

Universidade de São Paulo Instituto de Física

SBI-IFUSP



305M810T3517

Modelo do Núcleon na Frente de Luz

Wilson Roberto Barbosa de Araújo



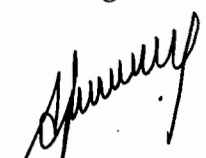
Banca examinadora:

Prof. Dr. Bruno Max Pimentel Escobar (IFT - UNESP)
Prof. Dr. Celso Luiz Lima (IFUSP)
Profa. Dra. Marina Nielsen (IFUSP)
Prof. Dr. Manoel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira (UFF)
Prof. Dr. Tobias Frederico (orientador) (ITA - CTA)

T. L. Nielsen

Tese de doutorado submetida ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Ciências.

São Paulo
2001


Prof. Armando Corbani Ferraz
residente da Comissão de Pós Graduação

539701
H663m
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Araújo, Wilson Roberto Barbosa de

Modelo do Núcleon na Frente da Luz.
São Paulo, 2001.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física – Departamento de Física Experimental

Orientador: Prof. Dr. Tobias Frederico
Área de Concentração: Física Nuclear

Unitermos: 1. Corrente Eletromagnética;
2. Quarks Constituintes;
3. Lagrangeana Efetiva;

USP/IF/SBI-029/2001

Agradecimentos

Aos meus familiares. meu tio padrinho, responsável pela minha criação e "substituto de meu pai" José Bispo de Souza, minha tia e recentemente "substituta de minha mãe" Valdelice Rosa Alves, minha irmã Marta Araújo e ao meu primo, Dr. Alberto A. Oliveira.

Ao Prof.Dr.Tobias Frederico, pela orientação dedicada.

Aos colegas do LAL, Ana Cecília, Patricia Perso, Jorge Berg, Adriana, César, Marcelo Filadelfo, Rui Castro, Juan, Militão e sua esposa Maíra, Zuinglio, Joel Hormaza, René, Marcelo Yamashita, Rogério Tramontano, David Barg, Francis, Alfredo, Antônio e também às colegas do FINPE Isabella e Raquel. Ao João Tertuliano, aquele abraço!

Às secretarias do LAL, Sandra, Vera, Inês e Tereza, pelo auxílio e atenção nesses anos.

Ao pessoal da eletrônica Cacá, Eduardo e Renato.

Aos Profs do LAL, em especial ao Prof.Dr.Iuda D.Goldman vel Lejbman, Prof.Dr.Manoel Thiago da Cruz e ao Prof.Dr.Brett.Vern Carlson do ITA-CTA.

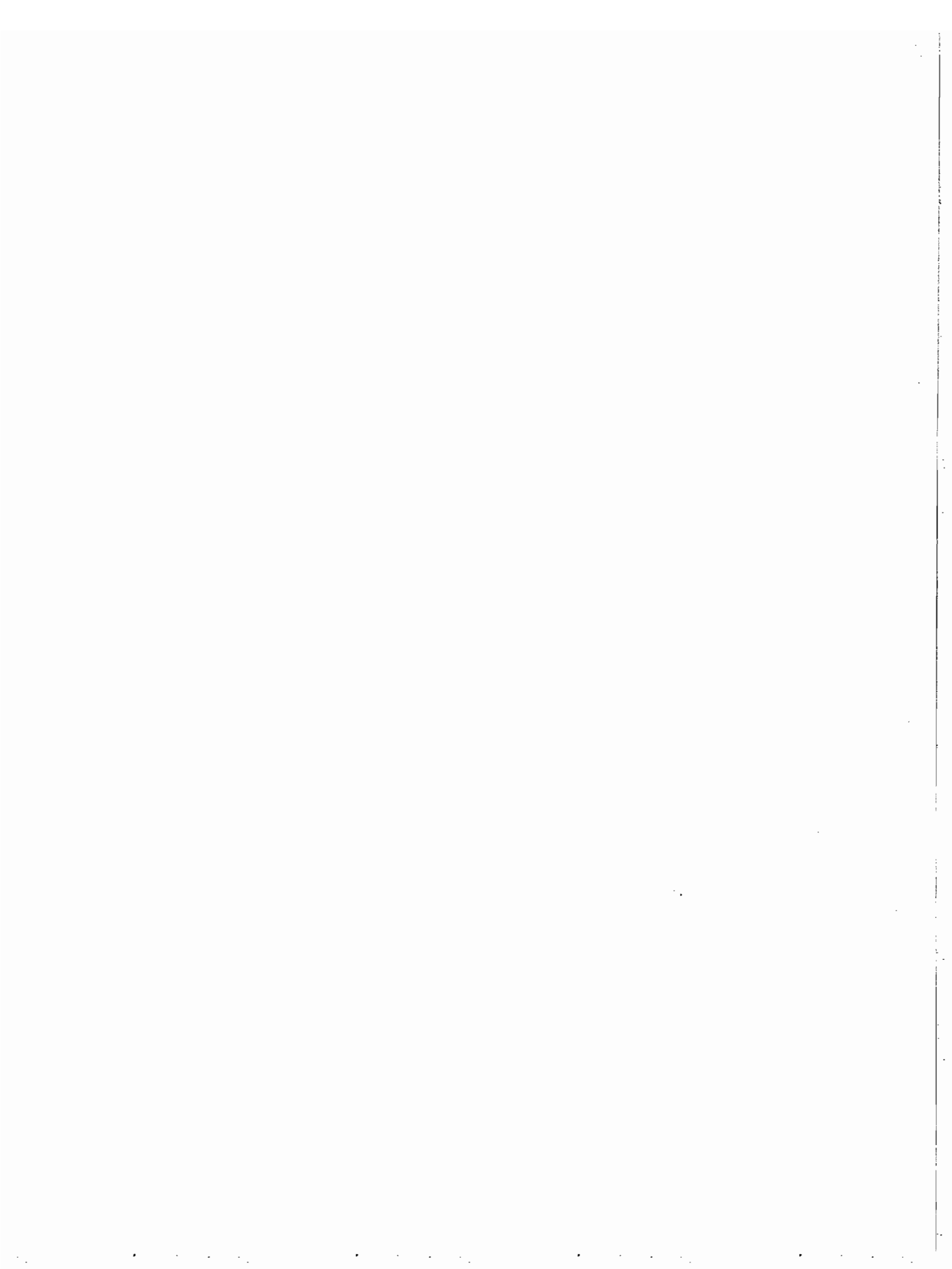
Aos colegas do ITA, Edson Suisso, Edilson, Jorge Sales, Bárbara, Andréia e Cláudio.

À companheira Michela Rosa di Candia, com carinho.

Ao LAL, pela infra estrutura física e computacional.

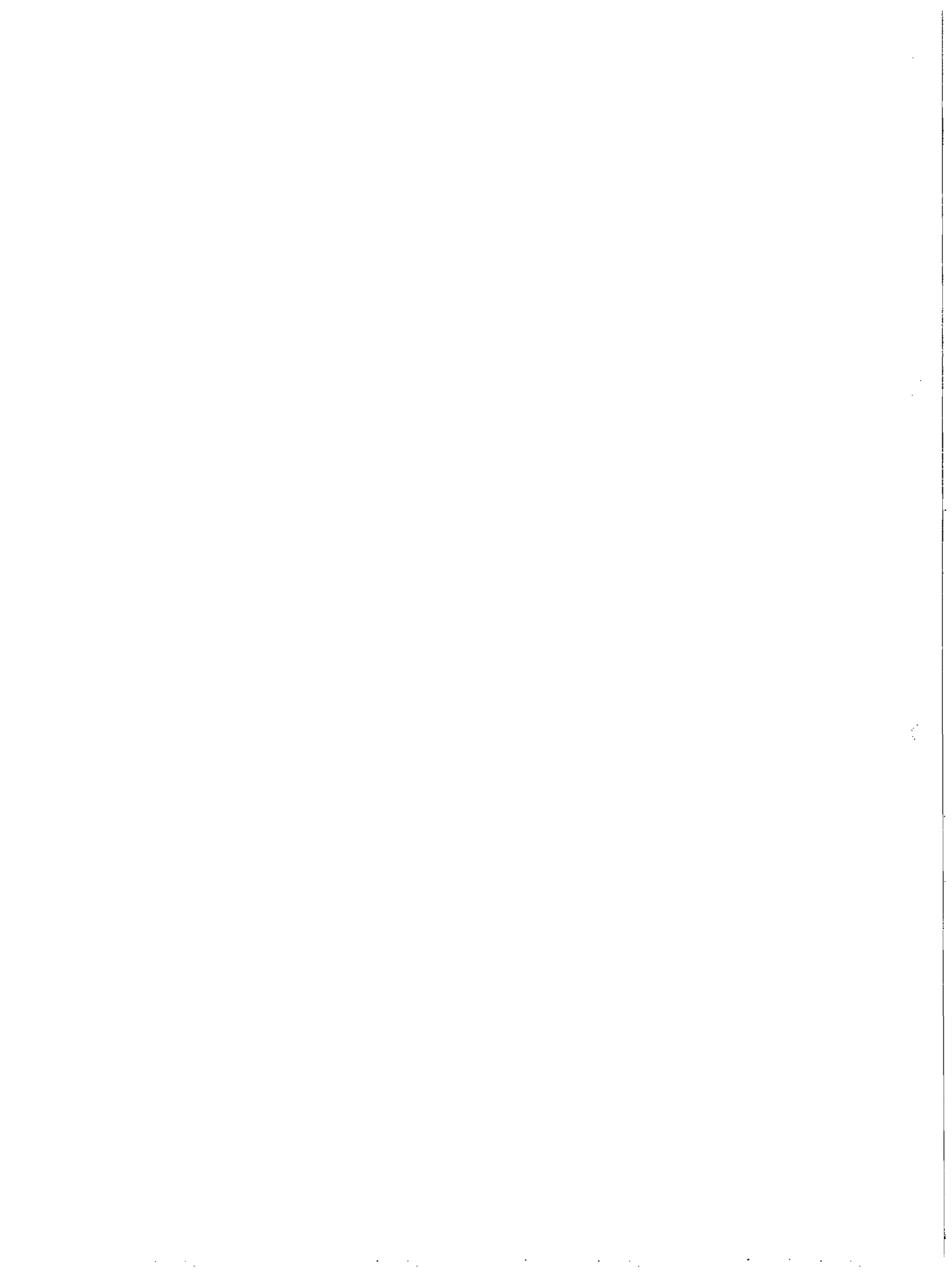
Ao LCCA-USP, pelo apoio computacional.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.



Dedico esta tese à memória de minha mãe

Delza Rosa de Araújo



Resumo

Neste trabalho é proposto um modelo relativístico para o núcleon com graus de liberdade de quarks constituintes na Frente de Luz. Neste modelo fenomenológico, o acoplamento entre o campo dos quarks e do núcleon é expresso em termos de uma Lagrangeana efetiva. Diversos invariantes para este acoplamento são testados nos observáveis eletromagnéticos elásticos. A corrente eletromagnética do núcleon é formulada na aproximação de impulso, e expressa por um diagrama de Feynman triangular, que é projetado no plano-nulo $x^+ = t + z = 0$, através da integração analítica nas energias individuais associadas à translação temporal em x^+ . Em seguida é introduzida a componente de momento da função de onda no computo da componente "boa" da corrente ($J^+ = J^0 + J^3$). Comparamos o esquema de acoplamento de spins dos quarks formando o núcleon baseado na Lagrangeana efetiva, com a construção de Bakamjian-Thomas, largamente empregada em modelos de hádrons na Frente de Luz. Esta comparação foi realizada em um modelo do pión como um par $q\bar{q}$. A diferença é explicitada através dos argumentos de momento das rotações de Melosh dos spins individuais. Na construção de Bakamjian-Thomas, os argumentos de momento estão definidos no referencial de repouso do par, enquanto que na formulação Lagrangeana, dependendo de sua forma, pode ter os argumentos de momento no referencial de repouso do pión físico. Também no caso do núcleon discutimos em detalhes essas diferenças.

As consequências fenomenológicas das diferentes formas de Lagrangeanas efetivas para o acoplamento dos quarks ao núcleon foram investigadas através das propriedades eletromagnéticas estáticas e fatores de forma. Foram testados os invariantes escalar, vetorial e misto para o acoplamento dos campos dos quarks no par isoescalar. As integrais nos momentos longitudinais e transversos no elemento de matriz da corrente do núcleon, após a redução tridimensional ao plano-nulo, foram realizadas numericamente. O fator de forma elétrico do nêutron depende fortemente da forma da Lagrangeana efetiva, para parâmetros do modelo que ajustem o momento magnético do nêutron. Os observáveis eletromagnéticos, para momentos transferidos quadrados até $1-2 \text{ (GeV/c)}^2$, são pouco sensíveis à componente de momento da função de onda. Generalizamos o estudo das correlações entre observáveis

eletromagnéticos estáticos do núcleon para diferentes formas de Lagrangeana efetiva. As limitações do modelo em reproduzir os dados experimentais recentes para a razão entre os fatores de forma elétrico e magnético do próton são discutidas e são feitas propostas para melhorar o modelo do núcleon na Frente de Luz.

Abstract

In this work, it is proposed a relativistic model for the nucleon with constituent quarks in the Light-Front. In this phenomenological model, the coupling between the nucleon and quark fields is expressed by an effective Lagrangean. Several different invariants for this coupling are tested in the elastic electromagnetic observables. The nucleon electromagnetic current is described in the impulse approximation, which is expressed by a triangular Feynman diagram. The elastic amplitude is projected in the null-plane, $x^+ = t + z = 0$, through the analytical integration in the individual energies associated with the x^+ -time translation. Then, the momentum component of the wave-function is introduced in the calculation of the "good" component of the current ($J^+ = J^0 + J^3$). The quark spin coupling scheme based in the effective Lagrangean is compared to the Bakamjian-Thomas construction largely used in hadron models in the Light-Front. This comparison is performed in a $q\bar{q}$ model of the pion. The difference is shown through the momentum arguments of the Melosh rotations of the individual spins. In the Bakamjian-Thomas construction, the momentum arguments are defined in the pair rest-frame. In the effective Lagrangean formulation, the momentum arguments may be defined in the physical pion rest-frame, depending the Lagrangean form. For the nucleon case, we also discussed these differences in detail.

The phenomenological consequences of the different forms for the nucleon-quark effective Lagrangean were investigated through the nucleon static electromagnetic properties and form-factors. The spin invariants for the isoscalar quark pair, given by a scalar, vector and mixed scalar-vector forms were tested in these observables. The longitudinal and transverse momentum integrations in the matrix element of the nucleon current, after the tridimensional reduction to the null-plane, were performed numerically. The neutron electric form-factor depends strongly on the form of the effective Lagrangean for model parameters fitted to the magnetic moment. The electromagnetic observables are quite insensitive to the momentum part of the wave-function for square momentum transfers below $1-2 \text{ (GeV/c)}^2$. The study of the correlations between static electromagnetic observables were generalized to different effective Lagrangeans. The limitation of the model to reproduce the recent experimental

data of the ratio between the proton electric form-factor and the magnetic one is discussed and we propose forms to improve the present Light-Front nucleon model.

Índice

1	Introdução	3
2	Frente de luz	10
2.1	Introdução	10
2.1.1	Coordenadas da Frente de Luz	13
2.2	Cinemática e Dinâmica na Frente de Luz	14
2.2.1	Álgebra de Poincaré na Frente de Luz	16
2.2.2	Transformações Cinemáticas	18
2.2.3	Hamiltoniana, Massa e Spin	20
2.2.4	Álgebra Cinemática e Dinâmica na Frente de luz	21
2.3	Referencial do Momento Infinito e Frente de Luz	22
2.4	Características do Formalismo da Frente de Luz	24
3	Corrente Eletromagnética do Píon na Frente de Luz	27
3.1	Introdução	27
3.2	Acoplamento Pseudo-Escalar para o Vértice do Píon	29
3.3	Acoplamento Misto	40
3.4	Contribuição do Diagrama Z	44
4	Corrente Eletromagnética do Núcleon na Frente de Luz	50
4.1	Introdução	50
4.2	Acoplamento $N - 3q$	52

4.3	Integração Analítica em k^-	56
4.4	Acoplamento do Spin dos Quarks	60
4.4.1	Acoplamento Escalar	62
4.4.2	Acoplamento Misto	64
4.5	Bakamjian-Thomas versus Feynman	65
5	Resultados Numéricos	69
5.1	Nêutron	72
5.1.1	Raio de Carga	73
5.2	Próton	81
5.3	Sumário	93
6	Conclusões	95
A	Spinor na Frente de Luz	99
B	Transformações Cinemáticas	103
C	Construção Bakamjian-Thomas	112
D	Fatores de Forma Eletromagnéticos do Núcleon	115
D.1	Decomposição de J_{bN}^+ e J_{cN}^+	117
E	Limite Não-Relativístico	121
E.1	Momentos Magnéticos	124
E.2	Limite $m, m_N \rightarrow \infty$ do Modelo na Frente de Luz.	125
F	Estimativa do Raio de Carga do Nêutron	132
G	Invariantes de spin-isospin para o núcleon	136
	Bibliografia	138

Capítulo 1

Introdução

Modelos de quarks constituintes não-relativísticos que incluem interações hiperfinas, inspirados na Cromodinâmica Quântica(QCD) tem sido usados no estudo de várias propriedades da estrutura do núcleon, espectro de massa de bárions e fatores de forma[1, 2], com relativo sucesso. Também existem outros modelos baseados em aproximações relativísticas cujos graus de liberdade são quarks massivos se movendo num potencial auto-consistente[3]. Porém, nos últimos anos, dados experimentais de propriedades eletromagnéticas do núcleon e suas ressonâncias, tais como estrutura de spin, amplitude de helicidade da ressonância $\Delta(1232)$ e o raio quadrático médio do nêutron, mostram que, embora o modelo de quarks constituintes seja bem sucedido na explicação de muitas propriedades estáticas dos núcleons e ressonâncias, tais como momentos magnéticos do nêutron e do próton, e até mesmo a interação núcleon-núcleon, outros graus de liberdade como bósons de Goldstone ou glúons dentro do núcleon devem ser necessários para explicar alguns observáveis específicos[4].

De fato, os experimentos para funções de estrutura em espalhamento profundamente inelástico e dados sobre fatores de forma em regiões de baixa energia, da ordem da massa do núcleon ($\Lambda \sim 1\text{GeV}^2$), mostram que hádrons são sistemas mais complexos além da descrição do modelo convencional cuja representação é efetiva. Ou seja, o grau de liberdade dos quarks constituintes. Uma descrição partônica mostra que a estrutura do núcleon não é devida apenas aos quarks valência, mas também recebe contribuição de outros partons[5]. O aspecto básico da QCD é que, no âmbito dos graus de liberdade elementares, quarks e glúons,

a região de grandes momentos transferidos, onde prevalece a liberdade assintótica, pode ser descrita por métodos perturbativos[6]. Por outro lado, as mais recentes informações sobre fatores de forma eletromagnéticos, onde a QCD é não perturbativa e os quarks confinados, são fonte de desenvolvimento da compreensão da estrutura hadrônica. Sendo a transformada de Fourier de cargas e correntes, os fatores de forma eletromagnéticos nos dão informações sobre essas distribuições nos hádrons.

Em física hadrônica de baixas energias, vários modelos aparecem sob variadas propostas na explicação da estrutura interna dos hádrons. Destacamos modelos tipo "bag model", modelos com simetria quiral[7] e modelos do estado ligado de três quarks, estudados extensivamente[8] dentro do modelo de Nambu-JonaLasinio(N.J.L.)[9]. Também mencionamos os esforços para descrever a estrutura do núcleon[11] e a interação nuclear realizados no Brasil[12, 13, 14, 15, 16, 17, 18] no modelo de Skyrme[7, 10].

Entre as questões fundamentais sobre a estrutura fenomenológica do núcleon, na região de baixos momentos transferidos, está a interpretação de que o próton e o nêutron possuem uma influência da nuvem de píons nos fatores de forma. Uma discussão recente encontra-se na Ref.[19]. Uma discussão sobre a diferença de massa entre o núcleon e a Δ devido à nuvem de píons é encontrada na Ref.[10]. Isso tem se revelado com maior evidência na questão do fator de forma elétrico do nêutron, em total contraste com modelos não relativísticos. A tentativa de compreender a razão pela qual a distribuição de carga do nêutron é diferente de zero na região de momento em torno de 1GeV^2 é uma tarefa interessante. Embora a contribuição do fator de forma de Pauli do nêutron(F_{2n}) resulte em valor próximo ao raio experimental do nêutron, através do chamado termo de Foldy ($\frac{3F_{2n}(0)}{2m_N^2}$), uma análise recente de Isgur[20] indica que essa contribuição não explica realmente o raio do nêutron e sua distribuição de carga. Porque, segundo o trabalho de Isgur, o termo dominante em primeira ordem da expansão relativística do fator de forma de Dirac do nêutron, F_{1n} , cancela exatamente o termo de Foldy no fator de forma elétrico do nêutron, G_{En} . Além disso, o raio quadrático médio do nêutron pode ser interpretado intuitivamente no modelo de quarks constituintes como o raio da distribuição de cargas no referencial de repouso do nêutron. Conseqüentemente, o estudo das distribuições de carga é não trivial e revela informação vital a respeito da estrutura do

nêutron.

Nos últimos anos duas abordagens relativísticas reuniram a descrição relativística de estados ligados e estados de espalhamento com uma descrição consistente do operador corrente eletromagnética, necessário para investigar o sistema hadrônico. A primeira delas é baseada no formalismo de Bethe-Salpeter[21]. Esse formalismo é quadridimensional e explicitamente covariante por transformações de Lorentz. A técnica de cálculo é baseada em diagramas de Feynman e suas regras associadas. A segunda delas é baseada na dinâmica da Frente de Luz. Ela corresponde ao sistema seguir uma trajetória através de hiper-superfícies no espaço-tempo, a partir de uma hiper-superfície inicial, que corresponde ao plano tangente ao cone de luz $x^+ = x^0 + x^3 = 0$. A evolução dinâmica é feita através do tempo x^+ . Todos pontos de cada hiperplano são separados por distâncias sem conexão causal. Na superfície da Frente de Luz é possível a descrição de um sistema físico, assim como formulado por Dirac[22]. Além dessa descrição Dirac mostrou que o sistema também pode ser descrito na forma instantânea, ou no plano usual ($x^0 = 0$), ou na forma pontual[22].

Destacamos porém, que na literatura, a maneira pela qual a estrutura de hádrons tem sido explorada no contexto da Frente de Luz, consiste na obtenção de funções de onda pela construção de Bakamjian-Thomas (B.T.). As funções de onda são auto-funções de um operador de spin e de um operador de massa, que comutam entre si. Exemplos dessa construção para sistemas de dois corpos encontramos na Ref.[23], e para o sistema de três corpos, citamos a função de onda do núcleon, construída por Chung e Coester[24].

Uma descrição de sistemas de poucos corpos na Frente de Luz permite uma otimização de sua representação física no espaço de Fock. Mesmo do ponto de vista de que o sistema seja descrito com eventuais componentes além da valência, sempre temos que o truncamento do espaço de Fock é estável por certas transformações de Lorentz(transformações cinemáticas), o que não acontece quando o sistema é descrito no plano ($x^0 = 0$). Em outras palavras, o truncamento do espaço de Fock de um sistema num determinado referencial, definido em ($x^0 = 0$) não é estável por transformações de Lorentz. Assim, do ponto de vista da descrição do plano usual ($x^0 = 0$), existe um acréscimo de componentes no espaço de Fock por transformações de Lorentz.

Dentro desse contexto apresentado, essa tese propõe um modelo fenomenológico para a corrente eletromagnética do núcleon que contemple uma teoria de campos relativística e expressa em termos de diagramas de Feynman, e também que faça uso das coordenadas da Frente de Luz. Partimos de uma Lagrangeana efetiva com graus de liberdade de quarks constituintes, que expressa o acoplamento entre spins dos quarks no núcleon. A estrutura do vértice nucleon-3quarks($N - 3q$) é formada por invariantes escalar, vetorial ou mistura de ambos, no espaço de spin-isospin, dentre uma lista total de 8 invariantes[25]. Derivamos os diagramas de Feynman que são topologicamente distintos para a componente “+” da corrente eletromagnética, também chamada de “boa componente”[26]. Realizamos uma integração analítica nas coordenadas de energia da Frente de Luz dos quarks, efetuando a redução tridimensional. Nessa parte analítica consideramos que os todos os quarks estão em suas camadas de massa, com o auxílio das propriedades das matrizes gamma de Dirac. O cálculo dos traços das correntes eletromagnéticas foi realizado com o auxílio de um manipulador algébrico. A integração nos momentos foi resolvida numericamente.

Um aspecto importante nesse modelo é que ele traz à luz uma comparação entre as construções baseadas em teoria de campos e expressa em termos de diagramas de Feynman, e as construções B.T.. A distinção, como veremos adiante, expressa a maneira pela qual se dá o acoplamento obtido no modelo “a la Feynman” e o modelo obtido “a la B.T.”[27]. No primeiro, apontamos a dependência intrínseca entre o invariante escolhido para formar o vértice e o referencial onde os quarks se acoplam. No segundo (B.T.), o acoplamento entre os quarks é feito no referencial de repouso do sistema de quarks livres. Essa discussão é explicitada através dos argumentos das rotações de Melosh[28]. As rotações de Melosh são transformações unitárias que mudam a base dos spinores de Dirac para a base dos spinores na Frente de Luz(Apêndice A). Uma importante consequência do acoplamento no modelo proposto, decorrente das rotações de Melosh, é a quebra de simetria $SU(6)$, evidenciada nos fatores de forma do nêutron e seu raio experimental. Como o acoplamento é dependente do invariante escolhido, também os observáveis com relação ao nêutron apresentam essa dependência, expresso na contribuição do fator de forma Dirac ao fator de forma elétrico do nêutron e, conseqüentemente, ao raio quadrático médio. Do ponto de vista físico, a quebra

da simetria $SU(6)$ está também relacionado à separação núcleon-delta, devido ao efeito da interação spin-spin. Através dos resultados numéricos, veremos que um acoplamento escalar entre os quarks é favorecido[30]. Na interação spin-spin há uma força que puxa o quark u para o centro e empurra os quarks d para a periferia do nêutron favorecendo pares de diquark de spin zero[20].

A investigação do modelo do núcleon, baseado em teoria de campos, abre um novo campo de estudo e novas alternativas, em lugar dos modelos B.T., largamente usados na literatura. Estimulado pelos dados experimentais mais recentes[31], o modelo abre um leque de alternativas. Destacamos, i) a implementação de novos invariantes na composição do vértice, uma vez que os vértices escalar, vetorial e misto apenas tem uma relação estreita com B.T., que não impõe, a priori, restrição ao uso de outros invariantes; ii) a investigação sobre possíveis contribuições de termos de pares na corrente eletromagnética do núcleon, eventualmente presente no processo de redução tridimensional; iii) a implementação de funções de onda do tipo Faddeev, ou mesmo, nessa linha, implementação de fator de forma para o diquark. Lembramos que inúmeros trabalhos envolvendo sistemas de dois corpos tem sido estudados com o propósito de investigar a perda de covariância da corrente eletromagnética e o papel dos diagramas do tipo Z, como por exemplo os estudos efetuados para mésons[32, 33]. No entanto, em sistemas de três corpos, a contribuição de diagramas tipo Z é uma questão ainda não explorada.

A tese tem o seguinte roteiro: apresentação e discussão sobre a Frente de Luz ou Plano Nulo, corrente eletromagnética do pión, corrente eletromagnética do núcleon, resultados numéricos e conclusões.

No segundo capítulo, **Frente de Luz**, fazemos uma apresentação enfatizando sua conveniência e vantagem em relação ao plano $x^0 = 0$. Apresentamos uma discussão sobre as transformações cinemáticas nos momentos e nos spinores na Frente de Luz, onde o ponto crucial é o fato da rotação de Wigner ser igual à identidade. (Apêndice B). Além disso, discutimos, na sequência, a comparação entre a Frente de Luz e o plano usual, discutindo que no segundo caso há a criação de componentes além das componentes de valência no espaço de Fock, quando o sistema em questão muda de referencial por transformações de Lorentz.

Também, aliado à isso, identificamos o referencial do momento infinito às coordenadas da Frente de Luz.

O capítulo 3, referente à **Corrente Eletromagnética de Píon** teve a intenção de ser um prelúdio à apresentação do modelo do núcleon-3quarks. Nesse capítulo discutimos em detalhe a maneira pela qual diferenciamos as rotações de Melosh provenientes da construção “a la Feynman” e da construção “a la (B.T)” (Apêndice C). Mostramos que também no sistema de dois corpos, que os argumentos das rotações de Melosh na construção “a la Feynman” apresentam dependência em relação ao tipo de invariante que forma o vértice. Com relação às possíveis contribuições de diagramas Z, também mostramos que a existência ou não de tais diagramas está associada com a forma de invariante escolhido para o vértice píon-quark. Mostramos que uma escolha de invariante pseudo-vetorial implica na existência de diagrama tipo Z na corrente eletromagnética do píon. Essa é uma indicação de que seja também necessário uma investigação de eventuais diagramas Z na componente “+” da corrente eletromagnética do núcleon.

O capítulo 4, referente à **Corrente Eletromagnética do Núcleon** mostra a derivação da corrente eletromagnética no modelo expresso a partir na Lagrangeana efetiva. Discutimos em detalhe o processo de redução tridimensional dos diagramas de Feynman, na integração analítica no momento $k^- = k^0 + k^3$. Aqui, não consideramos, em princípio a existência de diagramas tipo Z, deixando essa investigação para um momento futuro. Posteriormente à integração analítica em k^- , obtemos as correntes microscópicas, relativas aos diagramas topologicamente distintos. No apêndice D mostramos os detalhes algébricos na obtenção dos fatores de forma elétrico e magnético do núcleon. Um dos pontos mais importantes dessa tese diz respeito ao esquema de acoplamento de spins entre os quarks. Derivamos as formas específicas das rotações de Melosh com relação ao invariante adotado, através de um parâmetro α , e daí estabelecemos a comparação entre a construção “a la Feynman” [A e a construção B.T., discriminando essas diferenças com relação ao parâmetro α . No apêndice C, construímos a função de onda do núcleon no formalismo de B.T..

No capítulo 5 mostramos os **Resultados Numéricos** dos fatores de forma eletromagnéticos para o modelo $N - 3q$. Exploramos os observáveis relativos ao nêutron e ao próton: suas

quantidades estáticas (raio quadrático médio e momento magnético) e fatores de forma elétricos e magnéticos. Nos resultados numéricos ressaltamos a dependência, tanto das quantidades estáticas como dos fatores de forma em relação ao parâmetro α que caracteriza o invariante usado no vértice $N - 3q$. Nos cálculos relativos ao núcleon utilizamos funções de onda radiais do tipo gaussiana e polinomial, motivadas pela Ref.[34]. O modelo $N - 3q$, expresso através da Lagrangeana efetiva generaliza a independência das correlações entre quantidades estáticas do próton em relação ao detalhe da função radial utilizada. Isto generaliza os resultados dessas Ref.[34], obtidos no contexto B.T., para outras formas de acoplamento relativístico entre os quarks formando o núcleon.

Por fim, na conclusão, apresentamos comentários relativos à parte teórica, segundo a qual as construções “a la Feynman” e B.T. apresentam diferenças qualitativas relevantes. Na parte numérica enfatizamos a discussão a respeito dos ajustes do modelo em relação às quantidades estáticas e fatores de forma do nêutron, realçando a importância do acoplamento e função de onda radial. Com relação ao próton, em face da limitação do modelo em relação ao ajuste dos dados experimentais apresentamos um quadro de perspectivas, no sentido de enriquecer o modelo apresentado.

Capítulo 2

Frente de luz

2.1 Introdução

Os observáveis de um sistema quântico relativístico devem estar relacionados a soluções de equações que transformam-se covariantemente. Se essas soluções não são observáveis, a covariância não é exigida. Dirac, num de seus trabalhos [35] mostra que a covariância é um elemento essencial, embora as soluções possam ser interpretadas como funções de onda, que não são observáveis. É claro que pode-se construir operadores unitários que transformam as soluções e a equação de uma maneira que destrua a covariância sem mudar a física. Apesar dessa observação, historicamente muitos trabalhos em mecânica quântica relativística optam por manter explicitamente a covariância.

Há dois tipos de objetos que se transformam covariantemente em teoria de campos. O primeiro, que envolve elementos de matriz de operadores covariantes entre estados físicos. Essa classe, que inclui elementos de matriz de corrente, amplitude de Bethe-Salpeter, por exemplo. Essas amplitudes que as vezes são chamados de funções de onda, não tem a usual interpretação da mecânica quântica de uma função de onda. Elas não tem a norma positiva de forma que essas amplitudes possam ser interpretados como vetores no espaço de Hilbert.

Uma segunda classe de objetos covariantes, envolvem funções de onda que são funções de onda verdadeiras. Há um produto interno para o qual os estados são interpretados como

vetores no espaço de Hilbert.

Um dos princípios unificadores em formulação relativística é o teorema de Wigner, segundo o qual um modelo na teoria quântica formulada no espaço de Hilbert preserva as probabilidades em todos os referenciais inerciais, se e somente se a correspondência entre todos os estados num diferente sistema de coordenadas possa ser realizada por uma representação unitária $U(\Lambda, a)$ do grupo de Poincaré.[36](a representa deslocamentos e Λ transformação de Lorentz).

Para entendermos a implementação matemática do teorema de Wigner, seja H o espaço de Hilbert, e seja X e X' dois referenciais inerciais relacionados por uma transformação de Poincaré (Λ, a) . Consideremos um experimento visto por um observador X onde o sistema está inicialmente preparado no estado $|\psi\rangle$ e os detetores são preparados para medir a probabilidade que o sistema tem no estado $|\phi\rangle$. Para estados normalizados, a probabilidade de que esse sistema seja medido no estado $|\phi\rangle$ é

$$P = |\langle \psi | \phi \rangle|^2. \quad (2.1)$$

Consideremos agora um sistema equivalente feito por um observador em X' . Nesse caso, o sistema está inicialmente no estado $|\psi'\rangle$ e os detetores estão preparados para medir a probabilidade de que o sistema esteja no estado $|\phi'\rangle$:

$$P' = |\langle \psi' | \phi' \rangle|^2. \quad (2.2)$$

Invariância relativística implica que $P=P'$. Ou seja, que a probabilidade de obter o resultado seja independente do referencial onde está sendo feita a medida. Assim os vetores $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$ estão relacionados por

$$|\psi'\rangle = U(\Lambda, a) |\psi\rangle. \quad (2.3)$$

Os U 's são uma representação unitária do grupo de Poincaré. Eles podem ser expressos em termos das componentes P_μ do operador quadrimomento e das seis componentes $(\bar{J}_{\mu\nu} = -\bar{J}_{\nu\mu})$ do tensor de momento angular. Os U 's obedecem a lei de multiplicação do grupo

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, a_2 + \Lambda_2 a_1). \quad (2.4)$$

Os 10 geradores devem satisfazer um conjunto de relações de comutações que definem a álgebra de Lie do grupo, comumente referida como álgebra do grupo de Poincaré:

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0, \\
[\bar{J}_{\mu\nu}, P_\rho] &= i(P_\mu g_{\nu\rho} - P_\nu g_{\mu\rho}), \\
[\bar{J}_{\mu\nu}, \bar{J}_{\rho\sigma}] &= i(\bar{J}_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} + \bar{J}_{\nu\rho} g_{\mu\sigma} - \bar{J}_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - \bar{J}_{\nu\sigma} g_{\mu\rho}).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Uma consequência não trivial da relatividade especial é a de que ela corresponda ao grupo de Poincaré que inclui o grupo de Lorentz. Por causa das transformações de Lorentz envolverem o tempo, isso exige que $U(\Lambda, a)$ envolva a dinâmica de maneira não trivial. Uma simples maneira de apreciar o problema é notar que, se a transformação de Lorentz for aplicada a um quadri-vetor, mudarão tanto as coordenadas espaciais como as coordenadas temporais. Qualquer mudança nas coordenadas espaço-temporais não pode ser feita apenas por uma translação espacial. Assim, a evolução temporal pode ser expressa através dos geradores do grupo de Poincaré. Se as partículas interagem, a evolução temporal deve conter a interação.

Construção de modelos baseados nessas idéias foram propostos por Dirac[22], através de três maneiras de descrever um sistema relativístico, em hiper-superfícies particulares do espaço-tempo, cujas distâncias sejam do tipo espaço. Isto permite construir o estado inicial do sistema, uma vez que a distância entre os pontos desta hiper-superfície não tenham conexão causal. A evolução dinâmica corresponde ao sistema seguir uma trajetória através destas hiper-superfícies. Os respectivos nomes destas formas dinâmicas são: forma usual("forma instantânea"), que escolhe um conjunto de transformações de Poincaré que deixam o hiper-plano $t = t_c$ invariante; "forma puntual", que tem um conjunto de transformações independentes da dinâmica e que deixa a superfície $t^2 - \vec{x}^2 = c^2$ invariante. E a Frente de Luz, também chamado de Plano-Nulo, que tem um conjunto de transformações do grupo de Poincaré, ditas cinemáticas e independentes da interação, que deixa o hiper-plano $x^+ = x^0 + x^3 = 0$, tangente ao cone de luz, invariante.

Dentro do nosso propósito, que é uma descrição fenomenológica da estrutura do núcleon, escolhemos o formalismo da Frente de Luz para trabalharmos, uma vez que é a forma de

dinâmica, dentre as três enumeradas, que permite o maior número de geradores cinemáticos, e que entre eles, incluem-se algumas transformações de Lorentz. Isso porque, no espalhamento elástico elétron-núcleon o momento transferido ao núcleon inicial pelo fóton faz com que haja uma mudança de momento do núcleon final. A descrição deste processo é portanto simplificada usando-se transformações entre referenciais que não incluam a dinâmica de modo que a descrição da função de onda com um número finito de partículas é a mesma para o núcleon inicial e final.

