Universidade de São Paulo
Instituto de Física

O TEOREMA DE NOETHER NA TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN

Gilberto Alves Vicente

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre em Ciências.

Orientador:
Prof. Dr. Henrique Fleming

Data da defesa 26/08/88

São Paulo
1988

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Vicente, Gilberto Alves
O teorema de Noether na teoria de Einstein-Cartan. São Paulo, 1988.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.
Área de Concentração: Física das Partículas Elementares.
Orientador: Prof. Dr. Henrique Fleming

Unitermos: 1.Teoria de Einstein-Cartan; 2.Teorema de Noether na relatividade geral; 3.Teorema de Noether na teoria de Einstein-Cartan.

USP/IF/SBI - 31/88

Aos meus pais

À Arlete

"Se os poucos que sabem
muito não ensinarem os
muitos que sabem pouco,
todos seremos vítimas da
eterna servidão".

Jacob Bazarian

Agradecimentos

São muitas as pessoas a quem gostaria de agradecer. Na impossibilidade de citar todas mencionarei apenas algumas, sem entretanto me esquecer das outras.

Agradeço aos colegas *Antônio V. Barranco*, *José C. Brunelli* e *José R. Gonçales (Zé)*, pelas preciosa ajuda nos micros;

Ao *Rênio Mendes* e principalmente ao *Eduardo Resek* pelas iluminantes discussões;

Ao Prof. *Ernesto von Rückert* pela constante amizade;

Ao *CNPq* e à *FAPESP*, pelo auxílio financeiro, respectivamente nos periodos (03/86 a 02/87) e (03/87 a 08/88).

Finalmente, meu agradecimento especial ao Prof. *Henrique Fleming* pela orientação, apoio e sobretudo paciência.

Resumo

Em 1972 Roman Jackiw apresentou, restringindo-se ao espaço-tempo de Minkowski, uma formulação do Teorema de Noether de grande simplicidade e clareza. Isto sugeriu a reformulação desse teorema em situações mais complicadas, como a Relatividade Geral, com ou sem férmions, e a teoria de Einstein-Cartan, que usa espaços com torção. Há consideráveis vantágens pedagógicas no método usado. Dentro deste espírito, a tese trata de obter leis de conservação associadas a grupos de movimento em espaços com torção, com um transporte paralelo que conserva comprimentos, e o faz no caso mais simples possível com acoplamento não trivial: o campo de Proca.

Abstract

In 1972 Roman Jackiw introduced, for Minkowski space times, a formulation of Noether's Theorem of great simplicity and neatness. This suggested the reformulation of the theorem in more complicated situations, as General Relativity, with or without fermions, and Einstein-Cartan theory, which utilizes spaces with torsion. The method has several pedagogical virtues. In this spirit, the thesis obtains conservation laws associated to groups of motion in space with torsion, with lenght-preserving connection, in the simplest non trivial case: Proca's vectorial field.

Introdução

O teorema de Emy Noether[8] nos dá de forma clara e límpida a conexão entre Simetrias e Leis de Conservação. Podemos encontrar sua aplicação implícita (ou explicitamente) em tratados modernos da Física Teórica, como por exemplo Landau-Lifshitz[3], na definição de quantidades conservadas como energia ou momento em termos das simetrias às quais estas estão associadas.

Neste trabalho nós estendemos o tratamento dado a este teorema no espaço de Riemann para o espaço de Riemann-Cartan. A motivação original veio do fato de que na teoria da Relatividade Geral de Einstein o conceito de momento angular intrínseco não parece ser tão natural como na Relatividade Restrita, onde a invariância com respeito ao grupo de Poincaré naturalmente nos conduz ao conceito de spin. Na Relatividade Geral, o único conjunto de identidades obtidas da covariância da Lagrangeana é a conservação da energia e do momento. O spin contudo, é uma propriedade fundamental de uma partícula e não deveria ser perdida simplesmente porque a teoria é covariantemente desenvolvida com respeito a transformações mais gerais de coordenadas. Uma maneira natural de se transpor esta dificuldade é usar uma geometria mais geral. Desde que o espaço de Riemann-Cartan não é portador unicamente de curvatura mas também de torção, outra quantidade dinâmica em adição ao simples tensor simétrico momento-energia, conhecida como momento angular de spin, participa na formação da geometria.

O trabalho está dividido em três partes bem distintas:

Na primeira parte, para que o conteúdo seja auto-consistente, damos um resumo das partes relevantes do formalismo matemático no espaço de Riemann-Cartan. Nessa seção também mostramos que a conexão, sob certas circunstâncias, pode ser considerada como função da torção, da métrica e de suas derivadas. Usando o princípio de acoplamento mínimo, obtemos uma Lagrangeana da matéria que difere da Lagrangeana da Teoria da Relatividade convencional (como é dada por Landau-Lifshitz[3]), uma vez que é também função da torção.

Na segunda parte reproduzimos a prova de Jackiw[9] para o teorema no espaço-tempo plano, que possui notáveis virtudes pedagógicas. Em seguida usando o tratamento de Fleming[1,2], estendemos esses resultados a espaços-tempo curvos.

Na terceira parte deduzimos as leis de conservação que decorrem da invariância da métrica e da torção por transformações infinitesimais (grupos de movimento). Com a ajuda dessas identidades, mostramos que o tensor momento-energia e o tensor de spin dinamicamente definidos, são idênticos às quantidades canônicas que seguem do formalismo. Estas identidades também mostram que a parte antissimétrica está relacionada com o spin.

Usamos o formalismo matemático e as convenções de Schouten[4]. A abordagem da Teoria de Einstein-Cartan segue o tratamento de Hehl *et al*[11] e, no que se refere a campos de Killing, está de acordo com Weinberg[12].

Capítulo I

TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN
(SCIAMA-KIBBLE)

I-1 Introdução

A Teoria da Relatividade de Einstein foi originalmente formulada em nível macroscópico. A unica propriedade da matéria que serve como fonte nesta teoria é a distribuição de energia-momento no espaço-tempo. Se quisermos estudar a gravitação no domínio microscópico, devemos extrapolar nossos conhecimentos a respeito do mundo macroscópico uma vez que se tem pouco conhecimento experimental do assunto. A teoria que discutiremos é uma tentativa de encontrar a teoria de campo gravitacional correta para a microfísica. Entretanto, ainda nos restringiremos a uma Teoria de Campo Clássica com o campo da matéria dado por $\psi(x^\mu)$, que são funções, e não operadores que não comutam.

Na microfísica, no que diz respeito à estrutura da Teoria Clássica de Campo, suporemos válida a Teoria da Relatividade Restrita. Assim, os campos que, numa futura versão quântica estarão associados às partículas são caracterizados por "m" e "s", "m" sendo a massa conectada a parte translacional e "s" o spin, ligado à parte rotacional do grupo de Poincaré. Assim sendo, tanto "m" como "s" estão sistematicamente relacionados com o espaço-tempo contínuo de Minkowski na Relatividade Restrita. Devido ao fato de os spins das partículas que compõem os corpos macroscópicos estarem orientados em geral aleatoriamente, dando como resultado um spin total médio iqual a zero, o tensor de spin dos corpos é nulo. Isto explica porque as propriedades dos corpos macroscópicos são satisfatoriamente descritas unicamente pelo tensor momento-energia e justifica porque a descrição macroscópica do espaço-tempo pela geometria Riemanniana permanece válida.

Quando nos aventuramos pela microfísica, pode não ser suficiente conhecermos apenas o tensor momento-energia para uma interpretação dos fenômenos físicos. Pode ser necessária a inclusão do tensor de spin, já que o momento angular de spin também caracteriza a matéria cinematicamente. Podemos assumir por hipótese que ele também é fonte do campo gravitacional. Por campo gravitacional entendemos aqui um campo inseparavelmente acoplado à geometria do espaço. Esperamos que, analogamente ao acoplamento entre o tensor momento-energia e a métrica, tenhamos um acoplamento entre o spin e uma quantidade geométrica do espaço-tempo. Esta quantidade estaria relacionada com os graus de liberdade de rotação no espaço-tempo. De acordo com isto, iremos procurar as manifestações dinâmicas do spin de maneira análoga ao que é feito para o momento-energia na Relatividade Geral de Einstein. Esta teoria deve ser tal que, levada aos seus limites, ou seja, ao domínio macroscópico, dê os mesmos resultados da Teoria da Relatividade Geral. Desta forma somos conduzidos a um espaço-tempo mais geral que o espaço-tempo de Riemann da Relatividade Geral, conhecido como espaço-tempo 4-dimensional de Riemann-Cartan U_4. A parte não Riemanniana da conexão afim que caracteriza um U_4 é o tensor de contorção $K_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ definido em (1.15), o qual é acoplado ao spin. Algumas vezes a teoria U_4 da gravitação é também chamada de *Teoria de Einstein-Cartan-(Sciama-Kibble)* em homenagem a Einstein, Cartan, Sciama e Kibble. Estes dois últimos autores chegaram a esta teoria por outro caminho, a procura de uma teoria de "*gauge*" do grupo de Poincaré.

I-2 O Espaço-Tempo de Riemann - Cartan U_4

A - Variedade diferenciável

Suporemos que o espaço-tempo tem as propriedades de um contínuo, ou seja, de uma variedade diferenciável 4-dimensional X_4. Um ponto neste contínuo pode ser rotulado por coordenadas reais x^k com k = 0, 1, 2 e 3, onde

"0" refere-se à coordenada temporal e 1, 2 e 3 referem-se às coordenadas espaciais. Uma mudança de coordenadas, ou seja, uma troca de índices dos pontos (ou transformação de coordenadas), não altera o contínuo sob consideração. Isto implica que se ψ for uma função em X_4 então, num novo sistema de coordenadas, tem-se uma nova função ψ' agora definida no ponto x'^{λ} de tal forma que

$$\psi'(x'^{\lambda}) = \psi(x^{\lambda}) \tag{1.1}$$

Esta é a lei de transformação de um escalar.

Da mesma forma que na Teoria Geral da Relatividade de Einstein, pode-se definir também campos vetoriais e tensoriais, contra e covariantes, tensores mistos e densidades tensoriais, ou seja, existe um cálculo tensorial em U_4.

B - A Conexão Afim

Para alcançarmos a mesma riqueza de estrutura da Relatividade Geral, devemos acrescentar a X_4 uma estrutura adicional: a noção de transporte paralelo. Consideremos inicialmente um campo vetorial. Se seu valor num ponto x^{μ} é A^{μ}, então no ponto vizinho $x^{\mu} + dx^{\mu}$ será $A^{\mu} + dA^{\mu}$, onde dA^{μ} é determinado pela fómula dos acrécimos do Cálculo Diferencial. Dizemos que A^{μ} foi transportado paralelamente de x^{μ} para $x^{\mu} + dx^{\mu}$, quando sofrer uma variação δA^{μ} dada por

$$\delta A^{\mu} = -\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}(x) A^{\nu} dx^{\lambda} \tag{1.2}$$

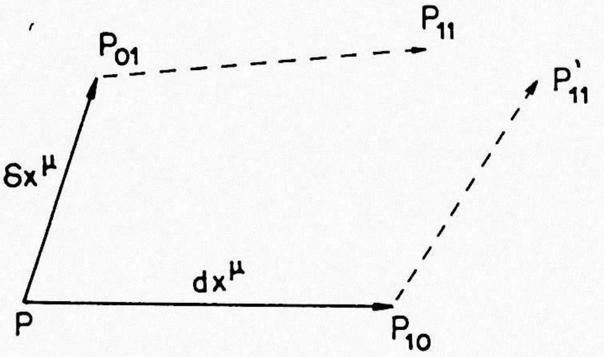
O conjunto das sessenta e quatro componentes $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}$ é a *conexão afim* ou *afinidade*. Uma variedade X_4 equipada com "Γ" é chamada de espaço-tempo com conexão linear ou L_4.

A parte antissimétrica da conexão afim

$$S_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\right) \tag{1.3}$$

ao contrário da parte simétrica, transforma-se como um tensor de terceira ordem, tendo portanto 24 componentes independentes. É uma quantidade puramente afim conhecida como *tensor das torções de Cartan*. Se tentarmos construir paralelogramas infinitesimais utilizando campos vetoriais em um L_4, nota-se que eles não se fecham em geral. Esta falha no fechamento é proporcional ao tensor de torção. Em outras palavras, a torção quebra os paralelogramas infinitesimais tornando portanto impossível sua construção em L_4. Vejamos como ficam:

Consideremos inicialmente dois campos vetoriais infinitesimais linearmente independentes em uma vizinhança de um ponto "P". Seja dx^μ e δx^μ as componentes desses campos no ponto "P".



Mais precisamente, vamos construir o campo "$\vec{x}$" por transporte paralelo de dx^μ ao longo de $\overrightarrow{PP_{01}}$ e o campo "$\vec{y}$" por transporte paralelo de δx^μ ao longo de $\overrightarrow{PP_{10}}$. Portanto

$$\overrightarrow{P_{01}P_{11}} = dx^\mu + \delta dx^\mu = dx^\mu - \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(x)\, dx^\nu \delta x^\lambda$$

$$\overrightarrow{P_{10}P'_{11}} = \delta x^\mu + d\delta x^\mu = \delta x^\mu - \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(x)\, \delta x^\nu dx^\lambda$$

Para que seja formado um paralelograma devemos ter então,

$$\begin{aligned} \delta dx^\mu - d\delta x^\mu &= -\left[\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(x) - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(x)\right] dx^\nu \delta x^\lambda \\ &= -2S_{\nu\lambda}{}^\mu dx^\nu \delta x^\lambda \\ &= 0 \end{aligned}$$

Porém isto somente será satisfeito se $S_{\nu\lambda}{}^\mu = 0$, ou seja, sem a presença de torção.

