

# QUEBRA DE SUPERSIMETRIA EM 2+1-DIMENSÕES



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

# Quebra de Supersimetria em 2 + 1-dimensões

*Kazuo Teramoto*

Orientador:

Prof. Dr. Adilson José da Silva

Dissertação de mestrado apresentada  
ao Instituto de Física para a obten-  
ção do título de Mestre em Ciências.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Adilson José da Silva (IFUSP)

Prof. Dr. Josif Frenkel (IFUSP)

Prof. Dr. Alysson Fabio Ferrari (UFABC)

São Paulo

2012

© 2012 Hudson Kazuo Teramoto Mendonça

Universidade de São Paulo, Instituto de Física, São Paulo, SP.

Páginas criadas pelo autor utilizando o sistema  $\LaTeX$  usando a família tipográfica *Warnock Pro* (Adobe) criada por *Robert Slimbach* com um tamanho de corpo de texto de 11/13.6 pt.

---

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Mendonça, Hudson Kazuo Teramoto

Quebra de Supersimetria em 2 + 1-dimensões — São Paulo, 2012

Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo.  
Instituto de Física — Depto. de Física Matematica

Orientador: Prof. Dr. Adilson José da Silva

Área de Concentração: Teoria Geral de Partículas e Campos

Unitermos: 1. Supersimetria; 2. Teoria Quântica Relativística; 3. Teoria Quântica de Campo.

USP/IF/SBI-036/2012

---

15 14 13 12      5 4 3 2 1

Maio de 2012

## RESUMO

---

Nesse trabalho discutimos alguns aspectos da teoria quântica de campos que nos levam a formulação do potencial efetivo em teorias supersimétricas. O enfoque é dado as técnicas para análise da quebra de supersimetria em  $2 + 1$ -dimensões. São discutidas as condições sobre o potencial efetivo de teorias supersimetrias para que ocorra ou não quebra de supersimetria. O potencial efetivo do modelo Wess-Zumino em  $2+1$ -dimensões é calculado até a aproximação de 2-laços no formalismo de componentes e supercampos e até essa ordem não foi encontrado quebra de supersimetria.



## ABSTRACT

---

In this work we discuss some aspects of quantum theory of fields used for the formulation of the effective potential of supersymmetric theories. The main focus is given to the methods used to analyse supersymmetry breaking in  $2 + 1$ -dimensions. We discuss the conditions on the effective potential of supersymmetric theories for the occurrence of supersymmetry breaking. The effective potential of Wess-Zumino model in  $2 + 1$ -dimensions is calculated up to 2-loops approximation where supersymmetry breaking is not found to this order.





## SUMÁRIO

---

Lista de Figuras	xi
Nomenclatura e Convenções	xiii
PREFÁCIO	xv
1 INTRODUÇÃO	1
I SUPERSIMETRIA E O POTENCIAL EFETIVO	3
2 SUPERSIMETRIA	5
2.1 Grupos e álgebras	5
2.2 Supersimetria	8
3 O POTENCIAL EFETIVO	13
3.1 Funcionais geradores e gráficos de Feynman	13
3.2 Ação quântica e sua expansão perturbativa	23
3.3 Potencial efetivo e o seu cálculo perturbativo	26
4 QUEBRA DE SUPERSIMETRIA	33
4.1 Quebra de simetria interna	33
4.2 Vácuo supersimétrico	34
II O MODELO WESS-ZUMINO	37
5 O MODELO DE WESS E ZUMINO	39
6 POTENCIAL DO MODELO WESS-ZUMINO: COMPONENTES	41
6.1 Regras de Feynman	41
6.2 Potencial efetivo	43
7 POTENCIAL DO MODELO WESS-ZUMINO: SUPERCAMPOS	51
7.1 Regras de Feynman	51
7.2 Potencial efetivo	54
A APÊNDICE: INTEGRAIS DE LAÇOS	61
A.1 Integrais de 1-laço	61
A.2 Integrais de 2-laços	62
8 CONCLUSÃO	65
Bibliografia	67
Índice Remissivo	71



## LISTA DE FIGURAS

---

- Figura 3.1 Os gráficos (a) e (b) são desconexos enquanto os gráficos (c) e (d) são conexos. 19
- Figura 4.1 Gráficos do potencial clássico  $V(\phi) = \frac{e}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} g \phi^4$  para diferentes parâmetros. Em (a)  $e = 1$  e  $g = 0$ , em (b)  $e = -1$ ,  $g > 0$  e  $a = \sqrt{6m^2/g}$ . 34
- Figura 6.1 Vértices do modelo Wess-Zumino, obtidos da ação de interação  $S'^{(3)} + S'^{(4)}$  e o vértice de zero pernas obtido de  $S'^{(0)}$ . 43
- Figura 6.2 Propagadores do modelo Wess-Zumino obtidos da parte quadrática da ação  $S'^{(2)}$ . 44
- Figura 6.3 *Tadpoles* que contribuem para o potencial efetivo do modelo Wess-Zumino em 1-laço. Os números abaixo dos gráficos são os fatores de simetria com um sinal devido a laços fermiônicos. 45
- Figura 6.4 Bolhas de vácuo que contribuem para o potencial efetivo do modelo Wess-Zumino em 2-laços. Os números abaixo dos gráficos são os fatores de simetria com um sinal devido a laços fermiônicos. 47
- Figura 7.1 Vértices no formalismo de supercampos do modelo Wess-Zumino, obtidos da ação de interação  $S'_i$  e o vértice de zero pernas obtido de  $S'^{(0)}$ . 52
- Figura 7.2 *Tadpole* que contribui para o potencial efetivo do modelo Wess-Zumino em 1-laço no formalismo de supercampos. O número abaixo do gráfico é o fator de simetria. 55
- Figura 7.3 Bolhas de vácuo que contribuem para o potencial efetivo do modelo Wess-Zumino em 2-laços no formalismo de supercampos. Os números abaixo dos gráficos são os fatores de simetria. 57



## NOMENCLATURA E CONVENÇÕES

---

$C_{\alpha\beta}$  símbolo anti-simétrico utilizado para subir e descer índices espaciais em 3-dimensões. Definido como  $C_{\alpha\beta} \equiv -C_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ .

**VECTORES EUCLIDIANOS** vetores  $\bar{x}$  em que a norma é dada por  $\bar{x}^2 = \sum_i x_i^2$ , ou seja a métrica é Euclidiana,  $\bar{g} \equiv (+, +, \dots)$ . Ver também rotação de Wick..

$g_{\mu\nu}$  métrica do espaço-tempo. Em 3-dimensões  $g_{\mu\nu} \equiv (-, +, +)$  em 4-dimensões  $g_{\mu\nu} \equiv (-, +, +, +)$ .

$\Gamma(z)$  função  $\Gamma$ ,  $\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}$ .

$p$  quadrivetor  $p^\mu$ ,  $p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3)$ .

$\mathbf{p}$  trivetor  $p^i$  associado a  $p^\mu$ ,  $p^\mu = (p^0, \mathbf{p}^i)$ .

$p$  norma do quadrivetor  $p^\mu$ ,  $p = \sqrt{p^\mu p_\mu}$ .

$|\mathbf{p}|$  norma do trivetor  $p^i$ ,  $|\mathbf{p}| = \sqrt{p^i p_i}$ .

**ROTAÇÃO DE WICK** transformação que leva uma expressão no espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano. Leva  $t \rightarrow it$ , o que implica em  $x^2 \rightarrow \bar{x}^2$ ,  $p^2 \rightarrow \bar{p}^2$ ,  $d^d x \rightarrow i d^d \bar{x}$  e  $d^d p \rightarrow -i d^d \bar{p}$ . Ver também vetores Euclidianos.



## PREFÁCIO

---

Esse trabalho teve origem durante o meu mestrado no Instituto de Física da Universidade de São Paulo no Departamento de Física Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Adilson José da Silva. Esse trabalho foi entregue como parte das obrigações para obtenção do título de mestre.

Nesse trabalho espero apresentar algumas das ideias usadas no estudo de quebra de supersimetria em  $2 + 1$ -dimensões. Espero fazer isso de forma a incluir os elementos básicos para o cálculo do potencial efetivo, objeto de grande importância no estudo de quebra de supersimetria.

Muitas das escolhas de técnicas e métodos aqui apresentados foram escolhidas nem sempre pelo fato de serem a escolha canônica, em alguns casos foram escolhida por não ser. A razão disso é que acredito que muitas técnicas acabam-se perdendo em meio a vasta literatura de teoria de campos, nem sempre por ter desvantagens inerentes mas apenas por falta de exploração ou conhecimento da existência dessas técnicas. Claro que técnicas consagradas pelo tempo não chegam a esse ponto por mera coincidência.

Sempre que possível tentei aplicar e usar técnicas diferentes, muitas vezes apenas para entender o porque das usuais serem preferidas.

## CONVENÇÕES TIPOGRÁFICAS

As margens deste texto são utilizadas para facilitar, ou melhor, evitar a navegação errante na leitura do texto.

Sempre que uma referência bibliográfica é citada pela primeira vez em um capítulo ela aparece ao lado, na margem. Assim é possível saber o título e assunto da citação evitando o “ir e voltar” ao fim do texto. Porém, como usual, ao final do texto se encontram todas as referências reunidas para consulta.

Da mesma forma equações referenciadas no texto são repetidas nas margens, as vezes de forma abreviada. Elas são diferenciadas das equações da parte principal pelo uso de [] em torno do número das equações.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao Prof. Adilson José da Silva, não apenas pela orientação acadêmica, mas pela orientação nos momentos difíceis, pelo companheirismo e a grande compreensão que teve durante esse anos.

Meus pais, Julia e Luiz, por terem me ensinado o valor do estudo e a dedicação infinita que tiveram em garantir que eu pudesse seguir o caminho que escolhi.

Aos amigos que conheci no Instituto de Física, gostaria de agradecer pela amizade e pelos ótimos momentos que compartilhamos. Gostaria de agradecer em particular a Teresa Azevedo Sollero por estar ao meu lado nos momentos mais difíceis.

A CNPq agradeço pelo auxílio financeiro durante o mestrado, que foi de grande importância para que pudesse me dedicar integralmente a esse trabalho.

Kazuo Teramoto  
São Paulo, Fevereiro de 2012



## INTRODUÇÃO

Supersimetria é o nome de uma simetria do espaço-tempo que não está incluída na usual simetria de Poincaré da relatividade restrita de Einstein. Porém até hoje a supersimetria nunca foi observada experimentalmente.

Porque, então, ainda hoje — 40 anos após a sua descoberta teórica — os físicos estudam uma teoria com tão poucas, ou nenhuma, evidência experimental? A razão pode estar nas seguintes palavras de E. Witten, em Kane e Shifman (2001).

[...] Supersimetria, se existir na natureza, é parte da estrutura quântica do espaço e tempo. Na vida cotidiana, nós medimos espaço e tempo utilizando números, “agora é três horas, a elevação é duas centenas de metros acima do nível do mar,” e assim por diante. Número são conceitos clássicos, conhecidos pelos seres humanos desde muito antes do desenvolvimento da Mecânica Quântica no começo do século vinte. O descobrimento da Mecânica Quântica mudou nosso entendimento de quase tudo na Física, mas a maneira básica de pensar sobre o espaço e o tempo não foi afetada.

Mostrar que a natureza é supersimétrica iria mudar isso, revelando uma dimensão quântica do espaço e tempo, não mensurável por números ordinários. [...]

Uma das razões para estudar supersimetria está no fato dela ser uma solução para muito dos problemas encontrados no desenvolvimento teórico do Modelo Padrão, como o problema da *hierarquia de calibre* (Martin 1997).

Uma outra razão, caprichosa talvez mas muito forte, está simplesmente no fato da supersimetria ser uma bela e elegante teoria, uma extensão de um dos conceitos mais básicos na Física: o de *espaço e tempo*. Para muitos isso seria o suficiente para dedicar anos de estudo.

Do ponto de vista das Teorias Quânticas de Campos, a supersimetria permite descrever teorias que tem um comportamento mais controlado, com um número menor de divergências UV (Grisaru e Siegel 1982).

Porém com todas essas boas e desejáveis características é necessário que a supersimetria esteja quebrada nas ordens de grandeza energéticas habituais.

Isso vem do fato de que em uma teoria supersimétrica cada partícula tem um *companheiro supersimétrico*. Esse companheiro deve ter estatística oposta mas mesma massa, cada boson da teoria tem um fermion companheiro, um elétron teria um *selétron* de *spin* 0 associado a ele.

Kane, Gordon L., e Mikhail A. Shifman. 2001. *The supersymmetric world*. World Scientific. ISBN: 978-98-1024-539-9.

Martin, Stephen P. 1997. A supersymmetry primer:1–128.

Grisaru, Marcus T., e W. Siegel. 1982. Supergravity. 2. manifestly covariant rules and higher loop finiteness. *Nuclear Physics B* 201:292–314.

Esses parceiros nunca foram observados experimentalmente, assim é necessário que a supersimetria seja quebrada de forma que a massa dos companheiros supersimétricos possa ser diferente o que justificaria a sua não observação.

Essa solução cria então dois problemas, (1) como formular uma teoria onde ocorra quebra de simetria e (2) observar esses companheiros em experimentos de energia mais alta do que está disponível atualmente.

A primeira dificuldade — na formulação de teorias quânticas supersimétricas que tenham quebra de supersimetria — tem se mostrado uma tarefa muito complicada. Esse fato foi descrito por Witten (1982) que mostrou que a possibilidade de existir quebra dinâmica de supersimetria está excluída de uma classe muito grande de teorias interessantes.

A situação pode ser um pouco melhor em  $2 + 1$ -dimensões, Witten (1981) inclusive descreve um modelo em  $2 + 1$ -dimensões onde a quebra de supersimetria ocorre.

Nesse trabalho o foco será nessa possibilidade de ocorrer quebra de supersimetria em  $2 + 1$ -dimensões para uma classe maior de modelos. A esperança é estudar as características que levam a essa quebra para tentar entender o mecanismo da quebra de supersimetria.

O trabalho está dividido em duas partes. Na primeira parte foi estudado teoria quântica supersimétrica, tanto no formalismo de supercampos onde a supersimetria é explicitamente manifesta, quanto no formalismo de componentes onde a supersimetria está “escondida” nas relações entre os campos que descrevem a teoria. Depois é estudado o cálculo do potencial efetivo que tem um papel importante no estudo da quebra de simetria, já que o parâmetro de quebra está relacionado aos mínimos do potencial efetivo.

Na segunda parte essas ferramentas são aplicadas num modelo simples em  $2 + 1$ -dimensões, o modelo Wess-Zumino. O cálculo é realizado até a aproximação de 2-laços.

A motivação de ir até a aproximação de 2-laços está no fato de que em  $2 + 1$ -dimensões muitos modelos apenas apresentam quebra dinâmica de simetria a partir dessa ordem (Tan, Tekin e Hosotani 1996; 1997; Dias, Gomes e da Silva 2004).

A segunda dificuldade, a de observação experimental, não será tratado nesse trabalho. A observação depende de aspectos fenomenológicos, como na formulação de uma extensão supersimétrica para o modelo padrão, para uma boa revisão ver o texto de Martin (1997).

Witten, Edward. 1982. Constraints on supersymmetry breaking. *Nuclear Physics B* 202:253–316.

Witten, Edward. 1981. Dynamical breaking of supersymmetry. *Nuclear Physics B* 188:513–554.

Tan, Pang-Ning, B. Tekin e Y. Hosotani. 1996. Spontaneous symmetry breaking at two loop in 3-d massless scalar electrodynamics. *Physics Letters B* 388:611–620.

Tan, Pang-Ning, B. Tekin e Y. Hosotani. 1997. Maxwell-Chern-Simons scalar electrodynamics at two loops. *Nuclear Physics B* 502:483–515.

Dias, Alex G., M. Gomes e A. J. da Silva. 2004. Dynamical breakdown of symmetry in  $(2 + 1)$  dimensional model containing the Chern-Simons field. *Physical Review D* 69:065011.

Parte I

SUPERSIMETRIA E O POTENCIAL EFETIVO



## SUPERSIMETRIA

## 2.1 GRUPOS E ÁLGBRAS

Dois objetos de grande interesse são os *grupos de Lie* e as *álgebras de Lie*. Eles serão utilizados para representar vários objetos importantes no estudo de supersimetria. Assim iremos rapidamente definir esses objetos e listar alguma propriedades que serão uteis.

Um *grupo*  $G$  é definido como sendo um conjunto  $\mathcal{G}$  equipado com uma operação binária  $\circ : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  com as seguintes propriedades para  $a, b, c \in \mathcal{G}$

$$a \circ b \in \mathcal{G} \quad (\text{fechada 2.1a})$$

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad (\text{distributiva 2.1b})$$

$$\exists e \in \mathcal{G} : a \circ e = a \quad (\text{identidade 2.1c})$$

$$\exists a^{-1} \in \mathcal{G} : a \circ a^{-1} = e \quad (\text{inversa 2.1d})$$

Uma *álgebra de Lie*  $\mathfrak{v}$  é definida como sendo um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  sobre um corpo  $F$  equipado com uma operação binária  $*$  :  $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  com as seguintes propriedades para  $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{V}$

$$v_1 * v_2 \in \mathcal{V} \quad (\text{fechada 2.2a})$$

$$v_1 * (v_2 + v_3) = v_1 * v_2 + v_1 * v_3 \quad (\text{linearidade 2.2b})$$

$$v_1 * v_2 = -v_2 * v_1 \quad (\text{antisimetria 2.2c})$$

$$v_1 * (v_2 * v_3) + v_2 * (v_3 * v_1) + v_3 * (v_1 * v_2) = 0 \quad (\text{Jacobi 2.2d})$$

Um exemplo é o espaço vetorial de matrizes  $n \times n$  com a operação  $*$  definida por

$$a * b \equiv [a, b] = ab - ba, \quad (2.3)$$

essa álgebra é chamada de  $\mathfrak{gl}(n)$ .

Outro exemplo é  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  que é definido pelo produto acima aplicado ao espaço vetorial de matrizes reais,  $2 \times 2$  e com traço nulo.

Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{v}$  permite definir um grupo  $V$  onde os elementos  $\Lambda(t)$  são definidos por exponenciação

$$\Lambda(t) = e^{ta}, \quad (2.4)$$

onde  $t \in F$  é um parâmetro e  $a \in \mathfrak{v}$ . Esses grupos são chamados de *grupos de Lie*. Chamamos  $a$  de geradores do grupo  $V$ . Essa definição induz a seguinte operação binária  $\circ$ , onde  $\Lambda_1(t_1), \Lambda_2(t_2) \in V$

$$\Lambda_1(t_1) \circ \Lambda_2(t_2) = e^{t_1 a_1} \circ e^{t_2 a_2} = e^{t_1 a_1 + t_2 a_2 + \frac{1}{2} t_1 a_1 * t_2 a_2 + \dots}. \quad (2.5)$$

## 2.1.1 Grupo de Lorentz e Poincaré

Um exemplo muito importante de grupo de Lie é o grupo de Lorentz.

Em 3 + 1-dimensões ele é obtido quando tomamos  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \otimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  como álgebra de Lie. Em 2 + 1-dimensões ele é obtido quando tomamos a álgebra como sendo  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ .

Em ambos os casos podemos escrever um conjunto de geradores  $M_{\mu\nu}$  e parâmetros  $\omega^{\mu\nu}$ , com  $\mu, \nu = 1, \dots, d$  ( $d = 3$  ou  $d = 4$ ). Os elementos do grupo de Lorentz são dados pela expressão

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \left[ e^{-\frac{i}{2} \omega^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}} \right]^{\mu}_{\nu}. \quad (2.6)$$

É possível mostrar — ver por exemplo (Sextl e Urbantke 2000) — que os geradores  $M_{\mu\nu}$  devem satisfazer a seguinte identidade

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}). \quad (2.7)$$

Adicionando translações às transformações descritas pelo grupo de Lorentz, realizadas pelo gerador  $P_{\mu}$  pelo seguinte

$$x^{\mu} \xrightarrow{P_{\mu}} x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \quad (2.8)$$

onde  $a^{\mu}$  é o parâmetro constante da translação, temos um novo grupo. Esse grupo é chamado de grupo de Poincaré.

O geradores do grupo de Poincaré,  $P_{\mu}$ , juntamente com os geradores do grupo de Lorentz,  $M_{\mu\nu}$ , satisfazem a seguinte álgebra

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0 \quad (2.9a)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_{\rho}] = i(g_{\nu\rho} P_{\mu} - g_{\mu\rho} P_{\nu}) \quad (2.9b)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}). \quad (2.9c)$$

## 2.1.2 Grupos de simetria interna

O grupo de Lorentz e Poincaré descrevem simetrias inerentes ao espaço-tempo utilizado para descrever a teoria. Essas simetrias operam fundamentalmente nas coordenadas do espaço tempo  $x_{\mu}$ . Objetos que são funções de  $x_{\mu}$  se transformam de forma a preservar a invariância em consequência da transformações de coordenadas. Outros objetos, como vetores, são definidos em torno das simetrias do espaço-tempo.

Outra classe de simetria está relacionada as simetrias internas. Essas simetrias operam fundamentalmente nos campos utilizados para descrever a teoria.

