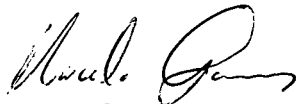


UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA

**Estudo da Teoria de Chern-Simons Não-comutativa  
Acoplada à Matéria**

*Luiz Cleber Tavares de Brito*

Tese de doutorado apresentada ao  
Instituto de Física da Universi-  
dade de São Paulo para a obtenção  
do título de Doutor em Ciências.



ORIENTADOR: Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes

**Comissão Examinadora:**

Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes - IFUSP  
Prof. Carlos Eugenio Imbassahy Carneiro - IFUSP  
Prof. Josif Frenkel - IFUSP  
Prof. Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson - CBPF  
Prof. Antonio Jose Accioly - IFT/UNESP

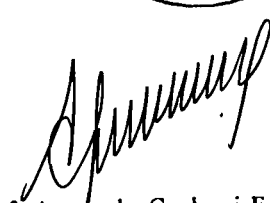


São Paulo  
2005

SBI-IFUSP



305M810T4330



Prof. Armando Corbani Ferraz  
Presidente da Comissão de Pós Graduação

*Armando*

530.143

B862

D

ex. 1

### FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Brito, Luiz Cleber Tavares de

Estudo da teoria de Chern-Simons não-  
comutativa acoplada à matéria. São Paulo - 2005.

(Doutoramento) - Universidade de São Paulo  
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Gomes

Instituto de Física - Departamento de Física Matemática  
Área de Concentração: Física

Unitermos:

- 1
  - 2
  - 3
  - 4
  - 5
  - 6
1. Teoria Quântica de Campos;
  2. Teoria de Chern-simons;
  3. Teoria não-comutativa;
  4. Mistura uv/iv;
  5. Temperatura.

USP/IF/SBI-048/2005

*À minha esposa e meu filho, Angela e Lucas de Brito.*

# Agradecimentos

Ao Professor Marcelo Gomes, pela orientação e amizade ao longo dos anos de minha pós-graduação no IFUSP.

Ao Professor Adilson José da Silva e a Yu Albert Petrov, pelo trabalho conjunto na etapa final do meu doutoramento.

À minha esposa, Angela, meus pais, Aluizio e Rutilena de Brito, e a todos meus familiares, em especial, Claudia, Marcia, Maria, Zoila, Sandra e Rosa.

Aos grandes amigos, Akira, Andrey, Karlucio e Reinaldo.

Aos funcionários do departamento de física-matemática.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.

## Abstract

We consider 2+1 dimensional noncommutative models of scalar and fermionic fields coupled to the Chern-Simons field. We show that, at least up to one loop, the model containing only a fermionic field in the fundamental representation minimally coupled to the Chern-Simons field is consistent in the sense that there are no nonintegrable infrared divergences. By contrast, dangerous infrared divergences occur if the fermion field belongs to the adjoint representation or if the coupling of scalar matter is considered instead. The superfield formulation of the supersymmetric Chern-Simons model is also analyzed and shown to be free of nonintegrable infrared singularities and actually finite if the matter field belongs to the fundamental representation of the supergauge group. In the case of the adjoint representation this only happens in a particular gauge.

By analyzing the odd parity part of the gauge field two and three point vertex functions, the one-loop radiative correction to the Chern-Simons coefficient is computed in noncommutative Chern-Simons-Higgs model at zero and at high temperature. At high temperature, we show that the static limit of this correction is proportional to  $T$  but the first noncommutative correction increases as  $T \log T$ . Our results are analytic functions of the noncommutative parameter.

## Resumo

Consideramos modelos não-comutativos de campos escalares e fermiônicos acoplados com um campo de Chern-Simons em 2+1 dimensões e mostramos que, pelo menos em um laço, o modelo contendo somente um campo fermiônico, na representação fundamental, minimalmente acoplado ao campo de Chern-Simons, é consistente no sentido que não há divergências infravermelhas não-integráveis presentes no modelo. Contrariamente, divergências infravermelhas perigosas ocorrem se o campo fermiônico pertence à representação adjunta ou se consideramos o acoplamento com a matéria escalar. A formulação do modelo de Chern-Simons supersimétrico em termos de supercampos também é analisado, sendo livre de singularidades infravermelhas não-integráveis e, na verdade, finito no caso em que o campo de matéria pertence à representação fundamental. No caso da representação adjunta, isso ocorre somente para uma particular escolha de calibre.

Analisando a parte de paridade ímpar das funções de vértice de dois e três pontos do campo de calibre, calculamos, em um laço, as correções ao coeficiente do termo de Chern-Simons no modelo de Higgs-Chern-Simons não-comutativo no caso de temperatura zero e no limite de altas temperaturas. A altas temperaturas, mostramos que o limite estático desta correção é proporcional a  $T$  mas a primeira correção devida à não-comutatividade aumenta como  $T \log T$ . Nossos resultados são funções analíticas do parâmetro não-comutativo.

*Tupã, o Espírito Supremo e protetor de minha raça, encontrou-me um dia no meio de um bosque florescido. e me disse: toma esta caixa misteriosa e descobre seus segredos.*

*E, aprisionando nela todos os pássaros canoros da floresta e a alma resignada dos vegetais, abandonou-a em minhas mãos. tomei-a, obedecendo a ordem de Tupã, colocando-a bem junto ao coração, abraçado a ela passei muitas luas à borda de uma fonte. E, uma noite, Jaci, retratada no líquido cristal, sentindo a tristeza de minha alma índia, deu-me seis raios de prata para com eles descobrir seus arcanos segredos. E o milagre se operou: do fundo da caixa misteriosa, brotou a sinfonia maravilhosa de todas as vozes virgens da natureza da América.*

*AGUSTÍN BARRIOS MANGORÉ*

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Alguns Aspectos Gerais de Teorias de Campos Não-Comutativas</b>	<b>6</b>
1.1	Introduzindo efeitos da não-comutatividade do espaço-tempo em teorias de campos . . . . .	6
1.1.1	Espaços não-comutativos e teorias de campos . . . . .	6
1.1.2	Procedimento de quantização de Weyl, o produto Moyal e teorias de campos . . . . .	7
1.1.3	A mistura ultravioleta/infravermelho (UV/IV) . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Teoria de Chern-Simons Não-Comutativa e a Interação com a Matéria</b>	<b>13</b>
2.1	Campo de Chern-Simons acoplado minimalmente à matéria . . . . .	13
2.2	Divergências UV e a mistura UV/IV . . . . .	17
2.2.1	Campo de calibre interagindo com um campo fermiônico . . . . .	17
2.2.2	Campo de calibre interagindo com um campo escalar . . . . .	23
2.3	Eliminando as divergências infravermelhas . . . . .	27
2.3.1	Representação fundamental . . . . .	27
2.3.2	Representação adjunta . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Teoria Não-comutativa Supersimétrica da Interação do Campo de Chern-Simons com a Matéria</b>	<b>32</b>
3.1	Teoria de Chern-Simons supersimétrica e a interação com a matéria . . . . .	33
3.2	Divergências do modelo e a mistura UV/IV . . . . .	36
3.2.1	Cálculo da contribuição do tensor de polarização para ação efetiva . . . . .	40
3.2.2	Cálculo da contribuição da função de dois pontos do campo $\Phi$ para ação efetiva . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Correções radiativas ao termo de Chern-Simons no modelo de Higgs-Chern-Simons abeliano não-comutativo</b>	<b>48</b>
4.1	Modelo de Higgs-Chern-Simons não-comutativo . . . . .	49
4.2	Introduzindo efeitos de temperatura em teorias de campos . . . . .	50
4.3	Cálculo em um laço . . . . .	58
4.3.1	Função de dois pontos do campo de calibre . . . . .	58
4.3.2	Função de três pontos do campo de calibre . . . . .	64



<b>A</b>	<b>Definições e identidades úteis no estudo de teorias supersimétricas em <math>2 + 1</math> dimensões</b>	<b>73</b>
<b>B</b>	<b>Cálculo de propagadores e supergráficos</b>	<b>83</b>
B.1	Cálculo do Propagador . . . . .	83
B.2	Cálculo de um supergráfico . . . . .	87

# Introdução

A física envolvida nas interações entre os constituintes fundamentais da matéria é descrita atualmente por meio de um esquema teórico conhecido como *Teoria Quântica de Campos* (TQC). O sucesso da TQC é evidente tanto pelo seu poder preditivo quanto pela precisão com que quantidades físicas (que podem ser medidas em laboratório) são obtidas a partir da teoria. Um exemplo é o cálculo do momento magnético do elétron (na fórmula abaixo  $e$ ,  $m$  e  $\vec{S}$  representam carga, massa e o operador de spin, respectivamente)

$$\vec{\mu} = g \frac{e}{2m} \vec{S},$$

em que a quantidade medida envolve o fator  $g$  e é dada por [1]

$$\left( \frac{g-2}{2} \right)_{\text{teórico}} = 1159652153.5 (1.2) (28.0) \times 10^{-12}.$$

Os valores entre parêntese indicam as incertezas devido a integrações numéricas a ao valor experimental da constantes de estrutura fina utilizado . Esse resultado está em excelente acordo com os dados experimentais [2]

$$\left( \frac{g-2}{2} \right)_{\text{experimental}} = 1159652188.4 (4.3) \times 10^{-12}.$$

O resultado teórico foi obtido pela primeira vez por Schwinger no contexto da *Eletrodinâmica Quântica*, a TQC que permite descrever a interação entre fótons e elétrons no nível de uma teoria quântica relativística.

A utilidade da TQC vai além da descrição da interação eletromagnética entre elétrons, permitindo tratar as interações fraca e forte de forma análoga ao eletromagnetismo. As interações são introduzidas exigindo-se que a teoria seja invariante por transformações de calibre locais, elevando esta simetria à condição de um *princípio* que deve ser satisfeito pelas TQC's que descrevem a física de partículas elementares.

Além da simetria de calibre, um outro critério restringe fortemente a classe de teorias de campos que possuem significado físico: a teoria deve ser *renormalizável*. Isso significa que todos os infinitos que aparecem no cálculo de observáveis podem ser eliminados por meio de uma redefinição dos parâmetros que compõe a teoria (massas, constantes de acoplamento e campos). Em geral, simetrias e renormalizabilidade constituem princípios

revisão contendo os principais aspectos fenomenológicos de teorias não-comutativas, além de várias referências, veja [7].

Um outro aspecto em que supersimetria e não-comutatividade do espaço estão envolvidas é no que diz respeito ao comportamento ultravioleta de uma teoria quântica de campos. Como é sabido, teorias supersimétricas possuem um melhor comportamento ultravioleta e podem, inclusive, tornar finita uma TQC. Isto ocorre, por exemplo, no caso da teoria de Yang-Mills com supersimetria estendida [8]. Originalmente, espaços não-comutativos também foram introduzidos como uma possível forma de tratar as divergências ultravioletas em TQC [9]. No entanto, como veremos em detalhe adiante, as interações introduzidas nesse último caso podem, em geral, implicar no aparecimento de um comportamento infravermelho que impossibilita, em algumas situações, um tratamento perturbativo. Este problema está associado ao que é conhecido na literatura como mistura ultravioleta/infravermelho (UV/IV) [10]. O procedimento de renormalização não pode eliminar as divergências associadas a mistura UV/IV, introduzidas pela presença de singularidades não-integráveis em diagramas contendo laços. Quando isso ocorre, um mecanismo que elimine a mistura deve ser elaborado se desejamos dar algum significado à teoria. Uma maneira de implementar essa idéia é por meio de uma teoria supersimétrica. A introdução de supersimetria parece ser “natural” pelo fato de que estas teorias possuem um melhor comportamento ultravioleta podendo, em princípio, ter também um melhor comportamento na região do infravermelho. De fato, existem exemplos concretos de modelos em que esse resultado foi verificado e a mistura UV/IV eliminada [11].

De modo geral, saber como o problema da mistura pode ser eliminado é, sem dúvida, uma parte importante da análise de uma TQC construída em um espaço não-comutativo. Nesse sentido, o estudo das versões não-comutativas das teorias renormalizáveis conhecidas, em diferentes dimensões do espaço-tempo, é um caminho a ser seguido. Além disso, vale lembrar que as técnicas desenvolvidas em TQC tem extrapolado o campo da física de partículas e tem se mostrado úteis no estudo de sistema de matéria condensada. Um exemplo de teoria de campos que tem atraído grande interesse, tanto do ponto de vista matemático quanto de aplicações físicas, é o da teoria de Chern-Simons em  $(2 + 1)$  dimensões. Isso porque elas apresentam aspectos peculiares, ausentes nas formulações usuais no espaço de  $(3 + 1)$  dimensões. Citamos, por exemplo, a possibilidade de que, no plano, o spin não esteja restrito a valores inteiros e semi-inteiros mas possa assumir valores fracionários. Aplicações importantes ocorrem no estudo da supercondutividade e do efeito Hall quântico [12]-[16]. Do ponto de vista perturbativo, teorias contendo o termo de Chern-Simons possuem propriedades interessantes. No caso não-abeliano, quando somente o termo de Chern-Simons está presente (além de possíveis interações com campos “fantasmas”), a quantização não introduz nenhum tipo de efeito sobre parâmetros da teoria (coeficiente do termo de Chern-Simons [17], por exemplo) e a ação efetiva coincide com a ação clássica. Essa propriedade segue do caráter topológico da teoria. Quando existe interação com a matéria, vemos que, no caso abeliano, a correção ao termo de Chern-Simons é finita e provém, exclusivamente, de gráficos com um laço [18]. A influência da não-comutatividade do espaço em teorias contendo o termo de Chern-Simons tem sido estudada sob vários aspectos [19]-[30]. É nesse contexto, de teorias em  $(2+1)$  dimensões

descritas em um “espaço não-comutativo”, que será desenvolvida esta tese.

O objetivo do primeiro capítulo é introduzir algumas idéias e conceitos envolvidos na construção de uma teoria de campos não-comutativa e mostrar como se obtém uma formulação adequada ao estudo perturbativo. O conceito de mistura UV/IV também será discutido por meio de um exemplo que ilustra, de forma concreta, como o problema aparece na teoria de perturbações.

O estudo perturbativo da teoria não-comutativa da interação do campo de Chern-Simons com a matéria é abordado, pela primeira vez, no capítulo 2. Discutimos, sistematicamente, as situações em que o campo de calibre interage com férmions ou bósons e, posteriormente, analisamos a teoria em que os dois setores, bosônico e fermiônico, estão presentes. Consideramos duas situações distintas que estão associadas a diferentes possibilidades de implementar transformações nos campos de matéria (representação fundamental e adjunta). Em cada situação, estudamos a possível ocorrência de singularidades que possam introduzir a mistura UV/IV e a construção de um procedimento que possa eliminá-las. Na representação fundamental, mostramos que a teoria de um campo fermiônico interagindo com o campo de Chern-Simons não apresenta singularidades infravermelhas, porém, na teoria de interação entre um bóson escalar e o campo de calibre, ainda na representação fundamental, verificamos a ocorrência de uma singularidade perigosa, isto é, que pode produzir singularidades não-integráveis, em um laço. Essa singularidade pode ser eliminada se consideramos interações adicionais entre campos bosônicos e fermiônicos. A aplicação deste procedimento ao caso da representação adjunta não soluciona o problema e uma outra abordagem deve ser utilizada: a descrição da teoria no contexto de um superespaço fornece uma possível construção onde a mistura não ocorre. Motivados pelos resultados citados anteriormente, apresentamos no capítulo 3 a teoria de Chern-Simons não-comutativa supersimétrica e mostramos que, em um laço, não existe contribuições que possam introduzir o problema da mistura UV/IV. Conforme veremos, o resultado é válido para uma escolha específica do parâmetro de calibre.

O capítulo 4 contém um estudo sobre os efeitos da não-comutatividade do espaço no contexto da teoria de Chern-Simons abeliana em que simetria de calibre é espontaneamente quebrada. Particularmente, estudamos as correções ao coeficiente do termo de Chern-Simons por meio do cálculo explícito da função de dois e três pontos do campo de calibre. Efeitos provenientes de uma temperatura finita também são considerados. A motivação para esse estudo vem do fato de que, tanto a não-comutatividade do espaço quanto temperatura podem modificar o comportamento infravermelho de uma teoria quântica de campos, constituindo situações em que não se aplica o teorema de Coleman-Hill [31]-[33], que afirma que, na ausência de singularidades infravermelhas (no caso do teorema, associadas a partículas com massa zero), não existem correções ao coeficiente do termo de Chern-Simons além de um laço. Além disso, com a não-comutatividade, o termo de Chern-Simons possui uma estrutura diferente do correspondente caso abeliano comutativo. Mostramos que, também na teoria não-comutativa, o efeito da quebra espontânea de simetria é introduzir uma correção ao coeficiente do termo de Chern-Simons. Esta correção é analítica no parâmetro que introduz a não-comutatividade.

Finalizamos o trabalho com uma coleção dos principais resultados e algumas possíveis

extensões. Dois apêndices foram introduzidos com o objetivo de complementar o capítulo 3. No apêndice A apresentamos algumas identidades úteis no cálculo de propagadores e supergráficos. Exemplos do procedimento de cálculo são dados no apêndice B.

# Capítulo 1

## Alguns Aspectos Gerais de Teorias de Campos Não-Comutativas

### 1.1 Introduzindo efeitos da não-comutatividade do espaço-tempo em teorias de campos

Iniciamos a descrição dos temas que constituem o corpo central deste trabalho: teorias de campos em espaços não-comutativos, a mistura UV/IV e procedimentos para eliminar a mistura. Isto é necessário quando ocorrem singularidades não-integráveis na série perturbativa associada a uma ou mais funções de Green.

Ao longo deste capítulo discutiremos os dois primeiros itens mencionados acima. Inicialmente, mostraremos como obter a versão não-comutativa de uma TQC. Um aspecto importante está no fato de que o procedimento que implementa os efeitos da não-comutatividade permite obter regras de Feynman de forma análoga as definidas nas teorias comutativas. Desse modo, efeitos quânticos podem ser convenientemente identificados no contexto de uma teoria de perturbações, sendo representados por gráficos contendo laços. O próximo passo é identificar os gráficos que podem conter a mistura UV/IV e elaborar um mecanismo para solucionar esse problema. Tal mecanismo será discutido nos próximos capítulos. A metodologia adotada nesta seção será a de apresentar exemplos que realizem os conceitos e idéias que são importantes para o trabalho, A conexão com os resultados encontrados nos capítulos seguintes será indicada.

#### 1.1.1 Espaços não-comutativos e teorias de campos

O termo espaço não-comutativo significa, ao longo deste trabalho, que existem operadores de posição  $q_\mu$  satisfazendo a álgebra

$$[q_\mu, q_\nu] = i\theta_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

em que  $\theta_{\mu\nu} = -\theta_{\nu\mu}$ . Os índices podem assumir os valores  $\mu = 0, 1, \dots, D$ , em que  $D$  é um inteiro positivo. No caso canônico, considerado neste trabalho,  $\theta_{\mu\nu}$  é constante.

Uma álgebra não-comutativa, como a definida acima, pode ser relacionada com uma geometria não-comutativa. Tal tipo de “geometria” pode ser pensada como uma generalização da estrutura algébrica relacionada a uma geometria definida por uma variedade diferenciável. Tal generalização é implementada substituindo a estrutura algébrica comutativa, gerada pelos observáveis, por outra não-comutativa resultando no que podemos chamar de um “espaço não-comutativo”. Do ponto de vista matemático, a álgebra (1.1) pode ser vista como uma realização deste procedimento (para uma revisão contendo uma breve introdução aos aspectos matemáticos de teorias não-comutativas veja [6]).

Uma relação do tipo (1.1) surge também, dentro do contexto da física, como uma possibilidade de descrever um espaço-tempo quântico onde as coordenadas são representadas por operadores. Foi mostrado em [34] que a introdução de uma relação do tipo (1.1) implica em relações de incerteza entre as coordenadas, ou, em outras palavras, a álgebra implementa limitações na precisão com que pontos no espaço podem ser localizados. Este é um aspecto importante em teorias quânticas que envolvam a gravitação. Heuristicamente, a idéia de localização deve perder o sentido em escalas de comprimento da ordem da escala de Planck ( $10^{-33}cm$ ). Num processo de medida de posição com incerteza  $a$ , uma quantidade de energia da ordem de  $\frac{1}{a}$  deve ser transferida e acumulada numa região em torno do ponto o qual desejamos localizar. Esta quantidade de energia aumentará conforme aumente a precisão da medida da posição, podendo criar um intenso campo gravitacional capaz de capturar, definitivamente, qualquer tipo de sinal utilizado no processo de medida. Isso faz com que não exista nenhum significado operacional para localização de pontos. Desse modo, modelos de espaço-tempo quântico baseados em (1.1) contém em sua estrutura matemática limites sobre os quais medidas de posição podem ser realizadas.

### 1.1.2 Procedimento de quantização de Weyl, o produto Moyal e teorias de campos

Teorias de campos construídas de modo a conter propriedades devidas a álgebra definida em (1.1) tem sido chamadas na literatura de teorias de campos não-comutativas (TCNC) [35]. As teorias de campos usuais serão chamadas ao longo do texto de teorias de campos comutativas (TCC). Os efeitos de (1.1), podem ser introduzidos no formalismo lagrangeano da teoria de campos por meio do procedimento de Weyl<sup>1</sup> [36].

Considere o mapa que associa a toda função real  $\phi(x)$  um operador  $\Phi$  como<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Vamos apresentar o caso envolvendo campos escalares, no entanto, o procedimento pode ser generalizado para o caso de férmions e campos vetoriais

<sup>2</sup>Lembre que o objeto  $q^\mu$  em (1.2) é um operador, definido pela álgebra (1.1), que representa uma coordenada do espaço não-comutativo.

$$\Phi[\phi] = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k e^{ik_\mu q^\mu} \tilde{\phi}(k) \quad (1.2)$$

em que a transformada de Fourier de  $\phi$  é dada por  $\tilde{\phi}(k) = \int d^D x e^{ik_\mu x^\mu} \phi(x)$ . Definindo o traço como uma operação cíclica com a normalização

$$\mathbf{Tr} (e^{ik_\mu q^\mu}) = \int d^D x e^{ik_\mu x^\mu} = (2\pi)^D \prod_{\mu=0}^{D-1} \delta(k_\mu),$$

a inversa de (1.2) é dada por

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p \mathbf{Tr} (e^{-ip_\nu q^\nu} \Phi[\phi]) e^{-ip_\mu x^\mu}. \quad (1.3)$$

Assuma que os operadores  $\Phi[\phi]$  formam uma álgebra não-comutativa onde está definido um produto "·". Desejamos determinar qual o análogo de (1.2) para o caso de um produto  $\Phi[\phi_1] \cdot \Phi[\phi_2]$ . Tal mapa é definido por um isomorfismo entre a álgebra dos  $\Phi[\phi]$  e a álgebra definida pelas funções  $\phi$

$$\Phi_1[\phi_1] \cdot \Phi_2[\phi_2] = \Phi[\phi_1 * \phi_2], \quad (1.4)$$

em que o símbolo "\*" representa o produto não-comutativo definido na álgebra das funções clássicas  $\phi$ , sendo conhecido na literatura como produto estrela.

Em resumo, o produto envolvendo operadores (1.2) definidos no espaço não-comutativo está associado ao produto de funções, definidas num espaço comutativo, por meio de (1.4). O ponto importante é que essa construção substitui o produto usual de funções reais por um produto não-comutativo, o produto estrela. Temos portanto

$$[\phi_1 * \phi_2](x) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p \mathbf{Tr} (e^{-ip_\nu q^\nu} \Phi[\phi_1] \Phi[\phi_2]) e^{-ip_\mu x^\mu}. \quad (1.5)$$

Usando a fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[[A,B],B] - \frac{1}{12}[[A,B],A] + \dots}, \quad (1.6)$$

em que  $A = ik_\mu q^\mu$  e  $B = ip_\nu q^\nu$ , com  $\theta_{\mu\nu}$  constante, obtemos

$$\begin{aligned} [\phi_1 * \phi_2](x) &= \lim_{y \rightarrow x} e^{\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}} \phi(y) \phi(x) \\ &= \phi_1(x) \phi_2(x) + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} [\partial_\mu \phi_1(x)] [\partial_\nu \phi_2(x)] + \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

Note o caráter não-local do produto Moyal: o valor do produto num ponto envolve um número arbitrário de derivadas. Na ordem mais baixa em  $\theta$  o produto Moyal coincide



com o produto usual de funções. A partir de agora utilizaremos a expressão  $\phi_1(x) * \phi_2(x)$  para representar o produto Moyal  $[\phi_1 * \phi_2](x)$  obtido em (1.7).

O procedimento descrito anteriormente permite estabelecer uma regra para obter a densidade de lagrangeana de uma TCNC a partir de sua análoga TCC. Dada a densidade de lagrangeana que define uma TCC, a substituição do produto entre campos pelo produto Moyal nos fornece a correspondente TCNC. A TCNC obtida por meio dessa regra será tratada como uma teoria de campo usual (sujeita às propriedades do produto Moyal) e estudada com as técnicas perturbativas conhecidas. Teorias de calibre merecem atenção especial. De fato, a extensão não-comutativa dessas teorias não sugerem esta regra. Como veremos a seguir, a teoria de Chern-Simons é um exemplo onde isso ocorre.

Uma propriedade importante é obtida quando o produto Moyal é integrado

$$\int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) * \dots * \phi_n(x) = \prod_{i=1}^n \left[ \int \frac{d^D k_i}{(2\pi)^D} \right] (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \\ \times \tilde{\phi}_1(k_1) \tilde{\phi}_2(k_2) \dots \tilde{\phi}_n(k_n) \exp(-i \sum_{i < j} k_i \wedge k_j), \quad (1.8)$$

em que definimos  $k_i \wedge k_j = \frac{1}{2} k_i^\mu k_j^\nu \theta_{\mu\nu}$ . Note que, no espaço de momentos, o produto entre os campos (transformadas de Fourier) é dado pelo produto usual entre funções. O efeito da não comutatividade do espaço está contido nas exponenciais presentes em (1.8). Um caso particularmente importante ocorre quando o integrando em (1.8) envolve o produto de dois campos. O vínculo  $k_1 + k_2 = 0$  conduz a

$$\int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) = \int d^D x \phi_1(x) \phi_2(x). \quad (1.9)$$

No estudo de teorias de campos, esta propriedade assegura que os propagadores livres associados aos campos não são alterados pela não-comutatividade do espaço-tempo.

Como exemplo de aplicação, seja apresentar a versão não-comutativa de uma teoria de campos em (2+1) dimensões ( $D = 3$  nas equações anteriores). Dentro deste contexto, estamos particularmente interessados em teorias contendo o termo de Chern-Simons que, no caso de uma TCC, é definido por

$$S_{cs} = \int d^3 x \frac{\kappa}{2} \epsilon_{\mu\rho\nu} \text{Tr}(A^\mu \partial^\rho A^\nu + \frac{2}{3} i A^\mu A^\rho A^\nu), \quad (1.10)$$

onde  $A^\mu = A_a^\mu T_a$  com  $T_a$  sendo uma matriz de ordem  $N$ . O traço é tomado sobre os índices das matrizes  $T_a$ . A ação (1.10) corresponde a versão não-abeliana da teoria de Chern-Simons. Se o grupo de calibre é o  $U(1)$ , então  $N = 1$  e (1.12) é escrito como

$$S_{cs} = \int d^3 x \frac{\kappa}{2} \epsilon_{\mu\rho\nu} A^\mu \partial^\rho A^\nu. \quad (1.11)$$

No caso da TCNC associada a (1.10), a utilização da regra enunciada anteriormente fornece (no caso onde o grupo de calibre é o análogo do grupo  $U(1)$  do caso comutativo)

$$S_{cs} = \int d^3x \frac{\kappa}{2} \epsilon_{\mu\rho\nu} (A^\mu \partial^\rho A^\nu + \frac{2}{3} i A^\mu * A^\rho * A^\nu). \quad (1.12)$$

Note que a teoria de Chern-Simons acima possui um termo de auto-interação contendo o produto  $A^\mu * A^\rho * A^\nu$ . A existência deste vértice faz com que gráficos de Feynman, ausentes na teoria comutativa, estejam presentes no caso não-comutativo. Um exemplo é a contribuição de um laço para a função de dois pontos do campo de calibre proveniente do gráfico



Todas as linhas do gráfico estão associadas ao campo de calibre. Além disso, os fantasmas de Faddeev-Popov não desacoplam do campo de calibre no. Analisaremos explicitamente estas contribuições nos próximos capítulos.

Agora vamos exemplificar o procedimento de cálculo para obter a modificação, devido à não-comutatividade, da regra de Feynman associada a um vértice de interação. Escolhemos o vértice <sup>3</sup>

$$S = g \int d^3x \varphi(x) * A^\mu(x) * A_\mu(x), \quad (1.13)$$

em que  $\varphi$  é um campo escalar real e  $A_\mu$  é um campo de calibre.

Nosso objetivo é escrever (1.13) no espaço de momentos. Para isso, utilizamos (1.8) e obtemos que a expressão analítica para o vértice é dada por

$$S = g \Pi_{i=1}^3 \left[ \int \frac{d^2 k_i}{(2\pi)^2} \right] (2\pi)^3 \delta(k_1 + k_2 + k_3) \\ \times \exp[-i(k_1 \wedge k_2 + k_2 \wedge k_3 + k_1 \wedge k_3)] \tilde{\varphi}(k_1) \tilde{A}_\mu(k_2) \tilde{A}^\mu(k_3). \quad (1.14)$$

O vínculo  $k_1 + k_2 + k_3 = 0$  conduz a

$$S = g \Pi_{i=1}^3 \left[ \int \frac{d^2 k_i}{(2\pi)^2} \right] (2\pi)^3 \delta(k_1 + k_2 + k_3) \times e^{-ik_2 \wedge k_3} \tilde{\varphi}(k_1) \tilde{A}_\mu(k_2) \tilde{A}^\mu(k_3). \quad (1.15)$$

Fazendo a mudança de variável  $k_2 \leftrightarrow k_3$  em (1.15), obtemos

$$S = g \Pi_{i=1}^3 \left[ \int \frac{d^2 k_i}{(2\pi)^2} \right] (2\pi)^3 \delta(k_1 + k_2 + k_3) \times e^{ik_2 \wedge k_3} \tilde{\varphi}(k_1) \tilde{A}_\mu(k_2) \tilde{A}^\mu(k_3). \quad (1.16)$$

De (1.15) e (1.16) obtemos a expressão que será utilizada nos cálculos perturbativos

<sup>3</sup>O vértice utilizado no exemplo será utilizado no estudo da quebra espontânea de simetria na teoria da interação do campo de Chern-Simons com a matéria escalar.

$$S = g \prod_{i=1}^3 \left[ \int \frac{d^2 k_i}{(2\pi)^2} \right] (2\pi)^3 \delta(k_1 + k_2 + k_3) \times \\ \times \tilde{\varphi}_a(k_1) \tilde{A}_\mu(k_2) \tilde{A}^\mu(k_3) \cos(k_2 \wedge k_3). \quad (1.17)$$

De posse de uma expressão analítica para o vértice no espaço de momentos podemos introduzir uma representação gráfica tal como é feito usualmente: a descrição perturbativa em termos de gráficos de Feynman pode ser implementada no caso não-comutativo.