C - Métrica

Vamos introduzir agora uma hipótese motivada pela Teoria da Relatividade Especial: Em L_4 existe para cada ponto um campo tensorial métrico independente $g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)$, de tal forma que nos é permitido medir localmente distâncias e ângulos. Tal variedade recebe o nome de (L_4, g). O quadrado do intervalo infinitesimal entre x^μ e $x^\mu + dx^\mu$ é determinado por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.4}$$

Podemos construir o tensor métrico contravariante $g^{\mu\nu}$ correspondente a $g_{\mu\nu}$ usando-se a definição

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta^\mu{}_\nu$$

Suporemos que $g_{\mu\nu}$, localmente e em coordenadas apropriadas, sempre poderá ser expresso na forma da métrica de Minkowski

$$g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$$

Uma vez introduzida uma métrica na variedade, podemos analizar qual a relação desta métrica com a conexão afim associada a esta variedade. Para isto recorremos à definição de derivada covariante do vetor covariante A_μ e do vetor contravariante A^μ*

$$A^\mu{}_{;\nu} = \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} A^\lambda \tag{1.5}$$

$$A_{\mu\,;\nu} = \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} A_\lambda \tag{1.6}$$

Será útil conhecermos também a expressão para a derivada covariante de um tensor de segunda órdem $A_{\mu\nu}$

$$A_{\mu\lambda;\nu} = \partial_\nu A_{\mu\lambda} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} A_{\sigma\lambda} - \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} A_{\mu\sigma} \tag{1.7}$$

Por outro lado, o intervalo definido em (1.4) se tornará invariante sob transporte paralelo e, portanto, um conceito útil na física do espaço-tempo

---

* *Com o objetivo de simplificar a notação, é comum a substituição do símbolo de devivação covariante " $;\nu$ " por " ∇_ν ".*

ordinário, somente quando adotamos uma idéia adicional da Relatividade Geral: Exigimos que o campo métrico $g_{\mu\nu}$ seja covariantemente constante, vinculando desta forma a conexão afim. Assim da imposição

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0 \tag{1.8}$$

conhecida como condição de metricidade, podemos, com o uso de (1.7), deduzir que*

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} \tag{1.9}$$

Fazendo-se uma permutação cíclica dos índices de (1.9), tem-se que

$$-\partial_\nu g_{\lambda\mu} = -\Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} g_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} g_{\sigma\lambda} \tag{1.10}$$

$$-\partial_\mu g_{\nu\lambda} = -\Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} g_{\sigma\lambda} \tag{1.11}$$

Somando estas três equações obtemos:

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda} = (\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda}) g_{\sigma\nu} + (\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}) g_{\sigma\mu} \\ - (\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}) g_{\sigma\lambda}$$

Usando a definição (1.3) encontramos:

$$2\Gamma^\sigma{}_{(\nu\mu)} = \left(-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda}\right) + 2S_{\lambda\mu}{}^\sigma g_{\sigma\nu} + 2S_{\lambda\nu}{}^\sigma g_{\sigma\mu} \tag{1.12}$$

Aplicando-se $g^{\lambda\sigma}$ a ambos os membros, teremos

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(-\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\nu\sigma}) - S_\nu{}^\lambda{}_\mu + S^\lambda{}_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}{}^\lambda \tag{1.13}$$

onde

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \;\; \nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(-\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\nu\sigma}) \tag{1.14}$$

é o *símbolo de Christoffel* computado com a métrica $g_{\mu\nu}$, o qual é familiar e bem estabelecido na Relatividade Geral de Einstein, e o termo

$$K_{\mu\nu}{}^\lambda = -S_{\mu\nu}{}^\lambda + S_\nu{}^\lambda{}_\mu - S^\lambda{}_{\mu\nu} \tag{1.15}$$

* *ref. [3]*

é a *contorção* (a parte não Riemanniana). Ela tem 24 componentes e depende da métrica e da torção. Os índices tensoriais são abaixados e levantados por meio da métrica.

Uma variedade L_4 dotada de conexão afim compatível com a métrica ($g_{\mu\nu;\lambda} = 0$), é um Espaço-tempo de Riemann-Cartan U_4. Se a torção é anulada, recobramos o espaço de Riemann V_4 da Relatividade Geral e se a curvatura for igual a zero ($R_{\mu\nu\lambda}{}^{\sigma} = 0$), caimos no espaço-tempo de Minkowski R_4 da Teoria da Relatividade Especial,

$$(L_4, g) \overset{g_{\mu\nu;\lambda}=0}{\longrightarrow} U_4 \overset{S=0}{\longrightarrow} V_4 \overset{R=0}{\longrightarrow} R_4$$

A condição (1.8), também chamada de "*postulado de metricidade*", preserva produtos escalares, portanto a invariância dos comprimentos e ângulos sob transporte paralelo. Ela nos garante uma estrutura localmente Minkowskiana do espaço-tempo. Dizemos então que a conexão é compatível com a métrica se (1.8) é satisfeita. A conexão de uma variedade de Riemann-Cartan U_4 é dada então por

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \ \ \nu \end{matrix} \right\} - K_{\mu\nu}{}^{\lambda} \tag{1.16}$$

a qual difere da variedade riemanniana V_4 somente pela presença da torção.

D - Variação da Curvatura Escalar

Vamos definir o tensor densidade métrica contravariante $\mathbf{g}^{\mu\nu}$ por

$$\mathbf{g}^{\mu\nu} = e g^{\mu\nu} \tag{1.17}$$

onde "e " é dado por $e = \left[det(-g_{\mu\nu})\right]^{\frac{1}{2}}$ e a densidade de curvatura escalar "$\Re$", dada por

$$\Re = \mathbf{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{1.18}$$

onde $R_{\mu\nu}$ é denominado na Relatividade Geral de Einstein por tensor de Ricci, resultante da contração de "σ" com "μ" no Tensor de Riemann,

$$R_{\mu\lambda\nu}{}^{\sigma} = \partial_{\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu} \tag{1.19}$$

portanto

$$R_{\lambda\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu} - \partial_\lambda \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\mu\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu} \tag{1.20}$$

Por conveniência, iremos usar a notação $A_{[\mu\nu]}$ para indicar que a relação entre μ e ν é antissimétrica, ou seja

$$A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}\right) \tag{1.21}$$

e a notação $A_{(\mu\nu)}$ para indicar que a relação entre "μ" e "ν" é simétrica. Se aparecer por exemplo a notação $A_{[\mu|\nu}B_{|\lambda]}$, subentende-se que o índice "ν" não sofre alteração na expansão. Assim

$$A_{[\mu|\nu}B_{|\lambda]} = \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu}B_\lambda - A_{\lambda\nu}B_\mu\right) \tag{1.22}$$

Além disso faremos uso também do símbolo de derivação $\overset{\star}{\nabla}_\mu$ definido por

$$\overset{\star}{\nabla}_\mu = \nabla_\mu + 2S_{\mu\lambda}{}^{\lambda} \tag{1.23}$$

Usando essa notação podemos escrever (1.20) da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} = 2\partial_{[\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu]\nu} + 2\Gamma^{\lambda}{}_{[\lambda|\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{|\mu]\nu} \tag{1.24}$$

Voltando a (1.18), tem-se que "$\delta\Re$" é dado por:

$$\delta\Re = \delta(\mathrm{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = \delta(\mathrm{g}^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \mathrm{g}^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \tag{1.25}$$

Através de (1.24) encontramos que

$$\delta R_{\mu\nu} = 2\partial_{[\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu]\nu} + 2\delta\Gamma^{\lambda}{}_{[\lambda|\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{|\mu]\nu} + 2\Gamma^{\lambda}{}_{[\lambda|\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{|\mu]\nu} \tag{1.26}$$

Como $\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ é um tensor, embora $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ não seja (será visto com detalhes no capítulo II), teremos com o uso de (1.7) que

$$\nabla_{[\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu]\nu} = \partial_{[\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu]\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{[\lambda|\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{|\mu]\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{[\lambda|\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{|\mu]\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{[\lambda\mu]}\delta\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}$$

Donde se conclui de (1.26) que

$$\delta R_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu]\nu} + 2S_{\lambda\mu}{}^{\gamma}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\gamma\nu} \tag{1.27}$$

Substituindo-se (1.27) em (1.25), obtém-se

$$\delta\Re = \delta(\mathrm{g}^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + 2\mathrm{g}^{\mu\nu}\Big(\nabla_{[\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu]\nu} + S_{\lambda\mu}{}^{\gamma}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\gamma\nu}\Big) \tag{1.28}$$

É interessante observar que o termo $\mathrm{g}^{\mu\nu}\nabla_{[\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu]\nu}$, que aparece em (1.28) tem a forma $P\nabla\delta Q$ o qual deve ser uma densidade escalar, enquanto que o termo $P\delta Q$, uma densidade vetorial contravariante. Para uma densidade vetorial contravariante, a divergência em L_4 pode ser calculada com "∂" ou "$\overset{\star}{\nabla}$" alternativamente*. Assim

$$\partial(P\delta Q) = \overset{\star}{\nabla}(P\delta Q) = P\nabla\delta Q + (\overset{\star}{\nabla}P)\delta Q \tag{1.29}$$

Como a variação se anula na superfície, obtém-se a relação

$$P\nabla\delta Q = -(\overset{\star}{\nabla}P)\delta Q \tag{1.30}$$

De (1.28) tem-se portanto,

$$\delta\Re = \delta(\mathrm{g}^{\mu\nu})R_{\mu\nu} - 2\Big(\delta\Gamma^{\lambda}{}_{[\mu|\nu}\overset{\star}{\nabla}_{|\lambda]} - S_{\lambda\mu}{}^{\gamma}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\gamma\nu}\Big)\mathrm{g}^{\mu\nu}$$

Usando-se (1.23) encontramos

$$\begin{aligned}
\delta\Re &= \delta(\mathrm{g}^{\mu\nu})R_{\mu\nu} - 2(\nabla_{[\lambda}\mathrm{g}^{\mu\nu})\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu]\nu} - 4S_{[\lambda|\sigma}{}^{\sigma}\mathrm{g}^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{|\mu]\nu} + 2\mathrm{g}^{\gamma\nu}S_{\lambda\gamma}{}^{\mu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \\
&= \delta(\mathrm{g}^{\mu\nu})R_{\mu\nu} - 2\Big\{(\delta^{\mu}{}_{[\gamma}\nabla_{\lambda]}\mathrm{g}^{\gamma\nu}) - 4\delta^{\mu}{}_{[\gamma}S_{\lambda]\sigma}{}^{\sigma}\mathrm{g}^{\gamma\nu} + 2S_{\lambda\gamma}{}^{\mu}\mathrm{g}^{\gamma\nu}\Big\}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \\
&= R_{\mu\nu}\delta\mathrm{g}^{\mu\nu} + 2\Big\{\mathrm{g}^{\gamma\nu}\Big(S_{\lambda\gamma}{}^{\mu} + 2\delta^{\mu}{}_{[\lambda}S_{\gamma]\sigma}{}^{\sigma}\Big) - \delta^{\mu}{}_{[\gamma}\nabla_{\lambda]}\mathrm{g}^{\gamma\nu}\Big\}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Vamos definir o termo

$$T_{\lambda\gamma}{}^{\mu} = S_{\lambda\gamma}{}^{\mu} + 2\delta^{\mu}{}_{[\lambda}S_{\gamma]\sigma}{}^{\sigma} \tag{1.32}$$

---

* *ver Apêndice*

como sendo o tensor de torção modificado. Finalmente

$$\delta\Re = R_{\mu\nu}\delta\mathbf{g}^{\mu\nu} + 2\Big(T_{\lambda\gamma}{}^{\mu}\mathbf{g}^{\gamma\nu} - \delta^{\mu}{}_{[\gamma}\nabla_{\lambda]}\mathbf{g}^{\gamma\nu}\Big)\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \tag{1.33}$$

Esta relação é válida em L_4 pois $\mathbf{g}^{\mu\nu}$ poderia ser arbitrário e também assimétrico. Em momento algum foi necessário usar a simetria de $\mathbf{g}^{\mu\nu}$ nem abaixar ou levantar os índices de $\mathbf{g}^{\mu\nu}$.

Calculemos a variação de $\mathbf{g}^{\mu\nu}$

$$\delta\mathbf{g}^{\mu\nu} = \delta(eg^{\mu\nu}) = (\delta e)g^{\mu\nu} + e\delta g^{\mu\nu} \tag{1.34}$$

Como*

$$\delta e = \delta(-g)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{-g}}{2g}\delta g = \frac{1}{2}\, eg^{\sigma\lambda}\delta g_{\sigma\lambda} \tag{1.35}$$

e

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}\delta g_{\sigma\lambda} \tag{1.36}$$

tem-se que

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{g}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\, eg^{\sigma\lambda}\delta g_{\sigma\lambda}g^{\mu\nu} - eg^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}\delta g_{\sigma\lambda} \\ &= e\Big(\frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}g^{\mu\nu} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}\Big)\delta g_{\sigma\lambda}\end{aligned} \tag{1.37}$$

Além disso, levando-se em conta a definição do tensor de Einstein da Relatividade Geral

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}R \tag{1.38}$$

mostra-se com uma simples aplicação de (1.37) a (1.38) que

$$R_{\mu\nu}\delta\mathbf{g}^{\mu\nu} = -eG^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{1.39}$$

Considerando-se a condição de metricidade (1.8), temos que se $g_{\mu\nu}$ é a métrica de U_4, então

$$\nabla_\sigma(e) = 0$$

portanto

$$\nabla_\sigma(\mathbf{g}^{\mu\nu}) = 0 \tag{1.40}$$

---

* *ref.(3); eq.(86.4)*

Usando-se (1.39) e (1.40) em (1.33) encontra-se

$$\frac{1}{e}\,\delta\Re = -G^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + 2T_{\lambda}{}^{\nu\mu}\,\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \tag{1.41}$$

Uma variação infinitesimal da métrica não pode alterar a natureza do espaço, portanto deve levar a uma conexão que continua obedecendo o postulado métrico

$$\overset{\Gamma+\delta\Gamma}{\nabla}{}_{\lambda}\,(g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) = 0 \tag{1.42}$$

Dai surge

$$\begin{aligned}\overset{\Gamma+\delta\Gamma}{\nabla}{}_{\lambda}(g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) = \partial_{\lambda}(g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) - (\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu} + \delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu})(g_{\sigma\nu} + \delta g_{\sigma\nu}) \\ - (\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu} + \delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu})(g_{\mu\sigma} + \delta g_{\mu\sigma}) = 0\end{aligned}$$

Conservando-se apenas os termos até primeira ordem em δ, teremos

$$\nabla_{\lambda}\, g_{\mu\nu} + \partial_{\lambda}\delta g_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu}\delta g_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}\delta g_{\sigma\nu} - \delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} - \delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu} g_{\sigma\mu} = 0$$

Como o primeiro termo é nulo devido a (1.8), surge com o uso de (1.7) a expressão

$$\nabla_{\lambda}\delta g_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu}\, g_{\sigma\nu} + \delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}\, g_{\sigma\mu} \tag{1.43}$$

Fazendo-se a permutação dos índices λ, μ e ν teremos:

$$\nabla_{\nu}\delta g_{\lambda\mu} = \delta\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu}\, g_{\sigma\lambda} + \delta\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\lambda}\, g_{\sigma\mu} \tag{1.44}$$

$$\nabla_{\mu}\delta g_{\lambda\nu} = \delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\lambda}\, g_{\sigma\nu} + \delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}\, g_{\sigma\lambda} \tag{1.45}$$

De (1.44)+(1.45)-(1.43) encontramos

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}\delta g_{\lambda\nu} + \nabla_{\nu}\delta g_{\lambda\mu} - \nabla_{\lambda}\delta g_{\mu\nu} &= 2g_{\nu\sigma}\delta S_{\mu\lambda}{}^{\sigma} + 2g_{\mu\sigma}\delta S_{\nu\lambda}{}^{\sigma} \\ &\quad + \delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} g_{\sigma\lambda} + \delta\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu} g_{\sigma\lambda} \\ &= 2\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} g_{\sigma\lambda} + 2g_{\nu\sigma}\delta S_{\mu\lambda}{}^{\sigma} \\ &\quad + 2g_{\mu\sigma}\delta S_{\nu\lambda}{}^{\sigma} - 2g_{\lambda\sigma}\delta S_{\mu\nu}{}^{\sigma}\end{aligned} \tag{1.46}$$