Como exemplo, considere a ação clássica de  $n$ -campos  $\{\phi_n\}$ , descrita por

$$S[\phi] = \int d^3x \left[ -\frac{1}{2} \partial^{\mu} \phi_n(x) \partial_{\mu} \phi_n(x) - m^2 \phi_n(x) \phi_n(x) \right]. \quad (2.10)$$

Os campos  $\phi$  podem ser considerados como formando um vetor  $n$ -dimensional. Nesse caso a ação descrita acima é invariante sob rotações nesse espaço  $n$ -dimensional e dizemos que a teoria tem uma simetria interna de rotação.

### 2.1.3 Álgebra de Lie graduadas

Uma extensão da álgebra de Lie são as *álgebras de Lie graduadas* que são álgebras com uma *estrutura de graduação*, que decompõe o espaço vetorial em uma soma direta de subespaços.

A álgebra supersimétrica é um caso particular das álgebras de Lie graduadas, elas são álgebras  $Z_2$ -graduadas. Uma álgebra  $Z_2$ -graduada consiste na soma direta de dois espaços vetoriais  $\mathcal{V}_0$  e  $\mathcal{V}_1$

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{V}_1 \quad (2.11)$$

juntamente com um produto  $*$ :  $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  com as seguintes propriedades para  $v_i \in \mathcal{V}_i$  e  $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{V}$

$$v_i * v_j \in \mathcal{V}_{i+j \bmod 2} \quad (\text{graduação 2.12a})$$

$$v_1 * (v_2 + v_3) = v_1 * v_2 + v_1 * v_3 \quad (\text{linearidade 2.12b})$$

$$v_i * v_j = -(-1)^{ij} v_j * v_i \quad (\text{supersimetria 2.12c})$$

$$v_i * (v_j * v_k)(-1)^{ik} + v_j * (v_k * v_i)(-1)^{ji} + v_k * (v_i * v_j)(-1)^{kj} = 0 \quad (\text{Jacobi 2.12d})$$

Como exemplo, considere dois espaços vetoriais  $\mathcal{X} = \langle X_\mu \rangle$  e  $\mathcal{Q} = \langle Q_\alpha \rangle$ , seja  $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Q}$  e considere o seguinte produto  $*$ :  $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  para elementos  $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$

$$v_1 * v_2 \equiv v_1 v_2 - (-1)^{g(v_1)g(v_2)} v_2 v_1 \quad (2.13)$$

onde  $g(v) = 0$  se  $v \in \mathcal{X}$  e  $g(v) = 1$  se  $v \in \mathcal{Q}$ .

O espaço vetorial  $\mathcal{V}$  com o produto definido acima formam uma álgebra de Lie graduada. Em particular se  $x_\mu, x_\nu \in \mathcal{X}$  e  $q_\alpha, q_\beta \in \mathcal{Q}$  temos que

$$\bullet \quad * : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

$$x_\mu * x_\nu = x_\mu x_\nu - x_\nu x_\mu = [x_\mu, x_\nu] \quad (2.14)$$

$$\bullet \quad * : \mathcal{X} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$$

$$x_\mu * q_\alpha = x_\mu q_\alpha - q_\alpha x_\mu = [x_\mu, q_\alpha] \quad (2.15)$$

$$\bullet \quad * : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{X}$$

$$q_\alpha * q_\beta = q_\alpha q_\beta + q_\beta q_\alpha = \{q_\alpha, q_\beta\} \quad (2.16)$$

Note que a subálgebra de  $x \in \mathcal{X}$  é uma álgebra de Lie

## 2.2 SUPERSIMETRIA

Supersimetria nasceu de uma impossibilidade. Durante a década de 60 muitos físicos tentaram obter um grupo de Lie que contivesse o grupo de Poincaré como subgrupo e que não fosse simplesmente um produto direto do grupo de Poincaré e os grupos de simetria interna.

A impossibilidade da existência desse grupo foi mostrada por Coleman e Mandula (1967). Coleman e Mandula mostraram que se um grupo de Lie contiver o grupo de Poincaré como subgrupo ele dever ser localmente isomorfo ao produto direto do grupo de Poincaré e de grupos de simetria interna, ou seja uma extensão trivial.

O *teorema de Coleman-Mandula* assume que o grupo de simetria seja um grupo de Lie. Grupos de Lie graduados não estão incluídos nas hipóteses de Coleman e Mandula, assim pode ser possível uma extensão não trivial já que uma álgebra de Lie graduada contém uma subálgebra de Lie não trivial. Realmente como Volkov e Akulov (1972), Golfand e Likhtman (1971) e Wess e Zumino (1974) mostraram é possível escrever um grupo com comutadores e anti-comutadores o que contém o grupo de Poincaré como subgrupo de forma não trivial.

Haag, Łopuszański e Sohnius (1975) provaram uma versão generalizada do teorema de Coleman-Mandula, mostrando que a álgebra supersimétrica é a única extensão não trivial do grupo de Poincaré.

## 2.2.1 Álgebra supersimétrica

A *álgebra supersimétrica* é definida como uma álgebra de Lie  $Z_2$ -graduada, onde o espaço vetorial  $\mathcal{V}_1$  é o espaço vetorial de Poincaré  $\mathcal{P} = \langle P_{\mu'}, M_{\mu\nu} \rangle$  e o espaço vetorial  $\mathcal{V}_2$ , em 2 + 1-dimensões é  $\mathcal{V}_2 = \mathcal{Q} = \langle Q_{\alpha} \rangle$ ,  $\alpha = 1, 2$  (em 3 + 1-dimensões  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ).

As constantes de estrutura da álgebra podem ser obtidas por inspeção das condições de compatibilidade que fixam muitos dos parâmetros disponíveis.

Como  $*$  :  $\mathcal{P} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$  temos que ter

$$[P_{\mu'}, Q_{\alpha}] \equiv \lambda_{\mu\alpha}{}^{\beta} Q_{\beta}, \quad (2.17a)$$

$$[M_{\mu\nu'}, Q_{\alpha}] \equiv \sigma_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} Q_{\beta}. \quad (2.17b)$$

Contudo a seguinte identidade de Jacobi

$$[P_{\mu'}, [P_{\nu'}, Q_{\alpha}]] + [P_{\nu'}, [Q_{\alpha'}, P_{\mu}]] + [Q_{\alpha'}, [P_{\mu'}, P_{\nu}]] = 0 \quad (2.18)$$

força que  $\lambda \equiv 0$ . Essa outra identidade de Jacobi

$$[M_{\mu\nu'}, [M_{\rho\sigma'}, Q_{\alpha}]] + [M_{\rho\sigma'}, [Q_{\alpha'}, M_{\mu\nu}]] + [Q_{\alpha'}, [M_{\mu\nu'}, M_{\rho\sigma}]] = 0 \quad (2.19)$$

força que  $\sigma$  satisfaça

$$[\sigma_{\mu\nu'}, \sigma_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho}\sigma_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}\sigma_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}\sigma_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}\sigma_{\mu\rho}). \quad (2.20)$$

Coleman, Sidney, e Jeffrey Mandula. 1967. All possible symmetries of the  $S$  matrix. *Physical Review* 159:1251–1256.

Volkov, D. V., e V. P. Akulov. 1972. Possible universal neutrino interaction. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* 16:438–440—. 1973. Is the neutrino a goldstone particle? *Physics Letters B* 46:109–110.

Golfand, Yu. A., e E. P. Likhtman. 1971. Extension of the algebra of Poincare group generators and violation of  $p$  invariance. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* 13:323–326.

Wess, J., e B. Zumino. 1974. Super-gauge transformations in four dimensions. *Nuclear Physics B* 70:39–50.

Haag, Rudolf, Jan T. Łopuszański e Martin Sohnius. 1975. All possible generators of supersymmetries of the  $S$ -matrix. *Nuclear Physics B* 88:257–274.



As matrizes  $\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]$  satisfazem essa relação e serão utilizadas.

Como  $*$  :  $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$  temos que ter

$$\{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\} \equiv h^{\mu}_{\alpha\beta} P_{\mu} + k^{\mu\nu}_{\alpha\beta} M_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

usando duas identidades de Jacobi

$$\{Q_{\alpha} [Q_{\beta}, P_{\mu}]\} + \{Q_{\beta} [P_{\mu}, Q_{\alpha}]\} - [P_{\mu} \{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\}] = 0, \quad (2.22a)$$

$$\{Q_{\alpha} [Q_{\beta}, M_{\mu\nu}]\} + \{Q_{\beta} [M_{\mu\nu}, Q_{\alpha}]\} - [M_{\mu\nu} \{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\}] = 0, \quad (2.22b)$$

somos forçados a tomar  $k = 0$  e  $h^{\mu}_{\alpha\beta} = c \gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$  onde  $c$  é uma constante de normalização para os  $Q_{\alpha}$  que vamos tomar como sendo  $c = 2$ .

Assim, em resumo, a álgebra supersimétrica é descrita pelo seguinte

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0 \quad (2.23a)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_{\rho}] = i(g_{\nu\rho} P_{\mu} - g_{\mu\rho} P_{\nu}) \quad (2.23b)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}) \quad (2.23c)$$

$$[P_{\mu}, Q_{\alpha}] = 0, \quad (2.23d)$$

$$[M_{\mu\nu}, Q_{\alpha}] = \sigma_{\mu\nu\alpha}^{\beta} Q_{\beta} \quad (2.23e)$$

$$\{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\} = 2 \gamma^{\mu}_{\alpha\beta} P_{\mu}. \quad (2.23f)$$

com  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]$ .

### 2.2.2 Representação da supersimetria: Supercampos

A álgebra obtida na última sessão pode ser representada de uma forma que realiza explicitamente a supersimetria utilizando o *superespaço*. O superespaço é uma extensão do espaço de Minkowsky.

No caso da álgebra de Poincaré, podemos representá-la utilizando *quadrivetores* do espaço de Minkowsky  $x_{\mu}$  de forma que funções desses quadrivetores realizam a simetria de Poincaré. Para o caso supersimétricos funções, chamados de *supercampos*, das coordenadas do superespaço realizam a supersimetria.

As ideias de superespaço foram introduzidas por Salam e Strathdee (1975). As convenções e notações que utilizamos são descritas em mais detalhes em Gates et al. (1983).

Para criar um espaço que explicitamente manifesta a supersimetria precisamos expandir o espaço usual de Minkowsky  $x_{\mu}$  e introduzir um par de coordenadas anti-comutantes  $\theta_{\alpha}$ , para  $\alpha = 1, 2$ , que são *números de Grassman*. O superespaço, então, é definido pelo conjunto de coordenadas  $\{x_{\mu}, \theta_{\alpha}\}$

Um número de Grassman,  $\theta$ , é definido de forma que

$$\{\theta, \theta\} = 0 \quad (2.24)$$

Salam, Abdus, e J. Strathdee. 1975. Superfields and Fermi-Bose symmetry. *Physical Review D* 11:1521-1535.

Gates, S. J., et al. 1983. Superspace, or one thousand and one lessons in supersymmetry. *Frontiers of Physics* 58:1-548.

## 2.2.2.1 Notação espinorial

Antes de discutir a extensão supersimétrica do espaço de Minkowsky vamos introduzir algumas notações, convenções e identidades.

Iremos utilizar a notação espinorial para descrever todas as representações, em particular vetores  $x_\mu$  serão descritos por tensores  $x_{\alpha\beta}$  definido na seguinte relação

$$x^\alpha{}_\beta = \gamma^\mu{}_\beta x_\mu \quad (2.25)$$

onde  $\gamma_\mu$  são as matrizes  $\gamma$  de Dirac.

Os índices espinorias podem ser escritos de forma covariante e contravariante, essa duas forma são relacionadas por

$$\psi^\alpha = C^{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad (2.26)$$

onde  $C^{\alpha\beta}$  é definido, na nossa convenção, por

$$C^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

$C^{\alpha\beta}$  satisfaz também a seguinte identidade

$$C_{\alpha\beta} C^{\gamma\delta} = \delta_\alpha{}^\gamma \delta_\beta{}^\delta - \delta_\beta{}^\gamma \delta_\alpha{}^\delta. \quad (2.28)$$

$C^{\alpha\beta}$  é uma matriz anti-simétrica e os espinores anti-comutam, o que implica as seguinte relações

$$\psi^\alpha \chi_\alpha = -\chi_\alpha \psi^\alpha = -\psi_\alpha \chi^\alpha. \quad (2.29)$$

O quadrado de um espinor é definido por

$$\psi^2 = \frac{1}{2} \psi^\alpha \psi_\alpha. \quad (2.30)$$

Derivadas são definidas de forma que

$$\partial_\mu \theta^\mu \equiv \delta_\mu{}^\nu \quad (2.31)$$

$$\partial_{\mu\nu} \theta^{\rho\sigma} \equiv \frac{1}{2} (\delta_\alpha{}^\gamma \delta_\beta{}^\delta + \delta_\beta{}^\gamma \delta_\alpha{}^\delta) \quad (2.32)$$

Como  $\{\theta, \theta\} = 0$ , funções de números de Grassman tem uma expansão de Taylor finita em potencias de  $\theta$ , explicitamente temos

$$f(\theta) = f(0) + \theta f'(0) \quad (2.33)$$

onde  $f'(0) = \partial f(\theta)/\partial \theta|_{\theta=0}$ .

A integração em  $\theta$  de uma função  $f(\theta)$  é definida por apenas dois parâmetros, já que

$$\int d\theta f(\theta) = \left( \int d\theta 1 \right) f(0) + \left( \int d\theta \theta \right) f'(0). \quad (2.34)$$

Impondo que a integração seja linear e invariante sob translações somos forçados a tomar

$$\int d\theta 1 = 0. \quad (2.35)$$

Normalizamos a integração de forma que

$$\int d\theta \theta = 1. \quad (2.36)$$

Essas definições implicam que

$$\int d^2\theta \theta^2 = -1 \quad (2.37)$$

o que nos leva a definir uma  $\delta$  de Dirac espinorial por

$$\delta^2(\theta) = -\theta^2. \quad (2.38)$$

### 2.2.2.2 Supercampos

Supercampos são funções das coordenadas do superespaço  $\Phi \dots(x, \theta)$ , onde os índices  $\dots$  podem ser índices de grupos de simetria, tanto do espaço-tempo quanto de simetrias internas.

Definimos um supercampo escalar como um campo que não tem nenhum índice de simetria de Lorentz  $\Phi(x, \theta)$ , mas pode ter índices de simetria interna. Lembrando que funções de  $\theta$  tem uma expansão finita em potências de  $\theta$  podemos definir  $\Phi(x, \theta)$  pelas componentes pelos termos da expansão em  $\theta$

$$\Phi(x, \theta) \equiv A(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) - \theta^2 F(x). \quad (2.39)$$

Vemos da definição acima que  $A$  e  $F$  devem ser campos escalares e que  $\psi$  deve ser um campo espinorial.

Outros supercampos podem ser obtidos anexando índices de Lorentz, por exemplo  $\Gamma_\alpha(x, \theta)$  contem como uma de suas componentes um campo vetorial. Esse tipo de supercampo não será utilizado nesse trabalho. Detalhes podem ser encontrados em Gates et al. (1983).

### 2.2.2.3 Representações da álgebra

A álgebra supersimétrica pode ser representada quando agindo sobre supercampos pelos seguintes operadores diferenciais

$$P_{\mu\nu} = i\partial_{\mu\nu} \quad (2.40)$$

$$Q_\mu = i(\partial_\mu - \theta^\nu i\partial_{\nu\mu}) \quad (2.41)$$

Note que  $\partial_{\mu\nu}$  comutam com  $P_{\mu\nu}$  e  $Q_{\mu\nu}$ , assim como  $\Phi(x, \theta)$  é um supercampo também deve ser  $\partial_{\mu\nu}\Phi(x, \theta)$ . O mesmo não ocorre para a derivada espinorial  $\partial_\mu$ , porém o seguinte objeto

$$D_\mu = \partial_\mu + \theta^\nu i\partial_{\nu\mu} \quad (2.42)$$

satisfaz

$$\left[ D_{\mu'}, P_{\rho\sigma} \right] = 0 \quad (2.43)$$

$$\left\{ D_{\mu'}, Q_{\nu} \right\} = 0 \quad (2.44)$$

o que torna  $D_{\mu}$  uma *derivada covariante*. Tomamos também  $D_{\mu\nu} = \partial_{\mu\nu}$  como a derivada covariante da parte bosônica  $x_{\mu\nu}$  do superespaço.

Algumas outras identidades uteis são

$$\partial^{\mu\sigma}\partial_{\nu\sigma} = \delta_{\nu}^{\mu} \partial^2 \quad (2.45)$$

$$D_{\mu} D_{\nu} = i\partial_{\mu\nu} + C_{\nu\mu} D^2 \quad (2.46)$$

$$D^{\nu} D_{\mu} D_{\nu} = 0 \quad (2.47)$$

$$D^2 D_{\mu} = -D_{\mu} D^2 = i\partial_{\mu\nu} D^{\nu} \quad (2.48)$$

$$\left( D^2 \right)^2 = \partial^2 \quad (2.49)$$

A seguintes identidades são uteis no calculo do gráfico que aparecem na determinação do potencial efetivo

$$\delta^2(\theta - \theta') = -(\theta - \theta')^2 = \theta^2 - \theta^{\alpha} \theta'_{\alpha} + \theta'^2, \quad (2.50a)$$

$$\theta^2 \delta^2(\theta - \theta') = -\theta^2 \theta'^2 \quad (2.50b)$$

$$\theta^{\alpha} D_{\alpha} \delta^2(\theta - \theta') = -2\theta^2 + \theta^{\alpha} \theta'_{\alpha} \quad (2.50c)$$

$$D^2 \delta^2(\theta - \theta') = 1 - \theta^2 \theta'^2 k^2 \quad (2.50d)$$

$$\theta^2 D^2 \delta^2(\theta - \theta') = \theta^2 \quad (2.50e)$$

$$k_{\alpha\beta} \theta^{\alpha} D^{\beta} \delta^2(\theta - \theta') = k_{\alpha\beta} \theta^{\alpha} \theta'^{\beta} - k^2 \theta^2 \theta'^2 \quad (2.50f)$$

## O POTENCIAL EFETIVO

Nesse capítulo irei descrever o *gerador das funções de Green*  $Z[J]$ , o *gerador das funções de Green conexas*  $iW[J]$ , a *ação quântica*  $i\Gamma[\phi]$  (também chamada de *ação efetiva*) e o *potencial efetivo*  $V(\phi)$ .

Irei mostrar como partindo da ação clássica  $S[\phi]$  esses objetos são relacionados entre si por transformações, que esquematicamente assumem a seguinte forma:

$$e^{iS[\phi]} \xleftrightarrow{\text{Fourier}} Z[J] \xleftrightarrow{\text{exp/log}} iW[J] \xleftrightarrow{\text{Legendre}} i\Gamma[\phi]. \quad (3.1)$$

As expansões gráficas desses objetos, obtidas por teoria de perturbação, serão estudadas.

A descrição desses objetos será breve, mas referências a trabalhos com tratamentos mais aprofundados serão apresentadas ao longo do texto. O enfoque será nas técnicas utilizadas para calcular o potencial efetivo de forma perturbativa e suas interpretações na teoria quântica de campos.

O desenvolvimento será centrado em  $2 + 1$ -dimensões.

## 3.1 FUNCIONAIS GERADORES E GRÁFICOS DE FEYNMAN

Uma teoria quântica de campos pode ser construída a partir de uma teoria clássica de campos através de um processo de quantização. Em geral podemos partir de uma ação clássica  $S[\phi]$

$$S[\phi_1, \dots, \phi_n] = \int d^3x \mathcal{L}(\phi_1, \dots, \phi_n, \partial\phi_1, \dots, \partial\phi_n) \quad (3.2)$$

onde  $\{\phi_n\}$  é um conjunto de campos (usaremos  $\phi$  para descrever o conjunto  $\{\phi_n\}$ , quando o contexto tornar a expressão clara), que podem ser bosônicos ou fermiônicos e  $\mathcal{L}(\phi)$  é a função Lagrangiana que define a teoria clássica.  $S[\phi]$  é um funcional dos campos  $\phi$ .

Partindo da ação clássica, eq. (3.2), um processo de quantização permite que se descreva os efeitos quânticos da teoria quando tomamos os campos  $\phi$  como distribuições quânticas. Note que a ação da eq. (3.2) não inclui em totalidade os efeitos quânticos, mas apenas a aproximação “clássica” da teoria quântica — formalmente no limite em que  $\hbar \rightarrow 0$ .

Infelizmente teorias quânticas de campos são em geral deveras complicadas e métodos exatos para se calcular todos os efeitos quânticos estão disponíveis apenas para uma classe muito pequena de teorias — em geral em dimensões mais baixas. Uma forma de se atacar o problema é com o auxílio de *teoria de perturbação*.

Feynman, R. P. 1948. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics* 20:367–387.

Schwinger, Julian S. 1951. On the Green's functions of quantized fields.

1. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 37:452–455—. 1951.

On the Green's functions of quantized fields. 2. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 37:455–459.

Peskin, Michael E., e Daniel V. Schroeder. 1995. *An introduction to quantum field theory*. Westview Press. ISBN: 978-02-0150-397-5.

Ramond, Pierre. 2001. *Field theory: a modern primer*. 2° ed. Westview Press. ISBN: 978-02-0130-450-3.

Srednicki, Mark. 2007. *Quantum field theory*. Cambridge University Press. ISBN: 978-05-2186-449-7.

