0,r,2*fce_GHz(b02,0.0)),Y(b02,r,2*fce_GHz(b
  02,0.0)),r=-a..a],color=black,thickness=2,title=`DIAGRAMA
  CMA`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,15],labels=[`X`,`Y`]
  ,axes=boxed,labeldirections=[horizontal,vertical],labelfon
  t=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11]):
  #
  #b3:=plot([X(ne0,r,2*fce_GHz(b03,0.0)),Y(b03,r,2*fce_GHz(b
  03,0.0)),r=-a..a],color=black,thickness=2,title=`DIAGRAMA
  CMA`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,15],labels=[`X`,`Y`]
  ,axes=boxed,labeldirections=[horizontal,vertical],labelfon
  t=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11]):
  #-----------------------------------------------------
  a_ress:=plot(1-X,X=0..1,thickness=3,color=black,linestyle=
  2):
  a_corte:=plot((1-X)^2,X=0..1,Y=0..1,thickness=3,color=blac
  k,linestyle=2):
  #-----------------------------------------------------
  a8_emission:=line([0,Y(b0,0.0,2*fce_GHz(b0,0.0))],[1,Y(b0,
  0.0,2*fce_GHz(b0,0.0))],color=blue,linestyle=3,thickness=2
  ):
  #-----------------------------------------------------
  #
  plots[display](b1,a_ress,a_corte,a8_emission);
  #
  `==================================================`;
  `Condições de Contorno:`;
  `ne0=`,ne0;
  `beta_ne=`,beta_ne;
> `alfa_ne=`,alfa_ne;
>
  `b0=`,b0;
> `r0=`,r0;
```

```
> `a=`,a;
  evalf(2*fce_GHz(b0,r2));
  r2;
  `==================================================`;
```

r2 := -.01

DIAGRAMA CMA



==========\

===

Condições de Contorno:

ne0=, .235 10^{20}

beta_ne=, 2

alfa_ne=, 1

b0=, 1.14

r0=, .615

a=, .18

64.87720619

-.01

==========\

==

```
[>
```

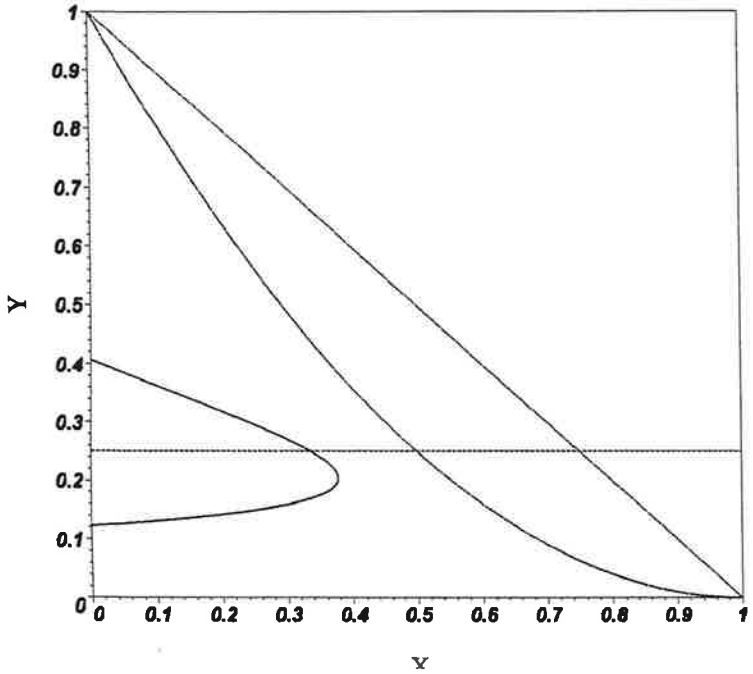
Diagrama para várias freqüências

```
> r11:=-0.06;
  r12:=0.0;
  r13:=0.04;
  r14:=0.12;
  `____________frequencia da onda_______________`:
  evalf(2*fce_GHz(b0,r11));
  evalf(2*fce_GHz(b0,r12));
  evalf(2*fce_GHz(b0,r13));
  evalf(2*fce_GHz(b0,r14));
```

```
  a11:=plot([X(ne0,r,2*fce_GHz(b0,r11)),Y(b0,r,2*fce_GHz(b0,
  r11)),r=-a..a],color=black,thickness=2,title=`DIAGRAMA
  CMA`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,15],labels=[`X`,`Y`]
  ,axes=boxed,labeldirections=[horizontal,vertical],labelfon
  t=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],thi
  ckness=2, ytickmarks=10,xtickmarks=10):
  # 0.00m
  a12:=plot([X(ne0,r,(2*fce_GHz(b0,r12))),Y(b0,r,2*fce_GHz(b
  0,r12)),r=-a..a],color=black,thickness=2,title=`DIAGRAMA
  CMA`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,15],labels=[`X`,`Y`]
  ,axes=boxed,labeldirections=[horizontal,vertical],labelfon
  t=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],thi
  ckness=2):
  #0.04 m
  a13:=plot([X(ne0,r,(2*fce_GHz(b0,r13))),Y(b0,r,2*fce_GHz(b
  0,r13)),r=-a..a],color=black,thickness=2,title=`DIAGRAMA
  CMA`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,15],labels=[`X`,`Y`]
  ,axes=boxed,labeldirections=[horizontal,vertical],labelfon
  t=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],thi
  ckness=2,linestyle=3):
  #0.07
  a14:=plot([X(ne0,r,(2*fce_GHz(b0,r14))),Y(b0,r,2*fce_GHz(b
  0,r14)),r=-a..a],color=black,thickness=2,title=`DIAGRAMA
  CMA`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,15],labels=[`X`,`Y`]
  ,axes=boxed,labeldirections=[horizontal,vertical],labelfon
  t=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],thi
  ckness=2,linestyle=1):

  #-----------------------------------------------------
  a2:=plot(1-X,X=0..1,thickness=3,color=black,linestyle=2):
  a3:=plot((1-X)^2,X=0..1,Y=0..1,thickness=3,color=black,lin
  estyle=2):
  #-----------------------------------------------------
  a7v:=line([1,0],[1,2.1],color=blue,linestyle=3):
  a7h:=line([0,1],[28,1],color=blue,linestyle=3):
  #
  a8_emission:=line([0,Y(b0,0.0,2*fce_GHz(b0,0.0))],[1,Y(b0,
  0.0,2*fce_GHz(b0,0.0))],color=blue,linestyle=3,thickness=2
  ):

  #-----------------------------------------------------
  #
  plots[display](a11,a2,a3,a8_emission);
  #
  `=================================================================`;
  `Condições de Contorno:`;
  `ne0=`,ne0;
  `beta_ne=`,beta_ne;
> `alfa_ne=`,alfa_ne;
>
  `b0=`,b0;
> `r0=`,r0;
> `a=`,a;
  `=================================================================`;
```

$$r11 := -.06$$
$$r12 := 0.$$
$$r13 := .04$$
$$r14 := .12$$
$$70.72199952$$
$$63.82229221$$
$$59.92474770$$
$$53.40232616$$

DIAGRAMA CMA



==========\

===

Condições de Contorno:

ne0=, .235 10^{20}

beta_ne=, 2

alfa_ne=, 1

b0=, 1.14

r0=, .615

a=, .18

==========\

==

[>

[>

Profundidade óptica e Espectro de emissão eletrociclotrônica.

```
> # inicialização e pacotes
  restart:
  with(plots):
  with(plottools):
  with(student):
Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined
```

0. Entradas

Constantes físicas

```
> me:=9.1096e-31:                    #massa do eletron
  e:=1.6022e-19:                     #carga do elétron
  kb:=1.3806e-23:                    #constante de Boltzmann
  c:=2.9979246e8:                    #velocidade da luz no vácuo
  (m/s)
  e0:=8.85e-12:
```

TOKAMAK

```
> #-----------------------------------------------
  b0:=1.14:                  #campo magnético no centro da coluna
  de plasma
  r0:=0.615:                 #raio maior do tokamak
  a:=0.18:                   #raio da coluna de plasma
  ne0_m:=2.0e19:             #densidade no centro da coluna
  (m^-3)
  nea_m:=0:
  te0_kev:=0.5:                  #temperatura no centro da coluna
  (keV)
  tea_kev:=0:
  #-----------------------------------------------
  #CONVERSÃO T(eV)->T(K)
  #
  #-----------------------------------------------

  te0_K:=te0_kev*11.6e6:
  tea_K:=tea_kev*11.6e6:
```

Perfis e ângulo de Observação

```
> alfa_t:=1:
  beta_t:=2:
  alfa_n:=1:
  beta_n:=2:
  theta:=0.:
```

1. Definicões

```
> #---------------------
  #Perfis:
  #---------------------
  parabolico_t:=r->(1-(r/a)^beta_t)^alfa_t;
  parabolico_n:=r->(1-(r/a)^beta_n)^alfa_n;
  fatortokamak:=(r,theta)->1+r*cos(theta)/r0;
>
```

$$parabolico_t := r \rightarrow \left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^{beta_t}\right)^{alfa_t}$$

$$parabolico_n := r \rightarrow \left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^{beta_n}\right)^{alfa_n}$$

$$fatortokamak := (r, \theta) \rightarrow 1+\frac{r\cos(\theta)}{r0}$$

```
> te:=(te0_u,tea_u,r)->(te0_u-tea_u)*parabolico_t(r)+tea_u;
  #perfil de temperatura.
  ne:=(ne0_u,nea_u,r)->(ne0_u-nea_u)*parabolico_n(r)+nea_u;
  #perfil de densidade.
  bt:=(r,theta)->b0/fatortokamak(r,theta);
  #
  #OBS.: variável ne0_u e nea_u são genéricas (u->unidade).
  Serão substituidas ao longo do        programa por cm, m,
  keV, etc...Exemplo: ne0_cm ou ne0_m; te0_K ou te0K_keV.
```

$$te := (te0_u, tea_u, r) \rightarrow (te0_u - tea_u)\,\mathrm{parabolico_t}(r) + tea_u$$

$$ne := (ne0_u, nea_u, r) \rightarrow (ne0_u - nea_u)\,\mathrm{parabolico_n}(r) + nea_u$$

$$bt := (r, \theta) \rightarrow \frac{b0}{\mathrm{fatortokamak}(r, \theta)}$$

```
> #-----------------------------------------------
  # cálculo das conversões de freqüência-raio
  #-----------------------------------------------
```

```
#
bn:=n->(n*e*b0)/(2*Pi*me);
rn:=(n,f)->r0*(bn(n)*1e-9/f-1);  #f(GHZ); r(m)
fn:=(n,r)->28*n*b0*r0/(r0+r);      #f(GHz); r(m)
>
```

$$bn := n \rightarrow \frac{1}{2}\frac{n\, e\, b0}{\pi\, me}$$

$$rn := (n, f) \rightarrow r0\left(.1\ 10^{-8}\frac{\mathrm{bn}(n)}{f} - 1\right)$$

$$fn := (n, r) \rightarrow 28\frac{n\, b0\, r0}{r0 + r}$$

