

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Aspectos Perturbativos do Modelo CP^{N-1}
Não-Comutativo: Extensões Minimal e
Supersimétrica

Edson Akira Asano

SBI-IFUSP



Tese de doutorado apresentada ao
Instituto de Física da Universida-
de de São Paulo para a obtenção
do título de Doutor em Ciências.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Adilson José da Silva

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Adilson José da Silva (IFUSP)
Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (IFUSP)
Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles (IFUSP)
Prof. Dr. José Francisco Gomes (IFT-UNESP)
Prof. Dr. Clóvis José Wotzasek (UFRJ)



ex. 1

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

São Paulo
2004

del. 15/12/04

A 718a

D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Asano, Edson Akira

“Aspectos perturbativos do modelo ‘CP POT. N-1’
não-comutativo : extensões minimal e supersimétrica”.
São Paulo - 2005.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física - Departamento de Física
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adilson José da Silva
Área de Concentração: Física.

Unitermos

1. Teoria Quântica de Campo - Não Comutativa ;
2. Teoria de Campos - Renormalização ;
3. Teoria de Campos - Mistura IV-UV.

USP/IF/SBI-006/2005

À minha família.

Agradecimentos

Aos Professores Doutores Adilson José da Silva e Marcelo Otávio Caminha Gomes pela orientação e co-orientação respectivamente.

A Albert Yu. Petrov pela introdução e ajuda nas técnicas de Supercampos.

Aos casais Lucival e Lúcia, e, Hildeberto Nobre e Marcia Asano; pela acolhida durante os primeiros anos em São Paulo.

Ao casal Luiz C. T. de Brito e Angela D. Barra-Barrera, a Andrey G. Martins, a Leônidas L. de Melo, a Alexandre G. Rodrigues, a Karlúcio H. C. Castello Branco, a Ruy Guilherme Castro de Almeida, a Zulmara V. Carvalho, a Alex G. Dias, a Ivens M. Carneiro, a Tiana Carneiro, a Marcos Anacleto, a Fábio Cabral Carvalho, a Marcelo O. da C. Pires, a Cristiane M. L. de Aragão, a Leonardo Sioufi, e demais colegas do Departamento de Física-Matemática; pelo convívio, amizade e companheirismo durante o período da pós-graduação.

Às Secretárias do Departamento de Física Matemática.

Ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

À Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo.

Abstract

In this work, we shall discuss some aspects of noncommutative quantum field theories; renormalization, ultraviolet-infrared mixing and perturbative consistency. Such topics have been developed through the analysis of noncommutative versions of quantum field theory models, in particular, we study the CP^{N-1} model and its extensions; minimal and supersymmetric.

Resumo

Neste trabalho, discutimos alguns aspectos das teorias quânticas de campos não-comutativas; renormalização, mistura infravermelha-ultravioleta, e consistência perturbativa. Tais aspectos são tratados através da análise das versões não-comutativas dos modelos de teorias quânticas de campos; em especial estudamos o modelo CP^{N-1} não-comutativo e suas respectivas extensões; minimal e supersimétrica.

If you would be a real seeker after truth, it is necessary that at least once in your life you doubt, as far as possible, all things.

René Descartes (1596-1650)

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Teoria Quântica de Campos Não-Comutativa	6
2.1	A Correspondência Weyl-Wigner	7
2.2	O Produto Moyal-Groenewold	8
2.3	Teoria de Perturbação e Regras de Feynman	11
2.4	A Mistura IV-UV	14
2.5	Singularidade Infravermelha Integrável	18
3	O Modelo CP^{N-1} Não-Comutativo em Três Dimensões com Acoplamento Minimal de Férmions	21
3.1	A Lagrangiana do Modelo e Regras de Feynman	23
3.2	As Funções de 1-Ponto	26
3.3	As Funções de Vértice de Dois-Pontos	28
3.3.1	Função de Vértice de Dois-Pontos do Campo de Calibre	28
3.3.2	Função de Vértice de Dois-Pontos do Campo Auxiliar λ	32
3.3.3	Função de Vértice de Dois-Pontos Mista $\langle TA_\mu \lambda \rangle$	34
3.4	Os Propagadores Efetivos	36
3.5	A Auto-Energia do Campo de Matéria φ_a	38
4	O Modelo CP^{N-1} Supersimétrico Não-Comutativo em Três Dimensões	42
4.1	A Supersimetria em Três Dimensões	43
4.1.1	Notações e Convenções	43
4.1.2	Supersimetria e Supercampos	45
4.1.3	A Teoria de Perturbação e Supergráficos	47
4.2	A TQC-NC Supersimétrica	52

4.3	O Modelo CP^{N-1} Supersimétrico Não-Comutativo	54
4.3.1	Propagadores Livres e Regras de Feynman	56
4.4	Os Propagadores Efetivos	57
4.4.1	Função de Vértice de Dois-Pontos e Propagador Efetivo do Supercampo Auxiliar Σ	57
4.4.2	Função de Vértice de Dois-Pontos do Supercampo Espinorial A_α	59
4.4.3	O Propagador Efetivo do Supercampo Espinorial A_α	68
4.5	A Auto-Energia do Supercampo de Matéria ϕ	70
5	Análise das Divergências do Modelo Supersimétrico	77
6	Conclusão	83
A	Algumas relações úteis	85
B	Tabela de integrais d-dimensionais no espaço de Minkowski	87
C	Integrais da TQC-NC	89

Capítulo 1

Introdução

A construção da Teoria Quântica de Campos Não-Comutativa (TQC-NC) é baseada na proposta de que a descrição usual do espaço-tempo, feita em termos de um conjunto de pontos localmente representados por um número finito de coordenadas (Espaços de Minkowski M e Euclidiano \mathbf{R}^4 , eventualmente \mathbf{R}^d para uma dimensão arbitrária d), pode ser substituída por algum tipo de *espaço não-comutativo*. Um exemplo simples de espaço não-comutativo é dado pelo conjunto de “coordenadas” que satisfazem a regra

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij} \quad , \quad (1.1)$$

onde θ^{ij} com índices $i, j = 0, \dots, d - 1$, é uma matriz d -dimensional antissimétrica, real e constante.

A existência de espaços não-comutativos não se constitui em novidade para a Física. Na formulação da mecânica quântica, Heisenberg considera a quantização do espaço de fase através da substituição de suas variáveis dinâmicas de posição q_i e momento p_j por operadores de posição \hat{q}_i e momento \hat{p}_j que satisfazem a regra

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad . \quad (1.2)$$

Uma primeira proposta de espaço não-comutativo com não-comutatividade nas coordenadas, que está associada aos nomes de Heisenberg e Peierls, surgiu como tentativa de

resolver o problema das *divergências ultravioletas* da Teoria Quântica de Campos (TQC) [1]. No entanto, essa proposta não foi levada adiante devido ao grande sucesso da teoria de renormalização de Schwinger, Feynman e Tomonaga.

Por outro lado, de acordo com observações de De Witt [2], a proposta de uma teoria quântica que incorpore a gravitação deverá em princípio produzir alterações na geometria para distâncias da ordem do comprimento de Planck (10^{-33} cm). Uma possibilidade interessante é pensar que essas alterações possam ser modeladas assumindo uma não-comutatividade entre as “coordenadas” do espaço-tempo, conforme a equação (1.1).

Recentemente, dentro do contexto da busca por uma teoria fundamental (descrição unificada da física), em que a teoria de cordas é defendida como a principal candidata¹, o interesse no estudo da TQC-NC se renovou devido à observação de que uma teoria de campo de calibre não-comutativa surge como limite da teoria de cordas [4].

À parte o desenvolvimento da TQC-NC no contexto da teoria de cordas, a investigação de TQC-NC adquiriu um *status* independente, de modo que muito trabalho foi direcionado no sentido de verificar se propriedades antes restritas às teorias quânticas de campos usuais podem ser estendidas para TQC-NC. Desta forma, observou-se que do ponto de vista da teoria de perturbação, a unitariedade é violada quando assumimos a não-comutatividade entre coordenadas espaciais e temporais decorrente da equação (1.1). No entanto, a *unitariedade perturbativa* é mantida supondo apenas a não-comutatividade entre coordenadas espaciais², em que fazemos $\theta^{0i} = 0$ (i indica apenas os índices das coordenadas espaciais) [5].

Estudos perturbativos indicam que, em geral, para um dado modelo de TQC-NC, as contribuições dos diagramas de Feynman provêm de dois conjuntos de gráficos, ditos planares e não-planares. Em [6], Filk observou que os gráficos planares da TQC-NC, a menos de um fator numérico, são os mesmos gráficos da teoria quântica de campos usual, de modo que as *divergências ultravioletas* da TQC continuam presentes na TQC-NC. Essa observação levou a concluir que, em geral, modelos de TQC-NC, igualmente aos modelos de TQC, continuam necessitando de renormalização.

Por outro lado, contribuições de gráficos não-planares são responsáveis pelo entrelaçamento entre as regiões de altos momentos (*ultravioleta*), e de baixos momentos (*infra-*

¹Para uma discussão geral da busca por uma teoria fundamental, consulte a referência [3].

²Nesta monografia, problemas com violação de unitariedade serão evitados assumindo que o “tempo” comuta com todas as “coordenadas espaciais”.

vermelha). Este vínculo entre as escalas de momento denominado mistura infravermelha-ultravioleta (mistura IV-UV), se apresenta como uma das principais características da TQC-NC. Assim, ao comportamento ultravioleta divergente vem associado um comportamento infravermelho divergente. Desta forma, *divergências infravermelhas* devidas à mistura IV-UV podem ou não implicar em divergências infravermelhas danosas³ (*singularidades infravermelhas não-integráveis*).

A presença de singularidades infravermelhas não-integráveis na TQC-NC se apresentou como o principal problema para o tratamento perturbativo dessas teorias. De fato, foi obtido que a mistura IV-UV induz singularidades infravermelhas não-integráveis que invalidam a série perturbativa para modelos de TQC-NC [7]. Assim, do ponto de vista da teoria de perturbação a TQC-NC apresenta, em adição ao problema de renormalização herdado da teoria comutativa, o problema devido à mistura IV-UV.

A busca de soluções para os problemas da teoria de perturbação em TQC-NC, estabelece a motivação para estudar a questão da renormalização e consistência perturbativa (*ausência de singularidades infravermelhas não-integráveis*) da TQC-NC.

Uma sugestão que se revelou bastante útil no sentido de obtermos uma TQC-NC renormalizável e sem singularidades infravermelhas não-integráveis, dado que laços (em inglês: loops) fermiônicos parecem com sinal contrário dos laços bosônicos melhorando o comportamento ultravioleta, foi considerar o acoplamento de férmions aos modelos com campos escalares. De fato, o cancelamento das singularidades infravermelhas não-integráveis foi verificado para teorias não-comutativas supersimétricas sem campos de calibre [8], [9], [10].

As investigações sobre a renormalização e consistência perturbativa de teorias não-comutativas (supersimétricas e não-supersimétricas) com campos de calibre receberam atenção especial em [11], [12]. Porém, dado o comportamento peculiar de teorias não-comutativas, nesta monografia consideramos investigar a versão não-comutativa de um modelo mais simples (“sem campos de calibre”), a saber: o modelo CP^{N-1} comutativo.

O modelo CP^{N-1} comutativo contém campos escalares que quando admitidos respeitarem a simetria de calibre local implicam na introdução de um campo de calibre que classicamente não tem dinâmica, este aspecto simplificador se apresenta como motivação para investigar propriedades gerais de teorias de calibre não-comutativas.

³divergências infravermelhas logarítmicas não implicam em singularidades infravermelhas não-integráveis

Assim, da mesma forma que no caso comutativo, em que o modelo CP^{N-1} é proposto como um laboratório teórico que serve à simulação de propriedades (*instantons, liberdade assintótica e confinamento*) de teorias fundamentais (*teorias de calibre não-abelianas em quatro dimensões*) [13], [14], no caso não-comutativo também há essa mesma motivação. Outra motivação, reside nas aplicações para sistemas da matéria condensada como as consideradas em [15]. Tratando agora de suas extensões não-comutativas.

Nesta monografia, discutimos os resultados do nosso trabalho [16] em que abordamos os aspectos perturbativos, tratando da renormalização e mistura IV-UV, no modelo CP^{N-1} não-comutativo. Em um trabalho anterior [17], obtivemos que quando o campo de matéria φ transforma-se pela representação fundamental do grupo de calibre, o modelo CP^{N-1} não-comutativo em três dimensões é renormalizável no ultravioleta e não apresenta a mistura IV-UV; sendo um exemplo de TQC-NC consistente. Porém, quando o campo de matéria φ transforma-se pela representação adjunta do grupo de calibre, temos a presença de divergências infravermelhas que implicam nas singularidades infravermelhas não-integráveis. Assim, seguindo a idéia de acoplar férmions para resolver o problema provocado pela mistura IV-UV, investigamos, na representação adjunta, a possibilidade de acoplar férmions de maneira minimal e supersimétrica ao modelo CP^{N-1} não-comutativo em três dimensões.

No caso do acoplamento minimal, a contribuição do termo de Chern-Simons, induzido pelo laço fermiônico [18], para a função de vértice de dois pontos do campo de calibre acarreta um melhor comportamento infravermelho do potencial de calibre. No entanto, no cálculo das correções radiativas para a auto-energia do campo escalar φ , as singularidades infravermelhas ainda persistem, invalidando a expansão $1/N$ para ordens superiores.

Assim, o interesse na solução do problema da validação da série perturbativa da expansão $1/N$, levou-nos a estudar o acoplamento supersimétrico de férmions ao modelo CP^{N-1} não-comutativo em três dimensões.

Uma descrição de modelos de TQC com supersimetria manifesta é feita usando-se o formalismo de supercampos [19]. Dentro dessa abordagem, foi possível mostrar a ausência de singularidades infravermelhas não-integráveis até a ordem de $1/N$.

A abordagem sobre os aspectos não-perturbativos da TQC-NC também tem sido objeto de muita investigação, sobretudo a análise de soluções tipo *instantons* em teorias de calibre não-comutativas [20]. aspectos não-perturbativos do modelo CP^{N-1} não-comutativo foram tratados em [21].

Esta monografia obedecerá à seguinte ordem de apresentação: no capítulo 2, discutimos a formulação geral de uma TQC-NC; no capítulo 3, discutimos a proposta de incorporação de férmions de maneira minimal como tentativa de eliminar as singularidades infravermelhas não-integráveis; no capítulo 4, discutimos a incorporação de férmions de maneira supersimétrica utilizando a formalismo de supercampos; no capítulo 5 é apresentado um argumento geral para a ausência das singularidades infravermelhas não-integráveis para todas as funções de Green até a ordem de $1/N$. Uma discussão dos principais resultados é apresentada no capítulo destinado à conclusão.

Capítulo 2

Teoria Quântica de Campos Não-Comutativa

Neste capítulo apresentamos uma introdução à TQC-NC. Entre os assuntos tratados estão: a definição de espaço-tempo não-comutativo, a correspondência Weyl-Wigner, o produto Moyal-Groenewold, a teoria de perturbação para a TQC-NC e as regras de Feynman. Finalmente, fazemos uma breve revisão do problema da mistura IV-UV que pode invalidar a expansão perturbativa na TQC-NC. A abordagem dos principais aspectos da TQC-NC, considerando o ponto de vista perturbativo, está bem colocada nos artigos de revisão de H. Girotti e M. Gomes [22]. Uma discussão bastante ilustrativa das propriedades e resultados gerais da TQC-NC pode ser encontrada nos artigos de revisão [23].

O ponto de partida a ser adotado é considerar a definição de espaço-tempo não-comutativo como um espaço onde as coordenadas são promovidas a operadores que satisfazem a seguinte regra:

$$[\hat{q}^\mu, \hat{q}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu} \quad , \quad (2.1)$$

onde $\Theta^{\mu\nu}$ é uma matriz real e antissimétrica, e $\mu = 0, \dots, d - 1$.

2.1 A Correspondência Weyl-Wigner

Nesta seção desenvolvemos a construção de Weyl-Wigner [24], a qual permite estabelecer a correspondência entre operadores sobre o espaço-tempo não-comutativo e funções sobre o espaço-tempo usual.

Assim, definimos o operador T sobre o espaço-tempo não-comutativo,

$$T(k, \hat{q}) = e^{ik_\mu \hat{q}^\mu} \quad . \quad (2.2)$$

Em particular para $k = 0$ temos

$$T(0, \hat{q}) = \hat{1} \quad .$$

O operador T satisfaz as seguintes propriedades:

(a)

$$T^\dagger(k, \hat{q}) = T(-k, \hat{q}) \quad ,$$

quando os operadores \hat{q} são hermitianos, $\hat{q}^\dagger = \hat{q}$.

(b)

$$T(k, \hat{q})T(k', \hat{q}) = T(k + k', \hat{q})e^{-\frac{i}{2}k_\mu k'_\nu \Theta^{\mu\nu}} \quad ,$$

a qual deriva da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$.

(c)

$$\text{Tr}T(k, \hat{q}) = (2\pi)^d \prod_{\mu=0}^{d-1} \delta(k_\mu) \quad .$$

De posse do operador T , para cada função φ do espaço-tempo usual, podemos associar o operador do espaço-tempo não-comutativo

$$\Phi[\varphi](\hat{q}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} T(k, \hat{q}) \tilde{\varphi}(k) \quad , \quad (2.3)$$

onde

$$\tilde{\varphi}(k) = \int d^d x e^{ikx} \varphi(x) \quad . \quad (2.4)$$

A operação inversa¹ também está bem definida segundo

$$\varphi[\Phi](x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx} \text{Tr}[\Phi T^\dagger(k, \hat{q})] \quad . \quad (2.5)$$

Assim, a correspondência um-para-um entre funções do espaço-tempo usual e operadores do espaço-tempo não-comutativo fica estabelecida. Essa correspondência foi denominada Weyl-Wigner.

2.2 O Produto Moyal-Groenewold

Nesta seção usamos a correspondência Weyl-Wigner (seção 2.1) para associarmos ao produto de dois operadores sobre o espaço-tempo não-comutativo o produto Moyal-Groenewold entre funções φ_1 e φ_2 sobre o espaço-tempo usual; a saber

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx} \text{Tr}[\Phi_1 \Phi_2 T^\dagger] \quad . \quad (2.6)$$

Em geral temos

$$(\varphi_1 * \varphi_2 * \dots * \varphi_n)(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx} \text{Tr}[\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n T^\dagger] \quad . \quad (2.7)$$

¹A função φ , obtida desta maneira a partir do operador Φ foi denominada função de distribuição de Wigner[25]

Portanto, com o uso das propriedades do operador T (seção 2.1) e da equação (2.3), temos que

$$\begin{aligned} (\varphi_1 * \varphi_2)(x) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \tilde{\varphi}_1(k_1) \tilde{\varphi}_2(k_2) \text{Tr}[T(k_1)T(k_2)T^\dagger(k)] \\ &= \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} e^{-i(k_1+k_2)x} \tilde{\varphi}_1(k_1) \tilde{\varphi}_2(k_2) e^{-ik_1 \wedge k_2} \quad , \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde

$$k_1 \wedge k_2 = 1/2 k_1^\mu \Theta_{\mu\nu} k_2^\nu \quad . \quad (2.9)$$

No espaço de posições a equação (2.8) pode ser escrita como

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(x) = \lim_{y \rightarrow x} \exp\left(\frac{i}{2} \Theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \varphi_1(y) \varphi_2(x) \quad , \quad (2.10)$$

a qual define o produto Moyal-Groenewold [26].

Assim, o produto de operadores do espaço-tempo não-comutativo está associado, via correspondência Weyl-Wigner, ao produto Moyal-Groenewold entre funções do espaço-tempo usual. Desta forma fica estabelecida a correspondência entre o conjunto de operadores e o conjunto de funções com produto dado pelo produto Moyal-Groenewold.

Podemos concluir, a partir da equação (2.10), que a presença de um número infinito de derivadas na expansão da exponencial implica no caráter não-local para o produto entre funções.

Usando a definição (2.3) e as propriedades do operador T (seção 2.1) podemos demonstrar as seguintes propriedades:

$$(1) \int d^d x (\varphi_1 * \varphi_2 * \dots * \varphi_n)(x) = \text{Tr}[\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n] \quad ,$$

invariância do produto Moyal-Groenewold com relação às permutações cíclicas.

$$(2) \int d^d x (\varphi_1 * \varphi_2)(x) = \int d^d x \varphi_1(x) \varphi_2(x) \quad ,$$

o produto Moyal-Groenewold entre duas funções sobre o espaço-tempo usual, é igual ao produto puntual entre duas funções sobre o espaço-tempo usual, desde que estejam integradas.

Neste ponto, demonstramos um resultado que será útil do ponto de vista dos cálculos perturbativos.

Seja a propriedade (1) e usando a definição (2.3) do operador Φ temos

$$\begin{aligned} \int d^d x (\varphi_1 * \varphi_2 * \dots * \varphi_n)(x) &= \text{Tr}[\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n] \\ &= \int \prod_{l=1}^n \frac{d^d k_l}{(2\pi)^d} \text{Tr}[T(k_1)T(k_2)\dots T(k_n)] \\ &\quad \times \tilde{\varphi}_1(k_1)\tilde{\varphi}_2(k_2)\dots\tilde{\varphi}_n(k_n) \quad . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Através das propriedades (b) e (c) para os operadores T , podemos calcular o traço sobre os operadores T . Tal que

$$\text{Tr}[T(k_1)T(k_2)\dots T(k_n)] = (2\pi)^d \delta(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \prod_{i<j}^n e^{-ik_i \wedge k_j} \quad . \quad (2.12)$$

Substituindo (2.12) em (2.11) temos

$$\int d^d x (\varphi_1 * \varphi_2 * \dots * \varphi_n)(x) = \int \prod_{l=1}^n d^d x_l V(x_1, x_2, \dots, x_n) \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\dots\varphi_n(x_n) \quad , \quad (2.13)$$

onde

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int \prod_{i=1}^n \frac{d^d k_i}{(2\pi)^d} e^{ik_i x_i} (2\pi)^d \delta(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \prod_{i<j}^n e^{-ik_i \wedge k_j} \quad .$$

Alternativamente temos

$$\int d^d x (\varphi_1 * \varphi_2 * \dots * \varphi_n)(x) = \int \prod_{l=1}^n \frac{d^d k_l}{(2\pi)^d} \tilde{V}(k_1, k_2, \dots, k_n) \tilde{\varphi}_1(k_1)\tilde{\varphi}_2(k_2)\dots\tilde{\varphi}_n(k_n) \quad , \quad (2.14)$$

onde

$$\tilde{V}(k_1, k_2, \dots, k_n) = (2\pi)^d \delta(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \prod_{i < j}^n e^{-ik_i \wedge k_j} . \quad (2.15)$$

2.3 Teoria de Perturbação e Regras de Feynman

Nesta seção, introduzimos o ponto de vista que será adotado nesta monografia, de acordo com o qual, a teoria de perturbação para a TQC-NC, como no caso da teoria quântica de campo usual, será entendida como uma expansão em termos dos diagramas de Feynman. Portanto, teremos que obter os elementos básicos da teoria de perturbação, a saber: propagadores e vértices de interação (regras de Feynman).

Tendo em vista os resultados das seções anteriores (2.1 e 2.2), a ação proposta para a teoria quântica de campo não-comutativa vem dada por

$$S[\varphi_A] = \int d^d x \mathcal{L}(\varphi_A, \partial_\mu \varphi_A) , \quad (2.16)$$

com a observação de que o produto usual entre funções na lagrangiana \mathcal{L} , é substituído pelo produto Moyal-Groenewold entre funções. O índice A indica que S ou \mathcal{L} pode envolver quaisquer campos (escalares, espinoriais ou vetoriais).