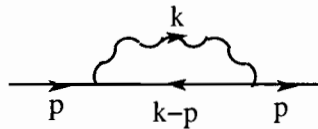
### 1.1.3 A mistura ultravioleta/infravermelho (UV/IV)

Na seção anterior, discutimos como efeitos da não-comutatividade podem ser introduzidos no formalismo langrangeano da teoria de campos e verificamos como as regras de Feynman devem ser alteradas. No exemplo dado em (1.13), o vértice (1.17) contém um cosseno que não está presente no caso comutativo. As modificações introduzidas pela não-comutatividade nas regras de Feynman de uma teoria de campos podem alterar as propriedades de convergência da teoria quântica. Em alguns casos, o estudo perturbativo da teoria pode não ser possível. Isso ocorre devido ao problema da mistura UV/IV [37].

Matematicamente, a mistura ocorre devido a presença de singularidades não-integráveis na série perturbativa. Para ver como isso é possível, considere uma integral típica que aparecerá nos próximos capítulos

$$\int d^3 k \frac{\cos(2k \wedge p)}{(k^2 + m^2)}. \quad (1.18)$$

em que  $p$  é um momento externo e  $m$  a massa de uma partícula. Esta integral aparece, por exemplo, no cálculo da correção quântica ao propagador fermiônico, que será analisado na seção 2.2.1 do capítulo 2. Neste caso, o gráfico a ser considerado é



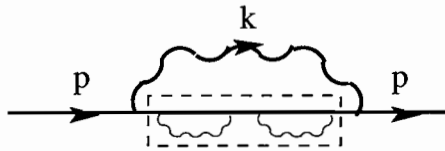
em que as linhas onduladas representam o propagador associado ao campo de calibre de Chern-Simons enquanto linhas sem ondulação representam o campo fermiônico.

Note que, se tomarmos o limite  $p \rightarrow 0$  em (1.18), a integral resultante será linearmente divergente: o limite de pequenos momentos (limite infravermelho) resulta numa integral divergente no regime ultravioleta. Apesar do tipo de integral obtida após o limite de pequenos momentos ter a forma de uma integral comumente encontrada nas teorias de campos comutativas, o procedimento de renormalização não poderá ser utilizado para eliminar divergências desta natureza. De fato, a integral (1.18) é finita e pode ser calculada exatamente. O resultado é proporcional a

$$\frac{e^{-m\tilde{p}}}{\tilde{p}} \quad (1.19)$$

em que introduzimos a notação  $\tilde{p}_i = \theta_{ij} p^j$  com  $\tilde{p} = |\vec{\tilde{p}}|$ . Vemos que existe em (1.19) uma divergência introduzida por um comportamento infravermelho singular do tipo  $\frac{1}{\tilde{p}}$ . A presença dessa singularidade é a razão da divergência encontrada ao tomarmos o limite  $p \rightarrow 0$ . Em geral, verificamos que para cada gráfico divergente (no regime ultravioleta) em uma teoria comutativa, corresponde uma singularidade infravermelha no gráfico análogo da versão não-comutativa. Vale lembrar que parte das divergências ultravioletas persistem no caso não-comutativo e o procedimento de renormalização deve ser implementado.

Como próximo passo, vamos mostrar como a presença de uma singularidade do tipo apresentado anteriormente pode ocasionar um problema “desastroso” no estudo perturbativo de uma TCNC. Para isso, considere a seguinte generalização do gráfico apresentado no início desta seção



Este gráfico contém singularidades do mesmo tipo apresentado em (1.19), no entanto, essas singularidades são não-integráveis. Isto ocorre devido a presença dos subgráficos contidos no retângulo definido pelas linhas tracejadas. O problema piora para gráficos contendo um número maior de inserções de subgráficos do tipo (1.1.3). É importante notar que a presença de singularidades infravermelhas ocorre mesmo quando as partículas envolvidas possuem massa diferente de zero. Tal comportamento é exclusivo de teorias definidas em espaços não-comutativos e tem sido chamado na literatura de mistura ultravioleta/infravermelho (UV/IV).

Concluimos este capítulo com o conhecimento de que a presença de singularidades infravermelhas não-integráveis em gráficos contendo laços podem tornar impraticável o estudo perturbativo de teorias de campos não-comutativa. Um procedimento que elimine termos do tipo (1.19) da série perturbativa deve ser implementado se desejamos dar algum significado a essas teorias.

## Capítulo 2

# Teoria de Chern-Simons Não-Comutativa e a Interação com a Matéria

Neste capítulo iniciamos o estudo de teorias não-comutativas em que o campo de calibre, descrito por um termo de Chern-Simons, interage com a matéria. Analisamos alguns aspectos perturbativos relacionados com o fato de que a ocorrência de singularidades ultravioletas, da mesma natureza encontrada na correspondente teoria comutativa, implicam no aparecimento de um comportamento singular na região do infravermelho. Este efeito, ocasionado pela não-comutatividade do espaço, é conhecido na literatura como mistura ultravioleta/infravermelho (UV/IV). Introduzimos aqui a primeira parte do estudo que constitui o objetivo central deste trabalho, a saber, analisar as possibilidades de construir um modelo em que o campo de Chern-Simons interage com a matéria e determinar em que circunstâncias a correspondente teoria quântica de campos pode ser consistente<sup>1</sup> do ponto de vista perturbativo.

### 2.1 Campo de Chern-Simons acoplado minimalmente à matéria

Nesta seção apresentamos a versão clássica de dois modelos de teorias de campos não-comutativas em que a matéria interage com um campo de calibre  $A_\mu$  descrito pelo termo de Chern-Simons

$$S_{cs} = \frac{\kappa}{2} \int d^3x \epsilon_{\mu\rho\nu} [A^\mu \partial^\rho A^\nu + \frac{2ie}{3} A^\mu * A^\rho * A^\nu]. \quad (2.1)$$

---

<sup>1</sup>Por *consistente* queremos dizer livres do problema da mistura UV/IV.

Embora a ação definida acima não seja invariante por uma transformação de calibre finita

$$A_\mu \rightarrow U^{-1} * A_\mu * U + \frac{i}{e} (\partial_\mu U^{-1}) * U, \quad (2.2)$$

em que  $U \in U_*(1)$  (análogo do grupo  $U(1)$  da teoria comutativa), a simetria de calibre é recuperada para os observáveis da teoria impondo que  $e^{iS_{cs}}$  é invariante pela transformação (2.2). Esta condição implica que as constantes  $\kappa$  e  $e$  estão relacionadas por [21, 22, 23, 24]

$$\kappa = \frac{e^2}{4\pi} n \quad (2.3)$$

sendo  $n$  um número inteiro. Mesmo quando (2.3) não é satisfeita, o modelo é invariante por transformações infinitesimais decorrentes de (2.2) quando definimos  $U = 1 + i\epsilon(x)$  e  $U^{-1} = 1 - i\epsilon(x)$  obtendo

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \epsilon - i[\epsilon, A_\mu]_* \quad (2.4)$$

em que introduzimos a notação  $[a, b]_* = a * b - b * a$ . Termos da ordem  $\epsilon^2$  foram omitidos.

A matéria fermiônica, descrita pelo campo  $\psi$ , interage com o campo de calibre segundo a ação <sup>2</sup>

$$S_\psi = S_{cs} - \int d^3x [\bar{\psi} * (\gamma^\mu D_\mu \psi) + M \bar{\psi} \psi] \quad (2.5)$$

enquanto a matéria descrita pelo campo escalar  $\varphi$  interage com o campo  $A_\mu$  de acordo com

$$S_\varphi = S_{cs} - \int d^3x [(D_\mu \varphi)^\dagger * (D^\mu \varphi) + m^2 \varphi^\dagger \varphi]. \quad (2.6)$$

Os parâmetros  $M$  e  $m$  são as massas associadas ao férmion e ao campo escalar respectivamente.  $D_\mu$  indica a derivada covariante, cuja expressão depende da lei de transformação adotada para os campos  $\psi$  e  $\varphi$ . Devido a presença do produto Moyal, dado  $U \in U_*(1)$ , os modelos definidos por (2.5) e (2.6) são invariantes pelas seguintes transformações:

A) representação fundamental:

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} * U, \quad (2.7)$$

sendo que a derivada covariante é dada por

$$D_\mu \mathcal{O} = \partial_\mu \mathcal{O} - ie \mathcal{O} * A_\mu; \quad (2.8)$$

<sup>2</sup>Neste e no próximo capítulo vamos utilizar a métrica  $g_{11} = g_{22} = -g_{00} = 1$ . As matrizes de Dirac são escolhidas de modo a satisfazer a identidade  $\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu\nu\alpha} \gamma_\alpha$ , em que  $\epsilon^{\mu\nu\alpha}$  representa o símbolo de Levi-Civita, normalizado tal que  $\epsilon_{012} = 1$ .

B) representação anti-fundamental:

$$\Phi \rightarrow U^{-1} * \mathcal{O} \quad (2.9)$$

e

$$D_\mu \mathcal{O} = \partial_\mu \mathcal{O} + ieA_\mu * \mathcal{O}; \quad (2.10)$$

C) representação adjunta:

$$\mathcal{O} \rightarrow U * \mathcal{O} * U^{-1} \quad (2.11)$$

e

$$D_\mu \mathcal{O} = \partial_\mu \mathcal{O} + ie[A_\mu, \mathcal{O}]_*. \quad (2.12)$$

O campo  $\mathcal{O}$  deve ser identificado com os campos  $\varphi$  ou  $\psi$ . Qualquer que seja a representação escolhida para o campo de matéria, o campo de calibre se transforma de acordo com (2.2).

Para que o modelo seja quantizado da forma correta, devemos adicionar à (2.5) e (2.6) a contribuição proveniente do termo de fixação de calibre  $S_{fc}$  e dos fantasmas de Faddeev-Popov  $S_{fantasma}$ , que neste caso são dados por

$$S_{fc} + S_{fantasma} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \partial_\mu \bar{c} * [\partial^\mu c + ie(c * A^\mu - A^\mu * c)] \right\}.$$

Como o produto Moyal não altera a parte quadrática da ação, os propagadores são os mesmos da teoria comutativa. Temos

campo  $\psi$ :

$$\Delta_\psi(k) = \frac{-i}{-i \not{k} + M}, \quad (2.13)$$

campo  $\varphi$ :

$$\Delta_\varphi(k) = \frac{-i}{k^2 + m^2}, \quad (2.14)$$

campo  $A_\mu$ :

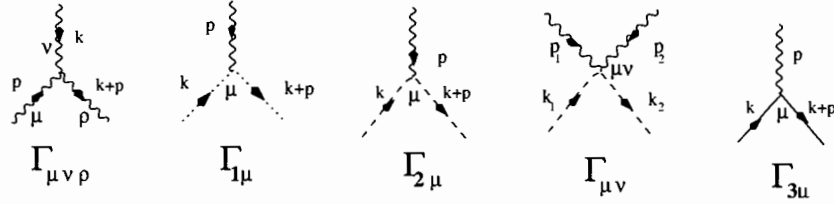
$$\Delta_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2} \epsilon_{\mu\rho\nu} k^\rho - i\xi \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} \quad (2.15)$$

campo  $c$ :

$$\Delta_c(k) = \frac{i}{k^2}. \quad (2.16)$$

Por simplicidade iremos trabalhar no calibre de Landau o qual é obtido fazendo  $\xi = 0$ .

As regras de Feynman para os vértices de interação são dadas por



em que linhas contínua, tracejada, ondulada e pontilhada representam os propagadores dos campos  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $A_\mu$  e  $c$  dados em (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16), respectivamente. Momentos entrando nos vértices nas linhas cheia ou tracejadas devem ser associados aos campos  $\bar{\psi}$  ou  $\varphi^\dagger$  respectivamente. As expressões analíticas associada aos vértices são dadas como segue:

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = 2ie \epsilon_{\mu\nu\rho} \sin(k \wedge p) \quad (2.17)$$

$$\Gamma_{1\mu} = -2ek_\mu \sin(k \wedge p). \quad (2.18)$$

A correspondência gráfica para os outros vértices depende da representação adotada. Para diferenciar o mesmo vértice nas representações fundamental e adjunta nós introduzimos os índices  $F$  e  $A$  respectivamente. Deste modo, para a interação trilinear envolvendo os campos  $\varphi$  e  $A_\mu$ , indicado por  $\Gamma_{2\mu}$ , fazemos a associação

$$\Gamma_{2\mu}^F = -ie(2k+p)_\mu e^{-ik \wedge p} \quad (2.19)$$

para a representação fundamental e

$$\Gamma_{2\mu}^A = 2e(2k+p)_\mu \sin(k \wedge p), \quad (2.20)$$

para a representação adjunta. Usando esta convenção, para os demais vértices nós temos

$$\Gamma_{\mu\nu}^F = -2ie^2 g_{\mu\nu} e^{-ik_1 \wedge k_2} \cos(p_1 \wedge p_2), \quad (2.21)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^A = 4ie^2 g_{\mu\nu} \sin(k_1 \wedge p_1) \sin(k_2 \wedge p_2) + (p_1 \leftrightarrow p_2), \quad (2.22)$$

$$\Gamma_{3\mu}^F = -e\gamma_\mu e^{ik \wedge p}, \quad (2.23)$$

$$\Gamma_{3\mu}^A = 2ie\gamma_\mu \sin(k \wedge p). \quad (2.24)$$

Na próxima seção vamos iniciar o estudo das versões quânticas de (2.5) e (2.6) no contexto da teoria de perturbações.



## 2.2 Divergências UV e a mistura UV/IV

A expressão perturbativa associada a uma particular função de Green estará determinada, até a ordem de um laço, se desenharmos todos os gráficos de Feynman compatíveis com a ação que descreve a teoria até esta ordem. Um gráfico  $\mathcal{G}$  possuindo  $N_X$  linhas associadas ao campo  $X$  e vértices com dimensão  $d_a$  associados à interação  $I_a$  tem, no caso em que o espaço tempo é tridimensional, um grau de divergência superficial dado por<sup>3</sup>

$$d(\mathcal{G}) = 3 - \sum_X (Dim[X]N_X) - \sum_a (3 - d_a), \quad (2.25)$$

em que  $Dim[X]$  representa a dimensão de  $X$  e

$$d_a = D_a + \sum_X Dim[X]L_X \quad (2.26)$$

é a dimensão de um vértice com  $L_X$  linhas associadas a  $X$  e um número  $D_a$  de derivadas. Em nosso caso, todos os vértices possuem dimensão  $d_a = 3$  de modo que o último termo em (2.25) não contribui.

Gráficos com  $d(\mathcal{G}) \geq 0$  podem conter integrais divergentes que devem ser tratadas por meio de um esquema de renormalização. Em particular, estaremos interessados nos casos em que  $d(\mathcal{G}) = 1$  (divergência no máximo linear) ou  $d(\mathcal{G}) = 2$  (divergência no máximo quadrática). Gráficos desta natureza podem introduzir singularidades não-integráveis que podem invalidar a série perturbativa em ordens mais altas. A seguir vamos identificar todos os gráficos divergentes em um laço.

### 2.2.1 Campo de calibre interagindo com um campo fermiônico

Nesta seção vamos considerar a teoria especificada em (2.5) indicando as funções de vértice que contém divergências ultravioletas. Particular atenção será dada aos casos em que ocorrem divergências quadráticas e/ou lineares. Gráficos desta natureza serão analisados em detalhe.

O grau de divergência superficial é dado neste caso por

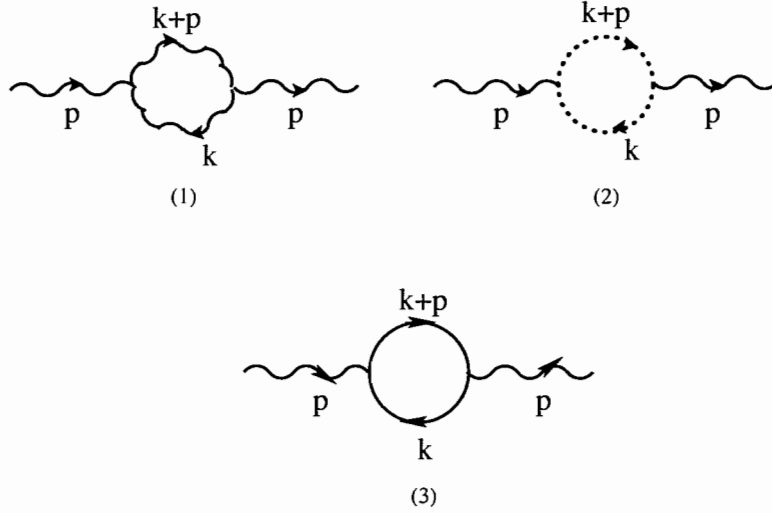
$$d(\mathcal{G}) = 3 - N_{A_\mu} - N_\psi, \quad (2.27)$$

em que  $N_{A_\mu}$  e  $N_\psi$  indicam o número de linhas externas associadas aos campos  $A_\mu$  e  $\psi$  respectivamente. Vejamos quais são as funções de vértice divergentes na correspondente teoria quântica na ordem de um laço.

<sup>3</sup>No caso geral em que férmions e escalares estão presentes temos  $a = 1, \dots, 5$  correspondendo aos cinco vértices definidos anteriormente.

## Tensor de polarização

Fazendo  $N_{A_\mu} = 2$  e  $N_\psi = 0$  em (2.27) obtemos  $d(\mathcal{G}) = 1$ . Os gráficos são dados por



Um resultado importante é que, de forma análoga ao que ocorre na correspondente teoria comutativa, a soma dos gráficos 1 e 2 é igual a zero [29]. Para obter este resultado, considere inicialmente as expressões analíticas<sup>4</sup>

$$\Pi_{\mu\nu}^1(p) = 2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \epsilon_{\alpha\mu\beta} \Delta^{\beta\lambda}(k+p) \epsilon_{\lambda\nu\sigma} \Delta^{\sigma\alpha}(k) \sin^2(k \wedge p) \quad (2.28)$$

e

$$\Pi_{\mu\nu}^2(p) = -4e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta_c(k) \Delta_c(k+p) k_\mu (k+p)_\nu \sin^2(k \wedge p), \quad (2.29)$$

associadas aos gráficos (1) e (2) respectivamente. Após algumas simplificações obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^1(p) + \Pi_{\mu\nu}^2(p) &= 2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2k_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu + p_\mu k_\nu}{(k+p)^2 k^2} \sin^2(k \wedge p) \\ &\quad - 4e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu (k+p)_\nu}{(k+p)^2 k^2} \sin^2(k \wedge p). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Note que por simetria

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu (k+p)_\nu}{(k+p)^2 k^2} \sin^2(k \wedge p) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\nu (k+p)_\mu}{(k+p)^2 k^2} \sin^2(k \wedge p) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2k_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu + p_\mu k_\nu}{(k+p)^2 k^2} \sin^2(k \wedge p) \end{aligned} \quad (2.31)$$

<sup>4</sup>Considere que em todas as integrais divergentes existe uma regularização que faz com que possamos manipular os termos no integrando.

em que

$$\Pi_{\mu\nu}^1(p) + \Pi_{\mu\nu}^2(p) = 0. \quad (2.32)$$

Concluimos que a soma dos gráficos 1 e 2 não introduz nenhum tipo de correção (divergente ou finita).

A possibilidade da ocorrência da mistura UV/IV provém exclusivamente do gráfico 3 e depende da representação escolhida. A expressão analítica para este gráfico é dada por

$$\Pi_3^{\mu\nu}(p) = -e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{i}{-i(\not{k} + \not{p}) + M} \gamma^\nu \frac{i}{-i\not{k} + M} \right\} \mathcal{V} \quad (2.33)$$

em que

$$\mathcal{V} = 1 \quad (2.34)$$

para representação fundamental e

$$\mathcal{V} = 4 \sin^2(k \wedge p) \quad (2.35)$$

quando adotamos a representação adjunta. No primeiro caso, o resultado é idêntico ao encontrado na teoria comutativa devido ao cancelamento das exponenciais provenientes de cada um dos vértices do tipo (2.23). Procedendo da forma usual, utilizamos a identidade

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[Ax + B(1-x)]^2}, \quad (2.36)$$

fazemos a mudança de variável  $k \rightarrow k - px$  e observamos que, para a particular representação das matrizes de Dirac que estamos utilizando temos<sup>5</sup>

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu) = 2i\epsilon^{\mu\alpha\nu}.$$

Obtemos o resultado (o índice  $F$  indica a representação fundamental)

$$\Pi_{3F}^{\mu\nu}(p) = -\frac{ie^2}{2\pi} (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \int_0^1 dx \frac{(1-x)x}{\Lambda} + \frac{Me^2}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} p_\rho \int_0^1 dx \frac{1}{\Lambda}, \quad (2.37)$$

em que definimos  $\Lambda = \sqrt{M^2 + p^2 x(1-x)}$ .

Na representação adjunta podemos isolar a contribuição que contém a dependência da não-comutatividade, responsável pela introdução da mistura UV/IV, por meio da identidade

<sup>5</sup>Em 2+1 dimensões as matrizes  $\gamma$  de Dirac podem ser representadas por matrizes  $2 \times 2$ . Existem duas representações inequivalentes, uma delas cujo elemento típico é  $\{\gamma_0 = \sigma_3, \gamma_1 = i\sigma_1, \gamma_2 = i\sigma_2\}$  será adotada neste trabalho. A outra representação tem um elemento típico que difere do anterior pelo sinal de uma das matrizes  $\gamma$ .

$$\sin^2(k \wedge p) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2k \wedge p)]. \quad (2.38)$$

Quando substituimos (2.38) em (2.33), obtemos uma expressão contendo dois termos. A contribuição que não depende da função cosseno é chamada de parte planar e possui o mesmo resultado encontrado em (2.37) multiplicado pelos fatores 4, que aparece em (2.35), e  $\frac{1}{2}$  da fórmula (2.38). O outro termo, contendo o fator trigonométrico dependente da variável de integração, é finito e chamado parte não-planar. A expressão analítica neste caso é dada por

$$\begin{aligned} \Pi_{np}^{\mu\nu}(p) &= 2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{i}{-i(\not{k} + \not{p}) + M} \gamma^\nu \frac{i}{-i\not{k} + M} \right\} \cos(2k \wedge p) \\ &= -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\cos(2k \wedge p)}{[k^2 + \Lambda^2]^2} \mathcal{G}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

em que utilizamos a notação

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} = 2k^\mu k^\nu + (2p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2)x(x-1) + i\epsilon^{\mu\alpha\nu} M p_\alpha - g^{\mu\nu}(k^2 - M^2).$$

Para obter a expressão (2.39) procedemos da forma análoga ao caso da representação fundamental. As integrais que devem ser calculadas são da seguinte forma (lembrando os  $i\epsilon$  nos denominadores)

$$I(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\cos(2k \wedge p)}{[k^2 + \Lambda^2 + i\epsilon]^2} = \frac{i}{8\pi\Lambda} e^{-\Lambda\tilde{p}}, \quad (2.40)$$

$$I_{\mu\nu}(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\nu \cos(2k \wedge p)}{[k^2 + \Lambda^2 + i\epsilon]^2} = \frac{i}{8\pi} \left[ \frac{g_{\mu\nu}}{\tilde{p}} - \left( \frac{1}{\tilde{p}} + \Lambda \right) \frac{\tilde{p}_\nu \tilde{p}_\mu}{\tilde{p}^2} \right] e^{-\Lambda\tilde{p}} \quad (2.41)$$

e

$$J(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{[k^2 + \Lambda^2 + i\epsilon]^2} \cos(2k \wedge \tilde{p}) = -\frac{i}{8\pi} \left( \frac{2}{\tilde{p}} - \Lambda \right) e^{-\Lambda\tilde{p}} \quad (2.42)$$

Como estamos analisando somente não-comutatividade espacial (escolhemos  $\theta_{0i} = 0$ ) temos  $\tilde{p} = |\vec{p}|$ .

Utilizando as integrais acima, o resultado da parte não-planar é dado por

$$\Pi_{np}^{\mu\nu}(p) = \Pi_{np}^1(p)(g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) + \Pi_{np}^2(p) \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} + \Pi_{np}^3(p) p_\rho \epsilon^{\mu\rho\nu}, \quad (2.43)$$

em que

$$\Pi_{np}^1(p) = \frac{e^2 i}{\pi} \int_0^1 dx \frac{(1-x)x}{\Lambda} e^{-\Lambda\tilde{p}}, \quad (2.44)$$

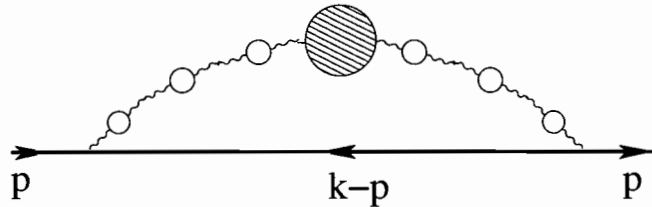
$$\Pi_{np}^2(p) = \frac{e^2 i}{\pi} \int_0^1 dx \left( \frac{1}{\tilde{p}} + \Lambda \right) e^{-\Lambda \tilde{p}} \quad (2.45)$$

e

$$\Pi_{np}^3(p) = -\frac{e^2 M}{2\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{\Lambda} e^{-\Lambda \tilde{p}}. \quad (2.46)$$

O coeficiente  $\Pi_{np}^2(p)$  em (2.45) contém uma parte proporcional a  $\frac{1}{\tilde{p}}$ , introduzindo uma singularidade em  $\tilde{p} = 0$  (esta variável foi definida na página 12).

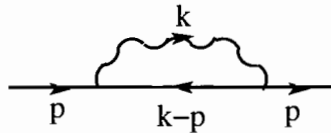
Finalizando a análise do tensor de polarização, devemos exibir um exemplo concreto indicando que a singularidade presente em (2.45) pode, de fato, conduzir a uma teoria quântica inconsistente. Um exemplo é o gráfico<sup>6</sup>



possui severa divergência infravermelha não-integrável (neste exemplo para a função de dois pontos do campo  $\psi$ , que denotaremos por  $\Gamma_{\bar{\psi}\psi}$ ). Como veremos a seguir, existe uma singularidade adicional em um laço, também do tipo  $\frac{1}{\tilde{p}}$ , proveniente de  $\Gamma_{\bar{\psi}\psi}$ . É claro que podemos generalizar o gráfico apresentado anteriormente introduzindo novos subgráficos contendo singularidades do tipo apresentado em (2.45). O problema infravermelho piora quando seguimos para ordens mais altas de perturbação.

### Função de dois pontos do campo $\psi$

Escolhendo  $N_\psi = 2$  e  $N_{A_\mu} = 0$  obtemos o grau de divergência superficial  $d(\mathcal{G}) = 1$ . Em um laço, o gráfico que fornece a contribuição para a função de dois pontos do campo  $\psi$  é dado por



e a expressão analítica correspondente é

$$\Gamma_{\bar{\psi}\psi} = ie^2 \epsilon_{\mu\nu\rho} \gamma^\mu \gamma^\nu \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\rho}{k^2 (-i(\not{k} - \not{p}) + M)} \mathcal{V}. \quad (2.47)$$

<sup>6</sup>O conteúdo do círculo hachurado, presente no gráfico, é arbitrário. Esta notação será utilizada novamente quando tratarmos da função de quatro pontos do campo  $\varphi$ .

O fator  $\mathcal{V}$  assume os mesmos valores dados em (2.34) e (2.35). Como ocorre para o tensor de polarização, a escolha da representação fundamental fornece o mesmo resultado do caso comutativo. Desenvolvendo (2.47), vemos que termos logicamente divergentes são nulos (por integração simétrica) restando

$$\Gamma_{\bar{\psi}\psi}^F = -2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + M^2} + \text{parte finita} \quad (2.48)$$

No caso em que a regularização dimensional é empregada, a integral em (2.48) fornece um resultado finito obtido de

$$\int d^3k \frac{1}{(-k_0^2 + \vec{k}^2 + M^2 + i\epsilon)^\alpha} = -2i\pi^2 M. \quad (2.49)$$

A mistura UV/IV surge quando adotamos a representação adjunta. Neste caso, a expressão analítica para parte não-planar do gráfico é dada por

$$[\Gamma_{\bar{\psi}\psi}^A]_{np} = -4ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\rho \gamma^\rho (i(\not{k} - \not{p}) + M)}{k^2 [(k-p)^2 + M^2]} \cos(2k \wedge p). \quad (2.50)$$

O termo que forneceria uma divergência infravermelha logarítmica é igual a zero e a função de dois pontos do campo  $\psi$  em um laço é dada por

$$[\Gamma_{\bar{\psi}\psi}^A]_{np} = 4e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\cos(2k \wedge p)}{(k^2 + M^2)} + \text{parte finita} = -\frac{ie^2}{\pi \tilde{p}} e^{-M\tilde{p}} + \text{parte finita}. \quad (2.51)$$

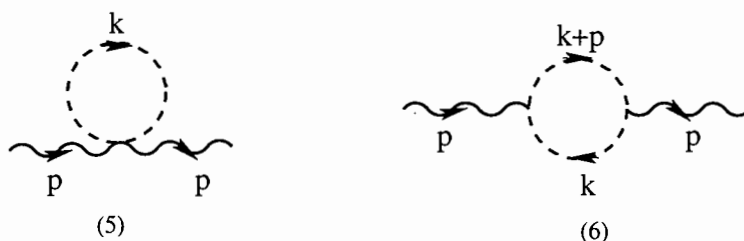
Note a presença de uma singularidade em  $\tilde{p} = 0$  em (2.51). Vemos que na teoria onde o campo de Chern-Simons interage com a matéria fermiônica, somente na representação fundamental obtemos uma descrição consistente do ponto de vista perturbativo. Na representação adjunta, a singularidade não-integrável presente nas funções de dois pontos do campo de calibre e do campo  $\psi$ , introduz o problema da mistura UV/IV. Neste caso, a série perturbativa em ordens mais altas está infestada de singularidades infravermelhas, invalidando a expansão perturbativa.

## 2.2.2 Campo de calibre interagindo com um campo escalar

Nesta seção iniciamos o estudo da teoria descrita em (2.6). Contrariamente ao caso estudado na seção anterior, mesmo na representação fundamental a teoria quântica possui mistura UV/IF. Vejamos onde ocorrem as divergências.

### Tensor de polarização

Além dos gráficos 1 e 2, já apresentados, temos que considerar os gráficos



A expressão analítica correspondente a soma dos dois gráficos acima é dada por

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{(2k+p)_\mu(2k+p)_\nu}{[(k+p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} - \frac{2g_{\mu\nu}}{(k^2 + m^2)} \right] \mathcal{V}. \quad (2.52)$$

Como nos casos anteriores temos  $\mathcal{V} = 1$  e  $\mathcal{V} = 4 \sin^2(k \wedge p)$  para as representações fundamental e adjunta, respectivamente. Os gráficos são planares na representação fundamental. Particularmente no caso do gráfico 5, que não possui análogo no caso da teoria fermiônica desenvolvida anteriormente, este resultado ocorre devido ao fato de que os fatores de momento que aparecem em (2.21) são tais que os argumentos das funções exponencial e cosseno são iguais a zero. No caso desta representação temos o mesmo resultado da teoria comutativa

$$\Pi_{\mu\nu}^F(p) = i \frac{e^2}{8\pi} (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \int_0^1 dx \frac{(2x-1)^2}{a}, \quad (2.53)$$

em que  $a = \sqrt{m^2 + p^2 x(1-x)}$ . O procedimento para obtenção do resultado acima é análogo ao desenvolvido no caso da teoria fermiônica.