O roteiro de apresentação deste capítulo começa com a apresentação e interpretação das coordenadas da Frente de Luz; discutimos a cinemática e a dinâmica na Frente de Luz, onde destacamos as transformações cinemáticas e seu papel na transformação dos quadrivetores e spinores na Frente de Luz e uma exposição sobre a álgebra de Poincaré, explorada em detalhe na Ref.[37]; comentamos brevemente a identificação das coordenadas da Frente de Luz com o referencial de momento infinito; e terminamos a apresentação enumerando e comentando as características gerais do uso do formalismo do plano nulo.

2.1.1 Coordenadas da Frente de Luz

Do ponto de vista quântico podemos definir o estado inicial de um sistema físico em qualquer hiper-superfície para a qual as distâncias entre dois pontos sejam do tipo espaço, e portanto, sem conexão causal. A evolução quântica do sistema é dada pelo gerador associado à translação temporal desta hiper-superfície. Este é o caso da Frente de Luz, que tem coordenadas definidas como

$$\begin{aligned}x^+ &= x^0 + x^3 = 0 \text{ (tempo)}, \\x^- &= x^0 - x^3, \\ \vec{x}_\perp &= (x^1, x^2),\end{aligned}\tag{2.6}$$

sendo que o momento longitudinal foi escolhido ao longo eixo z . Do mesmo modo, os momentos da Frente de Luz são definidos como

$$p^- = p^0 - p^3 \text{ (energia)},$$

$$\begin{aligned}
p^+ &= p^0 + p^3, \\
\vec{p}_\perp &= (p^1, p^2).
\end{aligned}
\tag{2.7}$$

Uma comparação entre o plano usual, que também apresenta as condições de uma hipersuperfície com distâncias tipo espaço, com sua respectiva propagação quântica, nos permite interpretar as variáveis da Frente de Luz. O plano usual ("forma instantânea") é a hipersuperfície $t = 0$, e a evolução do sistema físico é realizada pelo Hamiltoniano correspondente ao operador E . Na Frente de Luz, vemos, através de uma analogia com a forma instantânea, que a respectiva coordenada temporal é x^+ , e a evolução do sistema quântico nesta direção é realizada pelo operador energia p^- . Da mesma maneira, assim como \vec{x} e \vec{p} são as coordenadas e momentos conjugados na forma instantânea, na Frente de Luz, as coordenadas e momentos conjugados são (x^-, \vec{x}_\perp) e (p^+, \vec{p}_\perp) , respectivamente, ou melhor observado através da expressão abaixo:

$$p^\mu x_\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x} = \frac{1}{2}(p^- x^+ + p^+ x^-) - \vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp. \tag{2.8}$$

Na Fig.2.1, observemos a representação do hiper-plano da Frente de Luz, $x^+ = 0$, como o plano tangente ao cone de luz. A evolução dinâmica, nessa representação pictórica, corresponde à translação através do eixo $x^+ = 0$ até qualquer $x^+ \neq 0$, "cortando" o cone de luz definido em $x^+ = 0$.

2.2 Cinemática e Dinâmica na Frente de Luz

Do ponto de vista da forma instantânea a distinção entre os geradores cinemáticos e dinâmicos do grupo de Poincaré é evidente: 4 geradores dinâmicos e 6 geradores cinemáticos. Ou seja, além do operador energia E , que desloca o sistema físico ao longo do eixo t , os 3 geradores correspondentes às transformações de Lorentz também envolvem a propagação temporal. Por outro lado, os 3 geradores correspondentes às rotações e os 3 geradores correspondentes aos deslocamentos espaciais são cinemáticos, isto é, não incluem a dinâmica.

Do ponto de vista da Frente de luz, o número de geradores cinemáticos é maior. Temos 7 geradores cinemáticos e 3 geradores dinâmicos, sendo que, diferentemente da forma in-

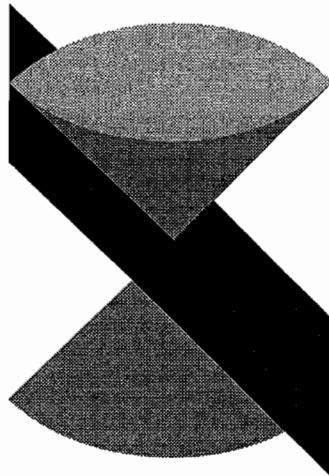


Figura 2.1: Frente de Luz, $x^+ = 0$, é o hiper-plano tangente ao cone de luz.

stantânea, alguns dos geradores cinemáticos envolvem transformações de Lorentz, o que torna o Plano-Nulo uma ferramenta conveniente, como veremos mais adiante. A seguir discutiremos a cinemática e a dinâmica na Frente de Luz. Ela é abordada em detalhes na Ref.[37], que revisamos a seguir.

2.2.1 Álgebra de Poincaré na Frente de Luz

O hiper-plano $x^+ = 0$ é mapeado nele mesmo, em particular por “boosts” ao longo do eixo z (eixo escolhido para o momento longitudinal). O respectivo gerador é $K_3 = \bar{J}_{03}$. Sob a transformação $\exp[-i\beta K_3]$, a coordenada x^+ transforma-se como

$$x^+ \rightarrow e^\beta x^+, \quad (2.9)$$

e o vetor \vec{x}_\perp permanece inalterado. A invariância do plano $x^+ = 0$ mediante transformações de “boost” na direção z pode ser compreendida através da Fig.(2.2). No plano $t - z$ vemos que tanto o eixo t quanto o eixo z transformam-se sob K_3 nos eixos t' e z' , de tal maneira que os eixos x^+ e x^- são idênticos aos eixos x'^+ e x'^- , respectivamente.

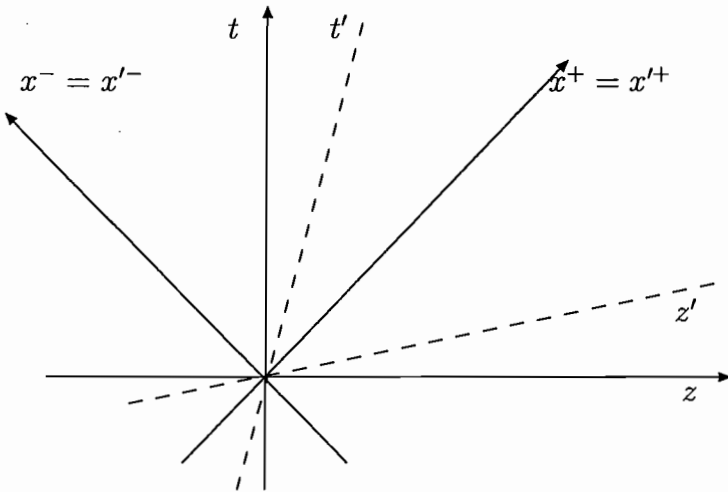


Figura 2.2: Invariância dos eixos x^+ e x^- sob ação de uma transformação de Lorentz ao longo do eixo z .

Podemos classificar as componentes de qualquer tensor de Lorentz de acordo sua propriedade de transformação com relação à K_3 , em particular os geradores do grupo de

$\gamma = 1$	$E_1 = K_1 + J_2, E_2 = K_2 - J_1$	$P^+ = P^0 + P^3$
$\gamma = 0$	K_3, J_3	\vec{P}_\perp
$\gamma = -1$	$F_1 = K_1 - J_2, F_2 = K_2 + J_1$	$P^- = P^0 - P^3$

Tabela 2.1: Geradores do grupo de Poincaré.

Poincaré. Um operador A que obedece a relação de comutação

$$i[K_3, A] = \gamma A, \quad (2.10)$$

classifica-se como operador cinemático ou dinâmico dependendo do valor de γ . Assim $\gamma = -1$ tem A como um operador dinâmico. A Tabela 2.1 mostra os geradores do grupo de Poincaré segundo a classificação de acordo γ , onde $J_i = \bar{J}_{jk}$ ($ijk = 123$, ciclicamente) e $K_i = \bar{J}_{0i}$.

A tabela 2.1 mostra que o número de geradores cinemáticos da Frente de Luz são 7: E_\perp , P^+ , \vec{P}_\perp , K_3 e J_3 . O número de operadores dinâmicos são 3: \vec{F}_\perp e P^- . Observemos que os geradores cinemáticos que incluem “boosts” são \vec{E}_\perp e K_3 . Assim, o grupo cinemático do hiper-plano da Frente de Luz, $x^+ = 0$, formado pelos geradores cinemáticos é constituído pelas transformações de translação (P^+ , \vec{P}_\perp) e por transformações de Lorentz particulares. Estas últimas obedecem a relação

$$\Lambda_\mu^\nu n_\nu = \lambda n_\mu, \quad (2.11)$$

onde $n_\nu = (1, 0, 0, -1)$. Esse grupo é formado pelos geradores que obedecem a Eq.(2.10) com $\gamma = 1$ ou 0. As relações de comutação entre esses geradores é dada por

$$\begin{aligned} [K_3, E_r] &= -iE_r, & [K_3, P^+] &= -iP^+, \\ [J_3, E_r] &= i\epsilon_{rs}E_s, & [J_3, P_r] &= i\epsilon_{rs}P_s, \\ [E_r, P_s] &= -i\delta_{rs}P^+, \end{aligned} \quad (2.12)$$

sendo $\epsilon_{rs} = \epsilon_{sr}$, $\epsilon_{12} = 1$, $\epsilon_{ii} = 0$.

O grupo cinemático pode apresentar o operador de spin como um de seus operadores de Casimir, que é definido como

$$\mathcal{J}_3 = J_3 + \frac{1}{P^+}(E_1P_2 - E_2P_1). \quad (2.13)$$

Ele comuta com os geradores do grupo de estabilidade. Ele também pode ser escrito em termos do operador de spin de Pauli-Lubanski.

$$W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\nu \bar{J}^{\alpha\beta}. \quad (2.14)$$

Assim,

$$\mathcal{J}_3 = \frac{W^+}{P^+} = \frac{W^0 + W^3}{P^0 + P^3}. \quad (2.15)$$

No apêndice C mostramos a construção de uma função de onda pelo método de Bakamjian-Thomas na Frente de Luz. Esse método impõe que a função de onda seja também auto-função do operador de spin da Eq.(2.13). Mais adiante veremos também que \mathcal{J}_3 comuta com o operador de massa.

2.2.2 Transformações Cinemáticas

As transformações do grupo de estabilidade, formado pelos geradores que obedecem a Eq.(2.11), para os momentos cinemáticos são

$$\begin{aligned} p'^+ &= p^+ e^{\beta_3}, \\ \vec{p}'_\perp &= \vec{p}_\perp + p^+ \vec{\beta}_\perp e^{\beta_3}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

A transformação de um estado de momento e de spin é escrita como

$$| p'^+, \vec{p}'_\perp, s \rangle = \exp[-i(\vec{\beta}_\perp \cdot \vec{E}_\perp)] \exp[-i\beta_3 K_3] | p^+, \vec{p}_\perp, s \rangle, \quad (2.17)$$

onde os momentos dos referenciais novo e antigo se relacionam através da Eq.(2.16). Os parâmetros de transformação β_i são dados por

$$\beta_3 = \ln \frac{p'^+}{p^+}, \quad \vec{\beta}_\perp = \frac{\vec{p}'_\perp - \vec{p}_\perp}{p'^+}. \quad (2.18)$$

Observemos que a transformação entre os estados inicial e final é realizada por geradores que incluem “boosts”. Com relação aos spinores, a transformação é formalmente representada pela Eq.(2.17). Um spinor na Frente de Luz é escrito como

$$u(p, s) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m2p^+}} \gamma^+ \gamma^0 \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

sendo $\not{p} = \frac{p^+\gamma^- + p^-\gamma^+}{2} - \vec{p}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp$ e χ_s o spinor de Pauli no referencial de repouso do f3rmion.

Da Eq.(2.19) podemos notar que o spinor da Frente de Luz depende apenas dos momentos cinemáticos, uma vez que a coordenada de energia p^- é eliminada graças à propriedade $(\gamma^+)^2 = 0$. A ação de uma transformação cinemática, formada pelos geradores usados na Eq.(2.19) resulta em

$$\begin{aligned} u(p', s) &= u(p'^+, \vec{p}'_\perp, s) \\ &= e^{-i\vec{\beta}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp} e^{-i\beta_3 K_3} u(p, s) \\ &= \frac{\not{p}' + m}{\sqrt{2m2p'^+}} \gamma^+ \gamma^0 \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde a transformação do momento cinemático (p'^+, \vec{p}'_\perp) no cone de luz é dado pela Eq.(2.16). No apêndice B mostramos em detalhe a mudança do spinor $u(p, s)$ mediante ação das transformações cinemáticas. Observemos que a único efeito dessa transformação é no argumento do momento, deixando a forma do spinor covariante. Esse importante detalhe diz respeito a uma particularidade do plano nulo mediante uma transformação cinemática. De maneira geral, uma transformação unitária qualquer do grupo de Poincaré num spinor é dada por

$$U(\Lambda)u_D(p, s) = \sum_{s'} D_{ss'}(R_W(\Lambda, p))u_D(p', s') \quad (2.21)$$

onde u_D é o spinor de Dirac, definido por

$$u_D(p, s) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(p^0 + m)}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

$R_W(\Lambda, p)$ é chamada de rotação de Wigner (apêndice B). Se aplicarmos uma transformação, formada pelos geradores do grupo de estabilidade num spinor do cone de luz, temos que o resultado é a Eq.(2.20), ou seja

$$U(\Lambda_f)u(p, s) = u(p', s) \quad (2.23)$$

onde $p' = \Lambda_f p$ é dado pela Eq.(2.16) e Λ_f é uma transformação cinemática. Ou seja, nessa particularidade, a Eq(2.21) reduz-se à Eq.(2.23), o que significa dizer que

$$R_W(\Lambda_f; p^+, \vec{p}_\perp) = 1 \quad (2.24)$$

para uma transformação cinemática.

No apêndice B também discutimos a Eq.(2.24). Essa equação é uma peça fundamental, que torna o uso do formalismo do plano nulo uma ferramenta conveniente, no que diz respeito ao espaço de spinores.

Se aplicarmos $U(\Lambda_f)$ em um spinor de Dirac, no seu referencial de repouso, obtemos uma forma particularmente especial para a rotação de Wigner. Ela será igual à rotação de Melosh[28]. A rotação de Melosh é uma transformação unitária entre a base dos spinores de Dirac e a base dos spinores da Frente de Luz. Ou seja

$$\langle s' | R_M | s \rangle = \bar{u}_D(\vec{p}, s') u(p^+, \vec{p}_\perp, s) = \langle s' | \frac{p^+ + m - \vec{n} \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{p}_\perp)}{\sqrt{(p^+ + m)^2 - \vec{p}_\perp^2}} | s \rangle. \quad (2.25)$$

Uma transformação cinemática num spinor de Dirac, num referencial qualquer, resulta numa rotação de Wigner que é uma composição de rotações de Melosh. No Apêndice A obtemos em detalhe a rotação de Melosh. No apêndice B relacionamos a rotação de Wigner com a rotação de Melosh.

2.2.3 Hamiltoniana, Massa e Spin

Como vimos anteriormente, os geradores dinâmicos da Frente de Luz são P^- , que translada o hiper-plano $x^+ = 0$ para outro plano $x^+ = \tau$ e o operador \vec{F}_\perp , que está associado à rotações do hiper-plano $x^+ = 0$ em torno dos eixos, x^1 e x^2 .

Os comutadores não nulos entre os geradores do grupo de estabilidade e as hamiltonianas P^- e \vec{F}_\perp são

$$\begin{aligned} [K_3, P^-] &= iP^-, & [E_r, P^-] &= -iP_r, \\ [K_3, F_r] &= iF_r, & [J_3, F_r] &= i\epsilon_{rs}F_s, \\ [P_r, F_s] &= i\delta_{rs}P^-, & [P^+, F_r] &= iP_r, \\ [E_r, F_s] &= -i(\delta_{rs}K_3 + \epsilon_{rs}J_3). \end{aligned} \quad (2.26)$$

O operador P^- é expresso em termos do operador massa $M^2 = P^2$:

$$P^- = \frac{1}{P^+} (M^2 + \vec{F}_\perp^2). \quad (2.27)$$

As relações de comutação, Eq.(2.26) são satisfeitas se, e somente se M^2 comuta com todos operadores do grupo cinemático. Similarmente \vec{F}_\perp pode ser expresso em termos dos operadores de spin. A ação dos operadores de spin \mathcal{J}_1 , \mathcal{J}_2 e \mathcal{J}_3 é definida por

$$\mathcal{J}_i | p^+, \vec{p}_\perp, s \rangle = e^{-i\vec{\beta}_\perp \cdot \vec{E}_\perp} e^{-i\beta_3 K_3} J_i | 0, s \rangle. \quad (2.28)$$

A terceira componente de $\vec{\mathcal{J}}$ é dada pela Eq.(2.13). Todas as componentes de $\vec{\mathcal{J}}$, por definição, comutam com todos geradores do grupo cinemático, ou de estabilidade, com exceção de J_3 .

Os \mathcal{J} 's satisfazem as relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] &= i\epsilon_{ijk} \mathcal{J}_k, \\ [M, \mathcal{J}_i] &= 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

A componente transversal do operador de spin é escrita em termos do operador de Pauli-Lubanski como

$$M\vec{\mathcal{J}}_\perp = \vec{W}_\perp - \frac{\vec{P}_\perp}{P^+} W^+. \quad (2.30)$$

M^2 e $M\vec{\mathcal{J}}_\perp$ são também chamadas de hamiltonianas reduzidas. Com relação à "Hamiltoniana transversal \vec{F}_\perp ", ela é escrita como

$$F_r = \frac{1}{P^+} [P_r K_3 + P^- E_r - \epsilon_{rs} (P_s \mathcal{J}_3 + M \mathcal{J}_s)]. \quad (2.31)$$

As relações de comutação, Eq.(2.26), entre os operadores P^- , \vec{F}_\perp e os geradores do grupo cinemático, e as relações de comutação entre quaisquer duas das três Hamiltonianas P^- , \vec{F}_\perp são garantidas se a álgebra da Eq.(2.29) é obedecida, e os operadores \mathcal{J}_i e M comutam com todos os geradores cinemáticos, excluindo J_3 .

2.2.4 Álgebra Cinemática e Dinâmica na Frente de luz

Após a discussão de que J_3 é excluído dos operadores que comutam com os operadores de spin, e de que os operadores dinâmicos podem ser definidos em termos dos operadores $\vec{\mathcal{J}}$, ou em termos das Hamiltonianas reduzidas M^2 e $M\vec{\mathcal{J}}_\perp$, o hiper-plano da Frente de luz elucidada

uma estrutura simplificada para o grupo de Poincaré formado pela soma direta $\mathcal{K} \oplus \mathcal{D}$. Ou seja, a soma direta de uma álgebra cinemática e uma álgebra dinâmica gerada por

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= (P^+, \vec{P}_\perp, \vec{E}_\perp, K_3), \\ \mathcal{D} &= (M, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3).\end{aligned}\tag{2.32}$$

Observemos na Eq.(2.32) que a álgebra cinemática \mathcal{K} não coincide com a álgebra total do grupo cinemático (ou de estabilidade). A álgebra \mathcal{K} não contém o operador J_3 . Por outro lado, a significação dessa divisão é a de que os operadores da álgebra cinemática atuam apenas nas componentes de momento de um estado formado pelos momentos cinemáticos da Frente de Luz, de maneira independente das variáveis de spin, enquanto que a álgebra \mathcal{D} atua apenas nos graus de liberdade de spin. Em relação ao spinor na Frente de Luz, equivale dizer E_\perp e K_3 , pertencentes à que a álgebra cinemática, alteram apenas os momentos cinemáticos, de acordo Eq.(2.20), desde que a rotação de Wigner seja a identidade para estas transformações.

2.3 Referencial do Momento Infinito e Frente de Luz

A título de mostrar o formalismo da Frente de Luz, talvez mais do que uma ferramenta conveniente, identificamos aqui as variáveis de momento no referencial de momento infinito com as variáveis de momento da Frente de Luz. O interesse pelo hiper-plano da Frente de Luz foi originalmente estimulado pelo uso do referencial do momento infinito em Teoria Quântica de Campos Relativística. Weinberg[38] mostrou que o uso de tal referencial eliminava muitos diagramas na velha teoria de perturbação, e, desta maneira, levava a uma estrutura simplificada do vácuo. Susskind[39], subsequentemente, mostrou que o limite de momento infinito poderia ser interpretado com uma mudança nas componentes de $x^\mu = (t, \vec{x})$ para as componentes da Frente de Luz $(x^+, x^-, \vec{x}_\perp)$, definidas na primeira secção.

Consideremos um bárion de massa M com energia E e quadrimomento $P^\mu = (E, 0, 0, P_z)$. Nesse referencial um quark tem quadrimomento $k^\mu = (k^0, \vec{k})$. Assim, no referencial de repouso do bárion, obtido por um “boost” ao longo do eixo z , temos explicitamente que o

momento $\bar{k}^\mu = (\bar{k}^0, \vec{\bar{k}})$ do quark é dado por

$$\begin{aligned}\bar{k}_0 &= k_0 \cosh \beta - k_z \sinh \beta, \\ \bar{k}_z &= k_z \cosh \beta - k_0 \sinh \beta,\end{aligned}\tag{2.33}$$

onde $\cosh \beta$ e $\sinh \beta$ são dados por

$$\cosh \beta = \frac{E}{M}, \quad \sinh \beta = \frac{P_z}{M}\tag{2.34}$$

e $M^2 = P^2$. No referencial de momento infinito, onde $P_z \rightarrow \infty$, definimos a fração de momento do quark na direção z como

$$k_z = \nu P_z.\tag{2.35}$$

Nesse limite cada quark tem uma componente de momento na direção z positiva tal que $\nu > 0$ e $\sum_i \nu_i = 1$ devido à conservação do momento total. A energia do quark, considerando a Eq.(2.35) resulta em

$$k_0 = \sqrt{\nu^2 P_z^2 + \vec{k}_\perp^2 + m^2}.\tag{2.36}$$

Expandindo a Eq.(2.36) em potências de $\frac{1}{P_z}$, obtemos o limite de momento infinito

$$k_0 = \nu P_z + \frac{\vec{k}_\perp^2 + m^2}{2\nu P_z} + O(P_z^{-2}).\tag{2.37}$$

Da mesma maneira, a energia do bárion, após a expansão, resulta em

$$E = \sqrt{M^2 + P_z^2} \xrightarrow{P_z \rightarrow \infty} P_z + \frac{M^2}{2P_z} + O(P_z^{-2}).\tag{2.38}$$

Substituindo as Eqs.(2.35) a (2.38) na Eq.(2.33), obtemos

$$\begin{aligned}\bar{k}_0 &= \frac{1}{2}(\nu M + \frac{\vec{k}_\perp^2 + m^2}{\nu M}) \\ \bar{k}_z &= \frac{1}{2}(\nu M - \frac{\vec{k}_\perp^2 + m^2}{\nu M}) \\ \vec{\bar{k}}_\perp &= \vec{k}_\perp.\end{aligned}\tag{2.39}$$

Associado ao fato do plano $x^+ = 0$ ser invariante mediante transformações cinemáticas, outros observáveis e quantidades também o são. Nesse contexto, a variável $x = \frac{k^+}{P^+}$ é também

um invariante, o que implica $x = \frac{\bar{k}^+}{M}$. Assim, identificando $\nu = \frac{k_z}{P_z}$ com x na Eq.(2.39) temos que a transformação das variáveis de momento[39, 40] é dada por

$$\begin{aligned}\bar{k}_0 &= \frac{1}{2}\left(xM + \frac{\vec{k}_\perp^2 + m^2}{xM}\right) = \frac{1}{2}(\bar{k}^+ + \bar{k}^-), \\ \bar{k}_z &= \frac{1}{2}\left(xM - \frac{\vec{k}_\perp^2 + m^2}{xM}\right) = \frac{1}{2}(\bar{k}^+ - \bar{k}^-), \\ \vec{k}_\perp &= \vec{k}_\perp.\end{aligned}\tag{2.40}$$

O referencial de repouso do sistema composto de momento infinito é a realização da condição $x^+ = 0$ (veja Eq.(2.33) para \bar{z} e \bar{t}) e os momentos individuais dos constituintes são expressos pela Eq.(2.40) em termos dos momentos cinemáticos $\bar{k}^+ = \frac{x}{M}$ e \vec{k}_\perp .

2.4 Características do Formalismo da Frente de Luz

Intimamente relacionado à identificação do referencial do momento infinito ao plano-nulo, está a conveniência da supressão de diagramas de produção de pares, em qualquer cálculo de teoria de campos na Frente de Luz[21, 42]. Foi o que comentamos brevemente na secção anterior, sobre a simplificação da estrutura de vácuo, conseguida por Weinberg[38] ao escolher o referencial de momento infinito para cálculo de diagramas de Feynman de teorias relativísticas. Exemplificando de maneira esquemática para um hádron, como no caso do pión, quando descrito nas coordenadas do plano usual, sob ação de geradores de translação e rotação, sua componente mais baixa no espaço de Fock transforma-se como

$$|\pi\rangle \rightarrow |q\bar{q}\rangle = \mathcal{K} |q\bar{q}\rangle.\tag{2.41}$$

A Eq.(2.41) mostra esquematicamente que a ação de geradores cinemáticos não mistura outros termos no espaço de Fock. Por outro lado, a ação de geradores de “boost” ou translação temporal, criam infinitos termos no espaço de Fock. De maneira esquemática

$$|\pi\rangle \rightarrow |q\bar{q}\rangle = \mathcal{D} |q\bar{q}\rangle + \mathcal{D} |q\bar{q}g\rangle + \dots\tag{2.42}$$

onde $|q\bar{q}g\rangle$ indica o estado de quark-antiquark-glúon.

Do ponto de vista da Frente de Luz a situação é análoga. A ação dos seus respectivos geradores cinemáticos não cria outras componentes no espaço de Fock, além das componentes de valência. Entretanto, a ação dos respectivos geradores dinâmicos cria essas componentes. Porém, a natureza dos geradores de Poincaré na Frente de Luz é diferente em relação à forma instantânea. Enquanto que do ponto de vista do plano usual ($t = 0$), os geradores cinemáticos são geradores de rotação e translação, totalizando um número de 6, na Frente de Luz os geradores cinemáticos são os geradores de “boosts”, além dos geradores de translação (P^+, \vec{P}_\perp) e de rotação (J_3), totalizando um número de 7. Isso torna a Frente de Luz uma ferramenta conveniente do ponto de vista da descrição do sistema físico. Por exemplo, em processos de espalhamento elástico de elétrons há a mudança de momento da partícula inicial e, conseqüentemente, ação de “boosts” modificando o estado de momento antes e depois da interação. É sempre possível escolher o referencial no qual ocorre o espalhamento elástico, de modo que o estado inicial e final do sistema composto estejam relacionados por uma transformação cinemática. Portanto, em princípio, podemos descrever o sistema inicial e final com as mesmas componentes no espaço de Fock, sem a perda da invariância dos fatores de forma sob transformações cinemáticas. Assim, os elementos de matriz da corrente eletromagnética podem ser obtidos de uma forma consistente com as transformações cinemáticas, mesmo calculados entre estados compostos truncados no espaço de Fock da Frente de Luz[21, 42].

No caso da componente “+” da corrente, que no referencial de Drell-Yan (momento transferido $q^+ = 0$) é em princípio diagonal no espaço de Fock[42], transformações cinemáticas podem ser efetuadas no referencial de Drell-Yan sem que essa propriedade seja destruída. Porém, pode ocorrer que contribuições de diagramas tipo Z apareçam nesta componente da corrente, e mesmo que isto ocorra esses termos por si só também são invariantes sob transformações cinemáticas. Contudo, a omissão de tais termos leva à perda da invariância rotacional da descrição [32, 33, 43, 44]. De qualquer forma a supressão de diagramas Z, criação de par pelo fóton virtual, é maximal no referencial de Drell-Yan para a componente “+” da corrente[45].

Enumeramos abaixo outras características no uso do Plano da Frente de Luz, além da

que acabamos de discutir.

1- O uso das variáveis da Frente de Luz permite uma separação entre partículas e anti-partículas através da linearização da energia da Frente de Luz na relação de Einstein:

$$k^2 = m^2 \rightarrow k^- = \frac{\vec{k}_\perp^2 + m^2}{k^+}, \quad (2.43)$$

$k^+ > 0$ partícula e $k^+ < 0$ antipartícula.

2-Em sistemas de várias partículas é vantajoso a introdução de variáveis relativas[46]. Similar ao caso não relativístico tais variáveis permite-nos desacoplar o movimento do centro de massa do sistema da dinâmica interna.

3- A função de Green covariante de "n-pernas" representa a evolução temporal global de um sistema entre dois instantes x^+ . Esta projeção para x^+ global elimina o tempo relativo entre as partículas, não tornando a descrição quântica incompleta. Ela permite acessar diretamente nos diversos processos físicos o conteúdo dos estados intermediários em termos de suas componentes no espaço de Fock, sem que haja perda de covariância por transformações cinemáticas[47]

4-Chamamos a atenção de que sistemas compostos com spin igual a 1 perdem invariância rotacional da componente "+" da corrente eletromagnética, no referencial de Drell-Yan ($q^+ = q^- = 0$) [23, 48, 49, 50]. Porém não discutiremos esta questão nesta tese. O leitor interessado pode encontrar mais detalhes do papel dos diagramas Z nesta componente da corrente nas Ref.[43, 44, 53].

Capítulo 3

Corrente Eletromagnética do Píon na Frente de Luz

3.1 Introdução

Este capítulo tem o propósito de mostrar que diferentes formas de acoplamento entre os quarks constituintes para formar o méson π apresentam diferenças qualitativas no fator de forma eletromagnético. O vértice $\pi - 2q$ pode ser construído usando várias formas de invariantes no espaço das matrizes de Dirac, e, dependendo da forma escolhida, os observáveis também apresentarão diferenças significativas. Mais adiante, nos próximos capítulos, analisaremos, no mesmo contexto, o núcleon, onde essas diferenças são também importantes, para o caso dos observáveis eletromagnéticos. Para o caso do píon, escolhemos duas formas de acoplamento, que são comparadas entre si, quanto às suas diferenças: um acoplamento $\pi - 2q$ pseudo-escalar e uma mistura de acoplamento pseudo-escalar e pseudo-vetorial. Em ambos os casos, a componente “+” da corrente eletromagnética, J_{π}^{+} , é obtida através da aproximação de impulso, representada pelo diagrama de Feynman da Fig(3.1), e, assim como no caso do núcleon, que será abordado mais adiante, é feita uma comparação com a construção de Bakamjian-Thomas (B.T.)[51]. A construção de B.T. tem sido utilizada nos modelos dos hádrons na Frente de Luz, presentes na literatura[24, 34, 42, 45, 48, 49, 50].

Nesta construção, as funções de onda dos hádrons são descritas por auto-funções do operador de massa e spin generalizado. A partir dos operadores de massa e spin, e dos operadores cinemáticos, é possível construir os geradores do grupo de Poincaré[37], como discutido na secção 2.2.3.

Nesse capítulo veremos que a construção de B.T.(para o acoplamento de spin dos quarks no hádron) e o acoplamento pseudo-escalar $\pi - 2q$ são equivalentes para o cálculo de J_π^+ . Já para acoplamentos que envolvem o invariante pseudo-vetorial essa equivalência é perdida, como no caso do acoplamento misto (mistura de acoplamento pseudo-escalar e pseudo-vetorial). O motivo pelo qual escolhemos o acoplamento misto, é que ele projeta os spinores de energia positiva na componente superior no referencial de repouso do hádron. Para os objetivos desse capítulo é suficiente nos restringirmos ao acoplamento de spins dos quarks apenas, sem a explicitação da parte radial da função de onda. Assim, primeiro apresentamos os resultados para J_π^+ com o vértice $\pi - 2q$ pseudo-escalar. Como será demonstrado, este acoplamento representa um par quark-antiquark no centro de massa com spin total nulo, e um acoplamento misto representa o par no centro de massa do pión físico com spin total nulo. Em seguida é discutido a ausência da contribuição do diagrama Z em J_π^+ , para o acoplamento pseudo-escalar e a contribuição deste para o acoplamento misto.

Assim, os aspectos originais deste capítulo correspondem à discussão das transformações cinemáticas de quarks acoplados do par ou do pión, no caso dos acoplamentos pseudo-escalar, e misto, bem como a demonstração de que no referencial de Breit com a condição de Drell-Yan($q^+ = 0$) sobrevive um termo de par, ou diagrama Z, em J_π^+ para o acoplamento misto. A componente “+” da corrente eletromagnética é calculada nas coordenadas da Frente de Luz, definida e discutida no capítulo anterior. Usaremos também extensivamente as propriedades das transformações cinemáticas para interpretar o acoplamento de spin do par quark-antiquark formando o pión.

O pión é representado pela Lagrangeana efetiva

$$\mathcal{L}_{\pi-2q} = -C[i\alpha m_\pi \vec{\pi} \cdot \bar{q} \gamma^5 \vec{\tau} q + (1 - \alpha) \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 \vec{\tau} q]. \quad (3.1)$$

A Lagrangeana quiral para o acoplamento dos quarks com o pión é obtida com $\alpha = 0$

e $C = \frac{1}{2f_\pi}$, onde f_π é a constante de decaimento do pión. O acoplamento pseudo-escalar do pión com os quarks é representado por $\alpha = 1$, e, levando em consideração a relação de Goldberger-Treiman ao nível dos quarks, poderíamos escrever que $C = \frac{g_{\pi q}}{m_\pi} = \frac{m}{m_\pi f_\pi}$, com m sendo a massa do quark constituinte.

3.2 Acoplamento Pseudo-Escalar para o Vértice do Pión

O fator de forma eletromagnético do pión $F_\pi(q^2)$ é definido pela componente "+" da corrente eletromagnética como

$$\langle p' | J_\pi^+(0) | p \rangle = (p^+ + p'^+) F_\pi(q^2). \quad (3.2)$$

A corrente eletromagnética de um pión composto por um par quark-antiquark, na aproximação de impulso pode ser representado pelo diagrama triangular da Fig.(3.1). A corrente eletromagnética do pión é calculada no referencial de Breit $Q^2 = -\vec{q}_\perp^2$, com a condição de Drell-Yan ($q^+ = 0$). Os quadri-momentos do pión inicial e final são tais que $p^\mu = (\sqrt{\frac{q_\perp^2}{4} + m_\pi^2}, \frac{-\vec{q}_\perp}{2}, 0)$ e $p'^\mu = (\sqrt{\frac{q_\perp^2}{4} + m_\pi^2}, \frac{\vec{q}_\perp}{2}, 0)$, respectivamente.

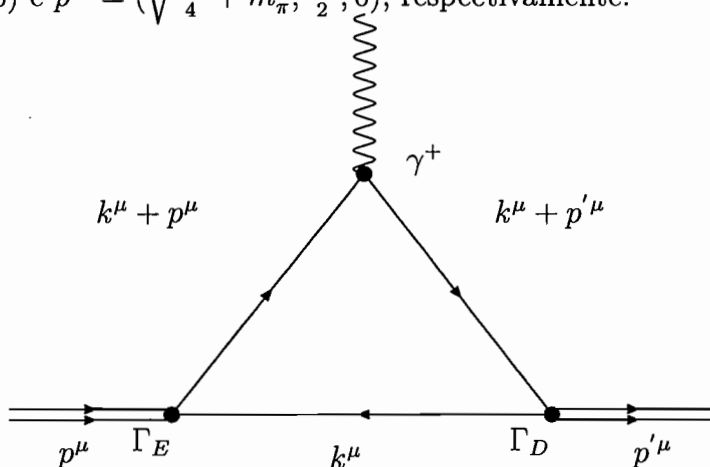


Figura 3.1: Diagrama Triangular.