A lagrangiana \mathcal{L} pode ser separada em duas partes conforme,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_Q + \mathcal{L}_I , \quad (2.17)$$

onde \mathcal{L}_Q contém os termos quadráticos nos campos, enquanto \mathcal{L}_I , denominada lagrangiana de interação, contém os termos com número de campos maior ou igual a três.

Portanto, pela propriedade 2 da seção 2.2, em que termos quadráticos nos campos quando integrados não são afetados pelo produto Moyal-Groenewold, resulta que o propagador livre da teoria quântica de campos não-comutativa coincide com o propagador livre da teoria quântica de campos usual.

A partir da lagrangiana de interação \mathcal{L}_I podemos obter as regras de Feynman para os vértices de interação.

A seguir mostramos que devido a presença de derivadas no produto Moyal-Groenewold, ao calcularmos as regras de Feynman para os vértices de interação, surgem em adição às regras de Feynman das teorias de campos usuais, fatores de fase dependentes do momento.

As regras de Feynman para os vértices de interação serão obtidas, obedecendo a seguinte prescrição:

Seja a lagrangiana de interação:

$$\mathcal{L}_I = g\varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3 \quad . \quad (2.18)$$

Calcule a contribuição de ordem mais baixa (sem laços) do seguinte objeto, a saber função de Green de 3 pontos;

$$G^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = ig \langle 0 | T \{ \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \varphi_3(x_3) \int d^d y (\varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3)(y) \} | 0 \rangle \quad . \quad (2.19)$$

Como mostramos na seção anterior, analogamente ao caso do produto Moyal-Groenewold para n campos integrados, para 3 campos integrados temos

$$\int d^d y (\varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3)(y) = \int \prod_{l=1}^3 d^d y_l V(y_1, y_2, y_3) \varphi_1(y_1) \varphi_2(y_2) \varphi_3(y_3) \quad , \quad (2.20)$$

onde

$$V(y_1, y_2, y_3) = \int \prod_{l=1}^3 \frac{d^d k_l}{(2\pi)^d} e^{ik_l y_l} (2\pi)^d \delta(k_1 + k_2 + k_3) \exp[-i(k_1 \wedge k_2 + k_2 \wedge k_3 + k_1 \wedge k_3)] \quad .$$

Substituindo (2.20) em (2.19), resulta em

$$G^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = ig \int \prod_{l=1}^3 d^d y_l V(y_1, y_2, y_3) \langle 0 | T \{ \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \varphi_3(x_3) \varphi_1(y_1) \varphi_2(y_2) \varphi_3(y_3) \} | 0 \rangle \quad . \quad (2.21)$$

Pelo teorema de Wick, fazemos as contrações entre os campos, resultando em

$$G^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = ig \int \prod_{l=1}^3 d^d y_l V(y_1, y_2, y_3) \Delta_1(x_1 - y_1) \Delta_2(x_2 - y_2) \Delta_3(x_3 - y_3) \quad , \quad (2.22)$$

onde

$$\Delta_l(x_l - y_l) = \langle 0|T\{\varphi_l(x_l)\varphi_l(y_l)\}|0\rangle = \int \frac{d^d p_l}{(2\pi)^d} \tilde{G}(p_l) \exp[-ip_l(x_l - y_l)] \quad , \quad (2.23)$$

para $l = 1, 2, 3$.

Substituindo V e Δ_l na equação (2.22), obtemos

$$G^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = ig \int \prod_{l=1}^3 \frac{d^d p_l}{(2\pi)^d} e^{-ip_l x_l} \tilde{G}^{(3)}(p_1, p_2, p_3) \quad , \quad (2.24)$$

onde

$$\tilde{G}^{(3)}(p_1, p_2, p_3) = (2\pi)^d \delta(p_1 + p_2 + p_3) \prod_{l < m}^3 e^{-ip_l \wedge p_m} \tilde{G}(p_1) \tilde{G}(p_2) \tilde{G}(p_3) \quad .$$

Finalmente, tomando-se a delta de conservação de momento na equação (2.24) e posteriormente amputando as funções de dois-pontos \tilde{G} , ou seja multiplicando por sua inversa \tilde{G}^{-1} , temos

$$ig(2\pi)^d \delta(p_1 + p_2 + p_3) \exp[-i(p_1 \wedge p_2)] \quad , \quad (2.25)$$

que é a expressão no espaço de momentos, para o vértice de interação da lagrangiana $\mathcal{L}_I = g\varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3$.

2.4 A Mistura IV-UV

Nesta seção, ilustramos através de um exemplo a origem da mistura IV-UV, a qual implica nas *divergências infravermelhas* que podem invalidar a expansão perturbativa da TQC-NC.

Consideramos a lagrangiana do modelo² φ^4 :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi * \partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi * \varphi + V(\varphi) \quad , \quad (2.26)$$

onde

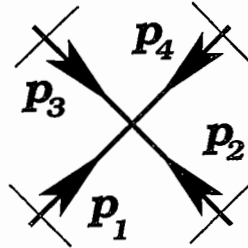
$$V(\varphi) = -\frac{g}{4!}\varphi * \varphi * \varphi * \varphi \quad . \quad (2.27)$$

As regras de Feynman³ desse modelo são:

(a) propagador:

$$\Delta_\varphi(p) = -\frac{i}{p^2 + m^2} \quad , \quad (2.28)$$

(b) vértice:



$$-\frac{ig}{3}(2\pi)^4\delta(4)(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \left[\cos(p_1 \wedge p_2 + p_1 \wedge p_3 + p_2 \wedge p_3) + \cos(p_1 \wedge p_2 + p_1 \wedge p_3 - p_2 \wedge p_3) + \cos(p_1 \wedge p_2 - p_1 \wedge p_3 - p_2 \wedge p_3) \right] \quad . \quad (2.29)$$

²Os cálculos desta monografia foram feitos adotando-se a métrica $(-, +, +)$ de modo que neste exemplo por uniformidade adotamos a mesma convenção para a métrica.

³As regras de Feynman desse modelo são obtidas de acordo com a prescrição delineada na seção 2.3.

A correção perturbativa⁴ para a função de vértice de dois-pontos do campo escalar φ é dada pelo diagrama:

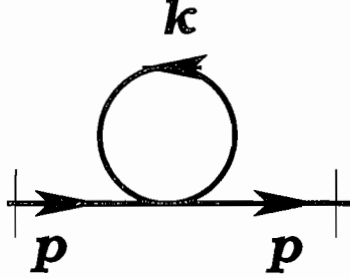


Figura 2.1: Auto-energia do campo escalar φ .

A expressão analítica para esse diagrama é dada por

$$\Sigma(p) = -\frac{g}{6} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2 + \cos(2k \wedge p)}{k^2 + m^2} , \quad (2.30)$$

onde os momentos foram escolhidos de acordo com a Figura (2.1): $p_3 = -p_4 = k$ e $p_1 = -p_2 = p$.

A correção de auto-energia do campo escalar φ apresenta duas contribuições na teoria não-comutativa. Uma contribuição com ausência do fator trigonométrico, denominada planar; e, outra contribuição com o fator trigonométrico presente, denominada não-planar.

Na realidade, a contribuição não-planar (NP) dada por

$$\Sigma_{NP}(p) = -\frac{g}{6} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\cos(2k \wedge p)}{k^2 + m^2} , \quad (2.31)$$

é responsável pela mistura IV-UV.

Como podemos observar, caso tomemos o limite $p \rightarrow 0$ no integrando da equação (2.31) obtemos uma divergência ultravioleta quadrática associada aos modos de altos momentos, conforme a integral

$$\Sigma_{NP}(\lim_{p \rightarrow 0} p) = -\frac{g}{6} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} . \quad (2.32)$$

⁴Essa correção perturbativa é denominada Auto-Energia do campo escalar e denotamo-la por Σ .

Por outro lado, calculando-se a integral (2.31) temos

$$\Sigma_{NP}(p) \propto \frac{1}{\tilde{p}^2} = \frac{1}{\Theta^2 p^2} \quad , \quad (2.33)$$

onde $\tilde{p}^2 = \tilde{p}^\mu \tilde{p}_\mu = -p_\mu (\Theta^2)^{\mu\nu} p_\nu$.

Neste caso, quando tomamos o limite $p \rightarrow 0$ a divergência surge como um polo quadrático devido a região de baixos momentos; isto é, temos uma *divergência infravermelha quadrática*. Esse comportamento vinculado (a uma *divergência ultravioleta quadrática* temos associada uma *divergência infravermelha quadrática*) que se manifesta dependendo de como o limite $p \rightarrow 0$ seja tomado, $\Sigma_{NP}(\lim_{p \rightarrow 0} p) \neq \lim_{p \rightarrow 0} \Sigma_{NP}(p)$, ilustra a principal característica da TQC-NC denominada mistura IV-UV.

Para vermos como a divergência infravermelha quadrática invalida a expansão perturbativa, observe que ao tomarmos um número n de inserções arbitrárias do diagrama (2.1) no diagrama de ordem superior⁵

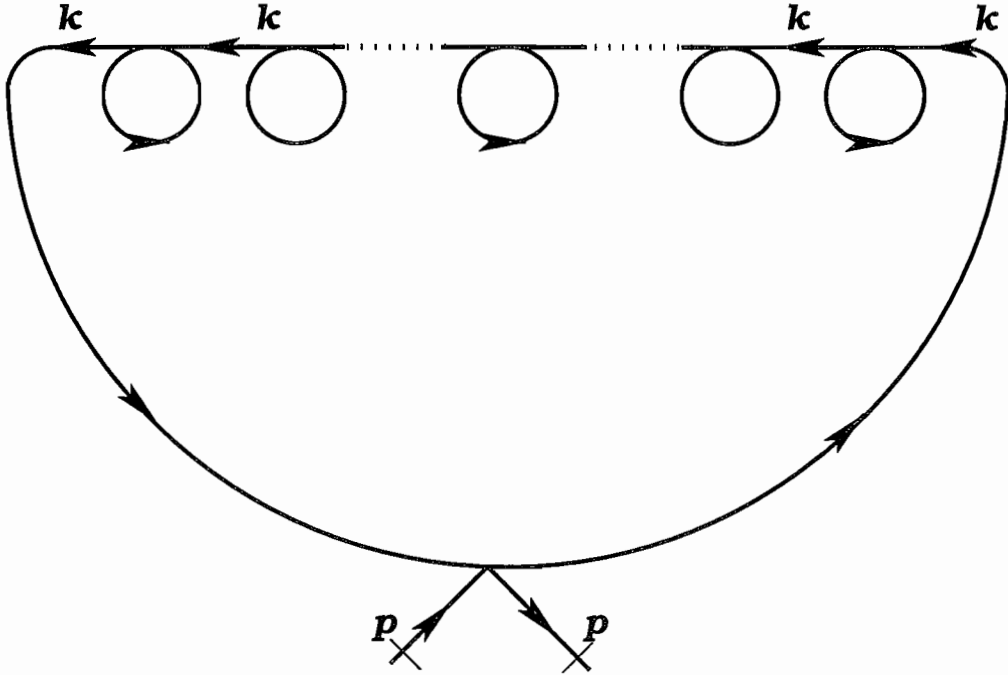


Figura 2.2: Inserção de Σ em um diagrama de ordem superior.

⁵Por simplicidade consideramos apenas a parte não-planar de Σ .

temos

$$\Sigma \propto \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Theta^{2n} k^{2n}} \left(-\frac{i}{k^2 + m^2} \right)^n F(k, p) \quad . \quad (2.34)$$

onde $F(k, p) = -\frac{ig}{3}[2 + \cos(2k \wedge p)]$ é o fator que carrega o efeito da não-comutatividade.

Note que, para a região $k \rightarrow 0$ temos: $F(k, p) \rightarrow ig$ e o propagador tende a

$$-\frac{i}{m^2} \quad . \quad (2.35)$$

Dessa forma, observamos que o comportamento fortemente singular para $k \rightarrow 0$ quanto maior o número n de inserções, destroi a expansão perturbativa para uma ordem n arbitrária. Assim, a divergência infravermelha quadrática é denominada *singularidade infravermelha não-integrável*, dado o pior comportamento na região infravermelha do integrando da equação (2.34) quanto maior o número n de inserções. Mais explicitamente, após a integração nas variáveis angulares, temos

$$\Sigma \propto \int_0^\infty \frac{|k|^3 d|k|}{|\Theta|^{2n} |k|^{2n}} = \int_0^\infty \frac{d|k|}{|\Theta|^{2n} |k|^{2n-3}} \quad . \quad (2.36)$$

Portanto

$$\Sigma \propto \frac{1}{|\Theta|^{2n}} \frac{|k|^{4-2n}}{4-2n} \Big|_0^\infty \quad . \quad (2.37)$$

Observe que para um número de inserções $n > 2$ o valor de Σ diverge para valores do momento que se aproximam de zero, $k \rightarrow 0$, o que inviabiliza a definição da expansão perturbativa para ordens superiores.

2.5 Singularidade Infravermelha Integrável

Nesta seção, através de um exemplo, vamos considerar a possibilidade em que a mistura IV-UV leva a uma divergência infravermelha que não implica em singularidade não-integrável.

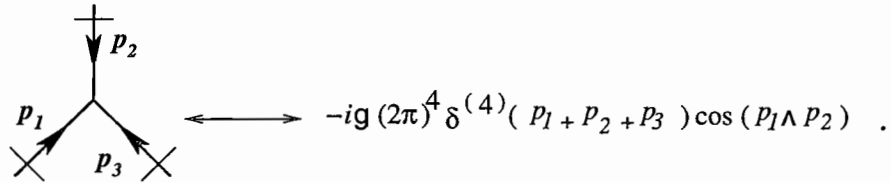
O exemplo que consideramos toma a parte cinética do modelo com campo escalar real da seção anterior, e para a parte de interação o potencial

$$V(\varphi) = -\frac{g}{3!} \varphi * \varphi * \varphi \quad . \quad (2.38)$$

O propagador livre é dado por

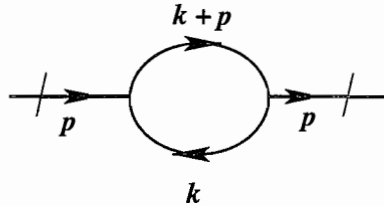
$$\Delta_\varphi(p) = -\frac{i}{p^2 + m^2} \quad , \quad (2.39)$$

enquanto o vértice de interação vem dado por



$$\longleftrightarrow -ig (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3) \cos(p_1 \wedge p_2) \quad .$$

De posse dessas regras vamos considerar a correção perturbativa para a função de vértice de dois-pontos



cuja expressão analítica fornece

$$\Sigma(p) = g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\cos^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \quad . \quad (2.40)$$

Assim, usando a fórmula de integração paramétrica de Feynman

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[Ax + B(1-x)]^2} \quad , \quad (2.41)$$

e fazendo o deslocamento $k \rightarrow k - px$, obtemos

$$\Sigma(p) = g^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\cos^2(k \wedge p)}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2]^2} \quad . \quad (2.42)$$

A parte não-planar de (2.42) resulta em

$$\Sigma_{NP}(p) = \frac{g^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\cos(2k \wedge p)}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2]^2} \quad , \quad (2.43)$$

que fornece um resultado proporcional a

$$\log(|M| \sqrt{\tilde{p}^2}) \quad , \quad (2.44)$$

em que $|M| = \sqrt{m^2 + p^2 x(1-x)}$.

Portanto, temos uma divergência infravermelha ($p \rightarrow 0$) devido à mistura IV-UV. No entanto, essa divergência infravermelha logarítmica não é considerada como não-integrável, dado que ao construirmos um diagrama de ordem superior através de um número arbitrário de inserções do diagrama da função de vértice de dois-pontos do campo de matéria φ conforme a figura

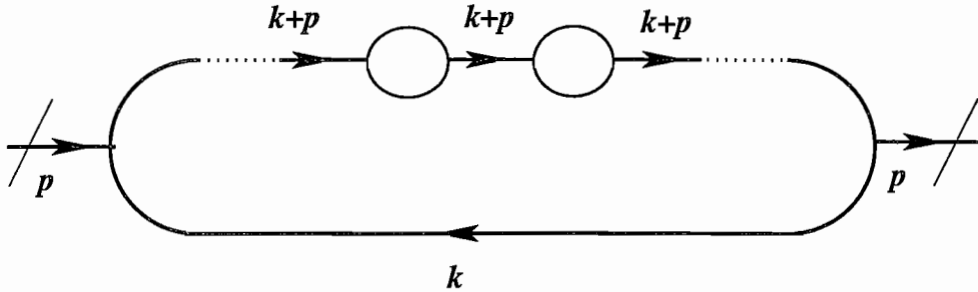


Figura 2.3: Diagrama de ordem superior construído a partir de um número arbitrário de inserções da auto-energia do campo escalar φ .

temos que

$$\Sigma(p) \propto \int d^4k (\log(M\sqrt{\tilde{k}^2})^n \left(-\frac{i}{k^2 + m^2}\right) \left(-\frac{i}{(k+p)^2 + m^2}\right)^{n+1} F(k, p) \quad , \quad (2.45)$$

onde $F(k, p) = -g^2 \cos^2(k \wedge p)$.

Desta forma, para $k \rightarrow 0$, qualquer potência do momento k vinda da integração do espaço de fase tende a zero mais rapidamente que qualquer potência do logaritmo do momento k , de maneira que singularidades logarítmicas para $k \rightarrow 0$ são integráveis.

Capítulo 3

O Modelo $\mathbb{C}P^{N-1}$ Não-Comutativo em Três Dimensões com Acoplamento Minimal de Férmions

Nesta monografia nos propusemos a estudar possíveis extensões do modelo $\mathbb{C}P^{N-1}$ não-comutativo para dimensão $d = 3$. O modelo $\mathbb{C}P^{N-1}$ comutativo para dimensão $d = 2$ apresenta um potencial que cresce linearmente com a distância de separação das partículas do modelo servindo para a descrição de sistemas que exibem confinamento [14]. O modelo foi provado ser renormalizável na expansão $1/N$ para dimensões $d = 2, 3$ [27]. Além disso, o modelo apresenta propriedades (*Instantons e Liberdade Assintótica*) compartilhadas pela teoria de Yang-Mills em quatro dimensões [14],[28].

Assim, baseados em uma conjectura devido a L. Faddeev de que modelos de teoria quântica campos que descrevem a física em quatro dimensões são de origem geométrica, uma família de modelos geométricos foi proposta [29].

Esses modelos apresentaram a dificuldade de não ser tratáveis através dos métodos perturbativos usuais (*expansão perturbativa na constante de acoplamento*). No entanto, um procedimento alternativo de colecionar os gráficos usando-se outro parâmetro perturbativo, ao invés da constante de acoplamento, foi proposto [30]. De maneira que o tratamento perturbativo em termos dos gráficos de Feynman continuava válido.

Desta forma, para as teorias quânticas de campos usuais tornou-se possível provar a

renormalização na expansão $1/N$, de modelos não-renormalizáveis na constante de acoplamento [31].

Por outro lado, ao estudarmos versões não-comutativas dos modelos de teoria quântica de campos, foi verificado que a presença de singularidades infravermelhas não-integráveis nesses modelos, invalidam a série perturbativa da expansão $1/N$ [10]. Por conseguinte, surgiu a motivação para o estudo da renormalização na expansão $1/N$, de versões não-comutativas de modelos comutativos renormalizáveis na expansão $1/N$.

Recentemente foi obtido que quando o campo de matéria φ_a transforma-se de acordo com a representação fundamental, o modelo CP^{N-1} não-comutativo em três dimensões é renormalizável na expansão $1/N$ e livre de singularidades infravermelhas não-integráveis. Porém, quando consideramos a transformação do campo de matéria φ pela representação adjunta, encontramos singularidades infravermelhas não-integráveis que invalidam sua série perturbativa.

Propostas de construir a TQC-NC, sem singularidades infravermelhas não-integráveis, através da adição de férmions foram consideradas na literatura em [8], [9], e [10], neste capítulo vamos investigar essa possibilidade com a finalidade de eliminar as singularidades infravermelhas não-integráveis do modelo CP^{N-1} com campos escalares na representação adjunta.

3.1 A Lagrangiana do Modelo e Regras de Feynman

O modelo CP^{N-1} não-comutativo em três dimensões com férmions acoplados de maneira minimal, é dado pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = -(D_\mu \varphi_a)^\dagger * (D^\mu \varphi_a) - m^2 \varphi_a^\dagger * \varphi_a - \bar{\psi}_a * (\gamma_\mu D^\mu + m) * \psi_a + \mathcal{L}[\lambda] \quad , \quad (3.1)$$

onde φ_a são campos escalares (*bósons*) e ψ_a são campos espinoriais (*férmions*) de duas componentes, cujo índice a varia de 1 até N . Adotamos a métrica $g_{11} = g_{22} = -g_{00} = 1$ e a seguinte representação para as matrizes de Dirac: $\gamma^0 = i\sigma^3$, $\gamma^1 = \sigma^1$ e $\gamma^2 = \sigma^2$. $\mathcal{L}[\lambda]$ denota a parte da lagrangiana de interação que implementa o vínculo sobre os campos escalares do modelo CP^{N-1} .

A lagrangiana (3.1) é invariante pela ação do grupo de calibre $U(1)$ não-comutativo, cujo elemento do grupo é dado por

$$U \equiv (e^{i\Lambda})_* = 1 + i\Lambda + \frac{i^2}{2}\Lambda * \Lambda + \dots \quad , \quad (3.2)$$

em que $\Lambda = \Lambda(x)$ é uma função real que parametriza a transformação de calibre.

Os campos de matéria (escalares e espinoriais) transformam-se pela representação adjunta de acordo com

$$\varphi_a(x) \rightarrow U * \varphi_a(x) * U^{-1} \quad , \quad (3.3)$$

$$\psi_a(x) \rightarrow U * \psi_a(x) * U^{-1} \quad . \quad (3.4)$$

A derivada covariante¹ é definida segundo

$$D_\mu \varphi_a = \partial_\mu \varphi_a + i[A_\mu, \varphi_a]_* \quad , \quad (3.5)$$

$$D_\mu \psi_a = \partial_\mu \psi_a + i[A_\mu, \psi_a]_* \quad , \quad (3.6)$$

¹ *Observação:* O comutador com índice $*$ é definido por $[f, g]_* = f * g - g * f$ para funções f e g arbitrárias.

e o campo de calibre transforma-se como

$$A_\mu(x) \rightarrow U * A_\mu(x) * U^{-1} + i(\partial_\mu U) * U^{-1} \quad . \quad (3.7)$$

Observe que na representação adjunta o vínculo implementado pelo campo multiplicador de Lagrange λ , sobre os campos escalares φ_a , pode apresentar várias possibilidades de termos invariantes de calibre. Porém vamos estudar apenas duas situações:

$$(1) \quad \mathcal{L}[\lambda] = \lambda * (\varphi_a * \varphi_a^\dagger - \frac{N}{g}) \quad ,$$

$$(2) \quad \mathcal{L}[\lambda] = \lambda * [\varphi_a, \varphi_a^\dagger]_* \quad .$$

Tais possibilidades requerem que a lei de transformação para o campo λ seja dada por

$$\lambda \rightarrow U * \lambda * U^{-1} \quad . \quad (3.8)$$

Reescrevendo a lagrangiana (3.1) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\partial_\mu \varphi_a^\dagger * \partial^\mu \varphi_a - m^2 \varphi_a^\dagger * \varphi_a + i[\varphi_a^\dagger, A_\mu]_* * \partial^\mu \varphi_a - i\partial_\mu \varphi_a^\dagger * [A^\mu, \varphi_a]_* - [\varphi_a^\dagger, A_\mu]_* * [A^\mu, \varphi_a]_* \\ & - \bar{\psi}_a * \gamma_\mu \partial^\mu \psi_a - m\bar{\psi}_a * \psi_a - i\bar{\psi}_a * \gamma_\mu [A^\mu, \psi_a]_* + \mathcal{L}[\lambda] + \mathcal{L}_{FC} + \mathcal{L}_{FP} \quad , \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde os termos de Fixação de Calibre (*FC*)

$$\mathcal{L}_{FC} = -\frac{N}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu) * (\partial_\nu A^\nu) \quad , \quad (3.10)$$

e de Faddeev-Popov (*FP*)

$$\mathcal{L}_{FP} = N\partial_\mu \bar{C} * (\partial^\mu C + i[C, A^\mu]_*) \quad , \quad (3.11)$$

são adicionados para o procedimento de quantização. Note que devido à estrutura não Abeliã introduzida pelo produto Moyal-Groenewold, os fantasmas não se desacoplam do campo de calibre. Porém, esses termos não contribuem para a ordem dominante dos cálculos na expansão $1/N$.