```
> #-----------------------------------------------------------
#freqüência de plasma "fpe" e freqüência de ciclotron "fce"
(Hz), alfa, lambda e velo.
#-----------------------------------------------------------
fce:=(b0,theta,r)->(1/(2*Pi))*(e*b0/(me*fatortokamak(r,theta)
));            #freq. de plasma
#
fpe:=(ne0_m,r)->(1/(2*Pi))*sqrt((ne(ne0_m,nea_m,r)*e^2)/(me*e
0)); #freq. de  ciclotron
#
alpha:=(ne0_m,b0,theta,r)->(fpe(ne0_m,r)/fce(b0,theta,r))^2;
# X/Y.
#
lambda:=(b0,theta,r)->c/(fce(b0,theta,r));
#
vt:=(te0_K,r)->(kb*te(te0_K,tea_K,r)/me)^(1/2);
# velocidade térmica dos elétrons

>
```

$$fce := (b0, \theta, r) \rightarrow \frac{1}{2}\frac{e\, b0}{\pi\, me\ \mathrm{fatortokamak}(r, \theta)}$$

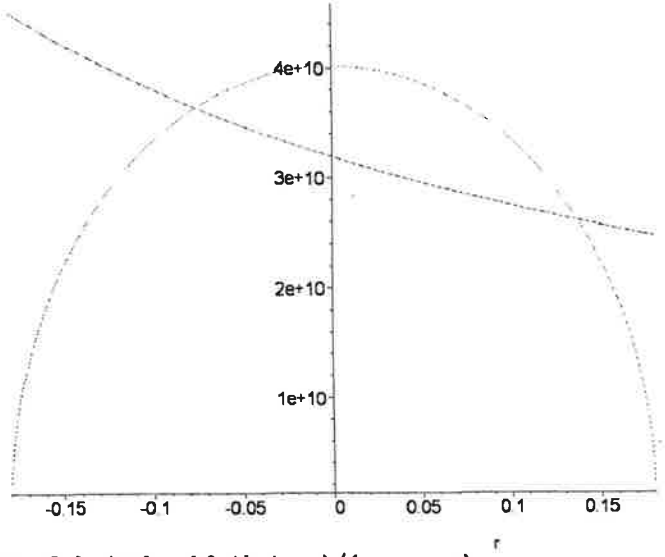
$$fpe := (ne0_m, r) \rightarrow \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\frac{\mathrm{ne}(ne0_m, nea_m, r)\, e^2}{me\, e0}}}{\pi}$$

$$\alpha := (ne0_m, b0, \theta, r) \rightarrow \frac{\mathrm{fpe}(ne0_m, r)^2}{\mathrm{fce}(b0, \theta, r)^2}$$

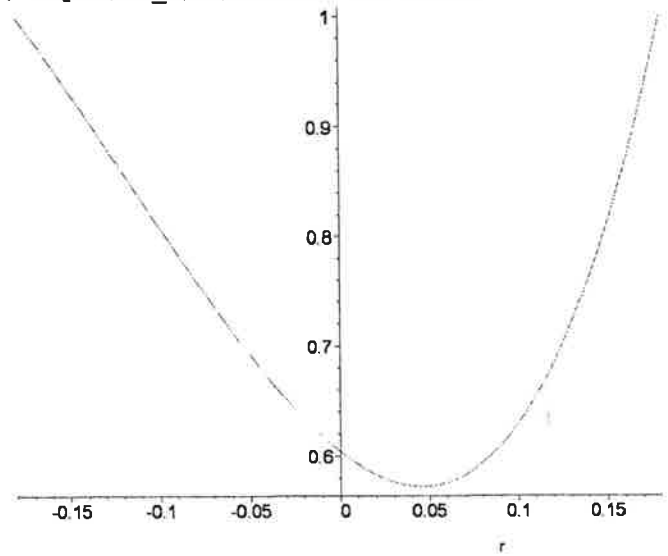
$$\lambda := (b0, \theta, r) \rightarrow \frac{c}{\mathrm{fce}(b0, \theta, r)}$$

$$vt := (te0_K, r) \rightarrow \sqrt{\frac{kb\ \mathrm{te}(te0_K, tea_K, r)}{me}}$$

```
> plot([fce(b0,theta,r),fpe(ne0_m,r)],r=-a..a);
>
```




```
> plot(1-alpha(ne0_m,b0,theta,r)/4,r=-a..a);
```




```
>
```

2. profundidade óptica

```
> #referência: M.Bornatici, F. Engelmann, S. Novak e V.
  Petrillo, "Absortion of plasma of finite density around the
  electron cyclotron harmonics", Plasma Physics, 23(12),
```

```
1127(1981)
#
#Francês.
#modelo F: tese do Francês.
#modelo B: artigo do Bornatici.
```

2.1. efeito da densidade finita, modo X/O, propagação perp. : função μ(*n*) e μ(1)

```
[>
> #@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
  # MODELO B
  #@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
  # para n>2 e n=2, modo X.
  funcao:=n->(n-3/2-2/n)/(n^2-1);
  #
  mxn_b:=(ne0_m,b0,n,theta,r)->1-funcao(n)*alpha(ne0_m,b0,th
  eta,r);
  mon_b:=(ne0_m,b0,n,theta,r)->(1-((1/n)^2)*(alpha(ne0_m,b0,
  theta,r)))^(n-1/2);
```

$$funcao := n \rightarrow \frac{n - \frac{3}{2} - \frac{2}{n}}{n^2 - 1}$$

$$mxn_b := (ne0_m, b0, n, \theta, r) \rightarrow 1 - \mathrm{funcao}(n)\, \alpha(ne0_m, b0, \theta, r)$$

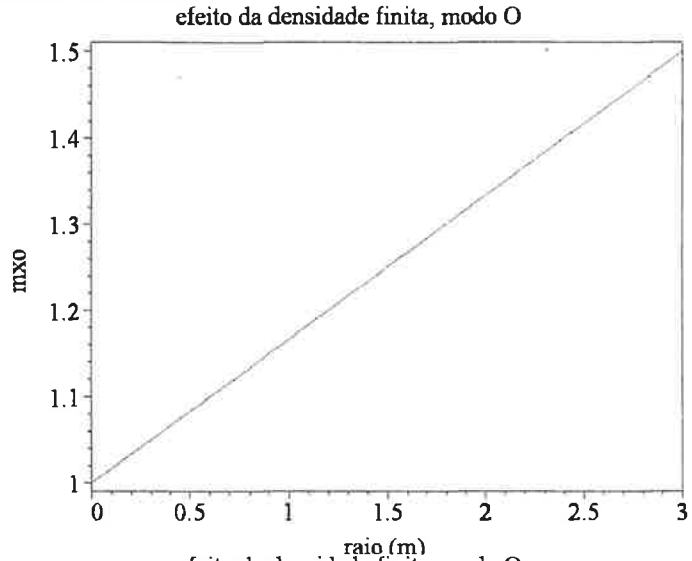
$$mon_b := (ne0_m, b0, n, \theta, r) \rightarrow \left(1 - \frac{\alpha(ne0_m, b0, \theta, r)}{n^2}\right)^{(n-1/2)}$$

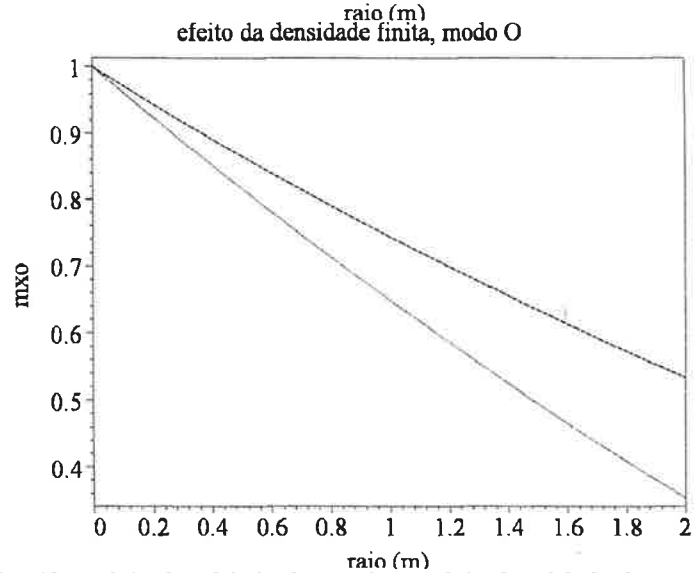
```
> mxn_b_alpha:=(n,alpha)->1-funcao(n)*alpha;
  mon_b_alpha:=(n,alpha)->(1-((1/n)^2)*(alpha))^(n-1/2);
```

$$mxn_b_alpha := (n, \alpha) \rightarrow 1 - \mathrm{funcao}(n)\, \alpha$$

$$mon_b_alpha := (n, \alpha) \rightarrow \left(1 - \frac{\alpha}{n^2}\right)^{(n-1/2)}$$

```
> plot([mx1_f_alpha(alpha),mxn_b_alpha(2,alpha),mxn_f_alpha(
  3,alpha)],alpha=0..3,color=[black,black,black,black],title
  =`efeito da densidade finita, modo
  O`,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],axes=boxed,labels=[`raio (m)
  `,`mxo
  `],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIMES,
  ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2,linestyle=
  [DASHDOT,DOT,DASH]);
  #
  plot([mon_f_alpha(1,alpha),mon_b_alpha(2,alpha),mon_b_alph
  a(3,alpha)],alpha=0..2,color=[black,black,black,black],tit
  le=`efeito da densidade finita, modo
  O`,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],axes=boxed,labels=[`raio (m)
  `,`mxo
  `],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIMES,
  ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2,linestyle=
  [DASHDOT,DOT,DASH]);
```

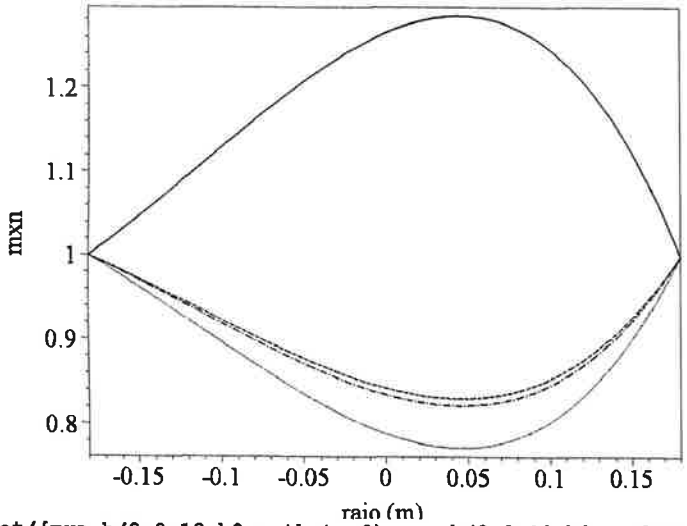