Para calcular as contribuições quânticas, precisamos descrever o processo de quantizar uma teoria. Uma forma de realizar essa quantização é através do formalismo de *integrais de trajetória* criado por Feynman (1948) e o *princípio da ação quântica* introduzido por Schwinger (1951).

Pode-se encontrar uma descrição detalhada do formalismo de quantização por integrais de trajetória em muito livros, e.g., (Peskin e Schroeder 1995), (Ramond 2001) e (Srednicki 2007).

O ponto de principal interesse no formalismo de quantização por integrais de trajetória é a definição do *funcional gerador das funções de Green* ou *função de partição*  $Z[J]$ .

Podemos motivar a definição de  $Z[J]$  pelo objeto análogo em mecânica estatística. Suponha um sistema com possíveis microestados  $s = 1, 2, 3, \dots$ , quando o sistema se encontra no estado  $i \in \{s\}$  ele tem energia  $E_i$  e a probabilidade do sistema estar no estado  $i$  é dada por

$$P(i) \propto e^{-\beta E_i}, \quad (3.3)$$

onde  $\beta = 1/T$  e  $T$  é a temperatura do sistema.

É necessário normalizar a probabilidade  $P(i)$  para isso definimos  $Z$  por

$$Z = \sum_s e^{-\beta E_s}, \quad (3.4)$$

com isso temos probabilidades normalizadas

$$P(i) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}. \quad (3.5)$$

Tomando  $x(s)$  e  $j(s)$  funções arbitrárias de  $s$  porém de forma que o acoplamento linear  $x(s) \cdot j(s)$  tenha unidade de energia e modificando  $Z$  pelo seguinte, definindo um funcional de  $j(s)$ ,  $Z[j]$  por

$$Z[j] = \sum_s e^{-\beta[E(s)+x(s)\cdot j(s)]}. \quad (3.6)$$

Podemos ver que  $Z[j]$  tem uma propriedade interessante. Para observar isso calculemos, derivadas funcionais de  $Z[j]$ , por exemplo a primeira se escreve como

$$\frac{\delta}{\delta j} Z[j] = -\beta \sum_s x(s) e^{-\beta[E(s)+x(s)\cdot j(s)]}, \quad (3.7)$$

isso permite escrever

$$-\frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta j} Z[j] \Big|_{j=0} = \sum_s x(s) e^{-\beta E(s)}. \quad (3.8)$$

O lado direito dessa expressão nada mais é do que o valor médio de  $x$ ,  $\langle x \rangle$ . Assim

$$-\frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta j} Z[j] \Big|_{j=0} = \langle x \rangle. \quad (3.9)$$

Podemos redefinir as probabilidades  $P(s)$ , sem perda de generalidade, de forma que  $Z \equiv 1$  ou equivalentemente  $Z[j = 0] \equiv 1$ .

Em mecânica quântica podemos reconhecer o objeto que funciona como  $Z$ . Esse deve ser tal que

$$Z \equiv \langle 0|0 \rangle \equiv 1, \quad (3.10)$$

e descreve a amplitude de transição vácuo-vácuo. Não tão direto é definir a soma  $\sum_s$  e as expressões que definem  $P(s)$ . Feynman e Schwinger mostraram que podemos fazer isso de forma consistente, obtendo os mesmos resultado que as outras formas de quantização conhecidas se tomarmos  $P[\phi]$ , a probabilidade de uma trajetória  $\phi$  como

$$P[\phi] \propto e^{iS[\phi]} \quad (3.11)$$

onde  $S[\phi]$  é a ação clássica do sistema que percorre uma trajetória descrita por  $\phi$ . A soma deve ser dada por uma integral sobre todas as possíveis trajetórias  $\phi$ , uma *integração funcional*.

Assim na presença de um conjunto de fontes externas  $\{J_n(x)\}$  consideramos a seguinte definição para  $Z[J]$  para uma teoria que descreve um conjunto de campos  $\phi$

$$Z[J] \equiv \langle 0|0 \rangle_J = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi] + i \int d^3x J_n(x)\phi_n(x)}, \quad (3.12)$$

onde  $\mathcal{D}\phi \propto \mathcal{D}\phi_1 \dots \mathcal{D}\phi_n$  é a integração funcional dos campos  $\{\phi_n\}$  e  $\langle 0|0 \rangle_J$  é a amplitude de transição vácuo-vácuo na presença da fonte externa  $J$ . A definição completa do significado de  $\mathcal{D}\phi$  pode ser encontrada em, por exemplo, (Feynman e Hibbs 1965).

A expressão da eq. (3.12) nos leva a fazer com que  $Z[J]$  seja normalizado por  $Z[J = 0] \equiv 1$ .

Note que se definimos a transformada de Fourier de um funcional  $f[\phi]$  por

$$\tilde{f}[J] = \int \mathcal{D}\phi f[\phi] e^{i\phi \cdot J} \quad (3.13)$$

então  $Z[J]$  é a transformada de Fourier de  $P[\phi]$  definido pela eq. (3.11).

### 3.1.1 O propagador livre de Feynman

A ação  $S[\phi]$  pode ser dividida em duas partes: uma parte livre  $S_0[\phi]$  que definimos como

$$\begin{aligned} S_0[\phi] &= \int d^3x \mathcal{L}_0(\phi(x)) \\ &= \int d^3x \left[ -\frac{1}{2} \partial^\mu \phi_n(x) \partial_\mu \phi_n(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi_n(x) \phi_n(x) \right] \end{aligned} \quad (3.14a)$$

e uma parte de interação  $S_i[\phi]$ , composta de monômios de ordem maior que 2 nos campos, definida de forma que

$$S = S_0 + S_i \quad (3.14b)$$

Feynman, Richard P., e A. R. Hibbs. 1965. *Quantum mechanics and path integrals*. McGraw-Hill. ISBN: 978-00-7020-650-2.

seja verdade como escrito.

Note que  $S_0[\phi]$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} S_0[\phi] &= - \int d^3 x \left[ -\frac{1}{2} \phi_n(x) \partial^2 \phi_n(x) + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) \right] \\ &= - \int d^3 x \frac{1}{2} \phi_n(-\partial^2 + m^2) \phi_n = - \int d^3 x \frac{1}{2} \phi_n(x) D_{\text{KG};x} \phi_n(x), \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde  $D_{\text{KG};x}$  é o operador de Klein-Gordon da teoria livre

$$D_{\text{KG};x} = -\partial_x^2 + m^2. \quad (3.16)$$

Definimos  $Z_0[J]$  como sendo o funcional gerador da teoria livre, i.e., quando  $S_i = 0$ .  $Z_0[J]$  pode ser calculado explicitamente, para isso primeiro introduzimos a transformada de Fourier de  $\phi$  pelo seguinte par de equações

$$\tilde{\phi}(k) \equiv \int d^3 x e^{-ikx} \phi(x), \quad (3.17a)$$

$$\phi(x) \equiv \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ikx} \tilde{\phi}(k). \quad (3.17b)$$

A ação  $S_0[\phi]$  então pode ser escrita utilizando  $\tilde{\phi}$

$$S_0[\phi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ -\tilde{\phi}(k) (k^2 + m^2) \tilde{\phi}(-k) \right] \quad (3.18)$$

e o termo  $J \cdot \phi$  da seguinte forma

$$\int d^3 x J(x) \phi(x) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \tilde{J}(k) \tilde{\phi}(-k) + \tilde{J}(-k) \tilde{\phi}(k) \right]. \quad (3.19)$$

Fazendo uma mudança de variáveis na integração funcional da eq. (3.12) na página anterior e definimos que

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{iS+iJ \cdot \phi} \quad [3.12] \quad \tilde{\xi}(k) \equiv \tilde{\phi}(k) - \frac{\tilde{J}(k)}{k^2 + m^2}. \quad (3.20)$$

Como  $\tilde{J}/(k^2 + m^2)$  é uma constante para a integração funcional em  $\phi$  a medida se transforma de forma trivial, i.e.,  $\mathcal{D}\phi = \mathcal{D}\xi$  e o termo que aparece no funcional gerador assume a seguinte forma:

$$S_0[\phi] + J \cdot \phi = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{\tilde{J}(k) \tilde{J}(-k)}{k^2 + m^2} - \tilde{\xi}(k) (k^2 + m^2) \tilde{\xi}(-k) \right]. \quad (3.21)$$

Usando esse resultado na definição do funcional gerador  $Z_0[J]$  temos que

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \exp \left[ \frac{i}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{J}(k) \tilde{J}(-k)}{k^2 + m^2} \right] \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\xi \exp \left[ -\frac{i}{2} \tilde{\xi}(k) (k^2 + m^2) \tilde{\xi}(-k) \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$



Como a normalização de  $Z_0[J]$  é tal que  $Z_0[J = 0] = 1$ , o termo da integração funcional deve ser 1 e temos que  $Z_0[J]$  é dado por

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \exp \left[ \frac{i}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{J}(k)\tilde{J}(-k)}{k^2 + m^2} \right] \\ &= \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^3 y d^3 y' J(y) \Delta(y - y') J(y') \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde definimos o *propagador de Feynman*

$$\Delta(x - x') = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik(x-x')}}{k^2 + m^2 - i\varepsilon}. \quad (3.24)$$

(O termo  $i\varepsilon$  é inserido de forma que a integração não seja ambígua, ver, e.g, (Srednicki 2007))

### 3.1.2 Funções de Green

O propagador de Feynman que definimos na sessão anterior nada mais é do que a *função de Green do operador de Klein-Gordon*. Para confirmar isso, partindo da expressão da eq. (3.24), o operador de Klein-Gordon  $D_{\text{KG};x}$  é definido na eq. (3.16) na página oposta temos

$$D_{\text{KG};x} \Delta(x - x') = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(k^2 + m^2) e^{ik(x-x')}}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} \quad (3.25a)$$

e tomando o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$D_{\text{KG};x} \Delta(x - x') = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik(x-x')} = \delta^3(x - x'). \quad (3.25b)$$

O propagador de Feynman também pode ser escrito como a derivada funcional de  $Z_0[J]$ , usando a forma da eq. (3.23) temos

$$\frac{1}{i} \Delta(x - x') = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x')} Z_0[J] \Big|_{J=0}. \quad (3.26a)$$

Aplicando as mesmas derivadas em  $Z_0[J]$  como foi escrito na eq. (3.12) na página 15 (com  $S = S_0$ ) temos que

$$\frac{1}{i} \Delta(x - x') = \langle 0 | T \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle \quad (3.26b)$$

onde  $T$  é o indica o produto ordenado dos campos.

Por causa da eq. (3.26) também chamamos o propagador de Feynman de *função de Green de 2-pontos*. Podemos então generalizar essa expressão e obter a *função de Green de n-pontos*

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle &= \\ &= \left( \frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z_0[J] \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

É fácil ver porque chamamos  $Z[J]$  de funcional gerador das funções de Green, uma expansão em potências de  $J$  tem como coeficientes as funções de Green de  $n$ -pontos

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^3 x_1 \dots d^3 x_n \langle T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle J(x_1) \dots J(x_n). \quad (3.28)$$

A eq. (3.26) na página anterior também permite que generalizemos a ideia do propagador de Feynman que definimos para o caso livre  $S = S_0$ , para um propagador que inclua os efeitos de uma interação descrita por  $S_i \neq 0$ .

Definimos o *propagador total*  $\Delta(x - x')$  por

$$\frac{1}{i} \Delta_{12} = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_1} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_2} Z_0[J] \Big|_{J=0} \quad [3.26]$$

$$\frac{1}{i} \Delta(x - x') = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x')} Z[J] \Big|_{J=0}. \quad (3.29)$$

### 3.1.3 Expansão perturbativa

Para tornar a descrição concreta vou tomar o termo de interação como sendo da seguinte forma

$$S_i[\phi] = \int d^3 x \mathcal{L}_i(\phi) = \int d^3 x \frac{1}{4!} g \phi^4(x) \quad (3.30)$$

mas as ideias apresentadas aqui se aplicam a qualquer outro tipo de interação, fazendo as devidas modificações.

O funcional gerador que queremos calcular pode ser escrito da seguinte maneira

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i[S_0 + S_i + \int J\phi]}. \quad (3.31)$$

Para calcular  $Z[J]$  notemos a seguinte expressão

$$\left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_n} \right) Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \phi_n e^{i[S_0 + \int J\phi]}, \quad (3.32)$$

de forma que podemos escrever o seguinte

$$\left( e^{\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_n}} \right) Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{\phi_n} e^{i[S_0 + \int J\phi]}. \quad (3.33)$$

Usando esse resultado podemos escrever  $Z[J]$  em termos de  $Z_0[J]$ , o gerador funcional livre que calculamos anteriormente. A expressão que queremos é a seguinte

$$Z[J] = e^{i \int d^3 x \mathcal{L}_i\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_n}\right)} \int \mathcal{D}\phi e^{i[S_0 + \int J\phi]} \quad (3.34)$$

$$\propto e^{i \int d^3 x \mathcal{L}_i\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_n}\right)} Z_0[J]$$

a razão de se ter escrito na segunda linha uma proporcionalidade é que a constante que normaliza  $Z_0[J]$  não é em geral a mesma que normaliza  $Z[J]$ .

Usando esse resultado juntamente com o valor de  $Z_0$ , eq. (3.23) na página 17 e a forma explicita de  $\mathcal{L}_i$ , eq. (3.30) na página oposta, podemos escrever

$$Z_0 = \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^3 x d^3 x' J(x) \Delta(x - x') J(x') \right] \quad [3.23]$$

$$Z[J] \propto \exp \left[ \frac{i}{4!} g \int d^3 x \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] \times \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^3 x d^3 x' J(x) \Delta(x - x') J(x') \right]. \quad (3.35)$$

Podemos então expandir  $Z[J]$  em uma série dupla, expandido em potências de  $g$  e  $J$

$$Z[J] \propto \sum_{V=0}^{\infty} \frac{1}{V!} \left[ \frac{i g}{4!} \int d^3 x \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right]^V \times \sum_{P=0}^{\infty} \frac{1}{P!} \left[ \frac{i}{2} \int d^3 y d^3 z J(y) \Delta(y - z) J(z) \right]^P \quad (3.36)$$

Cada termo dessa série pode ser representada por *gráficos de Feynman* da forma usual: propagadores representados por linhas e vertices por pontos, uma descrição clara dessa representação pode ser encontrada em (Srednicki 2007).

A convenção que será adotada para os  $i$  que aparecem nos gráficos de Feynman será a seguinte

$$x \text{ --- } x' \equiv \frac{1}{i} \Delta(x - x'), \quad (3.37a)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = i V_4 \quad (3.37b)$$

onde  $V_4/4!$  é o coeficiente do termo que acompanha o termo  $\phi^4$  na ação  $S$ , expressões equivalentes são definidas para os outros termos de interação.

### 3.1.4 Gráficos conexos e desconexos

Na expansão que obtemos para  $Z[J]$ , eq. (3.36), obtemos muitos tipos de gráficos de Feynman, um para cada termo. Esse gráficos podem aparecer de forma *conexa* ou *desconexa*. Um gráfico é dito conexo se todas as suas partes são conectadas uma a outra. Na fig. 3.1 temos exemplos de gráficos conexos e desconexos.

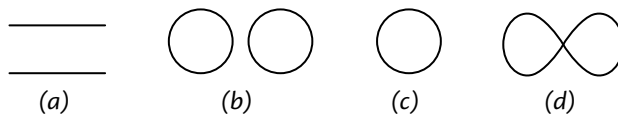


Figura 3.1.: Os gráficos (a) e (b) são desconexos enquanto os gráficos (c) e (d) são conexos.

Apesar de  $Z[J]$  conter as duas formas de gráficos ele pode ser obtido apenas se calculando gráficos conexos. Para isso notemos que se um gráfico  $D$ , que pode ser conexo ou não, for construído a partir de  $n_i$  gráficos conexos  $C_i$ , onde valores de  $i$  indicam diferentes tipos de gráficos conexos, o diagrama  $D$  pode ser escrito da seguinte forma

$$D = \frac{1}{S_D} \prod_i (C_i)^{n_i} \quad (3.38)$$

onde  $S_D$  é um fator de simetria do gráfico  $D$  que conta as formas que podemos reorganizar os gráficos  $C_i$  dentro de  $D$  de forma indistinguível.

Para cada  $i$  podemos permutar os gráficos  $C_i$  de  $n_i!$  formas diferentes sem mudar o gráfico  $D$  e essas permutações podem ser combinadas com as permutações dos outros  $C_j$ ,  $j \neq i$ , assim  $S_D$  é dado por

$$S_D = \prod_i n_i! \quad (3.39)$$

Agora um gráfico  $D$  é definido pelo conjunto de todos os  $n_i$  gráficos  $C_i$ , para valores diferentes de  $i$ , ou de forma equivalente pelo conjunto de números  $\{n_i\}$  já que podemos reorganizar os gráficos conexos sem alterar o valor de  $D$ .  $Z[J]$ , então, é a soma de todos os gráficos  $D$  quando os valores de  $\{n_i\}$  percorrem os valores permitidos pela teoria em questão, explicitamente temos

$$Z[J] \propto \sum_{\{n_i\}} D. \quad (3.40a)$$

Usando as eq. (3.38) e (3.39) temos que

$$Z[J] \propto \sum_{\{n_i\}} \prod_i \frac{1}{n_i!} (C_i)^{n_i}. \quad (3.40b)$$

O produto e a soma podem ser invertidos se notarmos que essa operação é equivalente a primeiro somar para cada  $i$  termos  $(C_i)^{n_i}/n_i!$  para todos os valores que  $n_i$  pode assumir. Note que um gráfico pode claramente aparecer nenhuma vez —  $n_i = 0$  — e se ele aparece uma vez —  $n_i = 1$  — pode aparecer duas —  $n_i = 2$ , dois gráficos  $C_i$  um ao lado do outro — como podemos fazer  $D = C_i$ , i.e.,  $n_i = 1$  por indução ele deve aparecer tanto quanto forem os números inteiros. Assim temos

$$Z[J] \propto \prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{1}{n_i!} (C_i)^{n_i} = \prod_i e^{C_i} = e^{\sum_i C_i} \quad (3.40c)$$

agora o termo  $\sum_i C_i$  nada mais é do que a soma de todos os gráficos conexos.

Temos um outro resultado além desse:  $Z[J]$  é dado pela *exponencial* dessa soma. Assim se redefinimos essa soma de forma que ela se anule para  $J = 0$  então  $Z[J = 0] = 1$  e podemos parar de usar o símbolo de  $\propto$  e usar um símbolo de  $=$ .

Essa redefinição é simples de se obter, já que o número de  $J$  que existem em um termo de  $Z[J]$  é igual ao número de pernas externas do gráfico que representa esse termo — isso é devido a definição das funções de Green como termos da expansão em potencia de  $J$  dada na eq. (3.28) na página 18.

Quando fazemos  $J = 0$  os únicos termos que não se anulam são os proporcionais as *bolhas de vácuo*, gráficos com 0 pernas externas. Definimos, então, um novo funcional de  $J$  o *gerador das funções de Green conexas*  $W[J]$  que é definido pelo seguinte

$$i W[J] = \sum_i C_i \quad \{C_i\} \not\equiv \text{bolhas de vácuo} \quad (3.41)$$

(essa definição, com um  $i$ , faz  $W$  ser real quando  $S = S_0$ , i.e., na teoria livre).

Assim temos o uma forma simples de calcular e normalizar  $Z$  apenas olhando para os gráficos conexos, isto é

$$Z[J] = e^{i W[J]}. \quad (3.42)$$

Um outro resultado útil vem da seguinte identidade

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} Z[J] \Big|_{J=0} = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} i W[J] \Big|_{Z[J=0]} = \frac{\delta}{\delta J(x)} W[J] \Big|_{J=0} \quad (3.43)$$

que facilita o cálculo das funções de Green, já que só precisamos calcular os gráficos conexos.

### 3.1.5 Expansão perturbativa para o propagador total

A eq. (3.29) na página 18 nós dá uma forma de calcular contribuições da parte de interação da ação  $S_i$  ao propagador livre de Feynman, obtido considerando que  $S_i = 0$ . Para isso usaremos a expansão de  $Z[J]$  dada em potencias de  $g$  e  $J$  na eq. (3.36) na página 19.

Para um gráfico de Feynman — um termo de eq. (3.36) — contribuir para a eq. (3.29) ele deve ter duas pernas externas e assim o propagador total é dado pela soma de todos os gráficos com duas pernas externas. Graficamente temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \Delta(x-x') = & x \text{---} x' + \frac{1}{2} x \text{---} \text{[loop]} \text{---} x' + \frac{1}{4} x \text{---} \text{[figure-eight]} \text{---} x' \\ & + \frac{1}{6} x \text{---} \text{[figure-eight]} \text{---} x' + \frac{1}{4} x \text{---} \text{[two-loops]} \text{---} x' \dots, \quad (3.44) \end{aligned}$$

onde os fatores na frente dos gráficos são fatores de simetria.

$$Z = \sum \frac{i^n}{n!} \int J^n \langle 0 | \phi_1 \dots \phi_n | 0 \rangle \quad [3.28]$$

$$\Delta_{1,2} = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_1} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_2} Z[J] \Big|_{J=0} \quad [3.29]$$

## 3.1.6 A expansão em loops

A formula perturbativa para calcular  $Z[J]$  contém muitos termos que podem ser agrupados e ordenados de uma multitude de formas diferentes. Por exemplo, podemos agrupar termos com o mesmo número de potências de  $g$  em uma mesma ordem. Isso seria útil no caso de  $g \ll 1$  assim cada nova ordem contribuiria cada vez menos a  $Z[J]$  e aos objetos que dele derivam.