Introduzindo-se o tensor

$$\Delta^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\mu\lambda} = \delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu}\delta^{\gamma}_{\lambda} + \delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\beta}_{\lambda}\delta^{\gamma}_{\mu} - \delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\gamma}_{\nu} \tag{1.47}$$

que produz combinações lineares como as que aparecem no símbolo de Christoffel, obtemos de (1.46)

$$
\begin{aligned}
g_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\,\Delta^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\mu\lambda}\nabla_{\alpha}\delta g_{\beta\gamma} - \delta S_{\nu\mu}{}^{\eta}g_{\lambda\eta} - \delta S_{\mu\lambda}{}^{\eta}g_{\nu\eta} + \delta S_{\lambda\nu}{}^{\eta}g_{\mu\eta} \\
&= \Delta^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\mu\lambda}\left(\frac{1}{2}\,\nabla_{\alpha}\delta g_{\beta\gamma} - \delta S_{\alpha\beta}{}^{\eta}g_{\gamma\eta}\right)
\end{aligned}
$$

finalmente

$$
\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = g^{\sigma\lambda}\Delta^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\mu\lambda}(\frac{1}{2}\,\nabla_{\alpha}\delta g_{\beta\gamma} - \delta S_{\alpha\beta}{}^{\eta}g_{\gamma\eta}) \tag{1.48}
$$

Estudemos agora em detalhes as consequências providas do tensor de curvatura de Riemann da Relatividade Geral (1.19). Para simplificar, é conveniente escreve-lo numa forma mais condensada

$$
R_{\mu\nu\lambda}{}^{\sigma} = \partial_{[\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu]\lambda} + \Gamma^{\sigma}{}_{[\mu|\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{|\nu]\lambda} \tag{1.49}
$$

Primeiramente notemos que

$$
A_{[\mu\nu\lambda]} = A_{[[\mu\nu]\lambda]} = A_{[\mu[\nu\lambda]]} = A_{[[\mu|\nu|\lambda]]} = -A_{[\nu\mu\lambda]}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
R_{[\mu\nu\lambda]}{}^{\sigma} &= 2\left(\partial_{[[\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu]\lambda]} + \Gamma^{\sigma}{}_{[[\mu|\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{|\nu]\lambda]}\right) \\
&= 2\left(\partial_{[\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{[\nu\lambda]]} + \Gamma^{\lambda}{}_{[\mu|\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{|[\nu\lambda]]}\right) \\
&= 2\left(\partial_{[\mu}S_{\nu\lambda]}{}^{\sigma} + \Gamma^{\sigma}{}_{[\mu|\gamma}S^{\gamma}{}_{|\nu\lambda]}\right)
\end{aligned} \tag{1.50}
$$

Por outro lado, a derivada covariante do tensor das torções é dada por:

$$
\nabla_{\mu}S_{\nu\lambda}{}^{\sigma} = \partial_{\mu}S_{\nu\lambda}{}^{\sigma} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\gamma}S_{\nu\lambda}{}^{\gamma} - \Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}S_{\gamma\lambda}{}^{\sigma} - \Gamma^{\gamma}{}_{\mu\lambda}S_{\nu\gamma}{}^{\sigma} \tag{1.51}
$$

Antissimetrizando com relação a μ, ν e λ

$$
\nabla_{[\mu}S_{\nu\lambda]}{}^{\sigma} = \partial_{[\mu}S_{\nu\lambda]}{}^{\sigma} + \Gamma^{\sigma}{}_{[\mu|\gamma}S_{|\nu\lambda]}{}^{\gamma} - \Gamma^{\gamma}{}_{[\mu\nu|}S_{\gamma|\lambda]}{}^{\sigma} - \Gamma^{\gamma}{}_{[\mu\lambda}S_{\nu]\gamma}{}^{\sigma}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
R_{[\mu\nu\lambda]}{}^{\sigma} &= 2\left(\nabla_{[\mu}S_{\nu\lambda]}{}^{\sigma} + \Gamma^{\gamma}{}_{[\mu\nu|}S_{\gamma|\lambda]}{}^{\sigma} + \Gamma^{\gamma}{}_{[\mu\lambda}S_{\nu]\gamma}{}^{\sigma}\right) \\
&= 2\left(\nabla_{[\mu}S_{\nu\lambda]}{}^{\sigma} - \Gamma^{\gamma}{}_{[\mu\nu}S_{\lambda]\gamma}{}^{\sigma} - \Gamma^{\gamma}{}_{[\mu\nu}S_{\lambda]\gamma}{}^{\sigma}\right) \\
&= 2\left(\nabla_{[\mu}S_{\nu\lambda]}{}^{\sigma} - 2S^{\gamma}{}_{[\mu\nu}S_{\lambda]\gamma}{}^{\sigma}\right)
\end{aligned} \tag{1.52}
$$

Em V_4 esta identidade corresponde a

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^{\sigma} + R_{\lambda\mu\nu}{}^{\sigma} + R_{\nu\lambda\mu}{}^{\sigma} = 0 \tag{1.53}$$

Contraindo-se "μ" e "σ" em (1.52) teremos:

$$R_{[\lambda\mu\nu]}{}^{\lambda} = R_{[\mu\nu\lambda]}{}^{\lambda} = 2\nabla_{[\mu}S_{\nu\lambda]}{}^{\lambda} + 4S_{[\mu|\nu}{}^{\gamma}S_{\gamma|\lambda]}{}^{\lambda} \tag{1.54}$$

Considerando-se que $S_{\nu\lambda}{}^{\sigma} = - S_{\lambda\nu}{}^{\sigma}$, teremos

$$\begin{aligned} 4S_{[\mu\nu|}{}^{\gamma}S_{\gamma|\lambda]}{}^{\lambda} &= \frac{4}{3}\left(S_{\mu\nu}{}^{\gamma}S_{\gamma\lambda}{}^{\lambda} + S_{\lambda\mu}{}^{\gamma}S_{\gamma\nu}{}^{\lambda} + S_{\nu\lambda}{}^{\gamma}S_{\gamma\mu}{}^{\lambda}\right) \\ &= \frac{4}{3}S_{\mu\nu}{}^{\lambda}S_{\lambda\sigma}{}^{\sigma} \end{aligned}$$

assim

$$R_{[\lambda\mu\nu]}{}^{\lambda} = 2\left(\nabla_{[\lambda}S_{\mu\nu]}{}^{\lambda} + \frac{2}{3}S_{\mu\nu}{}^{\lambda}S_{\lambda\gamma}{}^{\gamma}\right) \tag{1.55}$$

Por outro lado, com o uso de (1.32) e (1.23)

$$\begin{aligned} \overset{\star}{\nabla}_{\lambda} T_{\mu\nu}{}^{\lambda} &= \nabla_{\lambda}S_{\mu\nu}{}^{\lambda} + \nabla_{\mu}S_{\nu\sigma}{}^{\sigma} - \nabla_{\nu}S_{\mu\sigma}{}^{\sigma} \\ &\quad + 2S_{\lambda\gamma}{}^{\gamma}\left(S_{\mu\nu}{}^{\lambda} + \delta^{\lambda}{}_{\mu}S_{\nu\sigma}{}^{\sigma} - \delta^{\lambda}{}_{\nu}S_{\mu\sigma}{}^{\sigma}\right) \\ &= \nabla_{\lambda}S_{\mu\nu}{}^{\lambda} + \nabla_{\mu}S_{\nu\lambda}{}^{\lambda} + \nabla_{\nu}S_{\lambda\mu}{}^{\lambda} \\ &\quad + 2\left(S_{\lambda\gamma}{}^{\gamma}S_{\mu\nu}{}^{\lambda} + S_{\mu\gamma}{}^{\gamma}S_{\nu\sigma}{}^{\sigma} - S_{\nu\gamma}{}^{\gamma}S_{\mu\sigma}{}^{\sigma}\right) \\ &= 3\nabla_{[\lambda}S_{\mu\nu]}{}^{\lambda} + 2S_{\lambda\sigma}{}^{\sigma}S_{\mu\nu}{}^{\lambda} \end{aligned} \tag{1.56}$$

Logo temos a seguinte identidade

$$\frac{3}{2}\, R_{[\lambda\mu\nu]}{}^{\lambda} = \overset{\star}{\nabla}_{\lambda}\, T_{\mu\nu}{}^{\lambda} \tag{1.57}$$

Por outro lado, considerando-se que $R_{\lambda\mu\nu}{}^{\lambda}$ é antissimétrico com relação a "ν" e "λ", obtemos

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\, R_{[\lambda\mu\nu]}{}^{\lambda} &= \frac{1}{2}\left(R_{\lambda\mu\nu}{}^{\lambda} + R_{\nu\lambda\mu}{}^{\lambda} + R_{\mu\nu\lambda}{}^{\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(R_{\lambda\mu\nu}{}^{\lambda} - R_{\lambda\nu\mu}{}^{\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(R_{\mu\nu} - R_{\nu\mu}\right) \\ &= R_{[\mu\nu]} = G_{[\mu\nu]} \end{aligned}$$

portanto

$$G_{[\mu\nu]} - \overset{\star}{\nabla}_\lambda\, T_{\mu\nu}{}^{\lambda} = 0 \tag{1.58}$$

Por meio de (1.58), (1.48) e (1.47) podemos chegar a seguinte forma para (1.41)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e}\delta\Re &= -G^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + 2T_\lambda{}^{\nu\mu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \\
&= -G^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + T_\lambda{}^{\nu\mu} g^{\lambda\sigma}\Delta^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\mu\lambda}\nabla_\alpha\delta g_{\beta\gamma} - 2T_\lambda{}^{\nu\mu}g^{\lambda\sigma}\Delta^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\mu\sigma}g_{\gamma\eta}\delta S_{\alpha\beta}{}^{\eta} \\
&= -G^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} - \Delta^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\mu\lambda}(\overset{\star}{\nabla}_\alpha\, T^{\sigma\nu\mu})\delta g_{\beta\gamma} - 2T_\eta{}^{\alpha\beta}g^{\gamma\eta}g_{\sigma\lambda}\Delta^{\mu\nu\sigma}_{\alpha\beta\gamma}\delta S_{\mu\nu}{}^{\lambda} \\
&= -G^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} - \Delta^{\alpha\mu\nu}_{\lambda\eta\sigma}(\overset{\star}{\nabla}_\alpha\, T^{\sigma\lambda\eta})\delta g_{\mu\nu} - 2T_\eta{}^{\alpha\beta}g^{\gamma\eta}g_{\sigma\lambda}\Delta^{\mu\nu\sigma}_{\alpha\beta\gamma}\delta S_{\mu\nu}{}^{\lambda} \\
&= \left(-G^{\mu\nu} - \overset{\star}{\nabla}_\lambda\, T^{\nu\lambda\mu} - \overset{\star}{\nabla}_\eta\, T^{\mu\nu\eta} + \overset{\star}{\nabla}_\sigma\, T^{\sigma\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu} \\
&\quad - 2\left(T_\eta{}^{\mu\nu}g^{\sigma\eta}g_{\sigma\lambda} + T_\eta{}^{\sigma\mu}g^{\nu\eta}g_{\sigma\lambda} - T_\eta{}^{\nu\sigma}g^{\mu\eta}g_{\sigma\lambda}\right)\delta S_{\mu\nu}{}^{\lambda} \\
&= \left[-G^{\mu\nu} + \overset{\star}{\nabla}_\lambda\, (T^{\lambda\mu\nu} + T^{\mu\nu\lambda} - T^{\nu\lambda\mu})\right]\delta g_{\mu\nu} \\
&\quad - 2\left(T_\lambda{}^{\mu\nu} + T^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\mu} - T^{\mu\nu}{}_{\lambda}\right)\delta S_{\mu\nu}{}^{\lambda}
\end{aligned} \tag{1.59}$$

Visto que de (1.58) tem-se $G^{[\mu\nu]} = \overset{\star}{\nabla}_\lambda\, T^{\mu\nu\lambda}$, $\delta g_{\mu\nu}\, \overset{\star}{\nabla}_\lambda\, T^{\mu\nu\lambda} = 0$. Portanto o seu sinal em (1.59) não faz diferença. Escolhe-se " + " no último membro por conveniência.

E - Princípio Variacional e definição dinâmica de momento-energia e spin.

A Lagrangeana da matéria na Relatividade Especial em coordenadas cartesianas $L(\psi,\, \partial\psi,\, \eta)$, é dependente da métrica constante de Minkowski "η" , do campo da matéria e do gradiente do campo da matéria. Quando a interação gravitacional é introduzida, essa Lagrangeana deve ser generalizada de modo a se transformar num escalar sob transfomações de coordenadas gerais. Isto pode ser feito de acordo com o princípio de acoplamento mínimo, substituindo-se a métrica $g(x)$ de U_4 no lugar da métrica de Minkowski e as derivadas parciais no lugar das derivadas covariantes. Assim

$$\eta \mapsto g \quad ; \quad \partial\psi \mapsto \overset{\Gamma}{\nabla}\psi \tag{1.60 a, b}$$

nos conduz do universo do espaço-tempo de Minkowski ao espaço-tempo U_4 com a conexão (1.13).

Após o procedimento de acoplamento mínimo, a função ação do campo da matéria ψ interagindo com a gravitação se torna

$$W_m = \int d^4x\sqrt{-g}L(\psi, \overset{\Gamma}{\nabla}\psi, g) = \int d^4x\sqrt{-g}L(\psi, \partial\psi, g, \partial g, S) \qquad (1.61)$$

onde $d^4x\sqrt{-g}$ é o elemento de volume.

Quando variamos a métrica e a torção independentemente, podemos definir o tensor métrico energia-momento "σ " e pseudo tensor de spin "$\mathcal{M}$" que tem o significado de energia potencial de spin como segue:

$$e\,\sigma^{\mu\nu} = 2\,\frac{\delta(\sqrt{-g}L)}{\delta g_{\mu\nu}} \qquad (1.62)$$

$$e\,\mathcal{M}_\lambda{}^{\nu\mu} = \frac{\delta(\sqrt{-g}L)}{\delta S_{\mu\nu}{}^\lambda} \qquad (1.63)$$

Observe em (1.62) que $\sigma^{\mu\nu}$ deve ser calculado mantendo-se $S_{\mu\nu}{}^\lambda$ constante.