```
> plot([mxn_b(ne0_m,b0,2,theta,r),mxn_b(ne0_m,b0,3,theta,r),
  mxn_b(ne0_m,b0,4,theta,r),mxn_b(ne0_m,b0,8,theta,r)],r=-a.
```

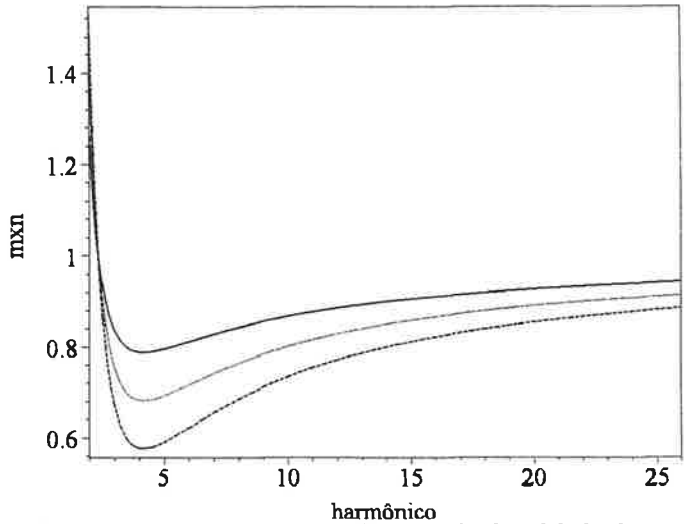
```
.a,color=[black,black,black,black],title=`efeito da
densidade finita, modo
X`,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],axes=boxed,labels=[`raio (m)
`,`mxn
`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIMES,
ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2,linestyle=
[SOLID,DASHDOT,DOT,DASH]);
```

efeito da densidade finita, modo X

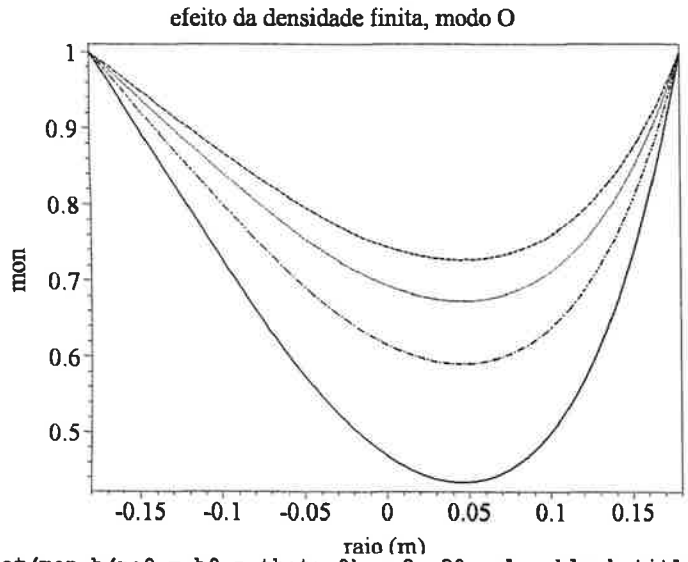



```
> plot([mxn_b(2.0e19,b0,n,theta,0),mxn_b(3.0e19,b0,n,theta,0
),mxn_b(4.0e19,b0,n,theta,0)],n=2..26,color=black,title=`e
feito da densidade finita, modo X
`,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],axes=boxed,labels=[`harmônico
`,`mxn
`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIMES,
ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2,linestyle=
[SOLID,DOT,DASH]);
```

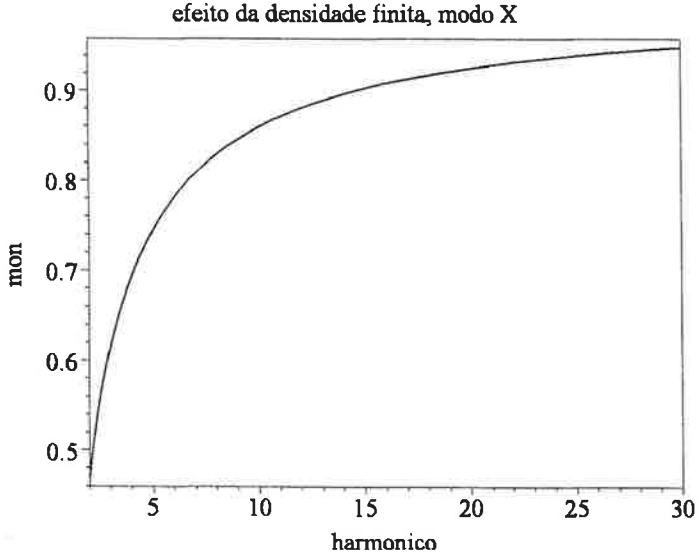
efeito da densidade finita, modo X




```
> plot([mon_b(ne0_m,b0,2,theta,r),mon_b(ne0_m,b0,3,theta,r),
mon_b(ne0_m,b0,4,theta,r),mon_b(ne0_m,b0,5,theta,r)],r=-a..
.a,color=[black,black,black,black],title=`efeito da
densidade finita, modo
O`,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],axes=boxed,labels=[`raio (m)
`,`mon
`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIMES,
ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2,linestyle=
[SOLID,DASHDOT,DOT,DASH]);
```




```
> plot(mon_b(ne0_m,b0,n,theta,0),n=2..30,color=black,title=`
efeito da densidade finita, modo X
`,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],axes=boxed,labels=[`harmonico
`,`mon
`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIMES,
ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2,linestyle=
SOLID);
```



[>

2.2. Calculo da profundidade óptica

2.2.2. MODELO B

2.2.2.1 τ, modo extraordinário n=2 e n >2

```
> tauxn_b:=(b0,te0_K,ne0_m,n,theta,r)->(Pi^2)*n^(2*(n-1
))/((2^(n-1))*(n-1)!)*(alpha(ne0_m,b0,theta,r))*(vt(t
e0_K,r)/c)^(2*(n-1))*(mxn_b(ne0_m,b0,n,theta,r))*(r0/
lambda(b0,r,theta));
```

$$tauxn_b := (b0, te0_K, ne0_m, n, \theta, r) \rightarrow \pi^2 n^{(2n-2)} \alpha(ne0_m, b0, \theta, r) \left(\frac{vt(te0_K, r)}{c}\right)^{(2n-2)} mxn_b(ne0_m, b0, n, \theta, r)\, r0 \Big/ \left(2^{(n-1)} (n-1)!\, \lambda(b0, r, \theta)\right)$$

```
> tauxn_b(b0,te0_K,ne0_m,2,theta,0.);
```

$$.8054890603\ \pi$$

2.2.2.2. τ, modo ordinário n=2 e n >2

```
> tau0n_b:=(b0,te0_K,ne0_m,n,theta,r)->((Pi^2)*n^(2*(n-
1))/(2^(n-1)*(n-1)!))*alpha(ne0_m,b0,theta,r)*((vt(te
0_K,r)/c)^(2*n))*(r0/lambda(b0,r,theta))*mon_b(ne0_m,
b0,n,theta,r);
```

$$tau0n_b := (b0, te0_K, ne0_m, n, \theta, r) \rightarrow \pi^2 n^{(2n-2)} \alpha(ne0_m, b0, \theta, r) \left(\frac{vt(te0_K, r)}{c}\right)^{(2n)} r0\, mon_b(ne0_m, b0, n, \theta, r) \Big/ \left(2^{(n-1)} (n-1)!\, \lambda(b0, r, \theta)\right)$$

```
> tau0n_b(b0,te0_K,ne0_m,2,theta,0);
```

$$.0002925485175\ \pi$$

[>

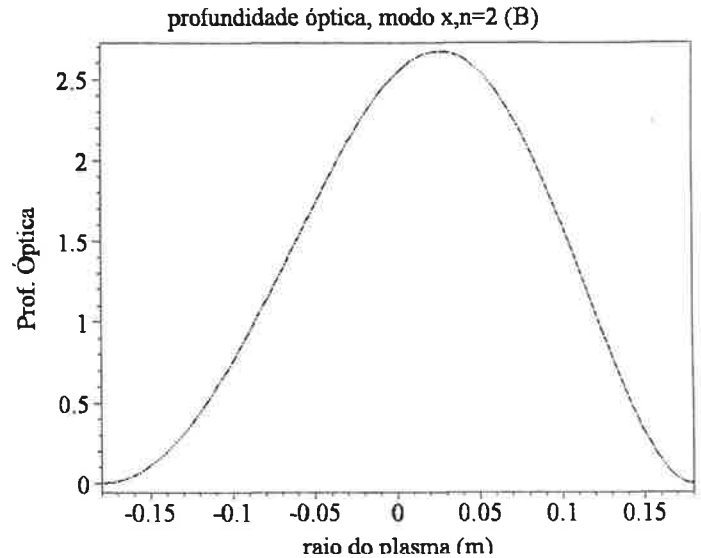
2.3.Grafico da profundidade Óptica X e O

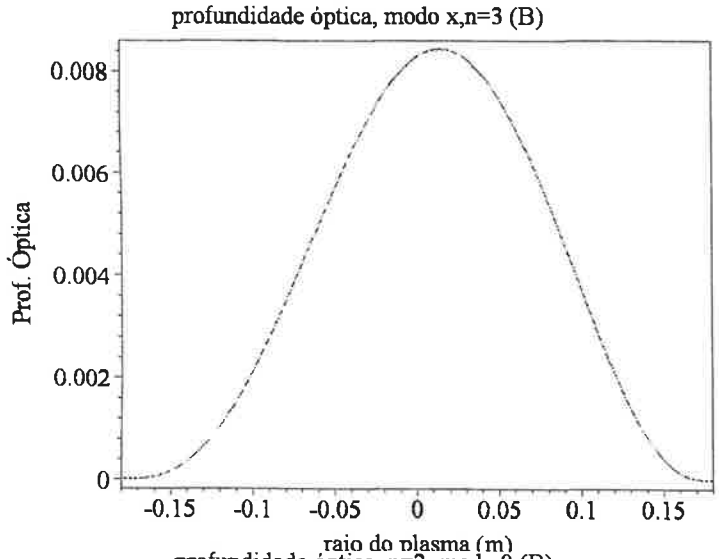
2.3.2 MODELO B

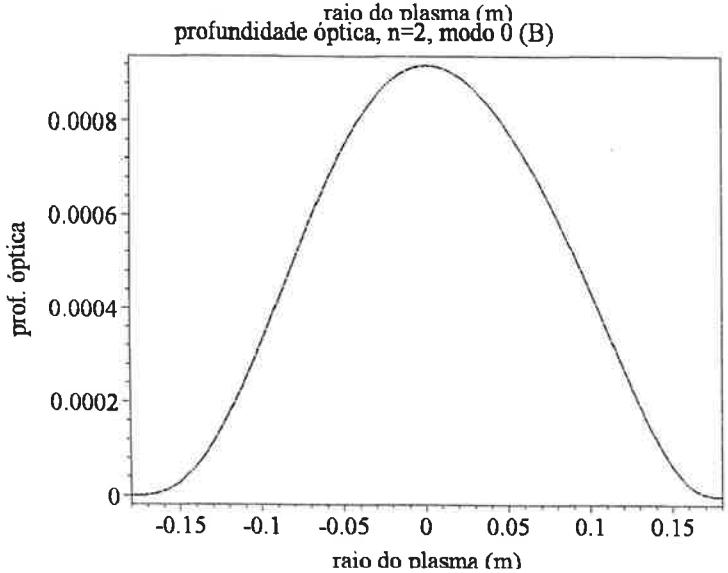
```
> #-----------
#modo X
#----------
b2:=plot(tauxn_b(b0,te0_K,ne0_m,2,theta,r),r=-0.18..0.1
8,color=red,title=`profundidade óptica, modo x,n=2
(B)`,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],labels=[`raio do plasma
(m)`,`Prof.
Óptica`],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2,linestyl
e=0,labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TI
MES,ROMAN,14],axes=boxed):
```

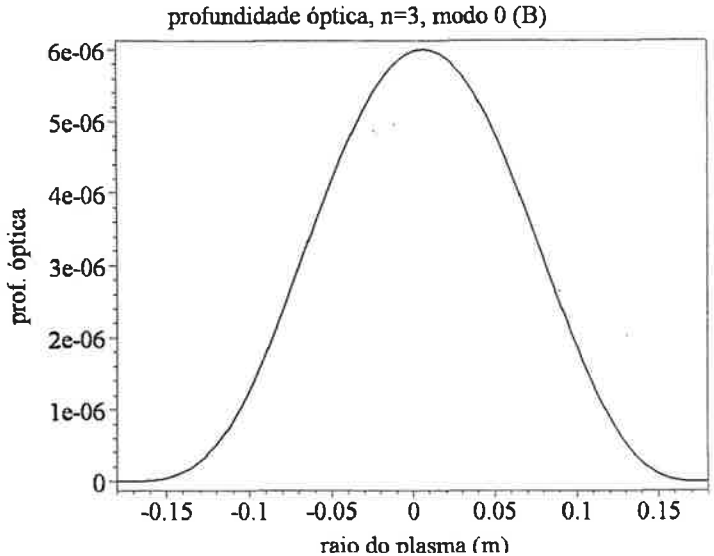
```
#
b3:=plot(tauxn_b(b0,te0_K,ne0_m,3,theta,r),r=-0.18..0.1
8,title=`profundidade óptica, modo x,n=3 (B)
`,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],color=brown,labels=[`raio
do plasma (m)`,`Prof.
Óptica`],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2,linestyl
e=0,labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TI
MES,ROMAN,14],axes=boxed):
#-------------------------------
# modo O
#-----------------------------
#
a1:=plot(tau0n_b(b0,te0_K,ne0_m,2,theta,r),r=-0.18..0.1
8,color=blue,thickness=2,title=`profundidade óptica,
n=2, modo 0
(B)`,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],axes=boxed,axesfont=[TI
MES,ROMAN,14],thickness=2,linestyle=0,labels=[`raio do
plasma (m)`,`prof.
óptica`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfon
t=[TIMES,ROMAN,14]):