Haja vista que a estrutura do produto Moyal-Groenewold quando integrada na ação, não afeta a parte quadrática nos campos (vide propriedade (2) da seção 2.2). Os propagadores dos campos escalares e espinoriais são os mesmos da teoria comutativa. Isto é:

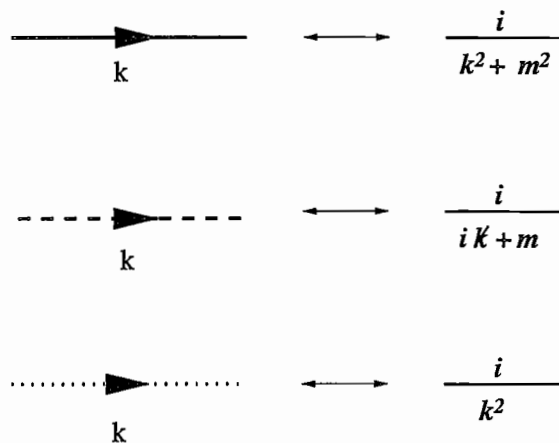


Figura 3.1: O gráfico com linha contínua denota o propagador do campo escalar φ_a , o gráfico com linha tracejada denota o propagador do campo espinorial ψ_a , e o gráfico com linha pontilhada denota o propagador do campo fantasma C .

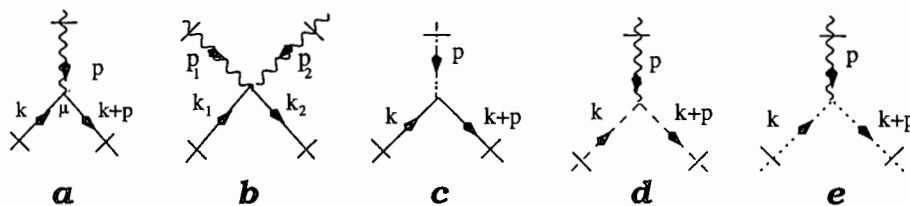


Figura 3.2: Vértices de interação.

As regras de Feynman desenhadas na figura 3.1 correspondem à parte de interação da lagrangiana (3.1), e vêm dadas por

$$(a) \quad i[\varphi_a^\dagger, A_\mu]_* * \partial^\mu \varphi_a - i \partial_\mu \varphi_a^\dagger * [A^\mu, \varphi_a]_* \longleftrightarrow -2(2k + p)_\mu \text{sen}(k \wedge p) \quad ,$$

$$(b) \quad -[\varphi_a^\dagger, A_\mu]_* * [A^\mu, \varphi_a]_* \longleftrightarrow -4ig^{\mu\nu} [\text{sen}(k_1 \wedge p_1) \text{sen}(k_2 \wedge p_2) + (p_1 \leftrightarrow p_2)] \quad ,$$

$$(c) \begin{cases} \lambda * \varphi_a * \varphi_a^\dagger & \longleftrightarrow ie^{-ik \wedge p} \quad , \\ \lambda * [\varphi_a, \varphi_a^\dagger]_* & \longleftrightarrow 2\text{sen}(k \wedge p) \quad , \end{cases}$$

$$(d) -i\bar{\psi}_a * \gamma_\mu * [A^\mu, \psi_a]_* \longleftrightarrow -2i\text{sen}(k \wedge p) \quad .$$

O vértice de interação devido ao acoplamento entre o campo fantasma C e o campo de calibre A_μ do termo de Faddeev-Popov vem dado por

$$(e) iN\bar{C} * [C, A^\mu]_* \longleftrightarrow -2N\text{sen}(k \wedge p) \quad .$$

3.2 As Funções de 1-Ponto

Nesta seção, as contribuições das funções de 1-ponto do campo auxiliar λ e do campo de calibre A_μ são analisadas.

A contribuição da função vértice de 1-ponto do campo de calibre A_μ dada pelo gráfico



é identicamente nula, visto que o fator trigonométrico desse gráfico é proporcional a

$$\text{sen}(k \wedge k) \quad , \quad (3.12)$$

onde k é o momento de integração do laço.

A contribuição para a função de 1-ponto do campo auxiliar λ dada pelo gráfico



Figura 3.3: Função de Vértice de 1-Ponto do Campo Auxiliar λ .

Apresenta dois casos:

(1) $\varphi_a * \varphi_a^\dagger = \frac{N}{g}$. Neste caso para fixarmos m como a massa do campo quântico φ_a adotamos por construção que o Valor Esperado no Vácuo (VEV) do campo auxiliar λ é identicamente nulo, o que implica em

$$\langle \lambda \rangle = i \frac{N}{g} - N \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + \mu^2} = 0 \quad . \quad (3.13)$$

A divergência linear da integral acima pode ser eliminada pela substituição

$$\frac{1}{g} \longrightarrow \frac{1}{g_R} + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m^2} \quad , \quad (3.14)$$

onde g_R é definida como a constante de acoplamento renormalizada.

Portanto, temos que

$$\frac{1}{g_R} - \frac{\mu}{4\pi} + \frac{|m|}{4\pi} = 0 \quad , \quad (3.15)$$

onde

$$\left(-\frac{1}{g_R} + \frac{\mu}{4\pi}\right) = |m| \quad , \quad (3.16)$$

implica que ao estudarmos a fase massiva ($m^2 \neq 0$) temos necessariamente $-\frac{1}{g_R} + \frac{\mu}{4\pi} > 0$.

(2) $\varphi_a * \varphi_a^\dagger = \varphi_a^\dagger * \varphi_a$. Neste caso, o fator trigonométrico do vértice de interação, proporcional a

$$\text{sen}(k \wedge k) \quad , \quad (3.17)$$

implica que o VEV do campo auxiliar λ seja nulo; isto é:

$$\langle \lambda \rangle = 0 \quad . \quad (3.18)$$

3.3 As Funções de Vértice de Dois-Pontos

Nesta seção calculamos as contribuições para as funções de vértice de dois-pontos do campo de calibre, do campo auxiliar λ , e da função de dois pontos mista $\langle TA_\mu\lambda \rangle$.

3.3.1 Função de Vértice de Dois-Pontos do Campo de Calibre

Na expansão $1/N$, as contribuições para a função de vértice de dois-pontos do campo de calibre em ordem dominante, provêm dos laços bosônicos e fermiônicos (vide Figura 3.4). Assim, calculamos primeiramente a contribuição do laço bosônico e em seguida a contribuição do laço fermiônico.

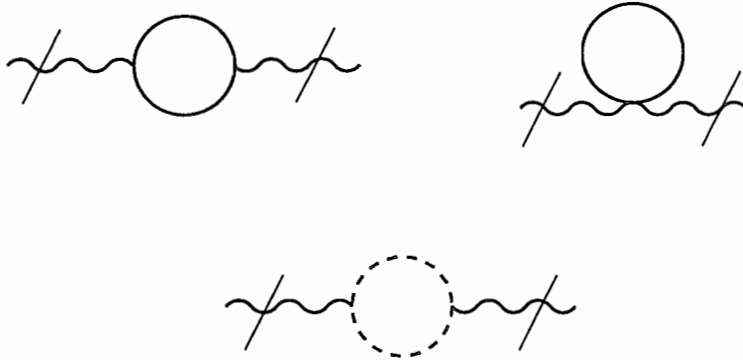


Figura 3.4: Função de Vértice de Dois-Pontos do Campo de Calibre.

A contribuição do laço bosônico vem dada por

$$F^{\mu\nu}(p) = N \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{(2k+p)^\mu(2k+p)^\nu}{(k^2+m^2)[(k+p)^2+m^2]} - \frac{2g^{\mu\nu}}{k^2+m^2} \right\} 4 \sin^2(k \wedge p) \quad (3.19)$$

Usando-se a identidade devida a Feynman,

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[Ax + B(1-x)]^2} \quad (3.20)$$

A equação (3.19) é escrita em termos de um único denominador,

$$F^{\mu\nu}(p) = 4N \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2k+p)^\mu(2k+p)^\nu - 2g^{\mu\nu}[(k+p)^2 + m^2]}{[(k+px)^2 + p^2x(1-x) + m^2]^2} \text{sen}^2(k \wedge p) . \quad (3.21)$$

Tal que ao fazermos o deslocamento $k \rightarrow k - px$ e integrando simetricamente em relação à origem, os termos lineares em k são nulos. Visto que o fator trigonométrico $\text{sen}^2(k \wedge p)$ não se altera pela mudança de variável $k \rightarrow k - px$, temos a paridade do integrando na equação (3.21) preservada. Resultando em

$$F^{\mu\nu}(p) = 4N \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{4k^\mu k^\nu + p^\mu p^\nu (2x-1)^2 - 2g^{\mu\nu}[k^2 + p^2(x-1)^2 + m^2]}{[k^2 + p^2x(1-x) + m^2]^2} \text{sen}^2(k \wedge p) . \quad (3.22)$$

Usando-se a identidade trigonométrica, $\text{sen}^2(k \wedge p) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2k \wedge p)$, separamos as contribuições do laço bosônico em, planares e não-planares:

(a) Contribuição Planar

$$F_P^{\mu\nu}(p) = 2N \int_0^1 dx \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{4k^\mu k^\nu + p^\mu p^\nu (2x-1)^2 - 2g^{\mu\nu}[k^2 + p^2(x-1)^2 + m^2]}{[k^2 + p^2x(1-x) + m^2]^2} , \quad (3.23)$$

em que o índice P denota a contribuição planar.

As integrais na variável k são dadas na tabela do apêndice B, donde resulta que

$$F_P^{\mu\nu}(p) = -\frac{iN}{4\pi} (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \int_0^1 dx \frac{4x^2 - 4x + 1}{M} , \quad (3.24)$$

onde $M = \sqrt{m^2 + p^2x(1-x)}$.

(b) Contribuição Não-Planar

$$F_{NP}^{\mu\nu}(p) = -2N \int_0^1 dx \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{4k^\mu k^\nu + p^\mu p^\nu (2x-1)^2 - 2g^{\mu\nu}[k^2 + p^2(x-1)^2 + m^2]}{[k^2 + p^2x(1-x) + m^2]^2} \cos(2k \wedge p) , \quad (3.25)$$

em que o índice NP serve para indicar a contribuição não-planar.

Temos que, usando a identidade trigonométrica $\cos(2k \wedge p) = \frac{1}{2}(e^{-i2k \wedge p} + e^{i2k \wedge p})$, as integrais na variável k , são dadas pela tabela do apêndice C. Resulta que, fazendo as devidas substituições, temos

$$F_{NP}^{\mu\nu}(p) = \frac{iN}{4\pi}(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu) \int_0^1 dx \frac{4x^2 - 4x + 1}{M} e^{-M\sqrt{\tilde{p}^2}} - \frac{iN}{\pi} \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \int_0^1 dx (M + \frac{1}{\sqrt{\tilde{p}^2}}) e^{-M\sqrt{\tilde{p}^2}} . \quad (3.26)$$

Adicionando as contribuições planares e não-planares, a contribuição do laço bosônico para a função de vértice de dois-pontos do campo de calibre é dada por

$$F^{\mu\nu}(p) = -\frac{iN}{4\pi}(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu) \int_0^1 dx \frac{4x^2 - 4x + 1}{M} (1 - e^{-M\sqrt{\tilde{p}^2}}) - \frac{iN}{\pi} \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \int_0^1 dx (M + \frac{1}{\sqrt{\tilde{p}^2}}) e^{-M\sqrt{\tilde{p}^2}} . \quad (3.27)$$

Esse resultado, presença da divergência infravermelha linear proporcional a $-1/\sqrt{\tilde{p}^2}$ que invalida a expansão perturbativa, foi obtido em [17]. Por outro lado, haja vista o acoplamento de fermions como tentativa de eliminar essa divergência, para o modelo que nos propusemos investigar, resta ainda o cálculo da contribuição do laço fermiônico, que apresentamos a seguir.

A contribuição do laço fermiônico vem dada por

$$F^{\mu\nu}(p) = -N \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Tr} \left\{ \frac{\gamma^\mu (\not{k} + im) \gamma^\nu (\not{k} + \not{p} + im)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \right\} 4\text{sen}^2(k \wedge p) . \quad (3.28)$$

A partir do cálculo do traço sobre as matrizes de Dirac em três dimensões, e usando-se a fórmula de Feynman (equação 3.20), a equação 3.28 é escrita na forma de um único denominador,

$$F^{\mu\nu}(p) = -8N \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\mu(k+p)^\nu + k^\nu(k+p)^\mu - g^{\mu\nu}[k(k+p) + m^2] - im\epsilon^{\mu\nu\rho} p_\rho}{[(k+px)^2 + p^2x(1-x) + m^2]^2} \times \text{sen}^2(k \wedge p) . \quad (3.29)$$

Fazendo-se o deslocamento $k \rightarrow k - px$, o fator trigonométrico $\text{sen}^2(k \wedge p)$ não se modifica, a paridade do integrando é preservada, e, semelhantemente ao cálculo da contribuição bosônica, os termos lineares na variável k são cancelados por integração simétrica, resultando em

$$F^{\mu\nu}(p) = -8N \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{2k^\mu k^\nu - 2p^\mu p^\nu x(1-x) - g^{\mu\nu}[k^2 - p^2 x(1-x) + m^2] - im\epsilon^{\mu\nu\rho} p_\rho}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2]^2} \times \text{sen}^2(k \wedge p) \quad (3.30)$$

Usando-se a identidade trigonométrica, $\text{sen}^2(k \wedge p) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2k \wedge p)$, podemos separar a contribuição do laço fermiônico em parte planar e não-planar. Posto que as integrais na variável k das partes planar e não-planar são dadas nas tabelas dos apêndices **B** e **C** respectivamente, temos:

(a) Contribuição planar

$$F_P^{\mu\nu}(p) = \frac{iN}{4\pi} (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \int_0^1 dx \frac{4x^2 - 4x}{M} + \frac{Nm}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} p_\rho \int_0^1 dx \frac{1}{M} \quad , \quad (3.31)$$

(b) Contribuição não-planar

$$F_{NP}^{\mu\nu}(p) = -\frac{iN}{4\pi} (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \int_0^1 dx \frac{4x^2 - 4x}{M} e^{-M\sqrt{\tilde{p}^2}} + \frac{iN}{\pi} \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \int_0^1 dx (M + \frac{1}{\sqrt{\tilde{p}^2}}) e^{-M\sqrt{\tilde{p}^2}} - \frac{Nm}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} p_\rho \int_0^1 dx \frac{1}{M} e^{-M\sqrt{\tilde{p}^2}} \quad , \quad (3.32)$$

onde a identidade trigonométrica $\cos(2k \wedge p) = \frac{1}{2}(e^{i2k \wedge p} + e^{-i2k \wedge p})$ foi usada.

Adicionando a parte planar e não-planar, temos a contribuição do laço fermiônico para a função de vértice de dois-pontos do campo de calibre,

$$F^{\mu\nu}(p) = \frac{iN}{4\pi} (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \int_0^1 dx \frac{4x^2 - 4x}{M} (1 - e^{-M\sqrt{\tilde{p}^2}}) + \frac{iN}{\pi} \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \int_0^1 dx (M + \frac{1}{\sqrt{\tilde{p}^2}}) e^{-M\sqrt{\tilde{p}^2}} + \frac{Nm}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} p_\rho \int_0^1 dx \frac{1}{M} (1 - e^{-M\sqrt{\tilde{p}^2}}) \quad . \quad (3.33)$$

Note que a contribuição devida ao laço fermiônico, apresenta uma divergência infravermelha linear proporcional a $1/\sqrt{\tilde{p}^2}$ com sinal contrário em relação a contribuição do laço bosônico. Portanto, ao adicionarmos as contribuições dos laços bosônico (3.27) e fermiônico (3.33), temos

$$F^{\mu\nu}(p) = -\frac{iN}{4\pi} \left[(g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) + i2m\epsilon^{\mu\nu\rho} p_\rho \right] f(p) \quad , \quad (3.34)$$

onde o comportamento da função f para pequenos e grandes valores do momento p é dado por

$$f(p) = \int_0^1 dx \frac{(1 - e^{-M\sqrt{\tilde{p}^2}})}{M} \approx \begin{cases} \sqrt{\tilde{p}^2} & \text{para } p \rightarrow 0 \quad , \\ \pi/\sqrt{p^2} & \text{para } p^2 \gg m^2 \quad . \end{cases}$$

Concluimos a partir da equação (3.34) que a presença do termo singular proporcional a $1/\sqrt{\tilde{p}^2}$ proveniente do laço bosônico é cancelado quando consideramos o acoplamento minimal com férmions.

3.3.2 Função de Vértice de Dois-Pontos do Campo Auxiliar λ

A contribuição para a função vértice de dois-pontos do campo auxiliar λ , provém do diagrama

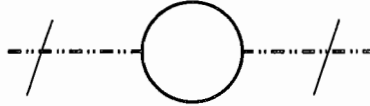


Figura 3.5: Função de Dois-Pontos do Campo Auxiliar λ .

O resultado dessa contribuição, quando o campo de matéria φ transforma-se pela representação adjunta, depende das diferentes possibilidades de construirmos termos invariantes de calibre para o acoplamento entre o campo auxiliar e os campos escalares.

Assim, para a situação (1) da seção 3.1 ($\mathcal{L}[\lambda] = \lambda * (\varphi_a * \varphi_a^\dagger - \frac{N}{g})$) temos

$$F(p) = N \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \quad (3.35)$$

Usando-se a fórmula de integração paramétrica de Feynman, escrevemos na forma de um único denominador, e fazemos a mudança de variável $k \rightarrow k - px$ que fornece

$$F(p) = N \int_0^1 dx \left[\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2]^2} \right] \quad (3.36)$$

A integral que está entre colchetes, é calculada com o uso da tabela do apêndice B resultando em

$$F(p) = i \frac{N}{8\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{M} \quad (3.37)$$

Para a situação (2) da seção 3.1 ($\mathcal{L}[\lambda] = \lambda * [\varphi_a, \varphi_a^\dagger]_*$) temos

$$F(p) = 4N \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \quad (3.38)$$

Escrevendo na forma de um único denominador, através da fórmula de integração paramétrica de Feynman, fazendo a mudança de variável $k \rightarrow k - px$, e por fim, separando em parte planar e não-planar, usando a identidade trigonométrica $\text{sen}^2(k \wedge p) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2k \wedge p)]$, obtemos

$$F(p) = 2N \int_0^1 dx \left[\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1 - \cos(2k \wedge p)}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2]^2} \right] \quad (3.39)$$

As integrais entre colchetes, as quais correspondem às partes planar e não-planar, da contribuição para a função de vértice de dois-pontos do campo auxiliar λ , são obtidas de acordo com a tabela de integrais dos apêndices B e C, resultando em

$$F(p) = i \frac{N}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{(1 - e^{-M\sqrt{p^2}})}{M} \quad (3.40)$$

3.3.3 Função de Vértice de Dois-Pontos Mista $\langle TA_\mu\lambda \rangle$

Após os cálculos das contribuições para as funções de vértice de dois-pontos dos campos de calibre A_μ e auxiliar λ , temos que calcular a contribuição para a função de vértice de dois-pontos mista $\langle TA_\mu\lambda \rangle$, dada pelo diagrama

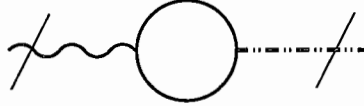


Figura 3.6: Função de Vértice Mista.

Tal cálculo se fez necessário, visto que diferentemente do caso comutativo, temos a presença dos fatores trigonométricos nos vértices de interação, os quais sinalizam o efeito da não-comutatividade. Portanto, como observado no item anterior (3.3.2), dado que $\mathcal{L}[\lambda]$ apresenta duas possibilidades, quando calcularmos a contribuição para a função de vértice de dois-pontos mista $\langle TA_\mu\lambda \rangle$, teremos que considerar essas possibilidades. Assim:

Caso (1)

$$F_\mu(p) = N \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2k+p)_\mu}{(k^2+m^2)[(k+p)^2+m^2]} (1 - e^{i2k \wedge p}) \quad , \quad (3.41)$$

Caso (2)

$$F_\mu(p) = 4N \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2k+p)_\mu}{(k^2+m^2)[(k+p)^2+m^2]} \text{sen}^2(k \wedge p) \quad . \quad (3.42)$$

Usando a fórmula de integração paramétrica de Feynman e fazendo a mudança de variável $k \rightarrow k - px$, temos:

Caso (1)

$$F_\mu(p) = N \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{2k_\mu - p_\mu(2x-1)}{[k^2 + p^2x(1-x) + m^2]^2} (1 - e^{i2k \wedge p}) \quad , \quad (3.43)$$

Caso (2)

$$F_\mu(p) = 4N \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{2k_\mu - p_\mu(2x-1)}{[k^2 + p^2x(1-x) + m^2]^2} \text{sen}^2(k \wedge p) \quad . \quad (3.44)$$

Note que separando-se as partes planar e não-planar das integrais (3.43) e (3.44) temos que as partes planares de (3.43) e (3.44) são idênticamente nulas, igualmente ao caso comutativo, onde não há contribuições não-nulas da função de vértice de dois-pontos mista entre os campos A_μ e λ . No entanto, como podemos observar, para o caso não-comutativo, temos uma situação em que há uma contribuição não-nula, a qual provém da parte não-planar de (3.43), ou seja,

$$\begin{aligned} F_{NP}^\mu(p) &= -2N \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\mu}{[k^2 + p^2x(1-x) + m^2]^2} e^{i2k \wedge p} \\ &= -\frac{N\tilde{p}^\mu}{4\pi\sqrt{\tilde{p}^2}} g(p) \quad , \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde o comportamento da função g para pequenos e grandes valores do momento p é dado por

$$g(p) = \int_0^1 dx e^{-M\sqrt{\tilde{p}^2}} \approx \begin{cases} 1 & \text{para } p \rightarrow 0 \quad , \\ 0 & \text{para } p^2 \gg m^2 \quad . \end{cases} \quad (3.46)$$

A parte não-planar de (3.44) é nula, visto que o integrando é ímpar na variável k .

3.4 Os Propagadores Efetivos

Os propagadores efetivos são obtidos quando invertemos a matriz de funções de vértice próprias

$$\mathcal{M}(p) = \begin{pmatrix} F^{\mu\nu}(p) & F^\mu(p)/2 \\ F^\nu(p)/2 & F(p) \end{pmatrix} .$$

Portanto,

$$\mathcal{M}(p)\mathcal{D}(p) = \begin{pmatrix} -\delta_\alpha^\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

onde

$$\mathcal{D}(p) = \begin{pmatrix} \Delta_{\nu\alpha}(p) & \Delta_\nu(p) \\ \Delta_\alpha(p) & \Delta(p) \end{pmatrix}$$

é a matriz dos propagadores efetivos. Como a matriz a ser invertida (matriz das funções próprias) apresenta duas possibilidades, ou seja, caso em que a função própria mista é nula, e caso em que a função própria mista não é identicamente nula, temos naturalmente duas respostas para os propagadores efetivos que dependem de considerarmos uma ou outra situação.