Para que possamos definir o tensor de spin $\mathcal{T}_\lambda{}^{\nu\mu}$ de forma semelhante a (1.62) para $\sigma^{\mu\nu}$, é conveniente escrevermos a Lagrangeana da matéria em função da contorção $K_{\mu\nu}{}^\lambda$ (1.15). Portanto

$$L = L(\psi, \partial\psi, g, K, \partial K)$$

Daí teremos em U_4, por definição

$$e\,\mathcal{T}_\lambda{}^{\nu\mu} = \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial K_{\mu\nu}{}^\lambda} \qquad (1.64)$$

Podemos ainda escrever "$\mathcal{T}_\lambda{}^{\nu\mu}$" em função do pseudo-tensor de spin "$\mathcal{M}$" . Para isto devemos tomar (1.13), (1.63), (1.61) e a regra da cadeia*

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = -\mathcal{T}^{\mu\nu\lambda} + \mathcal{T}^{\nu\lambda\mu} - \mathcal{T}^{\lambda\mu\nu} \qquad (1.65)$$

* *Esta combinação linear especial do spin é bem conhecida do processo de simetrização para o tensor canônico momento-energia como foi desenvolvido por Belinfante[5] e Rosenfeld[6].*

Assim obtemos

$$\mathcal{T}^{\mu\nu\lambda} = \mathcal{M}^{[\nu\mu]\lambda} \tag{1.66}$$

De forma análoga a Relatividade Geral, a função ação total (ação da matéria mais ação do campo) é dada por

$$W = \int d^4x\sqrt{-g}\left[L(\psi,\partial\psi,g,\partial g,S) + \frac{1}{16\pi k}R(g,\partial g,S,\partial S)\right] \tag{1.67}$$

Onde "k " é a constante gravitacional de Newton. Porém, já vimos que $\Re = \sqrt{-g}R$, então

$$W = \int d^4x\left[\sqrt{-g}L(\psi,\partial\psi,g,\partial g,S) + \frac{1}{16\pi k}\Re(g,\partial g,S,\partial S)\right] \tag{1.68}$$

Como a torção "S" é uma variável independente da ação, uma das condições impostas pelo princípio de Hamilton é dada pela equação do campo:

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}L)}{\delta S_{\mu\nu}{}^{\lambda}} = -\frac{1}{16\pi k}\frac{\delta\Re}{\delta S_{\mu\nu}{}^{\lambda}} \tag{1.69}$$

facilmente deduzida de (1.68). Por meio de (1.63) e (1.66) obtemos para (1.69) a forma

$$-\frac{1}{2e}g^{\sigma[\mu}\frac{\partial\Re}{\delta S_{\nu]\lambda}{}^{\sigma}} = 8\pi k\,\mathcal{T}^{\mu\nu\lambda} \tag{1.70}$$

Por outro lado, de (1.59) tem-se que

$$\frac{1}{e}\frac{\delta\Re}{\delta S_{\mu\nu}{}^{\lambda}} = -2\left(T_{\lambda}{}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}{}_{\lambda} + T^{\nu}{}_{\lambda}{}^{\mu}\right) \tag{1.71}$$

Portanto, tem-se de (1.70) que

$$\begin{aligned} g^{\sigma[\mu]}\left(T_{\sigma}{}^{|\nu]\lambda} - T^{|\nu]\lambda}{}_{\sigma} + T^{\lambda}{}_{\sigma}{}^{|\nu]}\right) &= T^{[\mu\nu]\lambda} + T^{[\nu|\lambda|\mu]} - T^{\lambda[\mu\nu]} \\ &= T^{\mu\nu\lambda} + T^{\lambda[\nu\mu]} + T^{\lambda[\mu\nu]} \\ &= T^{\mu\nu\lambda} \end{aligned}$$

Assim

$$T^{\mu\nu\lambda} = 8\pi k\,\mathcal{T}^{\mu\nu\lambda} \tag{1.72}$$

F - Campos da Matéria no Espaço–tempo U_4

Iremos agora examinar as conseqüências do acoplamento mínimo da torção em um U_4 para os campos da matéria.

F.1 - Campo Escalar

Como este campo não tem spin, ele não pode sentir os efeitos da torção. As derivadas covariantes no espaço-tempo afim são identicas às derivadas parciais.

F.2 - Campo de Maxwell

A tentativa de aplicar o acoplamento mínimo ao campo eletromagnético dá como resultado o tensor momento angular de spin $\mathcal{T}^{\mu\nu\lambda} = A^{[\mu}F^{\nu]\lambda}$, o qual não é gauge invariante. A não preservação da invariância de gauge nos proíbe de aplicar o procedimento de acoplamento mínimo neste caso.

Devido ao fato de a Lagrangeana de Maxwell não ser acoplada minimamente à geometria, os fótons na teoria U_4 não são afetados pela presença da torção.

F.3 - Campo de Proca

O campo de Proca (campo de Maxwell com massa) tem spin um[7]. Desde que ele tem uma massa, o problema da não invariância de gauge presente na eletrodinâmica não aparece aqui. O procedimento de acoplamento mínimo aplicado a este campo produz a seguinte densidade Lagrangeana

$$L = -\frac{1}{2}\, e\left[\nabla_{[\mu}\psi_{\nu]}\nabla^{[\mu}\psi^{\nu]} - m^2\psi_\mu\psi^\mu\right] \qquad (1.73)$$

De outra forma

$$L = -\frac{1}{2}\, e\left[\frac{1}{4}\, g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}(\nabla_\mu\psi_\nu - \nabla_\nu\psi_\mu)(\nabla_\sigma\psi_\lambda - \nabla_\lambda\psi_\sigma) - m^2\psi_\mu\psi^\mu\right] \qquad (1.74)$$

Com o uso da definição de derivada covariante (1.6) e da definição de torção

(1.3), tem-se que

$$
\begin{aligned}
L = -\frac{1}{2}\, e \Big\{ g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} \Big[& \frac{1}{4} (\partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu)(\partial_\sigma \psi_\lambda - \partial_\lambda \psi_\sigma) \\
& + \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu) S_{\sigma\lambda}{}^{\eta} \psi_\eta \\
& + \frac{1}{2} (\partial_\sigma \psi_\lambda - \partial_\lambda \psi_\sigma) S_{\mu\nu}{}^{\eta} \psi_\eta \\
& + S_{\mu\nu}{}^{\gamma} \psi_\gamma S_{\sigma\lambda}{}^{\eta} \psi_\eta \Big] \\
& - m^2 \psi_\eta \psi^\eta \Big\}
\end{aligned}
\tag{1.75}
$$

Capítulo II

O TEOREMA DE NOETHER NA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

II-1 Espaço-tempo Plano

A ação que descreve o comportamento de um sistema clássico é usualmente escrita como

$$S = \int d^4x L(\psi, \partial_\mu \psi) \, . \tag{2.1}$$

onde a densidade Lagrangeana do sistema $L(\psi, \partial_\mu \psi)$ é função dos campos escalares "ψ" e de suas derivadas $\partial_\mu \psi$. A uma variação infinitesimal nos campos da forma

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = \psi(x) + \delta\psi(x) \tag{2.2}$$

a Lagrangeana corresponde da seguinte forma:

$$L(x) \mapsto L'(x) = L(x) + \delta L(x)$$

Definição: Dizemos que a transformação (2.2) é uma simetria (contínua), quando pudermos mostrar *sem o uso das equações de movimento* que

$$\delta L(x) = \partial_\mu \Lambda^\mu \tag{2.3}$$

onde Λ^μ é algum 4-vetor.

Em outras palavras, a variação δL induzida na Lagrangeana pela transformação (2.2) deve ter a forma (2.3) para todas as configurações dos campos, não apenas para aqueles que são soluções das equações de movimento. Consideremos os seguintes exemplos:

Translações:

Uma translação se caracteriza pela relação

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu} \tag{2.4}$$

sendo ϵ^{μ} um 4-vetor constante. A mesma será infinitesimal se ϵ^{μ} for infinitesimal. Esta translação irá induzir em $\psi(x)$ uma transformação $\delta\psi$ computada da seguinte forma: Considerando-se um campo escalar $\psi(x)$ temos que

$$\psi'(x') = \psi(x) \tag{2.5}$$

Por outro lado, uma expansão em série de Taylor de $\psi(x)$ nos conduzirá a

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= \psi'(x) + (x' - x)^{\lambda}\partial_{\lambda}\psi'(x) \\ &= \psi'(x) + \epsilon^{\lambda}\partial_{\lambda}\psi(x) \end{aligned} \tag{2.6}$$

De (2.5) e (2.6) temos que a variação $\delta\psi(x) = \psi'(x) - \psi(x)$ induzida em ψ é dada por

$$\delta\psi(x) = -\epsilon^{\lambda}\partial_{\lambda}\psi(x) \tag{2.7}$$

Suponhamos inicialmente a **Lagrangeana** dada por

$$L = \frac{1}{2}\partial^{\mu}\psi(x)\partial_{\mu}\psi(x) - \frac{m^2}{2}\psi^2 \tag{2.8}$$

temos portanto que,

$$\begin{aligned} \delta L &= L(\psi + \delta\psi, \partial_{\mu}\psi + \delta\partial_{\mu}\psi) - L(\psi, \partial_{\mu}\psi) \\ &= \frac{1}{2}\left[\partial^{\mu}\left(\psi + \delta\psi\right)\partial_{\mu}\left(\psi + \delta\psi\right)\right] - \frac{m^2}{2}\left(\psi + \delta\psi\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\partial^{\mu}\psi\partial_{\mu}\psi + \frac{m^2}{2}\psi^2 \\ &= \partial^{\mu}\psi\partial_{\mu}\delta\psi - m^2\psi\delta\psi \end{aligned}$$

Usando-se (2.7) encontramos finalmente

$$\delta L = -\epsilon^{\lambda}\partial_{\lambda}\left[\frac{1}{2}\partial^{\mu}\psi(x)\partial_{\mu}\psi(x) - \frac{m^2}{2}\psi^2\right] = -\epsilon^{\lambda}\partial_{\lambda}L$$

Como ϵ^λ é constante nas translações podemos escrever

$$\delta L = \partial_\lambda(-\epsilon^\lambda L) \tag{2.9}$$

Portanto as translações são simetrias do sistema descrito pela Lagrangeana (2.8). Neste exemplo de simetria no espaço-tempo, o tipo de variação $\delta\psi$ mostrado é denominado de variação de forma do campo. Observe que chegamos a (2.9) sem fazer uso das equações de movimento.

A - O Teorema de Noether

O teorema de Noether estabelece que a cada simetria contínua corresponde uma corrente a qual satisfaz a equação da continuidade ou, equivalentemente, uma quantidade que é conservada. Além disso ele dá de forma explícita a expressão para esta corrente.

Suponhamos que $\delta\psi$ seja uma transformação de simetria, então por hipótese, existe um Λ^μ tal que

$$\delta L = \partial_\mu \Lambda^\mu \tag{2.10}$$

Obteremos agora uma outra expressão δL, *com o uso das equações de movimento*:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)} = 0 \tag{2.11}$$

Como $L = L(\psi, \partial_\mu\psi)$,

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \psi}\delta\psi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)}\partial_\mu \delta\psi \tag{2.12}$$

De modo que, com o uso de (2.11) podemos escrever

$$\delta L = \partial_\mu\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)}\right]\delta\psi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)}\partial_\mu \delta\psi$$

ou

$$\delta L = \partial_\mu\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)}\delta\psi\right] \tag{2.13}$$

Subtraindo-se (2.10) de (2.13), teremos

$$\partial_\mu\left(\Lambda^\mu - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi\right) = 0$$

Definindo-se

$$J^\mu = \Lambda^\mu - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi \tag{2.14}$$

tem-se que J^μ é a corrente conservada associada à simetria $\delta\psi$ (*corrente de Noether*), ou seja

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

Vejamos agora quais as grandezas que se conservam devido ao fato das translações (2.4) serem simetrias da Lagrangeana (2.8). De (2.9) tem-se que

$$\Lambda^\mu = -\epsilon^\mu L \tag{2.15}$$

Por outro lado inserindo-se (2.7) e (2.15) em (2.14) surge

$$J^\mu = -\epsilon^\mu L + \epsilon^\lambda \partial_\lambda \psi \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}$$

ou

$$J^\mu = \epsilon^\nu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\nu\psi - \delta^\mu{}_\nu L\right] \tag{2.16}$$

Uma vez que ϵ^ν é uma constante arbitrária, a lei de conservação $\partial_\mu J^\mu = 0$ pode ser escrita como

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \tag{2.17}$$

onde

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\nu\psi - \delta^\mu{}_\nu L \tag{2.18}$$

é o tensor momento energia canônico da Lagrangeana (2.8).

Eletromagnetismo:

A Lagrangeana do campo eletromagnético é dada por

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.19}$$

com

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.20}$$

No formalismo canônico as variáveis são os A_μ e sob as translações (2.4) elas se transformam como escalares, pois

$$A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x) = \frac{\partial(x'^\nu - \epsilon^\nu)}{\partial x'^\mu} A_\nu(x) = A_\mu(x) \tag{2.21}$$

Portanto a transformação de forma $\delta A_\mu(x)$ é dada por:

$$\delta A_\mu(x) = -\epsilon^\lambda \partial_\lambda A_\mu(x) \tag{2.22}$$

Como a Lagrangeana por si mesma é um escalar, tem-se que

$$\delta L = -\epsilon^\lambda \partial_\lambda L = \partial_\lambda(-\epsilon^\lambda L) = \partial_\lambda \Lambda^\lambda \tag{2.23}$$

Assim, de (2.14) surge que a corrente de Noether pode ser escrita como:

$$J^\mu = -\epsilon^\mu L + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \epsilon^\lambda \partial_\lambda A_\nu \tag{2.24}$$

Por outro lado de (2.19) e (2.20) verifica-se que

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} \tag{2.25}$$

portanto

$$J^\mu = -\epsilon^\mu L - F^{\mu\nu} \epsilon^\lambda \partial_\lambda A_\nu \tag{2.26}$$

Assim a lei de conservação $\partial_\mu J^\mu = 0$ pode ser escrita como

$$\partial_\mu J^\mu = \epsilon^\lambda \partial_\mu \Big(-F^{\mu\nu} \partial_\lambda A_\nu - \delta^\mu{}_\lambda L \Big) = 0 \tag{2.27}$$

onde o tensor de segunda ordem

$$T^\mu{}_\lambda = -F^{\mu\nu} \partial_\lambda A_\nu - \delta^\mu{}_\nu L \tag{2.28}$$

é o tensor canônico momento-energia.