Na Fig.(3.1), apresentamos o diagrama triangular de Feynman para calcularmos a componente "boa" da corrente eletromagnética no pión. A componente "+" da corrente eletromagnética na interação quark-fóton é dada por $ie\bar{q}\gamma^+q$. Para $\alpha = 1$ (pseudo-escalar), os

vértices são $\Gamma_E = \Gamma_D = \gamma^5$; $k + p$ e $k + p'$ são os momentos iniciais e finais do quark que sofreu a interação; k é o momento do quark espectador. A componente positiva da corrente eletromagnética tem a seguinte expressão, derivada do diagrama triangular da Fig.(3.1):

$$J_\pi^+ = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma^5 S(k + p') \gamma^+ S(k + p) \gamma^5 S(k)] \Lambda(k, p') \Lambda(k, p). \quad (3.3)$$

Explicitamente os momentos dos quarks são tais que:

$$\begin{aligned} k^\mu + p'^\mu &= (k^0 + p'^0, \vec{k} + \vec{p}'), \\ k^\mu + p^\mu &= (k^0 + p^0, \vec{k} + \vec{p}), \\ k^\mu &= (k^0, \vec{k}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Na Eq.(3.3), $S(k_i) = \frac{\not{k}_i + m}{k_i^2 - m^2 + i\epsilon}$ e o propagador do quark, e k_i é o momento do quark i , no diagrama triangular da Fig.(3.1). $\Lambda(k, p)$ é uma função regularizadora, escolhida de tal modo que possamos interpretá-la como parte da função de onda na Frente de Luz[29, 43, 52]. A função $\Lambda(k, p)$ engloba os fatores de normalização e isospin. Porém, na discussão a seguir, não levaremos em conta a dependência em k de $\Lambda(k, p)$, pois o nosso propósito é discutir a integração em k^+ e k^- ou em k^0 e k^3 de uma forma qualitativa. Como veremos mais adiante, o propagador de Dirac traz em si outro termo que resulta na eventual contribuição de diagramas Z, após a integração em k^- . Ou seja, somando e subtraindo k^* (“camada de energia”) no numerador do propagador de Dirac temos que

$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{\frac{\gamma^+}{2}(k^- - k^{*-} + k^{*+}) + \frac{\gamma^- k^+}{2} - \vec{\gamma}_\perp \cdot \vec{k}_\perp + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{\gamma^+ (k^- - k^{*-})}{2k^+ (k^- - k^{*-})} + \frac{\not{k}^* + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$S(k) = \frac{\not{k}^* + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{\gamma^+}{2k^+}; \quad (3.6)$$

onde $k^{*-} = \frac{\vec{k}_\perp^2 + m^2}{k^+}$, $\vec{k}_\perp^* = \vec{k}_\perp$ e $k^{*+} = k^+$. Na Eq.(3.6) o segundo termo é o chamado termo instantâneo. Sua transformada de Fourier no espaço das posições é uma função delta de Dirac

$$2\pi \frac{\gamma^+}{2k^+} \delta(x^+) = \int dk^- e^{ik^- x^+} \frac{\gamma^+}{2k^+}. \quad (3.7)$$

Veremos na secção 3.4, que o termo instantâneo do propagador de Dirac origina um diagrama Z em J_π^+ . Nas coordenadas da Frente de Luz, a Eq.(3.3) é reescrita como

$$J_\pi^+ = i \int \frac{dk^+ d^2 k_\perp dk^-}{2(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma^5(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^+(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^5(-\not{k} + m)]}{k^+(p^+ - k^+)(p'^+ - k^+)(k^- - \frac{f_1 - i\epsilon}{k^+})(p^- - k^- - \frac{f_2 - i\epsilon}{p^+ - k^+})} \times \frac{\Lambda(k, p)\Lambda(k, p')}{p'^- - k^- - \frac{f_3 - i\epsilon}{p'^+ - k^+}}, \quad (3.8)$$

onde fizemos a transformação $k^\mu \rightarrow -k^\mu$ na Eq.(3.3) e $f_1 = \vec{k}_\perp^2 + m^2$; $f_2 = (\vec{p} - \vec{k})_\perp^2 + m^2$; $f_3 = (\vec{p}' - \vec{k})_\perp^2 + m^2$. O nosso objetivo é realizar a integração em k^- na Eq.(3.8), e, para tanto, usaremos a integração pelo método de Cauchy no plano complexo, e para a discussão qualitativa a seguir não iremos considerar os pólos de $\Lambda(k, p)$. Assim temos apenas os seguintes pólos

$$\begin{aligned} k_1^- &= \frac{f_1 - i\epsilon}{k^+}; \\ k_2^- &= p^- - \frac{f_2 - i\epsilon}{p^+ - k^+}; \\ k_3^- &= p'^- - \frac{f_3 - i\epsilon}{p'^+ - k^+}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A integração analítica é feita pelo teorema de Cauchy, analisando a posição dos pólos no plano complexo de k^- em função dos valores de k^+ .

São três as possíveis contribuições para a integração em k^- na Eq.(3.8) de acordo com os valores assumidos por k^+ :

i) $k^+ < 0$;

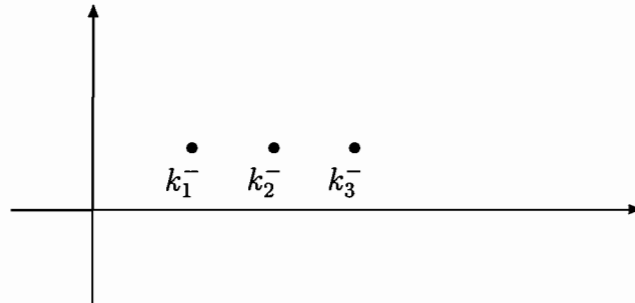


Figura 3.2: Posição dos pólos em k^- do integrando da Eq.(3.8) na região $k^+ < 0$.

Para $k^+ < 0$ os pólos em k^- se encontram no semi-plano superior. Portanto a contribuição para a integração é nula.

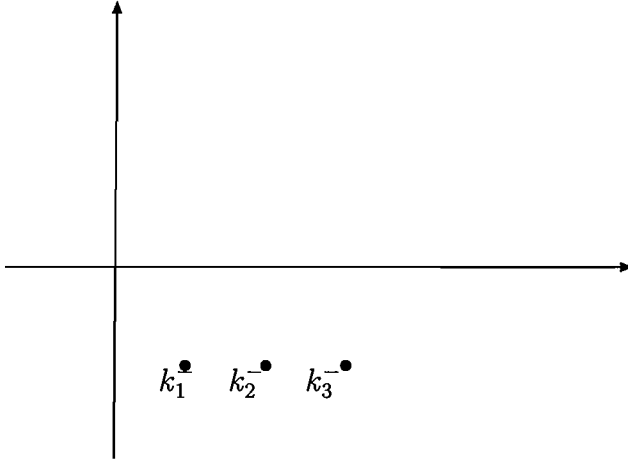


Figura 3.3: Posição dos pólos em k^- do integrando da Eq.(3.8) para $k^+ > p^+$.

ii) $k^+ > p^+$:

A figura (3.3) também mostra que não há contribuição da região (ii) para a integração em k^- na Eq.(3.8).

iii) $0 < k^+ < p^+$:

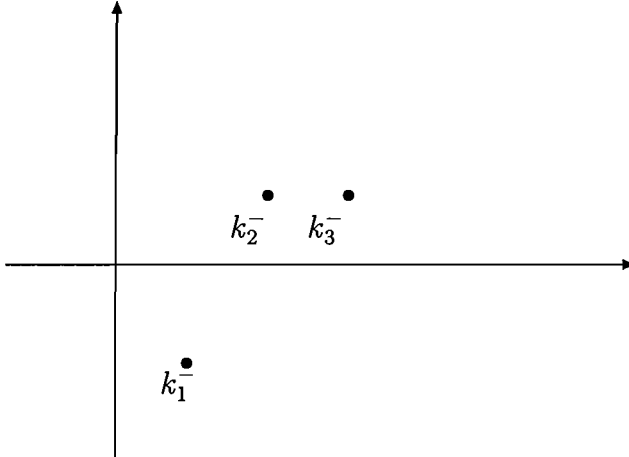


Figura 3.4: Posição dos pólos em k^- do integrando da Eq.(3.8) para $0 < k^+ < p^+$.

Podemos escolher a região de integração em k^- no semi-plano inferior. O pólo nesta região corresponde ao quark espectador na sua “camada de massa”. Assim temos

$$\begin{aligned}
 J_\pi^+ &= \int \frac{dk^+ d^2 \vec{k}_\perp}{2(2\pi)^3 k^+ (p^+ - k^+) (p'^+ - k^+)} \frac{Tr[\gamma^5 (\not{p}' - \not{k}^* + m) \gamma^+ (\not{p} - \not{k}^* + m) \gamma^5 (-\not{k}^* + m)]}{[p^- - \frac{(p-k)_\perp^2 + m^2}{p^+ - k^+} - \frac{k_\perp^2 + m^2}{k^+}]} \\
 &\times \frac{\theta(k^+) \theta(p^+ - k^+) \Lambda(k^*, p) \Lambda(k^*, p')}{[p'^- - \frac{(p'-k)_\perp^2 + m^2}{p'^+ - k^+} - \frac{k_\perp^2 + m^2}{k^+}]} .
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Na Eq.(3.10), k^* é o pólo do integrando da Eq.(3.8) correspondente ao quark espectador em sua "camada de massa". Ou seja $k^* = \frac{k_\perp^2 + m^2}{k^+}$. Vejamos o diagrama abaixo:

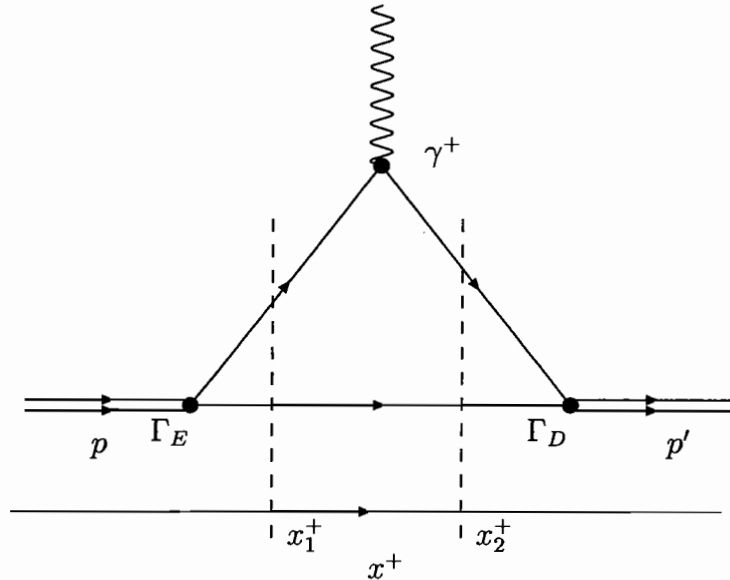


Figura 3.5: Contribuição da componente de valência da função de onda do pión para a corrente J_π^+ .

O diagrama da Fig.(3.5) representa a propagação para frente no tempo da Frente de Luz de um quark e um antiquark, antes e depois da interação com o fóton, nos tempos $x_1^+ < x_2^+$, respectivamente. Esse diagrama representa a contribuição da componente mais baixa da função de onda do pión no espaço de Fock. Já a integração em k^- da Eq.(3.8), relativa ao termo instantâneo do propagador, é representada pelo diagrama da Fig.(3.7), mostrado mais adiante na discussão sobre contribuição de pares à corrente eletromagnética do pión.

Dentro do objetivo deste capítulo, faremos uma discussão qualitativa da forma do acoplamento entre o spin dos quarks formando o pión, o que, como mostraremos, implica em explicitar as rotações de Melosh(Apêndice A), contidas no traço da Eq.(3.10). Observemos que os regularizadores, embora não tratados explicitamente, não entram nesta discussão.

Para explicitarmos as rotações de Melosh, é necessário que o traço da Eq.(3.8), seja reescrito em termos dos spinores da Frente de Luz Eq.(2.19) e apêndice A. Além disto, introduziremos os spinores de Dirac com uma transformação de base, como mostra o apêndice

A. Assim, analizaremos apenas o traço da Eq.(3.10), que denominamos de

$$T = Tr[\gamma^5(\not{p}' - \not{k}^* + m)\gamma^+(\not{p} - \not{k}^* + m)\gamma^5(-\not{k}^* + m)]. \quad (3.11)$$

A Eq.(3.11) mostra que apenas o quark espectador está na "camada de energia". Já para o outro quark não podemos fazer tal afirmação, pois

$$\begin{aligned} \not{p}' - \not{k}^* + m &\neq [(\not{p}' - \not{k})^* + m], \\ \not{p} - \not{k}^* + m &\neq [(\not{p} - \not{k})^* + m]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

As desigualdades na Eq.(3.12) mostram que, em princípio, não é possível substituir o numerador dos propagadores associados ao quark que absorve o fóton, na Eq.(3.11), pelos projetores de energia positiva no espaço de Dirac. Porém, a presença de γ^+ permite tal substituição. Isto porque os momentos $(p^- - k^-)$ e $(p'^- - k^-)$ desaparecem do traço da Eq.(3.11), devido à propriedade $(\gamma^+)^2 = 0$, lembrando que as componentes "-" do momento são multiplicadas por γ^+ . Desta forma a substituição de $(p^- - k^-)$ por $(p^- - k^-)^*$ e $(p'^- - k^-)$ por $(p'^- - k^-)^*$ é possível, pois não altera o valor do traço. Com isto a Eq.(3.11) fica

$$T = Tr[\gamma^5((\not{p}' - \not{k})^* + m)\gamma^+((\not{p} - \not{k})^* + m)\gamma^5(-\not{k}^* + m)]. \quad (3.13)$$

No diagrama triangular onde $k^+ > 0$, observamos que o sentido do quadrimomento do quark espectador nos sugere definir

$$-\not{k}^* + m = [\gamma^0\gamma^2(\not{k}^* + m)\gamma^0\gamma^2]^\top, \quad (3.14)$$

usando a operação de transposição.

Na Eq.(3.13) todos os quarks estão na "camada de energia". Essa condição nos permite introduzir os spinores de energia positiva na Frente de Luz. Ou seja, levando em consideração a Eq.(3.14), onde $k^+ > 0$, temos que

$$\begin{aligned} T &= 8m^3 \sum_{s_1 s_1' s_2} Tr[\gamma^5 u(p' - k, s_1') \bar{u}(p' - k, s_1) \gamma^+ u(p - k, s_1) \bar{u}(p - k, s_1) \gamma^5 \times \\ &[\gamma^0\gamma^2(u(k, s_2) \bar{u}(k, s_2) \gamma^0\gamma^2)^\top], \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde os projetores de energia positiva na Eq.(3.13) foram escritos em termos dos spinores da Frente de Luz, Eq.(A.9).

Na Eq.(3.15) os argumentos de momento dos spinores devem estar evidentemente na "camada de energia", e não há necessidade de utilizarmos a notação com k^* .

Usando o spinor na Frente de Luz na Eq(3.15), temos que

$$\bar{u}(p' - k, s'_1)\gamma^+u(p - k) = \delta_{s_1s'_1}. \quad (3.16)$$

Substituindo a Eq.(3.16) na Eq.(3.15) vem que

$$T = 8m^3 \sum_{s_1s_2} Tr[\gamma^5u(p' - k, s_1)\bar{u}(p - k, s_1)\gamma^5[\gamma^0\gamma^2(u(k, s_2)\bar{u}(k, s_2)\gamma^0\gamma^2)^\top]], \quad (3.17)$$

e usando que $Tr(AB)=Tr(BA)$ obtemos

$$T = 8m^3 \sum_{s_2s_2} [\gamma^0\gamma^2u(k, s_2)]^\top \gamma^5u(p' - k, s_1)\bar{u}(p - k, s_1)\gamma^5[\bar{u}(k, s_2)\gamma^0\gamma^2]^\top. \quad (3.18)$$

A expressão dada pela Eqs.(3.18) mostra os acoplamentos pseudo-escalares entre os quarks do pión, em seu estado inicial e estado final, no referencial de Breit. Para o estado final

$$[\gamma^0\gamma^2u(k, s_2)]^\top \gamma^5u(p' - k, s_1), \quad (3.19)$$

e, para o estado inicial

$$\bar{u}(p - k, s_1)\gamma^5[\bar{u}(k, s_2)\gamma^0\gamma^2]^\top. \quad (3.20)$$

As expressões dadas pelas Eq.(3.19) e (3.20) são invariantes de Lorentz. Isto permite mudarmos para outro referencial, de maneira que, quando efetuarmos essa transformação de Lorentz devemos também levar em conta a rotação de Wigner do spinor. Estudaremos explicitamente o caso de transformações cinemáticas na Frente de Luz. A transformação cinemática $U(L_f)$ é definida pela mudança do referencial de Breit para o centro de massa do par. Com isso, para o estado final temos que

$$\begin{aligned} [\gamma^0\gamma^2u(k, s_2)]^\top \gamma^5u(p' - k) &= [\gamma^0\gamma^2U(L_f)u(k_{cm}, s_2)]^\top \gamma^5U(L_f)u((p' - k)_{cm}, s_1) \\ &= [u(k_{cm}, s_2)]^\top U^\top(L_f)\gamma^0\gamma^2\gamma^5U(L_f)u((p' - k)_{cm}, s_1). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Observemos na passagem acima, que a mudança no spinores deu-se apenas com a mudança dos argumento de momento dos quarks, o que é um peculiaridade das transformações cinemáticas na Frente de Luz. A ação do operador $U(L_f)$ no spinor da Frente de Luz depende apenas dos geradores do grupo de estabilidade, mudando, dessa maneira, apenas o argumento do momento, devido à propriedade de rotação da Wigner ser igual a 1. A transformação $U(L_f)$ é unitária, e definida como (apêndice B)

$$U(L_f) = U(L_f^\perp)U(L_f^+) = e^{-i\vec{\beta}_\perp \cdot \vec{E}_\perp} e^{-i\beta_3 K_3}. \quad (3.22)$$

O primeiro operador do lado direito é dado pela Eq.(B.27):

$$U(L_f^\perp) = e^{-i\vec{\beta}_\perp \cdot \vec{E}_\perp} = 1 - \frac{1}{2}\vec{\beta}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp \gamma^+. \quad (3.23)$$

O outro operador é dado pela Eq.(B.7)

$$U(L_f^+) = e^{-i\beta_3 K_3} = \cosh\left(\frac{\beta_3}{2}\right) - \gamma^3 \gamma^0 \sinh\left(\frac{\beta_3}{2}\right), \quad (3.24)$$

onde \vec{E}_\perp e K_3 são os geradores do grupo de estabilidade. β_3 e β_\perp são os parâmetros da transformação cinemática. Uma discussão mais detalhada, e a derivação do operador $U(L_f)$ encontra-se no apêndice B.

Na Eq.(3.21) temos explicitamente que

$$\begin{aligned} U^\top(L_f)\gamma^0\gamma^2\gamma^5U(L_f) &= U^\top(L_f^+)U^\top(L_f^\perp)\gamma^0\gamma^2\gamma^5U(L_f^+)U(L_f^\perp) \\ &= U^\top(L_f^+)\left(1 - \frac{1}{2}\vec{\beta}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp \gamma^+\right)^\top \gamma^0\gamma^2\gamma^5 \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\beta}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp \gamma^+\right)U(L_f^+); \end{aligned} \quad (3.25)$$

e usando que

$$\begin{aligned} [\vec{\gamma}_\perp \gamma^+]^\top &= \vec{\gamma}_\perp \gamma^-, \\ \vec{\gamma}_\perp \gamma^- \gamma^0 \gamma^2 \gamma^5 &= -\gamma^0 \gamma^2 \gamma^5 \vec{\gamma}_\perp \gamma^+, \end{aligned} \quad (3.26)$$

na Eq.(3.25), resulta em

$$\begin{aligned} U^\top(L_f)\gamma^0\gamma^2\gamma^5U(L_f) &= U^\top(L_f^+)\gamma^0\gamma^2\gamma^5U(L_f^+)\left(1 + \frac{1}{2}\vec{\beta}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp \gamma^+\right)\left(1 - \frac{1}{2}\vec{\beta}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp \gamma^+\right) \\ &= U^\top(L_f^+)\gamma^0\gamma^2\gamma^5U(L_f^+) \\ &= \gamma^0\gamma^2\gamma^5. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Voltando para a Eq.(3.21), mostramos, com auxílio da Eq.(3.27) que

$$[\gamma^0 \gamma^2 u(k, s_2)]^\top \gamma^5 u(p' - k, s_1) = [\gamma^0 \gamma^2 u(k_{cm}, s_2)]^\top \gamma^5 u((p' - k)_{cm}, s_1). \quad (3.28)$$

A igualdade da Eq.(3.28) mostra a mudança dos argumentos dos spinores do referencial de Breit para o referencial do centro de massa do par. A rotação de Wigner é a identidade para quaisquer dois referenciais que estejam conectados por transformações cinemáticas. Analogamente poderíamos obter o mesmo para o estado inicial do pión. Ou seja,

$$\bar{u}(p - k, s_1) \gamma^5 [\bar{u}(k, s_2)]^\top = \bar{u}((p - k)_{cm}, s_1) \gamma^5 [\bar{u}(k_{cm}) \gamma^0 \gamma^2]^\top. \quad (3.29)$$

Estamos no ponto de introduzir as rotações de Melosh para os quarks no estado inicial e final do pión. Para o estado final do pión, inserimos projetores de energia positiva em termos de spinores de Dirac. Desta forma

$$\begin{aligned} [\gamma^0 \gamma^2 u(k_{cm}, s_2)]^\top \gamma^5 u((p' - k)_{cm}, s_1) &= \sum_{s'_1 s'_2} [\gamma^0 \gamma^2 u_D(k_{cm}, s'_2) \bar{u}_D(k_{cm}, s'_2) \\ &\times u(k_{cm}, s_2)]^\top \gamma^5 u_D(p' - k_{cm}, s'_1) \bar{u}_D(p' - k_{cm}, s'_1) u((p' - k)_{cm}, s_1), \end{aligned} \quad (3.30)$$

e usando que $\bar{u}_D(k, s) u(k, s) = \langle s' | R_M(k) | s \rangle$, Eq.(A.21), vem que

$$\begin{aligned} &[\gamma^0 \gamma^2 u(k_{cm}, s_2)]^\top \gamma^5 u((p' - k)_{cm}, s_1) = \\ &\sum_{s'_1 s'_2} [\gamma^0 \gamma^2 u_D(k_{cm}, s'_2) \langle s'_2 | R_M(k_{cm}) | s_2 \rangle]^\top \gamma^5 u_D((p' - k)_{cm}, s'_1) \\ &\times \langle s'_1 | R_M((p' - k)_{cm}) | s_1 \rangle = \sum_{s'_1 s'_2} \langle s'_2 | R_M(k_{cm}) | s_2 \rangle u_D^\top(k_{cm}, s'_2) \\ &\times \gamma^0 \gamma^2 \gamma^5 u_D((p' - k)_{cm}, s'_1) \langle s'_1 | R_M((p' - k)_{cm}) | s_1 \rangle. \end{aligned} \quad (3.31)$$

No centro de massa do par $(p' - k)_{cm} \equiv k'_{cm}$ temos que

$$\begin{aligned} &u_D^\top(k_{cm}, s'_2) \gamma^0 \gamma^2 \gamma^5 u_D((p' - k)_{cm}, s'_1) \\ &= (\chi_{s'_2}^\top, 0) \frac{(\not{k}_{cm}^\top + m) \gamma^0 \gamma^2 \gamma^5 (\not{k}'_{cm} + m)}{2m \sqrt{(k_{cm}^0 + m)(k'_{cm}^0 + m)}} \begin{pmatrix} \chi_{s'_1} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (\chi_{s'_2}^\top, 0) \frac{\gamma^0 \gamma^2 (-\not{k}_{cm} + m) \gamma^5 (\not{k}'_{cm} + m)}{2m(k_{cm}^0 + m)} \begin{pmatrix} \chi_{s'_1} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (\chi_{s'_2}^\top, 0) \frac{\gamma^0 \gamma^2 \gamma^5 (\not{k}'_{cm} + m) (\not{k}_{cm} + m)}{2m(k_{cm}^0 + m)} \begin{pmatrix} \chi_{s'_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde $k_{cm}^{\prime 0} = k_{cm}^0 = \sqrt{\vec{k}_{cm}^2 + m^2}$. Na Eq.(3.32) usamos os momentos definidos no centro de massa do par:

$$\begin{aligned} k_{cm} &= (k_{fcm}^0, \vec{k}_{fcm}) = k_{fcm}, \\ k'_{cm} &= (k_{fcm}^0, -\vec{k}_{fcm}) = k'_{fcm}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Assim, no centro de massa do par, onde por simplicidade não exibimos o sub-índice, temos que

$$(\not{k} + m)(\not{k}' + m) = (k^0)^2 + 2\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{k} k^0 + 2\gamma^0 k^0 m + \vec{k}^2 + m^2. \quad (3.34)$$

Da Eq.(3.32), considerando a Eq.(3.34), temos que

$$\begin{aligned} u_D^\top(k_{fcm}, s'_2) \gamma^0 \gamma^2 \gamma^5 u_D(k'_{fcm}, s'_1) = \\ \frac{(k_{fcm}^0)^2 + 2k_{fcm}^0 m + \vec{k}_{fcm}^2 + m^2}{2m(k_{fcm}^0 + m)} (\chi_{s'_2}^\top 0) \gamma^0 \gamma^2 \gamma^5 \begin{pmatrix} \chi_{s'_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \langle s'_2 | \sigma_2 | s'_1 \rangle. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Portanto, o coeficiente de acoplamento de spin no estado final do par que forma o pión será dado por

$$\begin{aligned} [\gamma^0 \gamma^2 u(k_{fcm}, s_2)]^\top \gamma^5 u(k'_{fcm}, s_1) = \frac{k_{fcm}^0}{m} \sum_{s'_1 s'_2} \langle s_2 | R_M^\top(k_{fcm}) | s'_2 \rangle \times \\ \times \langle s'_2 | \sigma_2 | s'_1 \rangle \langle s'_1 | R_M(k'_{fcm}) | s_1 \rangle. \end{aligned} \quad (3.36)$$

A Eq.(3.36) nos mostra que o par na onda S tem os spins acoplados pelo coeficiente de Clebsch-Gordan $C_{0s'_2 s'_1}^{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = i \langle s'_2 | \sigma_2 | s'_1 \rangle$, e as rotações de Melosh estão definidas no centro de massa do par. O fator $\frac{k_{fcm}^0}{m}$, na Eq.(3.36), é um invariante de Lorentz, desde que $2k_{fcm}^0$ é a massa dos sistema de dois quarks livres.

Pelo mesmo procedimento adotado acima, usado para deduzir a Eq.(3.36) de (3.31), encontramos uma expressão análoga para o estado inicial do par de quarks acoplados. A diferença fica por conta dos argumentos dos spinores dependentes dos momentos iniciais, antes da interação com o fóton e o fator $\frac{k_{icm}^0}{m}$. Ou seja

$$\begin{aligned} \bar{u}(k'_{icm}, s_1) \gamma^5 [\bar{u}(k_{icm}, s_2)]^\top = \frac{k_{icm}^0}{m} \sum_{s''_1 s''_2} \langle s_1 | R_M^\dagger(k'_{icm}) | s''_1 \rangle \times \\ \langle s''_1 | \sigma_2 | s''_2 \rangle \langle s''_2 | R_M^{\dagger\top}(k_{icm}) | s_2 \rangle. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Na Eq.(3.37) usamos que

$$\begin{aligned} k_{icm} &\equiv (k_{icm}^0, \vec{k}_{icm}); \\ k'_{icm} &\equiv (k_{icm}^0, -\vec{k}_{icm}). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Finalmente, usando as Eqs.(3.36) e (3.37), a Eq.(3.18) é escrita como

$$8mk_{icm}^0 k'_{fcm} Tr[R_M^\top(k_{fcm})\sigma_2 R_M(k'_{fcm})R_M^\dagger(k'_{icm})\sigma_2 R_M^{\dagger T}(k_{icm})]. \quad (3.39)$$

A expressão acima, Eq.(3.39), mostra o traço da Eq.(3.10), resultante do acoplamento pseudo-escalar entre os quarks no pión. A Eq.(3.39) mostra que os argumentos das rotações de Melosh estão no centro de massa do par. Outro detalhe importante é que a massa do sistema presente nas rotações de Melosh é a massa livre dos dois quarks. Isso pode ser visto explicitamente na rotação de Melosh

$$R_M(k_{cm}) = \frac{k_{cm}^+ + m + \vec{n} \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{k}_{\perp cm})}{\sqrt{(k_{cm}^+ + m)^2 - \vec{k}_{\perp cm}^2}} = \frac{xP_{cm}^+ + m + \vec{n} \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{k}_{\perp cm})}{\sqrt{(xP_{cm}^+ + m)^2 - \vec{k}_{\perp cm}^2}}. \quad (3.40)$$

O referencial é o do centro de massa do par, isto é

$$P_{cm}^+ = P_{cm}^- = k_1^- + k_2^- = \frac{k_{1\perp}^2 + m^2}{xP_{cm}^+} + \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{(1-x)P_{cm}^+}. \quad (3.41)$$

Assim, temos

$$P_{cm}^+ P_{cm}^- = \frac{k_{1\perp}^2 + m^2}{x} + \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{(1-x)} = M_0^2, \quad (3.42)$$

onde $x \equiv \frac{k^+}{P_{cm}^+}$.

Observemos que o lado direito da Eq.(3.42) é justamente a massa livre do sistema de dois quarks. Se compararmos a componente "+" da corrente eletromagnética, na aproximação de impulso representado pelo diagrama da Fig.(3.5), com aquela obtida através da construção de (B.T.)[23], para uma partícula com spin zero na onda S, notamos que ambas coincidem, a menos dos fatores $\frac{k_{icm}^0}{m}$ e $\frac{k'_{fcm}}{m}$. Nos dois casos, acoplamento pseudo-escalar e a construção de B.T., os argumentos das rotações de Melosh e sua dependência com a massa livre do par são idênticos. Exemplificamos a construção de B.T. para a função de onda no caso do núcleon no apêndice C.

3.3 Acoplamento Misto

Nesta secção usamos um vértice para o acoplamento dos quarks formando o pión, que inclui o acoplamento pseudo-vetorial. No diagrama triangular, os vértices terão uma mistura de acoplamento pseudo-escalar e pseudo-vetorial. Nessa situação mostraremos que os quarks também estão acoplados na onda S, no referencial de repouso do pión. Ou seja, da Fig.(3.1) temos que

$$\begin{aligned}\Gamma_E &= \frac{\not{p}' + m_\pi}{2m_\pi} \gamma^5, \\ \Gamma_D &= \gamma^5 \frac{\not{p}' + m_\pi}{2m_\pi},\end{aligned}\quad (3.43)$$

como expresso pela Lagrangeana efetiva, Eq.(3.1) para $\alpha = \frac{1}{2}$. No diagrama triangular, usando $\alpha = \frac{1}{2}$, resulta em

$$\begin{aligned}J_\pi^+ &= \int d^4k Tr \left[\frac{\not{p}' + m_\pi}{2m_\pi} \gamma^5 \frac{\not{p}' - \not{k} + m}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^+ \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p'-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \right. \\ &\quad \left. \times \gamma^5 \frac{\not{p} + m_\pi}{2m_\pi} \frac{(-\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \Lambda(k, p') \Lambda(k, p) \right].\end{aligned}\quad (3.44)$$

Como no caso pseudo-escalar, os passos a serem seguidos são os mesmos que nos levaram da Eq.(3.3) à (3.39). Primeiramente, a integração analítica é feita na coordenada k^- . O pólo escolhido é o da partícula espectadora, que está na sua "camada de energia", $k^- = \frac{\vec{k}^2 + m^2}{k^+}$ para $k^+ > 0$. A matriz γ^+ está entre os propagadores da partícula que absorve o fóton. Usando a propriedade $(\gamma^+)^2 = 0$, podemos introduzir os valores dos momentos da partícula que absorve o fóton nas suas "camadas de energia", no numerador dos propagadores de Dirac associados a esta partícula. O traço é escrito como

$$\begin{aligned}T_M &= Tr \left[\gamma^5 \frac{\not{p}' + m_\pi}{2m_\pi} ((\not{p}' - \not{k})^* + m) \gamma^+ ((\not{p} - \not{k})^* + m) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\not{p} + m_\pi}{2m_\pi} \gamma^5 (-\not{k}^* + m) \right].\end{aligned}\quad (3.45)$$

Usando que $-\not{k}^* + m = [\gamma^0 \gamma^2 (\not{k}^* + m) \gamma^0 \gamma^2]^\top$, T_M fica como

$$\begin{aligned}T_M &= -Tr \left[\gamma^5 \frac{\not{p}' + m_\pi}{2m_\pi} ((\not{p}' - \not{k})^* + m) \gamma^+ ((\not{p} - \not{k})^* + m) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\not{p} + m_\pi}{2m_\pi} \gamma^5 [\gamma^0 \gamma^2 (\not{k}^* + m) \gamma^0 \gamma^2]^\top \right].\end{aligned}\quad (3.46)$$

Na Eq.(3.46) todos os quarks estão em suas "camadas de energia", o que nos permite introduzir projetores dos spinores de energia positiva em T_M :

$$T_M = - \sum_{s_1 s_2} \text{Tr} \left[\gamma^5 \frac{\not{p}' + m_\pi}{2m_\pi} u(p' - k, s_1) \bar{u}(p - k, s_1) \frac{\not{p} + m_\pi}{2m_\pi} \gamma^5 \right. \\ \left. \times [\bar{u}(k, s_2) \gamma^0 \gamma^2]^\top [\gamma^0 \gamma^2 u(k, s_2)]^\top \right]. \quad (3.47)$$

Na passagem da Eq.(3.46) para Eq.(3.47) também foi usado que

$$\bar{u}(p' - k, s_1) \gamma^+ u(p - k, s'_1) = \delta_{s_1 s'_1}. \quad (3.48)$$

Usando que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, temos que

$$T_M = - \sum_{s_1 s_2} [\gamma^0 \gamma^2 u(k, s_2)]^\top \gamma^5 \frac{\not{p}' + m_\pi}{2m_\pi} u(p' - k, s_1) \\ \times \bar{u}(p - k, s_1) \frac{\not{p} + m_\pi}{2m_\pi} \gamma^5 [\bar{u}(k, s_2) \gamma^0 \gamma^2]^\top. \quad (3.49)$$

Na Eq.(3.49) explicitamos os argumentos dos spinores dos quarks nos estados final e inicial do pión. Para o estado final temos

$$[\gamma^0 \gamma^2 u(k, s_2)]^\top \gamma^5 \frac{\not{p}' + m_\pi}{2m_\pi} u(p' - k, s_1), \quad (3.50)$$

e para estado inicial,

$$\bar{u}(p - k, s_1) \frac{\not{p} + m_\pi}{2m_\pi} \gamma^5 [\bar{u}(k, s_2) \gamma^0 \gamma^2]^\top. \quad (3.51)$$

Ambos os elementos de matriz definidos nas Eqs.(3.50) e (3.51) são invariantes de Lorentz, o que nos permite mudar de um referencial para outro mudando apenas os argumentos dos momentos. Isso é verdade, desde que esses referenciais estejam conectados por transformações cinemáticas Λ_f , para as quais a rotação de Wigner é a identidade (apêndice B), ou seja

$$\bar{u}(k', s') O u(k_1, s_1) = \bar{u}(\Lambda_f k', s) O u(\Lambda_f k, s), \quad (3.52)$$

onde o operador O representa o invariante no espaço dos spinores e $\Lambda_f k'$ o momento no novo referencial.

A Eq.(3.52) nos mostra que, na mudança de referencial houve apenas a mudança dos momentos, no argumento dos spinores e no operador O . A mudança dos estados dos quarks inicialmente definidos no referencial de Breit, implica apenas que os argumentos de momento desses spinores sejam modificados para o referencial de repouso do pión. É importante observar que o referencial de repouso do pión não é o referencial do centro de massa do par, uma vez que o primeiro leva em conta a interação entre os quarks. Com isso, no estado final temos que

$$\begin{aligned} u(k, s_2)^\top \gamma^0 \gamma^2 \gamma^5 \frac{\not{p}' + m_\pi}{2m_\pi} u(p' - k, s_1) = \\ u(k_{fcm_\pi}, s_2)^\top \gamma^0 \gamma^2 \gamma^5 \frac{1 + \gamma^0}{2} u((p' - k)_{fcm_\pi}, s_1); \end{aligned} \quad (3.53)$$

Para o estado inicial, temos que

$$\begin{aligned} \bar{u}(p - k, s_1) \frac{\not{p} + m_\pi}{2m_\pi} \gamma^5 \gamma^0 \gamma^2 [\bar{u}(k, s_2)]^\top = \\ \bar{u}((p - k)_{fcm_\pi}, s_1) \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^5 \gamma^0 \gamma^2 [\bar{u}(k_{fcm_\pi}, s_2)]^\top. \end{aligned} \quad (3.54)$$

No estado final do pión, introduzindo as rotações de Melosh na Eq.(3.53), temos que

$$\begin{aligned} [\gamma^0 \gamma^2 u(k_{fcm_\pi}, s_2)]^\top \gamma^5 \frac{1 + \gamma^0}{2} u(k'_{fcm_\pi}, s_1) = \sum_{s'_1 s'_2} \langle s_2 | R_M^\top(k_{fcm_\pi}) | s'_2 \rangle \times \\ \times u_D^\top(k_{fcm_\pi}, s'_2) \gamma^0 \gamma^2 \gamma^5 \frac{1 + \gamma^0}{2} u_D(k'_{fcm_\pi}, s'_1) \langle s'_1 | R_M(k'_{fcm_\pi}) | s_1 \rangle \\ = \sqrt{\frac{k_{fcm_\pi}^0 + m}{2m}} \sqrt{\frac{k'_{fcm_\pi}^0 + m}{2m}} \sum_{s'_1 s'_2} \langle s_2 | R_M^\top(k_{fcm_\pi}) | s'_2 \rangle \langle s'_2 | \sigma_2 | s'_1 \rangle \times \\ \langle s'_1 | R_M(k'_{fcm_\pi}) | s_1 \rangle, \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde, nas Eqs.(3.55), (3.54) e (3.53) os momentos dos quarks estão definidos no centro de massa do pión, que discutiremos mais adiante, e $k'_{fcm_\pi} \equiv (p' - k)_{fcm_\pi}$.

Para o estado inicial, similarmente, a Eq.(3.54) é reescrita como

$$\begin{aligned} \bar{u}((p - k)_{cm_\pi}, s_1) \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^5 \gamma^0 \gamma^2 [\bar{u}(k_{cm_\pi}, s_2)]^\top = \\ \sqrt{\frac{k_{icm_\pi}^0 + m}{2m}} \sqrt{\frac{k'_{icm_\pi}^0 + m}{2m}} \sum_{s''_1 s''_2} \langle s_1 | R_M^\dagger(k'_{icm_\pi}) | s''_1 \rangle \langle s''_1 | \sigma_2 | s''_2 \rangle \\ \times \langle s''_2 | R_M^{\dagger T}(k)_{icm_\pi} | s_2 \rangle, \end{aligned} \quad (3.56)$$

e $k'_{icm\pi} \equiv (p' - k)_{icm\pi}$.