No caso da representação adjunta, as integrais que devem ser calculadas são as mesmas que em (2.40)-(2.42). Obtemos

$$\Pi_{\mu\nu}^{A,np}(p) = \Pi_{np}^1(p)(g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) + \Pi_{np}^2(p) \frac{\tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu}{\tilde{p}^2}, \quad (2.54)$$

$$\Pi_{np}^1(p) = -\frac{e^2 i}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{e^{-a\tilde{p}}}{a} (2x-1)^2 \quad (2.55)$$

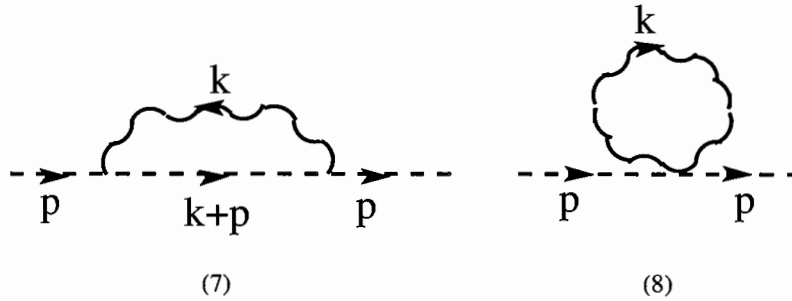
e

$$\Pi_{np}^2(p) = -\frac{e^2 i}{\pi} \int_0^1 dx \left( \frac{1}{\tilde{p}} + a \right) e^{-a\tilde{p}}. \quad (2.56)$$

O comportamento singular é o mesmo encontrado em (2.45) no caso da teoria fermiônica, existindo uma singularidade (linear) em  $p = 0$  contida no coeficiente (2.56).

### Função de dois pontos do campo escalar

A função de Green  $\Gamma_{\bar{\varphi}\varphi}$  contém, em um laço, os gráficos



os quais tem grau de divergência superficial  $d(\mathcal{G}) = 2$ , implicando, a primeira vista, no aparecimento de divergências quadráticas. No entanto, a escolha do calibre de Landau ( $\xi = 0$ ) faz com que o propagador do campo de calibre (2.15) possua apenas uma parte proporcional ao símbolo de Levi-Civita  $\epsilon_{\mu\rho\nu}$ , resultando que os gráficos são iguais a zero. Isto pode ser visto diretamente da expressão analítica correspondente aos gráficos 7 e 8

$$\Gamma_{6\bar{\varphi}\varphi} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k_\rho \epsilon^{\mu\rho\nu} (k+2p)_\mu (k+2p)_\nu}{k^2 [(k+p)^2 + m^2]} \mathcal{C} = 0. \quad (2.57)$$

e

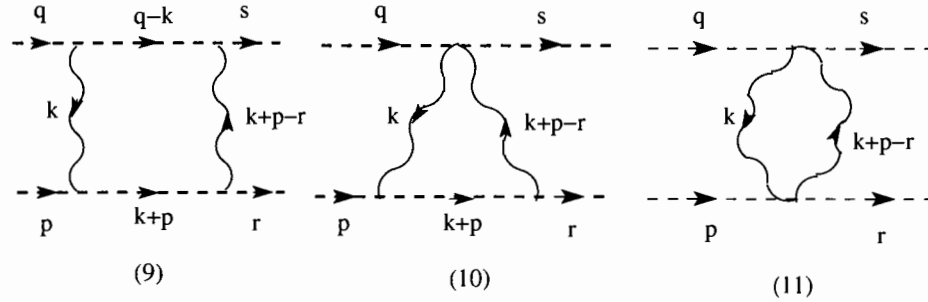
$$\Gamma_{7\bar{\varphi}\varphi} = ie^2 \epsilon^{\mu\rho\nu} g_{\mu\nu} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\rho}{k^2} \bar{\mathcal{C}} = 0 \quad (2.58)$$

Note que os resultados acima não dependem da representação adotada, ou seja, não dependem dos valores de  $\mathcal{C}$  e  $\bar{\mathcal{C}}$ .



## Função de quatro pontos do campo escalar

Para função de quatro pontos do campo escalar  $\varphi$  existem três diagramas em um laço.



No calibre de Landau, os diagramas 9 e 10 são finitos mas o gráfico 11 apresenta uma singularidade perigosa, do tipo  $\frac{1}{p}$ , nas duas representações. A expressão analítica é dada por

$$\Gamma_{\varphi^4}^{11} = -2e^4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_{\mu\rho\nu} k^\rho \epsilon^{\nu\alpha\mu} (k+p-r)_\alpha}{k^2 (k+p-r)^2} \bar{\mathcal{V}}. \quad (2.59)$$

onde

$$\bar{\mathcal{V}} = e^{i(q\wedge s + p\wedge r)} \cos^2[k \wedge (p-r)]$$

na representação fundamental e

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{V}} = & 4 \left\{ \sin[k \wedge q + (p-r) \wedge q] \sin(k \wedge s) + \sin(k \wedge q) \sin[k \wedge s + (p-r) \wedge s] \right\} \\ & \times \left\{ \sin(k \wedge r + p \wedge r) \sin(k \wedge p) + \sin(k \wedge r) \sin(k \wedge p + p \wedge r) \right\} \end{aligned} \quad (2.60)$$

na representação adjunta. O comportamento singular de (2.59) pode ser obtido de forma mais simples no caso da representação fundamental por meio da identidade  $\cos^2 x = \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)]$ . Para a parte planar do gráfico temos

$$[\Gamma_{\varphi^4}^{11F}]_p = -2e^4 e^{i(q\wedge s + p\wedge r)} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k \cdot (k+p-r)}{k^2 (k+p-r)^2}. \quad (2.61)$$

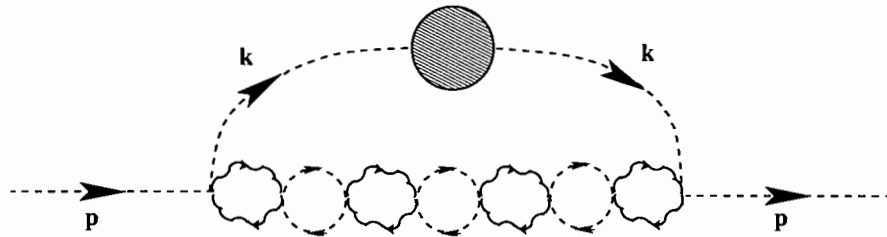
Quando empregamos a regularização dimensional obtemos uma contribuição finita proveniente de (2.61). Deste modo, não é necessário introduzir um termo do tipo  $(\varphi^\dagger \varphi)^2$  na ação (2.6). Para parte não-planar temos

$$[\Gamma_{\varphi^4}^{11F}]_{np} = -2e^4 e^{i(q\wedge s + p\wedge r)} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k \cdot (k+p-r)}{k^2 (k+p-r)^2} \cos[2k \wedge (p-r)], \quad (2.62)$$

cujos comportamento dominante para  $p \rightarrow r$  é dado por

$$\frac{ie^4}{2\pi(\tilde{p} - \tilde{r})}. \quad (2.63)$$

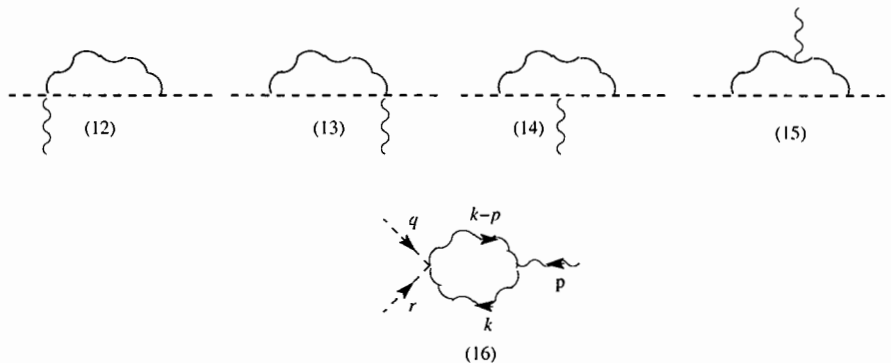
A presença da singularidade infravermelha em  $\tilde{p} = \tilde{r}$  introduz severos problemas em ordens maiores de perturbação. Um exemplo de gráfico onde isto ocorre é dado por



Mais adiante continuaremos com a análise da representação adjunta.

### Correção para o vértice

No caso da função de três pontos  $\Gamma_{\varphi^\dagger \varphi A_\mu}$  os diagramas são representados em um laço por



Os gráficos 12 e 13 possuem no máximo divergências infravermelhas logarítmicas (integráveis). Quanto aos demais gráficos, verificamos que fornecem contribuições finitas. Como exemplo, considere o gráfico 16, cuja expressão analítica é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varphi^\dagger \varphi A_\mu}^{16} &= -2ie^3 e^{-iq \wedge r} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(k-p)^\rho k^\sigma}{(k-p)^2 k^2} \epsilon^{\beta\rho\alpha} \epsilon_{\alpha\mu\gamma} \epsilon^{\gamma\sigma}_\beta \cos(k \wedge p) \\ &= 2ie^3 e^{-iq \wedge r} p^\alpha \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon^{\alpha\beta\mu} k^\beta}{(k-p)^2 k^2} \cos(k \wedge p). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Vemos que a parte logaritmicamente divergente é nula (obtida colocando  $p = 0$  no denominador) restando somente uma contribuição finita.

## 2.3 Eliminando as divergências infravermelhas

Nas seções anteriores estudamos efeitos quânticos presentes nas funções de vértice (potencialmente divergentes) associadas com dois modelos em que o campo de Chern-Simons interage com a matéria. Particularmente, identificamos a presença de singularidades não-integráveis em alguns casos. O objetivo desta seção é mostrar como podemos construir uma teoria quântica de campos não-comutativa em que tais singularidades não estejam presentes. Como vimos, isto ocorre naturalmente até um laço na teoria definida por (2.5) quando adotamos a representação fundamental. Os resultados obtidos coincidem com os da teoria comutativa nesta ordem de perturbação. No entanto, existem situações em que a singularidade não-integrável persiste, a saber, nos seguintes casos:

**A)** no modelo (2.5) quando adotamos a representação adjunta. Surgem singularidades no tensor de polarização e na função de dois pontos do campo  $\psi$ ;

**B)** no modelo (2.6), ocorrendo uma singularidade tanto na representação fundamental quanto na adjunta. No primeiro caso o comportamento singular está presente somente na função de quatro pontos enquanto que no segundo caso o problema também ocorre no tensor de polarização.

Seguindo nossa análise, vejamos como os modelos (2.5) e (2.6) podem ser combinados com a intenção de eliminar as singularidades infravermelhas. Faremos isso separadamente para cada uma das representações. Neste sentido, a teoria considerada nas seguintes subseções é definida por

$$S = S_{cs} + S_{\psi} + S_{\varphi} + S_{fc} + S_{fantasma}. \quad (2.65)$$

Como veremos a seguir, novas interações devem ser introduzidas com a finalidade de eliminar todas as singularidades não integráveis da teoria.

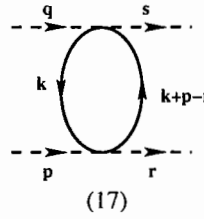
### 2.3.1 Representação fundamental

Note que na representação fundamental não existem singularidades não-integráveis além da que já foi mencionada em (2.63). A mistura UV/IV surge na função de quatro pontos  $\Gamma_{\varphi^4}$  e provém do setor bosônico da teoria (ou seja, somente de  $S_{\varphi}$ ). Verificamos, contudo, que é possível eliminar este comportamento singular introduzindo novos termos em (2.65). Vejamos como esta idéia pode ser implementada

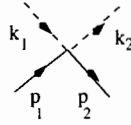
Considere a possibilidade de interação entre o campo escalar e o fermiônico descrita por

$$S_{\varphi\psi} = \int d^3x [a_1 \bar{\psi} * \psi * \varphi^\dagger * \varphi - a_2 \bar{\psi} * \varphi * \varphi^\dagger * \psi]. \quad (2.66)$$

Nesta expressão, introduzimos as constantes  $a_1$  e  $a_2$  para indicar a possibilidade de diferentes ordenamentos que, em princípio, podem ter pesos arbitrários. De fato, existem seis ordenamentos possíveis mas somente os descritos em (2.66) satisfazem a condição de serem invariantes pela transformação de calibre (2.7). A presença dos dois termos também indica que os campos  $\varphi$  e  $\psi$  satisfazem o vínculo de que suas respectivas cargas devem ser iguais; caso contrário, somente o termo associado com  $a_1$  estaria presente o que não permite eliminar a singularidade infravermelha presente em  $\Gamma_{\varphi^4}$ . A razão disso é que o novo gráfico



candidato a eliminar a singularidade presente em (2.63), é planar se as possibilidades de ordenamento associadas a  $a_1$  e  $a_2$  não estão ambas presentes em (2.66). O vínculo cargas iguais para  $\varphi$  e  $\psi$  permite eliminar a singularidade não-integrável de  $\Gamma_{\varphi^4}$  quando escolhemos  $a_1 = a_2 = e^2$ . Note que o sinal relativo entre os coeficientes em (2.66) fornece uma contribuição não nula proveniente desta interação no limite comutativo<sup>7</sup>. Por meio desta escolha, a regra de Feynman para o vértice (2.66), representado graficamente por



é dada por

$$\Gamma_{\varphi\psi} = 2ie^2 \cos(k_1 \wedge k_2 + p_1 \wedge p_2), \quad (2.67)$$

Na figura acima, os momentos  $p_1$  e  $p_2$  devem ser associados a  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  enquanto que os momentos  $k_1$  e  $k_2$  estão associados a  $\varphi^\dagger$  e  $\varphi$ , respectivamente.

A expressão analítica para parte não-planar do gráfico 17 é

$$[\Gamma_{\varphi^4}^{17F}]_{np} = -2e^4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[-k \cdot (k + p - r) + M^2]}{[(k + p - r)^2 + M^2](k^2 + M^2)} \quad (2.68)$$

$$\times \cos[2k \wedge (p - r) + p \wedge r - q \wedge s],$$

que tem a parte divergente dada por

$$\frac{ie^4}{2\pi|\tilde{p} - \tilde{r}|}. \quad (2.69)$$

<sup>7</sup>Na representação fundamental, isto ocorre com todas as demais interações presentes na teoria.

É evidente que esta contribuição elimina a singularidade em (2.63). Com isso, construímos uma teoria sem a presença de singularidades infravermelhas perigosas, em um laço, para o caso em que os campos de matéria se transformam de acordo com a representação fundamental.

### 2.3.2 Representação adjunta

Na representação adjunta, a singularidade presente no tensor de polarização é eliminada quando escolhermos as massas dos campos de matéria iguais. Este resultado fica claro quando adicionamos as contribuições provenientes dos setores fermiônico e bosônico dados em (2.45) e (2.56) respectivamente.

Resta a divergência associada à função de dois pontos do campo  $\psi$ , e aquela obtida no cálculo da função de quatro pontos do campo  $\varphi$ . Neste último caso, a estrutura proveniente dos vértices conduz a uma expressão diferente e bem mais complicada que a encontrada em (2.63), válida no caso da representação fundamental. Uma possibilidade de interação entre  $\varphi$  e  $\psi$  que fornece uma chance de eliminar as singularidades existentes em  $\Gamma_{\bar{\psi}\psi}$  e  $\Gamma_{\varphi^4}$  é dada por

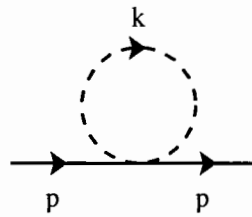
$$S_{\varphi\psi} = g_1 \int d^3x \{ [\varphi^\dagger, \psi]_* * [\varphi, \bar{\psi}]_* - [\varphi^\dagger, \bar{\psi}]_* * [\varphi, \psi]_* \}. \quad (2.70)$$

Esta interação introduz um novo vértice que possui a expressão analítica

$$\Gamma_{1\varphi\psi} = 4ig_1 [\sin(k_1 \wedge p_1) \sin(k_2 \wedge p_2) + \sin(k_1 \wedge p_1) \sin(k_2 \wedge p_2)]. \quad (2.71)$$

A correspondência entre momentos e campos é análoga a apresentada na página anterior.

A interação (2.70) também acrescenta o seguinte gráfico na função de dois pontos  $\Gamma_{\bar{\psi}\psi}$



A expressão analítica associada a este gráfico é dada por

$$\Gamma_{\bar{\psi}\psi}^A = 8g_1 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2 + m^2}. \quad (2.72)$$

de onde podemos extrair a parte não-planar, dada por

$$[\Gamma_{\bar{\psi}\psi}^A]_{np} = -4g_1 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\cos(2k \wedge p)}{(k^2 - m^2)} = \frac{ig_1}{\pi \tilde{p}} e^{-m\tilde{p}}. \quad (2.73)$$

Vemos que a singularidade infravermelha de (2.51) será cancelada se escolhermos

$$g_1 = e^2. \quad (2.74)$$

O vértice (2.71) também introduz um gráfico como o da figura 17 (página anterior) que, assim como no caso da representação fundamental, é o candidato natural à eliminar a singularidade proveniente de (2.59) na representação adjunta. A expressão analítica do gráfico é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varphi^4}^{17A} &= 4g_1^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr}[\Delta_\psi(k)\Delta_\psi(k+p-r)\bar{\mathcal{V}}] \\ &= -8g_1^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k \cdot (k+p-r) + m^2}{[(k+p-r)^2 - m^2][k^2 - m^2]} \bar{\mathcal{V}}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

em que  $\bar{\mathcal{V}}$  é o mesmo dado em (2.60). O cancelamento da parte singular deve vir de

$$\Gamma_{\varphi^4}^A = -4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \bar{\mathcal{V}} \left[ \frac{e^2}{(k+p-r)^2} - \frac{2g_1^2}{[(k+p-r)^2 - m^2]} \right]. \quad (2.76)$$

em que somamos as contribuições dos gráficos 11 (na página 25) e 17 (na página 28). Note que o valor de  $g_1$  já foi fixado quando escolhemos eliminar a singularidade presente em  $\Gamma_{\bar{\psi}\psi}$ . Comparando com expressão acima, verificamos que tal escolha, adequada à função de dois pontos de  $\psi$ , não elimina a singularidade infravermelha presente em  $\Gamma_{\varphi^4}$ . Assim, a teoria quântica em que bósons e férmions podem interagir entre si, além de interagir com um campo de calibre, persiste com uma divergência infravermelha perigosa em um laço quando adotamos a representação adjunta.

Os resultados encontrados nesse capítulo estão resumidos nas tabelas abaixo, onde representamos quatro situações em que o campo de Chern-Simons interage com matéria:  $S_\psi$  representa a teoria em que somente um campo fermiônico está presente,  $S_\varphi$  quando somente existe um campo escalar, a presença dos dois setores, bosônico e fermiônico, é indicado por  $S_\psi + S_\varphi$ , existindo ainda uma situação em que adicionamos uma interação entre os campos de matéria, indicado pela presença do termo  $S_{\psi\varphi}$ . Como já discutimos, a forma do termo de interação depende da representação adotada (veja (2.66) e (2.70)).

Fundamental	2 pontos $A_\mu$	2 pontos $\psi$	4 pontos $\varphi$
$S_\psi$	Planar	Planar	****
$S_\varphi$	Planar	****	UV/IV
$S_\psi + S_\varphi$	planar	planar	UV/IV
$S_\psi + S_\varphi + S_{\psi\varphi}$	planar	planar	Sem UV/IV

Adjunta	2 pontos $A_\mu$	2 pontos $\psi$	4 pontos $\varphi$
$S_\psi$	UV/IV	UV/IV	****
$S_\varphi$	UV/IV	****	UV/IV
$S_\psi + S_\varphi$	Sem UV/IV	UV/IV	UV/IV
$S_\psi + S_\varphi + S_{\psi\varphi}$	Sem UV/IV	Problema!	Problema!

No final das duas últimas colunas da tabela contendo os resultados na representação adjunta, introduzimos a palavra “Problema” para chamar atenção de que não é possível eliminar simultaneamente a singularidade perigosa das funções de dois pontos do campo  $\psi$  e quatro pontos do campo  $\varphi$ . associadas a mistura, indicada na tabela por UV/IV. Entretanto, é possível contruir uma teoria livre da mistura UV/IV no contexto de um modelo supersimétrico. A implementação deste caso será o tema do próximo capítulo.

## Capítulo 3

# Teoria Não-comutativa Supersimétrica da Interação do Campo de Chern-Simons com a Matéria

No capítulo anterior estudamos alguns exemplos de teorias de campos não-comutativas em que a matéria fermiônica ou bosônica interage com um campo de Chern-Simons. Na teoria em que estes dois setores estão presentes (caso estudado na seção 2.3) verificamos que a introdução de novas interações, convenientemente escolhidas, permite construir uma teoria livre de singularidades perigosas no caso da representação fundamental. Este procedimento, embora melhore o comportamento singular da teoria, não resolve o problema no caso da representação adjunta. Isso ocorre devido a impossibilidade de ajustar as constantes de acoplamento associadas as interações de modo a eliminar, simultaneamente, as singularidades presentes nas funções de Green de dois pontos do campo  $\psi$  e de quatro pontos do campo  $\varphi$ .

Embora o esquema desenvolvido anteriormente não solucione completamente o problema na representação adjunta, a presença dos setores contendo bósons e férmions parece ser fundamental se desejamos construir uma teoria perturbativamente consistente. Resta saber se existe alguma forma de implementar esta idéia de modo a obter uma teoria livre da mistura UV/IV. O objetivo deste capítulo é mostrar que isso é possível em um modelo supersimétrico. Nesse contexto, definir o modelo em um superespaço conduz a uma estrutura divergente distinta daquelas tratadas nos capítulos anteriores. Singularidades que eram lineares, por exemplo, tornam-se logarítmicas, ocasionando um melhor comportamento infravermelho da teoria no que diz respeito a mistura.



### 3.1 Teoria de Chern-Simons supersimétrica e a interação com a matéria

O objetivo desta seção é apresentar o modelo de campos clássicos que a seguir será analisado no contexto de uma teoria quântica. A ação de Chern-Simons é definida em termos do superpotencial  $A^\mu$  por <sup>1</sup>

$$S = m \int d^5z \left( A^\alpha * W_\alpha + \frac{i}{6} \{A^\alpha, A^\beta\}_* * D_\beta A_\alpha + \frac{1}{12} \{A^\alpha, A^\beta\}_* * \{A_\alpha, A_\beta\}_* \right), \quad (3.1)$$

em que

$$W_\beta = \frac{1}{2} D^\alpha D_\beta A_\alpha - \frac{i}{2} [A^\alpha, D_\alpha A_\beta]_* - \frac{1}{6} [A^\alpha, \{A_\alpha, A_\beta\}_*]_*. \quad (3.2)$$

Nas expressões acima introduzimos a notação  $\{a, b\}_* = a * b + b * a$  e  $[a, b]_* = a * b - b * a$ . O objeto  $W_\alpha$  é, no superespaço, o análogo do tensor do campo eletromagnético. Podemos escrevê-lo em termos dos campos físicos da teoria como

$$W_\alpha = \lambda_\alpha + i\theta^\beta f_{\alpha\beta} - i\theta^2 \partial_{\alpha\beta} \lambda^\beta, \quad (3.3)$$

em que  $f_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}([\sigma^m, \sigma^n])_{\alpha\beta} F_{mn}$  é o dual do tensor do campo eletromagnético  $F_{mn} = \partial_m V_n - \partial_n V_m$ . O objeto  $V_m$  é o campo de calibre (o campo  $A_\mu$  do capítulo anterior) e  $\lambda$  é o correspondente parceiro supersimétrico, ou seja, o férmion correspondente à  $V_m$ . Analogamente, o supercampo espinorial  $A_\alpha$  é dado por

$$A_\alpha = \chi_\alpha(x) - \theta_\alpha B(x) + i\theta^\beta V_{\beta\alpha} - 2\theta^2 \left[ \lambda_\alpha + \frac{1}{2} \partial_{\alpha\beta} \chi^\beta \right], \quad (3.4)$$

em que  $V^{\beta\alpha} = V^m (\gamma_m)^{\beta\alpha}$  e  $\partial^{\beta\alpha} = \partial^m (\gamma_m)^{\beta\alpha}$ . Para obter a forma explícita das matrizes  $(\gamma_m)^{\beta\alpha}$ , além de mais informações sobre a notação, consulte o apêndice A. Os campos  $\chi_\alpha(x)$  e  $B(x)$  correspondem a um férmion e um bóson respectivamente. Embora não estejam associados a partículas físicas, a presença desses campos é necessária para que a teoria seja supersimétrica. Mais detalhes sobre a construção de lagrangeanas supersimétricas podem ser encontrados em [38, 39, 41, 40].

O termo de Chern-Simons pode ser escrito em termos das componentes de  $A_\alpha$ . Em geral, embora o procedimento seja simples, o cálculo envolve um grande número de termos, fazendo com que a lagrangeana final possua vários termos de interação. Quando introduzimos a interação entre o supercampo espinorial  $A_\mu$  por meio da prescrição

<sup>1</sup>Um estudo detalhado de teorias supersimétricas e a notação utilizada neste capítulo podem ser encontrados na referência [39]. No apêndice A apresentamos um resumo contendo as definições e identidades importantes em nossa análise, particularmente no cálculo de supergráficos.

$$D_\alpha \Phi \rightarrow D_\alpha \Phi - ig[A_\alpha, \Phi], \quad (3.5)$$

por exemplo, obtemos

$$\begin{aligned} S_\Phi &= - \int \frac{1}{2} d^5 z \nabla^\mu \bar{\Phi} * \nabla_\mu \Phi \\ &= - \int d^5 z \left[ \frac{1}{2} (D^\mu \bar{\Phi} + ig[\bar{\Phi}, A^\mu]_*) * (D^\mu \Phi - ig[A^\mu, \Phi]_*) + M \bar{\Phi} \Phi \right] \\ &= \int d^5 z \left[ \bar{\Phi} (D^2 - M) \Phi - \frac{i}{2} g ([\bar{\Phi}, A^\mu]_* * D_\mu \Phi - D^\mu \bar{\Phi} * [A_\mu, \Phi]_*) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} g^2 [\bar{\Phi}, A^\mu]_* * [A_\mu, \Phi]_* \right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que  $\bar{\Phi}$  é complexo conjugado do supercampo  $\Phi$  que em componentes é dado por

$$\Phi(x, \theta) = \varphi(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha - \theta^2 F(x). \quad (3.7)$$

Os campos físicos são o campo escalar  $\varphi(x)$  e o férmion, decrito pelas componentes  $\psi_\alpha$ . O campo escalar  $F$  deve estar presente para que a teoria seja supersimétrica. Em (3.6) estamos considerando que o supercampo pertence a representação adjunta. A presença dos comutadores nos termos de interação faz com que 15 termos associados a interações estejam presentes quando escrevemos a ação em termos das componentes dos supercampos [41]. O conteúdo de partículas físicas da teoria fica explícito quando fazemos a escolha  $\chi_\alpha(x) = B(x) = 0$ , correspondente ao calibre de Wess-Zumino que, no entanto, quebra a supersimetria da teoria. Desse modo é mais simples analisar a teoria em um superspaço, onde a teoria é explicitamente supersimétrica e todos os campos e suas interações estão contidos em um menor número de termos, descritos por meio dos supercampos e suas interações.

A fim de obter a correspondente teoria quântica, devemos adicionar a (3.2) as contribuições associadas ao termo de fixação de calibre e aos fantasmas de Fadeev-Popov dados por

$$S_{fc} = -\frac{m}{2\xi} \int d^5 z (D^\alpha A_\alpha)(D^\beta A_\beta) \quad (3.8)$$

e

$$S_{fantasma} = \frac{1}{2g^2} \int d^5 z (c' D^\alpha D_\alpha c + ic' * D^\alpha [A_\alpha, c]). \quad (3.9)$$

Os propagadores para os campos  $\Phi$ ,  $A_\mu$  e  $c$  são obtidos da correspondente parte quadrática da ação e são dados, no espaço de momentos, por <sup>2</sup>

<sup>2</sup>No apêndice B apresentamos o cálculo do propagador associado ao campo de calibre.

$$\langle A^\alpha(k, \theta_1) A^\beta(-k, \theta_2) \rangle = \frac{i}{4m k^2} [D^\beta D^\alpha + \xi D^\alpha D^\beta] \delta_{12}, \quad (3.10)$$

$$\langle \bar{\Phi}(k, \theta_1) \Phi(-k, \theta_2) \rangle = i \frac{D^2 + m}{k^2 + m^2} \delta_{12}$$

e

$$\langle c'(\theta_1, k) c(\theta_2, -k) \rangle = i g^2 \frac{D^2}{k^2} \delta_{12}, \quad (3.11)$$

em que  $\delta_{12} = \delta(\theta_1 - \theta_2)$ , aos quais estão associados linhas onduladas, cheias e pontilhadas respectivamente. Todas as derivadas nos propagadores atuam na variável  $\theta_1$ . No cálculo dos supergráficos faremos  $g = 1$ .

Em relação as regras de Feynman correspondentes aos vértices de interação, chamamos atenção para as auto-interações presentes no termo de Chern-Simons que são, no caso supersimétrico, distintas do caso tratado nos capítulos anteriores. A interação trilinear possui uma derivada e existe um termo quadrilinear que não possui análogo na situação em que o modelo não é descrito em um superespaço (ver (2.1)). A expressão analítica para as auto-interações com três e quatro campos  $A_\mu$  são dadas por

$$V_1 = \frac{2}{3} m A^\beta(k_1) A^\alpha(k_2) D_\alpha A_\beta(k_3) \sin(k_2 \wedge k_3) \quad (3.12)$$

e

$$V_2 = \frac{1}{3} m A^\beta(k_1) A^\alpha(k_2) A_\alpha(k_3) A_\beta(k_4) \sin(k_1 \wedge k_2) \sin(k_3 \wedge k_4). \quad (3.13)$$

No caso da interação do campo de calibre com os fantasmas temos

$$V_3 = -\frac{1}{g^2} c'(k_1) [D^\alpha A_\alpha(k_2) c(k_3) + A_\alpha(k_2) D^\alpha c(k_3 \sin(k_2 \wedge k_3))]. \quad (3.14)$$

As interações entre o campo de calibre e a matéria possuem a mesma estrutura que nos casos descritos no capítulo anterior e não introduzirão nenhuma diferença em relação aos fatores trigonométricos associados aos vértices dos gráficos descritos anteriormente. As correspondente regras de Feynman são dadas por

$$V_4 = -\sin(k_1 \wedge k_2) A^\alpha(p) [D_\alpha \Phi(-k_2) \bar{\Phi}(k_1) - \Phi(-k_2) D_\alpha \bar{\Phi}(k_1)] \quad (3.15)$$

e

$$V_5 = [\sin(k_1 \wedge p_1) \sin(k_2 \wedge p_2) + \sin(k_1 \wedge p_2) \sin(k_2 \wedge p_1)] \bar{\Phi}(k_1) A^\alpha(p_1) A_\alpha(p_2) \Phi(-k_2). \quad (3.16)$$

Passemos ao estudo da teoria quântica associada à

$$S = S_{cs} + S_{fc} + S_{fantasma} + S_\Phi \quad (3.17)$$

analisando as divergências contidas no modelo e a presença da mistura UV/IV.