Uma vez que este tensor não é simétrico, sua utilidade, sobretudo na Relatividade Geral, é reduzida. Podemos porém obter um tensor simétrico que nos conduz às mesmas quantidades conservadas dadas por ele. Para isto consideremos novamente a relação

$$\delta A_\nu(x) = -\epsilon^\lambda \partial_\lambda A_\nu(x) \tag{2.29}$$

De modo que somando e subtraindo o termo $-\epsilon^\lambda \partial_\nu A_\lambda(x)$ encontramos $-\epsilon^\lambda F_{\lambda\nu}$ no segundo membro. Assim

$$\delta A_\nu(x) = -\epsilon^\lambda F_{\lambda\nu} - \epsilon^\lambda \partial_\nu A_\lambda(x) \tag{2.30}$$

Reconsiderando (2.26) para a corrente de Noether conservada usando este valor para $\delta A_\nu(x)$, encontramos

$$J^\mu = -\epsilon^\mu L - \epsilon^\lambda F^{\mu\nu}\Big[F_{\lambda\nu} + \partial_\nu A_\lambda(x)\Big] \tag{2.31}$$

A lei de conservação $\partial_\mu J^\mu = 0$ nos conduz a

$$\partial_\mu J^\mu = \epsilon^\lambda \partial_\mu\Big(-F^{\mu\nu}F_{\lambda\nu} - \delta^\mu{}_\lambda L\Big) - \epsilon^\lambda \partial_\mu(F^{\mu\nu}\partial_\nu A_\lambda)$$

Nesta expressão o último termo do segundo membro é nulo, vejamos porque:

$$\partial_\mu(F^{\mu\nu}\partial_\nu A_\lambda) = (\partial_\mu F^{\mu\nu})\partial_\nu A_\lambda + F^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu A_\lambda$$

Nota-se facilmente que $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ é uma das equações de Maxwell e que $F^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu A_\lambda = 0$ pois $F^{\mu\nu}$ é antissimétrico em "μ" e "ν". Portanto o tensor

$$T^\mu{}_\lambda = -F^{\mu\nu}F_{\lambda\nu} - \delta^\mu{}_\lambda L \tag{2.32}$$

satisfaz

$$\partial_\mu T^\mu{}_\lambda = 0$$

e

$$T^{\mu\lambda} = T^{\lambda\mu} \tag{2.33}$$

II-2 Espaços-tempo Curvos

Uma transformação infinitesimal de coordenadas em um espaço-tempo curvo dada por

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \tag{2.34}$$

induz em um campo escalar $\psi(x)$ a mesma variação de forma encontrada anteriormente, ou seja

$$\delta\psi(x) = -\xi^{\lambda}(x)\partial_{\lambda}\psi \tag{2.35}$$

Computemos agora a variação de forma induzida no tensor métrico $g^{\mu\nu}(x)$. Temos inicialmente que, como $g^{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem, sua lei de transformação é dada por

$$g'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}g^{\alpha\beta}(x)$$

Segue-se da transformação infinitesimal (2.34) que

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu}(x') &= \Big(\delta^{\mu}{}_{\alpha} + \partial_{\alpha}\xi^{\mu}\Big)\Big(\delta^{\nu}{}_{\beta} + \partial_{\beta}\xi^{\nu}\Big)g^{\alpha\beta}(x) \\ &= g^{\mu\nu}(x) + g^{\alpha\nu}\partial_{\alpha}\xi^{\mu} + g^{\mu\beta}\partial_{\beta}\xi^{\nu} \end{aligned} \tag{2.36}$$

Por outro lado, expandindo-se $g^{\mu\nu}(x)$ em série de Taylor

$$g'^{\mu\nu}(x') = g'^{\mu\nu}(x) + \xi^{\lambda}(x)\partial_{\lambda}g^{\mu\nu}(x) \tag{2.37}$$

e levando-se em conta (2.36) e (2.37), teremos

$$\delta g^{\mu\nu}(x) = g^{\alpha\nu}\partial_{\alpha}\xi^{\mu}(x) + g^{\beta\mu}\partial_{\beta}\xi^{\nu}(x) - \xi^{\lambda}(x)\partial_{\lambda}g^{\mu\nu}(x) \tag{2.38}$$

Da definição de derivada covariante (1.6) e da validade da relação

$$\xi^{\mu;\nu} = g^{\nu\sigma}\xi^{\mu}{}_{;\sigma} \tag{2.39}$$

surge então

$$\xi^{\mu;\nu} = g^{\nu\alpha}\partial_{\alpha}\xi^{\mu} + g^{\nu\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\lambda}\xi^{\lambda} \tag{2.40}$$

$$\xi^{\nu;\mu} = g^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}\xi^{\nu} + g^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\lambda}\xi^{\lambda} \tag{2.41}$$

Finalmente

$$\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} = g^{\nu\alpha}\partial_{\alpha}\xi^{\mu} + g^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}\xi^{\nu} + \Big(g^{\nu\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\lambda} + g^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\lambda}\Big)\xi^{\lambda}$$

Considerando-se apenas sistemas de coordenadas galileanas, aqueles para os quais $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\lambda} = \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\lambda} = 0$ tem-se

$$\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} = g^{\nu\alpha}\partial_\alpha\xi^\mu + g^{\mu\alpha}\partial_\alpha\xi^\nu \tag{2.42}$$

Uma vez que $\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}$ é um tensor, a equação (2.42) é válida em qualquer sistema de coordenadas. O mesmo argumento aplicado a (2.38) nos faz concluir após comparação com (2.42) que

$$\delta g^{\mu\nu}(x) = \xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} \tag{2.43}$$

Os campos vetoriais $\xi^\mu(x)$ que satisfazem $\delta g^{\mu\nu}(x) = 0$, ou seja, aqueles em que a transformação geral (2.34) não muda a forma da métrica do campo, são chamados de campos de Killing. Portanto um campo de Killing é caracterizado por

$$\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} = 0 \tag{2.44}$$

Uma transformação do tipo (2.34) com $\xi^\mu(x)$ Killing é chamada de isometria do espaço-tempo.

Tomando-se uma Lagrangeana a qual é um escalar sob transformação geral de coordenadas e considerando que para espaços curvos o elemento de volume invariante é $\sqrt{-g(x)}d^4x$, podemos construir a ação invariante

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}L(g^{\mu\nu},\, \partial_\lambda g^{\mu\nu},\, \psi,\, \partial_\mu\psi) \tag{2.45}$$

Daí temos que a variação do campo nos conduz à seguinte variação da ação:

$$\delta S = \int d^4x\Big\{\sqrt{-g}\Big(\frac{\partial L}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\mu\delta\psi\Big) + \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})}\delta\partial_\lambda g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}\Big\} \tag{2.46}$$

Empregando o Teorema de Gauss e supondo que nos limites de integração $\delta g^{\mu\nu} = 0$, encontramos δS sob a forma

$$\delta S = \int d^4x\Big\{\sqrt{-g}\Big[\frac{\partial L}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\mu\delta\psi\Big] + \Big[\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})}\Big]\Big\}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.47}$$

Introduzindo-se a representação[3]

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu} = \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial(\partial_{\lambda}g^{\mu\nu})} \tag{2.48}$$

δS tomará a forma

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{\partial L}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\mu\delta\psi\Big] + \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.49}$$

Usando-se (2.35), teremos:

$$\begin{aligned}\delta S = &\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\frac{\partial L}{\partial\psi}\Big[-\xi^{\lambda}(x)\partial_\lambda\psi\Big] + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\mu\Big[-\xi^{\lambda}(x)\partial_\lambda\psi\Big]\Big\}\\ &+ \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{2.50}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\delta S = &\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{-\xi^{\lambda}(x)\Big[\frac{\partial L}{\partial\psi}\partial_\lambda\psi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\mu\partial_\lambda\psi\Big]\\ &- \frac{1}{2}\Big[\partial^{\lambda}\xi^{\mu} + \partial^{\mu}\xi^{\lambda}\Big]\frac{\partial L}{\partial(\partial^{\mu}\psi)}\partial_\lambda\psi\Big\}\\ &+ \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{2.51}$$

O ultimo termo entre chaves foi simetrizado devido à simetria de $\frac{\partial L}{\partial(\partial^{\mu}\psi)}\partial_\lambda\psi$ para Lagrangeanas cuja parte envolvendo derivadas coincide com a Lagrangeana (2.11).

Podemos mostrar que o termo $T_{\mu\nu}$ definido em (2.48) pode ser identificado como o tensor momento-energia, pelo menos com um grau de precisão de até o fator constante. O fato de que este fator é igual à unidade se verifica facilmente efetuando-se por exemplo o cálculo de (2.48) para o campo electromagnético, quando

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}g^{\mu\lambda}g^{\sigma\nu} \tag{2.52}$$

Vejamos porque: Para isto, analisemos com detalhes o último termo de (2.51) usando (2.43). Assim teremos

$$\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}T_{\mu\nu}(\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}) \tag{2.53}$$

Considerando a simetria de $T_{\mu\nu}$

$$\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}T_{\mu\nu}(\xi^{\mu;\nu}+\xi^{\nu;\mu}) = \int d^4xT_{\mu\nu}\sqrt{-g}\xi^{\mu;\nu}$$

$$= \int d^4x\sqrt{-g}\,T_{\mu}{}^{\nu}\xi^{\mu}{}_{;\nu}$$

$$= \int d^4x\sqrt{-g}(T_{\mu}{}^{\nu}\xi^{\mu})_{;\nu}$$

$$- \int d^4x\sqrt{-g}\,T_{\mu;\nu}^{\ \nu}\xi^{\nu} \qquad (2.54)$$

Façamos uma análise detalhada do termo $(T_{\mu}{}^{\nu}\xi^{\mu})_{;\nu}$, para isto suponhamos que

$$(T_{\mu}{}^{\nu}\xi^{\mu})_{;\nu} = A^{\nu}{}_{;\nu} \qquad (2.55)$$

Da definição de derivada covariante (1.6), temos

$$A^{\nu}{}_{;\nu} = \partial_{\nu}A^{\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\nu\lambda}A^{\lambda} \qquad (2.56)$$

Visto que na Relatividade Geral a torção é nula, a conexão $\Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda}$ é apenas o símbolo de Christoffel dado por (1.14), portanto

$$\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu \quad \lambda \end{matrix} \right\} = \Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}\Big(\partial_{\mu}g_{\lambda\sigma} + \partial_{\lambda}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\lambda}\Big)$$

Podemos encontrar $\Gamma^{\nu}{}_{\nu\lambda}$ fazendo-se $\mu = \nu$ e trocando de lugar os índices "σ" e "ν" do primeiro e terceiro termo entre parênteses, assim

$$\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \nu \quad \lambda \end{matrix} \right\} = \Gamma^{\nu}{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}\partial_{\lambda}g_{\nu\sigma} \qquad (2.57)$$

Podemos simplificar esta expressão se levarmos em conta que

$$dg = gg^{\mu\nu}dg_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}dg^{\mu\nu} \qquad (2.58)$$

(Porquanto $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta^{\mu}{}_{\mu} = 4$, então $g^{\mu\nu}dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}dg^{\mu\nu}$). Daí tem-se de (2.57) que

$$\Gamma^{\nu}{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial(ln\sqrt{-g})}{\partial x^{\lambda}} \qquad (2.59)$$

Assim de (2.56) surge

$$A^{\nu}{}_{;\nu} = \partial_\nu A^\nu + A^\lambda \frac{\partial(ln\sqrt{-g})}{\partial x^\lambda}$$

ou definitivamente

$$A^{\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}A^\lambda)}{\partial x^\lambda} \tag{2.60}$$

Voltando a (2.55) podemos agora escrever

$$(T_\mu{}^\nu \xi^\mu)_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, T_\mu{}^\nu \xi^\mu)}{\partial x^\lambda} \tag{2.61}$$

Daí, temos que a integral que aparece no último membro de (2.54)

$$\int d^4x \sqrt{-g}(T_\mu{}^\nu \xi^\mu)_{;\nu} \tag{2.62}$$

é transformada numa integral na hipersuperfície. Como nos limites de integração onde os ξ^μ se anulam esta integral desaparece, tem-se como resultado

$$\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = -\int d^4x\sqrt{-g}\,T_{\mu;\nu}^{\ \nu}\xi^\nu \tag{2.63}$$

Fazendo-se uso das equações de movimento (2.11) e novamente do Teorema de Gauss, encontramos de (2.49), igualando δS a zero que

$$\delta S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}T_{\mu;\nu}^{\ \nu}\xi^\nu = 0 \tag{2.64}$$

Em vista da arbitrariedade de ξ^ν, temos conseqüentemente que

$$T_{\mu;\nu}^{\ \nu} = 0 \tag{2.65}$$

Comparando com a equação[3]

$$\partial_\nu T^\nu{}_\mu = 0$$

verificada em coordenadas galileanas, vemos que $T_{\mu\nu}$, definido por (2.48) é o tensor de momento-energia.

Se tomarmos ξ^λ em (2.51) como um campo de Killing, então $\delta g^{\mu\nu} = 0$, ou de (2.38),

$$\partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu = \xi^\lambda \partial_\lambda g^{\mu\nu}$$

Portanto, (2.51) pode ser escrito como

$$\delta S = -\int d^4x \sqrt{-g}\,\xi^\lambda \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi} \partial_\lambda \psi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial_\mu \partial_\lambda \psi + \frac{1}{2} \partial_\lambda g^{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \psi)} \partial_\nu \psi \right\} \quad (2.66)$$

ou ainda,

$$\delta S = -\int d^4x \sqrt{-g}\,\xi^\lambda \partial_\lambda L \quad (2.67)$$

Das equações de Killing $\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} = 0$ tem-se

$$\xi^\nu{}_{;\nu} = 0 \quad (2.68)$$

que por (2.60) implica em

$$\partial_\nu (\sqrt{-g}\,\xi^\nu) = 0 \quad (2.69)$$

De outra forma sabemos que

$$\partial_\nu (\sqrt{-g}\,\xi^\nu L) = \partial_\nu (\sqrt{-g}\,\xi^\nu) L + \sqrt{-g}\,\xi^\nu (\partial_\nu L)$$

Usando-se (2.69) temos então

$$\partial_\nu (\sqrt{-g}\,\xi^\nu L) = \sqrt{-g}\,\xi^\nu \partial_\nu L$$

Assim podemos escrever (2.67) como

$$\delta S = \int d^4x \partial_\lambda (-\sqrt{-g}\,\xi^\lambda L) \quad (2.70)$$

Analogamente ao que foi feito na seção (II.1) para o espaço-tempo plano, podemos também definir simetrias para espaços-tempo curvos. Uma transformação infinitesimal do campo do tipo

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = \psi(x) + \delta\psi(x)$$

$$g^{\mu\nu}(x) \mapsto g'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(x) + \delta g^{\mu\nu}(x)$$

é uma simetria (contínua), se a variação induzida na ação δS puder se escrita sem o uso das equações de movimento como

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu \Lambda^\mu \tag{2.71}$$

onde Λ^μ é algum vetor densidade. Nota-se em (2.70) que todos os campos de Killing da métrica $g_{\mu\nu}(x)$ geram simetria da ação "S" provido do fato de que "L" é um escalar.