Na situação em que a função própria mista é nula, a matriz das funções próprias é diagonal implicando que a matriz dos propagadores efetivos também seja diagonal, resultando em

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = \frac{-4\pi i}{Nf(p)(p^2 + 4m^2)} \left[(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}) - \frac{2im}{p^2} \epsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho \right] , \quad (3.47)$$

para o propagador efetivo do campo de calibre no calibre de Landau ($\alpha = 0$) , e

$$\Delta(p) = \frac{4\pi i}{Nf(p)} , \quad (3.48)$$

para o propagador efetivo do campo auxiliar λ . Para estudarmos o setor ultravioleta do modelo, do ponto de vista da renormalização, vamos considerar a aproximação dos propagadores efetivos para altos valores do momento p .

Os propagadores efetivos do campo de calibre A_μ e do campo auxiliar λ fornecem, respectivamente

$$\Delta_{\mu\nu}(p) \approx -\frac{4i}{N\sqrt{p^2}} \left[\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) - \frac{2im}{p^2} \epsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho \right] , \quad (3.49)$$

e

$$\Delta(p) \approx \frac{4i}{N} \sqrt{p^2} . \quad (3.50)$$

Na situação em que a função própria mista é não-nula, a matriz das funções próprias é não-diagonal resultando nos seguintes propagadores efetivos:

(a) campo de calibre:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}(p) = & A_1 \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + A_2 \tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu + A_3 \bar{p}_\mu \bar{p}_\nu + A_4 (\tilde{p}_\mu \bar{p}_\nu - \tilde{p}_\nu \bar{p}_\mu) \\ & + A_5 \epsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho + (A_1 - p^2 \tilde{p}^2 A_3) \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \\ & + (A_2 + p^2 A_3) \tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu + (A_5 + \tilde{p}^2 A_4) \epsilon_{\mu\nu\alpha} p^\alpha , \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde $\bar{p}_\alpha \equiv \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p^\beta \tilde{p}^\gamma$ e $\tilde{p}^\mu \equiv \Theta^{\mu\nu} p_\nu$, com coeficientes $A_i(p)$, $i = 1, \dots, 5$, dependentes de p ,

$$\begin{aligned} A_1(p) &= -\frac{i4\pi}{N} \frac{1}{f(p)(p^2 + 4m^2)} , & A_2(p) &= \frac{4\pi g^2(p)}{N X(p)} \frac{1}{p^2 + 4m^2} , \\ A_3(p) &= \frac{4\pi}{N} \frac{4m^2 g^2(p)}{X(p)(p^2)^2} \frac{1}{p^2 + 4m^2} , & A_4(p) &= \frac{i4\pi}{N} \frac{2m g^2(p)}{X(p)p^2} \frac{1}{p^2 + 4m^2} , \\ A_5(p) &= -\frac{4\pi}{N} \frac{2m}{f(p)} \frac{1}{p^2(p^2 + 4m^2)} , \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde

$$X(p) = -if(p)[\tilde{p}^2 g^2(p) + f^2(p)(p^2 + 4m^2)] . \quad (3.53)$$

Note que $g(p) \rightarrow 0$ para altos valores do momento p , o que implica em $A_2(p) \rightarrow 0$, $A_3(p) \rightarrow 0$, e $A_4(p) \rightarrow 0$. Portanto, o comportamento do propagador do campo de calibre A_μ para altos valores do momento, é o mesmo dado pela equação (3.49).

Os propagadores dos campos auxiliar e misto são dados respectivamente por

$$\Delta(p) = \frac{4\pi f^2(p)}{N X(p)} (p^2 + 4m^2) \quad , \quad (3.54)$$

e

$$\Delta_\mu(p) = -\frac{4\pi f(p)g(p)}{N X(p)} \left(i\tilde{p}_\mu + \frac{2m\bar{p}_\mu}{p^2} \right) \quad . \quad (3.55)$$

Para altos valores do momento p , o comportamento do propagador do campo auxiliar é o mesmo fornecido pela equação (3.50), enquanto que o comportamento do propagador misto Δ_μ tende a zero, $\Delta_\mu(p) \rightarrow 0$. Portanto, nessa aproximação não há distinção entre os propagadores efetivos obtidos de acordo com a presença ou ausência da contribuição da função de vértice própria mista.

3.5 A Auto-Energia do Campo de Matéria φ_a

As contribuições para a auto-energia do campo de matéria φ_a são dadas pelos gráficos abaixo (Figura 3.7)

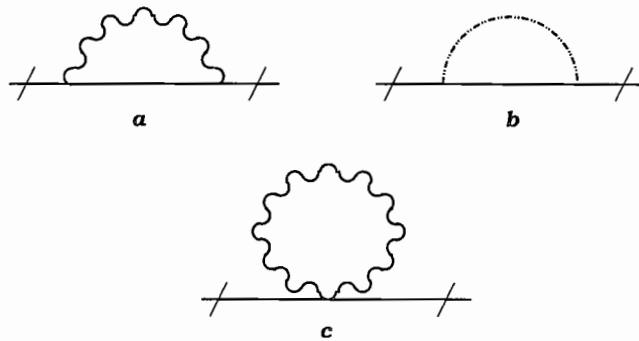


Figura 3.7: Auto-Energia do Campo Escalar

A análise desses diagramas torna-se importante, visto que tais diagramas são quadraticamente divergentes no ultravioleta, fato que no caso da TQC-NC leva às singularidades infravermelhas não-integráveis. Para tal análise, considere o comportamento do propagador do campo de calibre para altos valores do momento,

$$\Delta^{\mu\nu}(k) \approx \frac{-4i}{N\sqrt{k^2}} \left[(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) - \frac{2im}{k^2} \epsilon^{\mu\nu\rho} k^\rho \right] . \quad (3.56)$$

Assim, a contribuição do diagrama *a* para a auto-energia, dada por

$$\Gamma_\varphi^{(a)}(p) = -4i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k+2p)_\mu (k+2p)_\nu}{(k+p)^2 + m^2} \Delta^{\mu\nu}(k) \text{sen}^2(k \wedge p) , \quad (3.57)$$

apresenta parte divergente dominante nula devido a propriedade de transversalidade $k_\mu \Delta^{\mu\nu}(k) = 0$. Assim esse diagrama não implica nas divergências ultravioleta quadrática e infravermelha quadrática. As contribuições *linearmente divergentes*, que são ímpares no momento interno k , são canceladas ou quando consideramos a integração simétrica (caso da parte *par* do propagador) ou quando consideramos a antissimetria do símbolo de Levi-Civita (caso da parte *ímpar* do propagador). Portanto, o gráfico *a* fornece apenas a contribuição *logaritmicamente divergente*

$$\Gamma_\varphi^{(a)}(p) \approx \frac{64}{3N} p^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 - \cos(2k \wedge p)}{k^2 \sqrt{k^2}} , \quad (3.58)$$

onde a parte ímpar do propagador $\Delta^{\mu\nu}$, novamente não contribui devido a propriedade de antissimetria do símbolo de Levi-Civita. Note que, a *divergência logarítmica* pode ser absorvida em uma renormalização do campo φ_a , e do ponto de vista da mistura IV-UV, essa divergência não implica na singularidade infravermelha não-integrável.

Analisando o diagrama *b*, temos duas possibilidades que dependem da forma da interação entre os campos de matéria φ e auxiliar λ . Para o caso da interação $\mathcal{L}[\lambda] = \lambda * \varphi_a * \varphi_a^\dagger$, o diagrama *b* é planar, não dando origem à mistura IV-UV. Porém, para o caso da interação $\mathcal{L}[\lambda] = \lambda * [\varphi_a, \varphi_a^\dagger]_*$, temos que a contribuição do diagrama *b* dada por

$$\Gamma_\varphi^{(b)}(p) = -i4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k+p)^2 + m^2} \Delta(k) , \quad (3.59)$$

na aproximação de altos valores do momento interno k , fornece

$$\Gamma_{\varphi}^{(b)}(p) \approx \frac{8}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 - \cos(2k \wedge p)}{\sqrt{k^2}} \quad , \quad (3.60)$$

cuja contribuição não-planar vem dada por

$$\Gamma_{\varphi}^{(b)}{}_{NP}(p) \approx -\frac{8}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\cos(2k \wedge p)}{\sqrt{k^2}} \quad . \quad (3.61)$$

A contribuição do diagrama c para a auto-energia do campo escalar φ_a dada por

$$\Gamma_{\varphi}^{(c)}(p) = i8g_{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta^{\nu\mu}(k) \text{sen}^2(k \wedge p) \quad , \quad (3.62)$$

na aproximação de altos valores do momento interno k , fornece

$$\Gamma_{\varphi}^{(c)}(p) \approx \frac{4 \times 8}{N} g_{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{k^2}} \left[(g^{\nu\mu} - \frac{k_{\nu}k_{\mu}}{k^2}) - \frac{2im}{k^2} \epsilon^{\nu\mu\rho} k_{\rho} \right] \text{sen}^2(k \wedge p) \quad . \quad (3.63)$$

A antissimetria do símbolo de Levi-Civita implica que $g_{\mu\nu} \epsilon^{\nu\mu\rho} = 0$, logo²

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varphi}^{(c)}(p) &\approx \frac{4 \times 8}{N} g_{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{k^2}} (g^{\nu\mu} - \frac{k_{\nu}k_{\mu}}{k^2}) \text{sen}^2(k \wedge p) \\ &\approx \frac{4 \times 8}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 - \cos(2k \wedge p)}{\sqrt{k^2}} \quad , \end{aligned} \quad (3.64)$$

cuja contribuição não-planar vem dada por

$$\Gamma_{\varphi}^{(c)}{}_{NP}(p) \approx -\frac{32}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\cos(2k \wedge p)}{\sqrt{k^2}} \quad . \quad (3.65)$$

Desta maneira, a contribuição para a auto-energia do campo de matéria φ_a vem dada por

$$\Gamma_{\varphi}(p) = \text{PartePlanar} + \Gamma_{\varphi}^{(a)}{}_{NP}(p) + \Gamma_{\varphi}^{(b)}{}_{NP}(p) + \Gamma_{\varphi}^{(c)}{}_{NP}(p) \quad , \quad (3.66)$$

²Para obter este resultado, usamos $k_{\nu}k_{\mu} \rightarrow \frac{k^2}{d} g^{\nu\mu}$ e $g_{\mu\nu} g^{\nu\mu} = \delta_{\mu}^{\mu} = d$, onde devemos fazer a substituição $d \rightarrow 3$. Além disso, usamos a identidade trigonométrica $\text{sen}^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

a qual contém divergências infravermelhas quadráticas, devido a soma $\Gamma_{\varphi}^{(b)}_{NP}(p) + \Gamma_{\varphi}^{(c)}_{NP}(p)$, e divergências logarítmicas da contribuição $\Gamma_{\varphi}^{(a)}(p)$. Portanto, visto que não há o cancelamento entre as partes não-planares dos diagramas b e c , temos a presença de divergências infravermelhas quadráticas proporcionais a $1/\tilde{p}^2$ na auto-energia do campo de matéria φ_a . Essas divergências implicam em singularidades infravermelhas não-integráveis.

Outra observação, consiste na modificação da estrutura das fases, quando os campos de matéria, escalar φ_a e espinorial ψ_a , transformam-se pela representação adjunta. Assim, diagramas que apresentavam contribuições planares na representação fundamental passam a apresentar contribuições não-planares na representação adjunta.

A principal consequência ao adotarmos a representação adjunta para os campos de matéria da teoria não-comutativa é a presença das divergências infravermelhas já na primeira ordem em $1/N$, como foi visto no cálculo da contribuição do laço bosônico para a função de vértice de dois-pontos do campo calibre A_{μ} .

Neste capítulo, observamos que apesar de eliminarmos as divergências infravermelhas lineares da função de vértice de dois-pontos do campo de calibre A_{μ} incluindo férmions ao modelo, divergências infravermelhas quadráticas ainda estão presentes na auto-energia do campo de matéria φ_a . A existência dessas divergências, implica em singularidades infravermelhas não-integráveis que invalidam a série perturbativa da expansão $1/N$ para uma ordem superior. Uma proposta para resolver esse problema, sugerida na literatura [33], [34], consiste na incorporação de férmions de maneira supersimétrica. Assim a discussão da extensão supersimétrica do modelo será analisada no próximo capítulo.

Capítulo 4

O Modelo \mathbb{CP}^{N-1} Supersimétrico Não-Comutativo em Três Dimensões

O estudo sobre a renormalização e consistência perturbativa na TQC-NC é um assunto bastante discutido na literatura [11], [12], [32]. Em particular, Chepelev e Roiban propuseram um teorema de convergência em que diagramas de Feynman da TQC-NC pertencentes a uma dada família \mathcal{F} respeitam as condições de convergência do teorema [33]. Esses autores observaram que para uma TQC-NC escalar arbitrária, em geral, essa família \mathcal{F} é menor que a família de todos os diagramas da teoria. Tal resultado serviu para motivar investigações mais detalhadas sobre a renormalizabilidade perturbativa da TQC-NC.

A fim de contornar esse problema Chepelev e Roiban conjecturaram que uma possibilidade de respeitar as condições de convergência do teorema seria restringir às classes de teorias com grau de divergência superficial no máximo logarítmico, $\omega \leq 0$. Segundo esses autores, esse requisito seria satisfeito pelas teorias supersimétricas.

Por outro lado, foi verificado que teorias com apenas divergências logarítmicas ainda apresentam singularidades infravermelhas não-integráveis que invalidam a série perturbativa [34]. Contudo, trabalhos posteriores de modelos de TQC-NC com supersimetria em que a renormalização e consistência da série perturbativa foi provada para ordens arbitrárias [8], [9], [10], levaram a reforçar a crença de que o problema acarretado pela mistura IV-UV, para a definição da série perturbativa da TQC-NC, poderia ser solucionado pela supersimetria.

Seguindo essa idéia nesta monografia fomos levados a investigar um dado modelo de TQC-NC, a saber o modelo CP^{N-1} não-comutativo em três dimensões e suas possíveis extensões, minimal e supersimétrica.

No capítulo anterior investigamos a possibilidade de acoplar férmions de maneira minimal. Porém tal possibilidade leva à invalidação da expansão $1/N$. Neste capítulo investigamos a extensão supersimétrica do modelo CP^{N-1} não-comutativo em três dimensões usando o formalismo de supercampos. Os cálculos foram feitos considerando a situação em que o supercampo escalar de matéria ϕ transforma-se de acordo com a representação adjunta.

Os assuntos tratados neste capítulo obedecerão à seguinte ordem: Na seção 4.1, revisitamos a construção da TQC com supersimetria em três dimensões no formalismo de supercampos definidos sobre o superespaço. Na seção 4.2, a extensão da TQC-NC para supercampos no superespaço é estabelecida. Na seção 4.3, apresentamos a versão não-comutativa do modelo CP^{N-1} supersimétrico e suas regras de Feynman. Na seção 4.4, calculamos a correção para a função de vértice de dois pontos do supercampo espinorial A_α e obtemos o propagador do supercampo A_α . Na seção 4.5, calculamos a auto energia do supercampo escalar ϕ .

4.1 A Supersimetria em Três Dimensões

Nesta seção, para o desenvolvimento desse capítulo, apresentamos o tratamento da supersimetria em três dimensões, além das notações e convenções adotadas. Consulte [35] para maiores detalhes.

4.1.1 Notações e Convenções

No espaço-tempo tri-dimensional com métrica $g^{mn} \equiv (-++)$ as transformações são dadas pelo grupo de Lorentz $SL(2, \mathbf{R})$ cuja representação age sobre o espaço dos espinores reais (Majorana) de duas componentes $\psi^\alpha = (\psi^1, \psi^2)$. Em geral vamos usar a notação espinorial para as representações do grupo de Lorentz, denotando os índices espinoriais pelas letras Gregas $\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu, \dots$. Assim, na representação espinorial um vetor V^m ($m = 0, 1, 2$) será

descrito pelo espinor simétrico de segunda ordem $V^{\alpha\beta} = (\gamma_m)^{\alpha\beta} V^m = (V^{11}, V^{12}, V^{22})$. Nessa representação os espinores são anticomutantes (Grasmanianos).

Os índices espinoriais são *levantados* e *abaixados* pelo símbolo antisimétrico de segunda ordem $C_{\alpha\beta}$, que é usado para definir o *quadrado* de um espinor. Assim

$$\begin{aligned}\psi_\alpha &= \psi^\beta C_{\beta\alpha} & \psi^\alpha &= C^{\alpha\beta} \psi_\beta \\ C_{\alpha\beta} &= -C_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -C^{\alpha\beta}\end{aligned}\quad (4.1)$$

O superespaço para uma supersimetria *simples* é rotulado por três coordenadas comutantes $x^{\mu\nu}$ e duas anticomutantes θ^μ . Sendo a coordenada do superespaço dada por $z^M = (x^{\mu\nu}, \theta^\mu)$. As derivadas são definidas de acordo com

$$\begin{aligned}\partial_\mu \theta^\nu &\equiv \{\partial_\mu, \theta^\nu\} \equiv \delta_\mu^\nu, \\ \partial_{\mu\nu} x^{\sigma\tau} &\equiv [\partial_{\mu\nu}, x^{\sigma\tau}] \equiv \frac{1}{2} \delta_{\{\mu}^\sigma \delta_{\nu\}}^\tau.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Os símbolos $[\cdot, \cdot]$ e $\{\cdot, \cdot\}$ denotam a comutação e anticomutação em relação às variáveis escalares e espinoriais, respectivamente. De outro lado também usaremos para denotar a antissimetria e simetria em relação aos índices espinoriais.

A integração sobre uma única variável anticomutante η é definida admitindo a invariância translacional da integral. Portanto

$$\int d\eta 1 = 0, \quad \int d\eta \eta = 1. \quad (4.3)$$

Por sua vez, considerando $\{\eta, \eta\} = 0$, a série de Taylor da função $f(\eta)$ é finita sendo dada por $f(\eta) = f(0) + \eta f'(0)$. Assim, $\int d\eta f(\eta) = f'(0)$. O que mostra a equivalência entre as operações de integração e diferenciação.

Para as coordenadas espinoriais temos $\int d\theta_\alpha = \partial_\alpha$. Portanto

$$\int d\theta_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta. \quad (4.4)$$

Logo

$$\int d^2\theta\theta^2 = -1 \quad , \quad (4.5)$$

e podemos definir a função- δ por

$$\delta^2(\theta) = -\theta^2 = -\frac{1}{2}\theta^\alpha\theta_\alpha \quad . \quad (4.6)$$

4.1.2 Supersimetria e Supercampos

As funções (supercampos) sobre o superespaço são definidas por

$$\Psi_{\dots} = \Psi_{\dots}(x, \theta) \quad , \quad (4.7)$$

onde os *pontilhados* servem para denotar os índices de Lorentz (espinoriais) ou índices de simetria interna. Essas funções transformam-se pela ação do grupo de Poincaré cujos geradores são: $P_{\mu\nu}$ (translações) e $M_{\alpha\beta}$ (rotações de Lorentz). Podemos *graduar* (em inglês: *to grade*) a álgebra de Poincaré, isto é, considerar uma extensão da álgebra de Poincaré através da adição dos geradores de supersimetria espinorias (anticomutantes) Q_α . Esses geradores satisfazem

$$[P_{\mu\nu}, P_{\alpha\beta}] = 0 \quad , \quad (4.8)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2P_{\alpha\beta} \quad , \quad (4.9)$$

$$[Q_\alpha, P_{\mu\nu}] = 0 \quad . \quad (4.10)$$

Essa álgebra é denominada *álgebra de supersimetria*¹. A realização dessa álgebra sobre os supercampos $\Psi_{\dots}(x, \theta)$ é feita através das derivadas

¹Regras de comutação envolvendo as rotações de Lorentz $M_{\alpha\beta}$ também devem ser consideradas [36].

$$P_{\alpha\beta} = i\partial_{\alpha\beta} \quad , \quad Q_\alpha = i(\partial_\alpha - i\theta^\beta \partial_{\beta\alpha}) \quad ; \quad (4.11)$$

onde

$$\Psi(x^{\mu\nu}, \theta^\mu) = \exp[i(\xi^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} + \epsilon^\alpha Q_\alpha)] \Psi(x^{\mu\nu} + \xi^{\mu\nu} - \frac{i}{2}\epsilon^{\{\mu}\theta^{\nu\}}, \theta^\mu + \epsilon^\mu) \quad . \quad (4.12)$$

Assim, $\xi^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} + \epsilon^\alpha Q_\alpha$ gera a supertransformação de coordenadas

$$x'^{\mu\nu} = x^{\mu\nu} + \xi^{\mu\nu} - \frac{i}{2}\epsilon^{\{\mu}\theta^{\nu\}} \quad , \quad \theta'^\mu = \theta^\mu + \epsilon^\mu \quad , \quad (4.13)$$

com parâmetros $\xi^{\alpha\beta}$, ϵ^α reais e constantes.

Derivadas invariantes por supersimetria podem ser definidas por

$$D_M = (D_{\alpha\beta}, D_\alpha) = (\partial_{\alpha\beta} \quad , \partial_\alpha + i\theta^\beta \partial_{\beta\alpha}) \quad . \quad (4.14)$$

O conjunto D_M satisfaz²

$$[D_M, P_{\alpha\beta}] = [D_M, Q_\alpha] = 0 \quad . \quad (4.15)$$

A seguir listamos outras propriedades dessas derivadas que serão úteis para o desenvolvimento desta monografia.

$$\begin{aligned} \partial^{\alpha\sigma} \partial_{\beta\sigma} &= \delta_\beta^\alpha \square \quad , \quad D_\alpha D_\beta = i\partial_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta} D^2 \quad , \quad D^\alpha D_\beta D_\alpha = 0 \quad , \\ D^2 D_\alpha &= -D_\alpha D^2 = i\partial_{\alpha\beta} D^\beta \quad , \quad (D^2)^2 = \square \quad , \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde $D^2 \equiv \frac{1}{2} D^\alpha D_\alpha$.

²A notação $[A, B]$ denota o comutador *graduado*: anticomutador se ambos, A e B , são fermiônicos e comutador em caso contrário.

4.1.3 A Teoria de Perturbação e Supergráficos

Nesta subseção, discutimos a derivação das regras de Feynman e a construção da teoria de perturbação no formalismo dos supercampos. O tratamento em termos dos supergráficos também é discutido.

As regras de Feynman para o supercampo escalar são obtidas diretamente da Lagrangiana de acordo com a construção usual: O propagador é fornecido pelo termo quadrático enquanto os vértices de interação são fornecidos pelos termos não-quadráticos. Assim, derivamos essas regras considerando a representação de integração funcional para o funcional gerador do supercampo escalar massivo Φ

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ i \int d^5z \left[\frac{1}{2} \Phi (D^2 + m) \Phi + V(\Phi) + J\Phi \right] \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\Phi \exp i \left[S_0[\Phi] + S_I[\Phi] + \int d^5z J\Phi \right] , \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde

$$S_0[\Phi] = \frac{1}{2} \int d^5z \Phi (D^2 + m) \Phi , \quad (4.18)$$

denota a parte quadrática da ação e

$$S_I[\Phi] = \int d^5z V(\Phi) \quad (4.19)$$

denota uma auto-interação arbitrária.