Uma outra forma de agrupar os termos dessa expansão é juntando em uma mesma ordem termos com o mesmo número de potências de  $\hbar$ . Em geral podemos fazer  $\hbar \equiv 1$  o que faz essa expansão não parecer tão útil do ponto de vista perturbativo, sendo apenas uma forma de organizar os gráficos. Porém a muito se sabe que uma expansão em potências de  $\hbar$  é equivalente a uma *expansão em laços* (Coleman e Weinberg 1973).

Muitas dos efeitos quânticos manifestam-se apenas após um determinado número de laços, assim mesmo que  $\hbar$  não seja um “parâmetro pequeno” que justifique uma expansão perturbativa — onde cada novo termo contribui menos e menos — a expansão em laços permite explorar os efeitos quânticos de uma teoria na forma de desvios do comportamento encontrados no nível de árvore.

Para mostrar a equivalência entre uma expansão em  $\hbar$  e uma em laços primeiro reintroduzimos  $\hbar$  no gerador funcional  $Z[J]$  de forma que

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \frac{S}{\hbar} + \int J \frac{\phi}{\hbar} \right] \quad (3.45)$$

assim se torna fácil identificar os locais que  $\hbar$  aparece na expansão perturbativa, temos que

- cada propagador traz um termo de  $\hbar$ ;
- cada vértice traz um termo de  $\hbar^{-1}$ ;
- e cada linha externa um termo de  $\hbar^{-1}$ .

Assim o número de potências de  $\hbar$  num gráfico é  $\hbar^{P-E-V}$ , onde  $P$  é o número de propagadores,  $V$  o número de vertices e  $E$  o número de linhas externas.

O número de laços é dado pelo número de integrais de momento  $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$  e cada linha interna carrega uma dessas integrais. Temos  $P$  linhas mas  $E$  delas são externas e as outras são internas, assim temos  $P - E$  integrais. Mas precisamos lembrar que quando passamos para o espaço de momentos cada vértice também traz uma  $\delta$  de Dirac de conservação de momento daquele vértice e que no final teremos sobrando uma  $\delta$  de Dirac de conservação do momento total do gráfico, assim existem  $V - 1$   $\delta$  de Dirac de momento. O número de laços  $L$  então é dado por

$$L = (P - E) - (V - 1). \quad (3.46)$$

Coleman, Sidney R., e Erick J. Weinberg. 1973. Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking. *Physical Review D* 7:1888–1910.

Assim cada gráfico de Feynman carrega um fator de

$$\hbar^{L-1}.$$

O número de potências de  $\hbar$  cresce com o número de laços — uma potência extra de  $\hbar$  para cada laço que adicionamos ao gráfico.

### 3.2 AÇÃO QUÂNTICA E SUA EXPANSÃO PERTURBATIVA

O processo de quantização permite que calculemos as contribuições quânticas que não aparecem na aproximação clássica de forma que se pode construir uma nova ação, a *ação quântica*  $\Gamma[\phi]$  onde é possível obter valores para as grandezas físicas que inclui os efeitos quânticos, da mesma forma que  $S[\phi]$  permite obtê-las na teoria clássica. Definimos, então,  $\Gamma[\phi]$  de forma que — a nível de árvore — os objetos calculados incluam todas os efeitos quânticos quando  $\Gamma[\phi]$  for usado no lugar de  $S[\phi]$ , e.g., na definição de  $Z[J]$ .

A teoria em estudo pode, por exemplo, ser expandida em potências da constante de acoplamento. Porém para o trabalho presente veremos que é mais útil e prático expandir em potências de  $\hbar$ . Assim a ação quântica  $\Gamma$  pode ser expandida da seguinte forma

$$\Gamma = S + \sum_{i=1}^{\infty} \hbar^i \Gamma^{(i)} \quad (3.47)$$

onde  $\Gamma^{(i)}$  inclui todas as contribuições quânticas de ordem  $\hbar^i$ . Essa forma porém não nos diz como calcular as contribuições  $\Gamma^{(i)}$  para isso precisamos de uma expressão para  $\Gamma[\phi]$  em termos de objetos que conhecemos.

#### 3.2.1 Expansão perturbativa para a ação quântica

Iremos mostrar aqui uma forma para se obter a ação quântica  $\Gamma[\phi]$  perturbativamente, para isso vamos escrever a ação clássica  $S[\phi]$  de um único campo escalar  $\phi$  que dará origem — via processo de quantização — a teoria quântica. No espaço de momentos  $k$  a ação  $S[\phi]$  assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} S[\phi] = & \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{\phi}(-k) V_2(k) \tilde{\phi}(k) \\ & + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3 k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + \cdots + k_n) \\ & \times V_n(k_1, \dots, k_n) \tilde{\phi}(k_1) \cdots \tilde{\phi}(k_n) \end{aligned} \quad (3.48a)$$

onde  $\tilde{\phi}$  é a transformada de Fourier de  $\phi$ ,

$$V_2(k) = k^2 + m^2 \quad (3.48b)$$

e  $V_{n \geq 3}$  descreve os termos de interação que aparecem  $S_i[\phi]$ , e.g., na teoria  $\phi^4$  teríamos  $V_4 = g$  e todos os outros  $V_n = 0$ .

É possível ver agora como devemos prosseguir para obter a ação quântica  $I[\phi]$ . Como  $I[\phi]$  é definido de forma que se esse objeto for utilizado no lugar de  $S[\phi]$  no processo de quantização, na construção de  $Z[J]$ , temos que os gráficos calculados a nível de árvore incluem todos os efeitos quânticos.

Começando por  $V_2$  vemos que ele nada mais é do que a transformada de Fourier de operador de Klein-Gordon e como o propagador de Feynman é dado pelo inverso desse operador — ele é a função de Green desse operador — se usarmos o propagador total calculado na seção 3.1.5 na página 21 para obter um  $\Gamma_2$

$$\Gamma_2(k) = \tilde{\Delta}^{-1}(k) \tag{3.49a}$$

e podemos usar ele para construir a ação quântica

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{\phi}(-k) \Gamma_2(k) \tilde{\phi}(k) + \tilde{\phi}^3 \dots \tag{3.49b}$$

Os outros  $V_n$  podem ser calculados de forma parecida.  $V_n$  aparece na regras de Feynman como vértices, e.g.,

$$iV_4 = \text{diagram} = ig \tag{3.49c}$$

(a origem do  $i$  vem de como é realizada a expansão na eq. (3.36) na página 19). Assim  $\Gamma_4$  é dado pela seguinte expressão diagramática

$$i\Gamma_4 = \text{diagram} + \frac{1}{2} \text{diagram} + \text{diagram} + \dots \tag{3.49d}$$

Os outros  $\Gamma_n$  são dados por expressões equivalentes e com isso podemos escrever

$$\begin{aligned} I[\phi] = & \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{\phi}(-k) \Gamma_2(k) \tilde{\phi}(k) \\ & + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3 k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + \dots + k_n) \\ & \times \Gamma_n(k_1, \dots, k_n) \tilde{\phi}(k_1) \dots \tilde{\phi}(k_n) \end{aligned} \tag{3.49e}$$

As funções  $\Gamma_n$  assim definidas são chamadas de *funções de vértice*.

Agora vamos olhar novamente para eq. (3.49d). Quais gráficos devem ser incluídos nessa soma? Gráficos desconexos ou apenas gráficos conexos? A resposta é que apenas gráficos 1PI (*one particle irreducible*) fazem parte dessa soma.

Gráficos 1PI são gráficos conexos que não se tornam desconexos se uma perna interna for cortada. Por exemplo o gráfico

$$\text{diagram} \tag{3.50}$$



é conexo mais não é 1PI enquanto os gráficos da eq. (3.49d) na página oposta são todos 1PI.

Para entender a razão da ação quântica ser calculada utilizando apenas gráficos 1PI precisamos obter uma forma mais explícita para  $\Gamma$  em função de objetos que sabemos como representar graficamente,  $W[J]$  e  $Z[J]$ . Essa relação foi descoberta por Jona-Lasinio (1964).

O funcional gerador  $Z[J]$  pode ser escrito em termos de  $S[\phi]$  ou  $W[J]$  da seguinte maneira

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]+i\phi \cdot J} = e^{iW[J]}. \quad (3.51)$$

Agora vamos considerar o seguinte objeto

$$Z_{\Gamma}[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i\Gamma[\phi]+i\phi \cdot J} = e^{iW_{\Gamma}[J]}. \quad (3.52)$$

Os gráficos gerados por  $Z_{\Gamma}[J]$  são construídos com vértices totais  $\Gamma_n$  e com propagadores totais  $\Delta$ , pois foi assim que definimos a ação quântica  $\Gamma[J]$ . Assim  $W_{\Gamma}[J]$  deve ser igual  $W[J]$  se apenas incluirmos os gráficos de árvore em  $W_{\Gamma}[J]$  ou seja se  $L$  for o número de laços temos que

$$W[J] = W_{\Gamma}^{(L=0)}[J]. \quad (3.53)$$

Para isolar em  $Z_{\Gamma}[J]$  os gráficos de árvore, vamos primeiro introduzir um novo parâmetro adimensional  $\alpha$  em  $Z_{\Gamma}[J]$

$$Z_{\Gamma,\alpha}[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\alpha}(\Gamma[\phi]+ \phi \cdot J)} = e^{iW_{\Gamma,\alpha}[J]}. \quad (3.54)$$

Note que  $\alpha$  aparece da mesma forma que  $\hbar$  aparece quando este é reintroduzido na teoria — como foi feito na seção 3.1.6 na página 22.

Seguindo o mesmo procedimento, temos que os gráficos gerados por  $Z_{\Gamma,\alpha}[J]$  são proporcionais a  $\alpha^{L-1}$  onde  $L$  é o número de laços no gráfico.

Isso permite escrever  $W_{\Gamma,\alpha}[J]$  como uma série de potências em  $\alpha$

$$W_{\Gamma,\alpha}[J] = \frac{1}{\alpha} \sum_{L=0}^{\infty} \alpha^L W_{\Gamma}^{(L)}[J]. \quad (3.55)$$

Se tomarmos formalmente o limite  $\alpha \rightarrow 0$  temos que o termo dominante na soma é aquele com a menor potência de  $\alpha$ , i.e., o termo com  $L = 0$  e  $W_{\Gamma,\alpha}[J]$  só deve ter contribuições dos gráficos de árvore — exatamente como queríamos — ou seja

$$W_{\Gamma,\alpha}[J] = \frac{1}{\alpha} W_{\Gamma}^{(0)}[J] + \mathcal{O}(\alpha^0). \quad (3.56)$$

Algo parecido vai acontecer com  $Z_{\Gamma,\alpha}[J]$ . Quando tomarmos  $\alpha \rightarrow 0$  o integrando vai oscilar com uma frequência muito alta e podemos utilizar a *aproximação da fase estacionária* onde o valor da integral é dado pelo integrando calculado no valor de  $\phi$  que minimiza a fase.

Jona-Lasinio, G. 1964. Relativistic field theories with symmetry breaking solutions. *Il Nuovo Cimento* 34:1790–1795.

O mínimo ocorre para um valor  $\phi_J(x)$  que é solução da equação

$$\left. \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \Gamma[\phi] \right|_{\phi=\phi_J} = -J(x). \quad (3.57)$$

Assim temos que

$$Z_{\Gamma, \alpha}[J] = e^{\frac{i}{\alpha}(\Gamma[\phi_J] + \phi_J \cdot J) + O(\alpha^0)}. \quad (3.58)$$

Comparando termos de ordem  $1/\alpha$  dessa equação com os da eq. (3.56) na página anterior temos que

$$[3.56] \quad W_{\Gamma, \alpha}[J] = \frac{1}{\alpha} W_{\Gamma}^{(0)}[J] + O(\alpha^0)$$

$$W_{\Gamma}^{(0)}[J] = \Gamma[\phi_J] + \phi_J \cdot J. \quad (3.59)$$

Porém como  $W_{\Gamma}^{(0)}[J] = W[J]$ , temos o seguinte par de equações

$$\left. \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \Gamma[\phi] \right|_{\phi=\phi_J} = -J(x), \quad (3.60a)$$

$$\Gamma[\phi_J] = W[J] - \phi_J \cdot J. \quad (3.60b)$$

A eq. (3.60) nada mais é do que a definição da transformada de Legendre de  $W[J]$ , que inclui uma versão quântica da equação de movimento.

### 3.3 POTENCIAL EFETIVO E O SEU CÁLCULO PERTURBATIVO

As técnicas das últimas seções permitem entender como cada ordem contribui para o valor da ação quântica  $\Gamma[\phi]$  e para as funções de Green.

Porém são poucos os casos em que é possível calcular uma ordem completa de  $\Gamma[\phi]$ . O número de gráficos que contribuem em cada ordem é infinito e usualmente apresentam fatores combinatórios muito complicados impossibilitando a soma.

No estudo de quebra de simetria em geral podemos obter grande parte da informação que precisamos de um objeto mais simples o *potencial efetivo*  $V(\phi)$ .

A ação quântica  $\Gamma[\phi]$  pode ser escrita, como vimos na seção anterior, como uma expansão em potência de  $\phi$ . Vamos reescrever aqui a eq. (3.49e) na página 24, mas incluindo todos os possíveis termos

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3 k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + \cdots + k_n) \\ \times \Gamma_n(k_1, \dots, k_n) \tilde{\phi}(k_1) \cdots \tilde{\phi}(k_n) \end{aligned} \quad (3.49e)$$

Outra forma é escrever  $\Gamma[\phi]$  como uma expansão derivativa, que assume a seguinte forma

$$\Gamma[\phi] = \int d^3 x \left[ -V(\phi(x)) + \frac{1}{2} \mathcal{Z} \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) + \cdots \right]. \quad (3.61)$$



(onde não foi representado o fator de simetria).

Podemos também tomar  $n = 1$  que é equivalente ao método descrito por Weinberg (1973)

Weinberg, Steven. 1973. Perturbative calculations of symmetry breaking. *Physical Review D* 7:2887–2910.

$$\frac{d V(\phi)}{d \phi} = -\Gamma'_1(0). \tag{3.69}$$

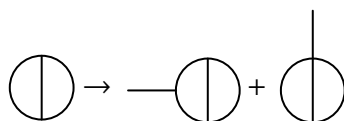
$\Gamma'_1(0)$  é soma de todos os gráfico com uma perna externa, *tadpoles*, geradas pela teoria translada. Na teoria  $\phi^4$  em 1-laço temos um gráfico apenas e em 2-laços temos quatro gráficos.

No caso da teoria ser descrita por um conjunto de campos  $\{\phi_i\}$ , enumerados pela variável  $i$ , segue diretamente que o potencial efetivo no método de Weinberg é dado por

$$\frac{\partial V(\phi_i)}{\partial \phi_i} = -\Gamma'_{1(\phi_i)}(0). \tag{3.70}$$

onde  $\Gamma'_{1(\phi_i)}(0)$  são os *tadpoles* do campo  $\phi_i$ .

Os gráficos que contribuem para o potencial efetivo  $V(\phi)$  no método de Weinberg podem ser obtidos anexando uma perna ao gráficos representados na eq. (3.68) na página anterior já que um *tadpole*  $1PI$  é construído anexando uma perna externa a uma bolha de vácuo de todas as formas possíveis, por exemplo



$$\tag{3.71}$$

Essa ultima expressão mostra que, em geral, no método de Weinberg temos que calcular um número maior de gráficos apos a ordem de 1-laço do que o método de Jackiw. Porém o gráfico de 1-laço,



$$\tag{3.72}$$

está bem definido que motiva construir um método misto onde é utilizado o método de Jackiw em todas as ordens menos a de 1-laço onde deve ser utilizado o método de Weinberg. Essa técnica foi utilizada por Miller (1984) para calcular o potencial efetivo do modelo Wess-Zumino em  $(3 + 1)$ -dimensões e depois por Nadeau (1989) para calcular o potencial efetivo da SQED em  $(3 + 1)$ -dimensões, ambos os trabalhos dão resultado em até 2-laços.

É importante notar que em (Jackiw 1974) é dada uma expressão para o termo de 1-laço via integração funcional como sendo o determinante de um operador, esse resultado está de acordo com o obtido pelo método de Weinberg.

Miller, Robert D. C. 1984. The two-loop effective potential of the Wess-Zumino model. *Nuclear Physics B* 241:535–556.

Nadeau, Raymond. 1989. Two-loop effective potential of supersymmetric quantum electrodynamics. *Physical Review D* 39:3069–3083.

### 3.3.1 *Potencial efetivo supersimétrico*

No caso supersimétrico uma teoria pode ser descrita por *componentes* ou por *supercampos*.

Os dois métodos podem ser utilizados para calcular o potencial efetivo. Cada método apresenta vantagens e desvantagens e vamos descrever o procedimento que pode ser utilizado para o cálculo na duas descrições.

#### 3.3.1.1 *Componentes*

No caso de componentes tudo o que foi feito anteriormente pode ser diretamente aplicado, porém devido às simetrias extras encontradas em uma teoria de campos supersimétrica no procedimento para o cálculo do potencial efetivo podem ser encontrados cancelamentos devido a presença de laços bosônicos e fermiônicos — que tem sinal contrário.

O método de Jackiw foi estudado em sua forma de componentes por Huq (1976) até a aproximação de 1-laço. Em 2-laços o método de bolhas de vácuo pode ser utilizado de forma convencional quando a teoria supersimétrica é representada por componentes. No caso do método de Weinberg foi estudado em componentes por Miller (1983a) na aproximação de 1-laço.

Em geral no método de *tadpoles* como se obtém não o potencial efetivo mais a *derivada parcial* do potencial é necessário calcular *tadpoles* de todos os campos bosônicos (o campos fermiônicos, por simetria de Lorentz, não contribuem) e integrar simultaneamente essas equações para que todos os termos de  $V(\phi)$  fiquem determinados.

Miller (1983a) sugere calcular apenas os *tadpoles* do campo auxiliar, que em geral são em número muito menores do que as dos outros campos bosônicos. Miller então utiliza de argumentos de simetria e de que a supersimetria não é quebrada para fixar todos os termos. Como nesse trabalho queremos estudar a possibilidade de haver quebra de supersimetria, essa simplificação não será usada.

#### 3.3.1.2 *Supercampos*

A extensão dos métodos de Jackiw e Weinberg para o formalismo de supercampos não requerem muitas modificações em princípio. O método de Jackiw foi tratado por Srivastava (1983) e Miller (1983b). O método de Weinberg foi tratado por Huq (1977).

Porém uma modificação significativa ocorre quando se aplica esses métodos no formalismo de supercampos. Transladar os campos da teoria de termos constantes e independentes o que da origem a uma teoria que não é supersimétrica, algo esperado já que a álgebra supersimétrica da origem a transformações que implicam que certas relações entre os campos da teoria sejam satisfeitos.

Huq, M. 1976. On spontaneous breakdown of fermion number conservation and supersymmetry. *Physical Review D* 14:3548–3556.

Miller, Robert D. C. 1983a. A simple component field method for SUSY effective potential calculations. *Physics Letters B* 124:59–63.

Srivastava, Prem P. 1983. Superfield tadpole method for SUSY effective potential. *Physics Letters B* 132:80–82.

Miller, Robert D. C. 1983b. A tadpole supergraph method for the evaluation of SUSY effective potentials. *Nuclear Physics B* 228:316–332.

Huq, M. 1977. Evaluation of effective potential in superspace. *Physical Review D* 16:1733–1739.

Assim o processo de transladar a teoria para que o método de Jackiw ou Weinberg seja aplicado é equivalente a calcular o potencial efetivo de uma teoria supersimétrica que apresenta quebra explícita de supersimetria. Essa quebra explícita de simetria torna os propagadores utilizados nas regras de Feynman em supercampos muito mais complexas.

Um procedimento sistemático para obter esses propagadores foi desenvolvido ao longo de vários trabalhos por Helayël-Neto et al., iremos utilizar o formalismo descrito em (Helayël-Neto et al. 1999). Uma extensão dessas técnicas em  $2 + 1$ -dimensões foi realizada por Gallegos e da Silva (2011).

Em uma teoria sem quebra explícita de simetria a parte quadrática da ação  $S^{(2)}[\Phi]$  em supercampos pode ser escrita da seguinte forma

$$S^{(2)}[\Phi] = \int d^2\theta d^3x \left[ \frac{1}{2} \Phi \mathcal{M} \Phi \right], \quad (3.73)$$

onde  $\mathcal{M}$  é um operador diferencial que só depende de  $\theta$  implicitamente pela sua dependência nas derivadas covariantes. Essa forma permite escrever a inversa do operador  $\mathcal{M}$  que será utilizado para a construção do propagador em termos de derivadas utilizando operadores de projeção supersimétricos derivados da álgebra supersimétrica, para mais detalhes ver (Gates et al. 1983).