O caso mais geral é obtido adicionando-se a contribuição do campo gravitacional. Daí,

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{1}{16\pi k}R + L\Big] \tag{2.72}$$

Sua variação é dada por

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\Big\{\frac{1}{16\pi k}\delta(\sqrt{-g}R) + \delta(\sqrt{-g}L)\Big\}\\ &= \int d^4x\Big\{\frac{1}{16\pi k}\delta\Big(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\Big) + \delta(\sqrt{-g}L)\Big\}\\ &= \int d^4x\Big\{\frac{1}{16\pi k}\Big[R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g})\\ &\qquad + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu}\Big] + \delta(\sqrt{-g}L)\Big\}\end{aligned}$$

Substituindo-se aqui, segundo (2.58),

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.73}$$

encontramos

$$\begin{aligned}\delta S = -\int d^4x\Big\{\frac{1}{16\pi k}\Big[\Big(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\Big)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu}\Big]\\ + \delta(\sqrt{-g}L)\Big\}\end{aligned} \tag{2.74}$$

Para calcularmos a variação $\delta R_{\mu\nu}$, notemos ainda que embora as grandezas $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ não constituam um tensor, suas variações $\delta\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ formam um tensor. Com efeito, $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}A_{\mu}dx^{\lambda}$ é a variação de um vetor em um transporte paralelo desde um ponto "P" até um ponto infinitamente próximo "P'". Portanto $\delta\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}A_{\mu}dx^{\lambda}$ é a diferença de dois vetores obtidos respectivamente de dois transportes paralelos (com as $\Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda}$ não variadas e variadas), a partir de um ponto "P" até o ponto "P'". Considerando que a diferença de dois vetores num ponto é um vetor, tem-se portanto que $\delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda}$ é um tensor.

Utilizando-se um sistema de coordenadas localmente geodésico, temos a garantia de que $\Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda} = 0$ no ponto dado. Logo com o auxílio do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ (1.20),

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}$$

e recordando que as derivadas primeiras de $g^{\mu\nu}$ são agora iguais a zero, teremos

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\left(\partial_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda}\right) \\ &= g^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}\delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}w^{\lambda} \end{aligned}$$

onde

$$w^{\lambda} = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\nu}{}_{\lambda\nu}$$

é um vetor. Por outro lado $\frac{\partial w^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}}$ é a expressão, no sistema geodésico de

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\lambda}\left(\sqrt{-g}\,w^{\lambda}\right) = w^{\lambda}{}_{;\lambda}$$

Então

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\lambda}\left(\sqrt{-g}\,w^{\lambda}\right)$$

em qualquer sistema. Conseqüentemente podemos escrever a segunda integral de (2.74) como

$$\int d^4x\, g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g} = \int d^4x\partial_{\lambda}\left(\sqrt{-g}\,w^{\lambda}\right) \qquad (2.75)$$

a qual, segundo o Teorema de Gauss, pode ser transformada em uma integral em função de w^{λ} estendida à hipersuperfície delimitando todo o 4-volume.

Porém, este termo desaparece, porque na fronteira de integração a variação do campo é nula.

Retornando a (2.74) e fazendo-se uso de (2.38) e (2.51) para $\delta(\sqrt{-g}L)$, encontra-se que

$$
\begin{aligned}
\delta S = & \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\frac{1}{16\pi k}\big(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\big)+\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\Big\}\delta g^{\mu\nu} \\
& + \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{-\xi^\lambda(x)\Big[\frac{\partial L}{\partial\psi}\partial_\lambda\psi+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\mu\partial_\lambda\psi\Big] \\
& - \frac{1}{2}\Big[\delta g^{\mu\lambda}+\xi^\nu(x)\partial_\nu g^{\mu\lambda}(x)\Big]\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\psi)}\partial_\lambda\psi\Big\} \\
= & \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\frac{1}{16\pi k}\Big(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\Big)+\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\Big\}\delta g^{\mu\nu} \\
& + \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{-\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\psi)}\partial_\lambda\psi\,\delta g^{\mu\lambda}\Big\} \\
& + \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{-\xi^\lambda(x)\Big[\frac{\partial L}{\partial\psi}\partial_\lambda\psi+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\mu\partial_\lambda\psi \\
& - \frac{1}{2}\partial_\lambda g^{\mu\nu}\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\psi)}\partial_\nu\psi\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

A última integral coincide com (2.66). Daí

$$
\begin{aligned}
\delta S = - & \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\frac{1}{16\pi k}\Big(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\Big)+\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\Big\}\delta g^{\mu\nu} \\
& + \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{-\xi^\lambda\partial_\lambda L-\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\psi)}\partial_\nu\psi\,\delta g^{\mu\nu}\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.76}
$$

Assim, se ξ^λ é um vetor de Killing ($\delta g^{\mu\nu}=0$), portanto

$$\delta S = \int d^4x\,\partial_\lambda(-\sqrt{-g}\,\xi^\lambda L) \tag{2.77}$$

e a transformação

$$x'^\mu = x^\mu+\xi^\mu(x) \quad ; \quad \xi^{\mu;\nu}+\xi^{\nu;\mu}=0 \tag{2.78}$$

é uma simetria da ação completa. Como nenhuma outra transformação pode ser simetria da parte gravitacional, estas transformações esgotam as simetrias do espaço-tempo de qualquer ação que inclua a gravitação.

Vejamos como fica a corrente de Noether. Reescrevendo δS como

$$\delta S = -\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\frac{1}{16\pi k}\Big(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\Big)+\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\Big\}\delta g^{\mu\nu}$$
$$+\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\frac{\partial L}{\partial\psi}\delta\psi+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\mu\delta\psi\Big\} \tag{2.79}$$

e finalmente usando as equações de movimento

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-8\pi k\,T_{\mu\nu} \tag{2.80}$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial\psi}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\Big[\sqrt{-g}\,\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\Big] \tag{2.81}$$

tem-se que

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[-\frac{1}{16\pi k}8\pi k\,T_{\mu\nu}+\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\Big]\delta g^{\mu\nu}$$
$$+\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\Big(\sqrt{-g}\,\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\Big)\delta\psi$$
$$+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\mu\delta\psi\Big\}$$
$$=\int d^4x\,\partial_\mu\Big[\sqrt{-g}\,\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi\Big] \tag{2.82}$$

Subtraindo-se (2.82) e (2.77) teremos com o uso de (2.35) que

$$\partial_\mu\Big\{\sqrt{-g}\,\xi^\lambda\Big(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\lambda\psi-\delta^\mu{}_\lambda L\Big)\Big\} \tag{2.83}$$

Donde surge que a corrente de Noether é dada por

$$J^\mu=\sqrt{-g}\,\xi^\lambda\Big(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\lambda\psi-\delta^\mu{}_\lambda L\Big) \tag{2.84}$$

O objeto entre parênteses é o tensor momento-energia associado ao campo ψ.

Podemos então escrever (2.83) como

$$\partial_\mu\{\sqrt{-g}\,\xi^\lambda T^\mu{}_\lambda\}=0$$

com

$$\xi^{\lambda;\mu}+\xi^{\mu;\lambda}=0$$

Capítulo III

O TEOREMA DE NOETHER NA TEORIA DE EINSTEIN–CARTAN

III-1 Espaços-tempo Curvos

Calculemos inicialmente a variação de forma induzida no tensor métrico $g^{\mu\nu}(x)$, quando consideramos a tranformação infinitesimal de coordenadas no espaço-tempo curvo

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \tag{3.1}$$

Da lei de transformação para tensores contravariantes de segunda órdem temos que o tensor métrico $g^{\mu\nu}(x)$ tem a seguinte transformação:

$$g'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} g^{\alpha\beta}(x) \tag{3.2}$$

Logo, usando-se (3.1) e desprezando os termos de ordem superior a primeira, obteremos

$$g'^{\mu\nu}(x') = g^{\mu\nu}(x) + g^{\alpha\nu}(\partial_{\alpha}\xi^{\mu}) + g^{\mu\beta}(\partial_{\beta}\xi^{\nu}) \tag{3.3}$$

Por outro lado, da expansão de $g'^{\mu\nu}(x')$ em série de Taylor, encontramos

$$g'^{\mu\nu}(x') = g'^{\mu\nu}(x) + \xi^{\lambda}(x)\partial_{\lambda}g^{\mu\nu} \tag{3.4}$$

De (3.3) e (3.4) surge

$$g'^{\mu\nu}(x) - g^{\mu\nu}(x) = -\xi^{\lambda}(x)\partial_{\lambda}g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu}\partial_{\alpha}\xi^{\mu} + g^{\mu\beta}\partial_{\beta}\xi^{\nu} \tag{3.5}$$

ou seja

$$\delta g^{\mu\nu}(x) = -\xi^{\lambda}(x)\partial_{\lambda}g^{\mu\nu}(x) + g^{\alpha\nu}\partial_{\alpha}\xi^{\mu} + g^{\alpha\mu}\partial_{\alpha}\xi^{\nu} \tag{3.6}$$

Usando-se (2.40) e (2.41), temos que

$$g^{\nu\alpha}\partial_{\alpha}\xi^{\mu} = \xi^{\mu;\nu} - g^{\nu\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\lambda}\xi^{\lambda}(x) \tag{3.7}$$

$$g^{\mu\alpha}\partial_\alpha \xi^\nu = \xi^{\nu;\mu} - g^{\mu\alpha}\Gamma^\nu{}_{\alpha\lambda}\xi^\lambda(x) \tag{3.8}$$

Assim (3.6) se torna

$$\delta g^{\mu\nu}(x) = \xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} - \xi^\lambda(x)\partial_\lambda g^{\mu\nu}(x) - g^{\nu\alpha}\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}\xi^\lambda - g^{\mu\alpha}\Gamma^\nu{}_{\alpha\lambda}\xi^\lambda \tag{3.9}$$

De outra forma, da condição de metricidade (1.8) e de (1.7), podemos expressar a derivada do tensor métrico $g^{\mu\nu}$ em função das conexões. Assim

$$g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma}g^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu{}_{\lambda\sigma}g^{\mu\sigma} = 0 \tag{3.10}$$

ou

$$\partial_\lambda g^{\mu\nu} = -\Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha}g^{\alpha\nu} - \Gamma^\nu{}_{\lambda\alpha}g^{\mu\alpha} \tag{3.11}$$

Da expressão (3.9) surge

$$\begin{aligned}\delta g^{\mu\nu}(x) = \xi^{\mu|\nu} + \xi^{\nu|\mu} - \xi^\lambda(x)\Big[g^{\alpha\nu}\Big(\Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}\Big) \\ + g^{\mu\sigma}\Big(\Gamma^\nu{}_{\lambda\alpha} - \Gamma^\nu{}_{\alpha\lambda}\Big)\Big]\end{aligned} \tag{3.12}$$

portanto, da definição de torção (1.3), temos

$$\delta g^{\mu\nu}(x) = \xi^{\mu|\nu} + \xi^{\nu|\mu} + 2\Big[g^{\alpha\nu}S_{\lambda\alpha}{}^\mu + g^{\mu\alpha}S_{\lambda\alpha}{}^\nu\Big]\xi^\lambda(x) \tag{3.13}$$

finalmente*

$$\delta g^{\mu\nu}(x) = \xi^{\mu|\nu} + \xi^{\nu|\mu} + 2\Big(S_\lambda{}^{\nu\mu} + S_\lambda{}^{\mu\nu}\Big)\xi^\lambda(x) \tag{3.14}$$

Como a Lagrangeana por si só é um escalar sob uma transformação geral de coordenadas, temos que sua variação de forma é dada por

$$\delta L = -\xi^\mu\partial_\mu L \tag{3.15}$$

Por outro lado, a ação da matéria é dada por

$$S_m = \int d^4x\sqrt{-g}L \tag{3.16}$$

* *Observe em comparação com (2.43), o aparecimento do termo da torção.*

e sua variação corresponde a

$$\delta S_m = \delta \int d^4x(\sqrt{-g}L) = \int d^4x\Big(\delta\sqrt{-g}L + \sqrt{-g}\delta L\Big) \tag{3.17}$$

Usando-se (3.15) e (2.73), podemos escrever (3.17) como

$$\delta S_m = \delta \int d^4x\Big[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}L + \sqrt{-g}\,(-\xi^\mu\partial_\mu L)\Big] \tag{3.18}$$

Tomando-se os campos vetoriais $\xi^\mu(x)$ para os quais $\delta g^{\mu\nu} = 0$, isto é, aqueles em que a transformação não muda a forma da métrica, temos:

$$\delta S_m = -\int d^4x\sqrt{-g}\xi^\mu\partial_\mu L \tag{3.19}$$

Por outro lado, sabemos que

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\xi^\mu L) = \partial_\mu(\sqrt{-g}\xi^\mu)L + \sqrt{-g}\xi^\mu\partial_\mu L \tag{3.20}$$

Considerando o primeiro termo do segundo membro, temos com o uso de (2.73) e (2.58) que

$$\begin{aligned}\partial_\mu(\sqrt{-g}\xi^\mu) &= \partial_\mu(\sqrt{-g}\,)\xi^\mu + \sqrt{-g}\partial_\mu\xi^\mu \\ &= \sqrt{-g}\Big[\frac{1}{2}g^{\lambda\nu}(\partial_\mu g_{\lambda\nu})\xi^\mu + \partial_\mu\xi^\mu\Big]\end{aligned} \tag{3.21}$$

Vejamos agora como podemos expressar $\partial_\mu\xi^\mu$ em função de ξ^μ, $g^{\lambda\nu}$ e suas derivadas. Aplicando-se a condição de isometria a (3.13) encontramos

$$\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} = -2\Big(S_\lambda{}^{\mu\nu} + S_\lambda{}^{\nu\mu}\Big)\xi^\lambda(x) \tag{3.22}$$

Podemos abaixar o índice "ν" com a aplicação de $g_{\nu\sigma}$ a ambos os lados de (3.22), assim

$$\xi^\mu{}_{;\nu} + \xi_\nu{}^{;\mu} = -2\Big(S_\lambda{}^\mu{}_\nu + S_{\lambda\nu}{}^\mu\Big)\xi^\lambda(x) \tag{3.23}$$

Além disso, fazendo-se

$$\xi_\nu{}^{;\mu} = g_{\nu\alpha}g^{\mu\beta}\xi^\alpha{}_{;\beta} \tag{3.24}$$

e $\mu = \nu$, encontramos para (3.23)

$$2\xi^{\mu}{}_{;\mu} = -2\Big(S_{\lambda}{}^{\mu}{}_{\mu} + S_{\lambda\mu}{}^{\mu}\Big)\xi^{\lambda}(x) \tag{3.25}$$

Consideremos agora a definição (1.3) para a torção

$$S_{\lambda\nu}{}^{\mu} = \frac{1}{2}(\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}) \tag{3.26}$$

Daí,

$$S_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\mu} = \frac{1}{2}g^{\nu\alpha}g_{\mu\beta}(\Gamma^{\beta}{}_{\lambda\alpha} - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\lambda}) \tag{3.27}$$