## 3.2 Divergências do modelo e a mistura UV/IV

Nesta seção vamos mostrar que, na ordem de um laço, a teoria de Chern-Simons não-comutativa na presença de matéria, definida em (3.17), não possui singularidades que possam introduzir a mistura UV/IV sendo, deste modo, consistente do ponto de vista perturbativo. Iniciando nosso estudo, vamos identificar as funções de Green que podem conter singularidades perigosas. Para isso, necessitamos do grau de divergência superficial  $d(\mathcal{G})$  de um gráfico  $\mathcal{G}$ . Para a teoria em questão temos

$$d(\mathcal{G}) = 2 - \frac{1}{2}(E_{A_\mu} + E_\Phi) - \frac{N_D}{2}. \quad (3.18)$$

em que  $E_{A_\mu}$  e  $E_\Phi$  indicam, respectivamente, o número de linhas externas associadas ao campo de calibre e ao supercampo  $\Phi$  e  $N_D$  é o número de derivadas espinoriais atuando nos campos externos. O comportamento singular provém das funções de Green de dois pontos com campo  $A_\mu$  ( $E_{A_\mu} = 2$  e  $E_\Phi = 0$ ) e do campo  $\Phi$  ( $E_{A_\mu} = 0$  e  $E_\Phi = 2$ ). Nos dois casos as divergências são lineares. Note que o comportamento ultravioleta da teoria supersimétrica é melhor que o das teorias apresentadas no capítulo anterior. O grau de divergência superficial de algumas funções de Green são menores quando analisamos a teoria no superspaço. Para facilitar a comparação entre os dois casos apresentamos a seguinte tabela

	Supersimétrico: $2 - \frac{1}{2}(N_{A_\mu} + N_\Phi)$	Usual: $3 - N_{A_\mu} - N_\psi - \frac{1}{2}N_\varphi$
2 pontos: matéria	1	1 para $\psi$ e 2 para $\varphi$
2 pontos: gauge	1	1
4 pontos: matéria	0	1 para $\varphi$

onde na primeira linha temos o grau de divergência superficial e na primeira coluna as funções de Green que podem introduzir singularidades perigosas associadas à mistura UV/IV.

Na teoria supersimétrica, a expressão associada ao grau de divergência superficial é obtida, como na teoria de campos usual, fazendo a contagem de potência nos momentos internos do gráfico. Temos a seguinte correspondência

- i) para cada propagador  $\implies$  potência  $-1$  no momento interno;
- ii) para cada superderivada em um vértice  $\implies$  potência  $\frac{1}{2}$  no momento interno;
- iii) para cada laço  $\implies$  potência  $2$  no momento interno.

Nos dois primeiros itens, usamos o fato de que a superderivada espinorial, associada a um propagador com momento  $k$ , possui dimensão  $\frac{1}{2}$ . A dependência da superderivada com o

momento aparece em<sup>3</sup>

$$D_\mu = \partial_\mu + \theta^\nu k_{\mu\nu}. \quad (3.19)$$

0 Desse modo, se  $k$  representa um momento interno, a presença de um produto da forma

$$D_\mu D_\nu = k_{\mu\nu} - C_{\mu\nu} D^2 \quad (3.20)$$

tem dimensão de momento e contribuirá com uma unidade na contagem de potência. Por consistência, a derivada espinorial deve ter dimensão  $\frac{1}{2}$ . Isso é compatível com a definição dada em (3.19), já que a variável  $\theta$  tem dimensão  $(massa)^{-\frac{1}{2}}$ .

Quanto ao último item, indicado em **iii**, vale mencionar uma diferença importante em relação a contagem de potências feita usualmente, onde associamos uma potência três para cada laço. Quando escrevemos a expressão analítica de um supergráfico, obtemos, em geral, um produto de fatores contendo aplicações sucessivas das superderivadas  $D_\mu$ , proveniente de vértices ou propagadores, em  $\delta_{12}$ . Um exemplo de expressão desse tipo é

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2 (k+p)^2} D^\alpha D^2 \delta_{12} D^2 D^\beta \delta_{12}, \quad (3.21)$$

em que as derivadas atuam na variável associada ao primeiro índice. Note que uma contagem de potências fornece o resultado de que a integral é quadraticamente divergente. No entanto, para simplificar a expressão analítica do gráfico, o procedimento adotado usualmente consiste em realizar uma série de operações algébricas envolvendo essas derivadas utilizando as identidades listadas no final do apêndice A no espaço de momentos. A implementação dessa álgebra permite obter termos que podem ser de dois tipos:  $\delta_{12}$  ou  $\delta_{12} D^2 \delta_{12}$ . No exemplo dado anteriormente, a expressão final é da forma

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2 (k+p)^2} \delta_{12} D^\alpha (D^2)^2 D^\beta \delta_{12} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{(k+p)^2} \delta_{12} D^\alpha D^\beta \delta_{12} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 A^\beta(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{(k+p)^2} \delta_{12} D^2 \delta_{12}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para obter a última fórmula realizamos integrações por partes (ver apêndice A) e utilizamos a identidade

$$D^2 D^\alpha = -D^\alpha D^2$$

em (3.21), obtendo a primeira linha na expressão acima. Posteriormente, fizemos a substituição

<sup>3</sup>Esta identidade aparece no apêndice A, fórmula (A.38), no espaço de configurações.

$$(D^2)^2 = -k^2$$

e aplicamos

$$D^\alpha D^\beta = k^{\alpha\beta} - C^{\alpha\beta} D^2.$$

Essa última identidade fornece dois termos, no entanto, somente aquele indicado em (3.22) contribui. Isso segue de

$$\delta_{12} \delta_{12} = 0,$$

que é consequência da definição  $\delta(\theta) = -\theta^2 = -\frac{1}{2}\theta^\mu\theta_\mu$ . Particularmente importante é a identidade

$$\delta_{12} D^2 \delta_{12} = \delta_{12},$$

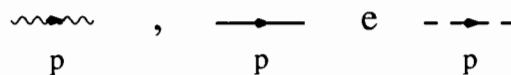
que permite escrever a expressão do exemplo acima como

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta A^\beta(p, \theta) A_\beta(-p, \theta) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{(k+p)^2}. \quad (3.23)$$

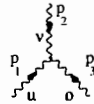
Após a manipulação algébrica das superderivadas, temos uma expressão que é linearmente divergente, em contraste com a aparente divergência quadrática encontrada em (3.29). Dado um gráfico, é sempre possível implementar um procedimento desse tipo, de forma que associamos uma potência  $3 - 1 = 2$  para cada laço. A fórmula dada em (3.18) fornece o grau de divergência superficial depois da álgebra envolvendo as superderivadas ter sido implementada.

Outro fator que pode ocasionar um melhor comportamento ultravioleta ocorre quando alguma das superderivadas não dependem do momento interno. Isso ocorre quando existem  $N_D$  superderivadas aplicadas em campos externos. Nesse caso, ao calcular o grau de divergência superficial, devemos adicionar um termo  $-\frac{1}{2}$  para cada uma dessas superderivadas. Para obter o grau de divergência superficial correto, devemos contabilizar uma potência  $2 - \frac{1}{2}N_D$ , que leva em conta o fato de que  $N_D$  das derivadas que aparecem no gráfico dependem, exclusivamente, do momento externo.

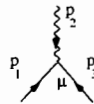
O próximo passo é considerar a contribuição proveniente dos propagadores internos e vértices do gráfico contendo uma superderivada. Os vértices trilineares do modelo que estamos estudando são deste tipo. Considere um gráfico arbitrário com  $P_{A_\mu}$ ,  $P_\Phi$  e  $P_c$  linhas internas associadas, respectivamente, aos propagadores internos



além de  $n_1$  vértices



$n_2$  vértices



$n_3$  vértices



Do que discutimos anteriormente, concluímos que o grau de divergência superficial associado a um gráfico arbitrário  $\mathcal{G}$  é dado por

$$d(\mathcal{G}) = 2L + \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + n_3) - P_{A_\mu} - P_\Phi - P_c - \frac{1}{2}N_D \quad (3.24)$$

Agora seguimos o procedimento usual: aplicamos as identidades

$$L = 1 + (P_{A_\mu} + P_\Phi + P_c) - (n_1 + n_2 + n_3 + n_4), \quad (3.25)$$

em que  $n_4$  representa o número de vértices quadrilineares do gráfico, e

$$2(P_{A_\mu} + P_\Phi + P_c) + (E_{A_\mu} + E_\Phi + E_c) = 3(n_1 + n_2 + n_3) + 4n_4, \quad (3.26)$$

em que representamos o número de linhas externas pela letra  $E$  com o correspondente índice associado ao campo. Aplicando as duas últimas relações em (3.24), omitindo a contribuição de possíveis vértices quadrilineares (esses vértices melhoram o comportamento ultravioleta de modo que não serão considerados) e eliminando gráficos contendo linhas externas associadas a fantasmas obtemos a expressão

$$d(\mathcal{G}) = 2 - \frac{1}{2}(E_{A_\mu} + E_\Phi) - \frac{N_D}{2}. \quad (3.27)$$

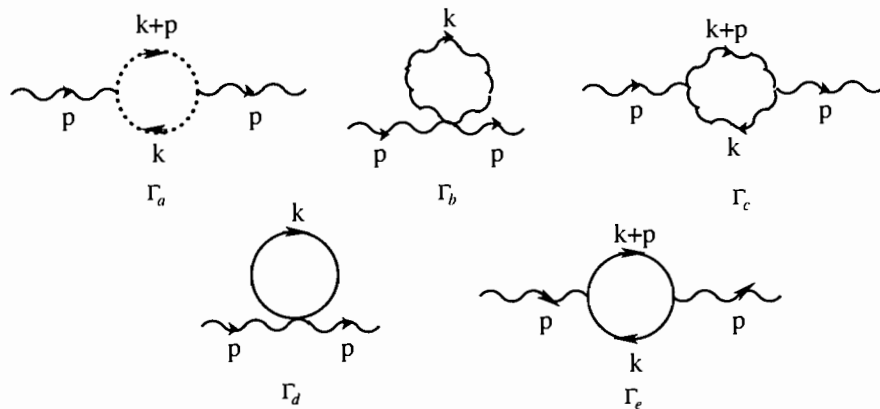
apresentada no início dessa seção.

Uma diferença marcante em relação ao capítulo anterior, é o fato de que a função de quatro pontos com  $E_{A_\mu} = 0$  e  $E_\Phi = 4$  possui divergência no máximo logarítmica. Conforme vemos na tabela apresentada no início dessa seção. quando não há supersimetria, vimos que a correspondente divergência é linear, e a singularidade presente não pode ser eliminada quando os campos de matéria se transformam de cordo com a representação adjunta. Como veremos a seguir, no modelo supersimétrico as funções de dois

pontos do campo de calibre  $A_\mu$  e do supercampo  $\Phi$  (para uma escolha conveniente do parâmetro de calibre) não contém singularidades perigosas, sendo a teoria quântica de campos perturbativamente consistente. Esta análise será feita através da determinação das correspondentes contribuições para a ação efetiva.

### 3.2.1 Cálculo da contribuição do tensor de polarização para ação efetiva

Os gráficos são dados por



Como temos  $E_{A_\mu} = 2$  e  $E_\Phi = 0$ , o grau de divergência superficial é dado por

$$d(\mathcal{G}) = 1 - \frac{N_D}{2}. \quad (3.28)$$

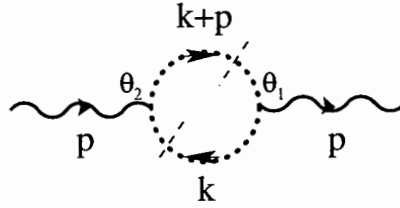
As singularidades perigosas ocorrem nos termos em que não há superderivadas ( $N_D = 0$ ) aplicadas em campos externos.

O cálculo destes gráficos é feito de forma análoga ao usual, apresentado nos capítulos anteriores. O fato que deve ser observado é a presença das superderivadas. No apêndice B deste trabalho apresentamos uma aplicação explícita envolvendo o cálculo de um gráfico de Feynman. O cálculo dos gráficos apresentados a seguir pode ser feito de forma análoga.



## Gráfico $\Gamma_a$

Primeiramente devemos escrever a expressão analítica associada ao gráfico. Devemos considerar o produto de dois vértices de interação do tipo contido em (3.9). Existem seis possibilidades de contrações que fornecem diferentes gráficos, no entanto, somente o gráfico



pode originar uma singularidade perigosa (do tipo  $\frac{1}{p}$ ). O corte na linha interna serve para indicar a posição em que atua a superderivada. Os demais gráficos possuem pelo menos um corte em uma linha externa o que significa que existe pelo menos uma derivada espinorial atuando em um campo externo. Conforme indicado em (3.28), a singularidade que ocasiona a mistura surge de termos onde não há derivadas nos campos externos, o que permite concluir que somente o gráfico acima pode introduzir a mistura UV/IV. A expressão analítica associada ao gráfico  $\Gamma_a$  é dada por

$$\begin{aligned}
 \Gamma_a &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} D_1^\alpha \langle \bar{c}(p+k, \theta_1) c(-(p+k), \theta_2) \rangle \\
 &\times D_2^\beta \langle \bar{c}(-k, \theta_1) c(k, \theta_2) \rangle \sin^2(k \wedge p) A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2) \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2 (k+p)^2} A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2) \times \\
 &\times D_1^\alpha D^2 \delta_{12} D_2^\beta D^2 \delta_{12}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Os índices inferiores 1 e 2 indicam que as derivadas estão sendo aplicadas nas variáveis  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , respectivamente. A fim de utilizarmos algumas identidades satisfeitas pelas derivadas espinoriais, fazemos com que todas as derivadas estejam aplicadas na mesma variável utilizando  $D_2^\beta \delta_{12} = -D_1^\beta \delta_{12}$ . A menos de um sinal introduzido por essa identidade, note que a expressão analítica do gráfico corresponde ao exemplo utilizado na seção 3.2, página (41). Desse modo, o procedimento de cálculo que conduz a uma expressão simplificada do gráfico é o mesmo.

A contribuição para parte divergente (com  $p = 0$ ) de (3.29) é

$$\Gamma_a = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta A^\beta(-p, \theta) A_\beta(p, \theta) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2}. \tag{3.30}$$

Fica evidente de (3.30) que a parte não-planar da integral no momento interno  $k$ , obtida por meio de  $\sin^2(k \wedge p) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2k \wedge p)]$ , introduz uma singularidade perigosa do mesmo tipo encontrado nos modelos estudados em capítulos anteriores.

## Gráfico $\Gamma_b$

Este gráfico possui somente um vértice em que não há presença de derivadas. Neste caso, temos que considerar os diferentes tipos de contrações possíveis entre os campos nos vértices. A expressão analítica é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_b &= \frac{im}{3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \\ &\times \left[ \langle A^\beta(-k, \theta) A_\alpha(k, \theta) \rangle A^\alpha(p, \theta) A_\beta(-p, \theta) + \right. \\ &- \langle A^\beta(-k, \theta) A_\beta(k, \theta) \rangle A^\alpha(p, \theta) A_\alpha(-p, \theta) + \\ &+ \langle A^\alpha(-k, \theta) A_\beta(k, \theta) \rangle A^\beta(p, \theta) A_\alpha(-p, \theta) + \\ &\left. - \langle A^\alpha(-k, \theta) A_\alpha(k, \theta) \rangle A^\beta(p, \theta) A_\beta(-p, \theta) \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

O sinal menos no segundo e último termo entre colchetes provém do fator trigonométrico associado aos vértices quando consideramos o sinal dos momentos que se propagam nas linhas do gráfico.

Note que ao propagador da linha interna está associado uma única variável  $\theta$ . A expressão correspondente a esta situação pode ser obtida diretamente de (3.10) utilizando a identidade (3.20) como segue

$$\begin{aligned} \langle A^\alpha(k, \theta_1) A^\beta(-k, \theta_2) \rangle &= \frac{i}{4mk^2} (D^\beta D^\alpha + \xi D^\alpha D^\beta) \delta_{12} \\ &= \frac{i}{4mk^2} [(1 - \xi) C^{\alpha\beta} D^2 \delta_{12} + i(1 + \xi) \partial^{\alpha\beta} \delta_{12}] \\ &= \frac{i}{4mk^2} (1 - \xi) C^{\alpha\beta} D^2 \delta_{12}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

que para  $\theta_1 = \theta_2$  é dada por

$$\langle A^\alpha(k, \theta_1) A^\beta(-k, \theta_2) \rangle = \frac{i}{4mk^2} C^{\alpha\beta} (1 - \xi). \quad (3.33)$$

Para obter a identidade acima utilizamos  $D^2 \delta_{12}|_{\theta_1=\theta_2} = 1$  e  $\delta_{12}|_{\theta_1=\theta_2} = 0$ .

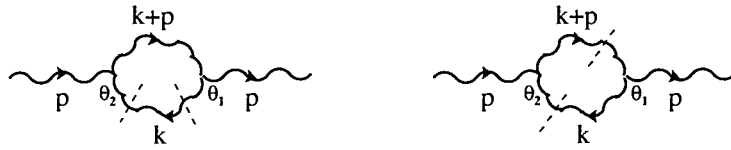
Substituindo (3.33) em (3.31) e utilizando a identidade (A.10) do apêndice A obtemos

$$\Gamma_b = \frac{1}{2} (1 - \xi) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2} A^\beta(-p, \theta) A_\beta(p, \theta), \quad (3.34)$$

que contém o mesmo tipo de divergências que  $\Gamma_a$ .

### Gráfico $\Gamma_c$

O cálculo deste gráfico oferece maior complicação que os anteriores. Cada vértice possui três campos sendo que uma derivada espinorial atua em um deles. Assim como no caso do gráfico  $\Gamma_a$ , termos contendo pelo menos uma derivada em um campo externo serão ignorados. Os termos que podem introduzir singularidades infravermelhas perigosas podem ser representadas graficamente por



Cada um destes gráficos possui quatro contribuições associadas a diferentes contrações. A expressão analítica para o gráfico  $\Gamma_{1c}$  é dada por <sup>4</sup>

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{1c} = & \frac{2m^2}{9} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \\
 & \times \left[ \langle D_\alpha A_\beta(k, \theta_1) D_{\alpha'} A_{\beta'}(-k, \theta_2) \rangle \langle A^\beta(p+k, \theta_1) A^{\alpha'}(-(p+k), \theta_2) \rangle \right. \\
 & \times A^\alpha(-p, \theta_1) A^{\beta'}(p, \theta_2) \\
 & + \langle D_\alpha A_\beta(k, \theta_1) D_{\alpha'} A_{\beta'}(-k, \theta_2) \rangle \langle A^\alpha(p+k, \theta_1) A^{\beta'}(-(p+k), \theta_2) \rangle \\
 & \times A^\beta(-p, \theta_1) A^{\alpha'}(p, \theta_2) \\
 & + \langle D_\alpha A_\beta(k, \theta_1) D_{\alpha'} A_{\beta'}(-k, \theta_2) \rangle \langle A^\beta(p+k, \theta_1) A^{\beta'}(-(p+k), \theta_2) \rangle \\
 & \times A^\alpha(-p, \theta_1) A^{\alpha'}(p, \theta_2) \\
 & + \langle D_\alpha A_\beta(k, \theta_1) D_{\alpha'} A_{\beta'}(-k, \theta_2) \rangle \langle A^\alpha(p+k, \theta_1) A^{\alpha'}(-(p+k), \theta_2) \rangle \\
 & \left. \times A^\beta(-p, \theta_1) A^{\beta'}(p, \theta_2) \right]. \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

A expressão para  $\Gamma_{2c}$  é análoga, aparecendo desta vez uma derivada em cada propagador interno. O cálculo explícito envolvendo a álgebra das superderivadas espinórias é apresentado no apêndice B. O resultado para a parte divergente do gráfico  $\Gamma_c$  é dada por

$$\begin{aligned}
 \Gamma_c = & \Gamma_{1c} + \Gamma_{2c} \\
 = & \frac{1}{2\xi} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2} A^\beta(-p, \theta) A_\beta(p, \theta). \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

Com o resultado dos três primeiros gráficos, obtidos da soma  $S_{cs} + S_{fc} + S_{fantasma}$ , podemos verificar que

<sup>4</sup>O procedimento que permite obter a expressão analítica dos gráficos é descrito no apêndice B.

$$[\Gamma_a + \Gamma_b + \Gamma_c]_{\text{parte divergente}} = 0. \quad (3.37)$$

Concluimos que as contribuições divergentes provenientes dos setores associados ao campo de calibre quando combinadas com as contribuições envolvendo os fantasmas de Fadeev-Popov fornece o resultado de que as divergências ultravioletas (da parte planar) e as singularidades não-integráveis (da parte não-planar) são canceladas qualquer que seja o valor do parâmetro de calibre  $\xi$ . O resultado (3.37) indica que a teoria de Chern-Simons puro em (2+1) dimensões não possui divergências lineares na região do ultravioleta além de ser livre da mistura UV/IV.

### Gráficos $\Gamma_d$

Nesta e na próxima seção introduziremos os efeitos quânticos devidos a interação do campo de calibre com a matéria. Primeiramente consideramos o gráfico  $\Gamma_d$  que possui a seguinte expressão analítica

$$\Gamma_d = -2 \int d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A^\alpha(-p, \theta) \left[ \frac{(D_1^2 + m)}{k^2 + m^2} \delta_{12} \right]_{\theta_1=\theta_2=\theta} A_\alpha(p, \theta) \text{sen}^2(k \wedge p).$$

Por conveniência, vamos fazer uma mudança de variável  $k \rightarrow k + p$  na fórmula acima obtendo, após manipular algebricamente as superderivadas  $D$ , o resultado

$$\Gamma_d = -2 \int d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k+p)^2 + m^2} A^\alpha(-p, \theta) A_\alpha(p, \theta). \quad (3.38)$$

Vemos que (3.38) possui uma divergência linear associada a integração no momento interno  $k$ .

### Gráfico $\Gamma_e$

A expressão analítica para o gráfico  $\Gamma_e$  é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_e &= \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A^\alpha(-p, \theta_1) A^\beta(p, \theta_2) \text{sen}^2(k \wedge p) \\ &\times \left[ D_{\alpha 1} \frac{D_1^2 + m}{k^2 + m^2} \delta_{12} D_{\beta 2} \frac{D_1^2 + m}{(k+p)^2 + m^2} \delta_{12} \right. \\ &\left. - \frac{D_1^2 + m}{(k+p)^2 + m^2} \delta_{12} D_{\alpha 1} D_{\beta 2} \frac{D_1^2 + m}{k^2 + m^2} \delta_{12} \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Note a presença de termos contendo uma e duas derivadas atuando nos propagadores. Estas duas possibilidades são obtidas quando consideramos as diferentes contrações entre

os campos presentes em cada um dos vértices de interação. Em (3.39), podemos aplicar as derivadas em  $\theta_2$  nas funções  $\delta_{12}$  e então usar a identidade  $D_{\beta 2} = -D_{\beta 1}$  obtendo

$$\begin{aligned} \Gamma_e &= \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \\ &\times \left[ -D_{\alpha 1}(D_1^2 + m)\delta_{12}(D_1^2 + m)D_{\beta 1}\delta_{12} \right. \\ &\left. + (D_1^2 + m)\delta_{12}D_{\alpha 1}(D_1^2 + m)D_{\beta 1}\delta_{12} \right] A^\alpha(-p, \theta_1) A^\beta(p, \theta_2). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Fazendo uma integração por partes no primeiro termo dessa expressão obtemos uma contribuição igual ao segundo termo além de uma contribuição contendo uma derivada aplicada no campo externo  $A^\alpha(p, \theta_1)$ . O resultado obtido é dado por

$$\begin{aligned} \Gamma_e &= \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \\ &\times \left[ 2(D_1^2 + m)\delta_{12}D_{\alpha 1}(D_1^2 + m)D_{\beta 1}\delta_{12}A^\alpha(-p, \theta_1)A^\beta(p, \theta_2) \right. \\ &\left. + (D_1^2 + m)\delta_{12}(D_1^2 + m)D_{\beta 1}\delta_{12}(D^{\alpha 1}A_\alpha)(-p, \theta_1)A^\beta(p, \theta_2) \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Como já mencionamos anteriormente, divergências lineares devem surgir do termo em que não há derivadas aplicadas no campo externo. De fato, manipulando as derivadas de forma conveniente (a álgebra é análoga a desenvolvida no cálculo dos gráficos anteriores) obtemos

$$\Gamma_{eDiv}(p) = 2 \int d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{[(k+p)^2 + m^2]} A^\alpha(-p, \theta) A_\alpha(p, \theta), \quad (3.42)$$

que fornece uma divergência linear (e conseqüentemente a mistura UV/IV), além de uma contribuição finita dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_{eFin}(p) &= \int d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \\ &\times \left[ 2(k_{\alpha\beta} - mC_{\alpha\beta})(D^2A^\alpha)(p, \theta)A^\beta(-p, \theta) \right. \\ &\left. + (k_{\gamma\beta} - mC_{\gamma\beta})(D^\gamma D^\alpha A_\alpha)(-p, \theta)A^\beta(p, \theta) \right]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

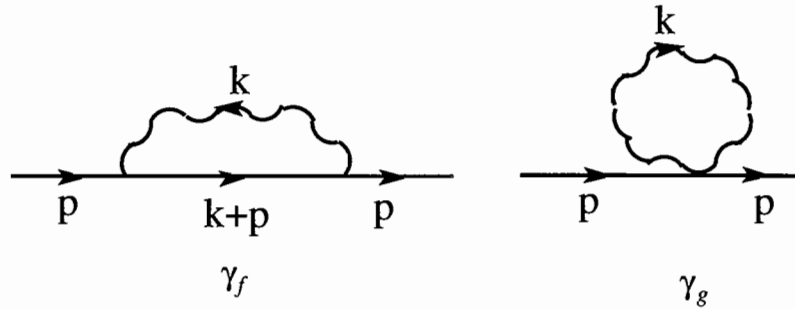
Somando o resultado dado em (3.38) para o gráfico  $\Gamma_d$  com a contribuição divergente do gráfico  $\Gamma_e$ , dada em (3.42) obtemos

$$\Gamma_d + \Gamma_{eDiv} = 0. \quad (3.44)$$

Dos resultados apresentados em (3.37) e (3.44) concluímos a ação efetiva não contém divergências infravermelhas, associadas a mistura IV/IV, provenientes de correções radiativas à função de dois pontos do campo de calibre  $A_\mu$ .

### 3.2.2 Cálculo da contribuição da função de dois pontos do campo $\Phi$ para ação efetiva

Outra possível fonte de mistura UV/IV provém de correções quânticas associadas a termos quadráticos no campo de matéria  $\Phi$ . Neste caso, escolhemos em (3.18)  $E_{A_\mu} = 0$  e  $E_\Phi = 2$  e o grau de divergência superficial é dado por  $d(\mathcal{G}) = 1$ . Em um laço, os gráficos são dados por



Nesta seção mostraremos que, quando consideramos a soma dos gráficos  $\Gamma_f$  e  $\Gamma_g$ , é possível escolher o parâmetro de calibre  $\xi$  de modo a eliminar as divergências infravermelhas lineares presentes neste caso.

#### Gráfico $\Gamma_f$

Considerando todas as contrações possíveis entre os campos presentes em cada um dos vértices do gráfico obtemos termos em que

- 1) uma derivada atua em cada um dos campos externos;
- 2) uma derivada atua em um campo externo e uma derivada atua no propagador interno associado ao campo  $\Phi$  e
- 3) as duas derivadas atuam no propagador interno associado ao campo  $\Phi$ .

Das três possibilidades listadas acima somente a número 3 pode conter singularidades infravermelhas perigosas. De fato, conforme podemos ver em (3.28), os casos com  $N_D \neq 0$  melhoram o comportamento divergente no nível quântico. Considerando na expressão analítica correspondente a  $\Gamma_f$  somente os termos linearmente divergentes obtemos

$$\Gamma_f = \frac{-i}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \frac{\sin^2(k \wedge p)}{4mk^2[(p+k)^2 + M^2]} (D^\beta D^\alpha + \xi D^\alpha D^\beta) \delta_{12} \times \\ \times D_{\alpha 1} D_{\beta 2} (D^2 + M) \delta_{12} (\Phi(-p, \theta_1) \bar{\Phi}(p, \theta_2) + \bar{\Phi}(-p, \theta_1) \Phi(p, \theta_2)) \quad (3.45)$$

que depois de alguma manipulação algébrica assume a forma

$$\Gamma_f = i\xi \int d^2\theta \frac{\Phi(-p, \theta)\bar{\Phi}(p, \theta)}{m} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2} + \text{parte finita.} \quad (3.46)$$

### Gráfico $\Gamma_g$

O gráfico  $\Gamma_g$  constitui o último caso em que ocorre uma divergência ultravioleta capaz de introduzir uma singularidade infravermelha perigosa na teoria quântica desenvolvida a partir do modelo (3.17). A presença de uma única linha interna e a ausência de derivadas nos vértices faz com que a respectiva expressão analítica seja dada por

$$\Gamma_g = i(\xi - 1) \int d^2\theta \frac{\Phi(-p, \theta)\bar{\Phi}(p, \theta)}{m} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2} + \text{parte finita.} \quad (3.47)$$

Note que o propagador interno só pode ser obtido pela contração dos dois campos de calibre presentes na interação associada ao vértice do gráfico. A correção para parte divergente função de dois pontos do campo  $\phi$  em um laço será dada pela soma

$$(\Gamma_f + \Gamma_g)_{\text{div.}} = (2\xi - 1) \int d^2\theta \frac{\Phi(-p, \theta)\bar{\Phi}(p, \theta)}{m} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2}. \quad (3.48)$$

Da fórmula acima vemos que a escolha  $\xi = \frac{1}{2}$  resulta em uma correção finita (omitida na fórmula acima) e livre de singularidades infravermelhas perigosas. Neste ponto, chegamos ao resultado central deste capítulo: a teoria em que o campo de Chern-Simons interage com a matéria, no caso da representação adjunta e no calibre definido por  $\xi = \frac{1}{2}$ , não introduz singularidades perigosas em um laço, sendo livre da mistura UV/IV.

Um comentário sobre o caso da representação fundamental. Lembramos que quando a teoria não é descrita em um super-espaco (estudo desenvolvido no capítulo anterior) os gráficos associados ao tensor de polarização e a função de dois pontos são todos planares. Esta propriedade também é mantida quando existe uma supersimetria envolvida. Lembre também que no caso usual existe uma singularidade infravermelha não integrável na função de quatro pontos do campo escalar. No presente caso, a respectiva singularidade pode ser no máximo logarítmica (basta fazer  $E_{A_\mu} = 0$  e  $E_\Phi = 4$  em (3.18)).

## Capítulo 4

# Correções radiativas ao termo de Chern-Simons no modelo de Higgs-Chern-Simons abeliano não-comutativo

Neste último capítulo vamos analisar as correções radiativas ao termo de Chern-Simons no contexto de um modelo em que a simetria de calibre é espontaneamente quebrada. Neste sentido, calculamos as funções de dois e três pontos do campo de calibre na ordem de um laço e procuramos identificar os efeitos da não comutatividade do espaço subjacente. A análise será feita no caso em que existe uma temperatura finita associada ao modelo.

O interesse no estudo das correções quânticas ao coeficiente do termo de Chern-Simons em modelos nos quais exista quebra da simetria de calibre é motivada pelo fato que, nestes casos, não se aplica o teorema de Coleman-Hill que afirma que, na ausência de partículas com massa zero, não existem correções radiativas ao termo de Chern-Simons além de um laço. O resultado foi demonstrado para uma grande classe de teorias de campos abelianas com invariância de Lorentz e de calibre. A hipótese de que todas as partículas possuam massa não nula é necessária já que a ausência de divergências infravermelhas é um requisito fundamental na prova do teorema. Neste capítulo analisaremos uma situação em que existe outra fonte de introdução de singularidades infravermelhas, a saber, a mistura UV/IV devida a não-comutatividade associada ao espaço. Isso pode, em princípio, modificar o resultado do correspondente caso comutativo.