Fazendo a substituição $\Phi \equiv -i \frac{\delta}{\delta J}$ escrevemos

$$Z[J] = \exp i \left[S_I \left(-i \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ i \int d^5z \left[\frac{1}{2} \Phi (D^2 + m) \Phi + J\Phi \right] \right\} . \quad (4.20)$$

Após completarmos os quadrados, a integral funcional Gaussiana sobre os campos Φ pode ser calculada exatamente fornecendo

$$Z[J] = \exp i \left[S_I \left(-i \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^5z d^5z' J(z) \Delta(z, z') J(z') \right\} , \quad (4.21)$$

onde

$$\Delta(z, z') = \frac{i}{D_z^2 + m} \delta^{(5)}(z - z') = i \frac{D_z^2 - m}{\square - m^2} \delta^{(5)}(z - z') \quad . \quad (4.22)$$

Pelo método da transformada de Fourier, em que

$$\Delta(z, z') = \langle \Phi(z) \Phi(z') \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik(x-x')} \langle \Phi(k, \theta) \Phi(-k, \theta') \rangle \quad , \quad (4.23)$$

podemos obter o propagador no espaço de momentos:

$$\langle \Phi(k, \theta) \Phi(-k, \theta') \rangle = -i \frac{D^2 - m}{k^2 + m^2} \delta^2(\theta - \theta') \quad . \quad (4.24)$$

Os vértices de interação na teoria com supercampos serão dados de acordo com a seguinte prescrição: considere um termo de interação do tipo

$$\int d^3 x d^2 \theta \Phi D^\alpha \Phi D^\beta \Phi \dots \quad , \quad (4.25)$$

Esse termo fornece um vértice com uma integração sobre o espaço de Grassmann, e cujo número de linhas que deixam o vértice é dado pelo número de supercampos Φ com os operadores D^α , D^β , etc, atuando sobre cada linha correspondente.

Os operadores D_α que surgem nos propagadores ou nos termos de interação em que atuam sobre um dado propagador de momento k , apresentam uma dependência com o momento segundo

$$D_\alpha(k, \theta) = \partial_\alpha + \theta^\beta k_{\alpha\beta} \quad . \quad (4.26)$$

Uma ferramenta útil para os cálculos perturbativos no formalismo de supercampos é fornecida pela ação efetiva, a qual é obtida tomando a transformada de Legendre do funcional gerador para os supergráficos conexos $W[J]$. As contribuições para a ação efetiva são dadas pelos supergráficos irredutíveis de uma-partícula (1PI) em que as linhas externas (os propagadores) são *amputadas* e substituídas pelos supercampos $\Phi(p_i, \theta_i)$ correspondentes, com integração sobre o espaço (p_i, θ_i) .

Resulta que a rigor temos

$$\Gamma[\Phi] = \sum_n \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} d^2 \theta_i \Phi(p_i, \theta_i) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p_1 + p_2 + \dots + p_n) \\ \times \prod_{\text{laços}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \prod_{\text{vértices-internos}} \int d^2 \theta \prod(\text{propagadores}) \prod(\text{vértices}) \quad (4.27)$$

As contribuições desse objeto podem ser derivadas diretamente da ação considerando as regras de Feynman e construindo os supergráficos 1PI

O integrando na ação efetiva, em principio é uma função não-polinomial dos momentos p_i . No entanto, podemos tratar as integrações sobre todas as variáveis de Grassmann θ_i de maneira a escrever o funcional ação efetiva dependendo de todos os campos Φ avaliados em uma única coordenada de Grassmann θ . A seguir vamos fornecer a argumentação e posteriormente ilustrar através de um exemplo como esse procedimento ocorre.

Considere uma integral geral com varios laços, essa integral contém vértices (rotulados pelos índices i e $i+1$) ligados por propagadores que contém fatores $\delta^2(\theta_i - \theta_{i+1})$ e operadores D_α atados. Tome um laço particular dessa integral e inspecione uma linha deste laço. Os fatores D podem ser combinados de acordo com

$$D_\alpha(\theta_i, k) \delta^2(\theta_i - \theta_{i+1}) = -D_\alpha(\theta_{i+1}, -k) \delta^2(\theta_i - \theta_{i+1}) \quad . \quad (4.28)$$

Após o uso dessa identidade e das identidades da equação (4.16) temos no máximo dois fatores de D atuando em uma das extremidades dessa linha. No vértice onde essa linha está conectada esses operadores podem ser integrados por partes, de acordo com a regra de Leibnitz, passando a atuar nas linhas externas. Desta maneira eliminamos a ação dos operadores D sobre a função δ^2 de Grassmann, e a integração sobre as variáveis θ_i e θ_{i+1} é dada por uma única integral segundo

$$\int \int d^2 \theta_i d^2 \theta_{i+1} \delta^2(\theta_i - \theta_{i+1}) \Phi(k, \theta_i) \Phi(-k, \theta_{i+1}) = \int d^2 \theta_i \Phi(k, \theta_i) \Phi(-k, \theta_i) \quad . \quad (4.29)$$

Assim, é dito que a “linha” (θ_i, θ_{i+1}) reduz-se a um ponto no espaço das variáveis de Grassmann. Esse procedimento pode ser repetido para as linhas restantes do laço até restarem apenas duas linhas uma com termo $\delta^2(\theta_1 - \theta_m)$ livre da ação dos operadores D e outra com a ação de zero, um, ou dois operadores D sobre o termo $\delta^2(\theta_1 - \theta_m)$.

A partir deste ponto usamos as seguintes identidades

$$\begin{aligned}
 \delta^2(\theta_1 - \theta_m)\delta^2(\theta_m - \theta_1) &= 0 \quad , \\
 \delta^2(\theta_1 - \theta_m)D^\alpha\delta^2(\theta_m - \theta_1) &= 0 \quad , \\
 \delta^2(\theta_1 - \theta_m)D^2\delta^2(\theta_m - \theta_1) &= \delta^2(\theta_1 - \theta_m) \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{4.30}$$

que em particular fornecem³

$$\begin{aligned}
 \delta^2(\theta_i - \theta_j) \Big| &= 0 \quad , \\
 D^2\delta^2(\theta_i - \theta_j) \Big| &= 1 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

As equações (4.30) indicam que a integral geral depende de uma única δ^2 de Grassmann permitindo efetuar mais uma integração no espaço das variáveis de Grassmann e reduzir efetivamente o laço do espaço das variáveis de Grassmann a um único ponto.

O procedimento pode ser repetido para cada laço reduzindo cada linha no espaço- θ para um ponto no espaço- θ até reduzirmos todas as linhas do espaço- θ para um único ponto no espaço- θ . Assim, teremos contribuições do tipo

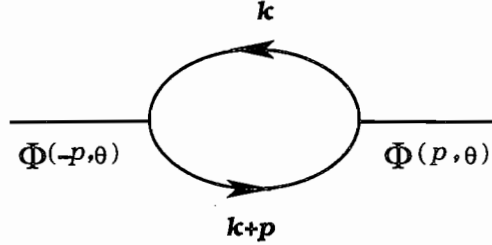
$$\begin{aligned}
 \Gamma[\Phi] &= \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} d^2 \theta G(p_1, \dots, p_n) \\
 &\quad \times \Phi(p_1, \theta) \dots D^\alpha \Phi(p_i, \theta) \dots D^2 \Phi(p_j, \theta) \dots \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{4.32}$$

onde G resulta das integrais nos momentos internos no laço.



³A barra $\Big|$ denota que as funções δ^2 de Grassmann são avaliadas em pontos coincidentes, isto é $i = j$.

Como exemplo das manipulações no espaço- θ , consideramos o cálculo da contribuição para a ação efetiva do diagrama de auto-energia da teoria escalar sem massa, cujo potencial é dado por $V(\Phi) = \Phi^3$:



onde expressamos sua expressão analítica por

$$\Gamma^{(2)}[\Phi] = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta d^2 \theta' G^{(2)}(p) \Phi(-p, \theta') \Phi(p, \theta) \quad , \quad (4.33)$$

em que

$$G^{(2)}(p) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{D^2 \delta(\theta - \theta')}{k^2} \frac{D^2 \delta(\theta - \theta')}{(k+p)^2} \quad . \quad (4.34)$$

A manipulação no espaço- θ é feita segundo a regra de Leibnitz:

$$\begin{aligned} D^2 \delta(\theta - \theta') D^2 \delta(\theta - \theta') \Phi(p, \theta) &= \frac{1}{2} D^\alpha D_\alpha \delta(\theta - \theta') [D^2 \delta(\theta - \theta') \Phi(p, \theta)] \\ &= -\frac{1}{2} D^\alpha \delta(\theta - \theta') D_\alpha [D^2 \delta(\theta - \theta') \Phi(p, \theta)] \\ &= -\frac{1}{2} D^\alpha \delta(\theta - \theta') \left[D_\alpha D^2 \delta(\theta - \theta') \Phi(p, \theta) + D^2 \delta(\theta' - \theta) D_\alpha \Phi(p, \theta) \right] \\ &= \frac{1}{2} \delta(\theta - \theta') D^\alpha \left[D_\alpha D^2 \delta(\theta - \theta') \Phi(p, \theta) + D^2 \delta(\theta' - \theta) D_\alpha \Phi(p, \theta) \right] \\ &= \delta(\theta - \theta') \left[(D^2)^2 \delta(\theta - \theta') \Phi(p, \theta) + D^\alpha D^2 \delta(\theta' - \theta) D_\alpha \Phi(p, \theta) \right. \\ &\quad \left. + D^2 \delta(\theta' - \theta) D^2 \Phi(p, \theta) \right] \quad . \quad (4.35) \end{aligned}$$

De posse das identidades para os operadores D no espaço de momentos

$$(D^2)^2 = -k^2 \quad , \quad D^\alpha D^2 = k^{\alpha\beta} D_\beta \quad , \quad (4.36)$$

e usando as regras (4.30) temos que

$$\Gamma^{(2)}[\Phi] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \Phi(-p, \theta) D^2 \Phi(p, \theta) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2(k+p)^2} \quad . \quad (4.37)$$

4.2 A TQC-NC Supersimétrica

Nesta seção, apresentamos as idéias básicas para a construção da TQC-NC supersimétrica, essa construção é feita usando o formalismo de supercampos definidos no superespaço.

A construção da TQC-NC supersimétrica no formalismo de supercampos é feita diretamente de acordo com o procedimento delineado no capítulo 2 desta monografia, com a diferença de que agora as funções clássicas são definidas no super-espaço. Essas funções são chamadas supercampos.

Assim, definimos a correspondência Weyl-Wigner conforme⁴

$$\Phi[\phi](\hat{q}, \theta) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} T(k, \hat{q}) \tilde{\phi}(k, \theta) \quad , \quad (4.38)$$

onde

$$\tilde{\phi}(k, \theta) = \int d^d x e^{-ikx} \phi(x, \theta) \quad . \quad (4.39)$$

Temos também que para cada operador Φ , do espaço não-comutativo temos associado o supercampo ϕ .

$$\phi[\Phi](x, \theta) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} \text{Tr}[\Phi(\hat{q}, \theta) T^\dagger(k, \hat{q})] \quad . \quad (4.40)$$

⁴O operador T foi definido no capítulo 2.

A fórmula acima admite a seguinte generalização

$$P[\phi(x, \theta)] = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} \text{Tr}\{P[\Phi(\hat{q}, \theta)]T^\dagger(k, \hat{q})\} \quad , \quad (4.41)$$

onde $P[\phi(x, \theta)]$ é um polinômio nos supercampos.

Um polinômio nos supercampos é definido a partir do produto Moyal-Groenewold

$$(\phi_1 * \phi_2)(x, \theta) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} \text{Tr}[\Phi_1(\hat{q}, \theta)\Phi_2(\hat{q}, \theta)T^\dagger(k, \hat{q})] \quad , \quad (4.42)$$

que pode ser escrito como

$$\begin{aligned} (\phi_1 * \phi_2)(x, \theta) &= \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} e^{i(k_1+k_2)x} e^{-ik_1 \wedge k_2} \tilde{\phi}_1(k_1, \theta) \tilde{\phi}_2(k_2, \theta) \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \exp\left(\frac{i}{2} \Theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \phi_1(y, \theta) \phi_2(x, \theta) \quad . \end{aligned} \quad (4.43)$$

Nessa construção as coordenadas de grassmann não são afetadas pelo produto Moyal-Groenewold.

Uma expressão para um número arbitrário de supercampos pode ser obtida diretamente de (4.42), resultando em

$$(\phi_1 * \phi_2 * \dots * \phi_n)(x, \theta) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} \text{Tr}[\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n T^\dagger] \quad . \quad (4.44)$$

Essa expressão quando integrada fornece

$$\int d^d x (\phi_1 * \phi_2 * \dots * \phi_n)(x, \theta) = \int \prod_{l=1}^n \frac{d^d k_l}{(2\pi)^d} \tilde{V}(k_1, k_2, \dots, k_n) \tilde{\phi}_1(k_1, \theta) \tilde{\phi}_2(k_2, \theta) \dots \tilde{\phi}_n(k_n, \theta) \quad , \quad (4.45)$$

onde

$$\tilde{V}(k_1, k_2, \dots, k_n) = (2\pi)^d \delta^{(d)}(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \prod_{i < j}^n e^{-ik_i \wedge k_j} \quad . \quad (4.46)$$

Haja vista que o produto Moyal-Groenewold não afeta as coordenadas de Grassmann a construção perturbativa da teoria não-comutativa supersimétrica se dá como na teoria não-comutativa sem supersimetria.

4.3 O Modelo CP^{N-1} Supersimétrico Não-Comutativo

A ação do modelo CP^{N-1} supersimétrico⁵ não-comutativo em três dimensões dada por

$$S = - \int d^5z \left[\frac{1}{2} \overline{\nabla^\alpha \phi_a} * \nabla_\alpha \phi_a + m \overline{\phi_a} \phi_a + \Sigma * \left(a [\overline{\phi_a}, \phi_a]_* + b \{ \overline{\phi_a}, \phi_a \}_* - \frac{Nb}{g} \right) \right] , \quad (4.47)$$

é invariante pela representação adjunta,

$$\phi_a \longrightarrow \phi'_a = e^{iK} * \phi_a * e^{-iK} , \quad (4.48)$$

$$\overline{\phi_a} \longrightarrow \overline{\phi'_a} = e^{iK} * \overline{\phi_a} * e^{-iK} . \quad (4.49)$$

onde $K = K(x, \theta)$ é um supercampo escalar real que parametriza a transformação de calibre.

O supercampo auxiliar Σ admitindo a simetria de calibre da ação S , transforma-se segundo

$$\Sigma \longrightarrow \Sigma' = e^{iK} * \Sigma * e^{-iK} . \quad (4.50)$$

A simetria de calibre local requer a redefinição da derivada espinorial D_α de acordo com

$$\overline{\nabla^\alpha \phi_a} = D^\alpha \overline{\phi_a} + i [\overline{\phi_a}, A^\alpha]_* , \quad (4.51)$$

$$\nabla_\alpha \phi_a = D_\alpha \phi_a - i [A_\alpha, \phi_a]_* . \quad (4.52)$$

⁵Outras extensões supersimétricas do modelo CP^{N-1} podem ser encontradas em [37].

Assim, o supercampo de calibre espinorial A_α transforma-se como

$$A_\alpha \longrightarrow A'_\alpha = e^{iK} * A_\alpha * e^{-iK} + ie^{iK} * (D_\alpha e^{-iK}) \quad . \quad (4.53)$$

onde o parâmetro da transformação de calibre é dado pelo supercampo escalar K . Neste capítulo vamos discutir dois casos: caso do comutador ($a = 1$ e $b = 0$), e caso do anticomutador ($a = 0$ e $b = 1$).

Em geral nas TQC-NC as propriedades de simetria por “conjugação de carga”, e paridade são quebradas, No entanto, no caso do comutador, a ação (4.47) é invariante por conjugação de carga,

$$\begin{aligned} \phi_a &\longleftrightarrow \bar{\phi}_a \quad , \\ A_\alpha &\longrightarrow A_\alpha \quad , \\ \Sigma &\longrightarrow -\Sigma \quad . \end{aligned} \quad (4.54)$$

O que implica que a função de vértice $\langle T\Sigma A_\alpha \rangle$ é nula.

A partir deste ponto a discussão será restrita ao caso do comutador. Neste caso a ação dada por

$$\begin{aligned} S = & - \int d^5z \left[\frac{1}{2} (D^\alpha \bar{\phi}_a + i[\bar{\phi}_a, A^\alpha]_*) * (D_\alpha \phi_a - i[A_\alpha, \phi_a]_*) \right. \\ & \left. + m \bar{\phi}_a \phi_a + \Sigma * [\bar{\phi}_a, \phi_a]_* \right] \quad , \end{aligned} \quad (4.55)$$

pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} S = & \int d^5z \left[\bar{\phi}_a (D^2 - m) \phi_a - \frac{i}{2} ([\bar{\phi}_a, A^\alpha]_* * D_\alpha \phi_a - D^\alpha \bar{\phi}_a * [A_\alpha, \phi_a]_*) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} [\bar{\phi}_a, A^\alpha]_* * [A_\alpha, \phi_a] - \Sigma * [\bar{\phi}_a, \phi_a]_* \right] \quad , \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde a definição $D^2 \equiv \frac{1}{2} D^\alpha D_\alpha$ foi usada.

4.3.1 Propagadores Livres e Regras de Feynman

A partir do inverso do operador presente no termo quadrático nos supercampos ϕ_a , obtemos o propagador livre,

$$\langle \bar{\phi}_a(z_1)\phi_b(z_2) \rangle = i\delta_{ab} \frac{D^2 + m}{\square - m^2} \delta^5(z_1 - z_2) \quad , \quad (4.57)$$

que no espaço de momentos é escrito como

$$\langle \bar{\phi}_a(k, \theta_1)\phi_a(-k, \theta_2) \rangle = -i\delta_{ab} \frac{D_1^2 + m}{k^2 + m^2} \delta_{12} \quad , \quad (4.58)$$

onde $\delta_{12} = \delta^2(\theta_1 - \theta_2)$ e $D_1^2 = D^2(k, \theta_1)$.

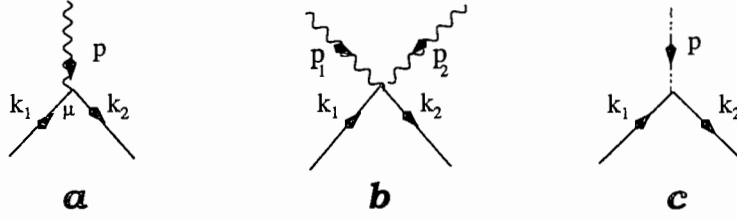


Figura 4.1: Vértices de interação do modelo CP^{N-1} não-comutativo supersimétrico

As regras de Feynman para os vértices de interação (Figura 4.1) são fornecidas por

$$-\frac{i}{2}([\bar{\phi}_a, A^\alpha]_* * D_\alpha \phi_a - D^\alpha \bar{\phi}_a * [A_\alpha, \phi_a]_*) \leftrightarrow -\text{sen}(k_1 \wedge k_2) A^\alpha(p) [D_\alpha \phi_a(-k_2) \bar{\phi}_a(k_1) - \phi_a(-k_2) D_\alpha \bar{\phi}_a(k_1)] \quad , \quad (4.59)$$

$$-\frac{1}{2}[\bar{\phi}_a, A^\alpha]_* * [A_\alpha, \phi_a]_* \leftrightarrow [\text{sen}(k_1 \wedge p_1) \text{sen}(k_2 \wedge p_2) + \text{sen}(k_1 \wedge p_2) \text{sen}(k_2 \wedge p_1)] \times \bar{\phi}_a(k_1) A^\alpha(p_1) A_\alpha(p_2) \phi_a(-k_2) \quad , \quad (4.60)$$

$$-\Sigma * [\bar{\phi}_a, \phi_a]_* \leftrightarrow -2i \text{sen}(k_1 \wedge k_2) \Sigma(p) \bar{\phi}_a(k_1) \phi_a(-k_2) \quad . \quad (4.61)$$

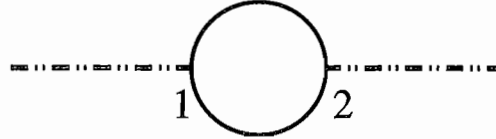
4.4 Os Propagadores Efetivos

Similarmente ao caso do modelo CP^{N-1} em duas dimensões[14] os supercampos auxiliares A^α e Σ adquirem dinâmica quando correções quânticas são consideradas.

Nesta seção vamos calcular as contribuições para as funções de vértice de dois-pontos dos supercampos auxiliar Σ e espinorial de calibre A_α e seus respectivos propagadores efetivos.

4.4.1 Função de Vértice de Dois-Pontos e Propagador Efetivo do Supercampo Auxiliar Σ

A contribuição para a função de vértice 1PI de dois-pontos do campo Σ é dada pelo (super)gráfico



que apresenta a seguinte expressão analítica

$$i\Gamma(p) = 2N \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \times \Sigma(-p, \theta_1)(D^2 + m)\delta_{12}(D^2 + m)\delta_{12}\Sigma(p, \theta_2) \quad , \quad (4.62)$$

onde usamos a notação $\delta_{12} = \delta(\theta_1 - \theta_2)$.

Após usarmos a fórmula de integração paramétrica de Feynman e efetuarmos a álgebra dos operadores D temos

$$i\Gamma(p) = 2N \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int_0^1 dx \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{[(k+px)^2 + p^2x(1-x) + m^2]^2} \right] \times \Sigma(-p, \theta_1)(D^2 + 2m)\delta_{12}\Sigma(p, \theta_2) \quad . \quad (4.63)$$

Fazendo a mudança de variável $k \rightarrow k - px$, o argumento do fator trigonométrico não se altera, posto que $p \wedge p = 0$. Assim

$$i\Gamma(p) = N \int d^2\theta \int_0^1 dx \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 - \cos(2k \wedge p)}{[k^2 + p^2x(1-x) + m^2]^2} \right] \times \Sigma(-p, \theta)(D^2 + 2m)\Sigma(p, \theta) \quad , \quad (4.64)$$

onde usamos a identidade trigonométrica $\sin^2(k \wedge p) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2k \wedge p)$ e a integração sobre a δ_{12} de Grassmann.

Portanto, de acordo com a equação (4.64), a contribuição de $\Gamma(p)$ para a ação efetiva é finita, não implicando em singularidades infravermelhas não-integráveis.

A integral na variável k fornece

$$i\Gamma(p) = \frac{iN}{8\pi} f(p) \int d^2\theta \Sigma(-p, \theta)(D^2 + 2m)\Sigma(p, \theta) \quad , \quad (4.65)$$

onde

$$f(p) = \int_0^1 dx \frac{1 - e^{-M\sqrt{p^2}}}{M} \quad , \quad (4.66)$$

e $M = \sqrt{m^2 + p^2x(1-x)}$.