No caso de  $\mathcal{M}$  conter uma dependência explícita nas variáveis Grassmanianas é necessário escolher um outro conjunto de operadores para permitir o cálculo da inversa de  $\mathcal{M}$ . Helayël-Neto et al. sugere em  $2 + 1$ -dimensões o uso dos seguintes operadores  $P_i$  para uma teoria supersimétrica que contem apenas supercampos escalares

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, & P_1 &= D^2, & P_2 &= \theta^2, \\ P_3 &= \theta^\alpha D_{\alpha'}, & P_4 &= \theta^2 D^2, & P_5 &= i\partial_{\alpha\beta} \theta^\alpha D^\beta. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Usando esse operadores podemos escrever  $\mathcal{M}$  da seguinte forma

$$\mathcal{M} = \sum_{i=0}^5 c_i P_i = c_i P_i, \quad (3.75)$$

escolhendo  $c_i$  adequados. Escrevendo a inversa também dessa forma, i.e.,

$$\mathcal{M}^{-1} = \sum_{i=0}^5 c_i^I P_i = c_i^I P_i, \quad (3.76)$$

podemos usar a definição da inversa de  $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1} = 1 \quad (3.77)$$

para calcular os  $c_i^I$ .

Para o cálculo dos  $c_i^I$  a tabela 3.1 é de grande ajuda.

Helayël-Neto, J. A., et al. 1999. Superpropagators for explicitly broken 3D supersymmetric theories. *Physics Letters B* 468:96–101.

Gallegos, E. A., e A. J. da Silva. 2011. Supergraph techniques for  $D = 3$ ,  $\mathcal{N} = 1$  broken supersymmetric theories. *Physical Review D* 84:065009.

Gates, S. J., et al. 1983. Superspace, or one thousand and one lessons in supersymmetry. *Frontiers of Physics* 58:1–548.

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$P_1$	$\partial^2$	$-1 + P_3 + P_4$	$2P_1 + P_5$	$-P_1 + \partial^2 P_2 - P_5$	$\partial^2(-2 + P_3)$
$P_2$	$P_4$	0	0	0	0
$P_3$	$-P_5$	$2P_2$	$P_3 - 2P_4$	$2P_4$	$2\partial^2 P_2 + P_5$
$P_4$	$\partial^2 P_2$	$-P_2$	$2P_4$	$-P_4$	$-2\partial^2 P_2$
$P_5$	$-\partial^2 P_3$	0	$-2\partial^2 P_2 + P_5$	0	$\partial^2(P_3 + 2P_4)$

Tabela 3.1.: Tabela de multiplicação dos  $P_i$ . A tabela deve ser lida como linha  $\times$  coluna = resultado, por exemplo  $P_2 P_1 = P_4$ .





## QUEBRA DE SUPERSIMETRIA

---

Uma *simetria quebrada* ou como Coleman (1988) gostava de chamar uma *simetria escondida* é uma simetria que está presente na Lagrangiana mas que não está presente no estado de vácuo da teoria.

Nesse capítulo iremos analisar as condições para que a quebra de supersimetria ocorra em uma teoria e formas de poder verificar quando isso ocorre.

Os argumentos desse capítulo devem em grande parte as claras discussões de Coleman (1988) e Witten (1981).

Coleman, Sidney. 1988. *Aspects of symmetry*. Cambridge University Press. ISBN: 978-05-2131-827-3.

Witten, Edward. 1981. Dynamical breaking of supersymmetry. *Nuclear Physics B* 188:513–554.

### 4.1 QUEBRA DE SIMETRIA INTERNA

Uma teoria com um grupo de simetria interna pode apresentar uma quebra de simetria. O mais simples exemplo provavelmente é dado pela teoria descrita pela seguinte ação clássica,  $S[\phi]$ , de um campo bosônico real  $\phi$

$$S[\phi] = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \phi \partial^2 \phi + \frac{e}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} g \phi^4 \right], \quad (4.1)$$

onde  $e = \pm 1$ ,  $m > 0$   $g \geq 0$ .

Essa ação tem uma simetria interna: ela é invariante pela transformação  $\phi \rightarrow -\phi$ .

Primeiro vamos estudar o caso em que  $g = 0$ , o potencial clássico  $V(\phi)$  da teoria é dado por

$$V_{g=0}(\phi) = \frac{e}{2} m^2 \phi^2. \quad (4.2)$$

Se quisermos que essa teoria seja estável classicamente precisamos que  $e = +1$  ou o potencial clássico seria negativo para todos os valores de  $\phi$  e não haveria um mínimo. Nesse caso em que  $e = +1$  o valor de  $m$  é interpretado na teoria quântica como sendo a massa das partículas associadas ao campo  $\phi$ .

No caso de  $g > 0$  o potencial clássico é dado por

$$V_{g>0}(\phi) = \frac{e}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} g \phi^4. \quad (4.3)$$

Nesse caso mesmo se  $e = -1$  para  $\phi$  suficientemente grande o potencial é positivo e deve existir um mínimo. Explicitamente o mínimo do potencial, para  $e = -1$  ocorre para os seguintes valores de  $\phi$

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{6m^2}{g}} \quad (4.4)$$

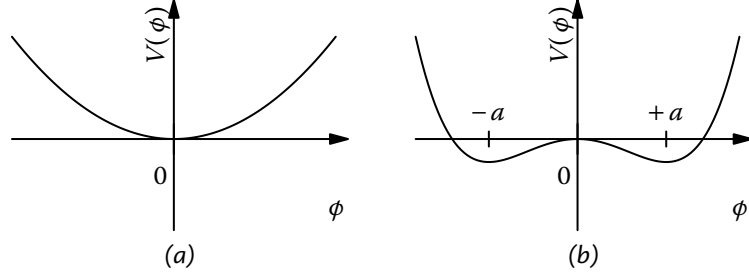


Figura 4.1.: Gráficos do potencial clássico  $V(\phi) = \frac{e}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} g \phi^4$  para diferentes parâmetros. Em (a)  $e = 1$  e  $g = 0$ , em (b)  $e = -1$ ,  $g > 0$  e  $a = \sqrt{6 m^2/g}$ .

Os gráficos de  $V_{g=0}(\phi)$  e  $V_{g>0}(\phi)$  estão representado na fig. 4.1.

Para  $e = 1$  o mínimo ocorre para  $\phi = 0$  e podemos expandir a teoria como usual em torno da origem. Porém para  $e = -1$  precisamos escolher um dos dois mínimos para realizar essa expansão, os dois mínimos são equivalentes por causa da simetria de  $\phi \rightarrow -\phi$ . Porém escolhido um mínimo expansões perturbativas em torno desse mínimo não são mais explicitamente simétricas sob  $\phi \rightarrow -\phi$ , já que é necessário “saltar” para o outro mínimo para detectar essa simetria.

#### 4.2 VÁCUO SUPERSIMÉTRICO

A álgebra supersimétrica implica em uma relação muito importante para o valor da Hamiltoniana no estado de vácuo da teoria. Especificamente utilizando a eq. (2.23f) na página 9

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2\gamma^\mu_{\alpha\beta} P_\mu, \quad (2.23f)$$

juntamente com  $\text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\nu = 3g_{\mu\nu}$ , podemos escrever que

$$P_\mu = \frac{1}{6} \gamma^{\mu\alpha\beta} \{Q_\beta, Q_\alpha\}, \quad (4.5)$$

como  $P_0 = H$  podemos escrever que

$$H = \frac{1}{6} (Q_+^2 + Q_-^2). \quad (4.6)$$

Como  $H$  é a soma de quadrado de operadores hermitianos o valor da energia em todo estado deve ser positivo ou zero. Um estado só pode ter energia zero se ele é aniquilado por todas os  $Q_\alpha$ , i.e., se ele for um estado supersimétrico.

Para ver isso, tomemos o estado de energia zero como sendo  $|0\rangle$ . Por definição ele deve ser tal que  $H|0\rangle = 0$ . Agora o valor esperado de  $H$  nesse estado é dado por

$$0 = \langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{6} (\langle 0|Q_+^2|0\rangle + \langle 0|Q_-^2|0\rangle) = \frac{1}{6} (||Q_+|0\rangle|^2 + ||Q_-|0\rangle|^2), \quad (4.7)$$

isso só é possível se  $Q_\alpha |0\rangle = 0$ . O contrario também vale, se  $Q_\alpha |0\rangle = 0$  então  $H|0\rangle = 0$  deve ser verdade.

Assim se houver um estado em que a energia é zero, esse estado tem que ser supersimétrico. Assim uma teoria tem quebra de simetria se não existe nenhum estado em que a energia é zero.



## Parte II

### O MODELO WESS-ZUMINO



## O MODELO DE WESS E ZUMINO

Wess e Zumino (1974) introduziram um modelo supersimétrico em quatro dimensões que viria a ser conhecido como *modelo Wess-Zumino*. Esse é provavelmente o modelo mais simples em quatro dimensões que apresenta supersimetria. Wess e Zumino mostraram que a ação

$$S = \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} \partial_\mu A \partial^\mu A - \frac{1}{2} \partial_\mu B \partial^\mu B - \frac{1}{2} i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} (F^2 + G^2) \right] \quad (5.1)$$

é invariante quando os campos transformam de uma forma adequada.

Nos próximos dois capítulos irei calcular o potencial efetivo do modelo Wess-Zumino em três dimensões. O modelo Wess-Zumino, apesar de simples, contém as ideias básicas de uma teoria de campos supersimétrica assim será possível estudar como o potencial efetivo se comporta nesse tipo de teoria.

As transformações descritas por Wess e Zumino para a ação descrita na eq. (5.1) assumem a forma

$$\delta A = i \bar{\alpha} \psi \quad (5.2a)$$

$$\delta B = i \bar{\alpha} \gamma_5 \psi \quad (5.2b)$$

$$\delta \psi = \partial_\mu (A - \gamma_5 B) \gamma^\mu \alpha + \frac{1}{2} (A - \gamma_5 B) \gamma^\mu \partial_\mu \alpha + F \alpha + G \gamma_5 \alpha \quad (5.2c)$$

$$\delta F = i \bar{\alpha} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \quad (5.2d)$$

$$\delta G = i \bar{\alpha} \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi, \quad (5.2e)$$

onde o parâmetro  $\alpha$  é um espinor infinitesimal que anti-comuta com si mesmo, i.e., um número de Grassman. Salam e Strathdee (1974) descreveram como obter o modelo Wess-Zumino a partir do formalismo de supercampos. Esse formalismo facilita a construção de teoria supersimétrica e a obtenção das transformações dos campos.

Wess, J., e B. Zumino. 1974. Super-gauge transformations in four dimensions. *Nuclear Physics B* 70:39–50.

Salam, Abdus, e J. Strathdee. 1974. Super-gauge transformations. *Nuclear Physics B* 76:477–482.





Vou partir de um formalismo de supercampos em três dimensões descrito em Gates et al. (1983). O cálculo do potencial será realizado até a segunda ordem na aproximação de laços e será feito em componentes como descrito na seção 3.3.1.

Gates, S. J., et al. 1983. Superspace, or one thousand and one lessons in supersymmetry. *Frontiers of Physics* 58:1–548.

### 6.1 REGRAS DE FEYNMAN

A ação do modelo Wess-Zumino em (2+1)-dimensões em supercampos assume a forma seguinte

$$S[\Phi] = \int d^5z \left[ \frac{1}{2} \Phi(x, \theta) D^2 \Phi(x, \theta) + \frac{1}{4!} g \Phi^4(x, \theta) \right]. \quad (6.1)$$

O supercampo escalar  $\Phi$  pode ser expandido em potências de  $\theta$ ,

$$\Phi(x, \theta) \equiv A(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) - \theta^2 F(x). \quad (6.2)$$

O funcional gerador  $Z[J]$  é dado por

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi] + iJ \cdot \Phi}, \quad (6.3)$$

onde  $\mathcal{D}\Phi \propto DA D\psi^\dagger D\psi DF$  representa uma integração funcional.

A ação  $S[\phi]$  pode ser escrita em termos dos campos componentes,  $A(x)$ ,  $\psi_\alpha(x)$  e  $F(x)$ , obtendo a seguinte ação

$$\begin{aligned} S[A, \psi, F] &= \\ &= \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (F^2 + \psi^\alpha i\partial_\alpha^\beta \psi_\beta + A \partial^2 A) + \frac{g}{2} A^2 \psi^2 + \frac{g}{6} A^3 F \right]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

A equação de movimento clássica do campo  $F$  pode ser obtida da ação  $S$  em componentes,

$$F + \frac{g}{6} A^3 = 0, \quad (6.5)$$

essa equação não contém termos cinéticos, sendo puramente algébrica, isso indica que o campo  $F$  é um campo auxiliar. Isso também pode ser visto pelo fato que o termo que depende de  $F$  no funcional gerador  $Z$  é trivial: a integração em  $DF$  pode ser realizada facilmente utilizando a equação de movimento, dando origem a um termo constante independente dos campos.

Miller (1983a) observou que não convém fazer essa integração funci-

Miller, Robert D. C. 1983a. A simple component field method for susy effective potential calculations. *Physics Letters B* 124:59–63.

onal e eliminar o campo auxiliar  $F$  do funcional gerador, pois ele será útil no cálculo do potencial efetivo no método de *tadpoles*.

O intuito dessa seção é obter as regras de Feynman que serão utilizadas para o cálculo do potencial efetivos utilizando as técnicas descritas na seção 3.3.1. Para isso, as regras de Feynman serão obtidas para uma teoria deslocada em que trasladamos a teoria de seguinte forma:

$$A \rightarrow A + a; \quad (6.6)$$

$$F \rightarrow F + f, \quad (6.7)$$

o campo  $\psi$  não sofre deslocamento já que o valor esperado no vácuo do campo  $\psi$  deve ser nulo, já que assume-se não existir violação da simetria de Lorentz. Com isso obtemos a ação trasladada, denotada por  $S'$ ,

$$S' = S'^{(0)} + S'^{(1)} + S'^{(2)} + S'^{(3)} + S'^{(4)}. \quad (6.8)$$

Esta ação foi separada pelo número de potências de campos quânticos com os termos

$$S'^{(0)} = \int d^3 x \left[ \frac{1}{2} f^2 + \frac{g}{6} a^3 f \right], \quad (6.8a)$$

esse termo é constante e poderia ser eliminado, mas ele contribui para o cálculo do potencial efetivo no método de bolhas de vácuo

$$S'^{(1)} = \int d^3 x \left[ \left( f + \frac{g}{6} a^3 \right) F + \frac{g}{2} a^2 f A \right], \quad (6.8b)$$

$$S'^{(2)} = \int d^3 x \left[ \frac{1}{2} \left( F^2 + \psi^\alpha i \partial_\alpha^\beta \psi_\beta + A \partial^2 A \right) + \frac{g}{2} a^2 \psi^2 + \frac{g}{2} a^2 A F + \frac{g}{2} a f A^2 \right], \quad (6.8c)$$

$$S'^{(3)} = \int d^3 x \left[ g a A \psi^2 + \frac{g}{2} a A^2 F + \frac{g}{6} f A^3 \right], \quad (6.8d)$$

$$S'^{(4)} = \int d^3 x \left[ \frac{g}{2} A^2 \psi^2 + \frac{g}{6} A^3 F \right]. \quad (6.8e)$$

Da parte de interação  $S'^{(3)} + S'^{(4)}$  podemos ler os vértices de interação representados na fig. 6.1 na página oposta. Nela também está representado o vértice de zero pernas obtido de  $S'^{(0)}$ .

Os propagadores da teoria trasladada são obtidos da parte quadrática da ação da forma usual. Convém fazer as definições

$$m_a = \frac{g}{2} a^2; \quad (6.9a)$$

$$m_f = \sqrt{g a f}, \quad (6.9b)$$

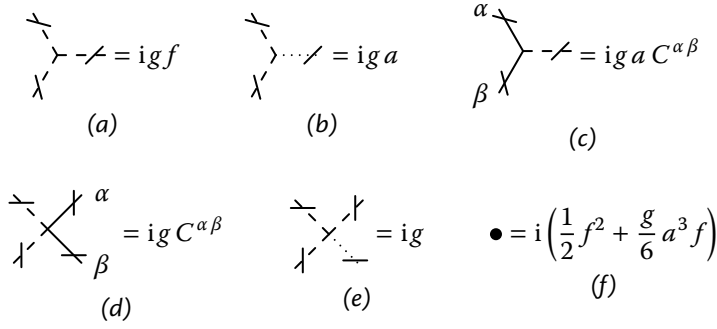


Figura 6.1.: Vértices do modelo Wess-Zumino, obtidos da ação de interação  $S'^{(3)} + S'^{(4)}$  e o vértice de zero pernas obtido de  $S'^{(0)}$ .

o que leva a expressão

$$S'^{(2)} = \int d^3 x \frac{1}{2} \left( F^2 + \psi^\alpha i \partial_{\alpha}^{\beta} \psi_{\beta} + A \partial^2 A + m_a \psi^\alpha \psi_{\alpha} + 2 m_a A F + m_f^2 A^2 \right). \quad (6.10)$$

Para calcular os propagadores escrevemos  $S'^{(2)}$  da forma

$$S'^{(2)} = \int d^3 x \left\{ \frac{1}{2} \left[ \Phi^T \mathcal{M} \Phi + \psi^\alpha \left( i \partial_{\alpha}^{\beta} + m_a \delta_{\alpha}^{\beta} \right) \psi_{\beta} \right] \right\}, \quad (6.11)$$

onde

$$\Phi = \begin{pmatrix} A & F \end{pmatrix} \quad (6.12a)$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \partial^2 + m_f^2 & m_a \\ m_a & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.12b)$$

Usando que a inversa da matriz  $\mathcal{M}$  é dada por

$$\mathcal{M}^{-1} = \frac{1}{\partial^2 - m_a^2 + m_f^2} \begin{pmatrix} 1 & -m_a \\ -m_a & \partial^2 + m_f^2 \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

e a eq. (3.26a) na página 17 obtemos os propagadores, no espaço de momentos, representados na fig. 6.2 na página seguinte

## 6.2 POTENCIAL EFETIVO

$$\frac{1}{i} \Delta = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} Z_0[J] \Big|_{J=0} \quad [3.26a]$$

O potencial efetivo  $V$  será calculado de forma perturbativa, expandindo em termos do número de laços, o que é equivalente a uma expansão em potências de  $\hbar$  (ver detalhes na seção 3.1.6), assim  $V$  pode ser escrito como

$$V = V^{(0)} + V^{(1)} + V^{(2)} + O(\hbar^3), \quad (6.14)$$

onde  $V^{(n)}$  inclui todas as contribuições dos gráficos com  $n$ -laços ao potencial efetivo.

$$\begin{aligned}
 A \text{ --- } A &= \frac{i}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} \\
 &(a) \\
 A \text{ --- } F &= -i \frac{m_a}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} \\
 &(b) \\
 F \text{ --- } F &= -i \frac{k^2 - m_f^2}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} \\
 &(c) \\
 \psi \frac{\alpha}{\beta} \psi &= -i \frac{k_{\alpha\beta} - m_a C_{\alpha\beta}}{k^2 + m_a^2} \\
 &(d)
 \end{aligned}$$

Figura 6.2.: Propagadores do modelo Wess-Zumino obtidos da parte quadrática da ação  $S^{(2)}$ .

Nas próximas seções irei calcular  $V^{(0)}$ ,  $V^{(1)}$  e  $V^{(2)}$ . A técnica utilizada está detalhada na seção 3.3.1, em resumo:

- Jackiw, R. 1974. Functional evaluation of the effective potential. *Physical Review D* 9:1686–1701.
- $V^{(0)}$  e  $V^{(2)}$  será calculado pelo *método das bolhas de vácuo* (Jackiw 1974);
- $V^{(1)}$  pelo *método de tadpoles* (Weinberg 1973).

Weinberg, Steven. 1973. Perturbative calculations of symmetry breaking. *Physical Review D* 7:2887–2910.

### 6.2.1 Aproximação de 0-laço (árvore)

$$S^{(0)} = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} f^2 + \frac{g}{6} a^3 f \right] \tag{6.8a}$$

O único gráfico que contribui nessa ordem é o gráfico construído somente do vértice de zero pernas obtido do termo  $S^{(0)}$ , eq. (6.8a) na página 42, assim o valor da função de vértice de zero pernas (*bolha de vácuo*) com nenhum (0) laço,  $\Gamma_0^{(0)}$ , é dado por

$$\Gamma_0^{(0)} = \frac{1}{2} f^2 + \frac{g}{6} a^3 f. \tag{6.15}$$

Pelo método de bolhas de vácuo o valor de  $V^{(0)}$  pode ser escrito como

$$V^{(0)} \equiv -\Gamma_0^{(0)} = -\frac{1}{2} f^2 - \frac{g}{6} a^3 f. \tag{6.16}$$

Lembrando que  $V^{(0)}$  nada mais é do que o potencial clássico, i.e.,  $\hbar \rightarrow 0$ . Esse resultado pode ser lido diretamente da ação  $S$  do modelo tomando os campos como campos clássicos.

## 6.2.2 Aproximação de 1-laço

Nessa ordem será utilizado o método de *tadpoles* de Weinberg. Os gráficos que contribui para a função de vértice de uma perna e contendo 1-laço  $\Gamma_1^{(1)}$  está representado na fig. 6.3.