Fazendo-se $\mu = \nu$ em (3.26) e (3.27), encontramos que

$$S_{\lambda\mu}{}^{\mu} = S_{\lambda}{}^{\mu}{}_{\mu} \tag{3.28}$$

portanto,

$$\xi^{\mu}{}_{;\mu} = -2S_{\lambda}{}^{\mu}{}_{\mu}\xi^{\lambda} = -2S_{\lambda\mu}{}^{\mu}\xi^{\lambda} \tag{3.29}$$

Tomando-se a definição (1.5) e novamente aplicando-se a condição $\mu{=}\nu$ tem-se que

$$\xi^{\mu}{}_{;\mu} = \partial_{\mu}\xi^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}\xi^{\nu} \tag{3.30}$$

Por sua vez, impondo-se a condição $\mu{=}\lambda$ nas identidades (1.16) e (1.15), surge

$$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu \quad \nu \end{matrix} \right\} - K_{\mu\nu}{}^{\mu} \tag{3.31}$$

onde

$$K_{\mu\nu}{}^{\mu} = -S_{\mu\nu}{}^{\mu} + S_{\nu}{}^{\mu}{}_{\mu} - S^{\mu}{}_{\mu\nu} \tag{3.32}$$

Façamos agora uma análise em cada um dos termos do segundo membro de (3.32).

$$S_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \frac{1}{2}\Big(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\Big) \xrightarrow{\mu=\lambda} S_{\mu\nu}{}^{\mu} = \frac{1}{2}\Big(\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\mu}\Big) \tag{3.33}$$

O termo $S_{\nu}{}^{\mu}{}_{\mu}$ pode ser obtido de (3.27) fasendo-se $\lambda{=}\nu$ e $\nu = \mu$, assim

$$S_{\nu}{}^{\mu}{}_{\mu} = \frac{1}{2}\Big(\Gamma^{\mu}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}\Big) \tag{3.34}$$

De (3.33) e (3.34), vê-se que

$$S_{\mu\nu}{}^{\mu} = -S_{\nu}{}^{\mu}{}_{\mu} \tag{3.35}$$

Por outro lado,

$$S^{\lambda}{}_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho} S_{\rho\mu\nu} \tag{3.36}$$

Para $\lambda = \mu$ surge

$$S^{\mu}{}_{\mu\nu} = g^{\mu\rho} S_{\rho\mu\nu} \tag{3.37}$$

Notemos porém que

$$S_{\rho\mu\nu} = g_{\nu\lambda} S_{\rho\mu}{}^{\lambda} = \frac{1}{2} g_{\nu\lambda} \Big(\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho} \Big) \tag{3.38}$$

Uma vez que $S_{\rho\mu\nu}$ é antissimétrico nos dois primeiros índices (ρ, μ) e $g^{\mu\rho}$ é simétrico nos mesmos, conclui-se que

$$S^{\mu}{}_{\mu\nu} = 0 \tag{3.39}$$

De (3.35) e (3.39), temos que (3.32) pode ser escrita como

$$K_{\mu\nu}{}^{\mu} = -2S_{\mu\nu}{}^{\mu} \tag{3.40}$$

Logo, de (3.31) surge

$$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu \quad \nu \end{matrix} \right\} + 2S_{\mu\nu}{}^{\mu} \tag{3.41}$$

De (3.30) temos portanto que

$$\xi^{\mu}{}_{;\mu} = \partial_{\mu}\xi^{\mu} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu \quad \nu \end{matrix} \right\} \xi^{\nu} + 2S_{\mu\nu}{}^{\mu}\xi^{\nu} \tag{3.42}$$

Por outro lado de (2.57) temos que

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu \quad \nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_{\nu} g_{\mu\lambda} \tag{3.43}$$

Daí,

$$\xi^{\mu}{}_{;\mu} = \partial_\mu \xi^\mu + \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}(\partial_\nu g_{\mu\lambda})\xi^\nu + 2S_{\mu\nu}{}^{\mu}\xi^\nu \tag{3.44}$$

Usando-se (3.29) encontramos então

$$\partial_\mu \xi^\mu = -2S_{\nu\mu}{}^{\mu}\xi^\nu - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}(\partial_\nu g_{\mu\lambda})\xi^\nu - 2S_{\mu\nu}{}^{\mu}\xi^\nu \tag{3.45}$$

De (3.33) é fácil ver que

$$S_{\nu\mu}{}^{\mu} = -S_{\mu\nu}{}^{\mu} \tag{3.46}$$

Portanto,

$$\partial_\mu \xi^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda}(\partial_\nu g_{\mu\lambda})\xi^\nu = -\frac{1}{2} g^{\lambda\nu}(\partial_\mu g_{\lambda\nu})\xi^\mu \tag{3.47}$$

Voltando a (3.21) teremos então

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\,\xi^\mu) = 0 \tag{3.48}$$

Finalmente de (3.20),

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\,\xi^\mu L) = \sqrt{-g}\,\xi^\mu \partial_\mu L \tag{3.49}$$

Logo (3.19) pode ser escrita como

$$\delta S_m = \int d^4x \partial_\mu(-\sqrt{-g}\xi^\mu L) \tag{3.50}$$

Usando a definição de simetria (2.71) para espaços-tempo curvos, vemos através de (3.50) que todos os campos da métrica "$g_{\mu\nu}$" geram simetrias da ação "S_m" devido ao fato de "L" ser um escalar.

O caso de interesse físico é obtido adicionando-se a contribuição da ação gravitacional. Isto nos conduz a

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\Big(\frac{1}{16\pi k} R + L\Big) \tag{3.51}$$

Analisemos separadamente a variação da ação do campo gravitacional

$$\begin{aligned}\delta \int d^4x R\sqrt{-g} &= \delta \int d^4x g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\sqrt{-g} \\ &= \int d^4x \Big(R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta R_{\mu\nu}\Big)\end{aligned} \tag{3.52}$$

Usando-se (2.73) no segundo membro desta equação, teremos

$$\delta \int d^4x\sqrt{-g}\,R = \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\Big(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\Big)\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\Big\} \tag{3.53}$$

De (1.17), (1.18) e (2.73), verifica-se que

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g} &= \delta\Re - \delta(\sqrt{-g})g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} \\ &= \delta\Re + \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\Big(\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R - R_{\mu\nu}\Big) \end{aligned} \tag{3.54}$$

Levando-se em conta a expressão para "$\delta\Re$" dada por (1.59), encontra-se

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g} = {} & \Big[-G^{\mu\nu} + \overset{*}{\nabla}_\lambda\Big(T^{\mu\nu\lambda} - T^{\nu\lambda\mu} + T^{\lambda\mu\nu}\Big)\Big]\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} \\ & - 2\Big(T_\lambda{}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}{}_\lambda + T^\nu{}_\lambda{}^\mu\Big)\sqrt{-g}\delta S_{\mu\nu}{}^\lambda \\ & + \Big(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - R_{\mu\nu}\Big)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.55}$$

Substituindo-se agora esta relação em (3.53), encontraremos então

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x\sqrt{-g}R = \int d^4x\Big\{ & \Big[-G^{\mu\nu} + \overset{*}{\nabla}_\lambda\Big(T^{\mu\nu\lambda} - T^{\nu\lambda\mu} + T^{\lambda\mu\nu}\Big)\Big]\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} \\ & - 2\Big(T_\lambda{}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}{}_\lambda + T^\nu{}_\lambda{}^\mu\Big)\sqrt{-g}\delta S_{\mu\nu}{}^\lambda\Big\} \end{aligned} \tag{3.56}$$

Voltando a (3.51) e usando-se (3.55) e (3.18), obteremos que a variação da ação total (ação do campo mais ação da matéria), é dada por:

$$\delta S = \int d^4x\Big\{\frac{1}{16\pi k}\delta(\sqrt{-g}R) + \delta(\sqrt{-g}L)\Big\} \tag{3.57}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{ & \frac{1}{16\pi k}\Big[\Big(-G^{\mu\nu} + \overset{*}{\nabla}_\lambda\,(T^{\mu\nu\lambda} - T^{\nu\lambda\mu} + T^{\lambda\mu\nu}) \\ & - 8\pi k\, g_{\mu\nu}L\Big)\delta g_{\mu\nu} \\ & - 2\Big(T_\lambda{}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}{}_\lambda + T^\nu{}_\lambda{}^\mu\Big)\delta S_{\mu\nu}{}^\lambda\Big] - \xi^\mu\partial_\mu L\Big\} \end{aligned} \tag{3.58}$$

Se estabelecermos as condições $\delta g_{\mu\nu} = 0$ e $\delta S_{\mu\nu}{}^{\lambda} = 0$, teremos com o uso de (3.49) que a variação da ação δS passa a ser dada por

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu (-\sqrt{-g}\xi^\mu L) \tag{3.59}$$

Portanto a transformação

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \quad ; \quad \xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} = -2(S_\lambda{}^{\nu\mu} + S_\lambda{}^{\mu\nu})\xi^\lambda \tag{3.60}$$

é uma simetria da ação completa. Da mesma forma como foi visto na Relatividade Geral, aqui também podemos garantir que como nenhuma outra transformação pode ser uma simetria da parte gravitacional, a transformação (3.60) esgota todas as simetrias do espaço-tempo de qualquer ação que inclua a gravitação com spin.

Resta-nos agora construir a corrente de Noether. Consideremos inicialmente a expressão geral

$$L = L(\psi_\mu, \partial_\lambda \psi_\mu, g_{\mu\nu}, \partial_\lambda g_{\mu\nu}, S_{\mu\nu}{}^{\lambda}) \tag{3.61}$$

Donde se tira que

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \sqrt{-g} L = \int d^4x \Big\{ \sqrt{-g} \Big[& \frac{\partial L}{\partial \psi_\mu} \delta\psi_\mu \\ & + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\lambda \psi_\mu)} \partial_\lambda \delta\psi_\mu + \frac{\partial L}{\partial S_{\mu\nu}{}^{\lambda}} \delta S_{\mu\nu}{}^{\lambda} \Big] \\ & + \Big[\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})} \partial_\lambda \delta g_{\mu\nu} \Big] \Big\} \end{aligned} \tag{3.62}$$

A menos de uma 4-divergência, teremos

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \sqrt{-g} L = \int d^4x \Big\{ \sqrt{-g} \Big[& \frac{\partial L}{\partial \psi_\mu} \delta\psi_\mu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\lambda \psi_\mu)} \partial_\lambda \delta\psi_\mu \Big] \\ & + \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial S_{\mu\nu}{}^{\lambda}} \delta S_{\mu\nu}{}^{\lambda} \\ & + \Big[\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \Big(\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})} \Big) \Big] \Big\} \delta g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.63}$$

O último termo entre colchetes pode ser denotado por:

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}L)}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda\Big(\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})}\Big) \qquad (3.64)$$

Usando-se as definições (1.62) e (1.63) podemos escrever (3.63) da seguinte forma

$$\delta\int d^4x\sqrt{-g}L = \int d^4x\Big\{\sqrt{-g}\Big[\frac{\partial L}{\partial\psi_\mu}\delta\psi_\mu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\lambda\psi_\mu)}\partial_\lambda\delta\psi_\mu\Big] + \sqrt{-g}\,\mathcal{M}_\lambda{}^{\nu\mu}\delta S_{\mu\nu}{}^\lambda + \frac{1}{2}(\sqrt{-g}\,\sigma^{\mu\nu})\delta g_{\mu\nu}\Big\} \qquad (3.65)$$

De (3.57), (3.56) e (3.65), tem-se finalmente

$$\delta S = \int d^4x\Big\{\frac{1}{16\pi k}\Big[-G^{\mu\nu} + \overset{*}{\nabla}_\lambda\,(T^{\mu\nu\lambda} - T^{\nu\lambda\mu} + T^{\lambda\mu\nu}) - 8\pi k\,\sigma^{\mu\nu}\Big]\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} + \Big[-\frac{1}{8\pi k}(T_\lambda{}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}{}_\lambda + T^\nu{}_\lambda{}^\mu) + \mathcal{M}_\lambda{}^{\nu\mu}\Big]\sqrt{-g}\,\delta S_{\mu\nu}{}^\lambda + \Big[\frac{\partial L}{\partial\psi_\mu}\delta\psi_\mu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\lambda\psi_\mu)}\partial_\lambda\delta\psi_\mu\Big]\sqrt{-g}\Big\} \qquad (3.66)$$

Devido as equações de movimento, o segundo termo entre colchetes em (3.66) é nulo. Para isto consideremos (1.65) e (1.72)

$$-\frac{1}{8\pi k}(T_\lambda{}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}{}_\lambda + T^\nu{}_\lambda{}^\mu) = -(\mathcal{T}_\lambda{}^{\mu\nu} - \mathcal{T}^{\mu\nu}{}_\lambda + \mathcal{T}^\nu{}_\lambda{}^\mu) \qquad (3.67)$$

De (1.66) vemos que $\mathcal{T}^{\mu\nu\lambda}$ é antissimétrico nos dois primeiros índices, logo

$$\mathcal{M}^{\lambda\nu\mu} = -\mathcal{T}^{\lambda\nu\mu} + \mathcal{T}^{\nu\mu\lambda} - \mathcal{T}^{\mu\lambda\nu} = (\mathcal{T}^{\nu\lambda\mu} - \mathcal{T}^{\mu\nu\lambda} + \mathcal{T}^{\lambda\mu\nu}) \qquad (3.68)$$

Daí

$$\mathcal{M}_\lambda{}^{\nu\mu} = (\mathcal{T}_\lambda{}^{\mu\nu} - \mathcal{T}^{\mu\nu}{}_\lambda + \mathcal{T}^\nu{}_\lambda{}^\mu) \qquad (3.69)$$

Portanto de (3.67) e (3.69) tem-se que

$$-\frac{1}{8\pi k}(T_\lambda{}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}{}_\lambda + T^\nu{}_\lambda{}^\mu) + \mathcal{M}_\lambda{}^{\nu\mu} = 0$$

Por outro lado, se definirmos o tensor métrico momento-energia $\sigma^{\mu\nu}$ por:

$$\sigma^{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi k}\Big[-G^{\mu\nu} + \overset{*}{\nabla}_\lambda\,(T^{\mu\nu\lambda} - T^{\nu\lambda\mu} + T^{\lambda\mu\nu})\Big] \qquad (3.70)$$

e levarmos em conta (1.72) e (1.65), é possível definir o seguinte (em geral assimétrico), tensor de momento-energia

$$\Sigma^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu} + \overset{*}{\nabla}_\lambda \left(\mathcal{T}^{\mu\nu\lambda} - \mathcal{T}^{\nu\lambda\mu} + \mathcal{T}^{\lambda\mu\nu} \right) = \sigma^{\mu\nu} - \overset{*}{\nabla}_\lambda \, \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} \qquad (3.70\,a)$$