O inverso do operador presente no termo quadrático do campo Σ (4.65) fornece o propagador efetivo do campo auxiliar Σ , que no espaço de momentos é dado por

$$\langle \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) \rangle = -\frac{4\pi i}{N} \frac{D^2 - 2m}{f(p)(p^2 + 4m^2)} \delta_{12} \quad . \quad (4.67)$$

O comportamento para altos valores do momento p , pode ser derivado considerando a função f e a aproximação $p^2 \gg 4m^2$, donde resulta que

$$\langle \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) \rangle \approx -\frac{4i}{N} \frac{D^2 - 2m}{\sqrt{p^2}} \delta_{12} \quad . \quad (4.68)$$

4.4.2 Função de Vértice de Dois-Pontos do Supercampo Espinorial A_α

As contribuições para a função de vértice 1PI de dois-pontos do supercampo espinorial A_α são dadas pelos supergráficos:



A expressão analítica para o supergráfico a é dada por

$$\begin{aligned}
 i\Gamma_a(p) = & -\frac{1}{2} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A^\alpha(-p, \theta_1) A^\beta(p, \theta_2) \text{sen}^2(k \wedge p) \\
 & \times \left[D_{\alpha 1} \langle \phi_a(1) \bar{\phi}_b(2) \rangle D_{\beta 2} \langle \phi_a(2) \bar{\phi}_b(1) \rangle + D_{\alpha 1} \langle \phi_a(2) \bar{\phi}_b(1) \rangle D_{\beta 2} \langle \phi_a(1) \bar{\phi}_b(2) \rangle \right. \\
 & \left. - \langle \phi_a(2) \bar{\phi}_b(1) \rangle D_{\alpha 1} D_{\beta 2} \langle \phi_a(1) \bar{\phi}_b(2) \rangle - \langle \phi_a(1) \bar{\phi}_b(2) \rangle D_{\alpha 1} D_{\beta 2} \langle \phi_a(2) \bar{\phi}_b(1) \rangle \right] ,
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

onde os índices α_i e β_i com $i = 1, 2$ nas derivadas super-covariantes indicam os campos em que os operadores D estão atuando, e os números 1 e 2 no argumento dos campos denotam $1=(k_1, \theta_1)$ e $2=(k_2, \theta_2)$ respectivamente.

Observando que

$$\langle \phi_a(1) \bar{\phi}_b(2) \rangle = i\delta_{ab} \frac{D_2^2 + m}{k^2 + m^2} \delta_{12} , \tag{4.70}$$

$$\langle \phi_a(2) \bar{\phi}_b(1) \rangle = i\delta_{ab} \frac{D_1^2 + m}{k^2 + m^2} \delta_{12} , \tag{4.71}$$

e usando

$$D_1^2(k, \theta_1)\delta_{12} = D_2^2(k, \theta_2)\delta_{12} \quad . \quad (4.72)$$

Temos

$$\langle \phi_a(1)\bar{\phi}_b(2) \rangle = \langle \phi_a(2)\bar{\phi}_b(1) \rangle = i\delta_{ab} \frac{D_1^2 + m}{k^2 + m^2} \delta_{12} \quad . \quad (4.73)$$

Usando-se a simetria do propagador (4.73), podemos reescrever (4.69) na forma:

$$\begin{aligned} i\Gamma_a(p) = & - \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A^\alpha(-p, \theta_1) A^\beta(p, \theta_2) \text{sen}^2(k \wedge p) \\ & \times \left[D_{\alpha 1} \langle \phi(1)\bar{\phi}(2) \rangle D_{\beta 2} \langle \phi(2)\bar{\phi}(1) \rangle - \langle \phi(2)\bar{\phi}(1) \rangle D_{\alpha 1} D_{\beta 2} \langle \phi(1)\bar{\phi}(2) \rangle \right] \quad . \end{aligned} \quad (4.74)$$

Substituindo nessa expressão a forma explícita dos propagadores, temos

$$\begin{aligned} i\Gamma_a(p) = & N \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A^\alpha(-p, \theta_1) A^\beta(p, \theta_2) \text{sen}^2(k \wedge p) \\ & \times \left[D_{\alpha 1} \frac{D_1^2 + m}{k^2 + m^2} \delta_{12} \frac{D_1^2 + m}{(k+p)^2 + m^2} D_{\beta 2} \delta_{12} \right. \\ & \left. - \frac{D_1^2 + m}{(k+p)^2 + m^2} \delta_{12} D_{\alpha 1} \frac{D_1^2 + m}{k^2 + m^2} D_{\beta 2} \delta_{12} \right] \quad . \end{aligned} \quad (4.75)$$

O uso da identidade $D_{\beta 2} \delta_{12} = -D_{\beta 1} \delta_{12}$ fornece

$$\begin{aligned} i\Gamma_a(p) = & N \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \\ & \times \left[-D_{\alpha 1} (D_1^2 + m) \delta_{12} (D_1^2 + m) D_{\beta 1} \delta_{12} \right. \\ & \left. + (D_1^2 + m) \delta_{12} D_{\alpha 1} (D_1^2 + m) D_{\beta 1} \delta_{12} \right] A^\alpha(-p, \theta_1) A^\beta(p, \theta_2) \quad . \end{aligned} \quad (4.76)$$

Efetuada uma integração por partes da derivada espinorial $D_{\alpha 1}$ presente na segunda linha da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
i\Gamma_a(p) &= N \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \\
&\times \left[2(D_1^2 + m)\delta_{12}D_{\alpha 1}(D_1^2 + m)D_{\beta 1}\delta_{12}A^\alpha(-p, \theta_1)A^\beta(p, \theta_2) \right. \\
&\left. + (D_1^2 + m)\delta_{12}(D_1^2 + m)D_{\beta 1}\delta_{12}(D^{\alpha 1}A_\alpha)(-p, \theta_1)A^\beta(p, \theta_2) \right] . \quad (4.77)
\end{aligned}$$

A partir deste ponto vamos considerar separadamente as contribuições das duas parcelas da equação acima escrevendo

$$i\Gamma_a(p) = i\Gamma_a^{(1)}(p) + i\Gamma_a^{(2)}(p) \quad , \quad (4.78)$$

onde

$$\begin{aligned}
i\Gamma_a^{(1)}(p) &= N \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \\
&\times 2(D_1^2 + m)\delta_{12}D_{\alpha 1}(D_1^2 + m)D_{\beta 1}\delta_{12}A^\alpha(-p, \theta_1)A^\beta(p, \theta_2) \quad , \quad (4.79)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
i\Gamma_a^{(2)}(p) &= N \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \\
&\times (D_1^2 + m)\delta_{12}(D_1^2 + m)D_{\beta 1}\delta_{12}(D^{\alpha 1}A_\alpha)(-p, \theta_1)A^\beta(p, \theta_2) \quad . \quad (4.80)
\end{aligned}$$

Para a contribuição $\Gamma_a^{(1)}$ temos

$$\begin{aligned}
i\Gamma_a^{(1)}(p) &= N \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \\
&\times \left[2m\delta_{12}(-D_1^2 + m)D_{\alpha 1}D_{\beta 1}\delta_{12}A^\alpha(-p, \theta_1)A^\beta(p, \theta_2) \right. \\
&\left. + 2D_1^2\delta_{12}(-D_1^2 + m)D_{\alpha 1}D_{\beta 1}\delta_{12}A^\alpha(-p, \theta_1)A^\beta(p, \theta_2) \right] \quad , \quad (4.81)
\end{aligned}$$

onde a relação $\{D_{\alpha 1}, D_1^2\} = 0$ foi usada.

Após uma integração por partes o operador $D_1^2 = \frac{1}{2}D_1^\alpha D_{\alpha 1}$ presente na terceira linha da equação acima é transportado para os outros termos implicando em

$$\begin{aligned}
i\Gamma_a^{(1)}(p) &= N \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \\
&\times \left[2\delta_{12}(D_1^2 + m)(-D_1^2 + m)D_{\alpha 1}D_{\beta 1}\delta_{12}A^\alpha(-p, \theta_1)A^\beta(p, \theta_2) \right. \\
&\left. + 2\delta_{12}(-D_1^2 + m)D_{\alpha 1}D_{\beta 1}\delta_{12}(D_1^2 A^\alpha)(-p, \theta_1)A^\beta(p, \theta_2) \right] . \quad (4.82)
\end{aligned}$$

Usando-se as relações $(D^2)^2 = -k^2$ e $(D_1^2 + m)(-D_1^2 + m) = k^2 + m^2$, no espaço de momentos temos

$$\begin{aligned}
i\Gamma_a^{(1)}(p) &= N \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \\
&\times \left[2\delta_{12}(k^2 + m^2)D_{\alpha 1}D_{\beta 1}\delta_{12}A^\alpha(-p, \theta_1)A^\beta(p, \theta_2) \right. \\
&\left. + 2\delta_{12}(-D_1^2 + m)D_{\alpha 1}D_{\beta 1}\delta_{12}(D^2 A^\alpha)(-p, \theta_1)A^\beta(p, \theta_2) \right] . \quad (4.83)
\end{aligned}$$

Pela relação

$$D_\alpha D_\beta = -k_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta}D^2 , \quad (4.84)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
i\Gamma_a^{(1)}(p) &= N \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \\
&\times \left[2\delta_{12}(k^2 + m^2)(-k_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta}D_1^2)\delta_{12}A^\alpha(-p, \theta_1)A^\beta(p, \theta_2) \right. \\
&\left. + 2\delta_{12}(-D_1^2 + m)(-k_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta}D_1^2)\delta_{12}(D^2 A^\alpha)(-p, \theta_1)A^\beta(p, \theta_2) \right] . \quad (4.85)
\end{aligned}$$

Donde as únicas contribuições não-nulas provêm dos termos $\delta_{12}D^2\delta_{12} = \delta_{12}$, resultando que

$$\begin{aligned}
i\Gamma_a^{(1)}(p) &= N \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \\
&\times \left[-2(k^2 + m^2)C_{\alpha\beta}\delta_{12}A^\alpha(-p, \theta_1)A^\beta(p, \theta_2) \right. \\
&\left. + 2(k_{\alpha\beta} - mC_{\alpha\beta})\delta_{12}(D^2 A^\alpha)(-p, \theta_1)A^\beta(p, \theta_2) \right] . \quad (4.86)
\end{aligned}$$

Por outro lado a contribuição para $\Gamma_a^{(2)}$ dada pela equação (4.80), resulta em

$$i\Gamma_a^{(2)}(p) = N \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \times D_1^2 \delta_{12}(D_1^2 + m) D_{\beta 1} \delta_{12}(D^\alpha A_\alpha)(-p, \theta_1) A^\beta(p, \theta_2) \quad , \quad (4.87)$$

visto que os termos com número ímpar de operadores D entre as deltas de Grassmann são nulos.

Após uma integração por partes em que o operador D_1^2 é transportado para atuar sobre os outros fatores e usando novamente o fato de que os termos com número ímpar de operadores D são nulos temos

$$i\Gamma_a^{(2)}(p) = N \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \times \delta_{12} D_\gamma (D_1^2 + m) D_{\beta 1} \delta_{12} D^\gamma (D^\alpha A_\alpha)(-p, \theta_1) A^\beta(p, \theta_2) \quad . \quad (4.88)$$

Usando-se $\{D_\gamma, D^2\} = 0$ e a relação (4.84), resulta que

$$i\Gamma_a^{(2)}(p) = N \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \times \delta_{12} (-D_1^2 + m) (-k_{\gamma\beta} - C_{\gamma\beta} D_1^2) \delta_{12} D^\gamma (D^\alpha A_\alpha)(-p, \theta_1) A^\beta(p, \theta_2) \quad . \quad (4.89)$$

Dado que $\delta_{12} D_1^2 \delta_{12} = \delta_{12}$, $\delta_{12} (D_1^2)^2 \delta_{12} = 0$, e $\delta_{12} \delta_{12} = 0$, obtemos

$$i\Gamma_a^{(2)}(p) = N \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \times (k_{\gamma\beta 1} - m C_{\gamma\beta 1}) \delta_{12} D^\gamma (D^\alpha A_\alpha)(-p, \theta_1) A^\beta(p, \theta_2) \quad . \quad (4.90)$$

Adicionando-se as contribuições das equações (4.86) e (4.90), temos

$$i\Gamma_a(p) = N \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \times \left[-2(k^2 + m^2) C_{\alpha\beta} \delta_{12} A^\alpha(-p, \theta_1) A^\beta(p, \theta_2) + 2(k_{\alpha\beta} - m C_{\alpha\beta}) \delta_{12} (D^2 A^\alpha)(-p, \theta_1) A^\beta(p, \theta_2) + (k_{\gamma\beta} - m C_{\gamma\beta}) \delta_{12} (D^\gamma D^\alpha A_\alpha)(-p, \theta_1) A^\beta(p, \theta_2) \right] \quad . \quad (4.91)$$

Tomando-se a delta de Grassmann $\int d^2\theta_1 d^2\theta_2 f(\theta_1, \theta_2) \delta_{12} = \int d^2\theta_1 f(\theta_1) = \int d^2\theta_2 f(\theta_2)$ reescrevemos a equação acima omitindo o índice da variável de Grassmann por simplicidade,

$$\begin{aligned}
i\Gamma_a(p) = & N \int d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \\
& \times \left[-2(k^2 + m^2)C_{\alpha\beta}A^\alpha(-p, \theta)A^\beta(p, \theta) \right. \\
& + 2(k_{\alpha\beta} - mC_{\alpha\beta})(D^2A^\alpha)(-p, \theta)A^\beta(p, \theta) \\
& \left. + (k_{\gamma\beta} - mC_{\gamma\beta})(D^\gamma D^\alpha A_\alpha)(-p, \theta)A^\beta(p, \theta) \right] . \quad (4.92)
\end{aligned}$$

A expressão analítica do supergráfico b é dada por

$$i\Gamma_b(p) = -2i \int d^2\theta A^\alpha(-p, \theta) \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle \phi_\alpha(k, \theta) \bar{\phi}_\alpha(-k, \theta) \rangle \text{sen}^2(k \wedge p) \right] A_\alpha(p, \theta) . \quad (4.93)$$

Substituindo na equação (4.93) o propagador do supercampo ϕ e usando as propriedades (4.31) temos que

$$i\Gamma_b(p) = 2N \int d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k+p)^2 + m^2} C_{\alpha\beta} A^\alpha(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) . \quad (4.94)$$

Portanto, somando as contribuições dos supergráficos a e b que denotamos por Γ_a e Γ_b respectivamente, temos a contribuição para a função de vértice de dois-pontos do supercampo espinorial A_α :

$$\begin{aligned}
i\Gamma_a(p) + i\Gamma_b(p) = & -2N \int d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \\
& \times \left[(k_{\gamma\beta} - mC_{\gamma\beta})(D^2A^\gamma)(-p, \theta)A^\beta(p, \theta) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}(k_{\gamma\beta} - mC_{\gamma\beta})(D^\gamma D^\alpha A_\alpha)(-p, \theta)A^\beta(p, \theta) \right] \\
= & -2N \int d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} (k_{\gamma\beta} - mC_{\gamma\beta}) \\
& \times \left[(D^2A^\gamma)(-p, \theta)A^\beta(p, \theta) + \frac{1}{2}(D^\gamma D^\alpha A_\alpha)(-p, \theta)A^\beta(p, \theta) \right] . \quad (4.95)
\end{aligned}$$

Considerando as integrais na variável k , em que:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} = \frac{i}{16\pi} f(p) \quad , \quad (4.96)$$

onde

$$f(p) = \int_0^1 dx \frac{1 - e^{-M\sqrt{\tilde{p}^2}}}{M} \quad , \quad (4.97)$$

e

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\gamma\beta} \text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} = -\frac{i}{16\pi} p_{\gamma\beta} h(p) \quad , \quad (4.98)$$

onde

$$h(p) = \int_0^1 x dx \frac{1 - e^{-M\sqrt{\tilde{p}^2}}}{M} = \frac{1}{2} f(p) \quad . \quad (4.99)$$

A identidade $h(p) = 1/2f(p)$ se verifica quando fazemos a mudança de variável $x \rightarrow 1 - x$ em $h(p)$.

Obtemos que

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\gamma\beta} \text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} = -\frac{p_{\gamma\beta}}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \quad . \quad (4.100)$$

Substituindo (4.100) na equação (4.95) obtemos

$$\begin{aligned} i\Gamma_a(p) + i\Gamma_b(p) &= N \int d^2\theta (p_{\gamma\beta} + 2mC_{\gamma\beta}) \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \right] \\ &\times \left[(D^2 A^\gamma)(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) + \frac{1}{2} (D^\gamma D^\alpha A_\alpha)(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) \right] \quad . \end{aligned} \quad (4.101)$$

Usando a fórmula de integração paramétrica de Feynman e fazendo o deslocamento $k \rightarrow k - px$, podemos reescrever a equação (4.101)⁶, em que:

$$i\Gamma_a(p) + i\Gamma_b(p) = \frac{N}{2} \int d^2\theta(p_{\gamma\beta} + 2mC_{\gamma\beta}) \int_0^1 dx \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 - \cos(2k \wedge p)}{[k^2 + p^2x(1-x) + m^2]^2} \right] \\ \times \left[(D^2 A^\gamma)(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) + \frac{1}{2} (D^\gamma D^\alpha A_\alpha)(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) \right] . \quad (4.102)$$

Analisando a equação (4.102) note que a contribuição $\Gamma_a(p) + \Gamma_b(p)$ para a ação efetiva é finita, não implicando em singularidades infravermelhas não-integráveis.

Observe que, usando o resultado (4.96) na equação (4.101), temos

$$i\Gamma_a(p) + i\Gamma_b(p) = \frac{iN}{16\pi} \int d^2\theta(p_{\gamma\beta} + 2mC_{\gamma\beta}) f(p) \\ \times \left[(D^2 A^\gamma)(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) + \frac{1}{2} (D^\gamma D^\alpha A_\alpha)(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) \right] . \quad (4.103)$$

Logo, reescrevendo a equação (4.103), cujo termo

$$p_{\gamma\beta} \left[(D^2 A^\gamma) + \frac{1}{2} D^\gamma D^\alpha A_\alpha \right] A^\beta , \quad (4.104)$$

após o uso da relação $-2p_{\gamma\beta} = \{D_\gamma, D_\beta\}$ e da identidade $D_\gamma D_\beta D^\gamma = 0$, pode ser escrito como

$$p_{\gamma\beta} \left[(D^2 A^\gamma) + \frac{1}{2} D^\gamma D^\alpha A_\alpha \right] A^\beta = -\frac{1}{2} \left[D_\gamma D_\beta (D^2 A^\gamma) + D_\beta D_\gamma (D^2 A^\gamma) \right. \\ \left. - D_\beta D^2 D^\alpha A_\alpha \right] A^\beta . \quad (4.105)$$

Usando a identidade $\{D^2, D_\mu\} = 0$ na equação (4.105) obtemos

$$p_{\gamma\beta} \left[(D^2 A^\gamma) + \frac{1}{2} D^\gamma D^\alpha A_\alpha \right] A^\beta = -\frac{1}{2} D^2 D_\gamma D_\beta A^\gamma A^\beta , \quad (4.106)$$

⁶Note que o argumento do fator trigonométrico não é alterado quando fazemos o deslocamento $k \rightarrow k - px$. Além disso, usamos a identidade trigonométrica $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

que pode ser reescrita usando a definição $W_\beta = D_\alpha D_\beta A^\alpha$ como

$$p_{\gamma\beta} \left[(D^2 A^\gamma) + \frac{1}{2} D^\gamma D^\alpha A_\alpha \right] A^\beta = -\frac{1}{2} D^2 W_\beta A^\beta \quad . \quad (4.107)$$

O termo

$$C_{\gamma\beta} \left[(D^2 A^\gamma) + \frac{1}{2} D^\gamma D^\alpha A_\alpha \right] A^\beta \quad , \quad (4.108)$$

pode ser escrito como

$$\begin{aligned} C_{\gamma\beta} \left[(D^2 A^\gamma) + \frac{1}{2} D^\gamma D^\alpha A_\alpha \right] A^\beta &= -\frac{1}{2} D_\gamma D_\beta A^\gamma A^\beta \\ &= -\frac{1}{2} W_\beta A^\beta \quad . \end{aligned} \quad (4.109)$$

onde a identidade $D_\beta D_\gamma = -p_{\beta\gamma} - C_{\beta\gamma} D^2$ e a definição $W_\beta = D_\gamma D_\beta A^\gamma$ foram usadas.

Substituindo os resultados (4.107) e (4.109) na equação (4.101) obtemos que

$$iS_{ef}[A] = i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\Gamma_a(p) + \Gamma_b(p) \right] = \frac{iN}{32\pi} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int d^2 \theta f(p) [D^2 + 2m] W_\beta A^\beta \quad . \quad (4.110)$$

Observe que a ação (4.110) é invariante pela transformação de calibre linear $\delta A^\alpha = D^\alpha K$. Essa liberdade de calibre será eliminada no procedimento de quantização pela adição do termo de fixação de calibre

$$S_{FC}[A] = -\frac{N}{32\xi} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta f(p) A_\alpha(-p, \theta) D^\alpha D^\beta D^2 A_\beta(p, \theta) \quad . \quad (4.111)$$

4.4.3 O Propagador Efetivo do Supercampo Espinorial A_α

O termo quadrático nos supercampos espinorias A_α presente na ação efetiva vem dado por

$$S_{ef}[A^\alpha] = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta A_\alpha(-p, \theta) \Delta^{\alpha\beta} A_\beta(p, \theta) \quad . \quad (4.112)$$

onde

$$\Delta^{\alpha\beta} = -\frac{N}{16\pi} f(p) \left[D^\beta D^\alpha (D^2 + 2m) + \frac{1}{\xi} D^\alpha D^\beta D^2 \right] \quad . \quad (4.113)$$

O propagador efetivo do supercampo espinorial A_α é dado por

$$\langle A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2) \rangle = -\Delta_{\alpha\beta}^{-1} \delta_{12} \quad . \quad (4.114)$$

Assim, temos que calcular o inverso do operador $\Delta^{\alpha\beta}$ [equação (4.113)] que está presente no termo quadrático dos supercampos A_α [equação (4.112)].