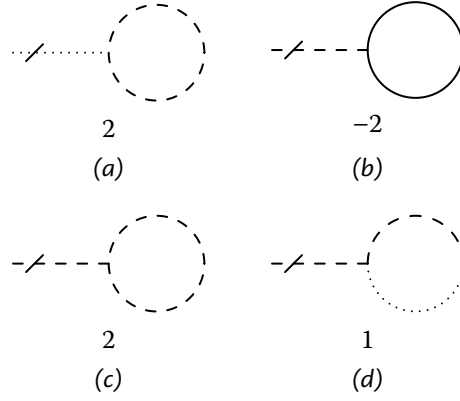


Figura 6.3.: Tadpoles que contribuem para o potencial efetivo do modelo Wess-Zumino em 1-laço. Os números abaixo dos gráficos são os fatores de simetria com um sinal devido a laços fermiônicos.

A função de vértice com uma perna externa do campo  $F$ ,  $\Gamma_{1(F)}^{(1)}$ , é dada pelo gráfico 6.3a e pode ser escrita como

$$\Gamma_{1(F)}^{(1)} = \frac{i}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{g a}{k^2 + m_a^2 - m_f^2}, \quad (6.17a)$$

usando a eq. (A.3) na página 61 obtemos

$$\Gamma_{1(F)}^{(1)} = \frac{i g a}{2} \mathcal{I}_1(m_a^2 - m_f^2) \quad (6.17b)$$

$$\mathcal{I}_1(m^2) = -\frac{i}{4\pi} m \quad [A.3]$$

e finalmente

$$\Gamma_{1(F)}^{(1)} = \frac{g a}{8\pi} \sqrt{m_a^2 - m_f^2}. \quad (6.17c)$$

A função de vértice com uma perna externa do campo  $A$ ,  $\Gamma_{1(A)}^{(1)}$ , é dada pelos gráficos 6.3b, 6.3c e 6.3d e pode ser escrita como

$$\Gamma_{1(A)}^{(1)} = \Gamma_{1(A,b)}^{(1)} + \Gamma_{1(A,c)}^{(1)} + \Gamma_{1(A,d)}^{(1)}. \quad (6.18)$$

Os gráficos 6.3b e 6.3c diferem apenas por um termo constante multiplicativo e podem mais facilmente ser calculados juntos, assim

$$\Gamma_{1(A,b+c)}^{(1)} = i \left( \frac{g f}{2} - g a m_a \right) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_a^2 - m_f^2}. \quad (6.19)$$

Essa expressão para  $\Gamma_{1(A,b+c)}^{(1)}$  é suficiente similar a expressão de  $\Gamma_{1(F)}^{(1)}$  que podemos escrever por inspeção que

$$\Gamma_{1(A,b+c)}^{(1)} = \frac{g f - g a m_a}{8\pi} \sqrt{m_a^2 - m_f^2} \quad (6.20)$$

A expressão para o último gráfico que contribui para  $\Gamma_{1(A)}^{(1)}$  envolve o laço fermiônico é dado pelo seguinte

$$\Gamma_{1(A, d)}^{(1)} = i g a m_a \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_a^2} \quad (6.21)$$

onde foi utilizado que  $C^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha}^{\alpha} = 2$  e que  $k_{\alpha\beta}$  é um bi-vetor.

$\Gamma_{1(A, d)}^{(1)}$  pode ser obtido, novamente, por inspeção da expressão de  $\Gamma_{1(F)}^{(1)}$  notando que ela difere por  $m_a^2 - m_f^2 \rightarrow m_a^2$  e uma constante multiplicativa independente de  $k$ . Finalmente o resultado é

$$\Gamma_{1(A, d)}^{(1)} = \frac{g a m_a^2}{4\pi} \quad (6.22)$$

Assim a derivada do potencial é dada pelo método de *tadpoles* por

$$\frac{\partial V^{(1)}}{\partial f} \equiv -\Gamma_{1(F)}^{(1)} = -\frac{g a}{8\pi} \sqrt{m_a^2 - m_f^2} \quad (6.23a)$$

$$\frac{\partial V^{(1)}}{\partial a} \equiv -\Gamma_{1(A)}^{(1)} = -\frac{g f - g a m_a}{8\pi} \sqrt{m_a^2 - m_f^2} - \frac{g a m_a^2}{4\pi}. \quad (6.23b)$$

Integrando em  $f$  e  $a$ , respectivamente, obtemos

$$V^{(1)}(a, f) = \frac{(m_a^2 - m_f^2)^{3/2}}{12\pi} + H_1(a) \quad (6.24a)$$

$$V^{(1)}(a, f) = \frac{(m_a^2 - m_f^2)^{3/2} - m_a^3}{12\pi} + H_2(f), \quad (6.24b)$$

onde  $H_1(a)$  e  $H_2(f)$  são funções indeterminadas do seus respectivos argumentos.

Comparando é fácil ver que para as duas expressões serem consistentes temos que ter

$$H_1(a) = -\frac{m_a^3}{12\pi} + h \quad (6.25a)$$

$$H_2(f) = h \quad (6.25b)$$

onde  $h$  é uma constante independente de  $a$  e  $f$ .

Podemos finalmente escrever o potencial efetivo na aproximação de 1-laço

$$V^{(1)} = \frac{1}{12\pi} \left[ (m_a^2 - m_f^2)^{3/2} - m_a^3 \right]. \quad (6.26)$$

### 6.2.3 Aproximação de 2-laços

Nessa ordem será utilizado o método de bolhas de vácuo de Jackiw, os gráficos de Feynman que contribuem para a função de vértice de zero pernas e dois laços  $\Gamma_0^{(2)}$  são em número muito maior do que os que contribuem para as ordens menores. Eles estão representados na fig. 6.4,

que também contém os fatores de simetria. Cada gráfico será calculado separadamente e  $\Gamma_0^{(2)}$  dado pela soma

$$\Gamma_0^{(2)} = \Gamma_{0(a)}^{(2)} + \Gamma_{0(b)}^{(2)} + \Gamma_{0(c)}^{(2)} + \Gamma_{0(d)}^{(2)} + \Gamma_{0(e)}^{(2)} + \Gamma_{0(f)}^{(2)}, \quad (6.27)$$

onde os índices, (a), (b), etc. são os da fig. 6.4. Nas expressões abaixo o valor do fator de simetria de cada gráfico já está incluído.

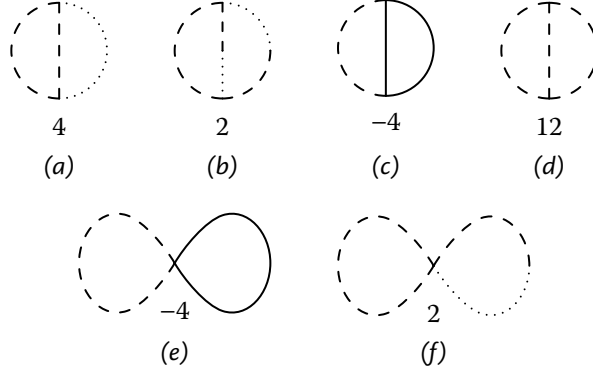


Figura 6.4.: Bolhas de vácuo que contribuem para o potencial efetivo do modelo Wess-Zumino em 2-laços. Os números abaixo dos gráficos são os fatores de simetria com um sinal devido a laços fermiônicos.

Irei começar com os dois gráficos mais simples da fig. 6.4, os gráficos da fig. 6.4e e fig. 6.4f. As integrais de laço desses gráficos são separáveis assim o gráfico é o produto de dois gráficos de 1-laço.

O gráfico da fig. 6.4e contribui com o seguinte fator a  $\Gamma_0^{(2)}$

$$\Gamma_{0(e)}^{(2)} = \frac{1}{4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} \times g C^{\alpha\beta} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p_{\alpha\beta} - m_a C_{\alpha\beta}}{p^2 + m_a^2}, \quad (6.28a)$$

contraindo  $C^{\alpha\beta}$  com  $C_{\alpha\beta}$  e  $p_{\alpha\beta}$  usando  $C^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha}^{\alpha} = 2$  e que  $p_{\alpha\beta}$  é um bi-vetor, temos

$$\Gamma_{0(e)}^{(2)} = -\frac{g m_a}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 + m_a^2}, \quad (6.28b)$$

usando a eq. (A.3) na página 61, o resultado pode ser escrito como

$$\Gamma_{0(e)}^{(2)} = -\frac{g m_a}{2} \mathcal{I}_1(m_a^2 - m_f^2) \mathcal{I}_1(m_a^2) = \frac{g m_a^2}{32 \pi^2} \sqrt{m_a^2 - m_f^2}. \quad (6.28c)$$

O segundo gráfico com integrações separáveis, fig. 6.4f, contribui com

$$\Gamma_{0(f)}^{(2)} = \frac{g}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m_a}{p^2 + m_a^2 - m_f^2}. \quad (6.29a)$$

$$\mathcal{I}_1(m^2) = -\frac{i}{4\pi} m \quad [A.3]$$

$$\mathcal{I}_1(m^2) = -\frac{i}{4\pi} m \quad [\text{A.3}]$$



[Fig. 6.4a]

Usando a integral da eq. (A.3) temos o resultado

$$\Gamma_{0(f)}^{(2)} = \frac{g m_a}{2} \mathcal{I}_1(m_a^2 - m_f^2) \mathcal{I}_1(m_a^2 - m_f^2) = -\frac{g m_a}{32\pi^2} (m_a^2 - m_f^2). \quad (6.29b)$$

Os quatro gráficos restantes, fig. 6.4a a 6.4d na página precedente, envolvem integrais com superposição (*overlap*) o que causa integrações mais complicadas do que as dos gráficos 6.4e e 6.4f.

O gráfico da fig. 6.4a contribui com o seguinte fator a  $\Gamma_0^{(2)}$

$$\Gamma_{0(a)}^{(2)} = -\frac{i}{4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [ig a]^2 \frac{-i}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} \times \frac{-i}{(k+p)^2 + m_a^2 - m_f^2} \frac{i(p^2 - m_f^2)}{p^2 + m_a^2 - m_f^2}. \quad (6.30a)$$

Usando uma expressão da forma da eq. (A.1) obtemos

$$\Gamma_{0(a)}^{(2)} = \frac{g m_a}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} \times \frac{1}{(k+p)^2 + m_a^2 - m_f^2} \left( 1 - \frac{m_a^2}{p^2 + m_a^2 - m_f^2} \right). \quad (6.30b)$$

$$\mathcal{I}_2(m_1^2, m_2^2) = -\frac{m_1 m_2}{16\pi^2} \quad [\text{A.4}]$$

Usando as eq. (A.4) e (A.5) nas páginas 62–64

$$\mathcal{I}_3(m_1^2, m_2^2, m_3^2) \Gamma_{0(a)}^{(2)} = \frac{1}{32\pi^2} \times \log \frac{(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^2}{\mu^2} \quad [\text{A.5}]$$

$$\Gamma_{0(a)}^{(2)} = \frac{g m_a}{2} \left[ \mathcal{I}_2(m_a^2 - m_f^2, m_a^2 - m_f^2) - m_a^2 \mathcal{I}_3(m_a^2 - m_f^2, m_a^2 - m_f^2, m_a^2 - m_f^2) \right], \quad (6.30c)$$

e finalmente o resultado

$$\Gamma_{0(a)}^{(2)} = -\frac{g m_a}{64\pi^2} \left( m_a^2 \log \left[ \frac{m_a^2 - m_f^2}{\mu^2} \right] + 2(m_a^2 - m_f^2) \right). \quad (6.30d)$$

onde  $\mu$  é uma constante arbitraria com unidade de massa.

Agora o gráfico da fig. 6.4b contribui com



[Fig. 6.4b]

$$\Gamma_{0(b)}^{(2)} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [ig a]^2 \frac{-i m_a}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} \times \frac{i}{(k+p)^2 + m_a^2 - m_f^2} \frac{-i m_a}{p^2 + m_a^2 - m_f^2}. \quad (6.31a)$$

Usando a eq. (A.5) na página 64 podemos escrever o seguinte

$$\Gamma_{0(b)}^{(2)} = g m_a^3 \mathcal{I}_3(m_a^2 - m_f^2, m_a^2 - m_f^2, m_a^2 - m_f^2), \quad (6.31b)$$



e obtemos o resultado

$$I_{0(b)}^{(2)} = \frac{g m_a^3}{32 \pi^2} \log \left[ \frac{m_a^2 - m_f^2}{\mu^2} \right]. \quad (6.31c)$$

O gráfico representado na fig. 6.4c é o mais complicado em 2-laços, a sua contribuição pode ser escrita como

$$I_{0(c)}^{(2)} = \frac{i}{4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{i [i g a C^{\alpha\delta}] [i g a C^{\beta\gamma}]}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} \\ \times \frac{-i (k+p)_{\alpha\beta} - m_a C_{\alpha\beta} - i p_{\gamma\delta} - m_a C_{\gamma\delta}}{2} \frac{1}{(k+p)^2 + m_a^2} \frac{1}{2} \frac{1}{p^2 + m_a^2}. \quad (6.32a)$$

Realizando as contrações de  $C_{\alpha\beta}$  e  $p_{\alpha\beta}$ , usando que  $p_{\alpha\beta}$  é um bivector e a relação eq. (2.28) na página 10, temos o seguinte

$$I_{0(c)}^{(2)} = -\frac{g m_a}{8} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} \\ \times \frac{p^2 + k \cdot p + 2 m_a^2}{(k+p)^2 + m_a^2} \frac{1}{p^2 + m_a^2}. \quad (6.32b)$$

Usando uma expressão da forma da eq. (A.1) obtemos

$$I_{0(c)}^{(2)} = -\frac{g m_a}{8} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} \\ \times \left( 1 - \frac{k^2/2 - p^2/2 - 3/2 m_a^2}{(k+p)^2 + m_a^2} \right) \frac{1}{p^2 + m_a^2}. \quad (6.32c)$$

Usando as eq. (A.4) e (A.5) nas páginas 62–64

$$I_{0(c)}^{(2)} = -\frac{g m_a}{8} \left[ \mathcal{I}_2(m_a^2 - m_f^2, m_a^2) \right. \\ \left. + \frac{3 m_a^2 - m_f^2}{2} \mathcal{I}_3(m_a^2 - m_f^2, m_a^2, m_a^2) \right], \quad (6.32d)$$

e finalmente

$$I_{0(c)}^{(2)} = \frac{g m_a}{128 \pi^2} \left[ m_a \sqrt{m_a^2 - m_f^2} \right. \\ \left. - \frac{3 m_a^2 - m_f^2}{2} \log \left( \frac{\sqrt{m_a^2 - m_f^2} + 2 m_a}{\mu} \right) \right]. \quad (6.32e)$$

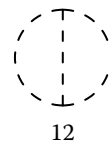
O gráfico da fig. 6.4d contribui com um termo similar ao da fig. 6.4b, calculado na eq. (6.31c),



[Fig. 6.4c]

$$C_{\alpha\beta} C^{\gamma\delta} = \delta_{\alpha}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\delta} - \delta_{\beta}^{\gamma} \delta_{\alpha}^{\delta}. \quad [2.28]$$

$$\frac{p^2}{p^2 + m^2} = 1 - \frac{m^2}{p^2 + m^2}, \quad [A.1]$$



[Fig. 6.4d]

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0(d)}^{(2)} &= -\frac{i}{12} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [igf]^2 \frac{i}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} \\
&\quad \times \frac{i}{(k+p)^2 + m_a^2 - m_f^2} \frac{i}{p^2 + m_a^2 - m_f^2} \\
&\equiv \frac{gf^2}{12 m_a^3} \Gamma_{0(b)}^{(2)} = \frac{g^2 f^2}{384 \pi^2} \log \left[ \frac{m_a^2 - m_f^2}{\mu^2} \right].
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Juntando todas as contribuições para  $\Gamma_0^{(2)}$  temos que  $V^{(2)}$  é

$$\begin{aligned}
V^{(2)} &\equiv \frac{g m_a}{16 \pi^2} [m_a^2 - m_f^2] - \frac{5 g m_a^2}{128 \pi^2} \sqrt{m_a^2 - m_f^2} \\
&\quad - \left( \frac{g m_a^3}{64 \pi^2} + \frac{g^2 f^2}{384 \pi^2} \right) \log \left[ \frac{m_a^2 - m_f^2}{\mu^2} \right] \\
&\quad + \frac{g m_a (3 m_a^2 - m_f^2)}{256 \pi^2} \log \left[ \frac{\sqrt{m_a^2 - m_f^2} + 2 m_a}{\mu} \right]
\end{aligned} \tag{6.34}$$

#### 6.2.4 Potencial efetivo até 2-laços

Somando todas contribuições com até 2-laços o potencial efetivo é dado por

$$\begin{aligned}
V &= V^{(0)} + V^{(1)} + V^{(2)} + \mathcal{O}(\hbar^3) = -\frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{12 \pi} \left[ (m_a^2 - m_f^2)^{3/2} - m_a^3 \right] \\
&\quad + \frac{g m_a}{16 \pi^2} [m_a^2 - m_f^2] - \frac{5 g m_a^2}{128 \pi^2} \sqrt{m_a^2 - m_f^2} \\
&\quad - \left( \frac{g m_a^3}{64 \pi^2} + \frac{g^2 f^2}{384 \pi^2} \right) \log \left[ \frac{m_a^2 - m_f^2}{\mu^2} \right] \\
&\quad + \frac{g m_a (3 m_a^2 - m_f^2)}{256 \pi^2} \log \left[ \frac{\sqrt{m_a^2 - m_f^2} + 2 m_a}{\mu} \right] + \mathcal{O}(\hbar^3).
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Vou partir de um formalismo de supercampos em três dimensões descrito em Gates et al. (1983). O cálculo do potencial será realizado até a segunda ordem na aproximação de laços e será feito em supercampos como descrito na seção 3.3.1 na página 29.

Gates, S. J., et al. 1983. Superspace, or one thousand and one lessons in supersymmetry. *Frontiers of Physics* 58:1–548.

### 7.1 REGRAS DE FEYNMAN

A ação do modelo Wess-Zumino em (2+1)-dimensões em supercampos assume a seguinte forma

$$S[\Phi] = \int d^2\theta d^3x \left[ \frac{1}{2} \Phi(x, \theta) D^2 \Phi(x, \theta) + \frac{1}{4!} g \Phi^4(x, \theta) \right]. \quad (7.1)$$

O supercampo escalar  $\Phi(x, \theta)$  pode ser expandido em potência de  $\theta$ ,

$$\Phi(x, \theta) \equiv A(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) - \theta^2 F(x). \quad (7.2)$$

O funcional gerador  $Z[J]$  é dado por

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi] + iJ \cdot \Phi}, \quad (7.3)$$

onde  $\mathcal{D}\Phi \propto DA D\psi^\dagger D\psi DF$  representa uma integração funcional.

Queremos obter as regras de Feynman no formalismo de supercampos com o intuito de utilizá-las no cálculo do potencial efetivo usando os métodos de Jackiw e Weinberg para cálculo do potencial efetivo usando as técnicas de supergráficos.

Para isso iremos transladar a teoria pela seguinte constante

$$\phi(\theta) = a - \theta^2 f. \quad (7.4)$$

A ação translada  $S'[\Phi]$  que obtemos é

$$S'[\Phi] = \int d^2\theta d^3x \left[ \frac{1}{2} (\Phi D^2 \Phi + 2\Phi D^2 \phi + \phi D^2 \phi) + \frac{1}{4!} g (\Phi^4 + 4\Phi^3 \phi + 6\Phi^2 \phi^2 + 4\Phi \phi^3 + \phi^4) \right]. \quad (7.5)$$

Em particular a parte quadrática  $S'^{(2)}$  é dada por

$$S'^{(2)} = \int d^2\theta d^3x \left[ \frac{1}{2} \Phi \left( D^2 + \frac{1}{2} g \phi^2 \right) \Phi \right], \quad (7.6)$$

e a de interação  $S'_i = S'^{(3)} + S'^{(4)}$  por

$$S'_i = \int d^2\theta d^3x \left[ \frac{1}{4!} g \Phi^4 + \frac{1}{3!} g \phi \Phi^3 \right]. \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \quad \theta \text{ --- } \text{---} = ig \phi(\theta) \\
 & \text{(b)} \quad \theta \text{ --- } \text{---} = ig \\
 & \text{(c)} \quad \bullet = i \frac{1}{2} \phi(\theta) D^2 \phi(\theta) + i \frac{1}{4!} \phi^4(\theta)
 \end{aligned}$$

Figura 7.1.: Vértices no formalismo de supercampos do modelo Wess-Zumino, obtidos da ação de interação  $S'_1$  e o vértice de zero pernas obtido de  $S^{(0)}$ .

A partir de  $S'_1$  podemos escrever os vértices de interação descritos na fig. 7.1.

Para calcular o propagador de Feynman definimos o operador  $\mathcal{M}$  por

$$\mathcal{M} \equiv D^2 + \frac{1}{2} g \phi^2 = D^2 + \frac{g}{2} a^2 - \theta^2 a f g, \quad (7.8)$$

e usamos ele para escrever que

$$S^{(2)} = \int d^2 \theta d^3 x \frac{1}{2} \Phi \mathcal{M} \Phi. \quad (7.9)$$

Agora sendo a inversa da matriz  $\mathcal{M}$  definida por

$$\mathcal{M} \mathcal{M}^{-1} = 1, \quad (7.10)$$

usamos a eq. (3.26a) na página 17 para escrever que o propagador do campo  $\Phi$  é dado por

$$\frac{1}{i} \Delta_{12} = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_1} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_2} Z_0[J] \Big|_{J=0} \quad \Phi \frac{\text{---}}{\theta \quad \theta'} \Phi = \langle \Phi(k, \theta) \Phi(-k, \theta') \rangle = \frac{1}{i} \mathcal{M}^{-1} \delta^2(\theta - \theta'). \quad (7.11)$$

[3.26a]

Precisamos calcular explicitamente  $\mathcal{M}^{-1}$ .