a2:=plot(tau0n_b(b0,te0_K,ne0_m,3,theta,r),r=-0.18..0.1
8,color=black,thickness=2,title=`profundidade óptica,
n=3, modo 0
(B)`,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,1
4],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIM
ES,ROMAN,14],axes=boxed,thickness=2,linestyle=0,labels=
[`raio do plasma (m)`,`prof.
óptica`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfon
t=[TIMES,ROMAN,14]):

plots[display](b2);
plots[display](b3);
#
plots[display](a1);
plots[display](a2);


`MAPLE V RELEASE 5`;
`Dados de Entrada :`;
`****************************************`;
`Geometria do Tokamak`;
`R0 =`,r0;
`a =`, a;
`B0 =`,b0;
`ne0 =`,ne0_m;
`Te0 =`,te0_kev;
```

```
`Perfil de temperatura e densidade`;

`alfa_t =`,alfa_t;
`beta_t =`,beta_t;
`alfa_n =`,alfa_n;
`beta_n =`,beta_n;

`modo extraordinário`;
`****************************************`;
```









MAPLE V RELEASE 5

Dados de Entrada :

****

Geometria do Tokamak

R0 =, .615

a =, .18

B0 =, 1.14

ne0 =, .20 10^{20}

Te0 =, .5

Perfil de temperatura e densidade

alfa_t =, 1

beta_t =, 2

alfa_n =, 1

beta_n =, 2

modo extraordinário

****

```
> 
```

3. Intensidade específica

3.1. Corpo Negro

```
> IN:=(f,r)->((2*Pi*f*1e9)^2*te(te0_K,tea_K,r)*kb)/(8*Pi^3*c
```

```
^2)/1e-12;
#f(GHz)
#IN(pW/m^2-GHz-sr)
#te0_K (K)
```

$$IN := (f, r) \rightarrow .5000000000\ 10^{30}\ \frac{f^2\ \mathrm{te}(te0_K, tea_K, r)\ kb}{\pi\ c^2}$$

```
> evalf(IN(90,0));
```

$$1.148575641$$

```
> fn(2,a);
```

$$49.38566038$$

```
> #----------------------------------------
  #Espectro para o corpo negro (exp(-tau)=0)
  #----------------------------------------
  #Espectro modo O e X:
  #
  I_xnN:=(n,f,theta)->((2*Pi*(1e9)*f)^2*kb*te(te0_K,tea_K,rn
  (n,f)))/(8*Pi^3*c^2)*(1-0)/1e-12;
  I_onN:=(n,f,theta)->((2*Pi*(1e9)*f)^2*kb*te(te0_K,tea_K,rn
  (n,f)))/(8*Pi^3*c^2)*(1-0)/1e-12;
  #
  #Espectro total:
  #
  I_nN:=(n,f,theta)->I_xnN(n,f,theta)+I_onN(n,f,theta);
```

$$I_xnN := (n, f, \theta) \rightarrow .5000000000\ 10^{30}\ \frac{f^2\ kb\ \mathrm{te}(te0_K, tea_K, \mathrm{m}(n, f))}{\pi\ c^2}$$

$$I_onN := (n, f, \theta) \rightarrow .5000000000\ 10^{30}\ \frac{f^2\ kb\ \mathrm{te}(te0_K, tea_K, \mathrm{m}(n, f))}{\pi\ c^2}$$

$$I_nN := (n, f, \theta) \rightarrow \mathrm{I_xnN}(n, f, \theta) + \mathrm{I_onN}(n, f, \theta)$$

3.3. MODELO B (n=2 e n>2)

3.2.1 Equações

```
> #----------------------------------------
  # modo X; n>2 e n=2     pW
  #----------------------------------------
  I_xnb:=(b0,te0_K,ne0_m,n,theta,f)->((2*Pi*(1e9)*f)^2*kb
  *te(te0_K,tea_K,rn(n,f)))/(8*Pi^3*c^2)*(1-exp(-tauxn_b(
  b0,te0_K,ne0_m,n,theta,rn(n,f))))/1e-12;
  #----------------------------------------
  # modo O; pW
  #----------------------------------------
  I_onb:=(b0,te0_K,ne0_m,n,theta,f)->((2*Pi*(1e9)*f)^2*kb
  *te(te0_K,tea_K,rn(n,f)))/(8*Pi^3*c^2)*(1-exp(-tau0n_b(
  b0,te0_K,ne0_m,n,theta,rn(n,f))))/1e-12;
  #
```

$$I_xnb := (b0, te0_K, ne0_m, n, \theta, f) \rightarrow .5000000000\ 10^{30}\ \frac{f^2\ kb\ \mathrm{te}(te0_K, tea_K, \mathrm{m}(n, f))\ (1 - e^{(-\mathrm{tauxn_b}(b0, te0_K, ne0_m, n, \theta, \mathrm{m}(n, f)))})}{\pi\ c^2}$$

$$I_onb := (b0, te0_K, ne0_m, n, \theta, f) \rightarrow .5000000000\ 10^{30}\ \frac{f^2\ kb\ \mathrm{te}(te0_K, tea_K, \mathrm{m}(n, f))\ (1 - e^{(-\mathrm{tau0n_b}(b0, te0_K, ne0_m, n, \theta, \mathrm{m}(n, f)))})}{\pi\ c^2}$$

```
> evalf(I_onb(b0,te0_K,ne0_m,2,theta,50));
```

$$.1374448601\ 10^{-6}$$

```
> #----------------------------------------
  #Intensidade total   (modo X + modo O)
  #----------------------------------------
  #
  I_nb:=(b0,te0_K,ne0_m,n,theta,f)->I_xnb(b0,te0_K,ne0_m,
  n,theta,f)+I_onb(b0,te0_K,ne0_m,n,theta,f);
```

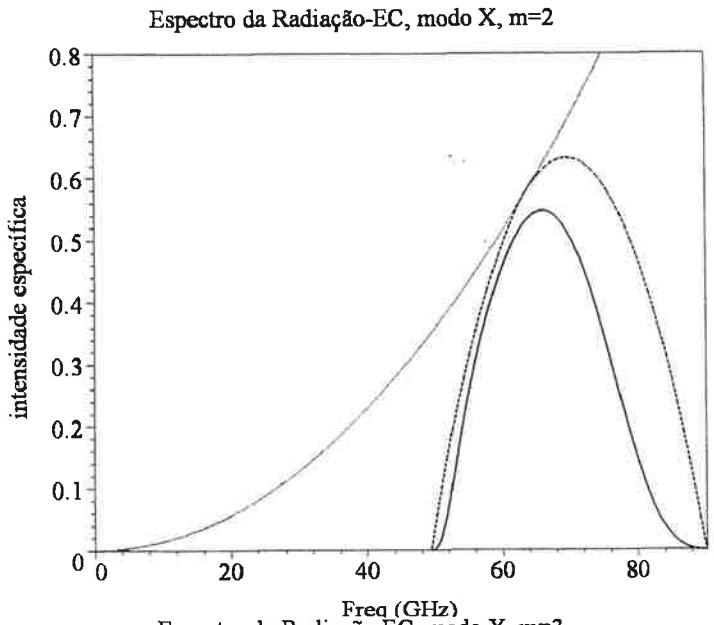
$$I_nb := (b0, te0_K, ne0_m, n, \theta, f) \rightarrow \mathrm{I_xnb}(b0, te0_K, ne0_m, n, \theta, f) + \mathrm{I_onb}(b0, te0_K, ne0_m, n, \theta, f)$$

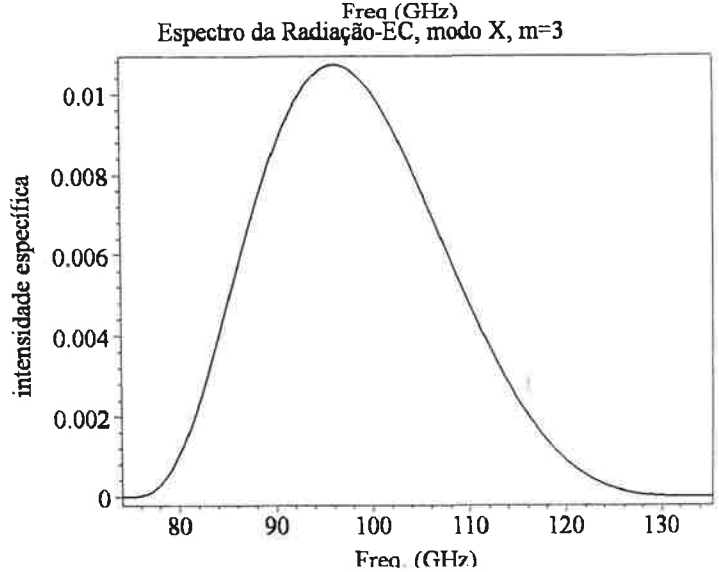
```
>
```

3.2.2. Espectro modo X