Para o inverso do operador $\Delta^{\alpha\beta}$, supomos

$$\Delta_{\beta\gamma}^{-1} = -\frac{16\pi}{N} \frac{1}{f(p)} \left[a_1 D_\gamma D_\beta + a_2 D_\beta D_\gamma \right] \quad . \quad (4.115)$$

Tal que,

$$\left[D^\beta D^\alpha (D^2 + 2m) + \frac{1}{\xi} D^\alpha D^\beta D^2 \right] \times \left[a_1 D_\gamma D_\beta + a_2 D_\beta D_\gamma \right] = -\delta_\gamma^\alpha \quad . \quad (4.116)$$

Implica em

$$\begin{aligned} a_1(D^2 + 2m)2p^2 + \frac{1}{\xi} a_2 D^2 2p^2 &= -1 \quad , \\ a_1(D^2 + 2m)(-D^2) + \frac{1}{\xi} a_2 (D^2)^2 &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.117)$$

Resolvendo o sistema de equações (4.117) temos

$$a_1 = -\frac{1}{4p^2(D^2 + 2m)} = \frac{(D^2 - 2m)}{4p^2(p^2 + 4m^2)} \quad , \quad (4.118)$$

$$a_2 = \xi \left(\frac{2mD^2}{p^2} - 1 \right) \frac{1}{4p^2(D^2 + 2m)} = \xi \frac{D^2}{4(p^2)^2} \quad . \quad (4.119)$$

Substituindo esses coeficientes na equação (4.115) obtemos que

$$\langle A^\alpha(p, \theta_1) A^\beta(-p, \theta_2) \rangle = i \frac{4\pi}{N} \frac{1}{f(p)} \left[\frac{(D^2 - 2m)D^\beta D^\alpha}{p^2(p^2 + 4m^2)} + \xi \frac{D^2 D^\alpha D^\beta}{(p^2)^2} \right] \delta_{12} \quad . \quad (4.120)$$

Usando $D^\alpha D^\beta = p^{\alpha\beta} - C^{\alpha\beta} D^2$, podemos reescrever a equação (4.120) como

$$\begin{aligned} \langle A^\alpha(1) A^\beta(2) \rangle &= \frac{4\pi i}{N f(p)} \left[-\frac{2mp^{\alpha\beta}}{p^2(p^2 + 4m^2)} - \left(\frac{1}{p^2 + 4m^2} - \frac{\xi}{p^2} \right) C^{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{p^2} \left(\frac{1}{p^2 + 4m^2} + \frac{\xi}{p^2} \right) p^{\alpha\beta} D^2 - \frac{2mC^{\alpha\beta}}{p^2(p^2 + 4m^2)} D^2 \right] \delta_{12} \quad . \end{aligned} \quad (4.121)$$

A ação de Faddeev-Popov para o campo fantasma c vem dada por

$$S_{FP}[c] = -\frac{N}{32\pi} \int d^3p d^2\theta f(p) (\bar{c} D^2 c - i \bar{c} D^\alpha [A_\alpha, c]_*) \quad , \quad (4.122)$$

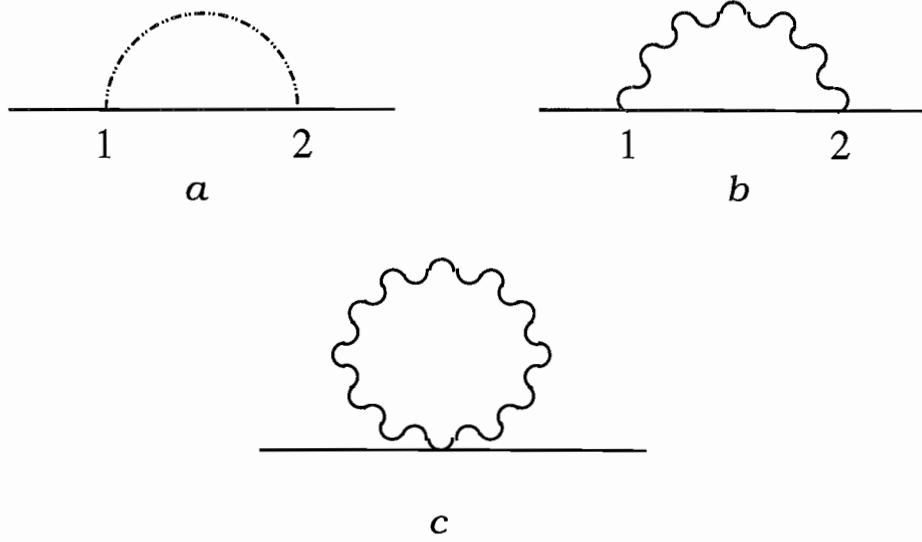
que fornece o propagador do campo fantasma c

$$\langle \bar{c}(p, \theta_1) c(-p, \theta_2) \rangle = -i \frac{16\pi}{N} \frac{D^2}{p^2 f(p)} \delta_{12} \quad . \quad (4.123)$$

As correções quânticas envolvendo o propagador do campo fantasma passam a contribuir apenas a partir da ordem $1/N^2$.

4.5 A Auto-Energia do Supercampo de Matéria ϕ

Na primeira ordem não-trivial em $1/N$, as contribuições para a função de vértice de dois-pontos do supercampo escalar ϕ são dadas pelos gráficos:



A expressão analítica devida ao supergráfico a é dada por

$$\begin{aligned}
 iS_{1a}(p) &= \frac{16\pi}{N} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \phi_a(-p, \theta_1) \bar{\phi}_a(p, \theta_2) \\
 &\times \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{[(k+p)^2 + m^2] f(k) (k^2 + 4m^2)} \right] \\
 &\times (D^2 - 2m) \delta_{12} (D^2 + m) \delta_{12} \quad . \quad (4.124)
 \end{aligned}$$

Temos, através da algebra dos operadores D e substituição de $f(k)$ pela forma assintótica $f(k) \approx \pi/\sqrt{k^2}$, que

$$\begin{aligned}
 iS_{1a}(p) &= \frac{16}{N} \int d^2\theta \phi_a(-p, \theta) (D^2 - m) \bar{\phi}_a(p, \theta) \\
 &\times \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{k^2} \text{sen}^2(k \wedge p)}{[(k+p)^2 + m^2] (k^2 + 4m^2)} \right] \quad , \quad (4.125)
 \end{aligned}$$

esse resultado por contagem de potências, é no máximo logaritmicamente divergente.

A expressão analítica do supergráfico b é dada por

$$\begin{aligned}
& \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[D_{\alpha 1} \phi_a(1) \langle \bar{\phi}_a(1) D_{\beta 2} \phi_a(2) \rangle \langle A^\alpha(1) A^\beta(2) \rangle \bar{\phi}_a(2) \right. \\
& - D_{\alpha 1} \phi_a(1) \langle \bar{\phi}_a(1) \phi_a(2) \rangle \langle A^\alpha(1) A^\beta(2) \rangle D_{\beta 2} \bar{\phi}_a(2) \\
& - \phi_a(1) \langle D_{\alpha 1} \bar{\phi}_a(1) D_{\beta 2} \phi_a(2) \rangle \langle A^\alpha(1) A^\beta(2) \rangle \bar{\phi}_a(2) \\
& \left. + \phi_a(1) \langle D_{\alpha 1} \bar{\phi}_a(1) \phi_a(2) \rangle \langle A^\alpha(1) A^\beta(2) \rangle D_{\beta 2} \bar{\phi}_a(2) + (\phi_a \longleftrightarrow \bar{\phi}_a) \right] \text{sen}^2(k \wedge p) \quad .
\end{aligned} \tag{4.126}$$

Reescrevendo temos,

$$\begin{aligned}
& \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[D_{\alpha 1} \phi_a(1) D_{\beta 2} \langle \bar{\phi}_a(1) \phi_a(2) \rangle \langle A^\alpha(1) A^\beta(2) \rangle \bar{\phi}_a(2) \right. \\
& - D_{\alpha 1} \phi_a(1) \langle \bar{\phi}_a(1) \phi_a(2) \rangle \langle A^\alpha(1) A^\beta(2) \rangle D_{\beta 2} \bar{\phi}_a(2) \\
& - \phi_a(1) D_{\alpha 1} D_{\beta 2} \langle \bar{\phi}_a(1) \phi_a(2) \rangle \langle A^\alpha(1) A^\beta(2) \rangle \bar{\phi}_a(2) \\
& \left. + \phi_a(1) D_{\alpha 1} \langle \bar{\phi}_a(1) \phi_a(2) \rangle \langle A^\alpha(1) A^\beta(2) \rangle D_{\beta 2} \bar{\phi}_a(2) + (\phi_a \longleftrightarrow \bar{\phi}_a) \right] \text{sen}^2(k \wedge p) \quad .
\end{aligned} \tag{4.127}$$

Substituindo-se as expressões do propagador do supercampo escalar ϕ e do propagador do supercampo espinorial A_α temos que

$$\begin{aligned}
iS_{1b}(p) &= \frac{4\pi}{N} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{f(p-k)} \frac{1}{k^2 + m^2} \left[- \frac{2m(p-k)^{\alpha\beta}}{(p-k)^2[(p-k)^2 + 4m^2]} \right. \\
& - \left(\frac{1}{(p-k)^2 + 4m^2} - \frac{\xi}{(p-k)^2} \right) C^{\alpha\beta} \\
& + \frac{1}{(p-k)^2} \left(\frac{1}{(p-k)^2 + 4m^2} + \frac{\xi}{(p-k)^2} \right) (p-k)^{\alpha\beta} D^2 \\
& \left. - \frac{2mC^{\alpha\beta}}{(p-k)^2[(p-k)^2 + 4m^2]} D^2 \right] \delta_{12} \times \mathcal{J} \quad ,
\end{aligned} \tag{4.128}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \left[D_{\alpha 1} \phi_a(p, \theta_1) D_{\beta 2} (D^2 + m) \delta_{12} \bar{\phi}_a(-p, \theta_2) - D_{\alpha 1} \phi_a(p, \theta_1) (D^2 + m) \delta_{12} D_{\beta 2} \bar{\phi}_a(-p, \theta_2) \right. \\ & - D_{\alpha 1} (D^2 + m) D_{\beta 2} \delta_{12} \phi_a(p, \theta_1) \bar{\phi}_a(-p, \theta_2) \\ & \left. + D_{\alpha 1} (D^2 + m) \delta_{12} \phi_a(p, \theta_1) D_{\beta 2} \bar{\phi}_a(-p, \theta_2) \right] . \end{aligned} \quad (4.129)$$

Analisando a equação (4.128) observe a presença de dois tipos de termos multiplicando a expressão que contém as derivadas espinoriais atuando nos supercampos escalares ϕ . Esses termos são:

(1) termos sem a derivada espinorial, que pelo uso das identidades (4.30), fornecem

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 = & \delta_{12} \left[-D_{\beta 2} (D^2 + m) \delta_{12} D_{\alpha 1} \phi_a(1) \bar{\phi}_a(2) - (D^2 + m) \delta_{12} D_{\alpha 1} \phi_a(1) D_{\beta 2} \bar{\phi}_a(2) \right. \\ & \left. - D_{\alpha 1} (D^2 + m) D_{\beta 2} \delta_{12} \phi_a(1) \bar{\phi}_a(2) + D_{\alpha 1} (D^2 + m) \delta_{12} \phi_a(1) D_{\beta 2} \bar{\phi}_a(2) \right] \\ = & \delta_{12} D_{\alpha 1} \phi_a(1) D_{\beta 2} \bar{\phi}_a(2) + (k_{\alpha\beta} + m C_{\alpha\beta}) \delta_{12} \phi_a(1) \bar{\phi}_a(2) . \end{aligned} \quad (4.130)$$

(2) termos com a derivada espinorial, que pela integração por partes e uso das identidades (4.30), fornecem:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2 = & D^2 \delta_{12} \left[(D^2 + m) D_{\beta 2} \delta_{12} D_{\alpha 1} \phi_a(1) \bar{\phi}_a(2) - D_{\alpha 1} (D^2 + m) \delta_{12} \phi_a(1) D_{\beta 2} \bar{\phi}_a(2) \right. \\ & \left. (D^2 + m) \delta_{12} D_{\alpha 1} \phi_a(1) D_{\beta 2} \bar{\phi}_a(2) + D_{\alpha 1} (D^2 + m) D_{\beta 2} \delta_{12} \phi_a(1) \bar{\phi}_a(2) \right] \\ = & \left[(k_{\lambda\beta} + m C_{\lambda\beta}) \delta_{12} D^\lambda D_{\alpha 1} \phi_a(1) \bar{\phi}_a(2) + (k_{\lambda\alpha} - m C_{\lambda\alpha}) \delta_{12} D^\lambda \phi_a(1) D_{\beta 2} \bar{\phi}_a(2) \right. \\ & + (D^2 + m) \delta_{12} D_{\alpha 1} \phi_a(1) D_{\beta 2} \bar{\phi}_a(2) \\ & \left. + (m k_{\alpha\beta} - k^2 C_{\alpha\beta}) \delta_{12} \phi_a(1) \bar{\phi}_a(2) - (k_{\alpha\beta} + m C_{\alpha\beta}) \delta_{12} D^2 \phi_a(1) \bar{\phi}_a(2) \right] . \end{aligned} \quad (4.131)$$

De posse das equações (4.130) e (4.131) podemos observar que iS_{1b} contém divergências lineares. A parte divergente dominante da (4.128) pode ser determinada considerando a aproximação para altos valores do momento de integração k do laço de modo que as massas nos denominadores podem ser desprezadas. Resulta que o termo linearmente divergente no ultravioleta provém de um termo do tipo

$$\int d^3\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\beta\alpha} \text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2)^{3/2}} C^{\alpha\beta} \phi_a(-p, \theta) \bar{\phi}_a(p, \theta) . \quad (4.132)$$

No entanto, esse resultado é identicamente nulo, dado que $C^{\alpha\beta}k_{\beta\alpha} = 0$. Portanto, iS_{1b} contém no máximo divergências logarítmicas.

Para a renormalização ultravioleta vamos determinar a parte logarítmicamente divergente de iS_{1b} , desprezando os termos de massa $4m^2$ da equação (4.128) e substituindo $f(p-k)$ pela sua forma assintótica $1/\sqrt{(p-k)^2}$.

Assim a equação (4.128) fica:

$$iS_{1b}(p) = \frac{4}{N} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k)}{k^2 + m^2} \left[-\frac{2m(p-k)^{\alpha\beta}}{[(p-k)^2]^{1/2}(p-k)^2} - (1-\xi) \frac{C^{\alpha\beta}}{[(p-k)^2]^{1/2}} + (1+\xi) \frac{(p-k)^{\alpha\beta}}{[(p-k)^2]^{1/2}(p-k)^2} D^2 - \frac{2mC^{\alpha\beta}}{[(p-k)^2]^{1/2}(p-k)^2} D^2 \right] \delta_{12} \times \mathcal{T} \quad (4.133)$$

Essa equação apresenta três contribuições;

(a) Termo de massa $2m$:

$$iS_{1b}^{(1)}(p) = \frac{8m}{N} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{k^2 + m^2} \left[-\frac{(p-k)^{\alpha\beta}}{[(p-k)^2]^{1/2}(p-k)^2} - \frac{C^{\alpha\beta}}{[(p-k)^2]^{1/2}(p-k)^2} D^2 \right] \delta_{12} \times \mathcal{T} \quad , \quad (4.134)$$

que de acordo com as equações (4.130) e (4.131) fornece

$$iS_{1b}^{(1)}(p) = \frac{8m}{N} \int d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{k^2 + m^2} \times \left[\frac{-k^{\alpha\beta}k_{\alpha\beta} + C^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}k^2}{[(p-k)^2]^{3/2}} \right] \phi_a(p, \theta) \bar{\phi}_a(-p, \theta) \quad . \quad (4.135)$$

Visto que $-k^{\alpha\beta}k_{\alpha\beta} + C^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}k^2 = 2k^2 - 2k^2 = 0$ o termo de massa $2m$ é igual a zero.

(b) Termo proporcional a $(1-\xi)$:

$$-\frac{4}{N}(1-\xi) \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{k^2 + m^2} \frac{C^{\alpha\beta}}{[(p-k)^2]^{1/2}} \delta_{12} \times \mathcal{T} \quad , \quad (4.136)$$

que de acordo com a equação (4.130) e após uma integração por partes do operador D pode ser escrito como

$$-\frac{8}{N}(1-\xi) \int d^2\theta \phi_a(-p, \theta)(D^2+m)\bar{\phi}_a(p, \theta) \\ \times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2+m^2)[(p-k)^2]^{1/2}} \quad (4.137)$$

(c) Termo proporcional a $(1+\xi)$:

$$\frac{4}{N}(1+\xi) \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{k^2+m^2} \left[\frac{(p-k)^{\alpha\beta}}{[(p-k)^2]^{3/2}} D^2 \right] \delta_{12} \times \mathcal{T} \quad , \quad (4.138)$$

que a partir da equação (4.131) e após uma integração por partes do operador D fornece a contribuição logaritmicamente divergente

$$-\frac{8}{N}(1+\xi) \int d^2\theta \phi_a(-p, \theta)(3D^2-m)\bar{\phi}_a(p, \theta) \\ \times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{(k^2+m^2)[(p-k)^2]^{1/2}} \quad (4.139)$$

Somando as contribuições divergentes de (4.137) e (4.139) temos

$$-\frac{16}{N} \int d^2\theta \left[(2+\xi)\phi_a(-p, \theta)D^2\bar{\phi}_a(p, \theta) - m\xi\phi_a(-p, \theta)\bar{\phi}_a(p, \theta) \right] \\ \times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{[(k+p)^2+m^2]\sqrt{k^2}} \quad (4.140)$$

A última contribuição para a auto-energia do supercampo ϕ é devida ao diagrama c , cuja expressão analítica é dada por

$$\int d^2\theta \phi_a(-p, \theta) \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle A^\alpha(k, \theta)A_\alpha(-k, \theta) \rangle \right] \bar{\phi}_a(p, \theta) \quad (4.141)$$

Após usarmos a álgebra dos operadores D , obtemos que a contribuição linearmente divergente num calibre arbitrário é do tipo

$$\int d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\beta\alpha} \text{sen}^2(k \wedge p)}{(-k^2)^{3/2}} C^{\alpha\beta} \phi_a(-p, \theta)\bar{\phi}_a(p, \theta) \quad , \quad (4.142)$$

a qual é identicamente nula, visto que $C^{\alpha\beta}k_{\beta\alpha} = 0$. Porém, ainda resta a contribuição logaritmicamente divergente oriunda do termo de massa no propagador do supercampo espinorial A_α , que vem dada por

$$\frac{32}{N}m \int d^2\theta \phi_\alpha(-p, \theta) \bar{\phi}_\alpha(p, \theta) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{[(k+p)^2 m^2] \sqrt{k^2}} \quad (4.143)$$

Resumindo: a contribuição dos supergráficos a , b , e c , para a ação efetiva é no máximo logaritmicamente divergente sendo dada por

$$\begin{aligned} iS[\phi] &= -\frac{16}{N}(1+\xi) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int d^2\theta \phi_\alpha(-p, \theta) (D^2 - m) \bar{\phi}_\alpha(p, \theta) \\ &\quad \times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{sen}^2(k \wedge p)}{[(k+p)^2 + m^2] \sqrt{k^2}} \end{aligned} \quad (4.144)$$

Essa divergência do ponto de vista do problema da mistura IV-UV não implica em uma singularidade infravermelha não-integrável.

Observe que na parte planar da equação (4.144):

$$\begin{aligned} iS_P[\phi] &= -\frac{8}{N}(1+\xi) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int d^2\theta \phi_\alpha(-p, \theta) (D^2 - m) \bar{\phi}_\alpha(p, \theta) \\ &\quad \times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2] \sqrt{k^2}} \end{aligned} \quad (4.145)$$

através do uso das integrais d -dimensionais regularizadas (apêndice B), podemos separar as contribuições divergente (pólo em ϵ) e finita de iS_P , onde

$$S_P[\phi] = -\frac{4(1+\xi)}{N\pi^2\epsilon} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int d^2\theta \phi_\alpha(-p, \theta) (D^2 - m) \bar{\phi}_\alpha(p, \theta) + \text{termos finitos} \quad (4.146)$$

Essa divergência pode ser cancelada pela adição de um contratermo adequado; na realidade, a divergência é absorvida na constante de renormalização para a função de onda do termo cinético $\phi_\alpha(D^2 - m)\bar{\phi}_\alpha$:

$$Z = 1 + \frac{4(1+\xi)}{\pi^2 N \epsilon} \quad (4.147)$$

Note que no calibre $\xi = -1$ a correção para a função de vértice de dois-pontos do supercampo escalar ϕ_a é finita.

O principal resultado deste capítulo foi a prova de que a auto-energia do supercampo ϕ_a não induz singularidades infravermelhas não-integráveis.

Capítulo 5

Análise das Divergências do Modelo Supersimétrico

Neste capítulo, daremos um argumento geral para provar a ausência de singularidades infravermelhas não-integráveis na versão não-comutativa do modelo CP^{N-1} supersimétrico. Os cálculos realizados até o capítulo anterior indicaram a ausência de singularidades infravermelhas não-integráveis tanto na contribuição contendo o campo de calibre (supercampo espinorial A_α) quanto na contribuição da ordem $1/N$ para a auto-energia do supercampo escalar ϕ .

O melhor entendimento para a tema da renormalização é obtido através da análise da estrutura de divergências do modelo, a qual é feita após o cômputo do grau de divergência superficial (ω) dos gráficos de Feynman do modelo.

Assim, para um diagrama arbitrário γ do modelo, denotamos:

V_1 para o número de vértices do tipo $A * (D\phi_a * \bar{\phi}_a - \dots)$,

V_2 para o número de vértices do tipo $A * A * \phi_a * \bar{\phi}_a$,

V_3 para o número de vértices do tipo $\Sigma * \bar{\phi}_a * \phi_a$,

e V_c para o número de vértices do tipo $f(p)\bar{c} * D^\alpha[A_\alpha, c]_*$.

Além disso, denotamos por:

P_ϕ o número de propagadores escalares, $\langle \phi_a \bar{\phi}_a \rangle \approx D^2/k^2$,

P_A o número de propagadores do campo A_α , $\langle A^\alpha A^\beta \rangle \approx D^2/k^2$,

P_Σ o número de propagadores do campo auxiliar Σ , $\langle \Sigma \Sigma \rangle \approx D^2/\sqrt{k^2}$,

e P_c o número de propagadores do campo fantasma c , $\langle cc' \rangle \approx D^2/\sqrt{k^2}$.

Assim, para cada laço no cálculo do grau de divergência superficial ω temos associado o fator 2 (3 devido à integração em d^3k e -1 devido à contração no espaço- θ , $\delta_{12} D^2 \delta_{12} = \delta_{12}$, diminuir o número de fatores D^2 , os quais correspondem a uma potência linear no momento). Os propagadores dos campos ϕ_a e A_α contribuem, respectivamente, com uma potência -1 no momento enquanto o vértice V_1 fornece $\frac{1}{2}$ e o vértice V_c devido ao fator $f(p)$ fornece $-\frac{1}{2}$. Portanto

$$\omega = 2L - P_\phi - P_A + \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_c \quad , \quad (5.1)$$

onde L é o número de laços de um diagrama γ .

Usando a relação de Euler $L = P - V + 1$ temos:

$$\begin{aligned} \omega &= 2(P_\phi + P_A + P_\Sigma + P_c) - 2(V_1 + V_2 + V_3 + V_c) + 2 - P_\phi - P_A + \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_c \\ &= 2 + P_\phi + P_A + 2(P_\Sigma + P_c) - \frac{3}{2}V_1 - 2(V_2 + V_3) - \frac{5}{2}V_c \quad . \end{aligned} \quad (5.2)$$

Para um diagrama arbitrário γ podemos expressar o número de propagadores em termos do número de linhas externas dos campos e do número total de campos de acordo com as relações topológicas:

$$\begin{aligned} P_\phi &= \frac{1}{2}(N_\phi - E_\phi) \quad , & P_A &= \frac{1}{2}(N_A - E_A) \quad , \\ P_\Sigma &= \frac{1}{2}(N_\Sigma - E_\Sigma) \quad , & P_c &= \frac{1}{2}(N_c - E_c) \quad . \end{aligned} \quad (5.3)$$

Temos também que o número total de campos para um dado diagrama é dado pela soma de campos que chegam em um dado vértice. Assim,

$$\begin{aligned} N_\phi &= 2(V_1 + V_2 + V_3) \quad , & N_A &= V_1 + 2V_2 + V_c \quad , \\ N_\Sigma &= V_3 \quad , & N_c &= 2V_c \quad . \end{aligned} \quad (5.4)$$

Substituindo as relações (5.3) e (5.4) na equação (5.2), obtemos, para um diagrama arbitrário γ , o grau de divergência superficial ω em termos do número de linhas externas:

$$\omega(\gamma) = 2 - \frac{1}{2}(E_\phi + E_A) - E_\Sigma - E_c - \frac{1}{2}N_D \quad . \quad (5.5)$$

O fato de que o grau de divergência superficial ω é diminuído de um fator $\frac{1}{2}N_D$ corresponde ao número de super-derivadas covariantes que são movidas para atuar nas linhas externas.

Através da análise do grau de divergência superficial ω , obtemos dois conjuntos de diagramas superficialmente divergentes: um conjunto com $\omega = 1$ e outro com $\omega = 0$.

O conjunto com $\omega = 1$ apresenta os seguintes casos ¹:

- (1) Diagramas com apenas duas linhas externas do supercampo ϕ , $E_\phi = 2$.
- (2) Diagramas com apenas duas linhas externas do supercampo A_α , $E_A = 2$.
- (3) Diagramas com apenas uma linha externa do supercampo Σ , $E_\Sigma = 1$
- (4) Diagramas com $E_A = E_D = 1$.