Note que por causa de  $\mathcal{M}$  ser derivado da teoria translada a forma usual — e simples — do propagador livre em supercampos não pode ser usada já, que a dependência explicita em  $\theta$  em  $\mathcal{M}$  é equivalente a uma quebra de supersimetria, note, porém, que estamos tratando da teoria translada e não diretamente da teoria física e essa quebra de supersimetria é esperada.

Iremos utilizar a técnica desenvolvida por Helayël-Neto et al. para calcular  $\mathcal{M}^{-1}$  que foi descrita na seção 3.3.1.2 na página 29.

Lembrando a definição dos  $P_n$

$$\begin{aligned}
 P_0 &= 1, & P_1 &= D^2, & P_2 &= \theta^2, \\
 P_3 &= \theta^\alpha D_\alpha, & P_4 &= \theta^2 D^2, & P_5 &= i \partial_{\alpha\beta} \theta^\alpha D^\beta,
 \end{aligned} \quad (7.12)$$

podemos utiliza-los para escrever que

$$\mathcal{M} = m_a P_0 + P_1 - m_f^2 P_2 \quad (7.13)$$

onde definimos as seguintes constantes

$$m_a = \frac{g}{2} a^2, \quad (7.14a)$$

$$m_f = \sqrt{g a f}, \quad (7.14b)$$

Agora escrevemos o seguinte *ansatz* para  $\mathcal{M}^{-1}$

$$\mathcal{M}^{-1} = \sum_{n=0}^5 c_n P_n = c_n P_n. \quad (7.15)$$

Iremos fixar  $\{c_n\}$  de modo que  $\mathcal{M}^{-1}$  satisfaça a eq. (7.10) na página anterior.

Usando a tabela de multiplicação da tabela 3.1 na página 31 e resolvendo o sistema encontrado para  $\{c_n\}$  obtemos os seguintes valores no espaço de momentos

$$c_0(k) = \frac{m_a}{k^2 + m_a^2 - m_f^2}, \quad (7.16a)$$

$$c_1(k) = -\frac{1}{k^2 + m_a^2 - m_f^2}, \quad (7.16b)$$

$$c_2(k) = -\frac{(k^2 - m_a^2)}{(k^2 + m_a^2)(k^2 + m_a^2 - m_f^2)}, \quad (7.16c)$$

$$c_3(k) = -\frac{m_a m_f^2}{(k^2 + m_a^2)(k^2 + m_a^2 - m_f^2)}, \quad (7.16d)$$

$$c_4(k) = -\frac{2 m_a m_f^2}{(k^2 + m_a^2)(k^2 + m_a^2 - m_f^2)}, \quad (7.16e)$$

$$c_5(k) = -\frac{m_f^2}{(k^2 + m_a^2)(k^2 + m_a^2 - m_f^2)}. \quad (7.16f)$$

Assim o propagador de Feynman para o supercampo  $\Phi$  é dado por

$$\Phi \frac{\text{---}}{\theta \quad \theta'} \Phi = \langle \Phi(k, \theta) \Phi(-k, \theta') \rangle = \frac{1}{i} c_n(k) P_n \delta^2(\theta - \theta') \quad (7.17)$$

com os  $\{c_n\}$  dados acima.

Para comparação com os resultados em componentes do capítulo anterior e as expressões derivadas no capítulo A, a seguinte identidade é útil

$$\frac{m_f^2}{(k^2 + m_a^2)(k^2 + m_a^2 - m_f^2)} = \frac{1}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} - \frac{1}{k^2 + m_a^2} \quad (7.18)$$

## 7.2 POTENCIAL EFETIVO

O potencial efetivo  $V$  será calculado de forma perturbativa, expandindo em termos do número de laços assim  $V$  pode ser escrito como

$$V = V^{(0)} + V^{(1)} + V^{(2)} + \mathcal{O}(\hbar^3), \quad (7.19)$$

onde  $V^{(n)}$  inclui todas as contribuições dos gráficos com  $n$ -laços ao potencial efetivo.

A técnica utilizada é semelhante a do capítulo anterior: 0 e 2-laços serão calculado utilizando o método de bolhas de vácuo de Jackiw e em 1-laço o método de *tadpoles* de Weinberg.

## 7.2.1 Aproximação de 0-laço (árvore)

O gráfico que contribui nessa ordem é dado pela parte independente do campo  $\Phi$  na ação, nomeadamente  $S'^{(0)}$ . Usando o vértice de zero pernas da fig. 7.1 na página 52 podemos escrever que a função de vértice de zero pernas é dada por

$$I_0^{(0)} = \int d^2\theta \frac{1}{2} \phi(\theta) D^2 \phi(\theta) + \frac{1}{4!} \phi^4(\theta). \quad (7.20)$$

Usando que

$$\phi(\theta) = a - \theta^2 f \quad (7.21)$$

$$\phi^4(\theta) = a^4 - \theta^2 4a^3 f \quad (7.22)$$

$$D^2 \phi = f \quad (7.23)$$

temos o seguinte

$$I_0^{(0)} = \int d^2\theta \frac{1}{2} (a f - \theta^2 f^2) + \frac{1}{4!} (a^4 - \theta^2 4a^3 f). \quad (7.24)$$

Fazendo a integração em  $\theta$

$$I_0^{(0)} = \frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{6} a^3 f. \quad (7.25)$$

Potencial efetivo então é dado pelo método de Jackiw por

$$V^{(0)}(a, f) \equiv -I_0^{(0)} = -\frac{1}{2} f^2 - \frac{1}{6} a^3 f. \quad (7.26)$$

## 7.2.2 Aproximação de 1-laço

Nessa ordem temos um gráfico que contribui para  $I_1^{(1)}$ , esse gráfico está representado na fig. 7.2 na página oposta.

Utilizando as regras de Feynman da sessão anterior podemos escrever que

$$I_1^{*(1)} = \frac{1}{2} g \int d^2\theta \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\Phi}(0, \theta) \phi(\theta) \langle \Phi \Phi \rangle_{(k, \theta, \theta')} \Big|_{\theta' = \theta}. \quad (7.27)$$

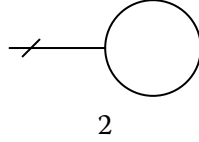


Figura 7.2.: Tadpole que contribui para o potencial efetivo do modelo Wess-Zumino em 1-laço no formalismo de supercampos. O número abaixo do gráfico é o fator de simetria.

Ao manipular integrais da forma

$$I = \int d^2 \theta \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \mathcal{F}(k, \theta, \theta') \Big|_{\theta'=\theta} \quad (7.28)$$

certo cuidado deve-se ter com a ordem das operações, principalmente em relação a integração por partes dos operadores diferenciais  $D_\alpha$  contidos em  $\mathcal{F}$ . Deve-se eliminar todas as derivadas de  $\theta$  antes de tomar o limite  $\theta' \rightarrow \theta$ .

Para calcular essas integrais a seguinte metodologia foi utilizada:

1. Reduziu-se o integrando  $\mathcal{F}(k, \theta, \theta')$  a simples polinômios de  $\theta$  e  $\theta'$ , e.g.,  $\theta^2$ ,  $\theta\theta'$ ,  $\theta'^2$ , utilizando as identidades da eq. (2.50f) na página 12 e lembrando que deve haver no máximo duas potências de  $\theta$  ou  $\theta'$  por termo. Não foi utilizado nenhuma integração por partes nos  $D_\alpha$ ;
2. O limite  $\theta' \rightarrow \theta$  pode então ser tomado;
3. Finalmente a integração em  $\theta$  é efetuada.

Para demonstrar essa sequência de operações vamos tomar o termo de  $\Gamma_{1(F)}^{*(1)}$  proporcional a  $\tilde{F}$ ,  $\Gamma_{1(F)}^{*(1)}$ , lembrando que

$$\tilde{\Phi}(0, \theta) \equiv \tilde{A}(0) + \theta^\alpha \tilde{\psi}_\alpha(0) - \theta^2 \tilde{F}(0) \quad (7.29)$$

podemos escrever o termo proporcional a  $\tilde{F}$  como

$$\Gamma_{1(F)}^{*(1)} = -\frac{g}{2} \int d^2 \theta \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \theta^2 \tilde{F}(0) \phi(\theta) \langle \Phi \Phi \rangle_{(k, \theta, \theta')} \Big|_{\theta'=\theta} \quad (7.30)$$

Substituindo as formas explícitas de  $\phi(\theta)$  e  $\langle \Phi(k, \theta) \Phi(-k, \theta') \rangle$  temos

$$\Gamma_{1(F)}^{*(1)} = i \frac{g}{2} \int d^2 \theta \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \theta^2 \tilde{F}(0) \right] \left[ a - \theta^2 f \right] \left[ c_n P_n \right] \left[ \delta^2(\theta - \theta') \right] \Big|_{\theta'=\theta} \quad (7.31)$$

Multiplicando os dois primeiros termos

$$\Gamma_{1(F)}^{*(1)} = i \frac{g}{2} \int d^2 \theta \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \theta^2 a \tilde{F}(0) \right] \left[ c_n P_n \right] \left[ \delta^2(\theta - \theta') \right] \Big|_{\theta'=\theta} \quad (7.32)$$

Agora multiplicado todos os três termos e usando as definições de  $P_n$

$$\Gamma_{1(F)}^{*(1)} = i \frac{g}{2} \int d^2 \theta \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ a \tilde{F}(0) \right] \left[ c_1 \theta^2 - c_0 \theta^2 \theta'^2 \right] \Big|_{\theta'=\theta}. \quad (7.33)$$

Tendo reduzido a expressão a simples potências de  $\theta$  e  $\theta'$  podemos tomar o limite  $\theta' \rightarrow \theta$

$$\Gamma_{1(F)}^{*(1)} = i \frac{a g}{2} \int d^2 \theta \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \theta^2 c_1 \tilde{F}(0). \quad (7.34)$$

Agora, finalmente, integramos em  $\theta$  para obter

$$\Gamma_{1(F)}^{*(1)} = -i \frac{a g}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} c_1 \tilde{F}(0). \quad (7.35)$$

Amputando a perna externa e usando o valor explícito de  $c_1$  temos o seguinte resultado

$$\Gamma_{1(F)}^{(1)} = i \frac{a g}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_a^2 - m_f^2}. \quad (7.36)$$

Da mesma forma podemos isolar a parte de  $\Gamma_{1(A)}^{*(1)}$  proporcional a  $\tilde{A}$ ,  $\Gamma_{1(A)}^{*(1)}$ . O que obtemos após realizar a integração em  $\theta$ , amputar a perna externa e substituir os valores de  $\{c_n\}$  é

$$\Gamma_{1(A)}^{(1)} = i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{gf/2}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} - \frac{g a m_a m_f^2}{(k^2 + m_a^2)(k^2 + m_a^2 - m_f^2)} \quad (7.37)$$

Podemos escrever essa última expressão na forma

$$\Gamma_{1(A)}^{(1)} = i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{gf/2 - g a m_a}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} + \frac{g a m_a}{k^2 + m_a^2} \quad (7.38)$$

A parte proporcional a  $\tilde{\psi}$  resulta em zero, como esperado por simetria de Lorentz.

As integrais de momento das eq. (7.36) e (7.38) podem ser calculadas utilizando as expressões da capítulo A na página 61.

Para mais detalhes consulte o capítulo anterior, onde as mesmas integrais aparecem e são derivadas com mais detalhes.

O resultado que obtemos é, para  $\Gamma_{1(F)}^{(1)}$

$$\Gamma_{1(F)}^{(1)} = \frac{g a}{8\pi} \sqrt{m_a^2 - m_f^2} \quad (7.39)$$

e para  $\Gamma_{1(A)}^{(1)}$

$$\Gamma_{1(A)}^{(1)} = \frac{gf - g a m_a}{8\pi} \sqrt{m_a^2 - m_f^2} + \frac{g a m_a^2}{4\pi} \quad (7.40)$$



Essas expressões pode então ser utilizadas para calcular o potencial efetivo utilizando o método de Weinberg. O resultado é o mesmo do capítulo passado, expresso na eq. (6.26) na página 46, nomeadamente

$$V^{(1)} = \frac{1}{12\pi} \left[ (m_a^2 - m_f^2)^{3/2} - m_a^3 \right]. \quad (6.26)$$

### 7.2.3 Aproximação de 2-laços

Nessa ordem dois gráficos contribuem para o potencial efetivos, esse gráficos estão representados na fig. 7.3.

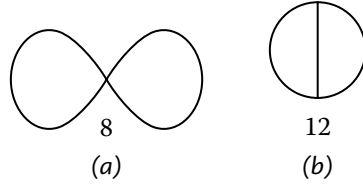


Figura 7.3.: Bolhas de vácuo que contribuem para o potencial efetivo do modelo Wess-Zumino em 2-laços no formalismo de supercampos. Os números abaixo dos gráficos são os fatores de simetria.

A contribuição para  $\Gamma_0^{(2)}$  pode ser escrito como

$$\Gamma_0^{(2)} = \Gamma_{0(a)}^{(2)} + \Gamma_{0(b)}^{(2)} \quad (7.41)$$

O primeiro gráfico, fig. 7.3a, é o mais simples dos dois e utilizando as regras de Feynman ele pode ser escrito como

$$\Gamma_{0(a)}^{(2)} = \frac{g}{8} \int d^2\theta \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle \Phi \Phi \rangle_{(k, \theta, \theta')} \langle \Phi \Phi \rangle_{(p, \theta, \theta')} \Big|_{\theta'=\theta} \quad (7.42)$$

Lembrando que os vários  $\{c_n\}$ , são funções do momento do propagador que descrevem podemos substituir a forma explícita dos propagadores, obtendo

$$\Gamma_{0(a)}^{(2)} = -\frac{g}{8} \int d^2\theta \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ c_n(k) P_n \delta^2(\theta - \theta') \right] \times \left[ c_m(p) P_m \delta^2(\theta - \theta') \right] \Big|_{\theta'=\theta} \quad (7.43)$$

Podemos expandir  $P_n \delta^2(\theta - \theta')$  separadamente em ambos os termos da mesma forma que fizemos em 1-laço. Depois pode-se realizar o limite  $\theta' \rightarrow \theta$ . O resultado dessas operações em  $\Gamma_{0(a)}^{(2)}$  nos leva ao seguinte

$$\Gamma_{0(a)}^{(2)} = -\frac{g}{8} \int d^2\theta \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ c_1(k) + \theta^2 c_4(k) \right] \left[ c_1(p) + \theta^2 c_4(p) \right]. \quad (7.44)$$

Multiplicando os termos e integrando em  $\theta$  obtemos

$$\Gamma_{0(a)}^{(2)} = \frac{g}{8} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} c_1(k) c_4(p) + c_1(p) c_4(k). \quad (7.45)$$

Podemos no segundo termo trocar  $p \leftrightarrow k$

$$\Gamma_{0(a)}^{(2)} = \frac{g}{4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} c_1(k) c_4(p). \quad (7.46)$$

Substituindo as expressões de  $c_1$  e  $c_4$  obtemos

$$\Gamma_{0(a)}^{(2)} = \frac{g}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m_a}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} \times \left( \frac{1}{p^2 + m_a^2 - m_f^2} - \frac{1}{p^2 + m_a^2} \right) \quad (7.47)$$

As integrais de momento podem ser calculadas utilizando as expressões da capítulo A na página 61.

Para mais detalhes consulte o capítulo anterior, onde as mesmas integrais aparecem e são derivadas com mais detalhes.

O resultado que obtemos é

$$\Gamma_{0(a)}^{(2)} = \frac{g m_a}{32 \pi^2} \left( m_a \sqrt{m_a^2 - m_f^2} - m_a^2 + m_f^2 \right) \quad (7.48)$$

O segundo gráfico de 2-laços, fig. 7.3b na página anterior, é muito mais complicado do que os anteriores. Usando as regras de Feynman ele pode ser escrito como

$$\Gamma_{0(b)}^{(2)} = \frac{i g^2}{12} \int d^2 \theta d^2 \theta' \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \langle \Phi \Phi \rangle_{(k, \theta, \theta')} \phi(\theta) \times \langle \Phi \Phi \rangle_{(k+p, \theta, \theta')} \phi(\theta') \langle \Phi \Phi \rangle_{(p, \theta, \theta')}. \quad (7.49)$$

O calculo dessa expressão foi realizado com ajuda de um computador. O método utilizado foi o mais elementar possível. Primeiro foi usado as eq. (2.50f) na página 12 para reduzir a simples potencias de  $\theta$  e  $\theta'$ , depois todos os termos foram multiplicados, o que totalizou em 5324 termos, e selecionou-se aqueles que contribuem após a integração em  $\theta$  e  $\theta'$ , apenas termos proporcionais a  $\theta^2 \theta'^2$  para um restante de 61 termos. Esses termos pode ser simplificado e colocados na seguinte forma apos a integrações em  $\theta$  e  $\theta'$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0(b)}^{(2)} &= \frac{g m_a}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} \frac{1}{(k+p)^2 + m_a^2 - m_f^2} \\
&\quad \times \left( 1 - \left[ m_a^2 + \frac{g f^2}{12 m_a^2} \right] \frac{1}{p^2 + m_a^2 - m_f^2} \right) \\
&\quad - \frac{g m_a}{8} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_a^2 - m_f^2} \\
&\quad \times \left( 1 - \frac{k^2/2 - p^2/2 - 3/2 m_a^2}{(k+p)^2 + m_a^2} \right) \frac{1}{p^2 + m_a^2}. \quad (7.50)
\end{aligned}$$

Esse resultado é o mesmo obtido no último capítulo, a renormalização dessa expressão segue o mesmo feito para componentes e não será repetida aqui.



## APÊNDICE: INTEGRAIS DE LAÇOS

As integrais calculadas aqui são obtidas pelo processo de *regularização de operadores* que foi descrito por McKeon e Sherry (1987) e Shiekh (1990).

Outras integrais que aparecem até dois laços podem ser reescritas como uma ou mais integrais desse apêndice mais o uso das identidades

$$\frac{p^2}{p^2 + m^2} = 1 - \frac{m^2}{p^2 + m^2}, \quad (\text{A.1})$$

e a *formula de Veltman* (Leibbrandt 1975; Shiekh 1990)

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (p^2)^\kappa \equiv 0, \quad (\text{A.2})$$

válida para  $\kappa$  complexo.

### A.1 INTEGRAIS DE 1-LAÇO

Definindo  $\mathcal{I}_1(m^2)$  pela seguinte expressão

$$\mathcal{I}_1(m^2) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m^2}, \quad (\text{A.3a})$$

fazendo uma rotação de Wick e introduzindo a normalização temos

$$\mathcal{I}_1 = i \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\bar{k}^2 + m^2} = i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{\varepsilon(1 + \alpha\varepsilon)}{[\bar{k}^2 + m^2]^{\varepsilon+1}} \quad (\text{A.3b})$$

agora realizando a integral em  $\bar{k}$

$$\mathcal{I}_1 = \frac{i}{(4\pi)^{3/2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{\Gamma(\varepsilon - \frac{1}{2})}{\Gamma(\varepsilon + 1)} \frac{\varepsilon(1 + \alpha\varepsilon)}{m^{2\varepsilon-1}} \right], \quad (\text{A.3c})$$

o limite pode ser realizado com auxílio da seguinte expressão

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{\Gamma(\varepsilon - \frac{1}{2})}{\Gamma(\varepsilon + 1)} \frac{\varepsilon(1 + \alpha\varepsilon)}{u^{\varepsilon-1/2}} \right] = -2\sqrt{\pi u} \quad (\text{A.3d})$$

e, finalmente, obtemos o seguinte resultado

$$\mathcal{I}_1(m^2) = -\frac{i}{4\pi} m. \quad (\text{A.3})$$

McKeon, D. G. C., e T. N. Sherry. 1987. Operator regularization and one-loop Green's functions. *Physical Review D* 35:3854–3872.

Shiekh, A. Y. 1990. Zeta function regularization of quantum field theory. *Canadian Journal of Physics* 68:620–629 ———. 2011. Operator regularization of Feynman diagrams at one-loop order. *Canadian Journal of Physics* 89, n° 3:289–294 ———. 2011. Operator regularization of Feynman diagrams at multiloop order. *Canadian Journal of Physics* 89, n° 11:1149–1154.

Leibbrandt, George. 1975. Introduction to the technique of dimensional regularization. *Reviews of Modern Physics* 47:849–876.