## 4.1 Modelo de Higgs-Chern-Simons não-comutativo

Iniciando nosso estudo, vamos partir da ação

$$S = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \left[ A_\mu * \partial_\nu A_\lambda + \frac{2ig}{3} A_\mu * A_\nu * A_\lambda \right] + (D_\mu \varphi) * (D^\mu \varphi)^\dagger - \frac{\lambda}{4} [\varphi * \varphi^\dagger - v^2]_*^2 \right\}, \quad (4.1)$$

onde  $v$  é uma constante e  $D_\mu \varphi$  é a derivada covariante, definida de tal forma que a ação (4.1) seja invariante de calibre. Neste capítulo utilizamos a representação fundamental em que  $D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi - ig\varphi * A_\mu$ .

Quando a simetria de calibre é espontaneamente quebrada temos  $\langle \varphi \rangle \equiv v \neq 0$ . Nesta situação podemos utilizar a decomposição  $\varphi = v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma + i\chi)$  e escrever a equação (4.1) como

$$S = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \left( A_\mu * \partial_\nu A_\lambda + \frac{2ig}{3} A_\mu * A_\nu * A_\lambda \right) + \frac{m}{2} A_\mu * A^\mu - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu) * (\partial_\nu A^\nu) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) * (\partial^\mu \sigma) - \frac{m_\sigma^2}{2} \sigma * \sigma + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi) * (\partial^\mu \chi) - \frac{m_\chi^2}{2} \chi * \chi - \frac{g}{2} A_\mu * \left( \sigma * \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \chi - \chi * \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \sigma - i[\sigma, \partial^\mu \sigma]_* - i[\chi, \partial^\mu \chi]_* \right) + \frac{g^2}{2} A_\mu * A^\mu * \left( \sigma * \sigma + \chi * \chi + 2\sqrt{2}v\sigma + i[\sigma, \chi]_* \right) - \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} v \left\{ \sigma, \frac{(\sigma * \sigma + \chi * \chi)}{2} + \frac{i}{2} [\chi, \sigma]_* \right\}_* - \frac{\lambda}{16} (\sigma * \sigma + \chi * \sigma + i[\chi, \sigma]_*^2) \right\}, \quad (4.2)$$

em que escolhemos o calibre definido por

$$S_{gf} = -\frac{1}{2\xi} \int d^3x \left( \partial_\mu A^\mu + \xi \sqrt{2} v \chi \right)_*^2. \quad (4.3)$$

A escolha deste calibre é adequada pelo fato de que permite eliminar os termos não-diagonais presentes na parte quadrática de (4.2). Também definimos

$$m = 2(ev)^2, \quad m_\sigma^2 = \lambda v^2, \quad m_\chi^2 = \xi m. \quad (4.4)$$

Para completar a ação que descreve o modelo, deve ainda ser incluída a contribuição dos fantasmas de Faddeev-Popov

$$S_g = \int d^3x [\partial_\mu \bar{c} * \partial^\mu c + i\partial_\mu \bar{c} * (c * A_\mu - A_\mu * c) + i\xi v \bar{c} * \chi * c], \quad (4.5)$$

onde  $\bar{c}$  e  $c$  são os campos fantasmas. Em um laço, não há contribuição para parte de paridade ímpar proveniente de (4.5).

Os propagadores dos campos  $A_\mu$  e  $\sigma$  serão representados por linhas onduladas e cheias sendo que as correspondentes expressões analíticas são dadas respectivamente por

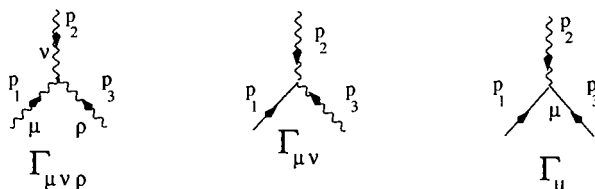
$$D_{\mu\nu}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \left[ -mg_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu \frac{m - \xi}{p^2 + \xi m} + i\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} p^\lambda \right] \quad (4.6)$$

e

$$D_\sigma(p) = i/(p^2 - m_\sigma^2). \quad (4.7)$$

No caso  $T \neq 0$  temos  $p^\mu \equiv (p^0, \vec{p}) = (2\pi nT i, \vec{p})$ .

Os vértices de interação são representados por



e as correspondentes expressões analíticas são dadas por

$$iA_\mu * A_\nu * A_\rho \quad \leftrightarrow \quad \Gamma_{\mu\rho\nu} = 2ig\epsilon_{\mu\rho\nu} \sin(p_1 \wedge p_2), \quad (4.8)$$

$$A_\mu * A_\nu * \sigma \quad \leftrightarrow \quad \Gamma_{\mu\nu} = 2\sqrt{2}ivg^2 g_{\mu\nu} \cos(p_1 \wedge p_2), \quad (4.9)$$

e

$$iA^\mu * [\sigma, \partial_\mu \sigma]_* \quad \leftrightarrow \quad \Gamma_\mu = 2gp_{3\mu} \sin(p_2 \wedge p_3) \quad (4.10)$$

## 4.2 Introduzindo efeitos de temperatura em teorias de campos

Primeiramente fazemos uma análise a respeito da expansão perturbativa na teoria com temperatura finita [?, 43]. O ponto importante é que, também neste caso, é possível utilizar uma representação em termos de gráficos de Feynman. Para ver como as regras de Feynman são modificadas, adotamos como exemplo a teoria de um campo escalar (inicialmente livre) com densidade de lagrangeana definida por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x). \quad (4.11)$$

O funcional gerador pode ser escrito como

$$Z[J] = \rho \int [\mathcal{D}\varphi] e^{-i \int d^4x [\frac{1}{2} \varphi(x) D^{-1} \varphi(x) + J\varphi(x)]}, \quad (4.12)$$

em que  $D^{-1} = \square + m^2$  e  $\rho$  é uma constante de normalização. Por meio de uma escolha conveniente de  $\rho$  a integração em  $\varphi$  resulta em

$$Z[J] = e^{-\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y J(x)D(x-y)J(y)}. \quad (4.13)$$

Como sabemos, a expressão (4.13) fornece uma expansão perturbativa para as funções de Green em termos de gráficos de Feynman. Até aqui, não foi introduzido nenhum efeito de temperatura em (4.13). O primeiro passo neste sentido é lembrar que o funcional gerador não estará bem definido até que condições de contorno satisfeitas pelo propagador  $D$  sejam dadas. No caso usual, em que não existe temperatura envolvida, estas condições são escolhidas de modo que o princípio de causalidade seja respeitado. No caso de uma teoria quântica de campos com temperatura não nula, as condições de contorno devem ser escolhidas convenientemente. De fato, em ambos os casos o propagador é uma função de Green satisfazendo

$$(\square_x + m^2)D(x-y) = -i\delta(x-y) \quad (4.14)$$

com condições de contorno apropriadas. Vale lembrar que a fórmula (4.13) também é válida para temperatura não nula, levando a uma expansão perturbativa em termos de gráficos de Feynman análoga a encontrada usualmente. Passemos à discussão das condições de contorno adequadas ao problema da teoria de campos com temperatura finita. Vamos trabalhar no formalismo do tempo imaginário.

A mecânica estatística, formulada por meio de uma teoria de campos, é obtida quando identificamos a função de partição com o funcional gerador (4.12), ou seja, consideramos o objeto fundamental como sendo

$$\begin{aligned} Z[J] = \text{Tr } e^{-\beta H} &= \sum_{\varphi} \langle \varphi | e^{-\beta H} | \varphi \rangle \\ &= \bar{\rho} \int_{\text{periódico}} [\mathcal{D}\varphi] e^{-\frac{1}{2} \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x [\varphi(x)D^{-1}\varphi(x) + J\varphi(x)]}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

obtido a partir de (4.12) definindo os limites de integração na ação como

$$\int_0^{-i\beta} \int d^3x$$

e fazendo a mudança de variável  $\tau = it$ . Devemos lembrar que com este procedimento  $\partial_0 = i \frac{\partial}{\partial \tau}$ . O símbolo  $\int_{\text{periódico}} [\mathcal{D}\varphi]$  indica que a integração é implementada somente sobre configurações periódicas do campo  $\varphi$ . Esta condição é “natural” já que a função de partição é definida por um traço. Esta construção implica que as funções de Green são periódicas.

A propriedade de periodicidade também pode ser verificada no formalismo de operadores. Na teoria com temperatura, as funções de Green de  $N$  pontos são definidas pela média térmica

$$\langle T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_N)\rangle = \frac{\text{Tr}[e^{-\beta H}T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_N)]}{\text{Tr}[e^{-\beta H}]} \quad (4.16)$$

num ensemble particular definido por  $H$ . Vamos considerar a função de dois pontos,  $\langle T\varphi(x)\varphi(y)\rangle \equiv D_\beta(x-y)$ , no caso em que os campos envolvidos são escalares (bósons). A ordenação temporal é definida como segue

$$\langle T\varphi(x)\varphi(y)\rangle = \langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle \equiv D_\beta^>(x-y)$$

se  $x_0 > y_0$  e

$$\langle T\varphi(x)\varphi(y)\rangle = \langle\varphi(y)\varphi(x)\rangle \equiv D_\beta^<(x-y)$$

se  $y_0 > x_0$ . Desta definição é claro que

$$D_\beta(x-y)|_{x_0=0} = D_\beta^<(x-y)|_{x_0=0}$$

$$D_\beta(x-y)|_{x_0=-i\beta} = D_\beta^>(x-y)|_{x_0=-i\beta}. \quad (4.17)$$

Considerando inicialmente  $x_0 = 0$  em (4.16) obtemos

$$D_\beta(x-y)|_{x_0=0} = \frac{\text{Tr}[e^{-\beta H}\varphi(-iy_0, \vec{y})\varphi(0, \vec{x})]}{\text{Tr}[e^{-\beta H}]}. \quad (4.18)$$

Devido à ciclicidade do traço o numerador pode ser escrito como

$$\text{Tr}[\varphi(0, \vec{x})e^{-\beta H}\varphi(-iy_0, \vec{y})] = \text{Tr}[e^{-\beta H}e^{\beta H}\varphi(0, \vec{x})e^{-\beta H}\varphi(-iy_0, \vec{y})]. \quad (4.19)$$

Fazendo uma analogia entre o operador de evolução e a matriz densidade obtemos o operador

$$\varphi(-i\beta, \vec{x}) = e^{\beta H}\varphi(0, \vec{x})e^{-\beta H}. \quad (4.20)$$

Substituindo (4.20) em (4.19) obtemos

$$\text{Tr}[e^{-\beta H}\varphi(-i\beta, \vec{x})\varphi(y_0, \vec{y})] \quad (4.21)$$

e concluimos que

$$D_\beta(x-y)|_{x_0=0} = D_\beta^>(x-y)|_{x_0=-i\beta} = D_\beta(x-y)|_{x_0=-i\beta}, \quad (4.22)$$

em que vemos a condição de periodicidade satisfeita pela função de Green de dois pontos.

É importante obter a representação das funções de Green no espaço dos momentos. Para isso, devemos escrever  $D_\beta(x-y)$  em termos da série e transformada de Fourier. Vamos utilizar notação compacta

$$D_\beta(x-y) = \int_p e^{-ip(x-y)} D_\beta(p) \quad (4.23)$$

com

$$D_\beta(p) = \int_x e^{ipx} D_\beta(x) \quad (4.24)$$

onde

$$\int_p = \frac{1}{-i\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$$

e

$$\int_x = \int_0^{-i\beta} dx_0 \int d^3x.$$

Como no caso de temperatura zero, utilizamos a notação

$$px = p_\mu x^\mu = p_0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$$

só que com  $x_0$  assumindo valores imaginários. Devido a condição de periodicidade, a série de Fourier cobre somente as frequências

$$p_0 = \frac{2\pi n}{-i\beta}. \quad (4.25)$$

O propagador é obtido, como no caso de temperatura zero, utilizando a representação de Fourier da função delta de Dirac

$$\delta(x - y) = \int_p e^{-ip(x-y)} \quad (4.26)$$

e a (4.24) em (4.14), obtendo

$$D_\beta(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad (4.27)$$

onde  $p^2 = p_0^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}$ . Observe que para  $m^2 > 0$  sempre temos  $p^2 - m^2 \neq 0$ .

O caso de uma teoria envolvendo férmions é desenvolvida de forma completamente análoga lembrando apenas que, neste caso, temos regras de anti-comutação entre os campos. A função de dois pontos é dada por

$$\langle T\psi(x)\bar{\psi}(y) \rangle = \langle \psi(x)\bar{\psi}(y) \rangle = S_\beta^>(x - y)$$

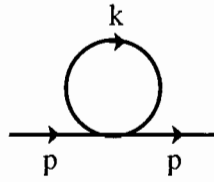
se  $x_0 > y_0$  e

$$\langle T\psi(x)\bar{\psi}(y) \rangle = -\langle \bar{\psi}(y)\psi(x) \rangle = S_\beta^<(x - y)$$

se  $y_0 > x_0$ . Da definição de ordenação temporal

$$S_\beta(x - y) |_{x_0=0} = S_\beta^<(x - y) |_{x_0=0}$$

$$S_\beta(x - y) |_{x_0=-i\beta} = S_\beta^>(x - y) |_{x_0=-i\beta}. \quad (4.28)$$



Este gráfico fornece uma correção para massa do campo  $\varphi$ . No caso usual, as regras de Feynman no espaço dos momentos conduzem a seguinte expressão analítica

$$C = \frac{-i\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2}. \quad (4.33)$$

A introdução dos efeitos da temperatura no cálculo do gráfico acima é obtido quando fazemos a substituição

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

e

$$k_0 \rightarrow k_0 = i\omega_n = \frac{2i\pi n}{\beta}$$

, o que nos levará ao cálculo da correção

$$C_\beta = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{\beta} \sum_n i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - m^2}, \quad (4.34)$$

com  $k^2 = k_0^2 - \vec{k} \cdot \vec{k}$  e  $k_0 = \frac{2n\pi i}{\beta}$ . A variável  $k_0$  é imaginária e discreta, porém, podemos utilizar o teorema dos resíduos e introduzir uma variável contínua escrevendo o somatório

$$\frac{i}{\beta} \sum_n \frac{1}{k^2 - m^2}$$

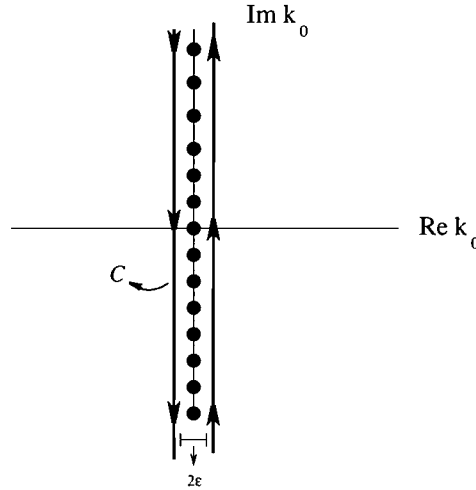
como uma integração no plano complexo. Para isso, observamos que os valores de  $k_0$  são polos da função

$$\frac{1}{e^{\beta k_0} - 1}.$$

Assim, podemos escrever (4.34) como

$$C_\beta = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \oint_C \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \frac{1}{(e^{\beta k_0} - 1)}. \quad (4.35)$$

O símbolo  $\oint_C$  indica que a integração é calculada ao longo de um contorno fechado. Os pólos do integrando estão localizados sobre o eixo imaginário de forma que uma escolha de contorno adequada é dada por



Adotando este contorno, a integral complexa pode ser colocada na seguinte forma

$$\int_C dk_0 \frac{f(k_0)}{e^{\beta k_0} - 1} = \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 \frac{f(k_0)}{e^{\beta k_0} - 1} + \int_{-i\infty-\epsilon}^{i\infty-\epsilon} dk_0 \frac{f(k_0)}{e^{-\beta k_0} - 1} + \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 f(k_0) \quad (4.36)$$

onde

$$f(k_0) = \frac{1}{(k^2 - m^2)}$$

é analítica no interior do contorno considerado. Da equação (4.36), podemos ver que o problema foi separado em em duas partes. A correção de um laço pode ser escrita como

$$C_T = A + B \quad (4.37)$$

onde

$$A = \frac{\lambda}{4\pi} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \frac{1}{(k^2 - m^2)} \quad (4.38)$$

e

$$B = \frac{\lambda}{4\pi} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 \frac{(k^2 - m^2)^{-1}}{e^{\beta k_0} - 1} + \int_{-i\infty-\epsilon}^{i\infty-\epsilon} dk_0 \frac{(k^2 - m^2)^{-1}}{e^{-\beta k_0} - 1} \right]. \quad (4.39)$$

Como o integrando em (4.38) é uma função analítica (para  $m^2 \neq 0$ ) obtemos a mesma correção da teoria euclidiana no caso em que não existe efeitos de temperatura. No

contexto que estamos considerando tal contribuição é associada com o caso em que  $T = 0$ . Os efeitos da temperatura são provenientes de (4.39). As exponenciais no denominador garantem que as integrais são finitas.

Do que foi discutido acima, vemos que o comportamento ultravioleta da teoria não é modificada pelos efeitos da temperatura. Os contratermos exigidos para tornar a teoria finita no ultravioleta são os mesmos que na teoria de campos usual. Intuitivamente, podemos associar este resultado com o fato de que o comportamento ultravioleta está associado a curtas distâncias, propriedade que não foi alterada com a compactificação do tempo. No entanto, esperamos que modificações na região do infravermelho sejam introduzidas já que estão associadas a longas distâncias.

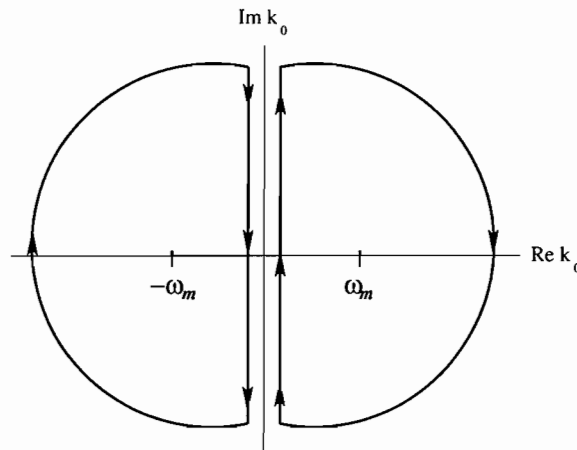
O problema se reduz ao cálculo das integrais

$$J_1 = \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 \frac{(k^2 - m^2)^{-1}}{e^{\beta k_0} - 1} \quad (4.40)$$

e

$$J_2 = \int_{-i\infty-\epsilon}^{i\infty-\epsilon} dk_0 \frac{(k^2 - m^2)^{-1}}{e^{-\beta k_0} - 1}. \quad (4.41)$$

Isto pode ser feita utilizando o método dos resíduos. Contornos adequados para o cálculo são dados por (os semicírculos são fechados no infinito)



em que

$$\omega_m = (x^2 + \beta^2 m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

A correção dependente da temperatura é dada então por

$$B = \frac{-i\lambda}{(2\pi)^2 \beta^2} I(\beta, m^2) \quad (4.42)$$

em que

$$I(\beta, m^2) = \int_0^\infty dx \frac{x^2}{\omega_m (e^{\omega_m} - 1)}. \quad (4.43)$$



De forma genérica, dado um gráfico em um laço, a parte dependente da temperatura é obtida por meio da seguinte identidade

$$\begin{aligned} \frac{i}{\beta} \sum_n f(\vec{k}, k_0 = \frac{2\pi in}{\beta}) &= \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{f(\vec{k}, k_0)}{e^{\beta k_0} - 1} + \int_{-i\infty-\epsilon}^{i\infty-\epsilon} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{f(\vec{k}, k_0)}{e^{-\beta k_0} - 1} \\ &+ \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 f(\vec{k}, k_0). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Os dois primeiros termos de (4.44) contêm a dependência com a temperatura enquanto que o último termo não possui dependência com a temperatura e coincide com o caso usual em que não há temperatura envolvida. Por simplicidade, usaremos a notação

$$\int_{T=0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \equiv \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dk_0}{(2\pi)}, \quad (4.45)$$

$$\int_{T \neq 0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \equiv \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[ \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} + \int_{-i\infty-\epsilon}^{i\infty-\epsilon} \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{1}{e^{-\beta k_0} - 1} \right]. \quad (4.46)$$

No que segue, vamos aplicar a técnica apresentada nesta seção ao estudo da teoria em que o campo de Chern-Simons interage com a matéria (representada por campos escalares). Estamos particularmente interessados nas propriedades perturbativas da teoria. Neste aspecto é importante, por exemplo, o estudo de correções radiativas ao coeficiente do termo de Chern-Simons [44, 45, 46]. As próximas seções deste trabalho estão relacionadas com esta questão na situação em que o espaço subjacente é não-comutativo. Como já vimos, a teoria de Chern-Simons, mesmo no caso abeliano, é bem distinta do correspondente caso comutativo.

## 4.3 Cálculo em um laço

Para obter a correção ao termo de Chern-Simons na teoria não-comutativa devemos calcular as contribuições das funções de dois e três pontos do campo de calibre. Vamos considerar cada um destes casos separadamente.

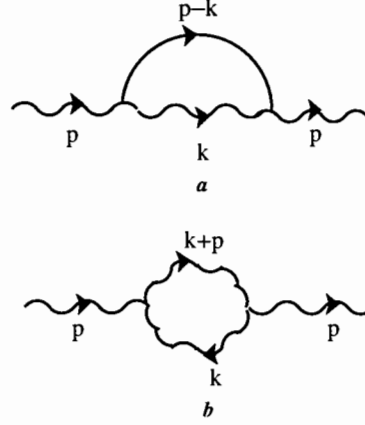
### 4.3.1 Função de dois pontos do campo de calibre

O tensor de polarização pode ser separado em duas partes

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = [\Pi_{\mu\nu}(p)]_{par} + [\Pi_{\mu\nu}(p)]_{impar}, \quad (4.47)$$

em que os índices *par* e *ímpar* indicam, respectivamente, as partes par e ímpar de  $\Pi_{\mu\nu}$  pela troca de  $\mu$  e  $\nu$ . Neste capítulo vamos nos concentrar no cálculo de  $[\Pi_{\mu\nu}(p)]_{impar}$  já

que esta contribuição pode fornecer uma correção para parte quadrática do termo de Chern-Simons. Os gráficos relevantes, neste caso, são dados por



Passemos à análise de cada um dos gráficos.

### Cálculo do gráfico *a*

O gráfico *a* existe devido ao aparecimento do vértice (4.9), proveniente da quebra espontânea da simetria de calibre. A expressão analítica é dada por

$$\Pi_{\mu\nu}^a(p) = \int_{T=0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} F_{\mu\nu}(\vec{k}, k_0) + \int_{T \neq 0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} F_{\mu\nu}(\vec{k}, k_0), \quad (4.48)$$

em que

$$F_{\mu\nu}(\vec{k}, k_0) = \frac{-8(vg^2)^2 \cos^2(k \wedge p)}{[(k-p)^2 - m_\sigma^2](k^2 - m^2)} \left( -mg_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu \frac{m - \xi}{k^2 + \xi m} + i\epsilon_{\mu\nu\rho} k^\rho \right).$$

A correção para o termo de Chern-Simons virá do termo de paridade ímpar (pela troca dos índices  $\mu$  e  $\nu$ ) que, neste caso, é dado por

$$[\Pi_{\mu\nu}^a(p)]_{\text{ímpar}} = A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}, \quad (4.49)$$

em que a parte independente da temperatura é dada por

$$A_{\mu\nu} = -8i(vg^2)^2 \epsilon_{\mu\nu\rho} \int_0^1 dx \int_{T=0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\rho \cos^2(k \wedge p)}{[(k - px)^2 - \Lambda^2]^2}, \quad (4.50)$$

em que  $\Lambda^2 = m^2 - (m^2 - m_\sigma)x + p^2x(x-1)$ <sup>1</sup>, enquanto a dependência com a temperatura, definida pelo termo  $B_{\mu\nu}$ , é obtida de  $A_{\mu\nu}$  pela substituição  $\int_{T=0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rightarrow \int_{T \neq 0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$ .

<sup>1</sup>Nos cálculos que faremos a seguir vamos considerar que o termo contendo  $p^2$  pode ser desprezado para momentos suficientemente baixos.

Fazendo uma mudança de variável  $k \rightarrow k+px$  em (4.53) obtemos duas integrais sendo uma delas igual a zero. A outra parte fornecerá uma correção para o termo de Chern-Simons e é dada por

$$A_{\mu\nu} = -8i(vg^2)^2 \epsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho \int_0^1 dx x \int_{T=0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\cos^2(k \wedge p)}{[k^2 - \Lambda^2]^2}. \quad (4.51)$$

Das definições dadas em (4.46), vemos que integral deve ser calculada ao longo do eixo imaginário onde não existem singularidades. Como fizemos no primeiro capítulo, é conveniente separarmos (4.51) em partes planar e não-planar por meio da identidade  $\cos^2(k \wedge p) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2k \wedge p)]$  e depois resolver separadamente as integrais no momento interno. O resultado final é dado por

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu} &= \frac{(vg^2)^2}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho \int_0^1 dx \frac{x}{\Lambda} (1 + e^{-\Lambda \tilde{p}}) \\ &\approx \epsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho \left[ \frac{2g^2 (m_\sigma/2m + 1)}{3\pi (1 + m_\sigma/m)^2} - \frac{(vg^2)^2}{4\pi} \tilde{p} \right]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Na última linha em (4.52) consideramos a aproximação  $\tilde{p} \rightarrow 0$ . Nesse limite, a contribuição independente do parâmetro  $\theta$  coincide com o resultado obtido para o caso comutativo. Além disso, o resultado é uma função analítica em  $\tilde{p}$  não ocorrendo nenhuma singularidade infravermelha devido a não-comutatividade do espaço.

Como próximo passo, vamos calcular as correções introduzidas por efeitos da temperatura. Esta contribuição pode ser obtida de

$$B_{\mu\nu} = -8i(vg^2)^2 \epsilon_{\mu\nu\rho} \int_0^1 dx \frac{\partial}{\partial \Lambda^2} \int_{T \neq 0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\rho \cos^2(k \wedge p)}{[(k - px)^2 - \Lambda^2]}. \quad (4.53)$$

Vamos efetuar uma mudança de variável  $k \rightarrow k + px$  e escolher o caso particular em que  $p_0 = 0$ . Isso garante que somente a parte correspondente  $\vec{k}$  é alterada pela mudança de variável. Esta escolha é interessante por simplificar a integração na variável  $k_0$ . A parte dependente da temperatura pode ser escrita em termos de integrais complexas como

$$\begin{aligned} B_{0i} &= -8i(vg^2)^2 \epsilon_{0ij} p^j \int_0^1 dx x \frac{\partial}{\partial \Lambda^2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[ \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{\cos^2(k \wedge p)}{(k^2 - \Lambda^2)} \frac{1}{(e^{\beta k_0} - 1)} \right. \\ &\quad \left. + \int_{-i\infty-\epsilon}^{i\infty-\epsilon} \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{\cos^2(k \wedge p)}{(k^2 - \Lambda^2)} \frac{1}{(e^{-\beta k_0} - 1)} \right]. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Seguindo a escolha  $\theta_{0i} = 0$  e calculando as integrais na variável  $k_0$  temos

$$B_{0i} = -4(vg^2)^2 \epsilon_{0ij} p^j \int_0^1 dx x \frac{\partial}{\partial \Lambda^2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{[1 + \cos(\vec{k} \cdot \vec{p})]}{\omega_\Lambda (e^{\beta \omega_\Lambda} - 1)}. \quad (4.55)$$

em que estamos usando a notação  $2k \wedge p = \vec{k} \cdot \vec{p}$ . No cálculo da parte não-planar de (4.55) devemos utilizar as integrais

$$\int_0^{2\pi} d\theta \cos(a \cos \theta) = 2\pi J_0(a) \quad (4.56)$$

e

$$\int_1^\infty dx e^{-ax} J_0(b\sqrt{x^2-1}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{K_{\frac{1}{2}}(\sqrt{a^2+b^2})}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}}, \quad (4.57)$$

em que  $J_\nu(x)$  e  $K_\nu(x)$  representam as funções de Bessel de primeira e segunda espécie. Obtemos o resultado

$$B_{0i} = \frac{2(vg^2)^2}{\pi\beta} \epsilon_{0ij} p^j \int_0^1 dx x \frac{\partial}{\partial \Lambda^2} \left[ \ln(1 - e^{-\beta\Lambda}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta\Lambda\sqrt{n^2+\tau^2}}}{[n^2 + \tau^2]^{\frac{1}{2}}} \right], \quad (4.58)$$

onde definimos  $\tau = \frac{\tilde{p}}{\beta}$ . Note que a fórmula (4.58) é válida para qualquer valores de  $\theta$  e  $\beta$ .

O resultado do caso comutativo é recuperado para  $\theta = 0$ . De fato, vemos que esta escolha fornece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta\Lambda\sqrt{n^2+\tau^2}}}{[n^2 + \tau^2]^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta\Lambda n}}{n} = -\ln(1 - e^{-\beta\Lambda}) \quad (4.59)$$

que, para o limite de altas temperaturas, resulta em

$$[B_{0i}]_{\beta \rightarrow 0} = -\frac{4(vg^2)^2 \epsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho}{\pi} \frac{\partial}{\partial m_\sigma^2} \left[ \frac{m_\sigma^2 \ln(m/m_\sigma)}{(m_\sigma^2 - m^2)} \right], \quad (4.60)$$

que coincide com o caso comutativo.

Agora seja obter a correção dependente da não-comutatividade, ou seja, dependente de  $\tilde{p}$ . Podemos fazer isso verificando como o resultado comutativo é modificado para  $\tilde{p} \rightarrow 0$ . Neste caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta\Lambda\sqrt{n^2+\tau^2}}}{[n^2 + \tau^2]^{\frac{1}{2}}} = -\ln(1 - e^{-\beta\Lambda}) - \frac{1}{2} [\text{PLog}(3, e^{-\beta\Lambda}) + \beta\Lambda \text{PLog}(2, e^{-\beta\Lambda})] \tau^2 + \mathcal{O}(\tau^4), \quad (4.61)$$

em que as funções da forma

$$\text{PLog}(a, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^a} \quad (4.62)$$

são conhecidas como polilogaritmos. Podemos proseguir o cálculo considerando uma expansão de altas temperaturas para as funções  $\text{PLog}(3, e^{-\beta\Lambda})$  e  $\text{PLog}(2, e^{-\beta\Lambda})$  e depois

aplicar a derivada  $\frac{\partial}{\partial \Lambda^2}$  ou então primeiramente aplicar a derivada e posteriormente considerar o limite de altas temperaturas. Em qualquer caso, o resultado obtido é dado por

$$B_{np} \approx -\frac{(vg^2)^2}{2\pi\beta} \tilde{p}^2 \epsilon_{0ij} p^j \int_0^1 dx x \ln \beta \sqrt{m^2 - (m^2 - m_\sigma^2)}. \quad (4.63)$$

Separando de (4.63) a parte dominante no limite  $\beta \rightarrow 0$  obtemos

$$B_{np} \approx -\frac{(vg^2)^2}{2\pi\beta} \tilde{p}^2 \epsilon_{0ij} p^j [m^4 \ln(\beta m) + m_\sigma^4 \ln(\beta m_\sigma) - 2m_\sigma^2 m^2 \ln(\beta m_\sigma)]. \quad (4.64)$$

Vemos que a não-comutatividade introduz uma correção da ordem de  $\theta^2$  na função de dois pontos do campo  $A_\mu$ . O resultado é uma função analítica do parâmetro  $\theta$ . A partir deste ponto, todos os outros gráficos aparecendo na função de dois ou três pontos podem ser calculados de forma análoga, embora o cálculo no último caso seja bem mais longo. Por esta razão vamos apresentar os resultados de forma resumida.