```
> n2:=plot(I_xnb(b0,te0_K,ne0_m,2,theta,f),f=fn(2,a)..fn(
  2,-a),0..0.8,color=black,title=`Espectro da
  Radiação-EC, modo X, m=2
  `,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],axes=boxed,labels=[`Freq
  (GHz) `,`intensidade específica
  `],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIM
  ES,ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2):
  #
  n3:=plot(I_xnb(b0,te0_K,ne0_m,3,theta,f),f=fn(3,a)..fn(
  3,-a),color=black,title=`Espectro da Radiação-EC, modo
  X,
  m=3`,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],axes=boxed,labels=[`Fre
  q. (GHz) `,`intensidade específica
  `],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIM
  ES,ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2):
  #
  n4:=plot(I_xnN(2,f,theta),f=fn(2,a)..fn(2,-a),color=bla
  ck,title=`Intensidade
  `,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],axes=boxed,labels=[`Freq.
  (GHz) `,`intensidade específica
  `],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIM
  ES,ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2,
```

```
linestyle=3):
#
n5:=plot(IN(f,0),f=0..fn(2,-a),color=black,titlefont=[T
IMES,ROMAN,14],axes=boxed,labels=[`Freq.(GHz)
`,`intensidade especifica
`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIM
ES,ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2,
linestyle=2):


plots[display](n2,n4,n5);
plots[display](n3);
#
`dados de entrada:`;
#
`==================================================
=====`;
`campo magnético no centro da coluna de plasma
b0=`, b0;
`raio maior do tokamak
r0=`, r0;
`raio da coluna de plasma
a=`, a;
`densidade no centro da coluna
ne0=`,ne0_m;
`temperatura no centro da coluna
te0=`,te0_K;
```





dados de entrada:

==========\

==========

campo magnético no centro da coluna de plasma *b0=* , 1.14

raio maior do tokamak *r0=* , .615

raio da coluna de plasma *a=* , .18

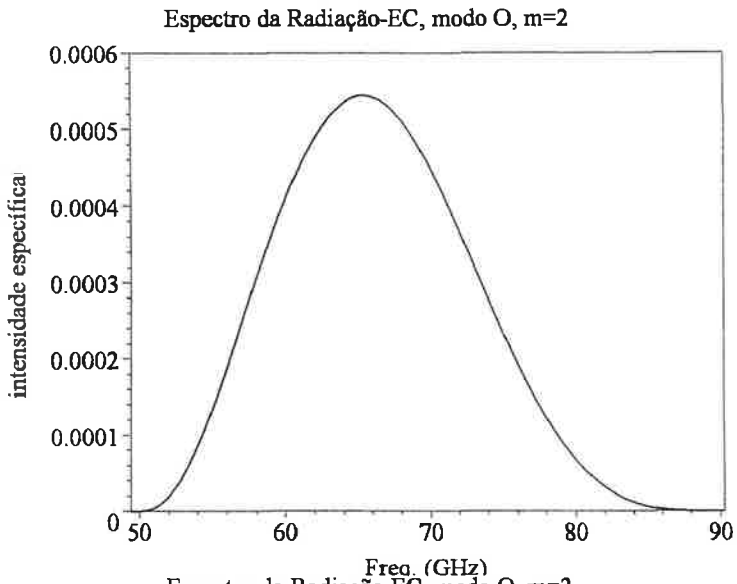
densidade no centro da coluna *ne0=* , .20 10^{20}

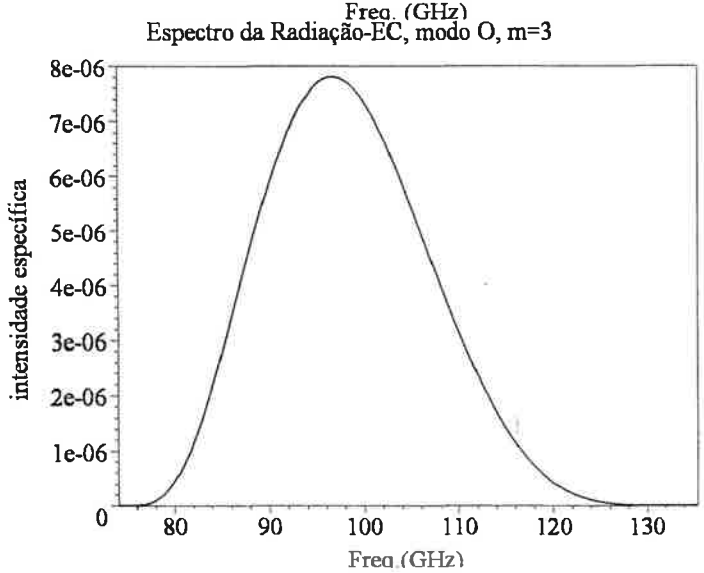
temperatura no centro da coluna *te0=* , .580 10^{7}

[>

3.2.3 Espectro modo O

```
> n2:=plot(I_onb(b0,te0_K,ne0_m,2,theta,f),f=fn(2,a)..fn(
2,-a),0..0.0006,color=black,title=`Espectro da
Radiação-EC, modo O, m=2
`,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],axes=boxed,labels=[`Freq.
(GHz) `,`intensidade específica
`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIM
ES,ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2):
#
n3:=plot(I_onb(b0,te0_K,ne0_m,3,theta,f),f=fn(3,a)..fn(
3,-a),0..8e-6,color=black,title=`Espectro da
Radiação-EC, modo O, m=3
`,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],axes=boxed,labels=[`Freq.(
GHz) `,`intensidade específica
`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIM
ES,ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2):

plots[display](n2);
plots[display](n3);
#
`dados de entrada:`;
#
`=================================================
=====`;
`campo magnético no centro da coluna de plasma
b0=`, b0;
`raio maior do tokamak
r0=`, r0;
`raio da coluna de plasma
a=`, a;
`densidade no centro da coluna
ne0=`,ne0_m;
`temperatura no centro da coluna
te0=`,te0;
```





dados de entrada:

==========\

==========

campo magnético no centro da coluna de plasma *b0=* , 1.14

raio maior do tokamak *r0=* , .615

raio da coluna de plasma $a=$, .18

densidade no centro da coluna $ne0=$, .20 10^{20}

temperatura no centro da coluna $te0=$, $te0$

```
> #------------------
  # razão In(O)/In(X)
  #------------------
>
> # para n>2 e n=2, modo X.
  funcao:=n->(n-3/2-2/n)/(n^2-1);
  #
  mxn_b:=(ne0_m,b0,n,theta,r)->1-funcao(n)*alpha(ne0_m,b0
  ,theta,r);
  mon_b:=(ne0_m,b0,n,theta,r)->(1-((1/n)^2)*(alpha(ne0_m,
  b0,theta,r)))^(n-1/2);
```

$$funcao := n \rightarrow \frac{n - \frac{3}{2} - \frac{2}{n}}{n^2 - 1}$$

$$mxn_b := (ne0_m, b0, n, \theta, r) \rightarrow 1 - \text{funcao}(n)\ \alpha(ne0_m, b0, \theta, r)$$

$$mon_b := (ne0_m, b0, n, \theta, r) \rightarrow \left(1 - \frac{\alpha(ne0_m, b0, \theta, r)}{n^2}\right)^{(n-1/2)}$$

```
> r1:=(n,f)->I_onb(b0,te0_K,ne0_m,n,theta,f)/I_xnb(b0,te0
  _K,ne0_m,n,theta,f);
  r2:=(n,r)->mon_b(ne0_m,b0,3,theta,r)/mxn_b(ne0_m,b0,3,t
  heta,r);
  r3:=0.8;
  temp:=(n,f,r)->(r1(n,f)/r3)*((me*c^2)/kb);
```

$$r1 := (n, f) \rightarrow \frac{\text{I_onb}(b0, te0_K, ne0_m, n, \theta, f)}{\text{I_xnb}(b0, te0_K, ne0_m, n, \theta, f)}$$

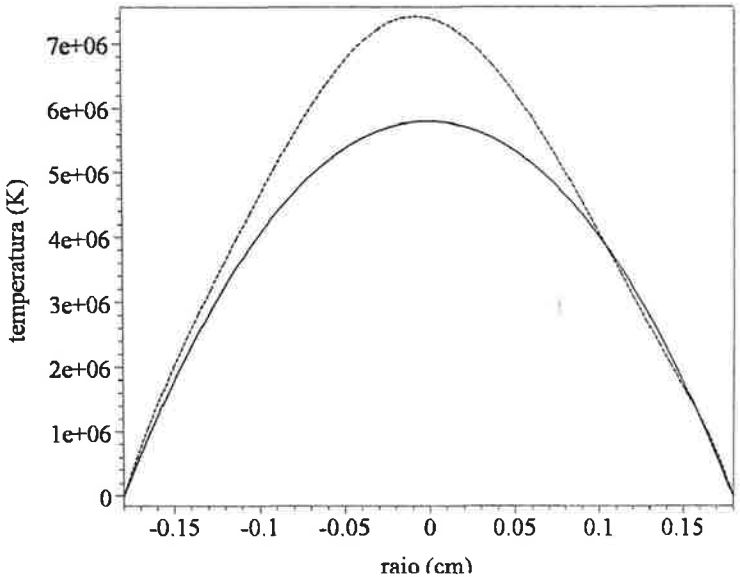
$$r2 := (n, r) \rightarrow \frac{\text{mon_b}(ne0_m, b0, 3, \theta, r)}{\text{mxn_b}(ne0_m, b0, 3, \theta, r)}$$

$$r3 := .8$$

$$temp := (n, f, r) \rightarrow \frac{\text{r1}(n, f)\ me\ c^2}{r3\ kb}$$

```
>
  a11:=plot(te(te0_K,tea_K,r),r=-a..a,color=black,title=`
  `,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],axes=boxed,labels=[`raio
  (cm) `,`temperatura (K)
  `],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIM
  ES,ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2,line
  style=1):
```

```
a21:=plot(temp(2,fn(2,r),r),r=-a..a,color=black,title=`
Espectro da Radiação-EC, modo O, m=2
`,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],axes=boxed,labels=[`Freq.
(GHz) `,`intensidade especifica
`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIM
ES,ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2,line
style=3):

plots[display](a11,a21);
alfa_t;
beta_t;
alfa_n;
beta_n;


b0;              #campo magnético no centro da coluna de
plasma
ne0_m;          #densidade no centro da coluna (m^-3)
r3;
```



1

2

1

2

1.14

.20 10^{20}

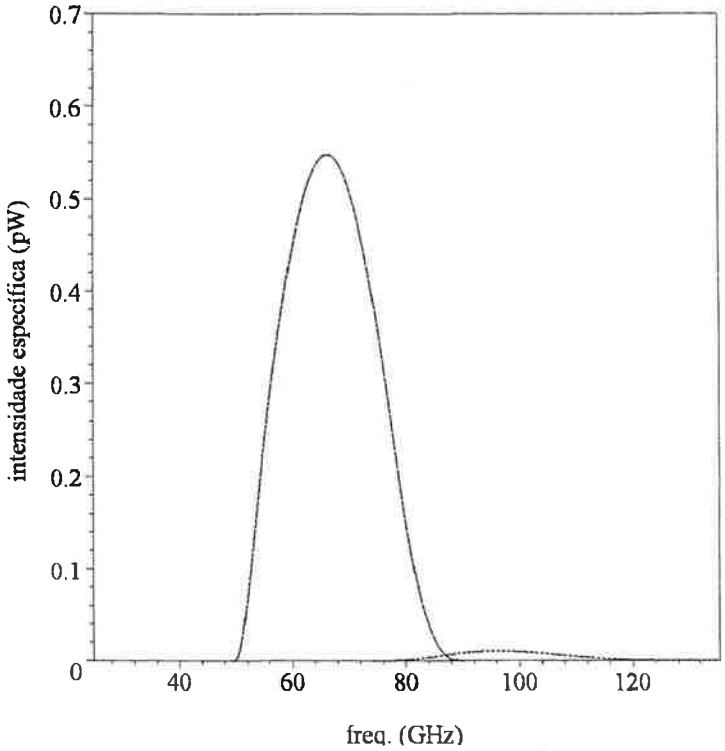
.8

3.2.4. ESPECTRO TOTAL (modo X+modo O)