## A.2 INTEGRAIS DE 2-LAÇOS

Definindo  $\mathcal{I}_2(m_1^2, m_2^2)$  pela integral

$$\mathcal{I}_2(m_1^2, m_2^2) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_1^2} \frac{1}{(k+p)^2 + m_2^2}, \quad (\text{A.4a})$$

introduzindo  $k$  euclidiano por uma rotação de Wick

$$\mathcal{I}_2 = - \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \bar{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\bar{k}^2 + m_1^2} \frac{1}{(\bar{k} + \bar{p})^2 + m_2^2} \quad (\text{A.4b})$$

e usando a prescrição de normalização temos

$$\mathcal{I}_2 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \bar{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{[\bar{k}^2 + m_1^2]^{1+\varepsilon}} \frac{\varepsilon(1+\alpha\varepsilon)}{[(\bar{k} + \bar{p})^2 + m_2^2]^{1+\varepsilon}}, \quad (\text{A.4c})$$

realizando as integrais em  $\bar{k}$  e  $\bar{p}$ , temos

$$\mathcal{I}_2 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\varepsilon(1+\alpha\varepsilon)}{(4\pi)^3} \left[ \frac{\Gamma(\varepsilon - \frac{1}{2})}{\Gamma(\varepsilon + 1)} \frac{1}{m_1^{2\varepsilon-1}} \right] \left[ \frac{\Gamma(\varepsilon - \frac{1}{2})}{\Gamma(\varepsilon + 1)} \frac{1}{m_2^{2\varepsilon-1}} \right] \quad (\text{A.4d})$$

esses limites são os mesmo encontrados na eq. (A.3d) na página anterior, assim temos o resultado final

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{\Gamma(\varepsilon - \frac{1}{2})}{\Gamma(\varepsilon + 1)} \frac{\varepsilon(1+\alpha\varepsilon)}{u^{\varepsilon-\frac{1}{2}}} \right] = -2\sqrt{\pi u} \quad \mathcal{I}_2(m_1^2, m_2^2) = -\frac{m_1 m_2}{16\pi^2}. \quad (\text{A.4})$$

[A.3d]

A próxima integral a ser definida  $\mathcal{I}_3$  é a mais complicada encontrada em dois loops no modelo Wess-Zumino.

Definimos  $\mathcal{I}_3(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$  da seguinte forma

$$\mathcal{I}_3(m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_1^2} \frac{1}{(k+p)^2 + m_2^2} \frac{1}{p^2 + m_3^2}, \quad (\text{A.5a})$$

a integral em  $p$  é convergente e pode ser facilmente calculada com auxílio de parâmetros de Feynman  $x$

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k+p)^2 + m_2^2} \frac{1}{p^2 + m_3^2} = \frac{i}{8\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{[m_2^2(1-x) + m_3^2 x + k^2(1-x)x]^{1/2}} \quad (\text{A.5b})$$

usando esse resultado na equação acima temos

$$\mathcal{I}_3 = \frac{i}{8\pi} \int_0^1 dx \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_1^2} \frac{1}{[m_2^2(1-x) + m_3^2 x + k^2(1-x)x]^{1/2}}, \quad (\text{A.5c})$$

introduzindo um novo parâmetro de Feynman  $y$  e agrupando o parâmetro  $x$  de forma conveniente

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3 = & \frac{i}{16\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} [(1-x)xy]^{-1/2} \\ & \times \left[ k^2 + y \left[ m_2^2/x + m_3^2/(1-x) \right] + (1-y)m_1^2 \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.5d})$$

e introduzindo o regulador  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3 = & \frac{i}{16\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \varepsilon(1+\alpha\varepsilon) [(1-x)xy]^{-1/2+\varepsilon} \\ & \times \left[ k^2 + y \left[ m_2^2/x + m_3^2/(1-x) \right] + (1-y)m_1^2 \right]^{-1/2+\varepsilon}, \end{aligned} \quad (\text{A.5e})$$

a integração em  $k$  pode ser realizada, obtendo

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3 = & -\frac{1}{128\pi^{5/2}} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ [(1-x)xy]^{-1/2+\varepsilon} \varepsilon(1+\alpha\varepsilon) \right. \\ & \left. \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon + \frac{1}{2})} \times \left[ y \left[ m_2^2/x + m_3^2/(1-x) \right] + (1-y)m_1^2 \right]^{-\varepsilon} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.5f})$$

o limite pode ser feito com auxílio da expressão

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \frac{\varepsilon(1+\alpha\varepsilon)}{v^{1/2-\varepsilon} u^\varepsilon} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon + \frac{1}{2})} \right\} = -\frac{2}{\sqrt{v}\pi} (\alpha + \log u), \quad (\text{A.5g})$$

que permite escrever:

$$\mathcal{I}_3 = \frac{1}{64\pi^3} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{\alpha + \log \left( y \left[ m_2^2/x + m_3^2/(1-x) \right] + (1-y)m_1^2 \right)}{[(1-x)xy]^{1/2}}, \quad (\text{A.5h})$$

a integral em  $y$  pode ser resolvida se usarmos o seguinte resultado

$$\int_0^1 dy \frac{\log(py+q)}{\sqrt{2}} = 2 \log(p+q) + 4 \frac{\tan^{-1} \sqrt{\frac{p}{q}}}{\sqrt{\frac{p}{q}}} - 4, \quad (\text{A.5i})$$

já que a integral da eq. (A.5h) assume essa forma quando tomamos  $p$  e  $q$  como

$$p = \frac{m_2^2}{x} + \frac{m_3^2}{1-x} - m_1^2, \quad (\text{A.5j})$$

$$q = m_1^2, \quad (\text{A.5k})$$

o que nos leva ao resultado (onde absorveu-se valores numéricos constantes na definição de  $\alpha$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3 = & \frac{1}{32\pi^3} \int_0^1 dx \frac{1}{[x(1-x)]^{1/2}} \\ & \left[ \log \left( \frac{m_2^2}{x} + \frac{m_3^2}{1-x} \right) + \alpha + 2 \frac{\tan^{-1} \left[ \frac{1}{x} \frac{m_2^2}{m_1^2} + \frac{1}{1-x} \frac{m_3^2}{m_1^2} - 1 \right]^{1/2}}{\left[ \frac{1}{x} \frac{m_2^2}{m_1^2} + \frac{1}{1-x} \frac{m_3^2}{m_1^2} - 1 \right]^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5l})$$

usando que

$$\int_0^1 dx \frac{1}{[x(1-x)]^{1/2}} \log \left( \frac{m_2^2}{x} + \frac{m_3^2}{1-x} \right) = \pi \log(m_2 + m_3)^2 + \pi \log 4 \quad (\text{A.5m})$$

podemos realizar, parcialmente, a última integração no parâmetro  $x$  (novamente absorvendo valores em  $\alpha$ )

$$\mathcal{I}_3(m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \frac{1}{32\pi^3} \left[ \log(m_2 + m_3)^2 + \alpha + f \left( \frac{m_2^2}{m_1^2}, \frac{m_3^2}{m_1^2} \right) \right], \quad (\text{A.5n})$$

onde definimos a seguinte função

$$f(a, b) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{[x(1-x)]^{1/2}} \frac{\tan^{-1} \left( \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x} - 1 \right)^{1/2}}{\left( \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x} - 1 \right)^{1/2}}. \quad (\text{A.5o})$$

A integral na definição de  $f$  é muito complicada para ser obtida analiticamente, porém podemos determinar  $\mathcal{I}_3(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$  sem precisar calcular  $f$  explicitamente (Tan, Tekin e Hosotani 1997). Para isso notemos que:

$$\mathcal{I}_3(0, m_2^2, m_3^2) = \frac{1}{32\pi^3} \left[ \log(m_2 + m_3)^2 + \alpha \right], \quad (\text{A.5p})$$

já que:

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} \sqrt{\frac{a}{c} - 1}}{\sqrt{\frac{a}{c} - 1}} = 0. \quad (\text{A.5q})$$

A única dependência em  $m_1$  está no termo  $f$  e ele é zero para  $m_1 = 0$ , assim podemos escrever que:

$$\mathcal{I}_3(m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \mathcal{I}(0, m_2^2, m_3^2) + \int_0^{m_1} dm_1 \frac{\partial}{\partial m_1} \mathcal{I}(m_1^2, m_2^2, m_3^2). \quad (\text{A.5r})$$

É possível mostrar que (Tan, Tekin e Hosotani 1997):

$$\frac{\partial}{\partial m_1} \mathcal{I}_3(m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (\text{A.5s})$$

usando este resultado em (A.5r) juntamente com (A.5p), temos o resultado desejado:

$$\mathcal{I}_3(m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \frac{1}{32\pi^3} \log \frac{(m_1 + m_2 + m_3)^2}{\mu^2}, \quad (\text{A.5})$$

onde utilizamos o parâmetro arbitrário  $\alpha$  para definir um novo parâmetro com unidade de massa  $\mu$ .



## CONCLUSÃO

---

Nesse trabalho estudamos como é realizado o cálculo do potencial efetivo em teorias supersimétricas em 2 + 1-dimensões. O potencial efetivo é utilizado para decidir se o vácuo, ponto de mínimo do potencial efetivo, é supersimétrico ou apresenta quebra de supersimetria.

Existem duas formas principais para realizar o cálculo do potencial efetivo supersimétrico: componentes e supercampos.

Em componentes o cálculo é convencional, realizado da mesma forma que usualmente é feito com teorias quânticas de campo. A grande vantagem nesse formalismo é que os gráficos são individualmente mais simples dos que os obtidos em supercampos, porém são em número maior.

No modelo Wess-Zumino são 11 gráficos em componentes contra 4 em supercampos. A desvantagem é que os cancelamentos que usualmente ocorrem em teorias supersimétricas só são apreciados quando as contribuições de todos os gráficos são somadas.

Em supercampos, apesar do número menor de gráficos, cada um deles é muito mais complexo do que os obtidos em componentes, a razão disso é que os propagadores da teoria deslocada utilizados nos métodos de Jackiw e Weinberg é muito mais complexo devido a ter um termo que tem a mesma origem de uma teoria que apresenta quebra explícita de supersimetria. As ideias de Helayël-Neto et.al. podem ser utilizadas para obter um propagador, mas esse propagador ainda tem uma forma complexa demais.

Um propagador que permite manipular mais facilmente as expressões que aparecem no cálculo do potencial efetivo é de fundamental importância para o cálculo de modelos mais complexos. Esse é o método utilizado por Higashijima e Nishinaka (2009) para calcular o potencial efetivo do modelo  $CP^{N-1}$ . Nesse trabalho Higashijima e Nishinaka introduzem um par de novas “derivadas covariantes”

$$E_\alpha = D_\alpha + \frac{1}{2} m \theta_\alpha \quad (8.1)$$

$$H_\alpha = D_\alpha - \frac{1}{2} m \theta_\alpha \quad (8.2)$$

essas derivadas permitem, como desenvolvido pelos autores, manipulações que estão mais no espírito das técnicas de supergráficos desenvolvidos para teorias sem quebra explícita de simetria. Permitindo integrações por partes no vértices e manipulações gráficas.

Outro ponto importante é que ainda é escassa na literatura modelos onde a quebra dinâmica de supersimetria ocorre. Intriligator, Seiberg

Higashijima, Kiyoshi, e Takahiro Nishinaka. 2009. All orders analysis of the three dimensional  $CP^{N-1}$  model in the  $1/N$  expansion. *Physical Review D* 79:065034.

Intriligator, Kenneth, Nathan Seiberg e David Shih. 2006. Dynamical susy breaking in meta-stable vacua. *Journal of High Energy Physics* 2006:021.

e Shih (2006) descrevem a possibilidade de modelos onde o vácuo real da teoria pode ser supersimétrico, porém esses modelos podem ter um vácuo meta-estável que apresenta quebra de supersimetria e que tenha tempo de meia vida muito maior do que a idade do universo de forma que é possível propor que o universo ainda esteja nesse estado meta-estável. Intriligator, Seiberg e Shih mostram que a QCD supersimétrica com  $\mathcal{N} = 1$  em  $3 + 1$ -dimensões apresenta a existência de um vácuo meta-estável. Os autores sugerem que a presença de um vácuo meta-estável pode ser genérica em teoria de campos supersimétricas ao contrário da quebra dinâmica que é exclusiva de uma classe diminuta de modelos.

## BIBLIOGRAFIA

---

- Coleman, Sidney. 1988. *Aspects of symmetry: Selected Erice lectures*. Cambridge University Press. ISBN: 978-05-2131-827-3.
- Coleman, Sidney, e Jeffrey Mandula. 1967. All possible symmetries of the  $S$  matrix. *Physical Review* 159:1251–1256. doi:10.1103/PhysRev.159.1251.
- Coleman, Sidney R., e Erick J. Weinberg. 1973. Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking. *Physical Review D* 7:1888–1910. doi:10.1103/PhysRevD.7.1888.
- Dias, Alex G., M. Gomes e A. J. da Silva. 2004. Dynamical breakdown of symmetry in  $(2 + 1)$  dimensional model containing the Chern-Simons field. *Physical Review D* 69:065011. doi:10.1103/PhysRevD.69.065011.
- Feynman, Richard P., e A. R. Hibbs. 1965. *Quantum mechanics and path integrals*. McGraw-Hill. ISBN: 978-00-7020-650-2.
- Feynman, R. P. 1948. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics* 20:367–387. doi:10.1103/RevModPhys.20.367.
- Gallegos, E. A., e A. J. da Silva. 2011. Supergraph techniques for  $D = 3$ ,  $\mathcal{N} = 1$  broken supersymmetric theories. *Physical Review D* 84:065009. doi:10.1103/PhysRevD.84.065009.
- Gates, S. J., Marcus T. Grisaru, M. Rocek e W. Siegel. 1983. Superspace, or one thousand and one lessons in supersymmetry. *Frontiers of Physics* 58:1–548. arXiv:hep-th/0108200v1.
- Golfand, Yu. A., e E. P. Likhtman. 1971. Extension of the algebra of Poincare group generators and violation of  $p$  invariance. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* 13:323–326.
- Grisaru, Marcus T., e W. Siegel. 1982. Supergraphity. 2. manifestly covariant rules and higher loop finiteness. *Nuclear Physics B* 201:292–314. doi:10.1016/0550-3213(82)90433-3.
- Haag, Rudolf, Jan T. Łopuszański e Martin Sohnius. 1975. All possible generators of supersymmetries of the  $S$ -matrix. *Nuclear Physics B* 88:257–274. doi:10.1016/0550-3213(75)90279-5.
- Helayël-Neto, J. A., J. L. Boldo, L. P. Colatto, M. A. De Andrade e O. M. Del Cima. 1999. Superpropagators for explicitly broken 3D supersymmetric theories. *Physics Letters B* 468:96–101. doi:10.1016/S0370-2693(99)01202-2.

- Higashijima, Kiyoshi, e Takahiro Nishinaka. 2009. All orders analysis of the three dimensional  $CP^{N-1}$  model in the  $1/N$  expansion. *Physical Review D* 79:065034. doi:10.1103/PhysRevD.79.065034.
- Huq, M. 1976. On spontaneous breakdown of fermion number conservation and supersymmetry. *Physical Review D* 14:3548–3556. doi:10.1103/PhysRevD.14.3548.
- . 1977. Evaluation of effective potential in superspace. *Physical Review D* 16:1733–1739. doi:10.1103/PhysRevD.16.1733.
- Intriligator, Kenneth, Nathan Seiberg e David Shih. 2006. Dynamical SUSY breaking in meta-stable vacua. *Journal of High Energy Physics* 2006:021. doi:10.1088/1126-6708/2006/04/021.
- Jackiw, R. 1974. Functional evaluation of the effective potential. *Physical Review D* 9:1686–1701. doi:10.1103/PhysRevD.9.1686.
- Jona-Lasinio, G. 1964. Relativistic field theories with symmetry breaking solutions. *Il Nuovo Cimento* 34:1790–1795. doi:10.1007/BF02750573.
- Kane, Gordon L., e Mikhail A. Shifman. 2001. *The supersymmetric world: The beginnings of the theory*. World Scientific. ISBN: 978-98-1024-539-9.
- Leibbrandt, George. 1975. Introduction to the technique of dimensional regularization. *Reviews of Modern Physics* 47:849–876. doi:10.1103/RevModPhys.47.849.
- Martin, Stephen P. 1997. A supersymmetry primer:1–128. arXiv:hep-ph/9709356v6.
- McKeon, D. G. C., e T. N. Sherry. 1987. Operator regularization and one-loop Green's functions. *Physical Review D* 35:3854–3872. doi:10.1103/PhysRevD.35.3854.
- Miller, Robert D. C. 1983a. A simple component field method for SUSY effective potential calculations. *Physics Letters B* 124:59–63. doi:10.1016/0370-2693(83)91403-X.
- . 1983b. A tadpole supergraph method for the evaluation of SUSY effective potentials. *Nuclear Physics B* 228:316–332. doi:10.1016/0550-3213(83)90327-9.
- . 1984. The two-loop effective potential of the Wess-Zumino model. *Nuclear Physics B* 241:535–556. doi:10.1016/0550-3213(84)90059-2.
- Nadeau, Raymond. 1989. Two-loop effective potential of supersymmetric quantum electrodynamics. *Physical Review D* 39:3069–3083. doi:10.1103/PhysRevD.39.3069.
- Peskin, Michael E., e Daniel V. Schroeder. 1995. *An introduction to quantum field theory*. Westview Press. ISBN: 978-02-0150-397-5.

- Ramond, Pierre. 2001. *Field theory: a modern primer*. 2° ed. Westview Press. ISBN: 978-02-0130-450-3.
- Salam, Abdus, e J. Strathdee. 1974. Super-gauge transformations. *Nuclear Physics B* 76:477–482. doi:10.1016/0550-3213(74)90537-9.
- . 1975. Superfields and Fermi-Bose symmetry. *Physical Review D* 11:1521–1535. doi:10.1103/PhysRevD.11.1521.
- Schwinger, Julian S. 1951. On the Green's functions of quantized fields. 1. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 37:452–455. doi:10.1073/pnas.37.7.452———. 1951. On the Green's functions of quantized fields. 2. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 37:455–459. doi:10.1073/pnas.37.7.455.
- Sextl, Roman U., e Helmuth K. Urbantke. 2000. *Relativity, groups, particles: Special relativity and relativistic symmetry in field and particle physics*. Springer. ISBN: 978-32-1183-443-5.
- Shiekh, A. Y. 1990. Zeta function regularization of quantum field theory. *Canadian Journal of Physics* 68:620–629. doi:10.1139/p90-093———. 2011. Operator regularization of Feynman diagrams at one-loop order. *Canadian Journal of Physics* 89, n° 3:289–294. doi:10.1139/P11-016———. 2011. Operator regularization of Feynman diagrams at multiloop order. *Canadian Journal of Physics* 89, n° 11:1149–1154. doi:10.1139/p11-110.
- Srednicki, Mark. 2007. *Quantum field theory*. Cambridge University Press. ISBN: 978-05-2186-449-7.
- Srivastava, Prem P. 1983. Superfield tadpole method for susy effective potential. *Physics Letters B* 132:80–82. doi:10.1016/0370-2693(83)90226-5.
- Tan, Pang-Ning, B. Tekin e Y. Hosotani. 1996. Spontaneous symmetry breaking at two loop in 3-d massless scalar electrodynamics. *Physics Letters B* 388:611–620. doi:10.1016/S0370-2693(96)01191-4.
- . 1997. Maxwell-Chern-Simons scalar electrodynamics at two loops. *Nuclear Physics B* B502:483–515. doi:10.1016/S0550-3213(97)00495-1.
- Volkov, D. V., e V. P. Akulov. 1972. Possible universal neutrino interaction. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* 16:438–440. doi:10.1007/BFb0105270———. 1973. Is the neutrino a goldstone particle? *Physics Letters B* 46:109–110. doi:10.1016/0370-2693(73)90490-5.
- Weinberg, Steven. 1973. Perturbative calculations of symmetry breaking. *Physical Review D* 7:2887–2910. doi:10.1103/PhysRevD.7.2887.

- Wess, J., e B. Zumino. 1974. Supergauge transformations in four dimensions. *Nuclear Physics B* 70:39–50. doi:10.1016/0550-3213(74)90355-1.
- Witten, Edward. 1981. Dynamical breaking of supersymmetry. *Nuclear Physics B* 188:513–554. doi:10.1016/0550-3213(81)90006-7.
- . 1982. Constraints on supersymmetry breaking. *Nuclear Physics B* 202:253–316. doi:10.1016/0550-3213(82)90071-2.

## ÍNDICE REMISSIVO

---

- 1PI, 24
- ação efetiva, 13
- ação quântica,  $I[\phi]$ , 23
- bolhas de vácuo, 21
- companheiro supersimétrico, 1
- derivada covariante, 12
- expansão em laços, 22
- fase estacionária
  - aproximação da, 25
- Feynman
  - gráficos de, 19
    - conexos e desconexos, 19
  - propagador de, 17
- função de Green, 17
  - $Z$ , gerador das, 15
  - conexas  $W$ , gerador das, 21
  - de 2-pontos, 17
  - de  $n$ -pontos, 17
- função de partição, 15
- funções de vértice, 24
  
- grupo, 5
- grupo de Lorentz, 6
- grupo de Poincaré, 6
  
- grupos de Lie, 5
- hierarquia de calibre, 1
- integrais de trajetória, 14
- números de Grassman, 9
- potencial efetivo  $V(\phi)$ , 27
- propagador total, 18
  
- selétron, 1
- simetrias internas, 6
- supercampos, 11
  
- teorema de Coleman-Mandula,  
8
- teorema de Haag–Lopuszanski–Sohnius, 8
- teorema no-go, 8
  
- Veltman
  - formula de, 61
  
- Wess-Zumino
  - modelo de, 39
  
- álgebra supersimétrica, 8
- álgebras de Lie, 5
- álgebras de Lie graduadas, 7