Desta forma a rotação de Melosh no referencial de centro de massa do pión é dada por

$$R_M(k_{cm\pi}) = \frac{xm_\pi + m + \vec{n} \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{k}_{\perp(cm)\pi})}{\sqrt{(xm_\pi + m)^2 - \vec{k}_{\perp(cm)\pi}^2}}. \quad (3.57)$$

Observemos a diferença entre este operador e a rotação de Melosh obtida no caso do acoplamento pseudo-escalar, Eq.(3.40), onde no lugar da massa do pión m_π aparece a massa livre do par.

O procedimento para a introdução das rotações de Melosh no estado inicial e final do pión no traço da componente "+" da corrente eletromagnética com o vértice misto, é análogo ao efetuado para o vértice pseudo-escalar, que resultou na Eq.(3.39). Os argumentos das rotações de Melosh das Eqs.(3.55) e (3.56) não são os mesmos obtidos na Eq.(3.39). Enquanto o acoplamento pseudo-escalar implica em que os argumentos das rotações de Melosh tem seus argumentos definidos no centro de massa do par, no acoplamento misto as rotações de Melosh apresentam seus argumentos de momento definidos no referencial de repouso do pión. Nas coordenadas da Frente de Luz, o momento total é escrito como

$$\begin{aligned} p_\pi^+ &= k_1^+ + k_2^+, \\ \vec{p}_\perp &= \vec{k}_{1\perp} + \vec{k}_{2\perp}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

A seguir mostraremos que o referencial de centro de massa do par dos quarks livres é diferente do referencial de centro de massa do pión.

Na Eq.(3.58), por simplicidade, identificamos os momentos dos dois quarks com índices 1 e 2. Vamos efetuar a transformação cinemática do referencial de Breit para o referencial de repouso do pión, o que resulta em

$$\begin{aligned} p_\pi^+ &= m_\pi(x_1 + x_2) = m_\pi, \\ \vec{p}_\perp &= 0 = \vec{k}_{1\perp} + \vec{k}_{2\perp}; \end{aligned} \quad (3.59)$$

Definimos $x_1 \equiv x$ e $x_2 \equiv 1 - x$, e nesse referencial temos que

$$k_1^- = \frac{\vec{k}_{1\perp}^2 + m^2}{xm_\pi};$$

$$k_2^- = \frac{\vec{k}_{2\perp}^2 + m^2}{(1-x)2m_\pi}. \quad (3.60)$$

Da Eq.(3.59), o momento transversal total é nulo. O que resta, como origem da diferença entre o referencias, é que o momento longitudinal total do par não é nulo no referencial de centro de massa do pión. Assim

$$\begin{aligned} k_{1z} + k_{2z} &= \frac{k_1^+ - k_1^-}{2} + \frac{k_2^+ - k_2^-}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(xm_\pi - \frac{\vec{k}_{1\perp}^2 + m^2}{xm_\pi} + (1-x)m_\pi - \frac{\vec{k}_{2\perp}^2 + m^2}{(1-x)m_\pi} \right), \end{aligned} \quad (3.61)$$

e usando que $\vec{k}_{1\perp} = -\vec{k}_{2\perp}$, temos que

$$k_{1z} + k_{2z} = \frac{1}{2m_\pi} \left[m_\pi^2 - \frac{\vec{k}_{1\perp}^2 + m^2}{x(1-x)} \right] \neq 0. \quad (3.62)$$

Observemos que o segundo termo na Eq.(3.62) é massa livre do sistema quark-antiquark definida pela Eq.(3.42), avaliada no centro de massa dos quarks livres. A Eq.(3.62) mostra explicitamente que a diferença não nula entre a massa do pión e a massa livre implica em que o momento longitudinal do par quark-antiquark formando o pión é diferente de zero no referencial de centro de massa do pión. Apesar do par possuir momento transversal nulo, seu momento longitudinal é não nulo, implicando na diferença entre os referenciais de centro de massa do par e o de centro de massa do pión. Portanto, os argumentos da rotação Melosh da Eq.(3.57) e da Eq.(3.40) são diferentes, como está também devidamente indicado nos índices de momento.

3.4 Contribuição do Diagrama Z

A contribuição do diagrama Z ocupa um papel importante para a covariância na descrição dos observáveis de sistemas físicos na Frente de Luz. Especialmente nos fatores de forma eletromagnéticos de mésons, como por exemplo no caso particular do méson ρ [53]. Nesta secção derivamos a contribuição do mecanismo de produção de par para a corrente J_π^+ , usando um vértice $\pi - 2q$ mais geral, do tipo $\Gamma = \gamma^5(\not{p} + \lambda)$, derivado da Lagrangeana efetiva

Eq.(3.1), onde $\lambda = \frac{m_\pi \alpha}{1-\alpha}$. Por exemplo para $\lambda = m_\pi (\alpha = \frac{1}{2})$, teremos o acoplamento misto entre os quarks. Substituindo este vértice na Eq.(3.3) temos

$$J_\pi^+ = \int d^4k Tr[(\not{p}' + \lambda)\gamma^5 S(k-p')\gamma^+ S(k-p)\gamma^5(\not{p} + \lambda)S(k)]\Lambda(k,p')\Lambda(k,p), \quad (3.63)$$

onde, por conveniência trocamos o sentido dos momentos no diagrama da Fig.(3.1).

Como vimos anteriormente, para que a integração em k^- seja não nula, a região de integração em k^+ deverá ser restrita em $0 < k^+ < p^+$, o que corresponde à partícula espectadora estar na sua "camada de energia". O resultado desta integração corresponde ao truncamento em ordem mais baixa no espaço de Fock do sistema quark-antiquark. No entanto, se considerarmos que $p'^+ \neq p^+$, há mais uma contribuição para a integração de Cauchy em k^- .

Na Eq.(3.6), o propagador do férmion é decomposto em dois termos:

$$S(k) = \frac{\not{k}^* + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{\gamma^+}{2k^+}$$

onde usamos que o momento na "camada de energia" é tal que $k^{*-} = \frac{\vec{k}_\perp^2 + m^2}{k^+}$.

O primeiro termo da Eq.(3.6), quando substituído na integral da Eq.(3.63), mostra o resultado obtido na secção 3.2, Eq.(3.10) e, a partir do qual reescrevemos o traço contido na integral em termos das rotações de Melosh. Neste caso, a contribuição do pólo em k^- é não nula para a região $0 < k^+ < p^+$. O segundo termo da Eq.(3.6) é um termo instantâneo no tempo da Frente de Luz, pois o termo instantâneo do propagador de Dirac não depende de k^- .

Substituindo o termo instantâneo na Eq.(3.63) temos

$$J_{\pi,par}^+ = \int d^4k Tr[\gamma^5(\not{p}' + \lambda)\frac{\not{k} - \not{p}' + m}{(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon}\gamma^+\frac{\not{k} - \not{p} + m}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon}(\not{p} + \lambda)\gamma^5\frac{\gamma^+}{2k^+}], \quad (3.64)$$

que é representado pelo diagrama da Fig(3.7). Calculando o traço do numerador da Eq.(3.64) chegamos em:

$$\begin{aligned} T_Z &= Tr[\gamma^5(\not{p}' + \lambda)(\not{k} - \not{p}' + m)\gamma^+(\not{k} - \not{p} + m)(\not{p} + \lambda)\gamma^5\gamma^+] \\ &= 8[-\lambda^2 k^{+2} + \lambda^2 k^+ p'^+ + \lambda k^+ m p'^+ + \lambda^2 k^+ p^+ + \lambda k^+ m p^+] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda^2 p'^+ p^+ - \vec{k}_\perp^2 p'^+ p^+ - 2\lambda m p'^+ p^+ - m^2 p'^+ p^+ + k^+ \vec{k}_\perp \cdot \vec{p}' \\
& + k^+ p'^+ \vec{k}_\perp \cdot \vec{p}' + k^{+2} \frac{\vec{q}_\perp^2}{4}]. \tag{3.65}
\end{aligned}$$

Na Eq.(3.65) usamos referencial no qual o momento $\vec{p}_\perp = -\frac{\vec{q}_\perp}{2}$ e $\vec{p}'_\perp = \frac{\vec{q}_\perp}{2}$. Coletando os termos dessa expressão, temos, em potências de λ , que

$$\begin{aligned}
T_Z &= 8[-\lambda^2(p^+ - k^+)(p'^+ - k^+) - \lambda[p'^+(p^+ - k^+) + p^+(p'^+ - k^+)]] + \\
& \lambda^0(-p'^+ p^+(\vec{k}_\perp^2 + m^2) + k^+ \vec{k}_\perp \cdot \vec{p}'(p^+ - p'^+) + k^{+2} \frac{\vec{q}_\perp^2}{4}). \tag{3.66}
\end{aligned}$$

O termo quadrático em λ é proporcional ao acoplamento escalar $\lambda = \frac{m\pi\alpha}{1-\alpha} \rightarrow \infty$, para $\alpha \rightarrow 1$. Esse termo é um dos quatro termos gerados pelo vértice misto. Os termos lineares em λ são os produtos nos quais só há um \not{p} no vértice. O termo restante corresponde ao acoplamento $\pi - 2q$ ser pseudo-vetorial, $\alpha = 0$ e $\lambda = 0$. Vejamos a contribuição do termo quadrático em λ , substituindo-o na Eq(3.64):

$$\begin{aligned}
J_{\pi,\lambda^2}^{+par} &= \int d^4 k \frac{Tr[\gamma^5(\not{k} - \not{p}' + m)\gamma^+(\not{k} - \not{p} + m)\gamma^5\gamma^+]}{2k^+((p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon)(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon} = \\
& \int d^4 k \frac{-4(p^+ - k^+)(p'^+ - k^+)}{k^+(p^+ - k^+)(p'^+ - k^+)(p'^- - k^- - \frac{f_3 - i\epsilon}{p'^+ - k^+})(p'^- - k^- - \frac{f_2 - i\epsilon}{p^+ - k^+})}. \tag{3.67}
\end{aligned}$$

onde $f_2 = (p - k)_\perp^2 + m^2$ e $f_3 = (p' - k)_\perp^2 + m^2$. Simplificando a equação acima, obtemos

$$J_{\pi,\lambda^2}^{+par} = \int dk^- dk^+ d^2 \vec{k}_\perp \frac{-4}{k^+(p'^- - k^- - \frac{f_3 - i\epsilon}{p'^+ - k^+})(p'^- - k^- - \frac{f_2 - i\epsilon}{p^+ - k^+})}. \tag{3.68}$$

Os pólos em k^- do integrando da Eq.(3.68), para região $p^+ < k^+ < p'^+$, que apresentam contribuição não nula à integração de Cauchy, se apresentam de acordo gráfico da Fig.3.6:

Integrando a Eq.(3.68) em k^- pelo teorema de Cauchy, obtemos

$$J_{\pi,\lambda^2}^{+,par} = 2\pi i \int dk^+ d^2 \vec{k}_\perp \frac{-4\theta(k^+ - p^+)\theta(p'^+ - k^+)}{k^+(p'^- - p^- + \frac{f_2}{p^+ - k^+} - \frac{f_3}{p'^+ - k^+})}. \tag{3.69}$$

Podemos fazer uma interpretação diagramática da integral Eq(3.69). Sua representação está de acordo diagrama da Fig.(3.7):

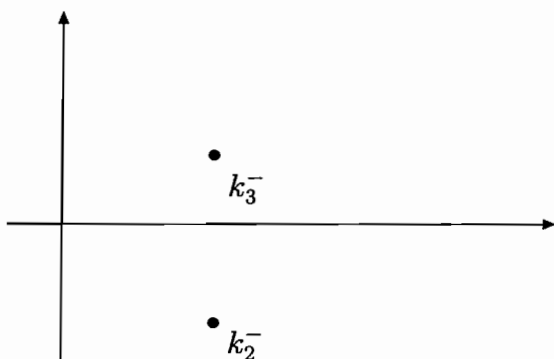


Figura 3.6: Posição dos pólos em k^- na região $p^+ < k^+ < p'^+$.

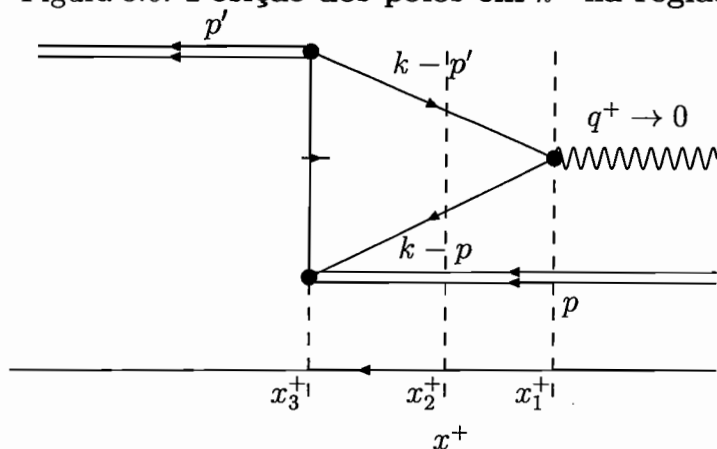


Figura 3.7: Contribuição do termo de par referente ao termo instantâneo do propagador de quark.

A linha vertical com um traço corresponde ao termo instantâneo do propagador de Dirac (na representação da Ref.[42]). O diagrama representa a propagação virtual de um estado intermediário com um quark e um antiquark produzidos pelo fóton incidente com $q^+ > 0$. No instante x_1^+ o fóton virtual produz um par quark-antiquark que se propaga livremente até o instante $x_3^+ > x_2^+ > x_1^+$, quando o quark aniquila o antiquark do pión produzindo um quark em x_3^+ , que, instantâneamente, no tempo da frente de luz, recombina-se com o antiquark com momento $k - p'$ e produz o pión final. Observemos que na Eq.(3.69) o denominador do integrando é o denominador do propagador livre do sistema pión-quark-antiquark em qualquer instante do intervalo $x_1^+ < x_2^+ < x_3^+$.

Fazendo $p'^- = p^-$ e substituindo a variável de integração k^+ por $x = \frac{k^+ - p^+}{q^+}$ na Eq.(3.69),

temos que

$$J_{\pi,\lambda^2}^{+par} = 8\pi i q^{+2} \int dx d^2 \vec{k}_\perp \frac{\theta(x)\theta(1-x)}{(xq^+ - p^+) \left(\frac{f_3}{1-x} - \frac{f_2}{x}\right)} \xrightarrow{q^+ \rightarrow 0} 0. \quad (3.70)$$

Portanto o acoplamento pseudo-escalar não apresenta contribuição de pares, no referencial de Breit com a condição de Drell-Yan ($q^+ = 0$).¹

Para o termo linear em λ , obtemos, pelo mesmo procedimento

$$\begin{aligned} J_{\pi,\lambda}^{+par} &= \int d^4 k \frac{4p'^+(p^+ - k^+) + p^+(p'^+ - k^+)}{k^+(p^+ - k^+)(p'^+ - k^+)(p^- - k^- - \frac{f_3 - i\epsilon}{p'^+ - k^+})(p^- - k^- - \frac{f_2 - i\epsilon}{p^+ - k^+})} \\ &= 8\pi i \int \frac{dx d^2 \vec{k}_\perp \theta(x)\theta(1-x)}{(xq^+ - p^+)(1-x)} \frac{(q^+(p^+ + q^+) + q^+ p'^+)}{\left(\frac{f_2}{x} - \frac{f_3}{1-x}\right)} \xrightarrow{q^+ \rightarrow 0} 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

A Eq.(3.71), correspondente ao termo linear em λ da Eq.(3.66), também não apresenta contribuição de par no limite $q^+ \rightarrow 0$.

Finalmente, a contribuição do termo proporcional a λ^0 para a corrente:

$$\begin{aligned} J_{\pi,\lambda^0}^{+par} &= \int d^4 k \frac{4(-p'^+ p^+ (\vec{k}_\perp^2 + m^2) + k^+ \vec{k}_\perp \cdot \vec{p}(p^+ - p'^+) + k^{+2} \frac{q_\perp^2}{4})}{k^+(p^+ - k^+)(p'^+ - k^+)(p^- - k^- - \frac{f_3 - i\epsilon}{p'^+ - k^+})(p^- - k^- - \frac{f_2 - i\epsilon}{p^+ - k^+})} \\ &= 8\pi i \int dx d^2 \vec{k}_\perp \frac{[p'^+ p^+ (\vec{k}_\perp^2 + m^2) + k^+ \vec{k}_\perp \cdot \vec{p} q^+ + k^{+2} \frac{q_\perp^2}{4}] \theta(x)\theta(1-x)}{(xq^+ - p^+) x (1-x) \left(\frac{f_2}{x} - \frac{f_3}{1-x}\right)} \\ &= 8\pi i \int dx d^2 \vec{k}_\perp \frac{[p^{+2} (\vec{k}_\perp^2 + m^2) + x q_\perp^2] \theta(x)\theta(1-x)}{(xq^+ - p^+) x (1-x) \left(\frac{f_2}{x} - \frac{f_3}{1-x}\right)}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

é diferente de zero no limite $q^+ \rightarrow 0$. Pela Eq.(3.72) concluímos, portanto, que o acoplamento mais geral para o vértice $\not{p} + \lambda$ apresenta contribuição de par, diferentemente do que ocorre no acoplamento pseudo-escalar, onde não há contribuição do diagrama Z.

Esse capítulo mostrou, portanto, as consequências, para a corrente J_π^+ , das diferentes formas de acoplamento escolhidas para o vértice do pión. Escolhemos um vértice pseudo-escalar, e um vértice misto, isto é, pseudo-escalar e pseudo-vetorial. Verificamos que as rotações de Melosh que entram na corrente eletromagnética com vértice pseudo-escalar para

¹O acoplamento pseudo-escalar não tem contribuição do diagrama de produção de par pelo fóton para $q^+ = 0$, como já discutido anteriormente, na Ref.[43] onde foi utilizado um regularizador $\Lambda(k, p) =$

$\frac{1}{(p-k)^2 - m_R^2 + i\epsilon}$. m_R é a uma massa considerada como parâmetro do modelo.

o pión tem seus argumentos no referencial do centro de massa do par quark-antiquark. Da mesma forma a construção de B.T. para o acoplamento do par quark-antiquark no pión tem as rotações de Melosh com argumentos no referencial no centro de massa do par. Se o vértice misto for escolhido, então a corrente do pión apresentará diferenças significativas em relação à obtida usando-se o acoplamento pseudo-escalar. Os argumentos das rotações de Melosh não estarão no centro de massa do par, mas sim no centro de massa do pión físico, cuja massa é diferente da massa do sistema quark-antiquark livre. Além disso, diferentemente do acoplamento pseudo-escalar, que não apresenta contribuição de par para a componente “+” da corrente eletromagnética para $q^+ = 0$ [43], o acoplamento vetorial apresenta tal contribuição. Vimos que o termo responsável pela contribuição vem do acoplamento pseudo-vetorial. O que chama a atenção nessa discussão é que o vértice geralmente usado na literatura é o pseudo-escalar, que concorda com o cálculo covariante sem a inclusão termo de par. No entanto nada impede de escolhermos um outro vértice para estudarmos a fenomenologia do pión, que deixamos para um trabalho futuro.

Capítulo 4

Corrente Eletromagnética do Núcleon na Frente de Luz

4.1 Introdução

Neste capítulo investigaremos o efeito de diferentes formas de acoplamento de spin entre os quarks constituintes nos fatores de forma eletromagnéticos do núcleon. Como discutido no capítulo anterior, aqui usaremos uma Lagrangeana efetiva para descrever o acoplamento $N - 3q$, e, com isto, calcularemos a componente "+" da corrente eletromagnética. É introduzido um parâmetro de acoplamento, α , que diferencia o invariante que formará o vértice do núcleon no espaço spinorial de Dirac. Enfatizamos mais uma vez, no contexto do núcleon, que a formulação baseada na construção de B.T. [24, 51] apresenta diferenças relevantes em relação à aproximação de impulso formulada em teoria quântica de campos e expressa pelo diagrama de Feynman triangular[27, 30]. O ponto crucial nessas comparações é a questão da covariância. Embora a construção de B.T. permita definir fatores de forma que sejam invariantes por transformações cinemáticas na Frente de Luz[37], a invariância por transformações gerais pode ser perdida.

Mostramos no capítulo anterior que a contribuição do diagrama Z para a corrente J_{π}^{+} no caso do acoplamento pseudo-vetorial não é nula. O fato do modelo do pión com acoplamento

pseudo-escalar $\pi - 2q$ coincidir com a construção B.T., e não apresentar contribuição de pares para a componente "+" da corrente eletromagnética no referencial de Drell-Yan ($q^+ = 0$), concordando também com o cálculo covariante[43] é uma coincidência. Se há invariantes para o vértice $\pi - 2q$ que produzem contribuição de par para a componente "+" da corrente, existe o indício de que em sistemas de mais corpos, como por exemplo o núcleon, podem ocorrer tais contribuições. Porém este aspecto ainda está em aberto na literatura.

Os modelos de funções de onda de três quarks, construídos através do esquema de acoplamento de spin de B.T., por exemplo na Ref.[24], possuem invariantes mistos com componentes escalares e vetorial. Neste caso, rotações de Melosh dos spins individuais tem seus argumentos no centro de massa do sistema de três quarks livres (apêndice C) Neste capítulo, nos limitaremos a discutir o seguinte ponto que consideramos importante, e que é um aspecto original na literatura: os argumentos das rotações de Melosh na aproximação de impulso da componente "+" da corrente eletromagnética do núcleon, representado pelo diagrama de Feynman depende do invariante usado para construir o núcleon[27]. Assim, como no capítulo anterior, onde mostramos diferenças qualitativas na corrente eletromagnética para os diferentes acoplamentos $\pi - 2q$ com respeito aos argumentos das rotações de Melosh, a discussão do acoplamento $N - 3q$ concentrar-se-á nesse mesmo ponto. Uma discussão a respeito da contribuição de par para a corrente eletromagnética do núcleon, e sua dependência com a acoplamento, vai além dos propósitos desse capítulo, ficando para uma investigação futura.

Neste capítulo apresentamos uma primeira secção intitulada "acoplamento $N - 3q$ ". Nesta secção, partimos de uma Lagrangeana efetiva dependente de um parâmetro α que diferencia o tipo de acoplamento no diquark. Dessa Lagrangeana efetiva resultam 5 diagramas topologicamente distintos que se reduzem à 4, devido à invariância da componente "+" da corrente eletromagnética por transformação de paridade e reversão temporal. Cada um desses diagramas equivalem à integrais quadridimensionais nas coordenadas de momento dos quarks espectadores. Ou seja, aqueles quarks que não absorvem o fóton. Na secção seguinte, "integração analítica nas coordenadas da frente de luz", integramos analiticamente nos momentos "-" dos quarks 1 e 2 (os quarks que não absorvem o fóton). Observemos que apenas a componente de três quarks no espaço de Fock será considerada de maneira que não in-

cluiremos o processo de produção de par na corrente eletromagnética do núcleon J_N^+ . Nesta secção será deduzida a forma explícita dos elementos de matriz da corrente J_N^+ em termos da componente de momento da função de onda do núcleon na Frente de Luz. No capítulo 5 essa expressão será integrada numericamente com o objetivo de analisar os fatores de forma eletromagnéticos do núcleon.

Depois, serão analisados os esquemas de acoplamento entre os quarks formando o diquark, no núcleon [27]. Através da propriedade $(\gamma^+)^2 = 0$, é possível reduzir os traços no espaço spinorial presentes na corrente eletromagnética ao traço do produto de rotações de Melosh dos quarks constituintes. Considerando a componente J^+ da corrente, todos os numeradores dos propagadores de Dirac correspondem aos projetores de energia positiva. Ressaltaremos durante a exposição, a importância da ação das transformações cinemáticas nas mudanças de referenciais do par acoplado, bem como do sistema como um todo. Nesta secção diferenciamos o acoplamento escalar e a mistura de acoplamento escalar e vetorial, este último semelhante ao acoplamento do spinor dos quarks gerado pela construção de B.T. Constatamos a diferença nos argumentos de momentos das rotações de Melosh para os dois casos. A diferença entre as rotações de Melosh dos acoplamentos escalar, misto e a construção B.T. é discutida na seção "Feynman versus B.T".

4.2 Acoplamento $N - 3q$

Calculemos agora o acoplamento de três quarks no espaço de spin-isospin na frente de luz, formando o nucleon cujo spin é $1/2$ e o isospin também é $1/2$. A função de onda deve ser totalmente anti-simétrica. Supondo que o grau de liberdade da parte espacial é simétrico, então os graus de liberdade spin-isospin devem ser anti-simétricos. Nos graus de liberdade de spin-isospin assumimos, por simplicidade, o acoplamento escalar e vetorial entre dois quarks no estado de isospin nulo. Nos referimos a este par acoplado também como diquark. A Lagrangeana efetiva para o acoplamento $N - 3q$ é dada por

$$\mathcal{L}_{N-3q} = \alpha m_N \epsilon^{lmn} \bar{\Psi}_{(l)} \not{\tau}_2 \gamma_5 \Psi_{(m)}^C \bar{\Psi}_{(n)} \Psi_N + (1 - \alpha) \epsilon^{lmn} \bar{\Psi}_{(l)} \not{\tau}_2 \gamma_\mu \gamma_5 \Psi_{(m)}^C \bar{\Psi}_{(n)} \not{\partial}^\mu \Psi_N + H.C. (4.1)$$

onde τ_2 é a matriz de isospin, $\{l, m, n\}$ são os índices de cores e ϵ^{lmn} é o tensor totalmente anti-simétrico. O campo conjugado do quark é $\Psi^C = C\bar{\Psi}^T$, onde $C = i\gamma^2\gamma^0$ é a matriz de conjugação de carga; α é um parâmetro que distingue entre os possíveis acoplamentos: acoplamento escalar, $\alpha = 1$; e um acoplamento vetorial, $\alpha = 0$. Uma lista geral de invariantes para o nucleon [25] é apresentada no apêndice G. O elemento de matriz da corrente eletromagnética do núcleon $J_n^+(Q^2)$ ("boa componente") no referencial de Breit e na base dos spinores da frente de luz é dado por

$$\begin{aligned} \langle s' | J_N^+(Q^2) | s \rangle &= \bar{u}(p', s') \left(F_{1N}(Q^2) \gamma^+ + i \frac{\sigma^{+\mu} Q_\mu}{2m_N} F_{2N}(Q^2) \right) u(p, s) \\ &= \frac{p^+}{m_N} \langle s' | F_{1N}(Q^2) - i \frac{F_{2N}(Q^2)}{2m_N} \vec{n} \cdot (\vec{q}_\perp \times \vec{\sigma}) | s \rangle, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde F_{1N} e F_{2N} são os fatores de forma de Dirac e Pauli, respectivamente. \vec{n} é o vetor unitário ao longo da direção z. Os momentos no referencial de Breit são $Q^\mu = (0, \vec{q}_\perp)$, tal que $(Q^+ = Q^0 + Q^3 = 0)$ e $\vec{q}_\perp = (q^1, q^2)$; e para o núcleon $p = (\sqrt{\frac{q_\perp^2}{4} + m_N^2}, -\frac{\vec{q}_\perp}{2}, 0)$ e $p' = (\sqrt{\frac{q_\perp^2}{4} + m_N^2}, \frac{\vec{q}_\perp}{2}, 0)$. $u(p, s)$ e $u_D(p, s)$ são os spinores da Frente de Luz e de Dirac para o núcleon, respectivamente.

Os fatores de forma de Sachs, dos quais extraímos as propriedade estáticas do núcleon são definidos por

$$\begin{aligned} G_{EN}(Q^2) &= F_{1N}(Q^2) + \frac{Q^2}{4m_N^2} F_{2N}(Q^2), \\ G_{MN}(Q^2) &= F_{1N}(Q^2) + F_{2N}(Q^2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Das definições acima, Eq.(4.3), temos que $\mu_N = G_{MN}(0)$, em magnetons de Bohr, e o raio quadrático médio é $r_N^2 = 6 \frac{dG_{EN}(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0}$.

A corrente $J_N^+(Q^2)$, obtida da Lagrangeana efetiva, considerando a completa anti-simetria dos elementos de matriz da corrente, apresenta 5 diagramas topologicamente distintos que se reduzem a 4, apresentados na Fig.(4.1).

Em todos os diagramas o quark 3 é o quark que absorve o momento transferido pelo fóton. A Fig.(1a) define o operador de spin J_{aN}^+ e representa o par de quarks 1 e 2 acoplados. Na Fig.(1b) o par de quarks acoplados no estado inicial do núcleon é o par (1-3) e o par

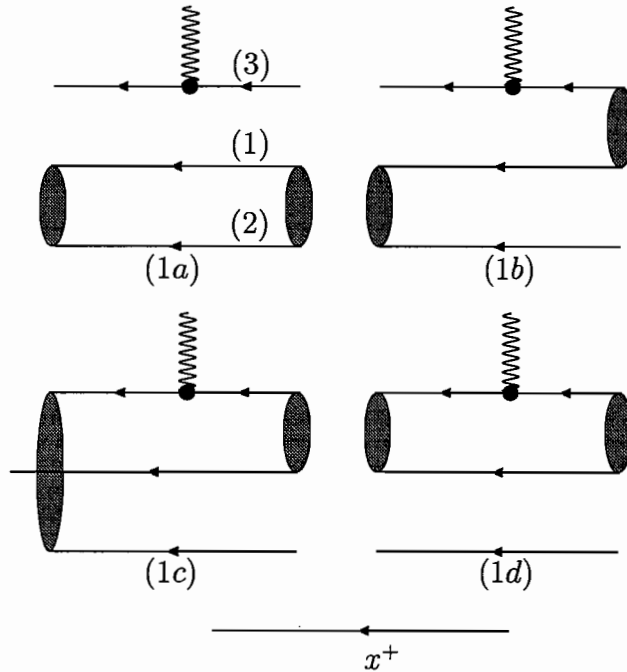


Figura 4.1: Diagramas de Feynman para corrente do núcleon. A "bolha" representa o invariante de spin para o par acoplado na Lagrangeana efetiva, Eq. (4.1).

de quarks acoplados no estado final do núcleon é o par (1-2). O operador J_{bN}^+ representado pelo diagrama (1b) deve ser multiplicado por um fator 4. Um fator 2 vem da troca dos quarks 1 e 2, que são indistinguíveis mediante essa troca, e o outro fator 2 que vem da troca dos pares na função de onda do núcleon inicial e final, devido à transformação por inversão temporal e de paridade. O operador J_{cN}^+ é representado pela figura (1c), onde inicialmente o par acoplado é par(1-3) e na função de onda final o par acoplado para esse diagrama é o par (2-3). Esse operador é multiplicado por um fator 2, pois os quarks 1 e 2 podem ser trocados. O operador representado pelo diagrama (1d), J_{dN} corresponde ao processo no qual o fóton é absorvido pelo diquark formado pelos quarks (1-3) enquanto o quark 2 é o espectador .

Nesse caso também temos um fator 2 pela possível troca dos quarks 1 e 2. Assim o operador microscópico da corrente do núcleon é dado por

$$J_N^+(Q^2) = J_{aN}^+(Q^2) + 4J_{bN}^+(Q^2) + 2J_{cN}^+(Q^2) + 2J_{dN}^+(Q^2). \quad (4.4)$$

Os operadores de corrente do núcleon J_{iN}^+ ($i = a, b, c, d$) são construídos diretamente dos diagramas de Feynman da Fig.(4.1). O campo eletromagnético tem o acoplamento mínimo usual assegurando a invariância de calibre. Para o diagrama (1a) temos

$$\begin{aligned} \langle s' | J_{aN}^+(Q^2) | s \rangle = & -\langle N | \hat{Q}_q | N \rangle Tr [\tau_2 (-i) \tau_2] \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} \Lambda(k_i, p') \Lambda(k_i, p) \bar{u}(p', s') S(k'_3) \gamma^+ \\ & \times S(k_3) u(p, s) Tr \left[S(k_2) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) \gamma^5 S_c(k_1) \gamma^5 (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') \right], \quad (4.5) \end{aligned}$$

com $S(p) = \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon}$, e $S_c(p) = \left[\gamma^0 \gamma^2 \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \gamma^0 \gamma^2 \right]^T$. m é a massa do quark constituente e $k'_3 = k_3 + Q$. O operador de carga é definido como

$$\hat{Q}_q = \frac{1}{6} + \frac{\tau_z}{2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

$\Lambda_N(k_i, p)$ é uma função radial no espaço dos momentos. Na proxima secção, relativa aos resultados numéricos, especificaremos explicitamente a forma dessa função, bem como sua importância nos fatores de forma eletromagnéticos, através componente de momento da função de onda.

O diagrama (1b) é dado por

$$\begin{aligned} \langle s' | J_{bN}^+(Q^2) | s \rangle = & -\langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} \Lambda(k_i, p') \Lambda(k_i, p) \bar{u}(p', s') S(k'_3) \gamma^+ S(k_3) \\ & \times (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) \gamma^5 S_c(k_1) \gamma^5 (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') S(k_2) u(p, s). \quad (4.7) \end{aligned}$$

O diagrama (1c) é dado por

$$\begin{aligned} \langle s' | J_{cN}^+(Q^2) | s \rangle = & \langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} \Lambda(k_i, p') \Lambda(k_i, p) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) \\ & \times \gamma^5 S_c(k_3) \gamma^+ S_c(k'_3) \gamma^5 (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') S(k_2) u(p, s). \quad (4.8) \end{aligned}$$

E o diagrama (1d) é dado por

$$\begin{aligned} \langle s' | J_{dN}^+(Q^2) | s \rangle = & -Tr [\hat{Q}_q] \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} \Lambda(k_i, p') \Lambda(k_i, p) \bar{u}(p', s') S(k_2) u(p, s) \\ & \times Tr \left[\gamma^5 (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') S(k'_3) \gamma^+ S(k_3) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) \gamma^5 S_c(k_1) \right]. \quad (4.9) \end{aligned}$$

4.3 Integração Analítica em k^-

A integração na energia é feita nas coordenadas da Frente de Luz, definidas Capítulo 2. Em cada termo da corrente do núcleon, de J_{aN} até J_{dN} , as integrações são realizadas nas coordenadas de momento k_1^- e k_2^- . Isso significa que os pólos dos propagadores das partículas espectadoras, no processo de absorção do fóton, irão colocar essas partículas em suas "camadas de energia", após a integração analítica nas coordenadas k^- , como discutiremos em detalhe. No referencial de Breit com $Q^+ = 0$, pode não haver a supressão dos diagramas Z, dependendo do tipo de acoplamento, como vimos no capítulo anterior. Aqui não trataremos da contribuição de pares para a corrente J_N^+ . No entanto, a discrepância do modelo em relação aos dados experimentais, como mostraremos no próximo capítulo, pode indicar também a necessidade de um modelo covariante, onde naturalmente as contribuições do processo de produção de par são consideradas. Entretanto, chamamos a atenção da proximidade do cálculo da corrente eletromagnética baseado em diagramas de Feynman, em relação ao resultado covariante, o que se perde quando a corrente é obtida pela construção da função de onda segundo B.T. . As contribuições em ordem mais alta do espaço de Fock do processo como um todo, estão presentes nas integrações analíticas em k^- , se levarmos em consideração outros pólos provenientes de outras regiões em k^+ , no limite $Q^+ \rightarrow 0$. No capítulo anterior, vimos que, considerando inicialmente Q^+ diferente de zero, no limite $Q^+ \rightarrow 0$, obtivemos a contribuição de par e o restabelecimento da covariância que é perdida quando desprezamos estes termos.

A integração analítica nas corrente eletromagnéticas $J_{aN}^+ - J_{dN}^+$ é feita na coordenada de energia na Frente de Luz dos quarks 1 e 2. Vamos fazer em detalhe a integração analítica da corrente J_{aN}^+ . Escolhendo a primeira integração em k_1^- na Eq.(4.5) temos

$$\begin{aligned}
 \langle s' | J_{aN}^+ | s \rangle = & 2 \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \int \frac{dk_1^- dk_1^+ d^2 \vec{k}_{1\perp} d^4 k_2}{4(2\pi)^8 k_1^+ k_2^+ k_3^+} \times \\
 & \frac{\Lambda(k_i, p') \Lambda(k_i, p) u(p', s') (\not{k}_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) u(p, s)}{[p^- - k_1^- - k_2^- - \frac{\vec{k}_{3\perp}^2 + m^2 - i\epsilon}{p^+ - k_1^+ - k_2^+}]] [p^- - k_1^- - k_2^- - \frac{\vec{k}_{3\perp}^2 + m^2 - i\epsilon}{p^+ - k_1^+ - k_2^+}]]} \times \\
 & \frac{Tr[(\not{k}_2 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) \gamma^5 [\gamma^0 \gamma^2 (\not{k}_1 + m) \gamma^0 \gamma^2] \gamma^5 (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}')] }{(k_1^- - \frac{\vec{k}_{1\perp}^2 + m^2 - i\epsilon}{k_1^+})(k_2^- - \frac{\vec{k}_{2\perp}^2 + m^2 - i\epsilon}{k_2^+})}. \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Como o referencial no qual estamos fazendo essa integração é o referencial de Breit , com a condição de Drell-Yan, então $p'^+ = p^+$ e $p'^- = p^-$. As possíveis contribuições de acordo com os valores assumidos por k_1^+ são:

$$\text{I) } k_1^+ < 0 \text{ e } p^+ - k_1^+ - k_2^+ < 0$$

$$\text{Ia) } k_2^+ > 0;$$

$$\text{Ib) } k_2^+ < 0.$$

$$\text{II) } k_1^+ > 0 \text{ e } p^+ - k_1^+ - k_2^+ > 0;$$

$$\text{IIa) } k_2^+ > 0;$$

$$\text{IIb) } k_2^+ < 0.$$

A posição dos pólos na Eq.(4.10) de acordo as situações I) e II) é apresentada no diagrama abaixo, na integração em k_1^-

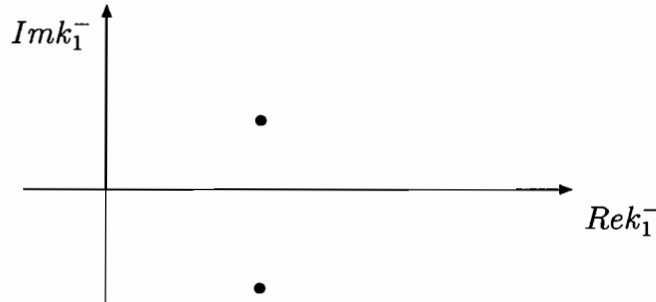


Figura 4.2: Posição dos pólos em k_1^- do integrando da Eq.(4.10) para as situações I) e II).