```
> #do modelo F:
n1:=plot(I_1f(b0,te0_K,ne0_m,theta,f),f=fn(1,a)..fn(1,-
a),0..0.7, color=black,title=`Espectro de Emissão da
Radiação-EC`,titlefont=[TIMES,ROMAN,20],axes=boxed,labe
ls=[`freq. (GHz) `,`intensidade específica (pW)
`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIM
ES,ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2,line
style=DOT):
#
n2:=plot(I_nb(b0,te0_K,ne0_m,2,theta,f),f=fn(2,a)..fn(2
,-a),color=blue,title=`Intensidade
`,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],axes=boxed,labels=[`raio
(m) `,`intensidade específica
`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIM
ES,ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2):
#
n3:=plot(I_nb(b0,te0_K,ne0_m,3,theta,f),f=fn(3,a)..fn(3
,-a),color=red,title=`Intensidade
`,titlefont=[TIMES,ROMAN,14],axes=boxed,labels=[`raio
(m) `,`intensidade específica
`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIM
ES,ROMAN,14],axesfont=[TIMES,ROMAN,14],thickness=2):
#
corponegro:=plot(IN(f,0),f=0..fn(2,-a),color=black,thic
kness=2):
#
plots[display](n1,n2,n3);
#
`Log:`;
`MAPLE 7`;
`****************************************`;
`Geometria do Tokamak`;
`R0 =`,r0;
`a =`, a;
`B0 =`,b0;
`ne0 =`,ne0_m;
`Te0 =`,te0_kev;
`Perfil de temperatura e densidade`;
```

```
`alfa_t =`,alfa_t;
`beta_t =`,beta_t;
`alfa_n =`,alfa_n;
`beta_n =`,beta_n;
`****************************************`;
```

Espectro de Emissão da Radiação-EC



Log:

MAPLE 7

****

Geometria do Tokamak

R0 =, .615

a =, .18

B0 =, 1.14

ne0 =, .20 10^{20}

Te0 =, .5

Perfil de temperatura e densidade

```
alfa_t =, 1
beta_t =, 2
alfa_n =, 1
beta_n =, 2
****************************************
[ >
```

Tensor dielétrico para magnetoplasma frio

```
> restart:
> with(linalg):with(plots):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected

Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> #propósito: esse programa calcula os elementos do tensor
  dielétrico para plasmas frios.
```

DEFINIÇÃO: vamos assumir que a carga elétrica q_σ da partícula do tipo σ seja um parâmetro real (e não o módulo). Assim, se σ for um elétron $q_e = -e$.

Com essa definição, o tensor dielétrico para plasmas frios assume a forma (A. Sitenko and V. Malnev-plasmas physics theory 1995 1ª ed.):

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -i\varepsilon_2 & 0 \\ i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 - \sum_\sigma \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2 - \omega_{c\sigma}^2}; \qquad \varepsilon_2(\omega) = \sum_\sigma \frac{\omega_{c\sigma}}{\omega} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2 - \omega_{c\sigma}^2};$$

$$\varepsilon_3(\omega) = 1 - \sum_\sigma \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ce} = \frac{q_e \mathbf{B}}{m_e}; \qquad \omega_{pe} = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}}$$

NOTE que nas equações dos ε usa-se o MÓDULO DA FREQÜÊNCIA ANGULAR $\omega_{c\sigma} = |\boldsymbol{\omega}_{c\sigma}|$ (ver pg. 26 da referência).

No caso de um plasma frio de elétrons somente:

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2}; \qquad \varepsilon_2(\omega) = \frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2};$$

$$\varepsilon_3(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$$

0.Créditos

data	autor	descrição de mudanças
03/jun/2003	E. R. Calderon	Original

1.Constantes Físicas

```
> me:=9.1096e-31;                    #massa do elétron (kg)
  e:=-1.6022e-19;                    #carga do elétron (C)NOTE: O
  SINAL NEGATIVO!
  kb:=1.3806e-23;                    #constante de Boltzmann (J/K)
  c:=2.9979246e8;                    #velocidade da luz no vácuo
  (m/s)
  e0:=8.85e-12;
```

$$me := .91096\ 10^{-30}$$
$$e := -.16022\ 10^{-18}$$
$$kb := .13806\ 10^{-22}$$
$$c := .29979246\ 10^{9}$$
$$e0 := .885\ 10^{-11}$$

2.Entradas

```
> b0:=1.14;          #campo magnético no centro da coluna de
  plasma
  r0:=0.615;         #raio maior do tokamak
  a:=0.18;           #raio da coluna de plasma
  ne0_m:=2.0e19;     #densidade no centro da coluna (m^-3)
  nea_m:=2.0e11;     #densidade na borda da coluna (m^-3)
  "
  te0:=.5;           #temperatura no centro da coluna (keV)
  tea:=0.00;
  alfa:=1;
  beta:=2;
  theta:=0.;         #ângulo de observação.
  Xi:=Pi/2.;         #ângulo entre k e b0.
  freq:=53.23e9;     #freq. da onda em Hz.

>
>
```

$$b0 := 1.14$$
$$r0 := .615$$
$$a := .18$$
$$ne0_m := .20\ 10^{20}$$
$$nea_m := .20\ 10^{12}$$
$$te0 := .5$$
$$tea := 0.$$
$$alfa := 1$$
$$\beta := 2$$

$$\theta := 0.$$

$$\Xi := .5000000000\ \pi$$

$$freq := .5323\ 10^{11}$$

```
>
```

3.Equações Básicas.

```
> parabolico:=r->(1-(r/a)^beta)^alfa;
  fatortokamak:=r->1+r*cos(theta)/r0;
```

$$parabolico := r \rightarrow \left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^{\beta}\right)^{alfa}$$

$$fatortokamak := r \rightarrow 1+\frac{r\cos(\theta)}{r0}$$

```
> #-------------------------
  #campo magnético toroidal
  #-------------------------
  bt:=r->b0/fatortokamak(r);
```

$$bt := r \rightarrow \frac{b0}{\text{fatortokamak}(r)}$$

```
> #--------------------------
  #perfil de densidade
  #--------------------------
  #
  ne:=(ne0_m,r)->(ne0_m-nea_m)*parabolico(r)+nea_m;
```

$$ne := (ne0_m, r) \rightarrow (ne0_m - nea_m)\ \text{parabolico}(r) + nea_m$$

```
> #-------------------------------------------------------------
  #freqüência de plasma "fpe" e freqüência de ciclotron "|fce|"
  (Hz)
  #-------------------------------------------------------------
  #
  fce:=r->(1/(2*Pi))*(e*bt(r)/me);
  modfce:=r->abs(fce(r));
  fpe:=(ne0_m,r)->(1/(2*Pi))*sqrt((ne(ne0_m,r)*e^2)/(me*e0));
```

$$fce := r \rightarrow \frac{1}{2}\frac{e\ \text{bt}(r)}{\pi\ me}$$

$$modfce := r \rightarrow |\text{fce}(r)|$$

$$fpe := (ne0_m, r) \rightarrow \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\frac{\text{ne}(ne0_m, r)\ e^2}{me\ e0}}}{\pi}$$

```
> evalf(2*Pi*modfce(0.0));
  evalf(2*Pi*fpe(2.0e19,0.0));
```

$$.2005036444\ 10^{12}$$

$$.2523541412\ 10^{12}$$

```
>
> #-------------------------------------------------------------
  #cálculo dos epsilons
  #fonte: Sitenko et al. "Plasma Physics Theory" ed. Chapmann
  #-------------------------------------------------------------
  #cálculo de epsilon1 e epsilon2:
  epsilon1:=(f,r)->1-(fpe(ne0_m,r)^2/(f^2-(modfce(r))^2));
  epsilon2:=(f,r)->(modfce(r)/f)*(fpe(ne0_m,r)^2/(f^2-modfce(r)
  ^2));
  #
  #cálculo de epsilon3
  #
  epsilon3:=(f,r)->1-(fpe(ne0_m,r)/f)^2;
```

$$\varepsilon 1 := (f, r) \rightarrow 1-\frac{\text{fpe}(ne0_m, r)^2}{f^2-\text{modfce}(r)^2}$$

$$\varepsilon 2 := (f, r) \rightarrow \frac{\text{modfce}(r)\ \text{fpe}(ne0_m, r)^2}{f(f^2-\text{modfce}(r)^2)}$$

$$\varepsilon 3 := (f, r) \rightarrow 1-\frac{\text{fpe}(ne0_m, r)^2}{f^2}$$

```
> evalf(epsilon1(2*modfce(0.0),0));
  evalf(epsilon2(2*modfce(0.0),0));
  evalf(epsilon3(2*modfce(0.0),0));
```

$$.4719742822$$

$$.2640128589$$

$$.6039807116$$

4. Cálculo do Tensor dielétrico.

```
> #-------------------------------------------------------------
  -----------
  #cálculo dos elementos do tensor dielétrico
  #-------------------------------------------------------------
  -----------
  epsilon_11_cold:=(f,r)->epsilon1(f,r);
  epsilon_12_cold:=(f,r)->I*epsilon2(f,r);
  epsilon_13_cold:=(f,r)->0;
  epsilon_21_cold:=(f,r)->-I*epsilon2(f,r);
  epsilon_22_cold:=(f,r)->epsilon1(f,r);
  epsilon_23_cold:=(f,r)->0;
  epsilon_31_cold:=(f,r)->0;
  epsilon_32_cold:=(f,r)->0.;
  epsilon_33_cold:=(f,r)->epsilon3(f,r);
```

$$epsilon_11_cold := \varepsilon 1$$
$$epsilon_12_cold := (f, r) \rightarrow I\, \varepsilon 2(f, r)$$
$$epsilon_13_cold := 0$$
$$epsilon_21_cold := (f, r) \rightarrow -I\, \varepsilon 2(f, r)$$
$$epsilon_22_cold := \varepsilon 1$$
$$epsilon_23_cold := 0$$
$$epsilon_31_cold := 0$$
$$epsilon_32_cold := 0.$$
$$epsilon_33_cold := \varepsilon 3$$

```
> #==========================================================
  ===
  #definição do tensor dielétrico
  #==========================================================
  ===
  tensor_dieletrico:=(f,r)->Matrix([[epsilon_11_cold(f,r),epsil
  on_12_cold(f,r),epsilon_13_cold(f,r)],[epsilon_21_cold(f,r),e
  psilon_22_cold(f,r),epsilon_23_cold(f,r)],[epsilon_31_cold(f,
  r),epsilon_32_cold(f,r),epsilon_33_cold(f,r)]]);
```

$$tensor_dieletrico := (f, r) \rightarrow \mathrm{Matrix}([[\mathrm{epsilon_11_cold}(f, r), \mathrm{epsilon_12_cold}(f, r), \mathrm{epsilon_13_cold}(f, r)], [\mathrm{epsilon_21_cold}(f, r), \mathrm{epsilon_22_cold}(f, r), \mathrm{epsilon_23_cold}(f, r)], [\mathrm{epsilon_31_cold}(f, r), \mathrm{epsilon_32_cold}(f, r), \mathrm{epsilon_33_cold}(f, r)]])$$

4.1 testes