### Cálculo do gráfico *b*

A expressão analítica é dada por

$$\Pi_{b,\mu\nu}(p) = \int_{T=0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} G(\vec{k}, k_0) + \int_{T \neq 0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} G(\vec{k}, k_0), \quad (4.65)$$

em que

$$G(\vec{k}, k_0) = 2g^2 \epsilon_{\beta\mu\alpha} D^{\alpha\rho}(k+p) \epsilon_{\rho\nu\sigma} D^{\sigma\beta}(k) \sin^2(k \wedge p).$$

Considerando somente a parte de paridade ímpar do diagrama a contribuição relevante é dada por

$$\begin{aligned} [G(\vec{k}, k_0)]_{\text{ímpar}} &= \frac{2ig^2 \sin^2(k \wedge p) \epsilon_{\mu\nu\lambda}}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \\ &\times \left\{ mp^\lambda - (m - \xi)k \cdot (k+p) \left[ \frac{k^\lambda}{k^2 + \xi m} - \frac{(k+p)^\lambda}{(k+p)^2 + \xi m} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

A partir deste ponto podemos seguir os mesmos passos desenvolvidos no cálculo do gráfico *a*. No limite em que  $\tilde{p} \rightarrow 0$  e  $\beta \rightarrow 0$  obtemos o seguinte resultado para o gráfico *b*

$$[\Pi_{b,0i}(p_0 = 0; T = 0)]_{\text{ímpar}} = \frac{g^2}{16\pi} (3m - \xi) \tilde{p} \epsilon_{0ij} p^j \quad (4.67)$$

para a contribuição com temperatura zero e

$$[\Pi_{b,0i}(p_0 = 0; T)]_{\text{ímpar}} \approx -\frac{\epsilon_{0ij} p^j g^2 \tau^2}{16\pi T} [2m \log(m/T) + (m - \xi)F] \quad (4.68)$$

para a contribuição associada ao regime de altas temperaturas.

### 4.3.2 Função de três pontos do campo de calibre

Embora bem mais extenso, o cálculo dos gráficos da função de três pontos pode ser feito de forma análoga ao caso do tensor de polarização. Os gráficos, em um laço, são dados por

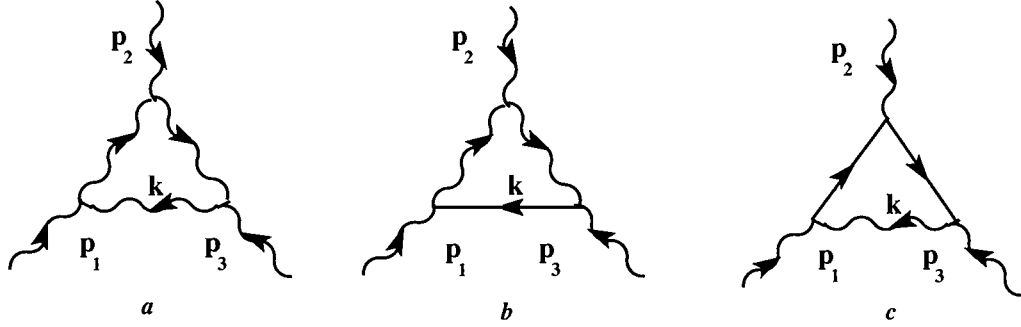


Figura 4.1: Gráficos de um laço que contribuem para parte de paridade ímpar da função de três pontos de  $A_\mu$ .

Os gráficos de 1 laço são mostrados na figura 4.1. A expressão analítica para cada gráfico é dada por:

(1) Gráfico da figura 4.1a

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}^{4.1a} = -8g^3 \int_{T \neq 0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{D}^{\sigma\alpha}(k+p_1) \mathcal{D}^{\beta\tau}(k-p_3) \mathcal{D}^{\xi\lambda}(k) \epsilon_{\alpha\nu\beta} \epsilon_{\lambda\mu\sigma} \epsilon_{\tau\rho\xi} S_1, \quad (4.72)$$

onde

$$\begin{aligned} S_1 &= \sin(k \wedge p_1) \sin(k \wedge p_3) \sin(k+p_1) \wedge p_2 \\ &= -\frac{1}{4} \left[ \sin(p_1 \wedge p_2) + \sin(2k+p_2) \wedge p_1 + \sin(2k+p_1) \wedge p_2 + \sin(2k+p_1) \wedge p_3 \right]. \end{aligned}$$

(2) Gráfico da figura 4.1b

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}^{4.1b} = \frac{-112iv^2g^5}{3} \int_{T \neq 0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{D}_{\mu\alpha}(k+p_1) \mathcal{D}_{\beta\rho}(k-p_3) \Delta_\sigma(k) \epsilon_\nu^{\beta\alpha} S_2, \quad (4.73)$$

onde

$$\begin{aligned} S_2 &= \cos(k \wedge p_1) \cos(k \wedge p_3) \sin(k+p_1) \wedge p_2 \\ &= \frac{1}{4} \left[ \sin(p_1 \wedge p_2) - \sin(2k+p_2) \wedge p_1 + \sin(2k+p_1) \wedge p_2 - \sin(2k+p_1) \wedge p_3 \right]. \end{aligned}$$

(3) Gráfico da figura 4.1c

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}^{4.1c} = -80iv^2g^5 \int_{T \neq 0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (p_2 + k)_\nu \mathcal{D}_{\rho\mu}(k) \Delta_\sigma(k + p_1) \Delta_\sigma(k - p_3) S_3, \quad (4.74)$$

onde

$$\begin{aligned} S_3 &= \cos(k \wedge p_2) \cos(k \wedge p_3) \sin(k + p_2) \wedge p_1 \\ &= \frac{1}{4} \left[ \sin(p_2 \wedge p_1) - \sin(2k + p_1) \wedge p_2 + \sin(2k + p_2) \wedge p_1 - \sin(2k + p_2) \wedge p_3 \right]. \end{aligned}$$

Inicialmente, calculamos as correções para parte de paridade ímpar provenientes dos gráficos 4.1b e 4.1c na aproximação de baixos momentos. Finalizando esta seção, vamos mostrar que nesta aproximação o gráfico 4.1a não contribue. Como já mencionamos nos relatórios anteriores, escolhemos  $\theta_{0\mu} = 0$ .

### 3.1 Gráfico 4.1b e 4.1c:

A parte de paridade ímpar é dada por

$$\begin{aligned} [\Gamma_{\mu\nu\rho}^{4.1b}]_{odd}^T &= \frac{-112v^2ge^4}{3} \int_{T \neq 0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{S_2}{[(k + p_1)^2 - m^2][(k - p_3)^2 - m^2][k^2 - m_\sigma^2]} \\ &\times \left[ -m^2 \epsilon_{\mu\rho\nu} + m^2 \left[ \frac{\epsilon_{\rho\nu\alpha} k^\alpha k_\mu}{[(k + p_1)^2 + \xi m]} - \frac{\epsilon_{\mu\nu\alpha} k^\alpha k_\rho}{[(k - p_3)^2 + \xi m]} \right] - \epsilon_{\mu\rho\alpha} k^\alpha k_\nu \right] \end{aligned}$$

para o gráfico 4.1b e

$$[\Gamma_{\mu\nu\rho}^{4.1c}]_{odd}^T = \int_{T \neq 0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_{\rho\alpha\mu} k^\alpha k_\nu}{[(k + p_1)^2 - m_\sigma^2][(k - p_3)^2 - m_\sigma^2][k^2 - m^2]} S_3,$$

para o gráfico 4.1c.

Com a ajuda dos parâmetros de Feynman, podemos escrever as integrais acima como termos contendo um único denominador. Usando o limite estático, as integrais em  $k_0$  podem ser calculadas fechando adequadamente o contorno de integração e utilizando o teorema do resíduo (primeiro relatório). Posteriormente, efetuamos as integrais em  $\vec{k}$  considerando o limite de altas temperaturas. Finalizando, todas as integrais paramétricas devem ser calculadas. Apresentamos a seguir os resultados para cada um destes passos.

#### A) Juntando os denominadores

A expressão para o gráfico 4.1b pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
[\Gamma_{\mu\nu\rho}^{4.1b}]_{odd}^T &= \frac{-112v^2 g e^4}{3} \sin(p_1 \wedge p_2) \\
&\times \left\{ -2 \int_0^1 dx \int_{T \neq 0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (1-x)x \left[ \frac{m^2 \epsilon_{\mu\rho\nu} + \epsilon_{\mu\rho\alpha} k^\alpha k_\nu}{(k^2 - \Lambda_1^2)^3} \right] \right. \\
&\quad \left. + 6m^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_{T \neq 0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} [2 - y(1-x)] xy^2 \left[ \frac{\epsilon_{\mu\alpha\nu} k^\alpha k_\rho + \epsilon_{\mu\rho\alpha} k^\alpha k_\nu}{(k^2 - \Lambda_2^2)^4} \right] \right\},
\end{aligned}$$

onde  $\Lambda_1^2 = m_\sigma^2(1-x) + m^2 x$  and  $\Lambda_2^2 = y\Lambda_1^2$ , e para o gráfico 4.1c

$$[\Gamma_{\mu\nu\rho}^{4.1c}]_{odd}^T = 160iv^2 e^5 \sin(p_1 \wedge p_2) \int_0^1 dx x \left(1 + \frac{x}{2}\right) \int_{T \neq 0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_{\mu\rho\alpha} k^\alpha k_\nu}{(k^2 - \Lambda_3^2)^3},$$

onde  $\Lambda_3^2 = m^2(1-x) + m_\sigma^2 x$ .

## B) Calculando a integral em $k_0$ e tomando o limite $\beta \rightarrow 0$ :

Vamos desenvolver uma integral típica entre aquelas que ocorrem no cálculo das expressões acima. As outras integrais seguem de forma análoga. Escolhemos

$$\begin{aligned}
I_{\mu\rho\nu} &= \int_{T \neq 0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_{\mu\rho\alpha} k^\alpha k_\nu}{(k^2 - \Lambda^2)^3} \\
&= \int_{T \neq 0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{g_{0\nu} \epsilon_{\mu\rho 0} k_0^2 + g_{\nu j} \epsilon_{\mu\rho i} k^i k^j}{(k^2 - \Lambda^2)^3} \right], \tag{4.75}
\end{aligned}$$

onde  $\Lambda$  é uma constante. Note que os termos que contém o produto  $k_0 k_i$ , com  $i = 1, 2$ , são nulos por integração simétrica. Após calcular a integral em  $k_0$  obtemos

$$I_{\mu\rho\nu} = -2i \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} [g_{0\nu} \epsilon_{\mu\rho 0} F_1(\vec{k}^2) + g_{\nu i} \epsilon_{\mu\rho i} F_2(\vec{k}^2)] \tag{4.76}$$

onde

$$\begin{aligned}
F_1(\vec{k}^2) &= \frac{-1 + e^{2\beta\omega_\Lambda}(-1 - \beta\omega_\Lambda + \beta^2\omega_\Lambda^2) + e^{\beta\omega_\Lambda}(2 + \beta\omega_\Lambda + \beta^2\omega_\Lambda^2)}{16\omega_\Lambda^3(e^{\beta\omega_\Lambda} - 1)^3} \\
&\stackrel{\beta \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{32\omega_\Lambda^3} + \mathcal{O}(\beta^3) \tag{4.77}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
F_2(\vec{k}^2) &= \frac{3 + e^{2\beta\omega_\Lambda}(3 + 3\beta\omega_\Lambda + \beta^2\omega_\Lambda^2) + e^{\beta\omega_\Lambda}(-6 - 3\beta\omega_\Lambda + \beta^2\omega_\Lambda^2)}{16\omega_\Lambda^5(e^{\beta\omega_\Lambda} - 1)^3} \\
&\stackrel{\beta \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{2\omega_\Lambda^6\beta} - \frac{3}{32\omega_\Lambda^5} + \mathcal{O}(\beta^4) \tag{4.78}
\end{aligned}$$

Nós utilizamos a notação  $\omega_\Lambda = \sqrt{\vec{k}^2 + \Lambda^2}$ .



### 3. Integrando em $\vec{k}$ :

Utilizando coordenadas polares e observando que  $|\vec{k}|d|\vec{k}| = \omega_\Lambda d\omega_\Lambda$ , efetuamos as integrais em  $\vec{k}$ . O resultado obtido é

$$I_{\mu\rho\nu} = \frac{-i}{16\pi} \left[ \frac{1}{2\Lambda} \epsilon_{\mu\rho\nu} - \frac{1}{\beta\Lambda^2} g_\nu^i \epsilon_{\mu\rho i} \right] + (\beta^3). \quad (4.79)$$

O procedimento descrito acima é o mesmo para todas as integrais que aparecem no cálculo. Após calcular as integrais paramétricas, o resultado final para os gráficos 4.1b e 4.1c é dado por

$$\begin{aligned} [\Gamma_{\mu\nu\rho}^{4.1b}]_{odd}^T &= \frac{-iv^2 g^5 \sin(p_1 \wedge p_2)}{\pi} \left\{ \frac{1}{21\beta} [A_1(4\epsilon_{\mu\rho\nu} - g_\mu^i \epsilon_{i\rho\nu} - g_\rho^i \epsilon_{\mu i\nu}) + A_2 g_\nu^i \epsilon_{\mu\rho i}] \right. \\ &\quad \left. + A_3 \epsilon_{\mu\rho\nu} \right\}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

onde

$$A_1 = 2 \frac{[m_\sigma^2 m^2 - m^4 + (m^4 + m^2 m_\sigma^2) \ln(\frac{m}{m_\sigma})]}{(m^2 - m_\sigma^2)^3}, \quad (4.81)$$

$$A_2 = \frac{m_\sigma^4 - m^4 + 4m^2 m_\sigma^2 \ln(\frac{m}{m_\sigma})}{(m^2 - m_\sigma^2)^3}, \quad (4.82)$$

e

$$A_3 = \frac{28}{45(m + m_\sigma)^3} (m_\sigma^2 - 2m^2 + 3mm_\sigma) \quad (4.83)$$

para o gráfico 4.1b e

$$[\Gamma_{\mu\nu\rho}^{4.1c}]_{odd}^T = \frac{-80iv^2 g^5 \sin(p_1 \wedge p_2)}{\pi} g_\nu^i \epsilon_{\mu\rho i} \left[ \frac{B_1}{\beta} + B_2 \epsilon_{\mu\nu\rho} \right] \quad (4.84)$$

com

$$B_1 = \frac{1}{32(m^2 - m_\sigma^2)^3} \left[ 5m_\sigma^4 - 12m^2 m_\sigma^2 + 7m^4 - 4(2m^2 m_\sigma^2 - 3m^4) \ln(\frac{m_\sigma}{m}) \right] \quad (4.85)$$

e

$$B_2 = \frac{1}{240(m + m_\sigma)^3} (13m_\sigma^2 + 39mm_\sigma + 28m^2) \quad (4.86)$$

para o gráfico 4.1c. Note que o último termo encontrado em cada uma das expressões (4.80) e (4.84) são independentes da temperatura e coincidem, a menos de um sinal, com o resultado encontrado no cálculo com  $T = 0$ .

### Gráfico 4.1a:

Vamos verificar que na aproximação de baixos momentos o gráfico 4.1a não contribue para correção que estamos interessados. A parte de paridade ímpar do gráfico é dada por

$$\begin{aligned}
 [\Gamma_{\mu\rho\nu}^{4.1a}]_{odd}^T &= 8ig^3 \int_{T \neq 0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{S_1}{[(k+p_1)^2 - m^2][(k-p_3)^2 - m^2][k^2 - m^2]} \\
 &\times \left\{ -m^3 \epsilon_{\nu\mu\rho} + m^3 \left[ \frac{\epsilon_{\mu\rho\alpha} k^\alpha k_\nu}{k^2 + m\xi} - \frac{\epsilon_{\nu\rho\alpha} k^\alpha k_\mu}{(k-p_3)^2 + m\xi} + \frac{\epsilon_{\nu\mu\alpha} k^\alpha k_\rho}{(k+p_1)^2 + m\xi} \right] \right. \\
 &- m [\epsilon_{\mu\rho\alpha} k^\alpha k_\nu - \epsilon_{\nu\rho\alpha} k^\alpha k_\mu + \epsilon_{\nu\mu\alpha} k^\alpha k_\rho] \\
 &\left. + mk^2 \left[ \frac{\epsilon_{\mu\rho\alpha} k^\alpha k_\mu}{k^2 + m\xi} - \frac{\epsilon_{\nu\rho\alpha} k^\alpha k_\mu}{(k-p_3)^2 + m\xi} + \frac{\epsilon_{\nu\mu\alpha} k^\alpha k_\rho}{(k+p_1)^2 + m\xi} \right] \right\} \quad (4.87)
 \end{aligned}$$

O fator  $S_1$  foi definido em (4.72). Vamos escolher um tipo de integral que aparece no cálculo deste gráfico para exemplificar como ocorre o cancelamento da contribuição planar com a não planar, fazendo com que o gráfico não forneça correção para parte de paridade ímpar. A conservação do momento tem um papel importante na verificação deste resultado. Vejamos como isto ocorre. Utilizamos parâmetros de Feynman para escrever todas as integrais em termos contendo um único denominador. Uma integral típica a ser calculada é dada por

$$J = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{S_1}{[(k+q)^2 - \Omega^2]^3}, \quad (4.88)$$

onde  $q = q(p_1, p_2, p_3)$  e  $\Omega^2$  são constantes.  $\Omega$  depende de  $m^2$ , dos momentos externos e dos parâmetros de Feynman.

A integral (4.88) pode ser separada em duas partes

$$J = -\frac{1}{4}(J_p + J_{np}) \quad (4.89)$$

onde

$$J_p = \sin(p_1 \wedge p_2) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - \Omega^2)^3} \quad (4.90)$$

e

$$\begin{aligned}
 J_{np} &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{[\sin(2k+p_2) \wedge p_1 + \sin(2k+p_1) \wedge p_2 + \sin(2k+p_1) \wedge p_3]}{[(k+q)^2 - \Omega^2]^3} \\
 &\simeq [\sin(p_1 \wedge p_2) + \sin(p_2 \wedge p_1) + \sin(p_1 \wedge p_3) - q \wedge (p_1 + p_2 + p_3)] \\
 &\times \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - \Omega^2)^3}. \quad (4.91)
 \end{aligned}$$

Para obter (4.90) e (4.91) efetuamos uma mudança de variável. Além disso, em (4.91) fizemos uma aproximação de baixos momentos no argumento das funções trigonométricas. Utilizando a conservação do momento vemos que

$$J_{np} = -J_p, \quad (4.92)$$

implicando que este tipo de integral não fornecerá contribuição para parte de paridade ímpar na aproximação que estamos considerando. Este mesmo tipo de situação ocorre para todas as integrais que aparecem no cálculo do gráfico 4.1a.

Juntando os resultados para função de dois e três pontos, apresentados separadamente nas seções anteriores para os casos  $T = 0$  e  $T \neq 0$ , obtemos a ação efetiva na ordem de um laço. Lembramos que o resultado foi obtido empregando as aproximações de baixos momentos e altas temperaturas. Os resultados são:

1) Caso  $T = 0$ :

$$S_{ef}^0 = \frac{\bar{\kappa}_1}{2} \int d^3x \epsilon_{0ij} \left[ A^0 \partial^i A^j + \frac{2i\bar{g}_1}{3} A^0 * A^i * A^j \right], \quad (4.93)$$

em que

$$\bar{g}_1 = g \frac{236m^2 + 231mm_\sigma + 77m_\sigma^2}{60(m + m_\sigma)(2m + m_\sigma)} \quad (4.94)$$

e

$$\bar{\kappa}_1 = \frac{2g^4v^2(2m + m_\sigma)}{3\pi(m + m_\sigma)^2} \quad (4.95)$$

2) Limite de altas temperaturas:

$$S_{ef}^T \stackrel{\beta \rightarrow 0}{\simeq} \frac{\bar{\kappa}_2}{2\beta} \int d^3x \epsilon_{0ij} \left[ A^0 \partial^i A^j + \frac{2i\bar{g}_2}{3} A^0 * A^i * A^j \right], \quad (4.96)$$

em que

$$\bar{g}_2 = \frac{g}{24(m^2 - m_\sigma^2)} \times \left[ \frac{7m^4 - 96m^2m_\sigma^2 + 89m_\sigma^4 - 4(24m^4 - 65m^2m_\sigma^2) \ln\left(\frac{m}{m_\sigma}\right)}{m_\sigma^2 - m^2 + 2m^2 \ln\left(\frac{m}{m_\sigma}\right)} \right] \quad (4.97)$$

e

$$\bar{\kappa}_2 = \frac{2v^2g^4}{\pi(m^2 - m_\sigma^2)^2} \left[ m_\sigma^2 - m^2 + 2m^2 \ln\left(\frac{m}{m_\sigma}\right) \right] \quad (4.98)$$

Obtivemos, assim, o resultado interessante de que o termo de Chern-Simons mantém sua forma na ordem de um laço e recebe uma correção finita que é analítica no parâmetro  $\theta$  (que caracteriza a não-comutatividade). É importante ressaltar que este resultado foi obtido no limite de pequenos momentos. Fora desta situação, a correção é não local, no entanto, a ação é invariante por uma transformação de calibre “pequena”.

# Conclusões

Nesta tese estudamos, até um laço, alguns aspectos de teorias de campos não-comutativas envolvendo a interação do campo de Chern-Simons com a matéria. Na primeira parte apresentamos um estudo perturbativo, abordando, particularmente, a ocorrência de singularidades infravermelhas associadas à mistura UV/IV. Posteriormente estudamos o efeito de temperatura sobre as correções radiativas ao coeficiente do termo de Chern-Simons na teoria de Higgs-Chern-Simons não-comutativa. Nas duas situações consideramos a teoria abeliana.

Iniciamos com um estudo em que campos fermiônicos ou bosônicos interagem isoladamente com a campo de Chern-Simons. Quando consideramos um campo fermiônico que se transforma segundo a representação fundamental, vimos que as funções de Green de dois pontos do campo de calibre e do campo associado ao férmion (linearmente divergentes) são planares, existindo apenas as divergência ultravioletas, típicas das teorias comutativas, que podem ser tratadas pelo procedimento de renormalização. Porém, quando adotamos a representação adjunta, divergências lineares presentes nessas funções de Green introduzem a mistura UV/IV.

A teoria de interação de bósons escalares com o campo de Chern-Simons é mais delicada, ocorrendo a mistura tanto na representação fundamental, proveniente de uma singularidade infravermelha introduzida pela função de quatro pontos do campo de matéria, quanto na representação adjunta. Nesse último caso, existe uma singularidade adicional oriunda da função de dois pontos do campo de calibre.

Quando consideramos a teoria em que campos escalares e fermiônicos interagem com o campo de Chern-Simons, na situação em que ambos os campos se transformam de acordo com a representação adjunta, não ocorre a singularidade na função de dois pontos do campo de calibre, mas aquelas existentes na função de quatro pontos do campo escalar e na função de dois pontos do campo fermiônico persistem. Mesmo na representação fundamental, uma singularidade perigosa, proveniente da função de quatro pontos do campo escalar não pode ser eliminada.

Com o objetivo de eliminar as singularidades ainda persistentes na teoria, introduzimos interações do tipo Yukawa entre os campos de matéria. Quando construídas de forma conveniente, essas interações solucionam o problema na representação fundamental (em que a singularidade provém somente da função de quatro pontos) mas não elimina todas as singularidades existentes na representação adjunta. Contudo, a presença dos dois setores (bosônico e fermiônico) e dos vínculos de que as cargas devem ser iguais sugerem

buscar uma solução no contexto de uma teoria supersimétrica. De fato, verificamos que é possível obter uma teoria livre de singularidades infravermelhas perigosas quando a teoria é formulada em um superespaço. Esse resultado é obtido para as funções de Green da teoria por meio de uma escolha específica do parâmetro de calibre. Essa restrição não representa nenhuma limitação já que, como sabemos, os observáveis da teoria devem ser invariantes de calibre e portanto, como decorrência de nosso resultado, não devem apresentar o problema da mistura UV/IV.

Os resultados obtidos na descrição supersimétrica da interação do campo de Chern-Simons com a matéria são válidos na ordem de um laço. Uma possível extensão dessa análise é a investigação de ordens superiores de perturbação no que se refere a presença da mistura UV/IV. Note que a ausência de singularidades perigosas em um laço não depende de nenhum ajuste de constantes de acoplamento (a menos da constante associada a escolha do calibre) e ocorre de forma “natural”. Em dois laços, a análise envolve um número maior de gráficos, não sendo óbvio que persista o cancelamento das divergências.

Um outro aspecto abordado foi o estudo de modificações no coeficiente do termo de Chern-Simons e sua relação com a não-comutatividade do espaço. Esse problema é interessante já que as possíveis divergências infravermelhas associadas à mistura podem, pelo menos em princípio, modificar os resultados da teoria comutativa. Em nosso trabalho analisamos a situação em que existe uma quebra espontânea da simetria de calibre.

Estudamos efeitos provenientes da temperatura e da não comutatividade no contexto da teoria de Higgs-Chern-Simons, por meio do cálculo explícito da parte de paridade ímpar das funções de dois e três pontos do campo de calibre em um laço. Obtivemos uma renormalização finita das constantes de acoplamento associadas ao termo de Chern-Simons e a correspondente contribuição para ação efetiva. Vimos que, pelo menos no que diz respeito à parte de paridade ímpar, os resultados são funções analíticas no parâmetro  $\theta$  que introduz a não comutatividade. Verificamos que o coeficiente do termo de Chern-Simons varia linearmente com a temperatura  $T$ . Também computamos correções na ordem de  $\theta^2$ , proporcionais a  $T \ln T$ , associadas à função de dois pontos do campo de calibre. Essas correções dependem explicitamente do parâmetro de calibre. Contribuições associadas com  $T = 0$  também foram obtidas a partir da teoria à temperatura finita. Todos os resultados são funções analíticas em  $\theta$  e as correções obtidas são invariantes por transformações de calibre infinitesimais.

O estudo dos efeitos da não-comutatividade sobre a quebra espontânea da simetria de calibre, no que diz respeito a presença da mistura UV/IV, é outra extensão natural desta tese. No estudo apresentado no capítulo 4, focalizamos somente as contribuições provenientes da parte de paridade ímpar. Lembramos que vários novos gráficos são introduzidos pela quebra espontânea de simetria. Desse modo, é importante fazer uma análise análoga a realizada no capítulo 2, onde identificamos todos os gráficos que, potencialmente, podem introduzir a mistura UV/IV. Termos que possam introduzir singularidades infravermelhas não-integráveis na série perturbativa devem ser eliminados.

# Apêndice A

## Definições e identidades úteis no estudo de teorias supersimétricas em $2 + 1$ dimensões

Nesse primeiro apêndice vamos introduzir alguns objetos importantes em nosso estudo. Primeiramente, considere a regra que associa a cada coordenada  $x^m = (x^0, x^1, x^2)$  do espaço-tempo o objeto

$$x^{\mu\nu} = x_m (\gamma^m)^{\mu\nu}. \quad (\text{A.1})$$

Os índices espinoriais  $\mu$  e  $\nu$  assumem valores 1 e 2 e as matrizes  $(\gamma^m)^{\mu\nu}$  (a posição dos índices  $\mu$  e  $\nu$  é importante) são dadas por

$$(\gamma^0)^{\mu\nu} = (\mathbf{1}_{2 \times 2})^{\mu\nu}, \quad (\gamma^1)^{\mu\nu} = (\sigma^3)^{\mu\nu}, \quad (\gamma^3)^{\mu\nu} = -(\sigma^1)^{\mu\nu}. \quad (\text{A.2})$$

Na expressão acima estamos considerando somente as componentes das matrizes, de forma que, por exemplo,  $(\gamma^0)^{12}$  corresponde a primeira linha e a segunda coluna de  $\mathbf{1}_{2 \times 2}$ .

Podemos levantar ou baixar os índices utilizando

$$\psi^\alpha = C^{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad \psi_\alpha = \psi^\beta C_{\beta\alpha} \quad (\text{A.3})$$

em que o análogo do tensor  $g^{\mu\nu}$  é o objeto

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -C^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.4})$$

Após substituição das componentes  $(\gamma^m)^{\mu\nu}$  obtemos

$$x^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} x_0 + x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 - x_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Note que as matrizes em (A.2) são simétricas.

Prosseguindo nosso estudo, considere o grupo de Lorentz próprio  $L_p$  em  $(2 + 1)$  dimensões, cujos elementos, representados por  $\Lambda$ , transformam as coordenadas do espaço-tempo  $x^\mu$  como

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (\text{A.6})$$

em que os índices assumem os valores 0, 1, 2. É possível estabelecer um homomorfismo entre  $L_p$  e o conjunto das matrizes  $2 \times 2$  reais e com determinante igual a unidade. Esse conjunto constitui um grupo que recebe o nome de  $SL(2, \mathbb{R})$ .

Um espinor com duas componentes reais  $(\psi^1, \psi^2)$  é um objeto que por uma transformação  $A \in SL(2, \mathbb{R})$  muda como

$$\psi^\alpha \longrightarrow A^\alpha_\beta \psi^\beta. \quad (\text{A.7})$$

Os índices em  $\psi^\alpha$  podem assumir os valores 1 e 2. Como já vimos, podemos levantar ou baixar índices utilizando (A.3). O “quadrado” de um espinor é definido por

$$\psi^2 = \frac{1}{2} \psi^\mu \psi_\mu. \quad (\text{A.8})$$

É importante notar que

$$\psi^\mu \psi_\mu = C_{\alpha\mu} C^{\mu\beta} \psi_\beta \psi^\alpha = - \psi_\beta \psi^\beta. \quad (\text{A.9})$$

Para obter a última identidade utilizamos

$$C_{\alpha\mu} C^{\nu\beta} = \delta_\alpha^\nu \delta_\mu^\beta - \delta_\mu^\nu \delta_\alpha^\beta. \quad (\text{A.10})$$

No superespaço, a operação de derivação pode ser de dois tipos

$$\partial_\mu \theta^\nu \equiv \{\partial_\mu, \theta^\nu\} \equiv \delta_\mu^\nu \quad (\text{A.11})$$

e

$$\partial_{\mu\nu} x^{\sigma\tau} \equiv [\partial_{\mu\nu}, x^{\sigma\tau}] \equiv \frac{1}{2} \delta_{(\mu}^\sigma \delta_{\nu)}^\tau \equiv \delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\tau + \delta_\nu^\sigma \delta_\mu^\tau. \quad (\text{A.12})$$

A definição da derivada  $\partial_\alpha$  é satisfeita se a regra de derivação do produto (regra de Leibniz) for definida de modo que

$$\{\partial_\mu, \theta^\nu\} F(x, \theta) = \partial_\mu [\theta^\alpha F(x, \theta)] + \theta^\alpha \partial_\mu F(x, \theta) = \delta_\mu^\nu, \quad (\text{A.13})$$

ou seja,

$$\partial_\mu (\theta^\alpha F) = (\partial_\mu \theta^\alpha) F(x, \theta) - \theta^\alpha \partial_\mu F(x, \theta), \quad (\text{A.14})$$

em que  $F(x, \theta)$  é uma função arbitrária das coordenadas do superespaço. Além disso, a definição acima implica que a identidade



$$\partial_\mu [\theta^\alpha \theta^\beta] = -\partial_\mu [\theta^\beta \theta^\alpha],$$

consequência direta de  $\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = 0$ , seja satisfeita.