A situação I e Ia) tem, em princípio, a possibilidade para que a integral nos momentos "—" seja diferente de zero. Porém na integração em k_2^- onde temos os pólos no mesmo semi-plano, de acordo com a Fig.(4.3) implica em que as condições I) e Ia) tem contribuição nula para a integral Eq(4.10).

A situação I) e Ib) são incompatíveis pois: $k_1^+ < 0$ e $k_2^+ < 0$ contradiz $p^+ - k_1^+ < k_2^+$. Na

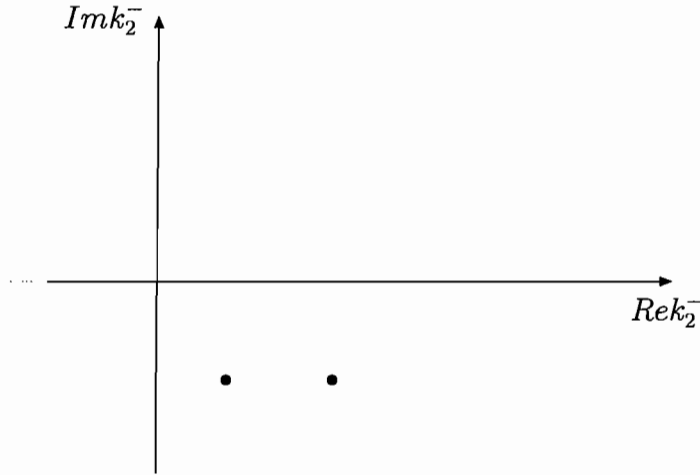


Figura 4.3: Posição dos pólos em k_2^- do integrando da Eq.(4.10) após a integração em k_1^- , para as situações I) e Ia).

situação II) e IIb) temos uma situação análoga à situação I) e Ib), com a diferença de que os pólos localizar-se-ão no semi-plano superior:

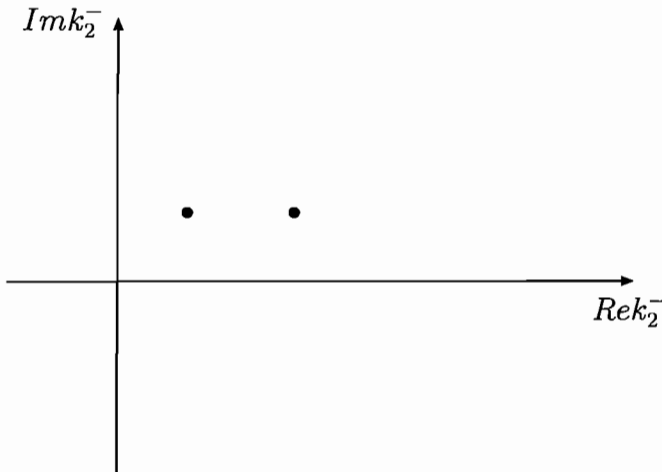


Figura 4.4: Posição dos pólos em k_2^- do integrando da Eq.(4.10), após a integração em k_1^- , para as situações II) e IIb).

Por fim, a situação II) e IIa) é a que apresenta contribuição de pólos na integração de Cauchy em k_1^- e k_2^- . Ou seja, considerando $k_1^+ > 0$, $k_2^+ > 0$ e $p^+ - k_1^+ - k_2^+ > 0$, concluímos que, fazendo $p^+ > k_1^+ > 0$, então $p^+ - k_1^+ > k_2^+ > 0$. Da integral, Eq.(4.10), temos

$$\begin{aligned}
 \langle s' | J_{aN}^+ | s \rangle &= 2i \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \int \frac{dk_1^+ d^2 \vec{k}_{1\perp} dk_2^+ d^2 \vec{k}_{2\perp}}{4(2\pi)^6 k_1^+ k_2^+ k_3^{+2}} \times \\
 &u(p', s') (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) u(p, s) \times \\
 &Tr(\not{k}_2 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) \gamma^5 [\gamma^0 \gamma^2 (\not{k}_1 + m) \gamma^0 \gamma^2] \gamma^5 (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') \times
 \end{aligned}$$

$$\frac{\Lambda(k_i, p')\Lambda(k_i, p)\theta(p^+ - k_1^+)\theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+)}{[p^- - \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{k}_i^2 + m^2}{k_i^+}][p^- - \frac{\vec{k}_1^2 + m^2}{k_1^+} - \frac{\vec{k}_2^2 + m^2}{k_2^+} - \frac{\vec{k}_3^2 + m^2}{k_3^+}]} \quad (4.11)$$

Colocando os denominadores dos propagadores inicial e final em termos da massa do núcleon e massa livre, e efetuando a álgebra para eliminar o operador transposto, temos que

$$\begin{aligned} \langle s' | J_{aN}^+ | s \rangle &= 2i \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \int \frac{dk_1^+ d^2 \vec{k}_{1\perp} dk_2^+ d^2 \vec{k}_{2\perp}}{k_1^+ k_2^+ k_3^+} \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \times \\ &Tr(\not{k}_2 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') \Psi(M_0) \Psi(M'_0) \times \\ &u(p', s') (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) u(p, s), \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \Psi(M_0) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \frac{\Lambda(k_i, p)}{(m_N^2 - M_0^2)}, \quad \Psi(M'_0) = \frac{\Lambda(k_i, p')}{2(2\pi)^3 (m_N^2 - M_0'^2)} e \\ M_0^2 &= p^+ \left(\frac{k_{1\perp}^2 + m^2}{k_1^+} + \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{k_2^+} + \frac{k_{3\perp}^2 + m^2}{k_3^+} \right) - p_\perp^2, \end{aligned}$$

$$M_0'^2 = M_0^2 (k_3 \rightarrow k'_3, \vec{p}_\perp \rightarrow \vec{p}'_\perp).$$

A expressão Eq.(4.12) é dependente apenas dos momentos cinemáticos da Frente de Luz, uma vez que ela é o resultado da integração nos momentos k_1^- e k_2^- . Os momentos k_1^μ e k_2^μ estão todos em suas respectivas "camadas de energia" —, isto é, $k_i^- = \frac{\vec{k}_{i\perp}^2 + m^2}{k_i^+}$ $i = 1, 2$. A partir daqui seria possível usar as propriedades das transformações cinemáticas e verificar que obtemos explicitamente expressões que são covariantes por essas transformações. Para obtermos as outras correntes, $J_{bN}^+ - J_{dN}^+$, seguimos o mesmo procedimento usado para J_{aN}^+ . Após a integração em k^- , elas resultam em

$$\begin{aligned} \langle s' | J_{bN}^+(Q^2) | s \rangle &= p^{+2} \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \int \frac{d^2 k_{1\perp} dk_1^+ d^2 k_{2\perp} dk_2^+}{4(2\pi)^6 k_1^+ k_2^+ k_3^+} \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \\ &\bar{u}(p', s') (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m) \\ &\times (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_2 + m) u(p, s) \Psi(M_0) \Psi(M'_0), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \langle s' | J_{cN}^+(Q^2) | s \rangle &= p^{+2} \langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle \int \frac{d^2 k_{1\perp} dk_1^+ d^2 k_{2\perp} dk_2^+}{4(2\pi)^6 k_1^+ k_2^+ k_3^+} \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \\ &\bar{u}(p', s') (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_3 + m) \gamma^+ (\not{k}'_3 + m) \\ &\times (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_2 + m) u(p, s) \Psi(M_0) \Psi(M'_0), \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
\langle s' | J_{dN}^+(Q^2) | s \rangle &= p^{+2} Tr[\hat{Q}_q] \int \frac{d^2 k_{1\perp} dk_1^+ d^2 k_{2\perp} dk_2^+}{4(2\pi)^6 k_1^+ k_2^+ k_3^+} \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \\
&\quad Tr \left[(\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m) \right] \\
&\quad \bar{u}(p', s') (\not{k}_2 + m) u(p, s) \Psi(M_0) \Psi(M'_0). \tag{4.15}
\end{aligned}$$

4.4 Acoplamento do Spin dos Quarks

Semelhantemente ao que foi feito no capítulo 2, mostramos na secção anterior que os resíduos nas integrais do diagrama triangular de Feynman são determinados nos pólos das partículas espectadoras, que após a integração em k^- estão em suas "camadas de energia". Porém, observemos que $(\not{k}_3 + m) \neq (\not{k}_3^* + m)$. O numerador do propagador fermiônico do quark que absorve o fóton, apesar de não estar em sua "camada de energia" pode ser considerado estar em sua "camada de energia", pois $(\gamma^+)^2 = 0$. Ou seja,

$$(\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) = (\not{p}' - \not{k}_1^* - \not{k}_2^* + m) \gamma^+ (\not{p}^* - \not{k}_1^* - \not{k}_2^* + m), \tag{4.16}$$

onde k_i^* é o momento do quark em sua "camada de energia". Porém, pela Eq.(4.16), usando as coordenadas da Frente de Luz, segue que

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \gamma^-}{2} - (\vec{p}'_{\perp} - \vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp}) \cdot \vec{\gamma}_{\perp} + m \right] \gamma^+ \times \\
& \left[\frac{(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \gamma^-}{2} - (\vec{p}_{\perp} - \vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp}) \cdot \vec{\gamma}_{\perp} + m \right] \\
& = [(\not{p}' - \not{k}_1 - \not{k}_2)^* + m] \gamma^+ (\not{p} - \not{k}_1 - \not{k}_2)^* + m = (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m). \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Agora, considerando Eq.(4.17), podemos substituir todos os numeradores fermiônicos pelos projetores nos estados de energia positiva, escrito em termos dos spinores de energia positiva na Frente de Luz. Os projetores são escritos como

$$\frac{\not{k}_i + m}{2m} = \sum_{i=1}^2 u_i \bar{u}_i, \tag{4.18}$$

onde $u_i \equiv u(k_i, s_i)$, $i = 1, 2, 3, 3'$.

Substituindo a Eq.(4.18) em J_{aN}^+ , Eq.(4.11), temos no integrando dessa corrente que

$$\begin{aligned}
& \bar{u}_{N'}(\not{k}_3 + m)\gamma^+(\not{k}_3 + m)u_N \text{Tr}[(\not{k}_2 + m)(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p})\gamma^5[\gamma^0\gamma^2(\not{k}_1 + m)\gamma^0\gamma^2]^\top \times \\
& \gamma^5(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p}')] \times \\
& = (2m)^4 \sum_{s_1 s_2 s_3 s'_3} \bar{u}_{N'}u_{3'}\bar{u}_{3'}\gamma^+u_3u_N \text{Tr}[u_2\bar{u}_2(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p})[\gamma^0\gamma^2u_1\bar{u}_1\gamma^0\gamma^2]^\top \times \\
& \gamma^5(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p}')] \\
& = (2m)^4 \sum_{s_1 s_2 s_3 s'_3} \bar{u}_{N'}u_{3'}\bar{u}_1^c\gamma^5(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p}')u_2\delta_{s_3 s'_3}\bar{u}_2 \times \\
& (\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p})\gamma^5u_1^c\bar{u}_3u_N, \tag{4.19}
\end{aligned}$$

onde denotamos $u_N \equiv u(p, s)$ e $u_{N'} \equiv u(p', s')$. A expressão Eq.(4.19) mostra o par acoplado no núcleon antes e depois da interação do quark 3 com o fóton. Na Eq.(4.19) podemos distinguir os elementos de matriz no espaço spinorial, que corresponde ao acoplamento dos spins individuais dos quarks formando o núcleon. Por exemplo, a função

$$\chi(s_1, s_2, s_3; s_N) = \bar{u}_2(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p})\gamma^5u_1^c\bar{u}_3u_N \tag{4.20}$$

é o resultado do acoplamento dos campos dos quarks ao campo do núcleon inicial, como expresso pela Lagrangeana efetiva da Eq.(4.1). Considerando que a rotação de Wigner é a unidade podemos avaliar a Eq.(4.20) no referencial de repouso do núcleon, obtido do referencial de Breit por meio de uma transformação cinemática, mudando apenas os valores dos momentos individuais. Esta discussão será estendida a seguir, com o objetivo de interpretar fisicamente a Eq.(4.20).

O elemento de matriz do par acoplado a spin zero, da Eq.(4.20) é dado por

$$I(s_2, s_1, 0) = \bar{u}(k_2, s_2)(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p})\gamma^5u(k_1 s_1). \tag{4.21}$$

Na Eq.(4.21), os argumentos dos spinores dos quarks foram escritos explicitamente, pois, o que interessa é a influência das transformações cinemáticas em tais argumentos. Porém vamos analisar separadamente o caso $\alpha = 1$ (acoplamento escalar) e $\alpha = \frac{1}{2}$ (acoplamento misto).

4.4.1 Acoplamento Escalar

O elemento de matriz $N - 3q$ para o acoplamento escalar, da Eq(4.20), é escrito como¹

$$\chi_E(s_1, s_2, s_3; s_N) = \bar{u}_1 \gamma^5 u_2^c \bar{u}_3 u_N. \quad (4.22)$$

O elemento de matriz no espaço spinorial, associado ao acoplamento de spins dos quarks do par na Eq.(4.22), é escrito como

$$I_E(s_1, s_2, 0) = \bar{u}(k_1, s_1) \gamma^5 u^c(k_2, s_2). \quad (4.23)$$

Consideremos uma transformação cinemática tal que mude o referencial de repouso do núcleo para o referencial do centro de massa do par acoplado:

$$\begin{aligned} I_E(s_1, s_2, 0) &= i[U(L_f)u(k_1^{cm}, s_1)]^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 [U(L_f)u(k_2^{cm}, s_2)]^\dagger]^\top \\ &= -iu^\dagger(k_1^{cm}, s_1) U^\dagger(L_f) \gamma^0 \gamma^5 \gamma^2 [U^\dagger(L_f)]^\top [u^\dagger(k_2^{cm}, s_2)]^\top, \end{aligned} \quad (4.24)$$

e usando que $U^\dagger(L_f) \gamma^0 \gamma^5 \gamma^2 [U^\dagger(L_f)]^\top = \gamma^0 \gamma^5 \gamma^2$, obtido transpondo a Eq.(3.27):

$$I_E(s_1, s_2, 0) = \bar{u}(k_1^{cm}, s_1) \gamma^5 u^c(k_2^{cm}, s_2). \quad (4.25)$$

O referencial no qual o par se encontra é o referencial de centro de massa do par acoplado. $k_i^{cm} = (k_i^{+cm}, \mathbf{k}_{i\perp}^{cm})$ é o momento cinemático das partículas 1 ou 2, no referencial de repouso do par 12, $k^{(cm)\mu} = (\Lambda k)^\mu$. O momento da partícula no referencial de repouso do par é obtido pela transformação cinemática do referencial de repouso do núcleo para o referencial de centro de massa do par acoplado. Introduzindo a relação de completude para os spinores de Dirac de energia positiva na Eq.(4.25), temos

$$\begin{aligned} I(s_1, s_2, 0) &= \sum_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} \bar{u}(\vec{k}_1^{c.m.}, s_1) u_D(\vec{k}_1^{c.m.}, \bar{s}_1) \bar{u}_D(\vec{k}_1^{c.m.}, \bar{s}_1) \\ &\quad \gamma^5 C \bar{u}_D^\top(\vec{k}_2^{c.m.}, \bar{s}_2) \left(\bar{u}(\vec{k}_2^{c.m.}, s_2) u_D(\vec{k}_2^{c.m.}, \bar{s}_2) \right)^\top. \end{aligned} \quad (4.26)$$

¹Nas eq.(4.22) e (4.23) redefinimos os elementos de matriz não levando em conta o fator m_N e α , trocamos também os subíndices $1 \leftrightarrow 2$

Na Eq.(4.26) identificamos o coeficiente de Clebsch-Gordan. Ou seja

$$\begin{aligned}
\bar{u}_D(\vec{k}_1^{c.m.}, \bar{s}_1) \gamma^5 C \bar{u}_D(\vec{k}_2^{c.m.}, \bar{s}_2) &= u_D^\dagger(k_1^{cm}, \bar{s}_1) \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 [u_D^\dagger(k_2^{cm}, \bar{s}_2)]^\top \\
&= i(\chi_{\bar{s}_1}^\dagger \ 0) \frac{(\not{k}_1 + m)^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 [(\not{k}_2 + m)^\dagger]^\top}{\sqrt{4m^2(k_1^0 + m)(k_2^0 + m)}} \begin{pmatrix} \chi_{\bar{s}_2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= i(\bar{\chi}_{\bar{s}_1} \ 0) \frac{(\not{k}_1 + m)(\not{k}_2 + m) \gamma^0 \gamma^2 \gamma^5 \gamma^0}{\sqrt{4m^2(k_1^0 + m)(k_2^0 + m)}} \begin{pmatrix} \chi_{\bar{s}_2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= i(\bar{\chi}_{\bar{s}_1} \ 0) \frac{(k^0 \gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma} + m)(k^0 \gamma^0 + \vec{k} \cdot \vec{\gamma} + m) \gamma^0 \gamma^2 \gamma^5}{2m(k^0 + m)} \begin{pmatrix} \chi_{\bar{s}_2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= i(\bar{\chi}_{\bar{s}_1} \ 0) \gamma^0 \gamma^2 \gamma^5 \begin{pmatrix} \chi_{\bar{s}_2} \\ 0 \end{pmatrix} \langle \bar{s}_1 | \sigma_2 | \bar{s}_2 \rangle \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Observemos na Eq.(4.27) que a igualdade ao coeficiente de Clebsch-Gordan foi encontrada no centro de massa par, isto é, $\vec{k}_1^{c.m.} = -\vec{k}_2^{c.m.} = \vec{k}$. Usando a definição de rotação de Melosh, Eq.(A.21) na Eq.(4.22), com auxílio das Eqs.(4.26) e (4.27), obtemos a forma do acoplamento de spins individuais dos quarks no núcleon:

$$\begin{aligned}
\chi_E(s_1, s_2, s_3; s_N) &= i \sum_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} \langle s_1 | R_M^\dagger(k_1^{cm}) | \bar{s}_1 \rangle \langle \bar{s}_1 | \sigma_2 | \bar{s}_2 \rangle \\
&\quad \times \langle \bar{s}_2 | [R_M^\dagger(k_2^{cm})]^\top | s_2 \rangle \bar{u}_3 u_N \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Explicitamos a rotação Melosh no termo $\bar{u}_3 u_N$ avaliando este elemento de matriz do operador unidade entre o spinor da Frente de Luz do quark e o spinor do núcleon no referencial de repouso:

$$\bar{u}_3 u_N = \bar{u}(k_3^{cm_N}, s_3) \frac{1 + \gamma^0}{2} \begin{pmatrix} \chi_{s_N} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Introduzindo a relação de completeza dos spinores de Dirac de energia positiva para o quark 3, temos

$$\begin{aligned}
\bar{u}_3 u_N &= \sum_{\bar{s}_3} \bar{u}(k_3^{cm_N}, s_3) u_D(k_3^{cm_N}, \bar{s}_3) \bar{u}_D(k_3^{cm_N}, \bar{s}_3) \frac{1 + \gamma^0}{2} \begin{pmatrix} \chi_{s_N} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{\frac{k_3^{0cm_N} + m}{2m}} \sum_{\bar{s}_3} \langle s_3 | R_M^\dagger(k_3^{cm_N}) | \bar{s}_3 \rangle \delta_{\bar{s}_3 s_N}. \quad (4.30)
\end{aligned}$$

A substituição da Eq(4.30) na Eq.(4.28) resulta em

$$\begin{aligned} \chi_E(s_1, s_2, s_3; s_N) &= i\sqrt{\frac{k_3^{0cm_N} + m}{2m}} \sum_{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3} \langle s_1 | R_M^\dagger(k_1^{cm}) | \bar{s}_1 \rangle \langle \bar{s}_1 | \sigma_2 | \bar{s}_2 \rangle \\ &\quad \times \langle s_2 | R_M^\dagger(k_2^{cm}) | \bar{s}_2 \rangle \langle s_3 | R_M^\dagger(k_3^{cm_N}) | \bar{s}_3 \rangle \delta_{\bar{s}_3 s_N}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde o coeficiente de Chebsh-Gordan referente ao acoplamento dos spins dos quarks individuais é $C_{s_N \bar{s}_3 0}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} C_{0 \bar{s}_1 \bar{s}_2}^{0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}} = \delta_{\bar{s}_3 s_N} i \langle \bar{s}_1 | \sigma_2 | \bar{s}_2 \rangle$.

Ressaltamos na Eq.(4.31) os argumentos de momento nas rotações de Melosh de cada quark. Aqueles momentos cujo índice é cm , referem-se ao referencial de repouso do par acoplado dos quarks 12. O quark 3 cujo índice é cm_N , indica que seu referencial é o centro de massa do núcleo. A seguir analisamos o caso $\alpha = \frac{1}{2}$ e faremos uma comparação posterior entre $\alpha = 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$ no acoplamento $N - 3q$.

4.4.2 Acoplamento Misto

Com $\alpha = \frac{1}{2}$ na Eq(4.20) obtemos

$$\chi_M(s_1, s_2, s_3; s_N) = \bar{u}_1(\not{p} + m_N) \gamma^5 u_2^c \bar{u}_3 u_N. \quad (4.32)$$

A expressão para o par acoplado com invariante misto é escrita como

$$I_M(s_1, s_2, 0) = \bar{u}(k_1, s_1) (\not{p} + m_N) \gamma^5 u^c(k_2, s_2). \quad (4.33)$$

Lembramos que na Eq.(4.32) temos dois invariantes de Lorentz nos quais realizamos transformações cinemáticas na Eq.(4.19), definida no referencial de Breit, para o referencial de repouso do núcleo. Portanto calculamos a Eq.(4.33) da seguinte forma:

$$I_M(s_1, s_2, 0) = 2m_N \bar{u}(k_1^{cm_N}, s_1) \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^5 u^c(k_2^{cm_N}, s_2). \quad (4.34)$$

Inserindo os projetores de Dirac de energia positiva temos

$$\begin{aligned} I_M(s_1, s_2, 0) &= 2m_N \sum_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} \bar{u}(k_1^{cm_N}, s_1) u_D(k_1^{cm_N}, \bar{s}_1) \bar{u}_D(k_1^{cm_N}, \bar{s}_1) \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^5 \\ &\quad \times i \gamma^0 \gamma^2 \bar{u}(k_2^{cm_N}, s_2) [u_D(k_2^{cm_N}, \bar{s}_2) \bar{u}_D(k_2^{cm_N}, \bar{s}_2)]^\top \\ &= 2m_N \sum_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} \langle s_1 | R_M^\dagger(k_1^{cm_N}) | \bar{s}_1 \rangle \bar{u}_D(k_1^{cm_N}, \bar{s}_1) \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^5 \\ &\quad \times i \gamma^0 \gamma^2 \bar{u}_D^\top(k_2^{cm_N}, \bar{s}_2) \langle s_2 | R_M^\dagger(k_2^{cm_N}) | \bar{s}_2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Calculamos o termo central da Eq.(4.35)

$$\begin{aligned} \bar{u}_D(k_1^{cmN}, \bar{s}_1) \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^5 \gamma^0 \gamma^2 \bar{u}_D^\dagger(k_2^{cmN}, \bar{s}_2) &= (\chi^\dagger \ 0) \frac{(k_1^{cmN} + m)}{2m(k_1^0 + m)} \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^5 \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \\ &\times \frac{[(k_2^{cmN} + m)^\dagger]^\top}{\sqrt{2m(k_2^0 + m)}} \begin{pmatrix} \chi_{\bar{s}_2} \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{k_1^0 + m}{2m}} \sqrt{\frac{k_2^0 + m}{2m}} (\chi_{\bar{s}_1}^\dagger \ 0) \gamma^5 \gamma^2 \begin{pmatrix} \chi_{\bar{s}_2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Substituindo as matrizes γ^5 e γ^2 pelas suas expressões em termos de matrizes de Pauli na Eq.(4.36) obtemos:

$$u_D(k_1^{cmN}, \bar{s}_1) \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^5 \gamma^0 \gamma^2 \bar{u}_D^\dagger(k_2^{cmN}, \bar{s}_2) = \sqrt{\frac{(k_1^0 + m)(k_2^0 + m)}{2m}} \langle \bar{s}_1 | \sigma_2 | \bar{s}_2 \rangle. \quad (4.37)$$

Observemos que na Eq.(4.33) foi necessário a realização de uma transformação cinemática para o centro de massa do núcleon, uma vez que apenas nesse referencial obtemos o coeficiente de Clebsch-Gordan para o acoplamento misto. Porém, poderíamos efetuar uma transformação cinemática para um outro referencial qualquer, por exemplo para o referencial de centro de massa do par acoplado. Isto é possível! No entanto, esse referencial é diferente do referencial de repouso do núcleon, e portanto não resultaria a simplificação do invariante misto para projetor $\frac{1+\gamma^0}{2}$, mas em uma outra expressão dependente do momento do núcleon.

Das Eqs.(4.32),(4.35) e (4.37), o acoplamento misto produz o seguinte elemento de matriz para o acoplamento $N - 3q$:

$$\begin{aligned} \chi(s_1, s_2, s_3; s_N) &= 2im_N \sqrt{\frac{(k_1^0 + m)(k_2^0 + m)}{2m}} \sum_{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3} \langle s_1 | R_M^\dagger(k_1^{cmN}) | \bar{s}_1 \rangle \\ &\langle \bar{s}_1 | \sigma_2 | \bar{s}_2 \rangle \langle \bar{s}_2 | R_M^\dagger(k_2^{cmN}) | s_2 \rangle \langle s_3 | R_M^\dagger(k_3^{cmN}) | \bar{s}_3 \rangle \delta_{s_3 s_N}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Discutiremos na próxima secção a comparação entre os acoplamentos escalar, misto e o resultante do esquema B.T. para o núcleon.

4.5 Bakamjian-Thomas versus Feynman

No acoplamento $N - 3q$ identificamos que a função de onda da parte de spin do núcleon, Eq.(4.38), para o acoplamento misto é semelhante à construção de B.T., Eq.(C.11)(apêndice

C). A diferença entre a função de onda de spin obtida na construção B.T., Eq.(C.11), e a função de spin para o acoplamento misto, Eq.(4.38), vem do fato de que os momentos dos quarks individuais nos argumentos das rotações de melosh estão definidos em referenciais diferentes. Na construção B.T., o referencial escolhido é o centro de massa do sistema de três quarks livres, enquanto que no acoplamento misto o referencial é o de repouso do núcleon. Portanto, na construção B.T., o momento "+" dos quarks individuais tem como soma no referencial de centro de massa, M_0 (a massa livre do sistema de três partículas). No caso acoplamento misto a soma dos momentos "+" individuais é igual à m_N no referencial de repouso do núcleon. Neste último caso, a rotação de Melosh do estado de spin de um quark é dada por

$$R_M(k_i^{cm_N}) = \frac{x_i p_{cm_N}^+ + m - i\vec{n} \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{k}_{i\perp}^{cm_N})}{\sqrt{(x_i p_{cm_N}^+ + m)^2 - k_{i\perp}^{2cm_N}}} = \frac{x_i m_N + m - i\vec{n} \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{k}_{i\perp}^{cm_N})}{\sqrt{(x_i m_N + m)^2 - k_{i\perp}^{2cm_N}}} \quad (4.39)$$

Por outro lado, $\alpha = 1$ (acoplamento escalar) mostra também diferenças qualitativas relevantes em relação ao caso $\alpha = \frac{1}{2}$. Comparando as Eqs.(4.31) e (4.38), observamos na primeira que os argumentos das rotações de Melosh dos quarks 1 e 2 estão identificados pelo índice cm , enquanto que o quark 3 tem seu respectivo momento na rotação de Melosh, sendo identificado pelo índice cm_N . Ou seja, os quarks cujos momentos tem índice cm são aqueles definidos no centro de massa do par acoplado. O momento do quark identificado com índice cm_N está definido no referencial de repouso do núcleon. Em síntese, no acoplamento escalar os quarks que formam o par acoplado tem rotações de Melosh com os argumentos no centro de massa do par; a rotação de Melosh do spin do terceiro quark tem o argumento de momento definido no centro de massa do núcleon. Nas rotações de Melosh do par aparece a massa livre do diquark (M_{12}), enquanto que para o terceiro quark é válida a Eq.(4.39) com a massa física do núcleon. Ou seja, para o par acoplado temos

$$R_M(k_i^{cm}) = \frac{x_i P_{12}^+ + m - i\vec{n} \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{k}_{i\perp}^{cm})}{\sqrt{(x_i P_{12}^+ + m)^2 - \vec{k}_{i\perp}^{2cm}}} = \frac{x_i M_{12} + m - i\vec{n} \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{k}_{i\perp}^{cm})}{\sqrt{(x_i M_{12} + m)^2 - \vec{k}_{i\perp}^{2cm}}} \quad (4.40)$$

Como discutido na Eq.(4.38), todas rotações de Melosh dos quarks tem seus argumentos de momento definidos no referencial de repouso do núcleon. Eles são identificados com o índice cm_N . O momento total é p^+ , e, no referencial de repouso do núcleon $p_{cm_N}^+ = m_N$,

Eq.(4.39). Portanto a diferença nos acoplamentos escalar e misto está em que no primeiro os argumentos de momento das rotações de Melosh estão definidos no centro de massa do par acoplado, para os quarks 1 e 2, e, para o terceiro quark, o argumento de momento na rotação de Melosh está definido no centro de massa do núcleon. No acoplamento misto todos os argumentos de momento das rotações de Melosh estão definidos no referencial de repouso do núcleon.

Por fim, cabe aqui comentar que a Lagrangeana da Eq.(4.1) poderia ter seus pesos definidos de outra maneira, tal que o acoplamento resultasse no invariante $\not{p} - m_N$. Essa nova possibilidade acarretaria numa projeção do par na pequena componente dos spinores de Dirac. Em outras palavras, a transformação cinemática para o referencial de repouso do núcleon resultaria no projetor de energia negativa no espaço de Dirac $\frac{1-\gamma^0}{2}$. Ele projetaria nas componentes de baixo do spinor, dando termos proporcionais ao momento no acoplamento do par que compõe o diquark que, portanto, desaparecem no limite não relativístico. No capítulo referente aos resultados numéricos apresentamos cálculos com essa possibilidade, e que de fato mostram um forte desvio das predições não relativísticas do modelo de quarks.

Observemos que os fatores de forma relativos às correntes $J_{aN}^+ - J_{dN}^+$ do núcleon consistem de uma parte dependente do acoplamento de spins² e outra parte dependente de uma componente de momento da função onda

$$\Psi(M_0) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \frac{\Lambda(k_i, p)}{m_N^2 - M_0^2}. \quad (4.41)$$

Os fatores de forma eletromagnéticos escritos em função de Ψ , correspondentes às correntes J_{iN}^+ ($i = a, b, c, d$), Eq.s(4.12) à (4.15), são dados nas Eq.s(D.10) e (D.11). A função de onda Ψ poderia ser escolhida como uma função de onda do tipo Faddeev. A Ref.[54] apresenta um modelo para o próton, usando a função de onda do tipo Faddeev, sem a inclusão do grau de liberdade de spin. Essa seria uma possível forma para a componente de momento da função de onda Ψ . Apesar dessa função de onda não ser confinante, essa função é motivada no modelo do tipo Nambu-Jona-Lasinio[9], onde as massas dos quarks constituintes são explicados através da quebra de simetria quiral[55]. Entretanto, as formas para Ψ

²O detalhamento da obtenção dos fatores de forma de Dirac e de Pauli é apresentado no apêndice E.

fenomenológicas que adotaremos a seguir serão do tipo gaussiana e polinomial[24, 34, 70]. O próximo capítulo explorará essas possíveis formas de Ψ no cálculo dos fatores de forma eletromagnéticos do núcleon.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

Neste capítulo apresentamos os resultados numéricos relativos às propriedades estáticas do núcleon e seus fatores de forma elétrico e magnético. As Eqs.(4.12)-(4.15) são resultado apenas de uma primeira integração analítica nas coordenadas "–" de energia da Frente de Luz. Na integração numérica $\Psi(M_0^2)$ é uma função apenas dos momentos. Essencialmente, a componente do espaço de Fock do núcleon corresponde aos três quarks constituintes como parte principal da função de onda. Escolhemos dois tipos de função Ψ , que, junto com os parâmetros α , apresentam diferentes resultados, discutidos mais adiante. Os fatores de forma elétrico e magnético foram obtidos explicitamente no apêndice D, Eq.s(D.10) e (D.11). Neles podemos identificar as funções $\Psi(M_0^2)$ como

$$\Psi_{OH} = N_{OH} \exp(-M_0^2/2\beta_G^2) \quad , \quad \Psi_P = N_P(1 + M_0^2/\beta_P^2)^{-p} .$$

onde Ψ_{OH} é uma função do tipo gaussiano para o estado fundamental do oscilador harmônico. β_G é um parâmetro de alcance com unidades de momento, e N_{OH} é o fator de normalização. Ψ_P é uma função do tipo polinomial, β_P é o parâmetro de alcance com unidade de momento. N_P é a respectiva normalização e usamos o valor $p = 3$. Os resultados também são dependentes da massa do quark constituinte. Observemos que ambas funções possuem características contrastantes e dão uma idéia a respeito da abrangência de formas para Ψ que poderiam compor a função de onda total. A primeira, do tipo gaussiano, com uma característica confinante para baixos momentos. No limite $\beta \rightarrow 0$, o núcleon tem um taman-

ho infinito. Por outro lado, utilizamos também uma função do tipo polinomial, motivada pela Ref.[34, 42]. Nestas referências, o uso dessas funções(polinomial e gaussiana) com um acoplamento baseado na construção de B.T., mostra independência em relação à forma da função Ψ nas correlações entre o momento magnético do próton μ_P , a constante de acoplamento axial g_A , e o produto adimensional de m_N pelo raio do próton, r_p . Aqui generalizamos essa conclusão, no contexto dos possíveis acoplamentos α . Ou seja, veremos também a independência da correlação entre μ_p e o produto $m_N r_p$ em relação aos diferentes acoplamentos escalar, vetorial ou misto. Na referência[56] estendemos esse estudo para as correlações envolvendo a constante axial g_A .

Um ponto que destacamos neste capítulo, refere-se ao nêutron. Recentemente, dados experimentais[62] confirmaram que o fator de forma elétrico do nêutron é apreciavelmente diferente de zero em regiões de momento transferido da ordem da massa do quark constituinte, ou na escala da constante da QCD, $\Lambda_{QCD} \sim 300 MeV$, o que mostra uma quebra da simetria SU(6). Aqui, nessa situação, $G_{En}(Q^2) \neq 0$ e $\frac{G_{Mp}(Q^2)}{G_{Mn}(Q^2)} \neq \frac{3}{2}$, o que resulta num raio quadrático médio do nêutron diferente de zero, contrariando o caso não relativístico que prevê um raio nulo, e que está de acordo a simetria SU(6). Do ponto de vista teórico, a razão pela qual essa simetria é quebrada é devida às rotações de Melosh. Essas rotações misturam spin e momento, o que faz aparecer componentes de simetria mista na função de onda espacial, como argumenta a Ref.[57]. Como demonstrado por Isgur em um modelo esquemático do núcleon, composto por um férmion e uma partícula escalar, o termo de Foldy do fator de forma do nêutron é cancelado pelo termo dominante em primeira ordem da expansão relativística do fator de forma de Dirac. Um cancelamento parcial é de fato observado em modelos do núcleon baseados na construção B.T. Desta forma, o raio de carga do nêutron é sensível à efeitos relativísticos e quebra de simetria SU(6), que também pode ter sua origem no acoplamento de spin relativístico. Assim justifica-se o estudo de diferentes acoplamentos relativísticos parametrizados por α , através do fator de forma elétrico do nêutron. Veremos que de fato o raio do nêutron extremamente sensível a diferentes acoplamentos. Veremos também que as diferentes formas de Ψ também não são qualitativamente importantes para a distribuição de cargas dentro do nêutron. A massa que usamos para o quark constituinte

é de 220MeV , usada nas Refs.[58, 59]. No entanto apresentamos uma tabela com várias massas de quarks constituintes.

A maneira pela qual apresentamos os resultados numéricos segue uma divisão em três secções: resultados numéricos relativos ao nêutron; resultados numéricos relativos ao próton e um sumário com as conclusões numéricas. Em toda a exposição mostramos os possíveis esquemas de acoplamento parametrizados por α . A consistência com os resultados não-relativísticos é discutida no apêndice E, onde primeiramente verificamos que o cálculo de fatores de forma baseado na técnica de Lagrangeana efetiva, reproduz no caso não-relativístico os momentos magnéticos do modelo de quarks constituintes, $\mu_p = 3$ e $\mu_n = -2$. Mostramos formalmente que o limite não-relativístico do modelo está de acordo com esses valores. Demonstramos também que a carga nula do nêutron é expressa pelo cancelamento entre os diagramas, como posteriormente verificado numericamente.