```
> #==========================================================
  ==============
  #definição da freqüência da onda f
  #==========================================================
  ==============
> evalf(tensor_dieletrico(2*modfce(0.0),0.));
```

$$\begin{bmatrix} .4719742822 & .2640128589\, I & 0. \\ -.2640128589\, I & .4719742822 & 0. \\ 0. & 0. & .6039807116 \end{bmatrix}$$

```
>
```

5. epsilons

parte real e imaginário dos tensor

```
> epsilon_11_real:=(f,r)->Re(epsilon_11_cold(f,r));
```

$$epsilon_11_real := (f, r) \rightarrow \Re(\mathrm{epsilon_11_cold}(f, r))$$

```
> epsilon_12_imag:=(f,r)->Im(epsilon_12_cold(f,r));
```

$$epsilon_12_imag := (f, r) \rightarrow \Im(\mathrm{epsilon_12_cold}(f, r))$$

```
> epsilon_21_imag:=(f,r)->Im(epsilon_21_cold(f,r));
```

$$epsilon_21_imag := (f, r) \rightarrow \Im(\mathrm{epsilon_21_cold}(f, r))$$

```
> epsilon_33_real:=(f,r)->Re(epsilon_33_cold(f,r));
```

$$epsilon_33_real := (f, r) \rightarrow \Re(\mathrm{epsilon_33_cold}(f, r))$$

```
> evalf(epsilon_11_real(2*modfce(0.0),0));
  evalf(epsilon_11_cold(2*modfce(0),0.));
  evalf(epsilon_21_imag(2*modfce(0.0),0));
  evalf(epsilon_21_cold(2*modfce(0),0.));
>
```

$$.4719742822$$
$$.4719742822$$
$$-.2640128589$$
$$-.2640128589\, I$$

```
> evalf(epsilon_12_imag(2*modfce(0.0),0));#parte imaginária
  do epsilon_12_cold
  evalf(epsilon_12_cold(2*modfce(0),0.));
```

$$.2640128589$$
$$.2640128589\, I$$

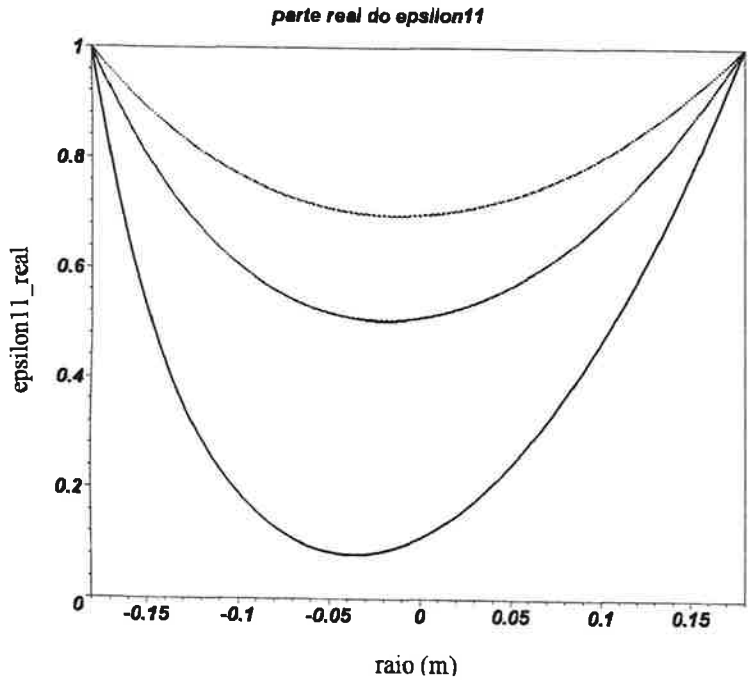
```
> freq;evalf(2*modfce(0.0));
>
```

$$.5323\ 10^{11}$$
$$.6382229221\ 10^{11}$$

Gráficos da parte real e imaginária

```
> #----------------------------------------------------------
  ----------------------------
  #EPSILON 11-PLASMA FRIO
  #----------------------------------------------------------
  ----------------------------
  plot([epsilon_11_real(53.23e9,r),epsilon_11_real(65.59e9,r
  ),epsilon_11_real(79.68e9,r)],r=-a..a,0..1,color=[black,bl
  ue,red],title=`parte real do
  epsilon11`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],axes=boxed
  ,labels=[`raio (m)
  `,`epsilon11_real`],labeldirections=[horizontal,vertical],
  labelfont=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE
  ,11],thickness=3);
```

```
`a =`,a;`r0 =`,r0;`b0 =`,b0;`ne0 =`,ne0_m;`te0 =`,te0;`f
=`,freq;
>
```



a =, .18

$r0$ =, .615

$b0$ =, 1.14

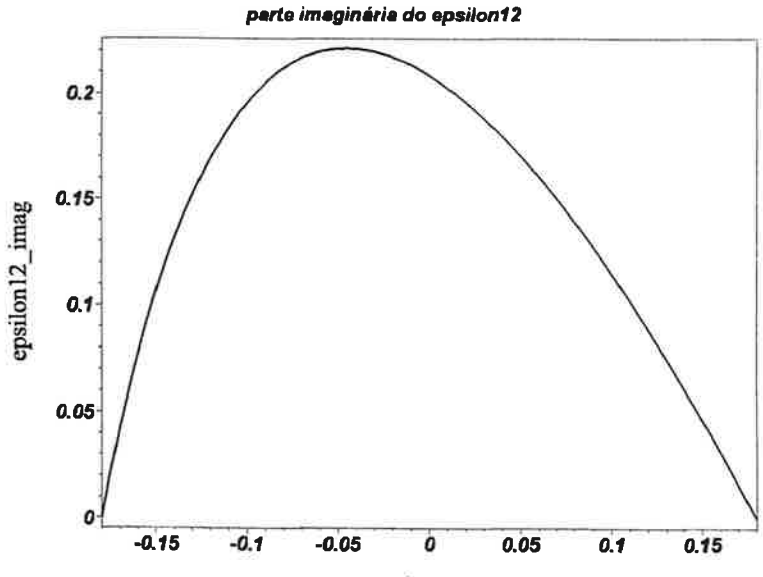
$ne0$ =, .20 10^{20}

$te0$ =, .5

f =, .5323 10^{11}

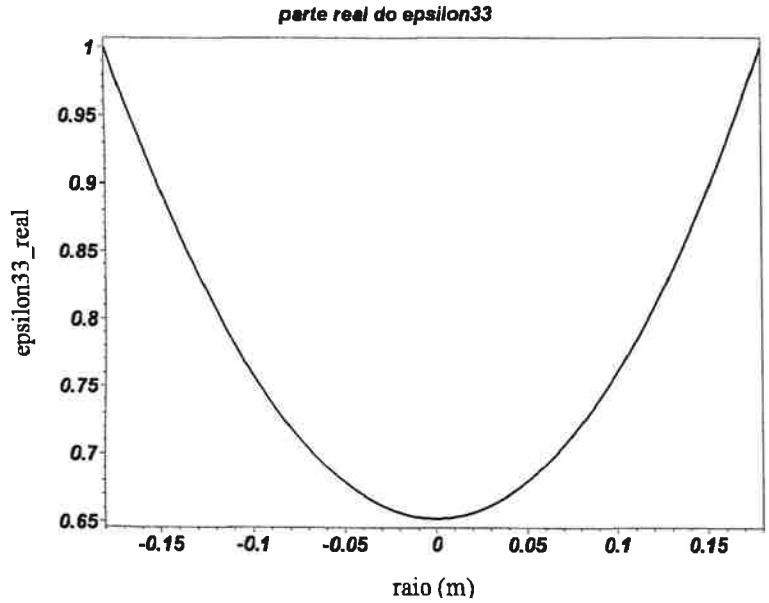
```
> #-------------------------------------------------------------
  -------------------
  # impressão para plotar no origin.
  #-------------------------------------------------------------
  --------------------
  qqq:=plot(epsilon_11_real(68.13e9,r),r=-a..a):

> #-------------------------------------------------------------
  ----------------------------
  #EPSILON 12-PLASMA FRIO
  #-------------------------------------------------------------
  ----------------------------
```

```
plot(epsilon_12_imag(68.13e9,r),r=-a..a,color=black,title=
`parte imaginária do
epsilon12`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],axes=boxed
,labels=[`raio (m)
`,`epsilon12_imag`],labeldirections=[horizontal,vertical],
labelfont=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE
,11],thickness=3);
```

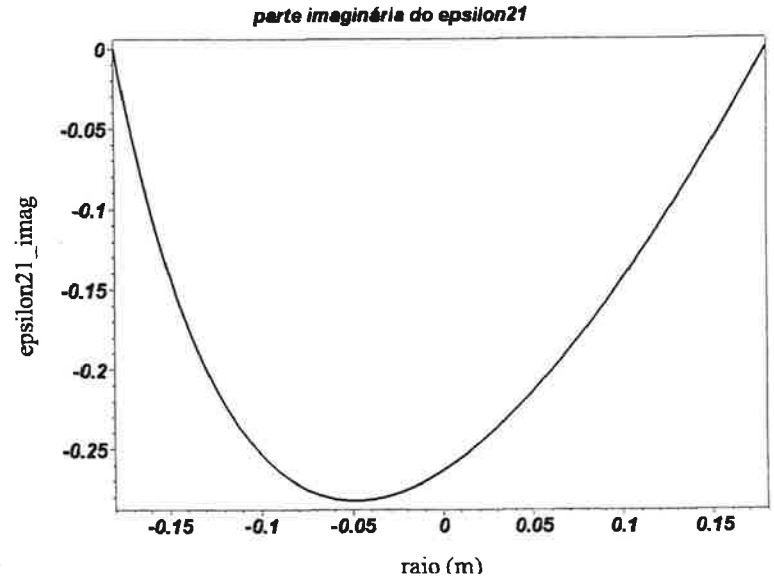



```
> #-------------------------------------------------------------
  -------------------
  # impressão para plotar no origin.
  #-------------------------------------------------------------
  --------------------
  plot(epsilon_33_real(68.13e9,r),r=-a..a):

> #-------------------------------------------------------------
  ----------------------------
  #EPSILON 33-PLASMA FRIO
  #-------------------------------------------------------------
  ----------------------------
  plot(epsilon_33_real(68.13e9,r),r=-a..a,color=black,title=
  `parte real do
  epsilon33`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],axes=boxed
  ,labels=[`raio (m)
  `,`epsilon33_real`],labeldirections=[horizontal,vertical],
  labelfont=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE
```

```
,11],thickness=3);
```




```
>
> #-------------------------------------------------------------
---------------------------
#EPSILON 21-PLASMA FRIO
#-------------------------------------------------------------
---------------------------
plot(epsilon_21_imag(2*modfce(0.0),r),r=-a..a,color=black,
title=`parte imaginária do
epsilon21`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],axes=boxed
,labels=[`raio (m)
`,`epsilon21_imag`],labeldirections=[horizontal,vertical],
labelfont=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE
,11],thickness=3);
```