A regra da derivada do produto pode ser generalizada para o produto de duas funções espinoriais arbitrárias como

$$\partial_\mu [\psi^\alpha \psi^\beta] = (\partial_\mu \psi^\alpha) \psi^\beta - \psi^\alpha \partial_\mu \psi^\beta, \quad (\text{A.15})$$

que permite obter a derivada do produto de  $n$  campos espinoriais

$$\begin{aligned} \partial_\alpha [\psi^{\mu_1} \psi^{\mu_2} \dots \psi^{\mu_n}] &= (\partial_\alpha \psi^{\mu_1}) \psi^{\mu_2} \dots \psi^{\mu_n} - \psi^{\mu_1} (\partial_\alpha \psi^{\mu_2}) \dots \psi^{\mu_n} + \dots \\ &\dots + (-1)^j \psi^{\mu_1} \psi^{\mu_2} \dots \psi^{\mu_{j-1}} (\partial_\alpha \psi^{\mu_j}) \dots \psi^{\mu_n} + \dots \\ &\dots + (-1)^n \psi^{\mu_1} \psi^{\mu_2} \dots (\partial_\alpha \psi^{\mu_n}). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Completando o “cálculo diferencial” no superespaço, passemos a discussão da operação de integração nas coordenadas  $\theta$ . A integral de uma coordenada de Grassmann será definida por

$$\int d\theta_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad (\text{A.17})$$

que satisfaz a propriedade de invariância translacional

$$\int d\theta_\alpha (\theta^\beta + \lambda) = \int d\theta_\alpha \theta^\beta, \quad (\text{A.18})$$

com  $\lambda$  constante, se definimos

$$\int d\theta_\alpha \lambda = 0. \quad (\text{A.19})$$

Note que pelas definições (A.11) e (A.17) as operações de derivação e integração de uma coordenada  $\theta^\alpha$  são equivalentes.

No estudo desenvolvido em nosso trabalho, integrais de uma função  $\Phi(x, \theta)$  (que posteriormente serão identificadas com supercampos) são de grande importância já que aparecem na definição da ação no superespaço. Convém lembrar que, devido a propriedade  $(\theta^1)^2 = (\theta^2)^2 = 0$ , o supercampo deve ter a forma

$$\Phi(x, \theta) = f_0(x) + f_1^\alpha(x) \theta_\alpha + f_2(x) \theta^2, \quad (\text{A.20})$$

em que empregamos a notação  $\theta^2 = \frac{1}{2} \theta^\mu \theta_\mu$ . As funções  $f_0$ ,  $f_1^\alpha$  e  $f_2$  são arbitrárias e seus argumentos são as coordenadas do espaço tempo (usuais). A expansão de Taylor de uma função contendo uma única variável  $\theta$  é dada por  $f(\theta) = f(0) + f'(0) \theta$ , em que  $f'$  representa a primeira derivada da função  $f$  em relação a coordenada  $\theta$ , que resulta em

$$\int d\theta f(\theta) = f'(0). \quad (\text{A.21})$$

Para teoria de campos em 2+1 dimensões, a ação é escrita como uma integral em  $\theta$  (além da integral espacial) da forma

$$\begin{aligned}
\int d^2\theta F(x, \theta) &\equiv \int d\theta^\alpha \int d\theta_\alpha F(x, \theta) \\
&= \int d\theta^\alpha \int d\theta_\alpha [F(x, \theta)|_{\theta=0} + \partial^\mu F(x, \theta)|_{\theta=0} \theta_\mu - \partial^2 F(x, \theta)|_{\theta=0} \theta^2] \\
&= -\partial^2 F(x, \theta)|_{\theta=0} \int d\theta^\alpha \int d\theta_\alpha \theta^2 \\
&= \partial^2 F(x, \theta)|_{\theta=0}.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Para obter a identidade acima utilizamos a expansão de Taylor da função  $F(x, \theta)$  em torno de  $\theta^1 = \theta^2 = 0$ , a definição (A.17) além da identidade

$$\int d\theta^\alpha \int d\theta_\alpha \theta^2 = -1. \tag{A.23}$$

Note que a presença do termo  $\theta^2$  na expansão de  $F(x, \theta)$  equivale a considerar um termo da forma  $\theta^1\theta^2$  já que de  $\theta_\mu = \theta^\beta C_{\beta\mu}$  obtemos  $\theta_1 = i\theta^2$  e  $\theta_2 = -i\theta^1$ . A última identidade permite definir a “função delta” como

$$\int d^2\theta \delta^2(\theta) = 1 \tag{A.24}$$

com  $\delta^2 = -\theta^2$ . Por definição, a função delta satisfaz a propriedade usual

$$\int d^2\theta' f(\theta') \delta(\theta' - \theta) = f(\theta). \tag{A.25}$$

A integração por partes é uma operação importante no cálculo de supergráficos. Para obter a fórmula correta, para integrações envolvendo quantidades espinoriais  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , devemos considerar a regra da derivada do produto dada em (A.16). Como exemplo, considere a integral

$$\int d\theta_\beta \partial_\alpha (\psi_1 \psi_2 \psi_3) F, \tag{A.26}$$

em que  $F$  representa uma função arbitrária das coordenadas do superespaço. Da regra da derivada do produto temos

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha (\psi_1 \psi_2 \psi_3 F) &= (\partial_\alpha \psi_1) \psi_2 \psi_3 F - \psi_1 (\partial_\alpha \psi_2) \psi_3 F \\
&+ \psi_1 \psi_2 (\partial_\alpha \psi_3) F + (-1)^3 \psi_1 \psi_2 \psi_3 (\partial_\alpha F) \\
&= \partial_\alpha (\psi_1 \psi_2 \psi_3) F + (-1)^3 \psi_1 \psi_2 \psi_3 (\partial_\alpha F).
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Integrando esta última expressão em  $\theta_\beta$  vemos que a integral (A.26) pode ser escrita como

$$\int d\theta_\beta \partial_\alpha (\psi_1 \psi_2 \psi_3) F = \int d\theta_\beta \partial_\alpha (\psi_1 \psi_2 \psi_3 F) - (-1)^3 \int d\theta_\beta \psi_1 \psi_2 \psi_3 (\partial_\alpha F). \quad (\text{A.28})$$

Note o sinal proveniente de  $(-1)^3$ , em que o número 3 no expoente indica o número de espinores que aparece no parênteses do lado esquerdo de (A.28). A fórmula acima pode ser facilmente generalizada. No cálculo de supergráficos as “quantidades” espinoriais  $\psi$  aparecem como superderivadas covariantes. A regra de integração por partes, dada acima, continua sendo válida. Nessa situação, desprezaremos o termo de “superfície”.

Supercampos são funções das coordenadas do superespaço  $z = (x, \theta)$  que transformam-se segundo o grupo de Poincaré, cujos geradores de translações e rotações (transformações de Lorentz) são representados por  $P_{\mu\nu}$  e  $M_{\alpha\beta}$  respectivamente, estendido de modo a conter um novo gerador  $Q_\mu$  satisfazendo

$$[Q_\mu, P_{\nu\rho}] = 0 \quad (\text{A.29})$$

e

$$\{Q_\mu, Q_\nu\} = 2P_{\mu\nu}, \quad (\text{A.30})$$

fornecendo o que é chamado, usualmente, de uma superálgebra. O objeto  $Q_\mu$  é dito ser um gerador de supersimetria. Estamos considerando um espaço de  $2+1$  dimensões. Uma representação dessa álgebra pode ser realizada utilizando as derivadas definidas em (A.11) e (A.12) como

$$P_{\mu\nu} = i\partial_{\mu\nu} \quad (\text{A.31})$$

e

$$Q_\mu = i(\partial_\mu - \theta^\nu i\partial_{\nu\mu}), \quad (\text{A.32})$$

que permite definir o gerador

$$\xi^{\lambda\rho} P_{\lambda\rho} + \epsilon^\lambda Q_\lambda \quad (\text{A.33})$$

responsável pela implementação de uma translação no superespaço. Note que o primeiro termo no operador definido acima translada de  $\xi^{\lambda\rho}$  as coordenadas do espaço tempo, enquanto que o segundo termo realiza uma translação de  $\epsilon^\lambda$  nas coordenadas de Grassmann. O parâmetro  $\epsilon^\lambda$  é uma quantidade da mesma natureza que as coordenadas  $\theta$  do superespaço.

No entanto, quando atua sobre um supercampo, o segundo termo em (A.33) introduz uma modificação na parte correspondente as coordenadas do espaço-tempo, além daquela implementada por  $P_{\lambda\rho}$ . A álgebra atua sobre os supercampos  $\Phi(x^{\mu\nu}, \theta^\mu)$  por meio da transformação supersimétrica

$$\Phi(x^{\mu\nu} + \xi_{\mu\nu} - \frac{i}{2}\epsilon^{(\mu}\theta^{\nu)}, \theta^\mu + \epsilon^\mu) = \exp[-i(\xi^{\lambda\rho} P_{\lambda\rho} + \epsilon^\lambda Q_\lambda)] \Phi(x^{\mu\nu}, \theta^\mu), \quad (\text{A.34})$$

em que usamos a notação  $\epsilon^{(\mu}\theta^{\nu)} = \epsilon^\mu\theta^\nu + \epsilon^\nu\theta^\mu$ . Mesmo quando  $\xi^{\lambda\rho} = 0$  temos

$$\Phi(x^{\mu\nu} - \frac{i}{2}\epsilon^{(\mu}\theta^{\nu)}, \theta^\mu + \epsilon^\mu) = \exp[-i\epsilon^\lambda Q_\lambda] \Phi(x^{\mu\nu}, \theta^\mu), \quad (\text{A.35})$$

que para uma transformação infinitesimal se reduz a

$$\delta\Phi = -i\epsilon^\lambda Q_\lambda \Phi(x^{\mu\nu}, \theta^\mu). \quad (\text{A.36})$$

As derivadas covariantes

$$D_{\mu\nu} = \partial_{\mu\nu} \quad (\text{A.37})$$

e

$$D_\mu = \partial_\mu + i\theta^\nu \partial_{\nu\mu} \quad (\text{A.38})$$

são definidas de modo que  $D_{\mu\nu}\Phi$  e  $D_\mu\Phi$  se transformem como supercampos. Para transformações infinitesimais, como a apresentada acima, isso significa que

$$\delta D_{\mu\nu}\Phi = -i\epsilon^\lambda D_{\mu\nu} Q_\lambda \Phi = -i\epsilon^\lambda Q_\lambda D_{\mu\nu}\Phi \quad (\text{A.39})$$

e

$$\delta D_\mu\Phi = i\epsilon^\lambda D_\mu Q_\lambda \Phi = -i\epsilon^\lambda Q_\lambda D_\mu\Phi. \quad (\text{A.40})$$

As identidades acima são válidas já que das definições de  $Q_\lambda$ ,  $D_{\mu\nu}$  e  $D_\mu$  temos  $[D_{\mu\nu}, Q_\lambda] = 0$  e  $\{D_\mu, Q_\lambda\} = 0$ .

A regra do produto e integrações por partes continua válida para as superderivadas  $D_\mu = \partial_\mu + i\theta^\nu \partial_{\nu\mu}$ . No caso de um produto envolvendo duas quantidades espinoriais (anticomutam com as coordenadas  $\theta_\mu$ )  $\psi^\alpha\psi^\beta$  temos

$$\partial_\mu [\psi^\alpha\psi^\beta] = (\partial_\mu\psi^\alpha)\psi^\beta - \psi^\alpha\partial_\mu\psi^\beta, \quad (\text{A.41})$$

e

$$\begin{aligned} i\theta^\nu \partial_{\nu\mu} [\psi^\alpha\psi^\beta] &= (i\theta^\nu \partial_{\nu\mu}\psi^\alpha)\psi^\beta + i\theta^\nu \psi^\alpha \partial_{\nu\mu}\psi^\beta \\ &= (i\theta^\nu \partial_{\nu\mu}\psi^\alpha)\psi^\beta - i\psi^\alpha \theta^\nu \partial_{\nu\mu}, \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

ou seja,

$$D_\mu [\psi^\alpha\psi^\beta] = (D_\mu\psi^\alpha)\psi^\beta - \psi^\alpha D_\mu\psi^\beta, \quad (\text{A.43})$$

de modo que, em geral, as superderivadas  $D_\mu$  atuam como as derivadas  $\partial_\mu$ . Na integração por partes temos, simbolicamente,

$$\int d\theta D_\alpha [D_1 D_2 \cdots D_n F(\theta)] G(\theta) = -(-1)^n \int d\theta [D_1 D_2 \cdots D_n F(\theta)] D_\alpha G(\theta), \quad (\text{A.44})$$

em que  $D_1 D_2 \cdots D_n$  representam  $n$  superderivadas com índices arbitrários. Para projetar a ação no superspaço em termos das componentes dos supercampos integramos em  $\theta$ . Como já discutimos anteriormente

$$\int d^2\theta F(x, \theta) = \partial^2 F(x, \theta)|_{\theta=0}. \quad (\text{A.45})$$

A ação é dada por uma integral

$$\begin{aligned} \int d^3x \int d^2\theta F(x, \theta) &= \int d^3x \partial^2 F(x, \theta)|_{\theta=0} F(x, \theta) \\ &= \int d^3x D^2 F(x, \theta)|_{\theta=0} F(x, \theta). \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

A substituição  $\partial^2$  por  $D^2$  na última igualdade da fórmula acima é possível já que os termos dependentes de  $\theta$  em  $D^2$  não contribuem.

Algumas identidades úteis no cálculo de supergráficos são listadas e demonstradas abaixo.

$$\text{I1) } \{D_\alpha, D_\beta\} = 2i\partial_{\alpha\beta}$$

Essa identidade pode ser demonstrada utilizando a definição  $D_\mu = \partial_\mu + i\theta^\beta \partial_{\beta\alpha}$ . O canticomutador é dado por

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = \{\partial_\alpha, \partial_\beta\} + i\{\partial_\alpha, \theta^\nu \partial_{\nu\beta}\} + i\{\theta^\mu \partial_{\mu\alpha}, \partial_\beta\} - \{\theta^\mu \partial_{\mu\alpha}, \theta^\nu \partial_{\nu\beta}\}. \quad (\text{A.47})$$

Aplicando cada um dos termos acima numa função arbitrária  $F = F(x, \theta)$

$$\{\partial_\alpha, \partial_\beta\}F = 0, \quad \{\partial_\alpha, \theta^\nu \partial_{\nu\beta}\}F = \partial_{\alpha\beta}F, \quad \{\theta^\mu \partial_{\mu\alpha}, \partial_\beta\}F = \partial_{\beta\alpha}F, \quad \{\theta^\mu \partial_{\mu\alpha}, \theta^\nu \partial_{\nu\beta}\}F = 0.$$

Os comutadores acima são obtidos pela aplicação da regra de Leibniz e utilização da simetria de  $\partial_{\alpha\beta}$  pela troca dos índices além de  $\{\partial_\alpha, \partial_\beta\} = 0$  e  $[\partial_{\lambda\alpha}, \partial_{\mu\beta}] = [\partial_\alpha, \partial_{\mu\beta}] = 0$ . Adicionando as contribuições obtemos a identidade desejada

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = 2i\partial_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.48})$$

$$\mathbf{I2)} [D_\alpha, D_\beta] = -2C_{\alpha\beta}$$

Essa identidade pode ser obtida por meio de um procedimento análogo ao apresentado na demonstração da identidade anterior. A diferença é que os anticomutadores em (A.47) devem ser substituídos por comutadores que depois de calculados fornecem o resultado

$$[\partial_\alpha, \partial_\beta]F = 2\partial_\alpha\partial_\beta F, \quad [\partial_\alpha, \theta^\nu\partial_{\nu\beta}]F = \partial_{\alpha\beta}F - 2\theta^\mu\partial_{\mu\alpha}\partial_\beta F$$

e

$$[\theta^\mu\partial_{\mu\alpha}, \partial_\beta]F = -\partial_{\beta\alpha}F + 2\theta^\mu\partial_{\mu\alpha}\partial_\beta F, \quad [\theta^\mu\partial_{\mu\alpha}, \theta^\nu\partial_{\nu\beta}]F = 2\theta^\mu\theta^\nu\partial_{\mu\alpha}\partial_{\nu\beta}F.$$

Utilizando os resultados acima, verificamos que o comutador é dado por

$$[D_\alpha, D_\beta] = 2\partial_\alpha\partial_\beta + 2i\theta^\mu(\partial_{\mu\beta}\partial_\alpha - \partial_{\mu\alpha}\partial_\beta) - 2\theta^\mu\theta^\nu\partial_{\mu\alpha}\partial_{\nu\beta}. \quad (\text{A.49})$$

Calculando explicitamente o produto  $D^2 = \frac{1}{2}D^\mu D_\mu = \frac{1}{2}C^{\mu\beta}D_\beta D_\mu$  utilizando a definição de  $D_\mu$  e comparando com o resultado acima, vemos que a seguinte relação é satisfeita

$$D^2 F = \frac{1}{4}C^{\mu\beta}[D_\beta, D_\mu]. \quad (\text{A.50})$$

O comutador  $[D^\lambda, D^\sigma]$  é obtido simplesmente multiplicando ambos os lados da última identidade por  $C^{\lambda\sigma}$  e utilizando a relação (A.10), resultando na identidade

$$[D_\alpha, D_\beta] = -2C_{\alpha\beta} \quad (\text{A.51})$$

A identidades **I1** e **I2** permitem demonstrar a seguinte identidade, muito importante no cálculo de supergráficos.

$$\mathbf{I3)} D_\mu D_\nu = i\partial_{\mu\nu} - C_{\mu\nu}D^2$$

Essa identidade é obtida simplesmente somando os membros direito e esquerdo das identidades **I1** e **I2**.

$$\mathbf{I4)} D^\nu D_\mu D_\nu = 0$$

Para demonstrar a identidade **I4** podemos utilizar uma propriedade geral de um objeto da forma  $C_{\alpha\beta\rho}$  quando os índices assumem somente os valores 1 e 2. A identidade

$$C_{\alpha\beta\rho} + C_{\beta\rho\alpha} + C_{\rho\alpha\beta} - C_{\alpha\rho\beta} - C_{\rho\beta\alpha} - C_{\beta\alpha\rho} = 0 \quad (\text{A.52})$$

é sempre válida para qualquer escolha dos índices. Isso ocorre pelo fato que dois dos índices serão, necessariamente, iguais para todos os termos. Nos interessa aplicar a identidade acima ao caso em que  $C_{\alpha\beta\rho} = D_\alpha D_\beta D_\rho$ . Desse modo temos

$$D_\alpha D_\beta D_\rho + D_\beta D_\rho D_\alpha + D_\rho D_\alpha D_\beta - D_\alpha D_\rho D_\beta - D_\rho D_\beta D_\alpha - D_\beta D_\alpha D_\rho = 0. \quad (\text{A.53})$$

Se agora multiplicamos a expressão acima por  $C^{\beta\rho}$  obtemos

$$D_\alpha D_\beta D^\beta + D_\beta D^\beta D_\alpha + D^\beta D_\alpha D_\beta = 0. \quad (\text{A.54})$$

Se no primeiro termos utilizamos  $D_\alpha D_\beta = -D_\beta D_\alpha + \{D_\alpha, D_\beta\}$  e no segundo termo  $D^\beta D_\alpha = -D_\alpha D^\beta + \{D^\beta, D_\alpha\}$  obtemos o cancelamento dos dois termos contendo os anti-comutadores restando somente

$$D^\beta D_\alpha D_\beta = 0, \quad (\text{A.55})$$

que prova a identidade desejada. Esta é uma relação muito importante no cálculo de supergráficos. Outra relação, também bastante utilizada, é obtida quando escrevemos (A.54) como

$$D^\beta D_\alpha D_\beta = 2\{D^2, D_\alpha\}, \quad (\text{A.56})$$

que devido (A.55) implica em

$$\{D^2, D_\alpha\} = 0. \quad (\text{A.57})$$

**I5)**  $(D^2)^2 = \square$

O objeto  $(D^2)^2$  é dado por

$$\begin{aligned} (D^2)^2 &= \frac{1}{4} D^\mu D_\mu D^\nu D_\nu \\ &= -\frac{1}{4} D^\mu (\{D_\mu, D_\nu\} - D_\nu D_\mu) D^\nu \\ &= -\frac{1}{2} i D^\mu \partial_{\mu\nu} D^\nu \\ &= -\frac{1}{2} i (i \partial^{\mu\nu} - C^{\mu\nu} D^2) \partial_{\mu\nu} \\ &= \square, \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

que é a identidade que desejamos provar. Para obtê-la utilizamos (A.9), as identidades **I1**, **I4**, **I3**, além de (A.60) e  $[D_\alpha, \partial_{\mu\nu}] = 0$ . Esse último comutador é facilmente obtido como segue

$$\begin{aligned} [D_\alpha, \partial_{\mu\nu}] F &= (\partial_\alpha + i\theta^\beta \partial_{\beta\alpha}) \partial_{\mu\nu} F - \partial_{\mu\nu} (\partial_\alpha + i\theta^\beta \partial_{\beta\alpha}) F \\ &= i\theta^\beta \partial_{\beta\alpha} \partial_{\mu\nu} F - \partial_{\mu\nu} (\theta^\beta \partial_{\beta\alpha} F) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

**I6)**  $\partial^{\mu\sigma} \partial_{\nu\sigma} = \delta_\nu^\mu \square$

Com esta última relação terminamos nossa discussão sobre as principais identidade utilizadas no cálculo de suergráficos. Temos

$$\partial^{\mu\sigma} \partial_{\sigma\nu} = \partial^n \partial^m (\gamma_n)^{\mu\sigma} (\gamma_m)_{\sigma\nu}. \quad (\text{A.60})$$

Ao escrever explicitamente os termos no somatório acima obtemos nove termos, dentre os quais, somente três fornecem uma contribuição diferente de zero. Esses termos são dados por

$$[(\gamma^0)^{\mu\sigma} (\gamma^0)_{\sigma\nu} \partial_0^2 + (\gamma^1)^{\mu\sigma} (\gamma^1)_{\sigma\nu} \partial_1^2 + (\gamma^2)^{\mu\sigma} (\gamma^2)_{\sigma\nu} \partial_2^2] = \delta_\nu^\mu \square. \quad (\text{A.61})$$

Para obter a fórmula acima utilizamos a identidade (A.2), de onde obtemos  $(\gamma^m)_{\mu\nu} = (-\mathbf{1}_{2 \times 2}, \sigma^3, \sigma^1)$ . Os termos envolvendo derivadas com diferentes índices são todos nulos. Como exemplo, considere os termos

$$(\gamma^1)^{\mu\sigma} (\gamma^2)_{\sigma\nu} \partial_1 \partial_2 + (\gamma^2)^{\mu\sigma} (\gamma^1)_{\sigma\nu} \partial_2 \partial_1 = -(\sigma^3 \sigma^1 + \sigma^1 \sigma^3) \partial_1 \partial_2 = 0. \quad (\text{A.62})$$

De forma análoga, o mesmo resultado pode ser demonstrado para os termos contendo  $\partial_0 \partial_1$  e  $\partial_0 \partial_2$ , restando somente a contribuição correspondente a (A.61), o que prova a identidade **I6**. Note que, como  $\delta_\mu^\mu = 2$ , temos

$$\frac{1}{2} \partial^{\mu\sigma} \partial_{\sigma\mu} = \square \quad (\text{A.63})$$

No cálculo dos supergráficos convém utilizar as identidade acima no espaço de momentos. Para obter a correspondencia fazemos a substituição usual  $\partial_{\mu\nu} \rightarrow -ik_{\mu\nu}$ .

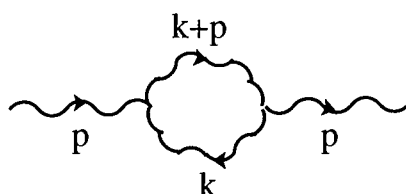


# Apêndice B

## Cálculo de propagadores e supergráficos

A ação de Chern-Simons no superespaço foi dada no capítulo 3 na fórmula (3.1). Neste apêndice vamos apresentar

- 1) o cálculo do propagador associado ao campo de calibre e
- 2) o cálculo do gráfico



### B.1 Cálculo do Propagador

Para obter o propagador associado ao campo de calibre devemos acrescentar à (3.1) o termo de fixação de calibre. Assim, a parte quadrática da ação é obtida de

$$S = m \int d^5z \left( A^\alpha * W_\alpha - \frac{m}{2\xi} (D^\alpha A_\alpha)(D^\beta A_\beta) \right), \quad (\text{B.1})$$

em que

$$W_\beta = \frac{1}{2} D^\alpha D_\beta A_\alpha - \frac{i}{2} [A^\alpha, D_\alpha A_\beta] - \frac{1}{6} [A^\alpha, \{A_\alpha, A_\beta\}], \quad (\text{B.2})$$

e é dada por

$$S_q = \frac{m}{2} \int d^5 z \left( A^\alpha D^\beta D_\alpha A_\beta - \frac{1}{\xi} (D^\alpha A_\alpha) (D^\beta A_\beta) \right). \quad (\text{B.3})$$

Integrando por partes obtemos

$$S_q = \frac{1}{2} \int d^5 z A^\alpha(z) \Delta_\alpha^\beta A_\beta(z) \quad (\text{B.4})$$

em que

$$\Delta_\alpha^\beta = m \left( D^\beta D_\alpha + \frac{1}{\xi} D_\alpha D^\beta \right). \quad (\text{B.5})$$

A fórmula (B.4) também pode ser escrita como

$$S_q = \frac{m}{2} \int d^5 z_1 \int d^5 z_2 A^\alpha(z_1) \Delta_\alpha^\beta(z_1 - z_2) A_\beta(z_2) \quad (\text{B.6})$$

em que

$$\Delta_\alpha^\beta(z_1 - z_2) = m \left( D^\beta D_\alpha + \frac{1}{\xi} D_\alpha D^\beta \right) \delta(z_1 - z_2) \quad (\text{B.7})$$

O funcional gerador é definido por

$$Z(J) = \rho \int \mathcal{D}A \exp \left[ i \left( S_q + \int d^5 z A^\alpha(z) J_\alpha(z) \right) \right] \quad (\text{B.8})$$

Nesta primeira parte do apêndice B estamos interessados no cálculo a função de dois pontos do campo  $A_\mu$  que será, nesse caso em que não há interação, o propagador da teoria livre. O objeto que desejamos calcular é

$$\langle A^\alpha(z_1) A^\beta(z_2) \rangle = \left[ (-i) \frac{\delta}{\delta J_\beta} (-i) \frac{\delta}{\delta J_\alpha} Z(J) \right]_{J=0}. \quad (\text{B.9})$$

Fazendo em

$$S = S_q + \int d^5 z A^\alpha(z) J_\alpha(z)$$

a mudança

$$A^\alpha(z_i) = \tilde{A}^\alpha(z_i) + \int d^5 y_i J^\gamma(y_i) [\Delta^{-1}]_\gamma^\alpha(y_i - z_i), \quad (\text{B.10})$$

onde

$$\int d^5 z_2 [\Delta^{-1}]_\alpha^\gamma(z_1 - z_2) \Delta_\gamma^\beta(z_2 - z_3) = -\delta_\alpha^\beta \delta(z_1 - z_3), \quad (\text{B.11})$$

vemos que

$$S = \frac{1}{2} \int d^5 y_1 \int d^5 y_2 \left[ \tilde{A}^\alpha(y_1) \Delta_\alpha^\beta(y_1 - y_2) \tilde{A}_\beta(y_2) + J^\gamma(y_1) [\Delta^{-1}]_\gamma^\alpha(y_1 - y_2) J_\alpha(y_2) \right]$$

se a identidade

$$\int dy_2 J^\delta(y_2) [\Delta^{-1}]_{\delta\beta}(y_2 - z_2) = \int dy_2 [\Delta^{-1}]_\beta^\delta(z_2 - y_2) J_\delta(y_2) \quad (\text{B.12})$$

é satisfeita. Vamos verificar que isso ocorre adiante. O propagador livre é obtido aplicando derivadas funcionais no funcional gerador, conforme especificado em (B.9). O resultado é dado por

$$\begin{aligned} \langle A^\alpha(z_1) A^\beta(z_2) \rangle &= \frac{(-i)^2}{2} \frac{\delta}{\delta J_\alpha(z_1)} \frac{\delta}{\delta J_\beta(z_2)} \int d^5 y_1 \int d^5 y_2 J^\gamma(y_1) [\Delta^{-1}]_\gamma^\alpha(y_1 - y_2) J_\alpha(y_2) \\ &= i [\Delta^{-1}]^{\beta\alpha}(z_2 - z_1) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

A identidade (B.12) pode ser verificada lembrando que  $[\Delta^{-1}]_{\delta\beta}(y_2 - z_2)$  é o “Kernel” de um operador da forma

$$L_{\alpha\beta} = L_1 D_\alpha D_\beta + L_2 D_\beta D_\alpha,$$

ou seja,

$$[\Delta^{-1}]_{\alpha\beta}(z_1 - z_2) = [L_1 D_\alpha D_\beta + L_2 D_\beta D_\alpha] \delta(z_1 - z_2). \quad (\text{B.14})$$

O próximo passo é substituir a expressão acima nos dois lados de (B.12), multiplicar ambos os lados por uma função arbitrária  $F(z_2)$  e integrar em  $z_2$ . Esse procedimento fornece

$$\begin{aligned} (\text{B.12})_{\text{direito}} &= \int dy_2 dz_2 F(z_2) (L_1 D_{\delta z_2} D_{\beta z_2} + L_2 D_{\beta z_2} D_{\delta z_2}) \delta(z_2 - y_2) J^\delta(y_2) \\ (\text{B.12})_{\text{esquerdo}} &= \int dy_2 dz_2 F(z_2) J^\delta(y_2) (L_1 D_{\delta y_2} D_{\beta y_2} + L_2 D_{\beta y_2} D_{\delta y_2}) \delta(y_2 - z_2) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

As fórmulas acima representam os lados direito e esquerdo da identidade (B.12). A igualdade entre essas duas expressões pode ser verificada de forma mais simples no espaço dos momentos. Assim, utilizando a representação de Fourier das funções  $J(y_2)$ ,  $F(z_2)$   $\delta(z_2 - y_2)$  e as identidades

$$D_{\beta y} D_{\delta y} = k_{\beta\delta} - C_{\beta\delta} D^2,$$

$$D_{\delta y} D_{\beta y} = k_{\beta\delta} + C_{\beta\delta} D^2,$$

$$D_{\beta z} D_{\delta z} = -k_{\beta\delta} - C_{\beta\delta} D^2$$

e

$$D_{\delta z} D_{\beta z} = -k_{\beta\delta} + C_{\beta\delta} D^2 ,$$

em que usamos  $D_y^2 = D_z^2 = D^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} & (B.12)_{\text{esquerdo}} = (B.12)_{\text{direito}} \\ & = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^2 \theta_y d^2 \theta_z \tilde{J}^\delta(-k, \theta) [-L_1(k_{\beta\delta} - C_{\beta\delta} D^2) - L_2(k_{\delta\beta} + C_{\delta\beta} D^2)] \delta_{yz}, \end{aligned} \quad (B.16)$$

o que prova a identidade (B.12).