Daí obtemos a seguinte equação alternativa

$$G^{\mu\nu} = 8\pi k \, \Sigma^{\mu\nu} \qquad (3.70\,b)$$

Isto nos conduz à seguinte expressão para (3.66),

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\partial L}{\partial \psi_\mu} \delta\psi_\mu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\lambda \psi_\mu)} \partial_\lambda \delta\psi_\mu \right] \qquad (3.71)$$

Usando-se as equações do Movimento

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\lambda \psi_\mu)} \right) \qquad (3.72)$$

encontra-se facilmente,

$$\delta S = \int d^4x \partial_\lambda \left[\sqrt{-g} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\lambda \psi_\mu)} \delta\psi_\mu \right] \qquad (3.73)$$

Subtraindo esta última de (3.59) teremos,

$$\partial_\lambda \left\{ \sqrt{-g} \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\lambda \psi_\mu)} \delta\psi_\mu + \xi^\lambda L \right] \right\} = 0 \qquad (3.74)$$

Vejamos como fica a variação de forma induzida no campo vetorial ψ_μ. Da relação

$$\psi'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \psi_\nu(x) \qquad (3.75)$$

segue-se, levando em conta a transformação infinitesimal no espaço-tempo curvo

$$x'^\nu = x^\nu + \xi^\nu(x) \;\Rightarrow\; x^\nu = x'^\nu - \xi^\nu(x) \qquad (3.76)$$

que,

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\nu{}_\mu - \frac{\partial \xi^\nu(x')}{\partial x'^\mu}$$

Desprezando-se os termos de segunda órdem na expansão em série de Taylor de $\xi^\nu(x')$, obtemos

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\nu{}_\mu - \frac{\partial \xi^\nu(x)}{\partial x^\mu} \tag{3.77}$$

Portanto de (3.75) temos,

$$\psi'_\mu(x') = \psi_\mu(x) - \partial_\mu \xi^\nu \psi_\nu(x) \tag{3.78}$$

Por outro lado da expansão em Taylor de $\psi'_\mu(x')$ sabe-se que

$$\psi'_\mu(x') = \psi'_\mu(x) + \xi^\nu(x)\partial_\nu \psi_\mu(x) \tag{3.79}$$

Como resultado encontramos

$$\delta\psi_\mu(x) = \psi'_\mu(x) - \psi_\mu(x) = -\xi^\nu \partial_\nu \psi_\mu(x) - \partial_\mu \xi^\nu(x)\psi_\nu(x) \tag{3.80}$$

Voltanto a (3.74) teremos

$$\partial_\lambda \Big\{ \sqrt{-g}\Big[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\lambda \psi_\mu)}\Big(-\xi^\nu(x)\partial_\nu \psi_\mu(x) - \partial_\mu \xi^\nu(x)\psi_\nu(x)\Big) + \xi^\lambda L\Big]\Big\} = 0 \tag{3.81}$$

Considerando a Lagrangeana de Proca (1.75), verifica-se que o cálculo de $\frac{\partial L}{\partial(\partial_\lambda \psi_\mu)}$ nos conduz a

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\lambda \psi_\mu)} = -\frac{1}{2}\Big\{(\partial^\lambda \psi^\mu - \partial^\mu \psi^\lambda) + 2S^{\lambda\mu\nu}\psi_\nu\Big\} \tag{3.82}$$

onde o tensor $F^{\lambda\mu}$ é dado por

$$F^{\lambda\mu} = \partial^\lambda \psi^\mu - \partial^\mu \psi^\lambda \tag{3.83}$$

Portanto,

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\lambda \psi_\mu)} = -\frac{1}{2}\Big\{F^{\lambda\mu} + 2S^{\lambda\mu\nu}\psi_\nu\Big\} \tag{3.84}$$

Definimos o termo entre chaves como sendo o tensor

$$\mathcal{F}^{\lambda\mu} = F^{\lambda\mu} + 2S^{\lambda\mu\nu}\psi_\nu \tag{3.85}$$

Assim teremos finalmente

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\lambda \psi_\mu)} = -\frac{1}{2}\mathcal{F}^{\lambda\mu} \qquad (3.86)$$

Podemos então escrever (3.81) como

$$\partial_\lambda\left\{\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}\mathcal{F}^{\lambda\mu}\Big(-\xi^\nu(x)\partial_\nu\psi_\mu(x) - \partial_\mu\xi^\nu(x)\psi_\nu(x)\Big) + \xi^\lambda L\right]\right\} = 0 \qquad (3.87)$$

ou,

$$\frac{1}{2}\partial_\lambda\left\{\sqrt{-g}\mathcal{F}^{\lambda\mu}\xi^\nu(x)\partial_\nu\psi_\mu(x)\right\} + \frac{1}{2}\partial_\lambda\left\{\sqrt{-g}\mathcal{F}^{\lambda\mu}\partial_\mu\xi^\nu(x)\psi_\nu(x)\right\}$$
$$+ \partial_\lambda\left\{\sqrt{-g}\xi^\lambda(x)L\right\} = 0 \qquad (3.88)$$

Por conveniência, façamos a seguinte mudança no segundo termo da última expressão

$$\partial_\lambda\left\{\sqrt{-g}\mathcal{F}^{\lambda\mu}\partial_\mu\xi^\nu(x)\psi_\nu(x)\right\} = \partial_\lambda\left\{\partial_\mu\left[\sqrt{-g}\mathcal{F}^{\lambda\mu}\xi^\nu(x)\psi_\nu(x)\right]\right\}$$
$$- \partial_\lambda\left\{\xi^\nu(x)\partial_\mu\left[\sqrt{-g}\mathcal{F}^{\lambda\mu}\psi_\nu(x)\right]\right\} \qquad (3.89)$$

Considerando que $\mathcal{F}^{\lambda\mu}$ é antissimétrico em "$\lambda\,\mu$" ($F^{\lambda\mu}$ e $S^{\lambda\mu\nu}$ são antissimétricos em "$\lambda\,\mu$"), e que $\partial_\lambda\partial_\mu = \partial_\mu\partial_\lambda$, temos que o primeiro termo do segundo membro de (3.89) é nulo. Portanto,

$$\partial_\lambda\left\{\sqrt{-g}\mathcal{F}^{\lambda\mu}\partial_\mu\xi^\nu(x)\psi_\nu(x)\right\} = -\partial_\lambda\left\{\xi^\nu(x)\partial_\mu\left[\sqrt{-g}\mathcal{F}^{\lambda\mu}\psi_\nu(x)\right]\right\} \qquad (3.90)$$

Voltanto a (3.88) teremos então

$$\partial_\lambda\left\{\xi^\nu(x)\left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}\mathcal{F}^{\lambda\mu}\partial_\nu\psi_\mu(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu\Big(\sqrt{-g}\mathcal{F}^{\lambda\mu}\psi_\nu(x)\Big)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \sqrt{-g}\,\delta^\lambda{}_\nu L\right]\right\} = 0 \qquad (3.91)$$

Fazendo uma análise detalhada do segundo termo desta equação levando-se em conta (3.86), as equações de movimento (3.72) e o fato de que $\mathcal{F}^{\lambda\mu}$ é antissimétrico, surge

$$\frac{1}{2}\partial_\mu\Big(\sqrt{-g}\mathcal{F}^{\lambda\mu}\psi_\nu(x)\Big) = \partial_\mu\left[\sqrt{-g}\Big(-\frac{1}{2}\mathcal{F}^{\mu\lambda}\Big)\psi_\nu(x)\right]$$
$$= \sqrt{-g}\left\{\frac{\partial L}{\partial\psi_\lambda}\psi_\nu(x) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\mathcal{F}^{\lambda\mu}\partial_\mu\psi_\nu(x)\right\} \qquad (3.92)$$

Da Lagrangeana de Proca e da definição (3.85), encontramos por outro lado que

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_\lambda} = -\frac{1}{2}\Big\{F_{\mu\nu}S^{\mu\nu\lambda} + 2S^{\mu\nu\lambda}S_{\mu\nu}{}^{\eta}\psi_\eta - 2m^2\psi^\lambda\Big\} \tag{3.93}$$

Portanto podemos escrever (3.92) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_\mu\Big(\sqrt{-g}\mathcal{F}^{\lambda\mu}\psi_\nu(x)\Big) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\Big\{&F_{\mu\sigma}S^{\mu\sigma\lambda} \\ &+ 2S^{\mu\sigma\lambda}S_{\mu\sigma}{}^{\eta}\psi_\eta - 2m^2\psi^\lambda\Big\}\psi_\nu(x) \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{-g}\mathcal{F}^{\lambda\mu}\partial_\mu\psi_\nu(x)\end{aligned} \tag{3.94}$$

De (3.94) e (3.91) teremos então

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\Big\{\xi^\nu(x)\sqrt{-g}\Big[\frac{1}{2}\mathcal{F}^{\lambda\mu}F_{\nu\mu} + \frac{1}{2}\Big(&F_{\mu\sigma}S^{\mu\sigma\lambda} \\ &+ 2S^{\mu\sigma\lambda}S_{\mu\sigma}{}^{\eta}\psi_\eta - 2m^2\psi^\lambda\Big)\psi_\nu(x) \\ &+ \delta^\lambda{}_\nu L\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{3.95}$$

Usando-se a definição (3.85) para $\mathcal{F}_{\mu\sigma}$ teremos finalmente

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\Big\{\xi^\nu(x)\sqrt{-g}\Big[\frac{1}{2}\mathcal{F}^{\lambda\mu}\mathcal{F}_{\nu\mu} - &\mathcal{F}^{\lambda\mu}S_{\nu\mu}{}^{\eta}\psi_\eta \\ &+ \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\sigma}S^{\mu\sigma\lambda}\psi_\nu - m^2\psi^\lambda\psi_\nu \\ &+ \delta^\lambda{}_\nu L\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{3.96}$$

O termo entre chaves é a corrente de Noether e o termo entre colchetes é reconhecido como sendo o tensor momento energia $\sum^\lambda{}_\nu$. Assim

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\Big\{\xi^\nu(x)\sqrt{-g}\sum{}^\lambda{}_\nu\Big\} &= 0 \\ \xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} &= -2(S_\lambda{}^{\nu\mu} + S_\lambda{}^{\mu\nu})\xi^\lambda \\ \delta S_{\mu\nu}{}^\lambda &= 0\end{aligned} \tag{3.97}$$

É interessante comparar (3.97) com o resultado análogo da Relatividade Geral, onde não existe a torção. Temos, aí,

$$\partial_\lambda\Big\{\xi^\nu(x)\sqrt{-g}T^\lambda{}_\nu\Big\} = 0 \tag{3.98}$$

$$\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} = 0$$

Uma grande simplificação ocorre, neste caso: é possivel tomar $T^{\lambda}{}_{\nu}$ simétrico, e então (3.98) pode ser domonstrado em uma linha:

$$\partial_\lambda \left\{ \xi_\nu(x)\sqrt{-g}\, T^{\lambda\nu} \right\} = \sqrt{-g}(\xi_\nu T^{\lambda\nu})_{;\lambda} = \sqrt{-g}(\xi_{\nu;\lambda} T^{\lambda\nu}) = 0$$

pois $\xi_{\nu;\lambda}$ é antissimétrico e $T^{\lambda\nu}$ simétrico. Este argumento simplificado não existe na teoria de Einstein-Cartan, e a obtenção das correntes conservadas deve seguir o caminho formal apontado por Emy Noether.

Conclusão

A extensão do Teorema de Noether ao Espaço-tempo de Riemann-Cartan usando o formalismo de Jackiw[9] mostrou-se naturalmente obtida sem complicações no formalismo. Obtivemos, como foi proposto, as leis de conservação associadas a grupos de movimento em espaços com torção, com um transporte paralelo que conserva comprimentos e ângulos, característica esta provinda da imposição da condição de metricidade. O ponto alto do trabalho está na possibilidade de obtermos estes resultados para um acoplamento não trivial com a torção, o campo de Proca. Este é o campo mais simples que interage com a torção. No caso do campo de Maxwell o acoplamento mínimo, que daria uma interação da torção com o eletromagnetismo, viola a invariância de Gauge.

Com relação ao Teorema de Noether, ele nos dá a possibilidade de definirmos quantidades conservadas (como energia e momento), através de suas conexões com certas simetrias. A energia por exemplo, pode ser definida como uma quantidade cuja conservação é conseqüência da invariância sob translação temporal. Desta forma podemos construir a densidade de energia diretamente, por exemplo, do campo eletromagnético, sem que haja necessidade desta ser inferida de casos particulares no qual há troca de energia do campo com sistemas mecânicos.

Por outro lado, uma grande virtude do tratamento apresentado, o qual usa a relação fundamental $\delta L = \partial_\mu \Lambda^\mu$ para definir uma simetria (quase-invariância da Lagrangeana), é que se consegue uma unificação entre o *Primeiro Teorema de Noether* (para grupos de simetria com um número finito de parâmetros - *simetrias globais*) e o *Segundo Teorema de Noether* (para grupos com um número infinitamente grande de parâmetros - *simetrias locais*).

Apêndice

Densidade Vetorial Contravariante

Se "ψ" é um escalar, $\sqrt{-g}\psi$ é uma densidade escalar pois, $\sqrt{-g}\psi dx^4$ é um escalar ($\sqrt{-g}dx^4$ é o elemento de volume invariante). Analogamente, $A^\mu\sqrt{-g}$ é uma densidade vetorial contravariante se "A" é um vetor contravariante. Seja

$$\mathcal{A}^\mu = A^\mu\sqrt{-g}$$

portanto de (1.23) temos que,

$$\overset{*}{\nabla}_\mu \mathcal{A}^\mu = \nabla_\mu \mathcal{A}^\mu + 2S_{\mu\lambda}{}^\lambda \mathcal{A}^\mu$$

Porém, para uma densidade vetorial é válida a relação[12]

$$\nabla_\mu \mathcal{A}^\mu = \partial_\mu \mathcal{A}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda}\mathcal{A}^\mu - \frac{1}{2g}(\partial_\mu g)\mathcal{A}^\mu$$

Logo

$$\begin{aligned}\overset{*}{\nabla}_\mu \mathcal{A}^\mu &= \partial_\mu \mathcal{A}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda}\mathcal{A}^\lambda - \frac{1}{2g}(\partial_\mu g)\mathcal{A}^\mu + \left(\Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}\right)\mathcal{A}^\mu \\ &= \partial_\mu \mathcal{A}^\mu - \frac{1}{2g}(\partial_\mu g)\mathcal{A}^\mu + \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda}\mathcal{A}^\mu\end{aligned}$$

Por outro lado, de (1.16) e (2.57), temos que

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \lambda \;\; \mu \end{matrix} \right\} - K_{\mu\lambda}{}^\lambda = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \;\; \lambda \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g}\,\partial_\mu g$$

pois de (1.15), $K_{\mu\lambda}{}^\lambda = 0$. Assim

$$\overset{*}{\nabla}_\mu \mathcal{A}^\mu = \partial_\mu \mathcal{A}^\mu$$

Índice