```
>
```

6.Relação de Dispersão X=p/2 (veja Sitenko pg 177)

6.1 Equações Básicas

```
> #-------------------------------------------------------------
-----------------------------
# resolver a relação de dispersão
#OBS: "mais" refere-se a onda na polarização
extraordinária enquanto "menos" refere-se a polarização
ordinária (veja Sitenko pg. 177
#-------------------------------------------------------------
-----------------------------
indice_quadrado_mais_perp:=(f,r)->epsilon1(f,r)-(epsilon2(
f,r))^2/epsilon1(f,r);
#
indice_quadrado_menos_perp:=(f,r)->epsilon3(f,r);
```

$$indice_quadrado_mais_perp := (f, r) \rightarrow \varepsilon 1(f, r) - \frac{\varepsilon 2(f, r)^2}{\varepsilon 1(f, r)}$$

$$indice_quadrado_menos_perp := \varepsilon 3$$

```
> epsilon_11_cold(2*modfce(0.),0);
```

$$.4719742822$$

```
> evalf(indice_quadrado_mais_perp(2*modfce(0),0));
evalf(indice_quadrado_menos_perp(2*modfce(0),0));
```

$$.3242908336$$

.6039807116

```
>
> indice_mais_perp:=
(f,r)->root[2](indice_quadrado_mais_perp(f,r));
indice_menos_perp:=
(f,r)->root[2](indice_quadrado_menos_perp(f,r));
```

$$indice_mais_perp := (f, r) \rightarrow root_2(\text{indice_quadrado_mais_perp}(f, r))$$

$$indice_menos_perp := (f, r) \rightarrow root_2(\text{indice_quadrado_menos_perp}(f, r))$$

```
>
> indice_menos_perp(3*modfce(0),0);
```

.9077397355

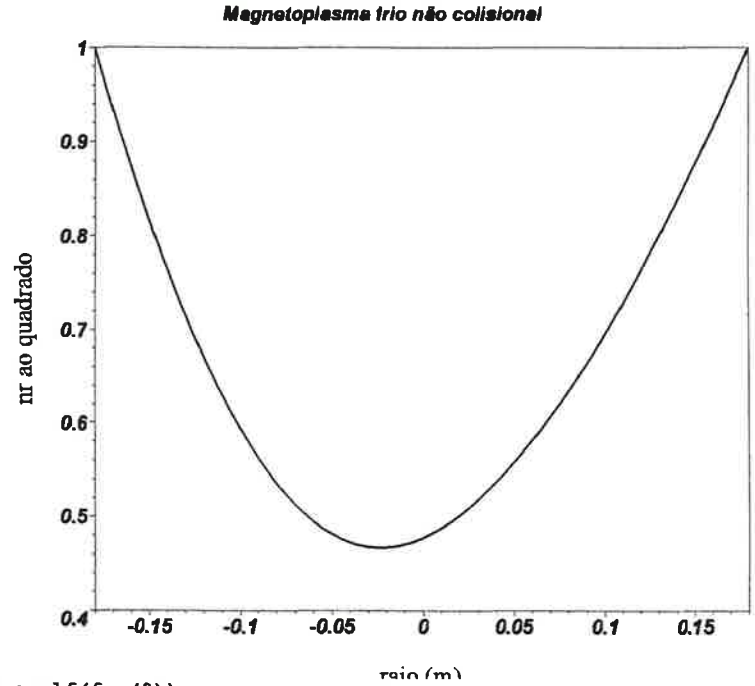
```
> #-------------------------------------------------------------
----------------------
#inverso do quadrado do indice de refração
#-------------------------------------------------------------
----------------------
inv_indice_quadrado_mais_perp:=(f,r)->1/indice_quadrado_ma
is_perp(f,r);
inv_indice_quadrado_menos_perp:=(f,r)->1/indice_quadrado_m
enos_perp(f,r);
```

$$inv_indice_quadrado_mais_perp := (f, r) \rightarrow \frac{1}{\text{indice_quadrado_mais_perp}(f, r)}$$

$$inv_indice_quadrado_menos_perp := (f, r) \rightarrow \frac{1}{\text{indice_quadrado_menos_perp}(f, r)}$$

6.2 Gráficos

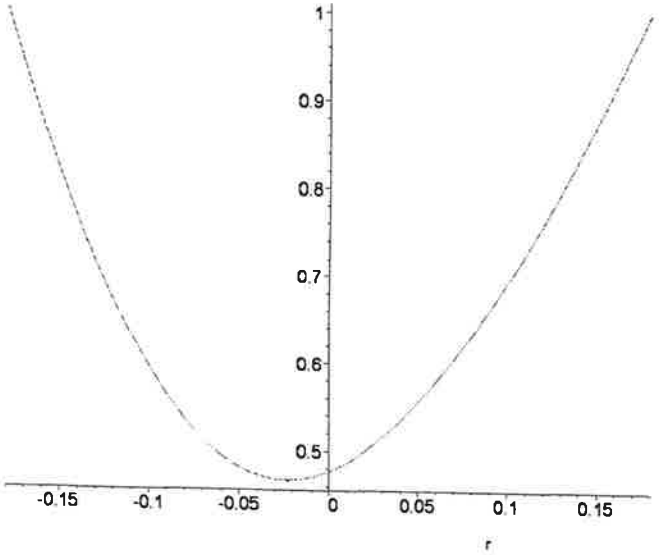
```
> #---------------------------------
#quadrado do indice de refração
#---------------------------------
c_mais:=plot(indice_quadrado_mais_perp(68.13e9,r),r=-a..a,
0.4..1,color=black,title=`Magnetoplasma frio não
colisional`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],axes=boxe
d,labels=[`raio (m) `,`nr ao
quadrado`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont
=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],thic
kness=3):
c_menos:=plot(indice_quadrado_menos_perp(2*modfce(0.),r),r
=-a..a,color=red,labelfont=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELV
ETICA,BOLDOBLIQUE,11],thickness=3):
plots[display](c_mais);
```




```
> evalf(fce(0));
```

$-.3191114611\ 10^{11}$

```
> #-------------------------------------------------------------
-------------------
# impressão para plotar no origin.
#-------------------------------------------------------------
-------------------
plot(indice_quadrado_mais_perp(68.13e9,r),r=-a..a);
```



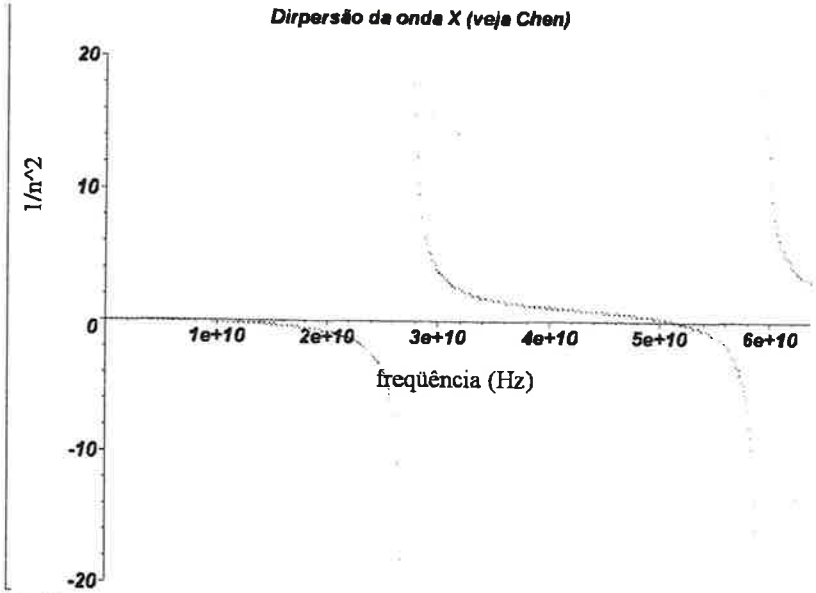
6.3 Cortes e Ressonâncias

```
> #-------------------------------------------------------------
---------------------------
# modo X
#-------------------------------------------------------------
---------------------------
passo:=2*a/30.;
i:=15;
`r=`,-a+i*passo;
plot(inv_indice_quadrado_mais_perp(f,-a+i*passo,Xi),f=0..2
*modfce(0),-20..20,color=gold,title=`Dirpersão da onda X
(veja
Chen)`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],labels=[`freqü
ência (Hz)
`,`1/n^2`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont
=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],thic
kness=2,style=point,numpoints=800);
```

$$passo := .01200000000$$

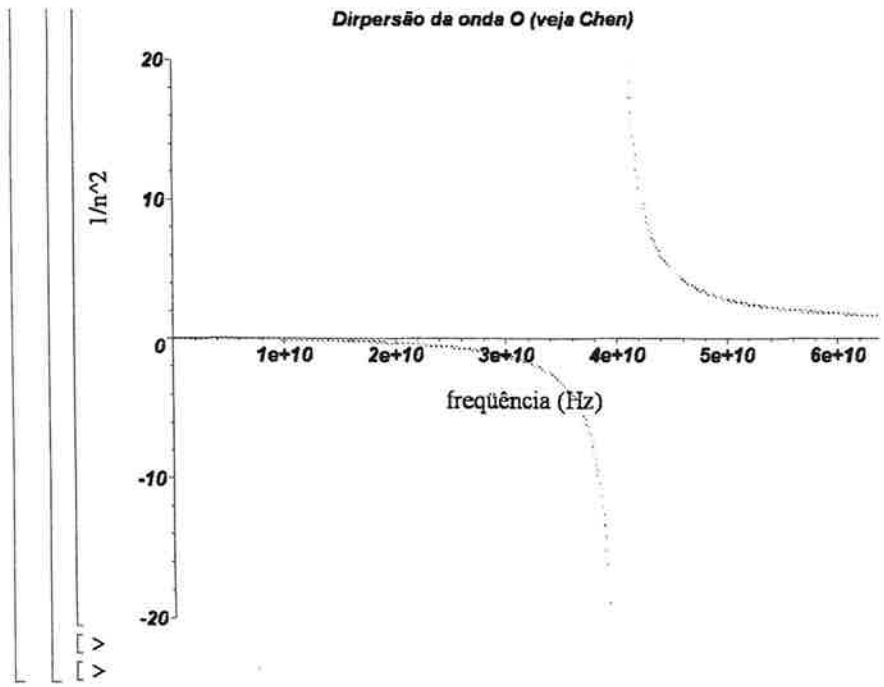
$$i := 15$$

$$r=, 0.$$




```
> #-------------------------------------------------------------
--------------------------------
#modo O
#-------------------------------------------------------------
--------------------------------
evalf(fpe(ne0_m,-a+i*passo));
plot(inv_indice_quadrado_menos_perp(f,-a+i*passo),f=0..2*m
odfce(0),-20..20,color=gold,title=`Dirpersão da onda O
(veja
Chen)`,titlefont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],labels=[`freqü
ência (Hz)
`,`1/n^2`],labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont
=[TIMES,ROMAN,14],axesfont=[HELVETICA,BOLDOBLIQUE,11],thic
kness=2,style=point,numpoints=800);
```

$$.4016340897\ 10^{11}$$


Dirpersão da onda O (veja Chen)
1/n^2
20
10
0
-10
-20
1e+10
2e+10
3e+10
4e+10
5e+10
6e+10
freqüência (Hz)