No entanto, embora esse conjunto de diagramas apresente um grau de divergência superficial linear, foi mostrado no capítulo anterior que até a ordem de 1 laço, diagramas com apenas duas linhas externas do supercampo ϕ (caso (1)) são logaritmicamente divergentes, e diagramas com apenas duas linhas externas do supercampo espinorial A_α (caso (2)) são finitos.

¹ *Observação:* Em cada caso, o número de linhas externas dos outros campos é igual a zero.

Temos ainda a situação $E_\Sigma = 1$, em que se apresentam duas possibilidades:

(a) Para o caso em que o vínculo é dado pelo comutador $[\bar{\phi}_a, \phi_a]_* = 0$, o diagrama da função de um-ponto (em inglês: *tadpole*) do campo Σ é identicamente nulo.

(b) Para o caso em que o vínculo é dado pelo anticomutador $\{\bar{\phi}_a, \phi_a\}_* = N/g$, seu único efeito é fixar m como a massa do supercampo ϕ .

A última situação ($E_A = N_D = 1$), que em princípio contém divergências lineares, na realidade apresenta contribuições proporcionais a $\int d^5z D^\alpha A_\alpha$, as quais são nulas dado que os campos tendem rapidamente a zero considerando a fronteira no infinito.

Portanto, os diagramas do conjunto cujo grau de divergência superficial é $\omega = 1$, até a ordem dominante da expansão $1/N$, apresentam no máximo divergências logarítmicas. Isso significa que correções quânticas, até essa ordem, não implicam em singularidades infravermelhas não-integráveis.

A partir deste ponto vamos nos preocupar com os diagramas do segundo conjunto, ou seja, diagramas com $\omega = 0$. Esse conjunto, do ponto de vista da mistura IV-UV não implica nas singularidades infravermelhas não-integráveis. Porém, devido a presença de divergências ultravioletas, uma análise mais cuidadosa deve ser feita. Assim, temos duas famílias de diagramas:

(1) Família com diagramas associados a processos cuja parte divergente pode ser absorvida em uma reparametrização da Lagrangiana (Lagrangiana de contra-termos, \mathcal{L}_{CT}). Nessa família, apresentam-se os seguintes diagramas:

(a) diagramas com $E_\Sigma = 1$ e $E_\phi = 2$.

(b) diagramas com $E_A = 1$, $E_\phi = 2$ e $N_D = 1$.

(c) diagramas com $E_\phi = E_A = 2$.

(d) diagramas com $E_\Sigma = 2$.

Essa família de diagramas, até a ordem $1/N$, apresenta divergências que podem ser eliminadas pela adição de contra-termos adequados, não implicando na quebra da renormali-

zabilidade perturbativa.

A partir dos termos de interação com a presença do supercampo A^α podemos construir termos de interação efetiva para o supercampo A^α , necessários para completar a Lagrangiana induzida de Maxwell-Chern-Simons Não-Comutativo.

Temos também:

(2) A família com diagramas que não estão associados a processos cuja parte divergente pode ser absorvida por uma reparametrização da Lagrangiana. Nessa família, temos os seguintes diagramas:

(a) diagramas com $E_A = 4$.

(b) diagramas com $E_\phi = 4$.

(c) diagramas com $E_\Sigma = 1$ e $E_A = 2$.

(d) diagramas com $E_A = 3$ e $E_D = 1$.

Esses diagramas do ponto de vista da renormalização ultravioleta, são bastante perigosos considerando a não existência de contratermos para absorver suas divergências. No entanto, a parte divergente correspondente a esses diagramas, dado que seus integrandos são ímpares no momento do laço, é nula por integração simétrica.

A prova de que a parte divergente correspondente a esses diagramas é sempre ímpar no momento do laço k é baseada no seguinte argumento:

Por inspeção, temos que a estrutura geral² dessas integrais é dada por

$$\mathcal{J} \sim \int d^3k \frac{(D^2)^{2n}}{k^{2n+2}}, \quad (5.6)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$

²Consideramos apenas a estrutura da parte dominante.

Observando que a contribuição não-nula da integral \mathcal{J} dada de acordo com

$$\underbrace{D^2 \dots D^2}_{2n \text{ vezes}} \longrightarrow \underbrace{D^2 \dots D^2}_{2n-1 \text{ vezes}} \cdot \delta D^2 \delta \quad , \quad (5.7)$$

e considerando $D^2 \sim k$ e $\delta D^2 \delta = \delta$.

Concluimos que a parte divergente dominante da integral \mathcal{J} no momento do laço k dada por

$$\mathcal{J} \sim \int d^3 k \frac{(D^2)^{2n-1} \cdot \delta D^2 \delta}{k^{2n+2}} \longrightarrow \int d^3 k \frac{k^{2n-1}}{k^{2n+2}} \delta \quad , \quad (5.8)$$

é sempre ímpar no momento integração k , como queríamos provar. Assim os diagramas da família (2) apresentam parte divergente nula, e não acarretam problemas para a renormalização ultravioleta.

No caso do comutador ($a = 1$ e $b = 0$) a invariância por conjugação de carga implica que termos proporcionais a $\Sigma A^\alpha A_\alpha$ são nulos, para qualquer ordem finita da expansão. Em particular esse resultado pode ser visto na primeira ordem de $1/N$, cujo termo proporcional a

$$\int d^2 \theta d^3 p_1 d^3 p_2 A^\alpha(p_1, \theta) A_\alpha(p_2, \theta) \Sigma(-p_1, -p_2, \theta) \text{sen}(p_1 \wedge p_2) \quad , \quad (5.9)$$

é identicamente nulo.

Capítulo 6

Conclusão

Nesta monografia a possibilidade de incorporar férmions de maneira minimal e supersimétrica ao modelo CP^{N-1} não-comutativo em três dimensões foi considerada. Obtemos que em ambas as situações a função de vértice de dois pontos contendo o campo de calibre (campo vetorial A_μ no caso da extensão minimal, e supercampo espinorial A_α no caso da extensão supersimétrica) é bem comportada para baixos momentos, não apresentando singularidades infravermelhas não-integráveis. Porém, na extensão minimal a correção para a auto-energia do campo escalar φ apresenta a singularidade infravermelha não-integrável que invalida a série perturbativa da expansão $1/N$.

Uma proposta para resolver esse problema, foi considerar a extensão supersimétrica do modelo. Essa extensão, feita no formalismo de supercampos, fornece que a auto-energia do supercampo escalar ϕ não apresenta a singularidade infravermelha não-integrável que estava presente no modelo com férmions acoplados minimalmente.

No setor ultravioleta da extensão supersimétrica a função de vértice de dois-pontos do supercampo A_α é finita por regularização dimensional. A auto-energia do supercampo ϕ apresenta uma divergência logarítmica que pode ser cancelada num calibre especial ($\xi = -1$) ou absorvida em uma renormalização de função de onda.

Através de uma análise geral do grau de divergência superficial do modelo CP^{N-1} não-comutativo em três dimensões, com férmions acoplados de maneira supersimétrica, obtemos que o modelo contém no máximo divergências logarítmicas, que do ponto de vista da expansão perturbativa na TQC-NC não é problemática.

Assim, provamos que até a ordem de $1/N$ do modelo CP^{N-1} não-comutativo, o requisito da supersimetria é fundamental para a construção de uma TQC-NC livre do problema acarretado pela mistura IV-UV.

Do ponto de vista da renormalização ultravioleta não há diferença em considerarmos o comutador ou anticomutador na interação com o campo auxiliar Σ , visto que tal escolha não afeta a parte planar das amplitudes.

O argumento para a preservação da estrutura Moyal dos vértices de interação segue de acordo com a referência [9]

O não cancelamento da divergência infravermelha quadrática na função de dois pontos do campo de matéria φ , quando férmions são acoplados de maneira minimal, considerando o resultado da extensão supersimétrica, leva-nos a suspeitar que e o não cancelamento se dá devido a ausência, na extensão minimal, dos campos auxiliares necessários para a construção da extensão supersimétrica do modelo.

Uma observação adicional vem, devido ao fato de termos adotado a representação adjunta para os campos de matéria. Nessa representação quando a simetria de calibre é exigida, o acoplamento entre os campos de calibre e de matéria na derivada covariante, comparecem na forma de comutadores, ou seja $D_\mu\chi = \partial\chi + i[\chi, A_\mu]_*$ para $\chi = \varphi, \psi$. Desta forma se pensarmos ingenuamente em um tipo de limite comutativo ($\Theta \rightarrow 0$), as interações provindas de tais termos desaparecem, podendo em alguns casos levar a uma teoria livre, como no caso do modelo CP^{N-1} não-comutativo supersimétrico cuja interação com o campo auxiliar Σ foi dada pelo comutador $(\Sigma * [\bar{\phi}, \phi]_*)$. Assim, dentro do espírito de um *princípio de correspondência*¹, em geral teorias não-comutativas não correspondem a generalizações de teorias comutativas. Na realidade, o estudo que desenvolvemos sobre as extensões do modelo CP^{N-1} não-comutativo fornece que os efeitos obtidos são de natureza puramente não-comutativa.

¹Esta doutrina, devida a Niels Bohr, estabelece que de uma teoria quântica satisfatória deve ser possível deduzir a mecânica clássica e a eletrodinâmica considerando um limite apropriado.

Apêndice A

Algumas relações úteis

símbolo de Levi-Civita

$$\epsilon^{012} = 1$$

$$\epsilon_{012} = -1$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda}\epsilon_{\lambda\sigma\alpha} = \delta_{\sigma}^{\mu}\delta_{\alpha}^{\nu} - \delta_{\alpha}^{\mu}\delta_{\sigma}^{\nu}. \quad (\text{A.1})$$

Matrizes de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Regra de Leibniz:

A:

$$D_{\alpha}(fg) = (D_{\alpha}f)g + f(D_{\alpha}g) \quad (\text{A.2})$$

com f e g funções bosônicas.

B:

$$D^\alpha((D_\alpha f)g) = D^\alpha(D_\alpha f)g + (D^\alpha f)(D_\alpha g) \quad (\text{A.3})$$

Exemplo 1:

$$\begin{aligned} D^2(fg) &= \frac{1}{2}D^\alpha D_\alpha(fg) = \frac{1}{2}D^\alpha[(D_\alpha f)g + f(D_\alpha g)] \\ &= \frac{1}{2}[(D^\alpha D_\alpha f)g - 2(D_\alpha f)(D^\alpha g) + f(D^\alpha D_\alpha g)] \\ &= [(D^2 f)g + (D^\alpha f)(D_\alpha g) + f(D^2 g)]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Exemplo 2:

$$D_\alpha(fG_\beta H^\alpha) = (D_\alpha f)G_\beta H^\alpha + f(D_\alpha G_\beta)H^\alpha - fG_\beta(D_\alpha H^\alpha). \quad (\text{A.5})$$

onde f é uma função bosônica e G_β e H^α são funções fermiônicas.

Integração por partes:

$$\int (D_\alpha f)g = - \int f(D_\alpha g) \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \int (D^2 f)g &= \frac{1}{2} \int D^\alpha (D_\alpha f)g = -\frac{1}{2} \int (D^\alpha f)(D_\alpha g) \\ &\quad \frac{1}{2} \int f D^\alpha (D_\alpha g) = \int f(D^2 g) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Apêndice B

Tabela de integrais d -dimensionais no espaço de Minkowski

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 + M^2]^n} = \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{M^2}\right)^{n - \frac{d}{2}} \quad (\text{B.1})$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{[k^2 + M^2]^n} = \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{M^2}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \quad (\text{B.2})$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 + M^2]^n} = \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{M^2}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \quad (\text{B.3})$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k^2)^2}{[k^2 + M^2]^n} = \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{d(d+2)}{4} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{M^2}\right)^{n - \frac{d}{2} - 2} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma}{[k^2 + M^2]^n} &= \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{M^2}\right)^{n - \frac{d}{2} - 2} \\ &\times \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i2k \wedge p}}{[k^2 + M^2]^n} &= \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{M^2}\right)^{n-\frac{d}{2}} \\
&\times 2 \left(\frac{|\tilde{p}|M}{2}\right)^{n-\frac{d}{2}} K_{n-\frac{d}{2}}(|\tilde{p}|M)
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Apêndice C

Integrais da TQC-NC

$$I(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik \cdot \tilde{p}}}{[k^2 + M^2]^2} = \frac{i}{8\pi M} e^{-M\sqrt{\tilde{p}^2}} \quad (\text{C.1})$$

$$I^{\mu\nu}(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 + M^2]^2} e^{ik \cdot \tilde{p}} = \frac{i}{8\pi} \left[g^{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{\tilde{p}^2}} - \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \left(M + \frac{1}{\sqrt{\tilde{p}^2}} \right) \right] e^{-M\sqrt{\tilde{p}^2}} \quad (\text{C.2})$$

$$J(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{[k^2 + M^2]^2} e^{ik \cdot \tilde{p}} = \frac{i}{8\pi} \left(-M + \frac{2}{\sqrt{\tilde{p}^2}} \right) e^{-M\sqrt{\tilde{p}^2}} \quad (\text{C.3})$$

Seja $2k \wedge p = k_\mu \Theta^{\mu\nu} p_\nu$, escrevemos $k_\mu \tilde{p}^\mu = k \cdot \tilde{p}$ onde $\tilde{p}^\mu = \Theta^{\mu\nu} p_\nu$.

Bibliografia

- [1] Snyder, H. S., *Quantized Space-Time*, Phys. Rev. **71**, 38 (1947)
- [2] De Witt, B., *The quantization of geometry*, in L. Witten (ed.) *Gravitation*, 266-381 (1962).
- [3] Smolin L., *How far are we from the quantum theory of gravity?*, hep-th/0303185, (2003).
- [4] Seiberg N. e Witten E., *String Theory and Noncommutative Geometry*, **JHEP 9909**, 032 (1999).
- [5] Gomis J. e Mehen T., *Space-time noncommutative field theories and unitarity*, Nuclear Physics **B 591**, 265 (2000).
- [6] Filk, T., *Divergencies in a field theory on quantum space*, Phys. Lett. **B 376**, 53-58 (1996).
- [7] Minwalla S., Van Raamsdonk e Seiberg N., *Noncommutative Perturbative Dynamics*, **JHEP 0002**, 020 (2000).
- [8] Girotti H.O., Gomes M., Rivelles V.O. e da Silva A.J., *A consistent noncommutative field theory: the Wess-Zumino model* Nuclear Physics **B587**, 299 (2000).
- [9] Girotti H. O., Gomes M., Petrov A. Yu., Rivelles V. O. e da Silva A. J., *The three-dimensional noncommutative nonlinear sigma model in superspace*, Phys. Lett. **B 521**, 119-126 (2001).
- [10] Girotti H.O., Gomes M., Rivelles V.O. e da Silva A.J., *The Noncommutative Supersymmetric Nonlinear Sigma Model*, Int. J. Mod. Phys. A **17**, No. 11, 1503 (2002).

- [11] Hayakawa M., *Perturbative analysis on infrared aspects of noncommutative QED on R^4* , Phys. Lett. **B 478**, 394 (2000); Hayakawa M., *Perturbative analysis on infrared and ultraviolet aspects of noncommutative QED on R^4* , hep-th/9912167 (1999); Martin C. P. e Sánchez-Ruiz D., *One loop UV divergent structure of $U(1)$ Yang-Mills theory on noncommutative R^4* , Phys. Rev. Lett. **83**, 476 (1999).
- [12] Ferrari A. F., Girotti H. O., Gomes M., Petrov A. Yu., Ribeiro A. A., Rivelles V. O. e da Silva A. J., *Superfield Covariant Analysis of the Divergence Structure of Noncommutative Supersymmetric QED(4)*, Phys.Rev. D **69**, 025008 (2004); Ferrari A. F., Girotti H. O., Gomes M., Petrov A. Yu., Ribeiro A. A. e da Silva A. J., *On the Finiteness of Noncommutative Supersymmetric QED(3) in the Covariant Superfield Formulation*, Phys. Lett. **B 577**, 83-92 (2003); Ferrari A. F., Girotti H. O., Gomes M., Petrov A. Yu., Ribeiro A. A., Rivelles V. O. e da Silva A. J., *Towards a Consistent Noncommutative Supersymmetric Yang-Mills Theory: Superfield Covariant Analysis*, Phys. Rev. D **70**, 085012 (2004); Ferrari A. F., Girotti H. O., Gomes M., Petrov A. Yu., Ribeiro A. A. e da Silva A. J., *On the Consistency of the Three-Dimensional Noncommutative Supersymmetric Yang-Mills Theory*, Phys. Lett. **B 601**, 88-92 (2004); Asano E. A., de Brito L. C. T., Gomes M., Petrov A. Yu. e da Silva A. J., *Consistent Interactions of the 2+1 Dimensional Noncommutative Chern-Simons Field*, hep-th/0410257 (2004).
- [13] Eincheherr H., *$SU(N)$ Invariant Nonlinear Sigma Models*, Nuclear Physics **B 146**, 215-223 (1978); Cremmer E. e Scherk J., *The Supersymmetric Nonlinear Sigma Model in Four-Dimensions and its Coupling to Supergravity*, Phys. Lett. **B 74**,341 (1978); Golo V. e Perelomov A., *Solution of the Duality Equations for the Two-Dimensional $SU(N)$ Invariant Chiral Model*, Phys. Lett. **B 79**, 112 (1978).
- [14] Di Vecchia P., D'Adda A. e Lüscher M., *A $1/N$ Expandable Series of Non-Linear σ Models with Instantons*, Nuclear Physics **B 146**, 63 (1978); Di Vecchia P., D'Adda A. e Lüscher M., *Confinement and Chiral Symmetry Breaking in CP^{N-1} Models with Quarks*, Nuclear Physics **B 152**, 125 (1978).
- [15] Belavin A. A. e Polyakov A. M., *Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets*, JETP Lett. **22**, 245 (1975); Haldane F. D. M., *Nonlinear Field Theory of*

- Large Spin Heisemberg Antiferromagnets. Semiclassically Quantized Solitons of the One-Dimensional Easy Axis Neel State*, Phys. Rev. Lett. **50**, 1153 (1983).
- [16] Asano E. A., Girotti H. O., Gomes M., Petrov A. Yu., Rodrigues A. G. e da Silva A. J., *Coupling of fermions to the three-dimensional noncommutative CP^{N-1} model: Minimal and supersymmetric extensions*, Phys. Rev. D **69**, 105012 (2004).
- [17] Asano E. A., Gomes M., Rodrigues A. G. e da Silva A. J., *(2+1)-dimensional noncommutative CP^{N-1} model*, Phys. Rev. D **69**, 065012 (2004).
- [18] Chu C. S., *Induced Chern-Simons and WZW Action in Noncommutative Space-Time*, Nuclear Physics **B 580**, 352 (2000); Bichl A. A., Grimstrup J. M., Putz V. e Schweda M., *Perturbative Chern-Simons Theory on Noncommutative R^3* , JHEP **0007**, 046 (2000); Grandi N. e Silva G. A., *Chern-Simons action in noncommutative space*, Phys. Lett. **B 507**, 345-350 (2001).
- [19] Wess J. e Zumino B., *A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations*, Phys. Lett. **B 49**, 52 (1974); Salan A e Strathdee J., *Supergauge Transformations*, Nuclear Physics **B 76**, 477 (1974); Ferrara S., Wess J. e Zumino B., *Supergauge Multiplets and Superfields*, Phys. Lett. **B 51**, 239 (1974).
- [20] Nekrasov N. A. e Schwartz A., *Instantons on noncommutative R^4 and (2,0) Superconformal Six-Dimensional Theory*, Commun. Math. Phys. **198**, 689-703 (1998); Mariño M., Minasian R., Moore G. e Strominger A., *Nonlinear instantons from supersymmetric p-branes*, JHEP **0001**, 005 (2000); Furuuchi K., *Instantons on Noncommutative R^4 and Projection Operators*, Prog. Theor. Phys. **103**, 1043-1068 (2000); Nekrasov N. A., *Noncommutative Instantons Revisited*, Commun. Math. Phys. **241**, 143-160 (2003).
- [21] Lee B-H., Lee K. e Yang H. S., *The $CP(n)$ model on noncommutative plane*, Phys. Lett. **B 498**, 277-284 (2001); Foda O. Jack I. e Jones D.R.T., *General classical solutions in the noncommutative CP^{N-1} model*, Phys. Lett. **B 547**, 79-84 (2002).
- [22] Gomes. M., *Renormalization in Noncommutative Field Theory, Prepared for 11th Jorge Andre Swieca Summer School on Particle and Fields, Campos do Jordão, Brazil*, 251-290 (2001); Girotti H. O., *Noncommutative Quantum Field Theories*, hep-

- th/0301237 (2003), *Lectures given at 12th Jorge Andre Swieca Summer School on Particle and Fields, Campos do Jordão, Brazil.*
- [23] Douglas M. R. e Nekrasov N. A., *Noncommutative Field Theory*; Szabo R. S. *Quantum field theory on noncommutative spaces* Phys. Rep. **378**, 207-299 (2003).
- [24] Weyl H., *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, New York (1931).
- [25] Wigner E. P., *Quantum corrections for thermodynamic equilibrium*, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
- [26] Groenewold, H. J., *On the principles of elementary quantum mechanics*, Physica **12**, 405 (1946); Moyal, J. E., *Quantum mechanics as a statistical theory*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45**, 99 (1949).
- [27] Aref'eva I. Ya. e Azakov S. I., *Renormalization and Phase Transition in the Quantum CP^{N-1} Model ($D = 2, 3$)*, Nuclear Physics **B 162**, 298 (1980).
- [28] Witten E., *Instantons, the quark model, and de $1/N$ expansion*, Nuclear Physics **B 149**, 285 (1979).
- [29] Faddeev L. D., , Trudi MIAN 135 , 218 (1975).
- [30] Witten E., *The $1/N$ expansion in atomic physics*, Recent Developments in Gauge Theories ed. G 't Hooft et al, New York, Plenum, 403 (1980).
- [31] Gross D. e Neveu A., *Dynamical Symmetry Breaking in Asymptotically Free Field Theories*, Phys. Rev. D **10**, 3235 (1975).
- [32] Aref'eva I. Ya., Belov D. M., e, Koshelev A. S., *Two-loop diagrams in noncommutative φ_4^4 theory*, Phys. Lett. **B 476**, 431 (2000).
- [33] Chepelev I. e Roiban R., *Renormalization of Quantum Field Theories on Noncommutative R^d , I. Scalars*, **JHEP 0005**, 037 (2000).
- [34] Matusis A., Susskind L. e Toumbas N., *The IR / UV Connection in the Noncommutative Gauge Theories*, **JHEP 0012**, 002 (2000).

- [35] Gates Jr. S. J., Grisaru M. T., Rocek M., e, Siegel W., *Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*, The Benjamin-Cummings Publishing Company, INC. (1983).
- [36] Ruiz Ruiz F. e van Nieuwenhuizen P., *Lectures on Supersymmetry and Supergravity in 2+1 Dimensions and Regularization of Supersymmetric Gauge Theories*, Prepared for 2nd Mexican School on Gravitation and Mathematical Physics, in: *Recent developments in gravitation and mathematical physics*, Tlaxcala, Mexico (1996)
- [37] Ciuchini M. e Gracey J. A., *On the $N = 2$ supersymmetric $CP(N)$ σ model and Chern-Simons terms*, Nuclear Physics **B 454**, 103 (1999); Inami T., Saito Y., e, Yamamoto M., *Vanishing Next-to-Leading Corrections to the β -Function of the SUSY CP^{N-1} Model in Three Dimensions*, Prog. Theor. Phys. Vol. 103, No. 6, 1283 (2000).