Provamos que invertendo a parte quadrática da ação (B.6), ou seja, o objeto definido em (B.7), obtemos o propagador para o campo de Chern-Simons, que deve ser da forma dada em (B.14). O próximo passo é determinar os coeficientes  $L_1$  e  $L_2$  em (B.14) satisfazendo (B.11). Isso é feito de forma mais simples no espaço de momentos, onde

$$D_\alpha D_\beta = k_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta} D^2.$$

Os coeficientes são obtidos de

$$\Delta_\alpha^\beta [\Delta^{-1}]_\beta^\gamma = -\delta_\alpha^\gamma. \quad (B.17)$$

Utilizando a expressão para  $D_\alpha D_\beta$  dada acima e as relações

$$D_\alpha D^\beta D^\alpha = 0, \quad \psi_\alpha = \psi^\beta C_{\beta\alpha}, \quad \psi^\alpha = C^{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad k_{\alpha\beta} k^{\beta\gamma} = k^2 \delta_\alpha^\gamma \quad \text{e} \quad C_{\alpha\beta} C^{\beta\gamma} = -\delta_\alpha^\gamma$$

em (B.17) obtemos

$$\begin{aligned} & -m \left[ L_2(k_{\beta\alpha} - C^{\beta\alpha} D^2)(k^{\gamma\beta} - C_{\gamma\beta} D^2) + \frac{L_1}{\xi}(k_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta} D^2)(k^{\beta\gamma} - C^{\beta\gamma} D^2) \right] \\ & = -m \left[ 2k^2 \delta_\alpha^\gamma \left( L_2 + \frac{L_1}{\xi} \right) + 2k_\alpha^\gamma D^2 \left( \frac{L_1}{\xi} - L_2 \right) \right] = -\delta_\alpha^\gamma, \end{aligned} \quad (B.18)$$

que fornece

$$\left( \frac{L_1}{\xi} - L_2 \right) = 0 \quad \text{e} \quad m 2k^2 \left( L_2 + \frac{L_1}{\xi} \right) = 1,$$

de onde podemos determinar os coeficientes

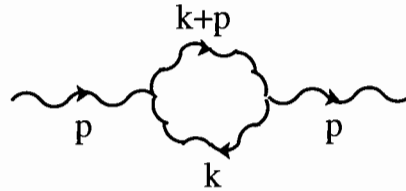
$$L_1 = \frac{\xi}{4mk^2} \quad \text{e} \quad L_2 = \frac{1}{4mk^2}. \quad (B.19)$$

Desse modo, levando em conta (B.13), o propagador livre associado ao campo de calibre, no espaço dos momentos, é dado por

$$\langle A^\alpha(k, \theta_1) A^\beta(-k, \theta_2) \rangle = \frac{i}{4m k^2} [D^\beta D^\alpha + \xi D^\alpha D^\beta] \delta_{12}. \quad (\text{B.20})$$

## B.2 Cálculo de um supergráfico

Nessa seção vamos mostrar de forma detalhada o procedimento de cálculo de um supergráfico. Escolhemos para isso uma contribuição proveniente do tensor de polarização. Os gráficos foram mostrados no capítulo 3.1 na seção 3.2.1. O gráfico escolhido é



Primeiro devemos verificar quais as diferentes contrações possíveis e os tipos de termos obtidos. Lembramos que os vértices que aparecem no gráfico são da forma

$$V_{\theta_1} = \frac{2}{3} m A^\beta(k_1, \theta_1) A^\alpha(k_2, \theta_1) D_\alpha A_\beta(k_3, \theta_1) \sin(k_2 \wedge k_3)$$

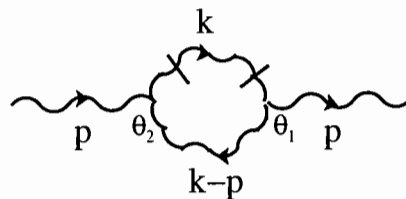
e

$$V_{\theta_2} = \frac{2}{3} m A^{\beta'}(k_1', \theta_2) A^{\alpha'}(k_2', \theta_2) D_{\alpha'} A_{\beta'}(k_3', \theta_2) \sin(k_2' \wedge k_3'),$$

em que  $\theta_1$  e  $\theta_2$  indicam os diferentes vértices, conforme indicado na figura acima. Precisamos atribuir valores aos momentos em cada vértice obedecendo a convenção adotada no gráfico.

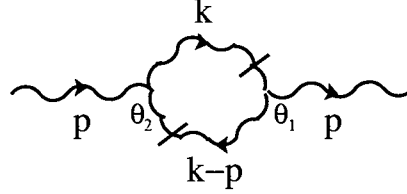
Dos diferentes termos gerados pelas distintas possibilidades de contrações entre os campos, existem dois tipos que podem introduzir singularidades perigosas que poderão, em ordens mais altas, ocasionar a mistura UV/IV. Vamos usar a seguinte representação gráfica para esses termos:

- Caso 1



em que existe um propagador interno obtido a partir da contração entre os campos com momento  $k_3$  e  $k'_3$ . Nesse caso, as duas superderivadas provenientes de cada um dos vértices estão atuando no propagador com momento  $k$  (indicado pelas duas linhas cortando o propagador);

• Caso 2



em que o campo contendo uma superderivada, presente em um vértice, deve ser contraído com um dos campos sem uma superderivada, do outro vértice. Os campos externos devem depender do momento externo, que será  $p$  ou  $-p$ .

Vejamus um exemplo de contração em cada caso indicada acima. Escolha nas fórmulas (B.21) e (B.21)  $k_1 = -p$  e  $k'_1 = p$ . Por meio dessa escolha fixamos os campos externos como sendo  $A^\beta(-p, \theta_1)$  e  $A^{\beta'}(p, \theta_2)$ . As linhas internas para o gráfico do caso 1, representado acima, será obtida da contração entre os dois campos contendo as superderivadas, ou seja, escolhemos  $k_3 = k$  e  $k'_3 = -k$ . Com isso, a outra linha interna fica determinada, já que a única possibilidade é fazer  $k_2 = -(k - p)$  e  $k'_2 = k - p$ . Note que essas escolhas de momentos determinam o fator trigonométrico proveniente do vértice como sendo igual a  $-\sin^2(k \wedge p)$ .

Para o gráfico do caso 2 utilizamos a mesma convenção anterior para os campos externos. A linha interna superior pode, por exemplo, ser obtida pela contração do campo com momento  $k_3 = p - k$  com o campo com momento  $k'_2 = k - p$ . A outra linha interna é obtida pela contração dos campos restantes. O fator trigonométrico também é dado por  $-\sin^2(k \wedge p)$ .

Se escrevemos a expressão analítica do gráfico, considerando as diferentes possibilidades de contrações obtemos

$$\begin{aligned}
(a) &= m^2 a_3^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \langle D_{1\alpha} A_\beta(k, \theta_1) D_{2\alpha'} A_{\beta'}(-k, \theta_2) \rangle \\
&\times \langle A^\beta(p - k, \theta_1) A^{\alpha'}(-p - k, \theta_2) \rangle A^\alpha(-p, \theta_1) A^{\beta'}(p, \theta_2), \\
(b) &= \frac{m^2}{2} a_3^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \langle D_{1\alpha} A_\beta(k, \theta_1) D_{2\alpha'} A_{\beta'}(-k, \theta_2) \rangle \\
&\times \langle A^\beta(p - k, \theta_1) A^{\beta'}(-p - k, \theta_2) \rangle A^\alpha(-p, \theta_1) A^{\alpha'}(p, \theta_2), \\
(c) &= \frac{m^2}{2} a_3^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \langle D_{1\alpha} A_\beta(k, \theta_1) D_{2\alpha'} A_{\beta'}(-k, \theta_2) \rangle \\
&\times \langle A^\alpha(p - k, \theta_1) A^{\alpha'}(-p - k, \theta_2) \rangle A^\beta(-p, \theta_1) A^{\beta'}(p, \theta_2), \tag{B.21}
\end{aligned}$$

para o gráfico do caso 1, enquanto que as contribuições para o gráfico do caso 2 são

$$\begin{aligned}
(a') &= m^2 a_3^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \langle D_{1\alpha} A_\beta(k, \theta_1) A^{\alpha'}(-k, \theta_2) \rangle \\
&\quad \times \langle A^\beta(p-k, \theta_1) D_{1\alpha'} A_{2\beta'}(-p-k, \theta_2) \rangle A^\alpha(-p, \theta_1) A^{\beta'}(p, \theta_2), \\
(b') &= \frac{m^2}{2} a_3^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \langle D_{1\alpha} A_\beta(k, \theta_1) A^{\beta'}(-k, \theta_2) \rangle \\
&\quad \times \langle A^\beta(p-k, \theta_1) D_{2\alpha'} A_{\beta'}(-p-k, \theta_2) \rangle A^\alpha(-p, \theta_1) A^{\alpha'}(p, \theta_2), \\
(c') &= \frac{m^2}{2} a_3^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \langle D_{1\alpha} A_\beta(k, \theta_1) A^{\alpha'}(-k, \theta_2) \rangle \\
&\quad \times \langle A^\alpha(p-k, \theta_1) D_{2\alpha'} A_{\beta'}(-p-k, \theta_2) \rangle A^\beta(-p, \theta_1) A^{\beta'}(p, \theta_2), \tag{B.22}
\end{aligned}$$

em que os índices 1 e 2 indicam que as superderivadas atuam sobre as variáveis  $\theta_1$  e  $\theta_2$  respectivamente. O coeficiente  $a_3 = \frac{2}{3}$  é o fator numérico proveniente do vértice.

O próximo passo é substituir a expressão do propagador do campo de calibre e manipular algebricamente as superderivadas. No espaço de momentos temos

$$\langle A^\alpha(k, \theta_1) A^\beta(-k, \theta_2) \rangle = \frac{i}{4 m k^2} [D^\beta D^\alpha + \xi D^\alpha D^\beta] \delta_{12}. \tag{B.23}$$

O procedimento de cálculo é análogo para todas as contribuições acima. Para exemplificar escolhemos

$$\begin{aligned}
(a) &= m^2 a_3^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \langle D_{1\alpha} A_\beta(k, \theta_1) D_{2\alpha'} A_{\beta'}(-k, \theta_2) \rangle \\
&\quad \times \langle A^\beta(p-k, \theta_1) A^{\alpha'}(-p-k, \theta_2) \rangle A^\alpha(-p, \theta_1) A^{\beta'}(p, \theta_2). \tag{B.24}
\end{aligned}$$

Substituindo o propagador na última expressão, utilizando a identidade  $D_{2\alpha} \delta_{12} = -D_{1\alpha} \delta_{12}$  e fazendo integrações por partes (veja apêndice A) para que todas as superderivadas atuem em somente uma  $\delta_{12}$ , a álgebra das superderivadas deve ser implementadas em quatro diferentes termos dados por

$$\begin{aligned}
&\left[ \delta_{12} D_{\alpha'} D_\beta D_{\beta'} D_\alpha D^{\alpha'} D^\beta \delta_{12} + \xi \delta_{12} D_{\alpha'} D_\beta D_{\beta'} D_\alpha D^\beta D^{\alpha'} \delta_{12} \right. \\
&\quad \left. + \xi \delta_{12} D_{\alpha'} D_{\beta'} D_\beta D_\alpha D^{\alpha'} D^\beta \delta_{12} + \xi^2 \delta_{12} D_{\alpha'} D_{\beta'} D_\beta D_\alpha D^\beta D^{\alpha'} \delta_{12} \right]. \tag{B.25}
\end{aligned}$$

Na expressão acima, o termo independentes de  $\xi$  e o termo contendo  $\xi^2$  são iguais a zero. A verificação pode ser feita como segue:

- termo independente de  $\xi$

$$\begin{aligned}
& \delta_{12} D_{\alpha'} D_{\beta} D_{\beta'} D_{\alpha} D^{\alpha'} D^{\beta} \delta_{12} = \\
& = \delta_{12} [k_{\alpha'\beta} - C_{\alpha'\beta} D^2] D_{\beta'} D_{\alpha} D^{\alpha'} D^{\beta} \delta_{12} \\
& = k_{\alpha'\beta} \delta_{12} D_{\beta'} D_{\alpha} D^{\alpha'} D^{\beta} \delta_{12} - D^2 D_{\beta'} D_{\alpha} D_{\beta} D^{\beta} \delta_{12} \\
& = k_{\alpha'\beta} k^{\alpha'\beta} \delta_{12} D_{\beta'} D_{\alpha} \delta_{12} + 2 \delta_{12} (D^2)^2 D_{\beta'} D_{\alpha} \delta_{12} \\
& = -2 k^2 \delta_{12} D_{\beta'} D_{\alpha} \delta_{12} - 2 k^2 \delta_{12} D_{\beta'} D_{\alpha} \delta_{12} = 0 ,
\end{aligned} \tag{B.26}$$

em que usamos as identidades

$$D_{\alpha'} D_{\beta} = k_{\alpha'\beta} - C_{\alpha'\beta} D^2 ;$$

$$D_{\alpha} = D^{\beta} C_{\beta\alpha} ,$$

$$D_{\beta} D^{\beta} = -D^{\beta} D_{\beta} ,$$

$$D^2 = \frac{1}{2} D^{\beta} D_{\beta} ,$$

$$D_{\alpha} D^2 = -D^2 D_{\alpha} ,$$

$$k^{\mu\sigma} k_{\sigma\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} k^2$$

e

$$(D^2)^2 = -k^2 .$$

• termo proporcional a  $\xi^2$

$$\delta_{12} D_{\alpha'} D_{\beta'} D_{\beta} D_{\alpha} D^{\beta} D^{\alpha'} \delta_{12} = 0, \tag{B.27}$$

em que usamos

$$D^{\nu} D_{\mu} D_{\nu} = 0.$$

A contribuição virá dos termos lineares em  $\xi$ , dados por

$$\delta_{12} D_{\alpha'} D_{\beta} D_{\beta'} D_{\alpha} D^{\beta} D^{\alpha'} \delta_{12} + \delta_{12} D_{\alpha'} D_{\beta'} D_{\beta} D_{\alpha} D^{\alpha'} D^{\beta} \delta_{12}. \tag{B.28}$$

Lembre que os termos que contribuirão serão, necessariamente, da forma  $\delta_{12} D^2 \delta_{12} = \delta_{12}$ . Para o primeiro termo na expressão acima temos



$$\begin{aligned}
T_1 &= \delta_{12} D_{\alpha'} D_{\beta} D_{\beta'} D_{\alpha} D^{\beta} D^{\alpha'} \delta_{12} \\
&= \delta_{12} D_{\alpha'} D_{\beta} (k_{\beta'\alpha} - C_{\beta'\alpha} D^2) D^{\beta} D^{\alpha'} \delta_{12} \\
&= 2k_{\beta'\alpha} \delta_{12} D_{\alpha'} D^2 D^{\alpha'} \delta_{12} - 2C_{\beta'\alpha} \delta_{12} D_{\alpha'} (D^2)^2 D^{\alpha'} \delta_{12} \\
&= -4k_{\beta'\alpha} k^2 \delta_{12} \delta_{12} - 4C_{\beta'\alpha} k^2 \delta_{12} D^2 \delta_{12} \\
&= -4C_{\beta'\alpha} k^2 \delta_{12}.
\end{aligned} \tag{B.29}$$

O segundo termo não contribui pois temos

$$\begin{aligned}
T_2 &= \delta_{12} D_{\alpha'} D_{\beta'} D_{\beta} D_{\alpha} D^{\alpha'} D^{\beta} \delta_{12} \\
&= \delta_{12} D_{\alpha'} D_{\beta'} (k_{\beta\alpha} - C_{\beta\alpha} D^2) D^{\alpha'} D^{\beta} \delta_{12} \\
&= -\delta_{12} D_{\alpha'} D_{\beta'} D^{\alpha'} D^2 D^{\beta} \delta_{12} = 0.
\end{aligned} \tag{B.30}$$

Para obter os resultados (B.29) e (B.30) utilizamos as identidades da página anterior. Quando levado a expressão analítica do gráfico, o termo  $T_1$  é multiplicado por  $\frac{i^2}{16}$  proveniente dos propagadores. Além disso a constante  $C_{\beta'\alpha}$  atua de modo que  $C_{\beta'\alpha} A^{\alpha}(-p, \theta_1) A^{\beta'}(p, \theta_2) = A^{\alpha}(-p, \theta_1) A_{\alpha}(p, \theta_2)$ .

Após a manipulação algébrica das superderivadas o resultado para cada uma das contribuições apresentadas em (B.21) e (B.22) é dada por (o procedimento é análogo para todos os termos)

$$\begin{aligned}
(a) &= \frac{1}{4} a_3^2 \xi \int d^2\theta \int \frac{d^3 p d^3 k}{(2\pi)^6} J k^2 A^{\beta}(-p, \theta) A_{\beta}(p, \theta), \\
(b) &= \frac{1}{4} a_3^2 \xi \int d^2\theta \int \frac{d^3 p d^3 k}{(2\pi)^6} J k^2 A^{\beta}(-p, \theta) A_{\beta}(p, \theta), \\
(c) &= \frac{1}{8} a_3^2 (\xi - \xi^2) \int d^2\theta \int \frac{d^3 p d^3 k}{(2\pi)^6} J k^2 A^{\beta}(-p, \theta) A_{\beta}(p, \theta), \\
(a') &= \frac{1}{4} a_3^2 \xi \int d^2\theta \int \frac{d^3 p d^3 k}{(2\pi)^6} J k^2 A^{\beta}(-p, \theta) A_{\beta}(p, \theta), \\
(b') &= \frac{1}{4} a_3^2 \xi \int d^2\theta \int \frac{d^3 p d^3 k}{(2\pi)^6} J k^2 A^{\beta}(-p, \theta) A_{\beta}(p, \theta), \\
(c') &= \frac{1}{8} a_3^2 \xi^2 \int d^2\theta \int \frac{d^3 p d^3 k}{(2\pi)^6} J k^2 A^{\beta}(-p, \theta) A_{\beta}(p, \theta),
\end{aligned} \tag{B.31}$$

em que

$$J = \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2 (p - k)^2}. \tag{B.32}$$

A contribuição do gráfico é dada por

$$\begin{aligned}
\Gamma &= (a) + (b) + (c) + (a') + (b') + (c') \\
&= \frac{9}{8} a_3^2 \xi \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2} A^\beta(-p, \theta) A_\beta(p, \theta).
\end{aligned} \tag{B.33}$$

Substituindo o valor do coeficiente proveniente do vértice,  $a_3 = \frac{2}{3}$  obtemos

$$\Gamma = \frac{\xi}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2} A^\beta(-p, \theta) A_\beta(p, \theta), \tag{B.34}$$

que é o resultado apresentado em (3.36).

## Publicações

1) E. A. Asano, L. C. T. de Brito, M. Gomes, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, *Consistent interactions of the 2+1 dimensional noncommutative Chern-Simons field*, Phys. Rev. D. **71**, 105005 (2005).

2) L. C. T. de Brito, M. Gomes, Silvana Perez, A. J. da Silva, *Radiative corrections to the Chern-Simons term at finite temperature in the noncommutative Chern-Simons-Higgs model*, J. Phys. A **37** :9989-10005, 2004.

# Bibliografia

- [1] V. W. Hughes, T. Kinoshita, *Anomalous  $g$  values of the electron and muon*, Rev. Mod. Phys. **71** (1999) S133.
- [2] Robert S. Van Dyck Jr., Paul B. Schwinberg, Hans G. Dehmelt *New high-precision comparison of electron and positron  $g$  factors*, Phys. Rev. Lett. **59**, (1987) 26.
- [3] G. 't Hooft, *Gauge theories of the forces between elementary particles*. Scientific American **242** 6,(1980) 104-138.  
S. F .Novaes, *Standard model: An introduction*, arXiv:hep-ph/0001283.  
From Nobel Lectures. Physics 1963-1970, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, (1972):  
J. Schwinger, *Relativistic Quantum Field Theory*;  
S. Tomonaga, *Development of Quantum Electrodynamics*;  
R. P. Feynman, *The Development of the Space-Time View of Quantum Electrodynamics*.  
From Nobel Lectures, Physics 1971-1980, Editor Stig Lundqvist, World Scientific Publishing Co., Singapore, (1992):  
S. Weinberg, *Conceptual Foundations of the Unified Theory of Weak and Electromagnetic Interactions*;  
A. Salam, *Gauge Unification of Fundamental Forces*;  
S. Glashow, *Towards a Unified Theory - Threads in a Tapestry*.  
From Nobel Lectures, Physics 1996-2000, Editor Gösta Ekspong, World Scientific Publishing Co., Singapore, (2002):  
M.J.G. Veltman, *From Weak Interactions to Gravitation*;  
G. 't Hooft, *A Confrontation with Infinity*.
- [4] P. Langacker, *Status and phenomenology of the standard model*, arXiv:hep-ph/0503068.  
G. Burdman, *At the Edge of Discovery: Physics Beyond the Standard Model*, Colóquio apresentado no Departamento de física-matemática do Instituto de Física da Universidade de São Paulo. Disponível em <http://fma.if.usp.br/burdman>.

- [5] S. Weinberg *The Quantum Theory of Fields: Supersymmetry*, Cambridge University Press, Vol. 3. New York, 2000.
- [6] M. Wohlgenannt, *Introduction to a non-commutative version of the standard model*, arXiv:hep-th/0302070.
- [7] I. Hinchliffe, N. Kersting and Y. L. Ma, *Review of the phenomenology of noncommutative geometry*, Int. J. Mod. Phys. A **19** (2004) 179.
- [8] S. Mandelstam, *Light Cone Superspace And The Ultraviolet Finiteness Of The  $N=4$  Model*, Nucl. Phys. B **213** (1983) 149.  
P. S. Howe, K. S. Stelle and P. K. Townsend, *Miraculous Ultraviolet Cancellations In Supersymmetry Made Manifest*, Nucl. Phys. B **236** (1984) 125.  
P. S. Howe, K. S. Stelle and P. C. West, *A Class Of Finite Four-Dimensional Supersymmetric Field Theories*, Phys. Lett. B **124** (1983) 55.  
L. Brink, O. Lindgren and B. E. W. Nilsson, *The Ultraviolet Finiteness Of The  $N=4$  Yang-Mills Theory*, Phys. Lett. B **123** (1983) 323.  
M. T. Grisaru and W. Siegel, *Supergraphity. 2. Manifestly Covariant Rules And Higher Loop Finiteness*, Nucl. Phys. B **201** (1982) 292 [Erratum-ibid. B **206** (1982) 496].
- [9] H. S. Snyder, *Quantized Space-Time*, Phys. Rev. **71** (1947) 38.
- [10] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, *Noncommutative perturbative dynamics*, JHEP **0002** (2000) 020.
- [11] A. F. Ferrari, H. O. Girotti, M. Gomes, A. Y. Petrov, A. A. Ribeiro and A. J. da Silva, *On the consistency of the three-dimensional noncommutative supersymmetric Yang-Mills theory*, Phys. Lett. B **601** (2004) 88.  
A. F. Ferrari, H. O. Girotti, M. Gomes, A. Y. Petrov, A. A. Ribeiro, V. O. Rivelles and A. J. da Silva, *Towards a consistent noncommutative supersymmetric Yang-Mills theory: Superfield covariant analysis*, Phys. Rev. D **70** (2004) 085012.  
E. A. Asano, H. O. Girotti, M. Gomes, A. Y. Petrov, A. G. Rodrigues and A. J. da Silva, *The coupling of fermions to the three-dimensional noncommutative  $CP(N-1)$  model: Minimal and supersymmetric extensions*, Phys. Rev. D **69** (2004) 105012.  
A. F. Ferrari, H. O. Girotti, M. Gomes, A. Y. Petrov, A. A. Ribeiro and A. J. da Silva, *On the finiteness of noncommutative supersymmetric  $QED(3)$  in the covariant superfield formulation*, Phys. Lett. B **577** (2003) 83.  
A. F. Ferrari, H. O. Girotti, M. Gomes, A. Y. Petrov, A. A. Ribeiro, V. O. Rivelles and A. J. da Silva, *Superfield covariant analysis of the divergence structure of noncommutative supersymmetric  $QED(4)$* , Phys. Rev. D **69** (2004) 025008.

- H. O. Girotti, M. Gomes, V. O. Rivelles and A. J. da Silva, *The noncommutative supersymmetric nonlinear sigma model*, Int. J. Mod. Phys. A **17** (2002) 1503.
- H. O. Girotti, M. Gomes, V. O. Rivelles and A. J. da Silva, *A consistent noncommutative field theory: The Wess-Zumino model*, Nucl. Phys. B **587** (2000) 299.
- [12] G. Dunne, *Aspects of Chern-Simons Theory*, Conferência apresentada na Les Houches Summer School em 1998 (hep-th/9902115).
- [13] A. Khare, *Fractional Statistics And Chern-Simons Field Theory in 2+1 Dimensions*, hep-th/9908027.
- [14] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity* (World Scientific, Singapore, 1990).
- [15] A. Lerda, *Anyons. Lectures Notes in Physics Vol. m14* (Springer, Berlin 1992)
- [16] Avinash Khare *Fortschr. Phys.* **38** (1990) 507
- [17] F. T. Brandt, Ashok Das, J. Frenkel, *Absence of Higher Order Corrections to the Non-Abelian Chern-Simons Coefficient*, Phys. Lett. B **494** (2000) 339. itemdas1 F. T. Brandt, Ashok Das, J. Frenkel, *Absence of Higher Order Corrections to the Non-Abelian Chern-Simons Coefficient*, Phys. Lett. B **494** (2000) 339.
- [18] S. Coleman and B. Hill, *No More Corrections to the Topological Mass Term in QED<sub>3</sub>*, Phys. Lett. B **159** (1985) 184.
- [19] L. C. T. de Brito, M. Gomes, Silvana Perez and A. J. da Silva, *Radiative Corrections to the Chern-Simons Term at Finite Temperature in the Noncommutative Chern-Simons-Higgs Model*, J. Phys. A **37**: 9989-10005, 2004.
- [20] E. A. Asano, L. C. T. Brito, M. Gomes, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, *Consistent interactions of the 2+1 dimensional noncommutative Chern-Simons field*, Phys. Rev. D. **71**, 105005 (2005).
- [21] M. Sheikh-Jabbari, *A Note on Noncommutative Chern-Simons Theories*, Phys. Lett B **510** (2001) 247.
- [22] G-H Chen and Y-S Wu, *On Gauge Invariance of Noncommutative Chern-Simons Theories*, Nucl. Phys. B **628** (2002) 473.
- [23] Dongsu Bak, Kimyeong Lee and Jeong-Hyuck Park, *Chern-Simons Theories on the Noncommutative Plane* Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 030402.
- [24] V. P. Nair and A. P. Polychronakos, *On Level Quantization for the Noncommutative Chern-Simons Theory*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 030403.
- [25] Guang-Honh Chen and Yong-Shi Wu, *One Loop Shift in Noncommutative Chern-Simons Coupling*, Nucl. Phys. B **593** (2001) 562.

- [26] Chong-Sun Chu, *Induced Chern-Simons and WZW Action in Noncommutative Space-Time*, Nucl. Phys. B **580** (2000) 352.
- [27] N. Grandi and G.A. Silva, *Chern-Simons Action in Noncommutative Space*, Phys. Lett. B **507** (2001) 345.
- [28] Ashok K. Das and M.M. Sheikh-Jabbari, *Absence of Higher Order Correction to Noncommutative Chern-Simons Coupling*, JHEP **0106** (2001) 028.
- [29] A. A. Bichl, J.M. Grimstrup, V. Putz and M. Schweda, *Perturbative Chern-Simons Theory on Noncommutative  $R^3$* , JHEP **0007** (2000) 046.
- [30] Chandrasekhar and Prasanta K. Panigrahi, *Finite Temperature Effects on the Induced Chern-Simons Term in Noncommutative Geometry*, JHEP **0303** (2003) 015.
- [31] S. Khlebnikov and M. Shaposhnikov, *Spontaneous Symmetry Breaking Versus Spontaneous Parity Violation*, Phys Lett B **254** (1991)
- [32] A. Khare, R. MacKenzie, M. Paranjape and P. Panigrahi, *Spontaneous Symmetry Breaking and the Renormalization of the Chern-Simons Term*, Phys. Lett. B **355** (1995) ; A. Khare, R. MacKenzie and M. Paranjape, *On the Coleman-Hill Theorem*, Phys. Lett. B **343** (1995) 239.
- [33] Hsien-Chung Kao, *Non Abelian Chern-Simons Coefficient in the Higgs Phase*, Phys. Rev. D **57** (1998) 7416.
- [34] Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, *The Quantum structure of space-time at the Planck scale and quantum fields*, Commun. Math. Phys. **172** (1995) 187
- [35] M. Gomes, *Remarks on noncommutative field theories*, Braz. J. Phys. **34** (2004) 1330.  
 H. O. Girotti, *Noncommutative quantum field theories*, arXiv:hep-th/0301237.  
 R. J. Szabo, *Magnetic backgrounds and noncommutative field theory*, Int. J. Mod. Phys. A **19** (2004) 1837.  
 R. J. Szabo, *Quantum field theory on noncommutative spaces*, Phys. Rept. **378** (2003) 207.  
 A. Micu *Noncommutative  $\phi^4$  Theory at TwoLoops, Dissertação apresentada ao ICTP High Energy Section, Agosto/2000, Trieste - Itália*
- [36] H. Weyl *Z. Physik* **46**, 1 1949.
- [37] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, *Noncommutative Perturbative Dynamics*, hep-th/9912072 (1999).
- [38] F. Ruiz Ruiz and P. van Nieuwenhuizen, *Lectures on supersymmetry and supergravity in (2+1)-dimensions and regularization of supersymmetric gauge theories*, Prepared for 2nd Mexican School on Gravitation and Mathematical Physics, Tlaxcala, Mexico, 1-7 Dec 1996.

- [39] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Rocek and W. Siegel, *Superspace, Or One Thousand And One Lessons In Supersymmetry*, Front. Phys. **58** (1983) 1 [arXiv:hep-th/0108200].
- [40] I. J. R. Aitchison, *Supersymmetry and the MSSM: An elementary introduction*, arXiv:hep-ph/0505105.
- [41] A. Yu. Petrov, *The three-dimensional superfield supersymmetry*, notas do curso ministrado no departamento de física-matemática do IFUSP.
- [42] L. Dolan and R. Jackiw, "Symmetry Behavior At Finite Temperature," Phys. Rev. D **9** (1974) 3320.
- [43] C. W. Bernard, "Feynman Rules For Gauge Theories At Finite Temperature," Phys. Rev. D **9** (1974) 3312.
- [44] G. Dunne, K. Lee and C. Lu, *The Finite Temperature Chern-Simons Coefficient*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 3434; A. Das and G. Dunne, *Finite Temperature Perturbation Theory and Large Gauge Invariance*, Phys. Rev. D **57** (1998) 5023.
- [45] I. Aitchison, C. Fosco and J. Zuk, *On the Temperature Dependence of the Induced Chern-Simons Term in (2+1) Dimensions*, Phys. Rev. D **48** (1993); I. Aitchison and C. Fosco, *Gauge Invariance and Effective Actions in D=3 at Finite Temperature*, Phys. Rev. D **57** (1998) 1171. 5895.
- [46] Y-C Kao and M-F Yang, *Radiatively Induced Chern-Simons Terms at Finite Temperature*, Phys. Rev. D **47** (1993) 730.
- [47] R. D. Pisarski and S. Rao, "Topologically Massive Chromodynamics In The Perturbative Regime", Phys. Rev. D **32** (1985) 2081.