Na primeira secção apresentamos

1-Uma discussão qualitativa sobre o raio do nêutron.

2-O momento magnético em função do parâmetro β para $m = 220\text{MeV}$ e diferentes valores de α

3-Apresentamos resultado para o parâmetro ξ , definido a seguir, que tem estreita relação com o raio quadrático médio do nêutron. São discutidos cálculos para diferentes valores de α , com o parâmetro β que melhor ajusta o momento magnético do nêutron, para uma massa do quark de 220 MeV . Isso, para as duas formas de Ψ : gaussiana e polinomial.

4-O gráfico do raio quadrático médio do nêutron como função de α para β que ajusta μ_n experimental. Apresentamos também o gráfico do momento magnético do nêutron em função da massa do quark.

5-O gráfico do raio quadrático médio em função do momento magnético do nêutron para diferentes funções de onda e valores de α com $m = 220\text{MeV}$.

6-O gráfico dos fatores de forma elétrico e magnético pelo momento transferido pelo fóton. Os resultados dos diferentes modelos para ambos fatores de forma são confrontados com os recentes dados experimentais.

Na secção dos resultados numéricos relativos ao próton apresentamos:

1-O gráfico do momento magnético do próton pelo adimensional $m_N r_p$. No sumário discutimos esses resultados tendo em vista as conclusões da Ref.[34].

2-Análogo ao caso do nêutron, também mostramos e comentamos o gráfico do raio quadrático médio do próton em função da massa do quark.

3-Os fatores de forma elétricos e magnéticos do próton em função do transferido pelo fóton para o valor de β que ajusta μ_n .

4-O gráfico de $\frac{\mu_p G_E(Q^2)}{G_M(Q^2)}$ para várias curvas é confrontado com os dados experimentais recentes [31]. Veremos que os resultados do modelo não se ajustam aos dados experimentais. Como consequência dessa constatação, mostramos também um gráfico de $\frac{\mu_p G_E(Q^2)}{G_M(Q^2)}$ por β . Veremos que os valores de β que ajustam $\frac{\mu_p G_E(Q^2)}{G_M(Q^2)}$ em $q^2 = 1.18 GeV^2$ não ajustam os momentos magnéticos do nêutron e do próton.

5-Apresentamos também os gráficos dos fatores de forma elétricos magnéticos do próton para um β que ajusta o momento magnético do próton.

6-O gráfico do momento magnético do nêutron pelo momento magnético do próton, para todos esquemas de acoplamento. Nesse gráfico veremos que não há valor de β que ajuste simultaneamente ambos momentos magnéticos para $m = 220 MeV$.

7-Para terminar essa secção mostramos uma tabela com α , raios quadráticos médios do próton e do nêutron. Também é apresentado uma outra possibilidade de acoplamento, na troca de sinal no segundo termo da Lagrangeana, Eq.(4.1).

Finalmente , na última secção sumarizamos os resultados numéricos apresertados nos gráficos e tabelas deste capítulo.

5.1 Nêutron

Apresentamos a seguir os resultados referentes às quantidades estáticas do nêutron, sua dependência com o parâmetro de α e com a massa do quark, e, posteriormente seus fatores de forma elétricos e magnéticos.

5.1.1 Raio de Carga

Introduzimos aqui uma função adimensional $\xi(q^2)$ [56], definida por

$$F_{1N}(q^2) = \frac{q^2}{4m_N^2} \xi(q^2). \quad (5.1)$$

No fator de forma elétrico do nêutron, usando Eq.(5.1) temos que

$$G_{En}(q^2) = \frac{q^2}{4m_N^2} (\xi(q^2) + F_{2n}). \quad (5.2)$$

Da Eq.(5.2) podemos escrever o raio quadrático médio do nêutron como

$$r_n^2 = -6 \frac{dG_{En}(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0} = -\frac{3}{2m_N^2} (\xi(0) + \mu_n), \quad (5.3)$$

onde o momento magnético do nêutron é dado por $\mu_n = -1.91\mu_N$. Usando o valor do raio experimental $r_n^{2expt} = -0.113 fm^2$ [60], obtemos

$$\xi^{expt}(0) = 0.21 \pm 0.08. \quad (5.4)$$

O termo $\frac{\mu_n}{2m_N^2}$ do lado direito da Eq.(5.3) é o chamado "termo de Foldy", e seu valor é $r_{En}^{2foldy} = -0.126 fm^2$. No apêndice F deduzimos uma forma analítica para o raio do nêutron, a partir dos traços da corrente eletromagnética, $j_{aN}^+ - j_{dN}^+$, obtidos no capítulo 3, no limite $q^2 \rightarrow 0$. Nessa fórmula analítica admitimos que os traços possam ser fatorados da integral tridimensional nas coordenadas cinemáticas de momento da Frente de Luz. Além disso, o ponto principal diz respeito à dependência do parâmetro de acoplamento α . No caso $\alpha = \frac{1}{2}$ (acoplamento misto), observamos um cancelamento aproximado do termo de Foldy, o que está qualitativamente de acordo com os cálculos efetuados usando o esquema B.T.[56, 57].

Apresentamos na Fig.5.1 os gráficos de $\mu_n \times \beta$ para funções Ψ gaussiana e polinomial para $m = 220 MeV$. Logo a seguir apresentamos na Tabela 5.1 os valores de $\xi(0)$ para os quais β ajusta o momento magnético do nêutron $\mu_n = -1.91\mu_N$. Eles correspondem, na Fig.5.1, à intersecção entre a reta horizontal, correspondente ao valor experimental de μ_n , e as curvas relativas aos possíveis acoplamentos. Observemos que para β crescente o tamanho do núcleon decresce e, conseqüentemente, $|\mu_n|$ decresce. Um núcleon sem estrutura e puntual

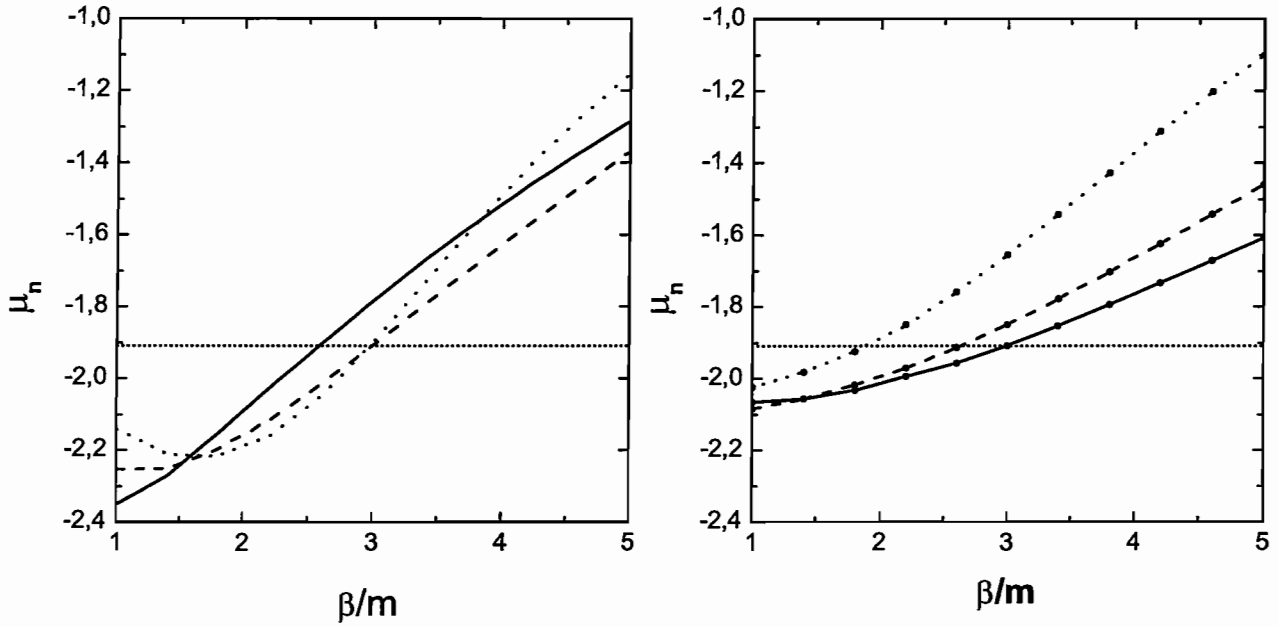


Figura 5.1: Gráfico do momento magnético do nêutron em função do parâmetro β para $m = 220\text{MeV}$. As figuras da esquerda e da direita correspondem, respectivamente, ao modelo gaussiano e polinomial. Acoplamento escalar(linha sólida), misto(linha tracejada) e vetorial(linha pontilhada). A linha horizontal pontilhada corresponde ao valor experimental, $\mu_n = -1.91\mu_N$.

tem momento magnético anômalo nulo. Este comportamento é geral e independente da função de onda e do tipo de acoplamento entre os campos dos quarks formando o núcleon. Para β decrescente o núcleon aumenta de tamanho e existe a tendência de um aumento do momento magnético. Para a função de onda polinomial observamos uma diminuição na curvatura $\mu_n(\beta/m)$ pois

$$\Psi_p = N_p \left(1 + \frac{M_0^2}{\beta_p^2}\right)^{-p} \xrightarrow{\beta_p \ll m} N_p' M_0^{-2p}, \quad (5.5)$$

e a dependência em β_p deve desaparecer, como observamos na Fig.(5.1).

No apêndice F obtivemos uma estimativa analítica para r_n^2 :

$$r_n^2 = \frac{5 - 4\alpha}{3mm_N} + \frac{3\mu_n}{2m_N^2}. \quad (5.6)$$

Ela foi obtida considerando-se a fatorização dos traços da corrente eletromagnética em

α	$\xi(0)$ (HO)	β_G (MeV)	$\xi(0)$ (Power)	β_P (MeV)
1	0.54	562	0.69	477
1/2	1.6	664	1.6	576
0	3.0	661	2.6	411

Tabela 5.1: **Parâmetro de alcance e $\xi(0)$ obtido da Eq.(5.1) para a função gaussiana (β_G) e polinomial (β_P). Os modelos com diferentes esquemas de acoplamento que ajustam o momento magnético do nêutron $\mu_n = -1.91\mu_N$ com $m = 220$ MeV.**

relação à integração dos momentos cinemáticos k^+ e \vec{k}_\perp , o que corresponde ao limite de considerarmos o nêutron como três quarks livres. Na estimativa de r_n^2 observamos a forte dependência no parâmetro α , que tem sua origem na sensibilidade deste observável à propagação relativística dos quarks em ordem q_\perp^2 (apêndice D). O acoplamento escalar ($\alpha = 1$), tende a anular o primeiro termo, de acordo com o pequeno valor de $\xi^{expt}(0)$. Qualitativamente, podemos dizer que r_n^2 cresce para valores de α decrescentes e o valor de r_n^2 para o acoplamento vetorial é o maior entre os três casos analisados. Estas características são observadas nos cálculos de r_n^2 com os modelos gaussiano e polinomial (Tabela 5.1) e, apresentados na Fig. 5.2. A dependência funcional de r_n^2 com α não é sensível à diferentes funções de onda, o que é qualitativamente reproduzido pela estimativa analítica.

A Fig. 5.3 mostra a dependência do raio quadrático médio do nêutron com a massa do quark. A magnitude do efeito relativístico está diretamente relacionada com o valor da massa do quark, e desde que o raio do nêutron é basicamente resultado de efeitos relativísticos, verificamos na Fig. (5.3) a forte dependência de r_n^2 com m . Observemos que, na região de valores maiores que 150 MeV para massa do quark constituinte, o acoplamento escalar é consistente com o valor experimental do raio quadrático médio do nêutron. No entanto, na possibilidade de se considerar uma massa pequena para o quark constituinte, a situação se inverte e, ao contrário, o acoplamento vetorial é favorecido.

Na Fig. 5.4 apresentamos resultados para o momento magnético do nêutron em função da massa do quark, para os modelos com parâmetro β da Tabela 5.1. A tendência geral das

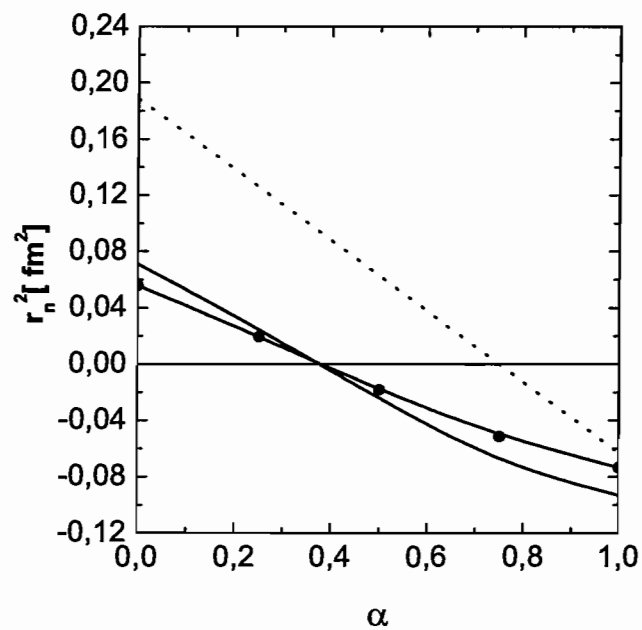


Figura 5.2: Raio quadrático médio do nêutron como função de α . Comparação entre os resultados dos modelos gaussiano (linha sólida) e polinomial (linha sólida com pontos cheios) com a estimativa analítica, Eq.(5.6)(apêndice D). Os parâmetros de alcance dos modelos ajustam $\mu_n = -1.91$ (tabela 5.1)

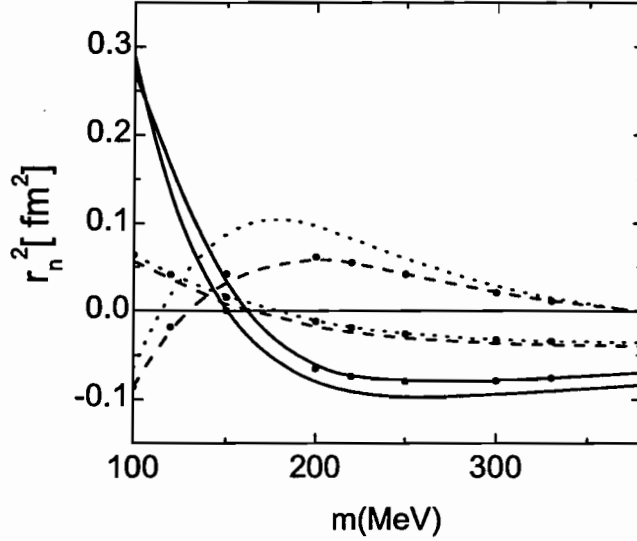


Figura 5.3: Raio quadrático médio do nêutron em função da massa do quark. Os resultados do modelo gaussiano com acoplamento escalar, misto e vetorial, que correspondem às linhas sólida, tracejada e pontilhada, respectivamente. Os resultados polinomial tem as curvas indicadas com pontos cheios.

figuras é o decréscimo de $|\mu_n|$ com m . Isto espelha o comportamento não-relativístico de $\mu_n \sim -\frac{2}{3} \frac{m_N}{m}$. Porém para $m \rightarrow 0$ o nosso cálculo distancia-se mais deste comportamento, desde que os efeitos relativísticos tornam-se mais importantes. Para $m = 220 \text{ MeV}$, todas as curvas ajustam $\mu_n = -1.91$. Porém observamos que para $m > 100 \text{ MeV}$, os valores de μ_n dependem fortemente de α , o que não ocorre para $m > 220 \text{ MeV}$, indicando novamente a presença de efeitos relativísticos em μ_n . Na Fig.5.4 mostramos que a possibilidade de acoplamento vetorial, usando massas de quark constituinte menores que 150 MeV é inconsistente com o momento magnético do nêutron, usando os mesmos parâmetros da Fig.5.3. Observe-mos que, para a massas do quark constituinte menores que 150 MeV o raio quadrático médio do nêutron se aproxima do valor experimental. Entretanto, o momento magnético do nêutron tem um valor insatisfatório.

Para a massa de 220 MeV do quark constituinte, apresentamos na Fig.(5.5) o gráfico de r_n^2 em função de μ_n . Aqui, vemos que o resultado para o acoplamento escalar entre os quarks que formam o diquark é o que está mais próximo do dado experimental. Por outro lado, o

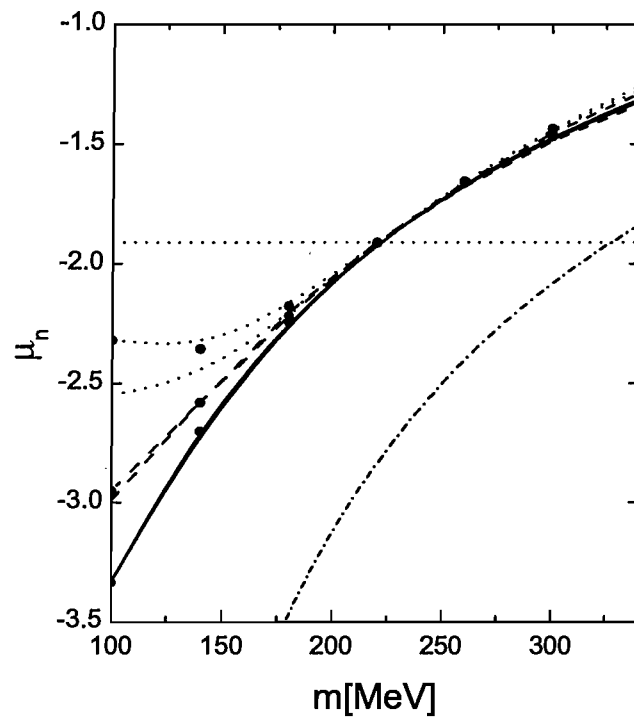


Figura 5.4: Gráfico do momento magnético do nêutron em função da massa do quark. As curvas são denotadas como na Fig.(5.3). Linha horizontal tracejada é relativa ao valor experimental $\mu_n = -1.91$. Curva com traços e pontos refere-se ao resultado não relativístico, $\mu_n = -\frac{2}{3} \frac{m_N}{m}$, Eq.(E.55).

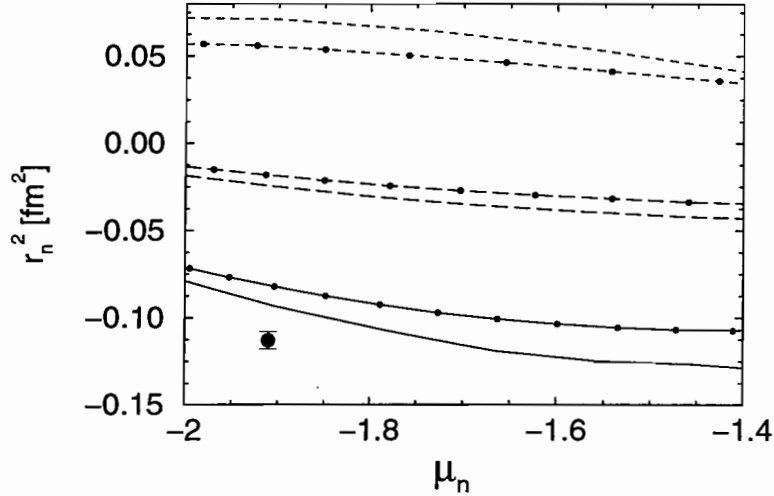


Figura 5.5: Gráfico de r_n^2 em função de μ_n ($m = 220MeV$). Curvas teóricas: acoplamento escalar(linha sólida), misto(linha tracejada) e vetorial(linha com traços pequenos). Modelo gaussiano e polinomial (curvas denotadas pelos pontos cheios). Valor experimental, Ref.[60].

resultado do acoplamento vetorial está em total desacordo com valores positivos para o raio quadrático médio do nêutron.

Outro ponto qualitativamente importante é que as curvas de $r_n^2 \times \mu_n$ tem pouca sensibilidade à forma de $\Psi(M_0)$, porém dependem fortemente da forma de acoplamento de spin entre os quarks, como mostra a Fig.5.5. Esse mesmo padrão é visto na Fig.(5.6) para o gráfico de G_{En} em função de q^2 . Observemos que os resultados numéricos para o acoplamento misto está entre os resultados para os acoplamentos escalar e vetorial. A consistência com os dados experimentais é alcançada pelo acoplamento escalar. O acoplamento vetorial que resulta em valores positivos para raio quadrático médio do nêutron, tem valores negativos para o fator de forma elétrico do nêutron, ao contrário dos dados experimentais. Nesta figura há três pares de curvas que confirmam a observação feita para a Fig.(5.5), segundo a qual o raio quadrático médio em função do momento magnético, e agora o fator de forma elétrico, são independentes da forma da função gaussiana ou polinomial.

Em relação ao fator de forma magnético, o comportamento do acoplamento escalar mostra

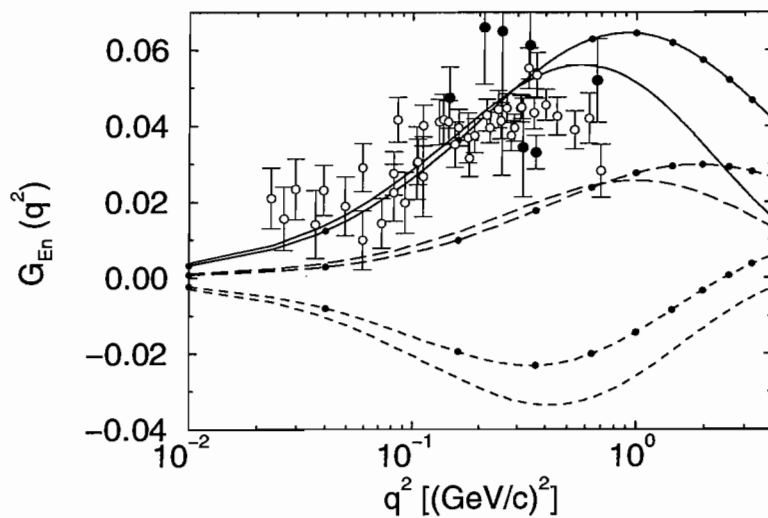


Figura 5.6: Fator de forma elétrico do nêutron em função de q^2 ($m = 220\text{MeV}$). Acoplamento escalar (linhas sólida), misto (linhas tracejadas) e vetorial (linhas com traço pequeno). Modelo Gaussiano e Polinomial (curvas denotadas pelos pontos cheios), Tabela 5.1. Dados experimentais, Ref.[61] (círculo vazio) e Ref.[62] (círculo cheio).

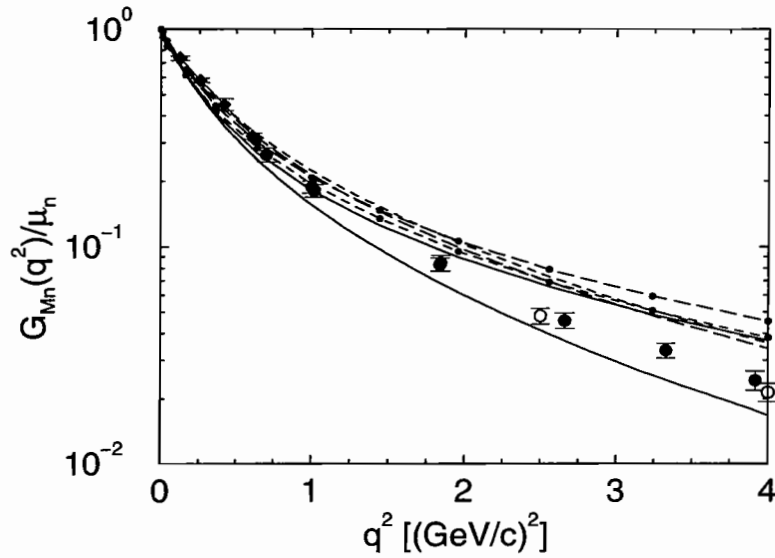


Figura 5.7: Gráfico de $G_{Mn} \times q^2$. Resultados teóricos denotados como na Fig.(5.6). Dados experimentais Ref.[63](círculos cheios), Ref.[64](círculos vazios e Ref.[65](diamante).

um ajuste razoável até a região de 1GeV^2 , como mostra a Fig.5.7. Acima desse valor o fator de forma magnético do modelo desvia-se dos dados experimentais. Já os acoplamentos $\alpha = 0$ e $\alpha = \frac{1}{2}$ mostram fatores de forma magnéticos acima dos dados experimentais, para ambas funções radiais. Acima de 1GeV^2 apenas acoplamento escalar com função gaussiana mostra valores abaixo dos dados experimentais .

5.2 Próton

Os parâmetros β que usamos para obter os resultados numéricos do próton ajustam o momento magnético do nêutron $\mu_n = -1.91\mu_N$. Veja Tabela 5.1.

Diferentemente do nêutron, a correlação entre o momento magnético do próton e o produto adimensional $m_N r_p$ é independente do acoplamento e da função $\Psi(M_0^2)$. No gráfico da Fig.5.8 observamos a pouca sensibilidade das curvas em relação ao parâmetro α e também em relação às formas da função $\Psi(M_0^2)$. O acoplamento misto $\alpha = \frac{1}{2}$, para funções gaussianas

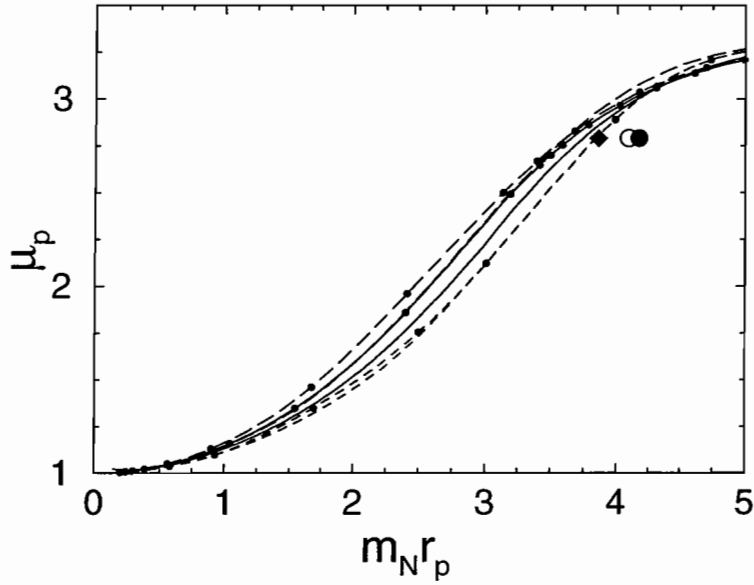


Figura 5.8: Momento magnético do próton em função do de $m_N r_p$ para $m = 220 MeV$. Resultados teóricos denotados como na Fig.(5.6). Dados experimentais, Ref.[67](diamante), Ref.[68](círculo vazio) e Ref.[69] (círculo cheio).

e polinomial, é semelhante à Ref.[34]¹. As curvas da Fig.(5.8) são construídas variando-se o parâmetro β . Veja que no limite do próton sem estrutura o momento magnético anômalo é nulo.

A dependência da forma da função Ψ nas quantidades estáticas do próton é explorada no gráfico $r_p^2 \times m$, na Fig.5.9. Observemos que, para massas maiores que $220 MeV$ há independência do acoplamento e da forma da função Ψ . Apenas para massas do quark abaixo de $150 MeV$ há uma diferença entre as diferentes funções Ψ e acoplamentos. Observemos também que há um ajuste razoável para o raio do próton para m entre 200 e $250 MeV$.

Na Fig.(5.10), apresentamos os resultados do momento magnético do próton para $m=220 MeV$ em função do parâmetro β . Como já discutimos através da Fig.(5.1) de μ_n em função de β , as características qualitativas são as mesmas, isto é, para o limite do núcleon puntiforme $\beta \rightarrow \infty$, ou β crescendo em relação ao momento magnético anômalo que tende a anular-se.

¹Na Ref.[56] é também apresentado os resultados numéricos da constante de acoplamento axial vetor do núcleon g_A .

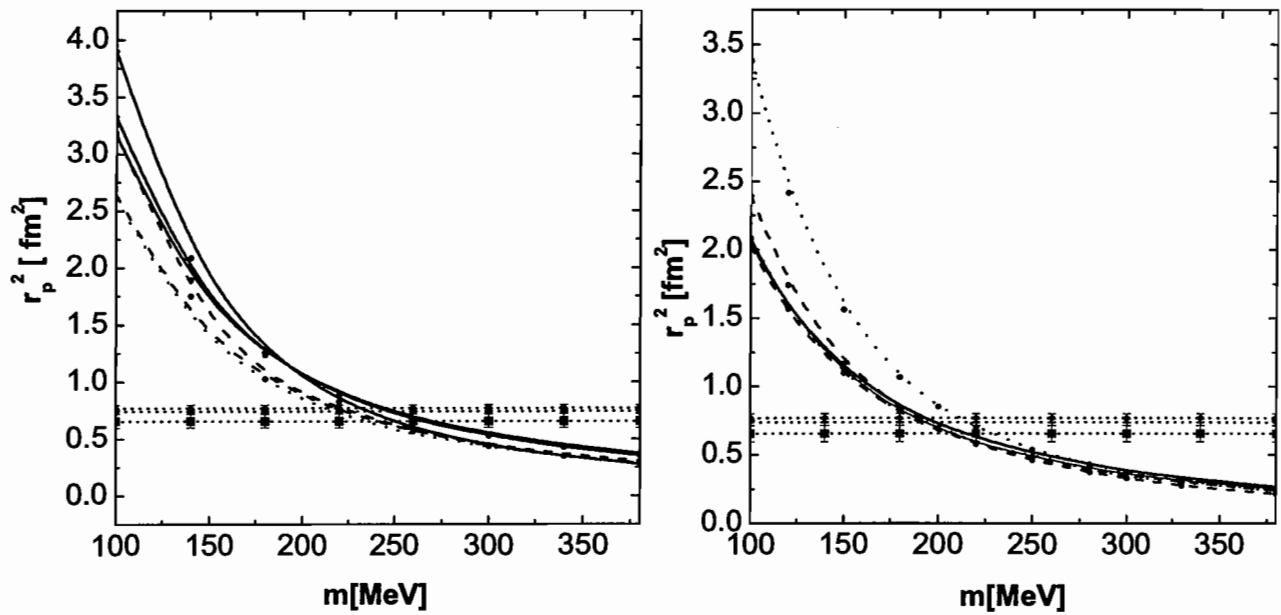


Figura 5.9: Raio quadrático médio do próton em função da massa do quark. Gráfico direito: β da Tabela 5.1; gráfico esquerdo: β que ajusta o momento magnético do próton para $m=220$ MeV. Linhas pontilhadas horizontais (dados experimentais) das Ref.[67, 68, 69]. Acoplamento escalar(linha sólida), misto(linha tracejada) e vetorial (linha pontilhada). Modelos gaussiano e polinomial (curvas com pontos cheios).

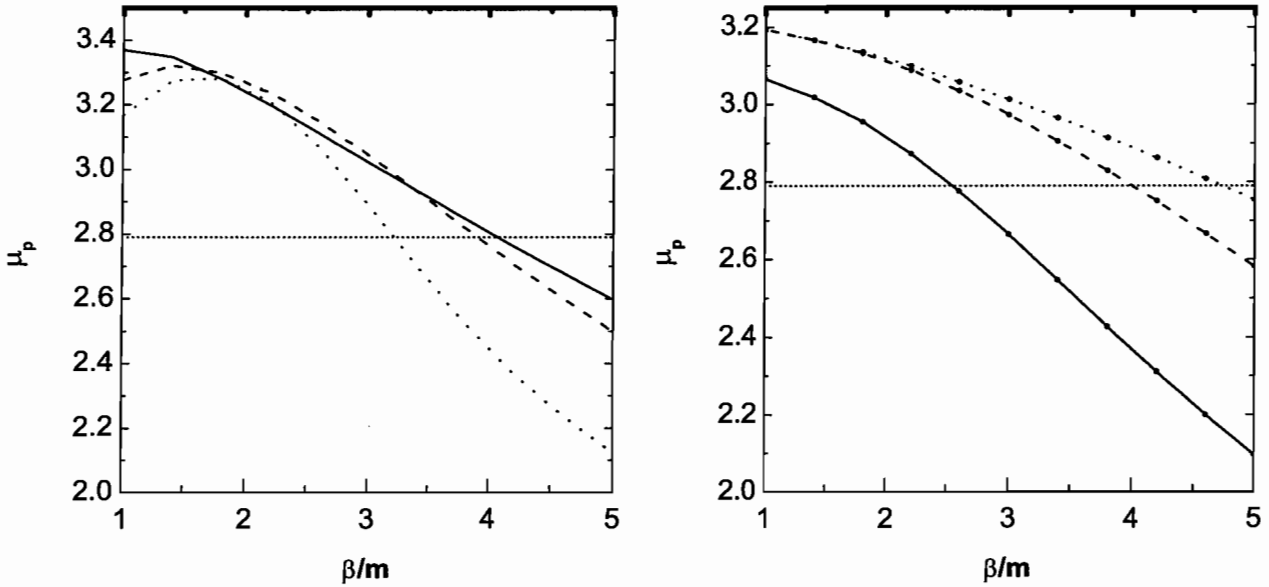


Figura 5.10: Momento magnético do próton em função de β para $m=220\text{MeV}$. Gráfico esquerdo: modelo gaussiano com acoplamento escalar (linha sólida), misto (linha tracejada) e vetorial (linha pontilhada). Neste caso, os valores de β/m que ajustam o momento magnético do próton são 4.0 (escalar), 3.90(misto) e 3.20(vetorial). Gráfico direito: modelo polinomial (curvas com pontos cheios), e os valores de β/m que ajustam o momento magnético do próton são 4.73(escalar), 4.0(misto) e 2.54(vetorial).

O modelo polinomial tende a uma saturação para $\beta \rightarrow 0$, e a escala de momento é a massa do quark que está fixa nestes cálculos.

Na Fig.(5.11) apresentamos o raio quadrático médio do próton como função de β para $m=220\text{MeV}$. O raio cresce para valores de β decrescentes. O modelo gaussiano segue qualitativamente $r_p \sim \frac{1}{\beta}$, que é o comportamento de um modelo não relativístico, enquanto que no modelo polinomial o raio cresce mais lentamente com $\frac{1}{\beta}$. O valor de r_p tende a saturar no modelo para $\beta \rightarrow 0$, pois a escala de tamanho é dado neste limite por $\frac{1}{m} \sim 1fm$.

Na Fig.5.12, mostramos o fator de forma elétrico do próton, com os parâmetros da Tabela 5.1, comparado com dados experimentais da Ref.[66]. Um comportamento comum é encontrado para cálculos com ambas funções de onda, isto é, a escolha $\alpha = 1$ produz

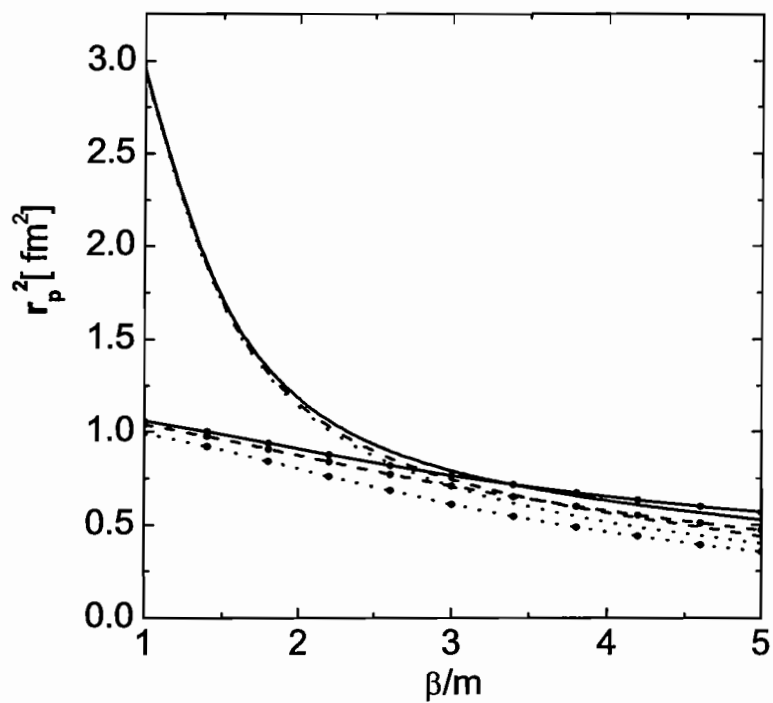


Figura 5.11: Raio da carga do próton em função do parâmetro β para $m=220$ MeV. Curvas estão denotadas como na Fig.(5.10)

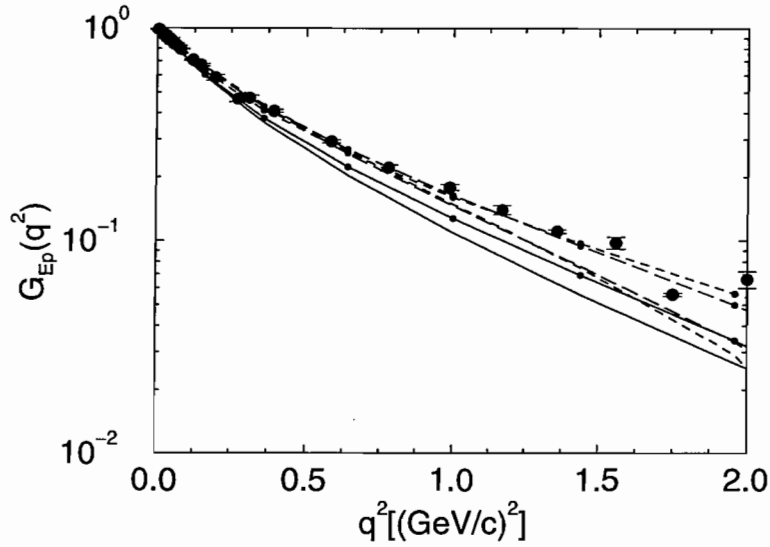


Figura 5.12: Fator de forma elétrico do próton em função momento transferido ($m = 220 MeV$). Curvas teóricas seguem a convenção da figura 5.6. Dados experimentais da Ref[66].

valores abaixo dos dados experimentais. Isso pode ser antecipado da Fig.5.11 que mostra valores do raio do próton menores que os valores experimentais. Os resultados do esquema de acoplamento dado por $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\alpha = 0$ aproximam-se dos dados experimentais para momentos transferidos abaixo de $2 GeV^2$, porque o raio do próton está em melhor acordo com os valores experimentais nesses casos. Contudo, lembramos que os acoplamentos com $\alpha = 0$ e $\alpha = \frac{1}{2}$ resultam no fator de forma do nêutron em desacordo com os dados experimentais, como discutimos através da Fig.5.6.

Na Fig.5.13 apresentamos os resultados para o fator de forma magnético do próton com os parâmetros da Tabela 5.1. O esquema de acoplamento escalar para ambos os modelos aproxima-se dos dados experimentais, enquanto os resultados obtidos com acoplamentos $\alpha = 1/2$ e $\alpha = 0$ superestimam os valores experimentais. Esta limitação do modelo com acoplamentos escalar, misto e vetorial será explorada em seguida, quando analisarmos a razão $\mu_p G_{Ep}/G_{Mp}$.

Os dados experimentais da Fig.5.14 são os mais recentes na literatura[31]. Aqui mostramos a razão $\frac{\mu_p G_{Ep}}{G_{Mp}} \times q^2$. Todas as curvas, relativas aos vários acoplamentos e funções Ψ subesti-

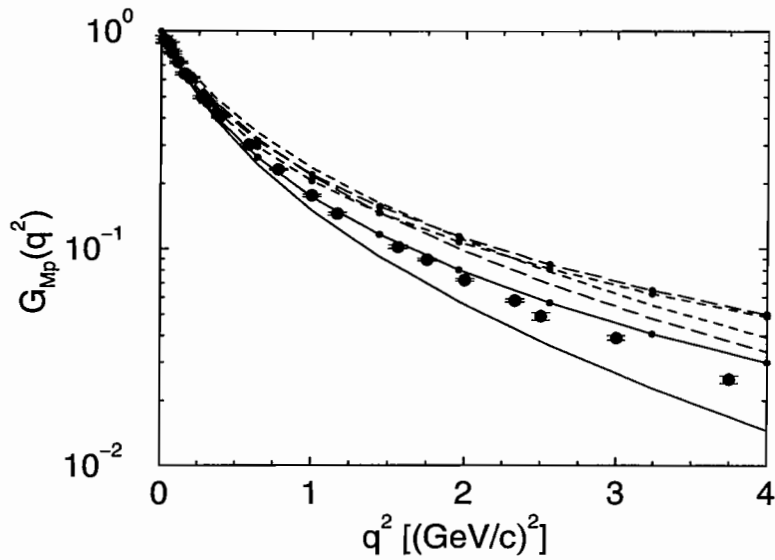


Figura 5.13: Fator de forma magnético do próton em função do quadrado do momento transferido ($m = 220\text{MeV}$). Curvas Teóricas como na Fig.5.6; Dados experimentais da Ref.[66].

com os dados experimentais, o que indica uma limitação no modelo.

A comparação com os dados experimentais da razão $\frac{\mu_p G_{Ep}}{G_{Mp}}$ sugere um reajuste do parâmetro β . A Fig.5.15 mostra o gráfico dessa razão em função do parâmetro β , para o valor do momento quadrado de 1.18GeV^2 , onde, por simplicidade escolhemos apenas o modelo gaussiano com $m = 220\text{MeV}$. Os valores para os quais o parâmetro β ajusta a razão $\mu_p G_{Ep}/G_{Mp}$, com valor experimental de 0.87 em $q^2 = 1.18\text{GeV}^2$, são $\beta/m = 12.3$ para o acoplamento escalar; $\beta/m = 9.1$ para o acoplamento misto e $\beta/m = 7.1$ para o acoplamento vetorial. No entanto, esses grandes valores de β não permitem o ajuste dos observáveis estáticos, como vimos na Fig.5.1 para μ_n , na Fig.5.10 para μ_p e na Fig.5.11 para r_p , isto é, o núcleon acaba tendo, independentemente de acoplamento (escalar, misto ou vetorial), um tamanho pequeno como expresso pelo raio de carga do próton. Esta figura confirma a limitação do modelo, no que se refere ao ajuste de β com o dado experimental para a razão $\mu_p G_{Ep}/G_{Mp}$.

As figuras 5.16 e 5.17 apresentam os fatores de forma eletromagnéticos do próton calculados com parâmetros β que ajustam $\mu_p = 2.79$ nos diversos modelos com $m=220\text{MeV}$. Cu-

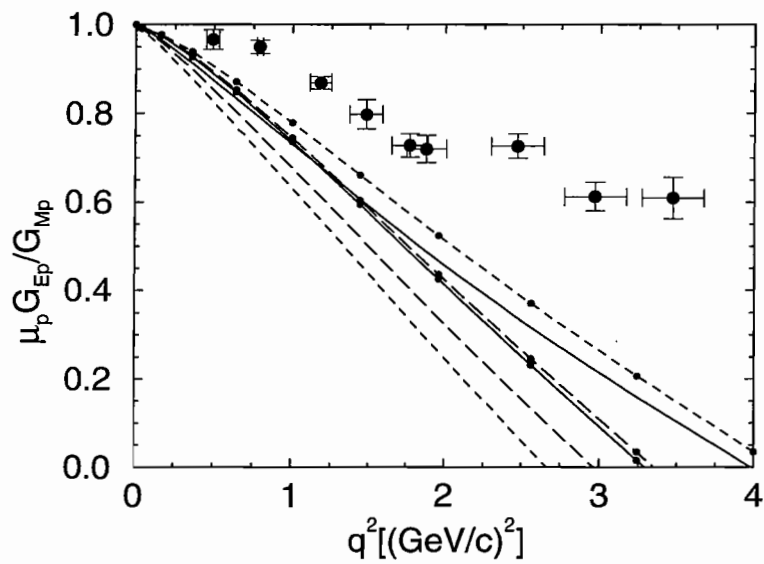


Figura 5.14: Razão entre os fatores de forma do próton $\frac{\mu_p G_{Ep}}{G_{Mp}}$ como função do quadrado do momento transferido. As curvas teóricas, com parâmetros da Tabela.5.1 seguem a mesma convenção da Fig.5.6. Os dados experimentais são da Ref.[31].

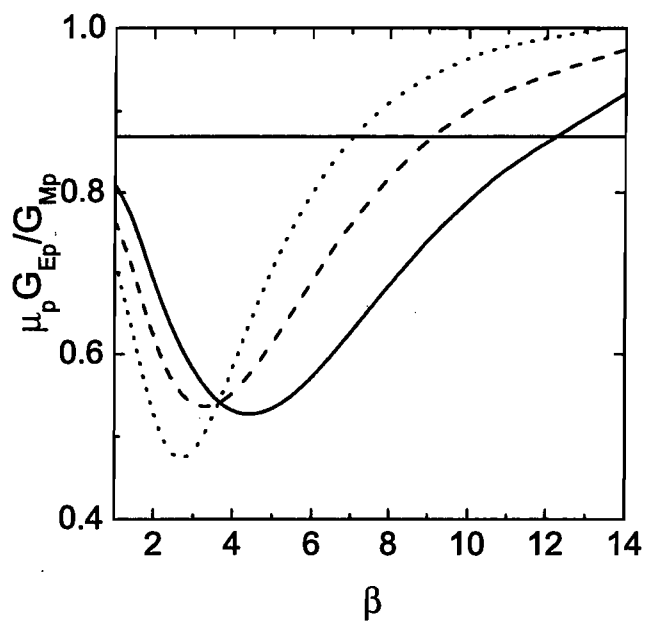


Figura 5.15: Razão $\frac{\mu_p G_{Ep}}{G_{Mp}}$ para $q^2 = 1.18 GeV^2$ como função do parâmetro β , no Modelo gaussiano com $m=220 MeV$, para acoplamentos escalar (linha sólida), misto (linha tracejada) e vetorial (linha pontilhada). A linha horizontal sólida é o dado experimental da Ref.[31].

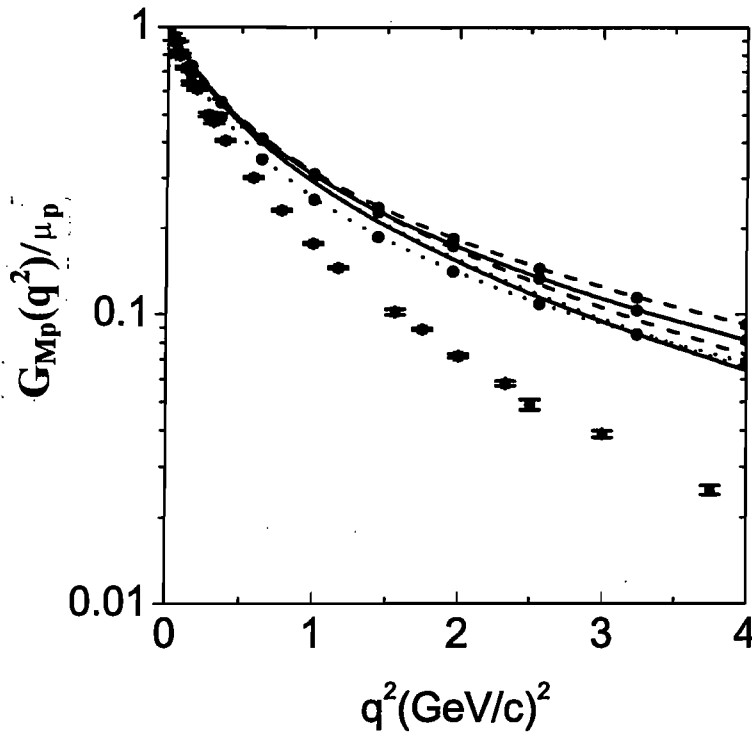


Figura 5.16: Fator de forma magnético do próton em função do quadrado do momento transferido. Para $m=220\text{MeV}$ e parâmetros β ajustando o momento magnético do próton. Modelo gaussiano com acoplamento escalar(linha sólida), misto(linha tracejada) e vetorial(linha pontilhada). Dados experimentais da Ref[66].

riosamente, observemos que o ajuste aos dados experimentais do fator de forma magnético do próton é de qualidade inferior ao encontrado com os parâmetros β da Tabela.5.1 ($\mu_n = -1.91$). Embora o ajuste do fator de forma elétrico parecer razoável na Fig.5.12, a dificuldade de reproduzir a razão $\frac{\mu_p G_{Ep}}{G_{Mp}}$ continua, como de fato já vimos através da Fig.5.15, onde a região de β/m que ajusta μ_p ou μ_n , $\beta \sim 2 - 4$, para o modelo gaussiano, não reproduz esta razão para $q^2 = 1.18\text{GeV}^2$.

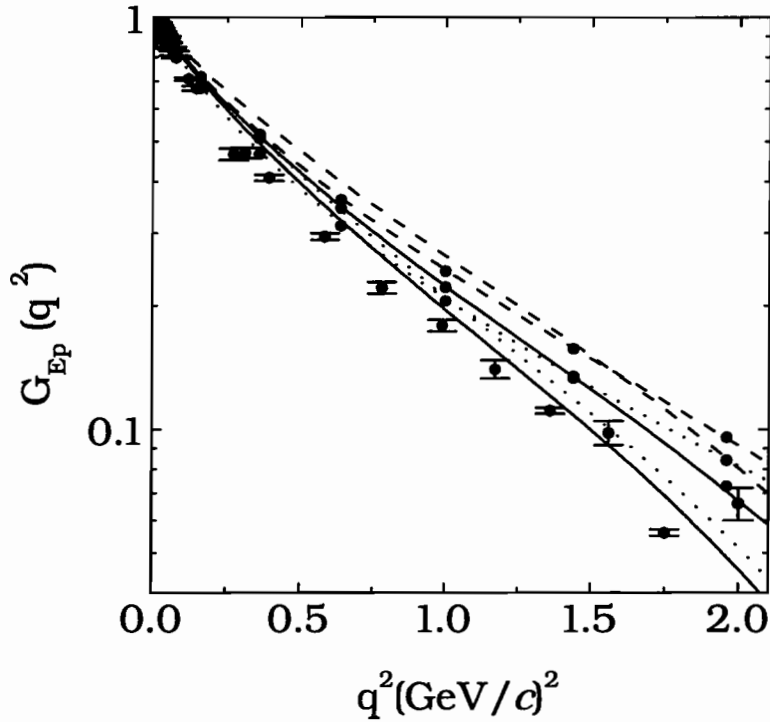


Figura 5.17: Fator de forma elétrico do próton em função do quadrado do momento transferido. As curvas teóricas são explicadas na Fig.5.16. Dados experimentais da Ref.[66].

A diferença entre os valores de β que ajustam o momento magnético do nêutron ou o momento magnético do próton é mostrada na Fig.5.18. Explicitamente, vemos que não há um valor de β que ajuste simultaneamente os momentos magnéticos do próton e do nêutron para $m=220\text{MeV}$. Observemos também que a correlação entre μ_p e μ_n segue o mesmo padrão dos observáveis elétricos do nêutron, segundo os quais há uma forte sensibilidade à forma de acoplamento e uma fraca sensibilidade em relação ao detalhe da função de onda $\Psi(M_0^2)$.

Por fim, apresentamos na Tabela.5.2, cálculos com o modelo gaussiano para os acoplamentos escalar, misto e vetorial, e comparamos com a Ref.[70]. Também apresentamos uma outra possibilidade de acoplamento na Lagrangeana efetiva, ou seja, trocamos o sinal do termo referente ao acoplamento vetorial. A massa do quark usada nesses cálculos é de 330 MeV. O valor para o parâmetro é $\beta = 554.3\text{MeV}$ [70]. No trabalho de Konen e Weber[70] foi usado o acoplamento misto, e os nossos cálculos para $\alpha = 1/2$ reproduzem exatamente

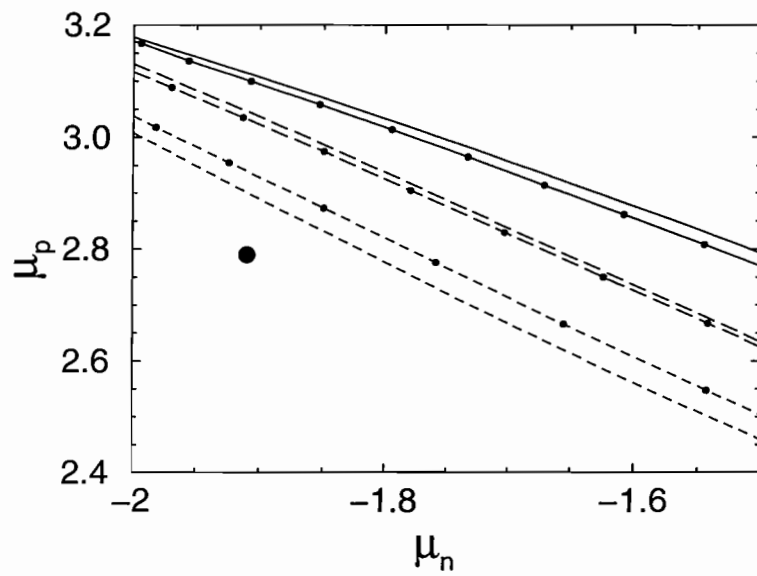


Figura 5.18: Correlação entre os momentos magnéticos do próton e do nêutron, para $m=220\text{MeV}$. Acoplamento escalar(linha sólida), misto(linha tracejada) e vetorial(linha com traços pequenos). Modelos gaussiano e polinomial(linha com pontos cheios). Dado experimental, círculo cheio.

α	$r_n^2(\text{fm}^2)$	$r_p^2(\text{fm}^2)$	$\mu_n(\mu_N)$	$\mu_p(\mu_N)$
KW[70]	-0.023	0.69	-1.73	2.80
1	-0.080	0.71	-1.60	2.71
1/2	-0.024	0.69	-1.73	2.80
0	0.035	0.69	-1.83	2.84
1/2 [†]	-0.112	0.83	-0.65	1.59
Expt.	-0.113 ± 0.005 [41]	0.66 ± 0.06 [67] , 0.74 ± 0.02 [68] 0.77 ± 0.03 [69]	-1.91	2.79

Tabela 5.2: **Observáveis estáticos do núcleon para diferentes parâmetros de acoplamento de spin no modelo gaussiano. Comparação com os cálculos de Konen e Weber[70] com $m = 330\text{MeV}$ e $\beta = 554.3\text{MeV}$ (em seu trabalho o parâmetro da gaussiana é $\frac{\beta}{\sqrt{3}}$). Valores experimentais apresentados na última linha.**

[†] O sinal do segundo termo na Lagrangeana Eq.4.1 foi trocado.

os resultados dos observáveis estáticos do núcleon obtidos por eles.

Na Tabela.5.2, com relação ao acoplamento misto com o sinal do segundo termo invertido na Lagrangeana efetiva, Eq.(4.1), notemos que os momentos magnéticos do próton e do nêutron discordam fortemente dos valores experimentais, apesar do ajuste razoável dos respectivos raios quadráticos médios. Esse acoplamento se reduz ao projetor de energia negativa $\frac{1-\gamma^0}{2}$, no referencial de repouso do núcleon. Ou seja, ele projeta nas componentes inferiores dos spinores resultando em termos proporcionais ao quadrado do momento, ou termos na onda D do par acoplado.

5.3 Sumário

Através dos resultados numéricos obtivemos várias conclusões sobre o modelo $N - 3q$ baseado na Lagrangeana efetiva, Eq.(4.1), com a corrente eletromagnética do núcleon avaliada em

termos de uma função de onda de três quarks constituintes definida na Frente de Luz, que resumiremos abaixo:

-O modelo tem a simetria $SU(6)$ quebrada, o que é expresso pelos valores não nulos do fator de forma elétrico do nêutron;

-O fator de forma elétrico do nêutron apresenta forte sensibilidade ao tipo de acoplamento de spins entre quarks e fraca sensibilidade ao detalhe da da função de onda (gaussiana ou polinomial). O ajuste do valor experimental para o raio quadrático médio do nêutron é obtido com o acoplamento puramente escalar.

-No geral, o modelo $N - 3q$ mostra, para o próton, fraca sensibilidade qualitativa tanto em relação ao acoplamento de spins quanto ao detalhe da componente de momento da função de onda. E ajusta qualitativamente as quantidades estáticas do próton, e fatores de forma sem preferência específica de acoplamento.

-No entanto, os fatores de forma elétricos e magnéticos do próton comparados aos dados experimentais, explicita a limitação do modelo. Na razão $\frac{\mu_p G_{Ep}}{G_{Mp}}$, os cálculos subestimam os dados experimentais.

-Os resultados teóricos para os fatores de forma do próton mostram diferenças quando obtidas com parâmetros que ajustam μ_p ou μ_n . Por exemplo, vimos que enquanto o ajuste melhora o valor de r_p em relação ao dado experimental, o fator de forma magnético superestima os resultados experimentais.

-A correlação entre μ_p e $m_N r_p$ é pouco sensível ao modelo de acoplamento.

-A correlação entre μ_p e μ_n é pouco sensível ao momento gaussiano ou polinomial. Entretanto é dependente da forma de acoplamento escalar, misto ou vetorial.

Capítulo 6

Conclusões

O modelo relativístico fenomenológico para o núcleon, formado por quarks constituintes, cuja Lagrangeana efetiva abrange as possibilidades de acoplamentos escalar, vetorial ou misto entre pares de quarks mostrou resultados teóricos originais para os observáveis eletromagnéticos.

Em primeiro lugar, de um ponto de vista qualitativo, a maneira pela qual o modelo foi construído contrasta com modelos cuja construção é baseada no formalismo de Bakamjian-Thomas na Frente de Luz. Ou seja, o modelo do núcleon na Frente de Luz baseado em Teoria Quântica de Campos, com observáveis expressos através de diagramas de Feynman é diferente do modelo de função de onda do núcleon obtido da construção de Bakamjian-Thomas, onde a função de onda é auto-função do operador massa de operadores de spin, sendo que estes últimos não contém interação. Sendo a Frente de Luz uma ferramenta adequada para a construção do nosso modelo, vimos que a diferença entre ambas as construções é expressa através dos argumentos das rotações de Melosh. Assim, dependendo do acoplamento usado na Lagrangeana efetiva, cada possibilidade apresenta uma diferença peculiar, em relação à construção B.T.. Escolhendo um acoplamento misto para o par de quarks, temos similaridade qualitativa com o esquema B.T.. A diferença fica por conta da massa total presente nas rotações de Melosh. Enquanto que na construção de B.T. a massa total presente em todas rotações de Melosh é a massa livre do sistema de três quarks, no caso de acoplamento misto a massa total presente nas rotações de Melosh é a massa física no núcleon, que

portanto contém a interação. Se escolhermos um acoplamento escalar, a diferença é ainda maior em relação à B.T.. Contrastando com a massa livre presente nas rotações de Melosh da construção (B.T.), o acoplamento escalar, além da diferença com relação à massa total, apresenta também diferença com relação ao referencial onde o par está acoplado com spin total nulo. Para o par acoplado, as rotações de Melosh tem os argumentos definidos no referencial de repouso do par. Aqui o momento total nestas rotações de Melosh do par é portanto o momento total do par. Já o terceiro quark tem sua rotação de Melosh no centro de massa do núcleon, com a massa física do núcleon total presente nessa rotação de Melosh.

Do ponto de vista dos resultados numéricos, o modelo apresentou resultados significativos com relação ao nêutron. Na escala da ordem da massa do núcleon ($\Lambda \sim 1\text{GeV}^2$) o modelo confirma a evidência experimental da quebra de simetria $SU(6)$, apresentando um fator de forma elétrico do nêutron não nulo e, conseqüentemente, fornece um valor para o raio quadrático médio. Mostramos que o acoplamento favorecido é o escalar, tanto com relação ao fator de forma elétrico do nêutron, como em relação às quantidades estáticas (raio quadrático médio do nêutron e momento magnético do nêutron). Esse resultado mostra que, apesar do nêutron possuir uma carga total nula, sua distribuição de quarks é assimétrica, possivelmente tendo origem na interação spin-spin, responsável pela separação núcleon-delta. Esse efeito surge porque na interação spin-spin o quark u é forçado para o centro e os quarks d para a periferia do nêutron[20], o que indica através da nossa análise o favorecimento de pares escalares de quark de isospin nulo. Por outro lado, um acoplamento vetorial entre quarks está em total desacordo com os dados experimentais do nêutron. Outro ponto que chamamos a atenção com relação ao fator de forma elétrico do nêutron além da forte sensibilidade com relação aos acoplamentos é a fraca sensibilidade com relação à componente de momento da função de onda.

Os resultados relativos ao próton mostram fraca sensibilidade qualitativa do modelo, tanto com relação aos acoplamentos quanto à componente de momento da função de onda. Observamos isto principalmente em relação à correlação entre momento magnético do próton e o adimensional $m_N r_p$, generalizando os resultados da Ref.[34]. Utilizamos os mesmos modelos para as componentes de momento da função, gaussiana e polinomial, apresentados

na Ref.[34], com a diferença de que nesta referência o esquema de acoplamento de spins é o de B.T..

Porém, a confrontação entre o modelo $N - 3q$ na Frente de Luz, baseado em Lagrangeanas efetivas e os mais recentes dados experimentais mostrou que existem limitações. Todos os acoplamentos, isto é, escalar, misto e vetorial, seja com modelos polinomiais ou gaussianas subestimam os dados experimentais da razão $\frac{\mu_p G_{EP}}{G_{Mp}}$ [31].

Essa dificuldade do modelo em relação aos dados experimentais mostra evidentemente as suas limitações. Porém, longe de seu esgotamento, o fato de muitas alternativas não terem sido ainda testadas, também mostram a necessidade de continuar o presente estudo. Vemos, como perspectivas duas diferentes possibilidades, que, uma vez exploradas, podem contribuir no sentido de eliminar as discrepâncias evidenciadas acima. Na primeira possibilidade, ressaltamos que o modelo usou apenas dois tipos de invariantes para o vértice $N - 3q$, pelo simples critério desses invariantes terem uma estreita relação com a construção B.T.. No entanto, isso não quer dizer que da lista total de 8 invariantes para o núcleon[25] não possamos usar outros invariantes para acoplar o par de quarks. Na Ref.[71], por exemplo, a inclusão do acoplamento axial-vetor produz ajustes diferentes da razão $\frac{\mu_p G_{EP}}{G_{Mp}}$ em relação ao modelo proposto nesta tese. Por outro lado, na linha de implementar novas formas de funções de onda, seria sugestivo o uso de funções de onda do tipo de Faddeev[54, 72]. Apesar de seu caráter não confinante, são motivadas pelo modelo de Nambú-Jona-Lasinio, que tem a geração da massa do quark constituinte proveniente da quebra espontânea de simetria quiral. Também, por esse caminho, poderíamos adotar um fator de forma para o diquark.

Uma outra possibilidade de explorar do modelo $N - 3q$ é a busca de eventuais contribuições de diagramas tipo Z, como mencionamos no Capítulo 3. Recentemente essa problemática foi investigada em relação à corrente eletromagnética, nas coordenadas da Frente de Luz, para sistemas de dois corpos. Com relação ao núcleon, a questão de possíveis contribuições do mecanismo de produção de pares na corrente eletromagnética está ainda em aberto e não foi explorada, e, além do mais, possui uma relação intrínseca com os possíveis invariantes, como vimos em relação à corrente eletromagnética do pión, no capítulo 2.

Portanto a limitação evidenciada pelos dados experimentais indicam, longe de um es-

gotamento do modelo $N - 3q$, uma abertura para a investigação de novas alternativas no sentido de diminuir a discrepância com os novos dados experimentais, em particular relativos à razão $\frac{\mu_p G_{Ep}}{G_{Mp}}$.

Apêndice A

Spinor na Frente de Luz

A construção do spinor na Frente de Luz deve obedecer a duas exigências físicas. A primeira e óbvia, é que seja solução da equação de Dirac, e a segunda, de que não deve depender da variável de momento dinâmico. Esta independência de k^- no spinor implica em que a rotação de Wigner é a identidade para transformações cinemáticas na Frente de Luz (apêndice B). Esta propriedade torna conveniente a definição da base dos estados de partícula no plano-nulo ($x^+ = 0$) através desses spinores.

Por simplicidade, o spinor não será escrito no espaço das coordenadas. Apenas no espaço dos momentos e, portanto denotamos

$$u_{fl} \equiv u(p^+, p_\perp), \quad (\text{A.1})$$

onde u_{fl} é o spinor na Frente de Luz.

Em (A.1) está explícito a exigência de que u_{fl} é dependente apenas das variáveis cinemáticas. A partir da primeira exigência (u_{fl} deve ser solução da equação de Dirac)

$$u_{fl} = (\not{p} + m)O \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

onde χ_s é o spinor de Pauli; O , um operador spinorial. No caso do spinor de Dirac, o operador O é apenas uma quantidade escalar que dá a normalização do spinor:

$$O = \frac{1}{\sqrt{2m(p^0 + m)}} \quad (\text{A.3})$$



O spinor u_D de Dirac satisfaz a equação de Dirac. Ou seja

$$(\not{p} - m)u_D = 0, \quad (\text{A.4})$$

e u_D é escrito como

$$u_D = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(p^0 + m)}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Nas coordenadas da Frente de Luz u_{fl} é escrito como

$$u_{fl} = u(p, s) = \left(\frac{p^+ \gamma^- + p^- \gamma^+}{2} - \vec{p}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp + m \right) O \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

e assim, para calcular a dependência em p^- em (A.6) implica definirmos

$$O = \frac{\gamma^+ \gamma^0}{\sqrt{2m2p^+}}, \quad (\text{A.7})$$

com a normalização $\bar{u}u = 1$.

Rotação de Melosh

A transformação unitária que conecta os spinores da Frente de Luz com spinores de Dirac é chamada Rotação de Melosh. Para o caso dos spinores de energia positiva, a rotação é deduzida explicitamente a partir de (A.6) e (A.7):

$$u(p, s) = \frac{\not{p} + m_N}{2\sqrt{p^+ m_N}} \gamma^+ \gamma^0 \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

O projetor de energia positiva é escrito como

$$\sum_{1,2} u_D(\vec{p}, s) \bar{u}_D(\vec{p}, s) = \frac{\not{p} + m}{2m}. \quad (\text{A.9})$$

Usando da propriedade da Eq.(A.9), e que esse spinor representa uma partícula em sua "camada de massa" a Eq.(A.8) pode ser reescrita como

$$u(p, s) = 2m \sum_{s'} u_D(\vec{p}, s') \bar{u}_D(\vec{p}, s') \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m2p^+}} \gamma^+ \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Escrevendo explicitamente o spinor \bar{u}_D , a Eq.(A.10) resulta em

$$u(p, s) = u(p^+, \vec{p}_\perp, s) = 2m \sum_{s'} u_D(\vec{p}, s') \frac{(\bar{\chi}_s \ 0)(\not{p} + m)2m\gamma^+ \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2m}2p^+ \sqrt{2m(p^0 + m)}}. \quad (\text{A.11})$$

O outro fator $2m$ vem de $(\not{p} + m)^2$ na Eq.(A.11). Substituindo as matrizes de Dirac por suas expressões em termos das matrizes de Pauli[73], temos que

$$u(p, s) = u_D(\vec{p}, s) \frac{(\chi_{s'}^\dagger \ 0)}{\sqrt{(p^+ + m)^2 + \vec{p}_\perp^2}} \times \begin{pmatrix} p^+ + m + \vec{p}_\perp \cdot \vec{\sigma}_\perp \sigma_3 & (p^+ + m)\sigma_3 + \vec{p}_\perp \cdot \vec{\sigma}_\perp \\ (\not{p} - m)\sigma_3 + \vec{p}_\perp \cdot \vec{\sigma}_\perp & p^+ - m + \vec{p}_\perp \cdot \vec{\sigma}_\perp \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

ou seja,

$$u(p, s) = \sum_{s'} \frac{u_D(\vec{p}, s')}{\sqrt{(p^+ + m)^2 + \vec{p}_\perp^2}} \chi_{s'}^\dagger (p^+ + m + \vec{p}_\perp \cdot \vec{\sigma}_\perp \sigma_3) \chi_s. \quad (\text{A.13})$$

A Eq.(A.13) pode ser escrita de maneira mais conveniente como

$$u(p, s) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(p^0 + m)}} \begin{pmatrix} R_M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Na Eq.(A.14) R_M é a rotação de Melosh para os spinores de energia positiva, e é definida como

$$R_M = \frac{p^+ + m - i\vec{\sigma} \cdot (\vec{n} \times \vec{p}_\perp)}{\sqrt{(p^+ + m)^2 + \vec{p}_\perp^2}}. \quad (\text{A.15})$$

O passo final em (A.14) é comutar os dois operadores no espaço dos spinores de Dirac. No entanto,

$$\left[\not{p} + m, \begin{pmatrix} R_M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \neq 0, \quad (\text{A.16})$$

Com o propósito de comutar o operador de Dirac que contém a rotação de Melosh com $(\not{p} + m)$, escolhemos um operador mais geral que comuta com $(\not{p} + m)$ sem alterar o spinor

da Eq.(A.14):

$$\left[\not{p} + m, \begin{pmatrix} R_M & 0 \\ 0 & R_M^\dagger \end{pmatrix} \right] = 0, \quad (\text{A.17})$$

e a questão fica resolvida. Vamos provar a Eq.(A.17), primeiro temos que

$$\begin{pmatrix} R_M & 0 \\ 0 & R_M^\dagger \end{pmatrix} = \frac{p^+ + m + \gamma^0 \gamma^3 \vec{\gamma} \cdot \vec{p}_\perp}{\sqrt{(p^+ + m)^2 + \vec{p}_\perp^2}} \quad (\text{A.18})$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} [\gamma^0 \gamma^3 \gamma_\perp, \gamma^0] &= 0, \\ [\gamma^0 \gamma^3 \gamma_\perp, \gamma^3] &= 0, \\ [\gamma^0 \gamma^3 \gamma_\perp, \gamma_\perp] &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

portanto a Eq.(A.17) tem o comutador igual a zero e o spinor na Frente de Luz pode ser escrito em termos dos spinores de Dirac como

$$u(p^+, \vec{p}_\perp, s) = \begin{pmatrix} R_M & 0 \\ 0 & R_M^\dagger \end{pmatrix} u_D(\vec{p}, s). \quad (\text{A.20})$$

Observemos que da Eq.s(A.5) e (A.14) podemos deduzir que

$$\bar{u}_D(\vec{p}, s') u(p^+, \vec{p}_\perp, s) = \langle s' | R_M | s \rangle. \quad (\text{A.21})$$

A Eq.(A.21) é comumente usada para projeção de spinores de Dirac na Frente de Luz.

Apêndice B

Transformações Cinemáticas

O número de geradores que mantém o hiper-plano $x^+ = 0$ invariante é sete. Porém, aqueles que obedecem essa condição, e que incluem transformações de Lorentz (“boosts” cinemáticos) são 3, também chamado grupo de estabilidade. São eles K_3 (“boost” ao longo do eixo z); $E_1 = (K_1 + J_2)$ (“boost” ao longo do eixo x e rotação em torno de y ; $E_2 = (K_2 - J_1)$ (“boost” ao longo do eixo y e menos rotação em torno de x). Assim os momentos cinemáticos, sob ação dos 3 geradores cinemáticos (K_3, E_1, E_2) do grupo de Poincaré são dados por

$$\begin{aligned} p'^+ &= p^+ e^{\beta_3}, \\ \vec{p}'_{\perp} &= \vec{p}_{\perp} + \vec{\beta}_{\perp} p^+ e^{\beta_3}, \end{aligned} \tag{B.1}$$

o gerador J_3 é uma rotação trivial em torno de z .

Na Eq.(B.1) β_3 e $\vec{\beta}_{\perp}$ são parâmetros da transformação cinemática dados por $\beta_3 = \ln(\frac{p'^+}{m})$ e $\vec{\beta}_{\perp} = \frac{\vec{p}'_{\perp} - \vec{p}_{\perp}}{p^+}$. A transformação cinemática de spinores é dada pela ação de um “boost” cinemático que é escrito na representação spinorial de Dirac. Veremos adiante que essa transformação realizada em um spinor da Frente de Luz da Eq.(A.8) mudará apenas o argumento de momento, não havendo, portanto, mistura das projeções de spin. Portanto a rotação de Wigner é a identidade. No caso da transformação cinemática ser aplicada em um spinor de Dirac, a rotação de Wigner é a rotação de Melosh.

A forma geral das transformações sobre spinores, na qual estão incluídos “boosts” e ro-

tação é dada pela transformação unitária[73].

$$U(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}. \quad (\text{B.2})$$

Assim, para “boosts”

$$U(L_B) = e^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{K}}, \quad (\text{B.3})$$

e, para rotações,

$$U(\Lambda_R) = e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{J}}. \quad (\text{B.4})$$

A representação unitária no espaço spinorial para uma transformação Λ_f do grupo de estabilidade da Frente de Luz, é escrita como

$$U(\Lambda_f) = e^{-i(\beta_1 E_1 + \beta_2 E_2)} \cdot e^{-i\beta_3 K_3}, \quad (\text{B.5})$$

onde $E_1 = K_1 + J_2$ e $E_2 = K_2 - J_1$.

Vamos estudar a ação do operador de “boost” do grupo de estabilidade sobre um spinor da Frente de Luz. No referencial de repouso, $p^+ = m$ e $\vec{p}_\perp = 0$ e o spinor da Frente de Luz pode ser escrito como

$$\begin{aligned} u(0, s) &= \frac{(\frac{p^+\gamma^-}{2} - \vec{p}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp + m)\gamma^+\gamma^0}{\sqrt{2m2p^+}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\frac{\gamma^-}{2} + 1)\gamma^+ \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1 + \gamma^0}{2}\gamma^+\gamma^0 \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Primeiramente, para a transformação de Lorentz ao longo da direção z, temos que a respectiva representação de Dirac é escrita como

$$\begin{aligned} e^{-i\beta_3 K_3} &= \exp(-i\beta_3 \frac{\sigma_{03}}{2})u(m, 0) \\ &= \exp(-i\beta_3 i \frac{i}{4}[\gamma_0, \gamma_3]) \\ &= \exp(\beta_3 \frac{\gamma_0 \gamma_3}{2}) \\ &= \cosh(\frac{\beta_3}{2}) - \gamma_3 \gamma_0 \sinh(\frac{\beta_3}{2}). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Observemos que o parâmetro β_3 acima pode ser escrito em termos do quadri vetor velocidade, usando que $p^+ p^- = m^2$

$$\begin{aligned}\beta_3 &= \ln\left(\frac{p^+}{m}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p^{+2}}{m^2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p^+}{p^-}\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p^0 + p^3}{p^0 - p^3}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m\frac{E}{m} + p^3}{m\frac{E}{m} - p^3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left[\left(1 + \frac{p^3}{m\gamma}\right)\left(1 + \frac{p^3}{m\gamma}\right)^{-1}\right],\end{aligned}\tag{B.8}$$

onde $\gamma = \frac{E}{m}$, sendo $v_3 = \frac{p_3}{m\gamma}$, que implica em

$$\beta_3 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + v_3}{1 - v_3}\right).\tag{B.9}$$

A transformação de Lorentz pode ser escrita como uma rotação no espaço de Minkowski, por um ângulo imaginário, ou seja, usando $x^\mu = (it, \vec{x})$, e, colocando a direção do “boost” na direção z , temos

$$\begin{pmatrix} it' \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(i\chi) & \text{sen}(i\chi) \\ \text{sen}(i\chi) & \cos(i\chi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} it \\ x^3 \end{pmatrix},\tag{B.10}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} t' \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) & \text{senh}(\chi) \\ \text{senh}(\chi) & \cosh(\chi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x^3 \end{pmatrix}.\tag{B.11}$$

No entanto, as transformações de Lorentz são dadas por

$$\begin{pmatrix} t' \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x^3 \end{pmatrix},\tag{B.12}$$

Comparando (B.11) com (B.12) vemos que

$$\begin{aligned}\cosh\chi &= \gamma; \\ \text{senh}\chi &= \gamma v_3.\end{aligned}\tag{B.13}$$

Portanto,

$$\tanh\chi = \frac{\gamma v_3}{\gamma} = v_3\tag{B.14}$$

Após uma pequena manipulação algébrica,

$$\chi = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+v_3}{1-v_3}\right). \quad (\text{B.15})$$

Novamente comparando as Eq.(B.15) com a Eq.(B.9) vemos que $\chi = \beta_3$. Ou seja, o parâmetro β_3 é o ângulo de rotação no espaço de Minkowski, Eq.(B.12).

Voltando a Eq.(B.7), precisamos de $\cosh(\frac{\beta_3}{2})$ e $\sinh(\frac{\beta_3}{2})$. Da Eq.(B.9) temos que

$$\cosh\beta_3 = \gamma = \frac{E}{m} \begin{cases} \cosh\frac{\beta_3}{2} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \\ \sinh\frac{\beta_3}{2} = \sqrt{\frac{E-m}{2m}} \end{cases}. \quad (\text{B.16})$$

Introduzindo a Eq.(B.16) em (B.7), e aplicando no spinor da Eq.(B.6) obtemos que

$$u(p^+, 0, s) = \left[\sqrt{\frac{E+m}{2m}} + \gamma_0 \gamma_3 \sqrt{\frac{E-m}{2m}} \right] u(0, s). \quad (\text{B.17})$$

Ou seja,

$$u(p^+, 0, s) = \frac{(p^0 \gamma^0 + p^3 \gamma^3) \gamma^0 + m}{\sqrt{2m(p^0 + m)}} u(0, s). \quad (\text{B.18})$$

Finalmente, uma transformação cinemática na direção z , na representação de Dirac, é escrita como

$$e^{-i\beta_3 K_3} = \frac{(p^0 \gamma^0 + p^3 \gamma^3) \gamma^0 + m}{\sqrt{2m(p^0 + m)}}. \quad (\text{B.19})$$

A forma explícita do spinor da Eq.(B.18) é obtida após uma pequena álgebra:

$$\begin{aligned} u(p^+, 0, s) &= \left[p^0 + m - \frac{p^3 (\gamma^+ - \gamma^-) (\gamma^+ + \gamma^-)}{4} \right] \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2m(p^0 + m)}} \left(1 + \frac{\gamma^-}{2} \right) \gamma^+ \gamma^0 \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

usando o fato que

$$\gamma^- \gamma^+ \gamma^- \gamma^+ = 4 \gamma^+ \gamma^-, \quad (\text{B.21})$$

$$\gamma^+ \gamma^- \gamma^+ = \gamma^+, \quad (\text{B.22})$$

então

$$\begin{aligned}
u(p^+, 0) &= \frac{1}{2\sqrt{2m(p^0 + m)}} \left[p^0 + m - p^3 + (p^0 + m + p^3) \frac{\gamma^-}{2} \right] \gamma^+ \gamma^0 \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2m2p^+}} \left(\frac{p^+ \gamma^-}{2} + m \right) \gamma^+ \gamma^0 \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{B.23}$$

Na Eq.(B.23), os momentos foram escritos nas coordenadas da Frente de Luz, com a condição de que a partícula está na camada de massa, ou seja $p^- = \frac{m^2}{p^+}$.

Observemos que a Eq.(B.23) é o spinor da Frente de Luz, Eq.(A.8) para momento transversal zero. Uma nova transformação cinemática tal que a partícula ganhe momento transversal de acordo com a Eq.(B.6), é dada por

$$u(p^+, \vec{p}_\perp, s) = \exp(-i\vec{\beta}_\perp \cdot \vec{E}_\perp) u(p^+, 0, s). \tag{B.24}$$

Na representação de Dirac o operador de “boost” em (B.24) resulta em $\exp(-i[\beta_1(K_1 + J_2) + \beta_2(K_2 - J_1)])$, onde

$$E_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2} [\gamma_0, \gamma_1] + \frac{i}{2} [\gamma_1, \gamma_3] \right) = -i\gamma_1 \gamma^+, \tag{B.25}$$

e

$$E_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2} [\gamma_0, \gamma_2] - \frac{i}{2} [\gamma_1, \gamma_3] \right) = -i\gamma_2 \gamma^+. \tag{B.26}$$

Assim, das Eq.s(B.24), (B.25) e (B.26), temos que

$$u(p^+, \vec{p}_\perp, s) = \exp[-i\beta \left(\frac{-i}{2} \vec{\gamma}_\perp \gamma^+ \right)] u(p^+, 0, s). \tag{B.27}$$

Usando a propriedade de que $(\gamma^+)^2 = 0$ na expansão em série de Taylor da exponencial, temos que

$$\begin{aligned}
u(p^+, \vec{p}_\perp, s) &= \frac{1}{\sqrt{2m2p^+}} \left(1 - \frac{1}{2} \vec{\beta}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp \gamma^+ \right) \left(\frac{p^+ \gamma^-}{2} + m \right) \gamma^+ \gamma^0 \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2m2p^+}} \left[\frac{p^+ \gamma^-}{2} - \vec{p}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp + m \right] \gamma^+ \gamma^0 \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{B.28}$$

Na Eq.(B.28) foi usado que $\vec{\beta}_\perp = \frac{\vec{p}_\perp}{p^+}$. Portanto, a partir do referencial de repouso da partícula, a ação dos “boosts” do grupo de estabilidade resulta no spinor do Frente de Luz:

$$u(p^+, \vec{p}_\perp, s) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m2p^+}} \gamma^+ \gamma^0 \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.29})$$

Covariância do Spinor na Frente de Luz

A forma do spinor na Frente de Luz não é alterada nas transformações cinemáticas. Apliquemos uma transformação cinemática na Eq.(B.30). Ou seja

$$U(\beta_3, \beta_\perp) u(p^+, \vec{p}_\perp, s) = e^{-i\vec{\beta}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp} e^{-i\beta_3 K_3} u(p^+, \vec{p}_\perp, s). \quad (\text{B.30})$$

Fazendo a primeira operação de “boost” ao longo do eixo z, temos

$$\begin{aligned} e^{-i\beta_3 K_3} u(p^+, \vec{p}_\perp, s) &= \left(\cosh \frac{\beta_3}{2} - \gamma_3 \gamma_0 \sinh \frac{\beta_3}{2} \right) \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2p^+ 2m}} \gamma^+ \gamma^0 \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\cosh(\frac{\beta_3}{2})(1 - \tanh \frac{\beta_3}{2})}{\sqrt{2p^+ 2m}} \left[\frac{p^+ \gamma^-}{2} \frac{1 + \tanh \frac{\beta_3}{2}}{1 - \tanh \frac{\beta_3}{2}} - \vec{p}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp + m \right] \gamma^+ \gamma^0 \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Das transformações cinemáticas, Eq.(B.1),

$$p'^+ = p^+ e^{\beta_3} = e^{\ln \frac{q^+}{m}} p^+ = \frac{q^+}{m} p^+. \quad (\text{B.32})$$

Usando também que

$$\cosh \frac{\beta_3}{2} = \sqrt{\frac{q^0 + m}{2m}}; \quad \sinh \frac{\beta_3}{2} = \sqrt{\frac{q^0 - m}{2m}} \quad (\text{B.33})$$

e

$$p^+ \left(\frac{1 + \tanh \frac{\beta_3}{2}}{1 - \tanh \frac{\beta_3}{2}} \right) = p^+ \left(\frac{q^0}{m} + \frac{q_z}{m} \right) = \frac{Q^+}{m} p^+ = p'^+. \quad (\text{B.34})$$

Das Eqs.(B.3), (B.34) resulta que

$$u(p'^+, \vec{p}_\perp) = \left(\frac{p'^+ \gamma^-}{2} - \vec{p}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp + m \right) \frac{\gamma^+ \gamma^0}{\sqrt{2m2p'^+}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.35})$$

E aplicando o “boost” cinemático do grupo de estabilidade que inclui rotações na Eq.(B.35), chegamos em

$$\begin{aligned}
e^{-i\vec{\beta}_\perp \cdot \vec{E}_\perp} u(p^+, \vec{p}_\perp) &= \left(1 - \frac{\vec{\beta}_\perp}{2} \cdot \vec{\gamma}_\perp \gamma^+\right) u(p^+, \vec{p}_\perp) \\
&= e^{-i\vec{\beta}_\perp \cdot \vec{E}_\perp} u(p^+, \vec{p}_\perp) \\
&= \left(\frac{p^+ \gamma^-}{2} - (\vec{p}_\perp + \vec{\beta}_\perp p^+) \cdot \vec{\gamma}_\perp + m\right) \frac{\gamma^+ \gamma^0}{\sqrt{2m2p^+}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{p^+ \gamma^-}{2} - \vec{p}'_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp + m\right) \frac{\gamma^+ \gamma^0}{\sqrt{2m2p^+}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{B.36}
\end{aligned}$$

onde

$$\vec{p}'_\perp = \vec{p}_\perp + \vec{\beta}_\perp p^+ = \vec{p}_\perp + \vec{\beta}_\perp p^+ e^{\beta_3}. \tag{B.37}$$

Assim,

$$u(p^+, \vec{p}'_\perp, s) = U(\beta_3, \vec{\beta}_\perp) u(p^+, \vec{p}_\perp, s). \tag{B.38}$$

Observemos na Eq.(B.38) que a ação de $U(\beta_3, \vec{\beta}_\perp)$ no spinor da Frente de Luz mudou apenas os argumentos dos momentos mantendo a mesma forma. A projeção de spin, s , no novo referencial não foi alterada. Ou seja, na operação acima não houve mistura das componentes χ_s , o que é uma peculiaridade apenas das transformações dos geradores do grupo de estabilidade (E_\perp, K_3) .

Rotação de Wigner

Definimos $L(p)$ como a transformação de Lorentz que leva o referencial de repouso ao referencial no qual a partícula tem momento p . Sendo Λ uma transformação de Lorentz geral, $L(\Lambda p)$ leva o referencial de repouso da partícula para o qual ela tem momento $p' = \Lambda p$. Como já apresentamos, $U(\Lambda)$ ou $U(L(p))$ é a representação unitária da transformação de Lorentz no espaço spinorial. Em particular, podemos escrever que o spinor de Dirac é $u_D(p, s) = U(L(p))u_D(0, s)$. Assim, realizando uma transformação de Lorentz geral, o spinor é modificado para

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)u_D(p, s) &= U(\Lambda)U(L(p))u_D(0, s) \\
&= U(L(\Lambda p))U^{-1}(L(\Lambda p))U(\Lambda)U(L(p))u_D(0, s) \\
&= U(L(\Lambda p)L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))u_D(0, s) \\
&= \sum_{s'} U(L(\Lambda p))u_D(0, s')\bar{u}_D(0, s')U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))u_D(0, s) \\
&= \sum_{s'} \bar{u}_D(0, s')U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))u_D(0, s)u_D(p', s') \\
&= \sum_{s'} D_{ss'}(R_W(\Lambda, p))u_D(p', s'), \tag{B.39}
\end{aligned}$$

onde

$$R_W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p), \tag{B.40}$$

e

$$D_{ss'}(R_W(\Lambda, p)) = \bar{u}_D(0, s')U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))u_D(0, s). \tag{B.41}$$

A ação de uma transformação de Lorentz em um spinor qualquer de momento p , resulta numa mudança de p para p' , mais uma rotação dos spinores de Pauli, devido à rotação de Wigner, Eq.(B.40) como descrito pela igualdade da Eq.(B.39).

Podemos escrever que o spinor na Frente de Luz é $u(p, s) = U(L_f(p^+, \vec{p}_\perp))u(0, s)$, conforme a Eq.(B.38), onde $L_f(p^+, \vec{p}_\perp)$ é a transformação geral pertencente ao grupo de estabilidade da Frente de Luz que leva o referencial de repouso da partícula para o referencial no qual ela tem momento p . Denotamos Λ_f como uma transformação geral pertencente ao grupo de estabilidade. A representação unitária no espaço spinorial dessas transformações é $U(L_f(p^+, \vec{p}_\perp))$ e $U(\Lambda_f)$. A ação de $U(\Lambda_f)$ em um spinor da Frente de Luz resulta em

$$\begin{aligned}
U(\Lambda_f)u(p, s) &= U(\Lambda_f)U(L_f(p^+, \vec{p}_\perp))u(0, s) \\
&= U(L_f(p'^+, \vec{p}'_\perp)L_f^{-1}(p^+, \vec{p}_\perp)\Lambda_f L_f(p^+, \vec{p}_\perp))u(0, s) \\
&= \sum_{s'} D_{ss'}(R_W(\Lambda_f; p^+, \vec{p}_\perp))u(p', s'), \tag{B.42}
\end{aligned}$$

onde, na Eq.(B.42) temos também que

$$U(\Lambda_f) \equiv U(\beta_3, \vec{\beta}_\perp). \tag{B.43}$$

Comparando com a Eq.(B.38), notamos que a ação da transformação cinemática do grupo de estabilidade não modifica a projeção de spin s , e também que a única modificação é a mudança de argumentos dos momentos do spinor na Frente de Luz. Das Eqs.(B.38) e (B.42) temos que

$$\sum_{s'} D_{ss'}(R_W(\Lambda_f; p^+, \vec{p}_\perp))u(p', s') = u(p', s). \quad (\text{B.44})$$

Portanto

$$D_{ss'}(R_W(\Lambda_f; p^+, \vec{p}_\perp)) = \delta_{ss'} \text{ e } R_W(\Lambda_f; p^+, \vec{p}_\perp) = I. \quad (\text{B.45})$$

Portanto a rotação de Wigner é a identidade para transformações cinemáticas pertencentes ao grupo de estabilidade da Frente de Luz.

A rotação de Wigner para o spinor de Dirac associada à transformação $L_f^{-1}(p)$ do grupo de estabilidade que leva a partícula de momento p para seu referencial de repouso é a rotação de Melosh inversa. Para entendermos isto escrevemos

$$U(L_f(p))u_D(p, s) = \sum_{s'} U(L_f^{-1}(p))u(p, s')\bar{u}(p, s')u_D(p, s), \quad (\text{B.46})$$

sendo que $u(0, s') = U(L_f^{-1}(p))u(p, s)$, Eqs(B.44) e (B.45), temos que

$$U(L_f^{-1}(p))u_D(u, s) = \sum_{s'} \langle s | R_M^\dagger | s' \rangle u(0, s'), \quad (\text{B.47})$$

onde usamos a Eq.(A.21) para escrever a rotação de Melosh. E finalmente

$$D_{ss'}(R_W(L_f^{-1}(p), p)) = \langle s | R_M^\dagger | s' \rangle. \quad (\text{B.48})$$

Apêndice C

Construção Bakamjian-Thomas

O estado do núcleon $|p_N^+, \vec{p}_{\perp N}, S_N, \tau_N\rangle$ é representado por uma função de onda simétrica nos graus de liberdade dos quarks, $k_i^+, \vec{k}_{i\perp}, s_i, \tau_i$, ($i = 1, 2, 3$); s_i são autovalores da componente longitudinal do operador de spin individual \mathcal{J}_3 da Eq.(2.13). A função de onda de cor é totalmente anti-simétrica. As funções de onda são da forma[23]

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{p}_N, s_N, \tau_N}(\vec{q}_1, s_1, \tau_1, \vec{k}_2, s_2, \tau_2, \vec{k}_3, s_3, \tau_3) &= \psi_{m_N, s_N, \tau_N}(x_1, \vec{q}_{1\perp}; s_1, \tau_1, \dots) \delta(\vec{p} - \vec{p}_N) \\ &\times \left| \frac{\partial(\vec{p}_N, x_1 \vec{q}_{1\perp}, x_2 \vec{q}_{2\perp}, x_3 \vec{q}_{3\perp})}{\partial(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3)} \right|^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

onde $\vec{k}_1 = (k_1^+, \vec{k}_{1\perp})$. ψ é auto função do operador massa, spin(descritos mais adiante) e isospin. As variáveis x_i , e de centro de massa $\vec{q}_{i\perp}$ e \vec{p}_N são dadas por

$$\begin{aligned} \vec{p} &= (p^+, \vec{p}_{\perp}) = \left(\sum_i k_i^+, \sum_i \vec{k}_{i\perp} \right), \\ x_i &= \frac{k_i^+}{p^+}, \\ \vec{q}_{i\perp} &= \vec{k}_{i\perp} - x_i \vec{p}_{\perp}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Observe que x_i é invariante por uma transformação cinemática e que $\vec{q}_{i\perp}$ é o valor do momento transversal do quark i no centro de massa das três partículas. A conservação de momento total implica que

$$\sum_{i=1}^3 \vec{q}_{i\perp} = 0 \quad e \quad \sum_{i=1}^3 x_i = 1. \quad (\text{C.3})$$

O Jacobiano da transformação de variáveis na Eq.(C.1) é dado por

$$\left| \frac{\partial(\vec{p}_N, x_1\vec{q}_{1\perp}, x_2\vec{q}_{2\perp}, x_3\vec{q}_{3\perp})}{\partial(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3)} \right| = \frac{1}{p^{+2}} \quad (\text{C.4})$$

O operador de massa M_0 do sistema não interagente dos três quarks é uma função das variáveis de momento $x_i, \vec{k}_{i\perp}$

$$M_0^2 = \sum_i \frac{\vec{k}_{i\perp}^2 + m^2}{x_i}. \quad (\text{C.5})$$

Na construção de B.T.[51] o operador de spin total, $\vec{\mathcal{J}}$, na Eq.(2.28), pertencente à álgebra dinâmica, Eq.(2.32), é assumido como sendo operador livre[74]. A interação é introduzida apenas no operador de massa de forma a manter a álgebra de Poincaré[74]. Desta forma, como no caso não relativístico, o spin total $\vec{\mathcal{J}}$ pode ser expresso como a soma da parte orbital e contribuição dos spins

$$\vec{\mathcal{J}} = \sum_{i=1}^3 (\vec{y}_i \times \vec{q}_i + \vec{s}_i), \quad (\text{C.6})$$

onde \vec{y}_i satisfaz, por definição, as relações de comutação canônicas com o momento q_i , e comuta com os operadores s_i .

Os operadores de spins \vec{s}_i estão relacionados ao spin do quark \vec{s}_i pela rotação de Melosh[74]

$$\vec{s}_i = R_M(k_i^+, \vec{k}_{i\perp}) \vec{s}_i R_M^\dagger(k_i^+, \vec{k}_{i\perp}) \quad (\text{C.7})$$

onde a matriz de rotação é dada pela Eq.(A.15). Observe que na rotação de Melosh da Eq.(C.7), k_i^+ é definido no centro de massa das três partículas livres, e, portanto, $k_i^+ = xM_0$, onde M_0 é a massa livre do sistema de três partículas.

A função de spin é simétrica ou antisimétrica para $S_{12} = 1$ e $S_{12} = 0$, respectivamente, sob a troca dos quarks que formam o diquark. Ou seja

$$\phi_{s_N}^{S_{12}}(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) = \langle \frac{1}{2}s_1, \frac{1}{2}s_2, \frac{1}{2}s_3 \mid (S_{12}, \frac{1}{2})_{s_N} \rangle \equiv C_{s_N(s_1+s_2)s_3}^{\frac{1}{2} \quad S_{12} \quad \frac{1}{2}} C_{s_1+s_2s_1s_2}^{S_{12} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}}, \quad (\text{C.8})$$

onde o coeficiente de Clebsch-Gordan[75] é dado por $C_{Mm_1m_2}^{J \quad j_1 \quad j_2} = \langle j_1, m_1; j_2, m_2 \mid JM \rangle$.

Em termos das matrizes de Pauli, essas funções de spin ficam como

$$\begin{aligned} \phi_{s_N}^0(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \bar{s}_1 \mid i\sigma_2 \mid \bar{s}_2 \rangle \delta_{\bar{s}_3, s_N} \\ \phi_{s_N}^1(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i=1}^3 \langle \bar{s}_1 \mid i\sigma_i \sigma_2 \mid \bar{s}_2 \rangle \langle \bar{s}_3 \mid \sigma_i \mid s_N \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

A função ϕ_{s_N, τ_N} é totalmente simétrica sob todas as permutações e é tal que seu spin e isospin totais são $\frac{1}{2}$. Ela é escrita como

$$|\phi_{s_N \tau_N}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi_{s_N}^0\rangle |\phi_{\tau_N}^0\rangle + |\phi_{s_N}^1\rangle |\phi_{\tau_N}^1\rangle \right) \quad (\text{C.10})$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \psi_{m_N, s_N, \tau_N}(x_i, \vec{k}_{1\perp}, s_1, \tau_1, \dots) &= \phi(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) \sum_{\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3} \langle s_1 | R_{1M}^\dagger | \bar{s}_1 \rangle \langle s_2 | R_{2M}^\dagger | \bar{s}_2 \rangle \\ &\langle s_3 | R_{3M}^\dagger | \bar{s}_3 \rangle \phi_{s_N, \tau_N}(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

A função de onda do núcleon, Eq.(C.11), é auto-função do operador M^2 , bem como o operador $\vec{\mathcal{J}}^2$ e \mathcal{J}_3 , Eqs.(2.13) e (2.30):

$$\begin{aligned} M^2 |\psi_{P_N, s_N, \tau_N}\rangle &= M_N^2 |\psi_{P_N, s_N, \tau_N}\rangle \cdot \\ \vec{\mathcal{J}}^2 |\psi_{P_N, s_N, \tau_N}\rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) |\psi_{P_N, s_N, \tau_N}\rangle \cdot \\ \mathcal{J}_3 |\psi_{P_N, s_N, \tau_N}\rangle &= s_N |\psi_{P_N, s_N, \tau_N}\rangle \cdot \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Apêndice D

Fatores de Forma Eletromagnéticos do Núcleon

Os fatores de forma de Dirac e de Pauli do núcleon são obtidos a partir da Eq.(4.2). As correntes eletromagnéticas $J_{aN}^+ - J_{dN}^+$ são decompostas em suas partes escalar e vetorial, (no espaço de spin) com as quais obtemos os fatores de forma F_{1N} e F_{2N} . De maneira geral as correntes microscópicas podem ser escritas como

$$\langle s' | J_{iN}^+ | s \rangle = \int \frac{d^2 \vec{k}_{1\perp} dk_1^+ d^2 \vec{k}_{2\perp} dk_2^+}{k_1^+ k_2^+ k_3^{+2}} \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \times \bar{u}(p', s') O_{iN} u(p, s) \Psi(M'_0) \Psi(M_0), \quad (D.1)$$

onde $\Psi(M_0)$ é a componente de momento da função de onda. Das Eqs.(4.12)-(4.15) temos os respectivos elementos de matriz da parte de spin:

$$\bar{u}(p', s') O_{aN} u(p, s) = 2p^{+2} \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle Tr[\not{k}_2 + m)(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p})(\not{k}_1 + m) \times (\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p}')]\bar{u}(p', s')(\not{k}'_3 + m)\gamma^+(\not{k}_3 + m)u(p, s); \quad (D.2)$$

$$\bar{u}(p', s') O_{bN} u(p, s) = p^{+2} \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \bar{u}(p', s')(\not{k}'_3 + m)\gamma^+(\not{k}_3 + m) \times (\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p})(\not{k}_1 + m)(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p}')(\not{k}_2 + m)u(p, s); \quad (D.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(p', s') O_{cN} u(p, s) &= p^{+2} \langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle \bar{u}(p', s') (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) \times \\ &(\not{k}_3 + m) \gamma^+ (\not{k}'_3 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_2 + m) u(p, s); \end{aligned} \quad (D.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(p', s') O_{dN} u(p, s) &= p^{+2} \text{Tr}[\hat{Q}_q] \text{Tr}[(\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) \times \\ &(\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m)] \bar{u}(p', s') (\not{k}_2 + m) u(p, s). \end{aligned} \quad (D.5)$$

Os elementos de matriz $\langle s' | O_{iN} | s \rangle$ podem ser decompostos como

$$\langle s' | O_{iN} | s \rangle \equiv \bar{u}(p', s') O_{iN} u(p, s) = \langle s' | A_{iN} I + \vec{B}_{iN} \cdot \vec{\sigma} | s \rangle, \quad (D.6)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{iN} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^+ \frac{\not{p}' + m_N}{\sqrt{2m_N 2p'^+}} O_{iN} \frac{\not{p} + m_N}{\sqrt{2m_N 2p^+}} \gamma^+ \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\gamma^+ \frac{\not{p}' + m_N}{\sqrt{2m_N 2p'^+}} O_{iN} \frac{\not{p} + m_N}{\sqrt{2m_N 2p^+}} \right], \end{aligned} \quad (D.7)$$

$$\vec{B}_{iN} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\vec{\gamma} \gamma^5 \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^+ \frac{\not{p}' + m}{\sqrt{2m_N 2p'^+}} O_{iN} \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m_N 2p^+}} \gamma^+ \right]. \quad (D.8)$$

Por simplicidade, e sem perda de generalidade, consideramos que o momento transferido ao núcleon pelo fóton seja na dire ao x . Da Eq.(4.2), temos que

$$\langle s' | J_N^+(Q^2) | s \rangle = \frac{p^+}{m_N} \langle s' | F_{1N}(Q^2) - i \frac{F_{2N}(Q^2)}{2m_N} q \sigma_y | s \rangle, \quad (D.9)$$

Os fatores de forma eletromagnéticos das correntes $J_{aN}^+ - J_{dN}^+$ ficam como

$$\begin{aligned} F_{1iN}(Q^2) &= \frac{m_N}{p^+} \int \frac{d^2 \vec{k}_{1\perp} dk_1^+ d^2 \vec{k}_{2\perp} dk_2^+}{k_1^+ k_2^+ k_3^{+2}} \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \times \\ &A_{iN} \Psi(M'_0) \Psi(M_0), \end{aligned} \quad (D.10)$$

$$\begin{aligned} F_{2iN}(Q^2) &= \frac{2im_N^2}{qp^+} \int \frac{d^2 \vec{k}_{1\perp} dk_1^+ d^2 \vec{k}_{2\perp} dk_2^+}{k_1^+ k_2^+ k_3^{+2}} \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \\ &B_{iN}^y \Psi(M'_0) \Psi(M_0). \end{aligned} \quad (D.11)$$

Como o momento transferido pelo fóton foi considerado na direção x , apenas o coeficiente B_{iN}^y dado por

$$B_{iN}^y = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\gamma^2 \gamma^5 \gamma^+ \frac{\not{p}' + m_N}{\sqrt{2p'^2 + 2m_N}} O_{iN} \frac{\not{p} + m_N}{\sqrt{2p^2 + 2m_N}} \right], \quad (\text{D.12})$$

será calculado na Eq.(D.11).

D.1 Decomposição de J_{bN}^+ e J_{cN}^+

As correntes J_{bN}^+ e J_{cN}^+ cujas componentes escalar e vetorial são dadas pelas Eqs.(D.7) e (D.12), respectivamente, com O_{bN} e O_{cN} dados pelas Eqs.(D.3) e (D.4), possuem um número de termos ($k_i + m$) grande, o que dificulta a manipulação algébrica. Sendo assim, apresentamos em seguida uma técnica segundo a qual transformamos o traço com 8 elementos ($\not{a} + b$) na multiplicação de 2 traços de 4 elementos ($\not{a} + b$).

Os traços associados às Eq.s(D.3) e (D.4) podem ser escrito como

$$\text{Tr} \left[\frac{1 + \gamma^0}{2} O_{1N} \frac{1 + \gamma^0}{2} O_{2N} \right]. \quad (\text{D.13})$$

Da expressão, Eq.(D.13), temos que os elementos não nulos das matrizes $\frac{1 + \gamma^0}{2} O_{iN} \frac{1 + \gamma^0}{2}$ podem ser escritos como a matriz bidimensional

$$\frac{1 + \gamma^0}{2} O_{iN} \frac{1 + \gamma^0}{2} \equiv \mathcal{A}_{jN} + \vec{\mathcal{B}}_{jN} \cdot \vec{\sigma} \quad (j = 1, 2), \quad (\text{D.14})$$

onde as componentes escalar e vetorial no espaço de spin são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{jN} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{1 + \gamma^0}{2} O_{jN} \right], \\ \vec{\mathcal{B}}_{jN} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\vec{\gamma} \gamma^5 \frac{1 + \gamma^0}{2} O_{jN} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Com isso, introduzindo a forma bidimensional dada pela as Eqs.(D.14) na Eq.(D.13) temos que

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\frac{1 + \gamma^0}{2} O_{1N} \frac{1 + \gamma^0}{2} O_{2N} \right] &= 2\mathcal{A}_{1N}\mathcal{A}_{2N} + 2\mathcal{B}_{1N}\mathcal{B}_{2N} = \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{1 + \gamma^0}{2} O_{1N} \right] \text{Tr} \left[\frac{1 + \gamma^0}{2} O_{2N} \right] + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\vec{\gamma} \gamma^5 \frac{1 + \gamma^0}{2} O_{1N} \right] \cdot \text{Tr} \left[\vec{\gamma} \gamma^5 \frac{1 + \gamma^0}{2} O_{2N} \right], \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

onde usamos que

$$Tr[\sigma_i] = 0 \quad e \quad Tr[\sigma_i \sigma_j] = 2\delta_{ij}. \quad (D.17)$$

Dessa maneira, usamos a Eq.(D.16) para decompor as expressões A_{bN} , A_{cN} , B_{bN}^y e B_{cN}^y das Eq.s(D.7) e (D.12). As componentes escalar e vetorial no espaço de spin da corrente J_{bN}^+ são explicitamente escritas como

$$A_{bN} = \frac{1}{2} \frac{p^+ \langle N | \hat{Q} | N \rangle}{(4p^+ m_N)} Tr \left[\frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^+ (\not{p}' + m_N) (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) \times \right. \\ \left. (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_2 + m) (\not{p} + m_N) \gamma^+ \frac{1 + \gamma^0}{2} \right], \quad (D.18)$$

$$e \\ B_{bN} = \frac{p^+ \langle N | \hat{Q} | N \rangle}{4p^+ m_N} Tr \left[\gamma^2 \gamma^5 \gamma^+ (\not{p}' + m) (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) \times \right. \\ \left. (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_2 + m) (\not{p} + m) \gamma^+ \frac{1 + \gamma^0}{2} \right]. \quad (D.19)$$

Para utilizarmos a decomposição dada pela Eq.(D.13) nas Eqs(D.18) e (D.19), usamos que

$$\not{k}_1 + m = \frac{1}{k_1^+} (\not{k}_1 + m) \gamma^+ \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^+ (\not{k}_1 + m). \quad (D.20)$$

Substituindo a Eq.(D.20) na Eq.(D.18), e usando a Eq.(D.14) obtemos a decomposição da componente escalar da corrente J_{bN}^+ , que resulta em

$$A_{bN} = \frac{p^+}{16k_1^+ m_N} \langle N | \hat{Q} | N \rangle (Tr[\gamma^+ (\not{p}' + m_N) (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m)] \\ (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m) Tr[\gamma^+ (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_2 + m) (\not{p} + m_N)] + \\ + Tr[\gamma^i \gamma^5 \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^+ (\not{p}' + m_N) (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m) \gamma^+] \times \\ Tr[\gamma^i \gamma^5 \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^+ (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_2 + m) (\not{p} + m_N) \gamma^+]). \quad (D.21)$$

Analogamente, substituindo a Eq.(D.20) na Eq.(D.19) e usando a Eq.(D.14), obtemos a decomposição de B_{iN}^y na forma:

$$\begin{aligned}
B_{bN} &= \frac{p^+}{16k_1^+ m_N} \langle N | \hat{Q} | N \rangle (Tr[\frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^2 \gamma^5 \gamma^+ (\not{p}' + m_N) (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) \\
&(\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m) \gamma^+] \times Tr[\frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^+ (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}') \\
&(\not{k}_2 + m) (\not{p} + m) \gamma^+] + \\
&Tr[\gamma^i \gamma^5 \frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^2 \gamma^5 \gamma^+ (\not{p}' + m) (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) (\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m) \gamma^+] \times \\
&Tr[\gamma^i \gamma^5 \frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^+ (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}') (\not{p} + m_N) \gamma^+]). \tag{D.22}
\end{aligned}$$

As Eqs.(D.21) e (D.22) são as componentes escalar e vetorial no espaço de spin da corrente J_{bN}^+ , decompostas em dois termos nos quais os traços a serem avaliados contém um número menor de matrizes de Dirac.

Para a componente J_{cN}^+ o procedimento é semelhante. Entretanto, o lugar escolhido para fazer a decomposição das Eqs.(D.7) e (D.12) usando o operador O_{cN} , Eq.(D.4), é o termo $(\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m)$. Desde que $\gamma^+ = \gamma^+ \frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^+$, as componentes escalar e vetorial da corrente J_{cN}^+ são explicitamente escritas como

$$\begin{aligned}
A_{cN} &= \frac{1 p^{2+}}{2} \frac{\langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle}{4m_N P^+} Tr[\frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^+ (\not{p}' + m_N) (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}) \\
&(\not{k}_3 + m) \gamma^+ \frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^+ (\not{k}'_3 + m) (\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}) (\not{k}_2 + m) (\not{p} + m_N) \gamma^+], \tag{D.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{cN}^y &= \frac{1 p^{2+}}{2} \frac{\langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle}{4m_N P^+} Tr[\gamma^2 \gamma^5 \frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^+ (\not{p}' + m_N) (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}) \\
&(\not{k}_3 + m) \gamma^+ \frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^+ (\not{k}'_3 + m) (\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}) (\not{k}_2 + m) (\not{p} + m_N) \gamma^+]. \tag{D.24}
\end{aligned}$$

Observemos que as Eqs.(D.23) e (D.24) estão na forma da Eq.(D.13). Portanto a decomposição de A_{cN} e B_{cN}^y , de acordo com a Eq.(D.13), são dadas, respectivamente por

$$\begin{aligned}
A_{cN} &= \frac{p^+}{16m_N} \langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle (Tr[\frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^+ (\not{p}' + m_N)(\not{k}_1 + m)(\alpha m_N + (1-\alpha)\not{p}) \times \\
& (\not{k}_3 + m)\gamma^+] \times Tr[\frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^+ (\not{k}'_3 + m)(\alpha m_N + (1-\alpha)\not{p}')(\not{k}_2 + m)(\not{p} + m_N)\gamma^+] \\
& + Tr[\gamma^i \gamma^5 \frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^+ (\not{p}' + m_N)(\not{k}_1 + m)(\alpha m_N + (1-\alpha)\not{p})(\not{k}_3 + m)\gamma^+] \times \\
& Tr[\gamma^i \gamma^5 \frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^+ (\not{k}'_3 + m)(\alpha m_N + (1-\alpha)\not{p}')(\not{k}_2 + m)(\not{p} + m_N)\gamma^+]) \quad (D.25)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
B_{cN}^y &= \frac{p^+}{16m_N} \langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle (Tr[\frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^2 \gamma^5 \gamma^+ (\not{p}' + m)(\not{k}_1 + m) \\
& (\alpha m_N + (1-\alpha)\not{p})(\not{k}_3 + m)\gamma^+] \times Tr[\frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^+ (\not{k}'_3 + m)(\alpha m_N + (1-\alpha)\not{p}')(\not{k}_2 + m) \\
& (\not{p} + m_N)\gamma^+] + Tr[\gamma^i \gamma^5 \frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^2 \gamma^5 \gamma^+ (\not{p}' + m)(\not{k}_1 + m)(\alpha m_N + (1-\alpha)\not{p})(\not{k}_3 + m)\gamma^+] \times \\
& \gamma^+ \frac{1+\gamma^0}{2}] \times Tr[\gamma^i \gamma^5 \frac{1+\gamma^0}{2} \gamma^+ (\not{k}'_3 + m)(\alpha m_N + (1-\alpha)\not{p}')(\not{k}_2 + m) \\
& (\not{p} + m_N)\gamma^+]). \quad (D.26)
\end{aligned}$$

Apêndice E

Limite Não-Relativístico

Neste apêndice são obtidas as propriedades estáticas do núcleon, a partir de uma Lagrangeana efetiva não-relativística, que expressa o acoplamento $N - 3q$, isto é, obtemos a carga e os momentos magnéticos do nêutron e do próton. Construímos as correntes microscópicas não-relativísticas, analogamente ao procedimento usado no Capítulo 4. Posteriormente, verificamos o resultado do limite não-relativístico das expressões relativísticas das correntes microscópicas, para as propriedades estáticas do núcleon.

A Lagrangeana não relativística $N - 3q$ é definida como

$$\mathcal{L}_{N-3q}^{NR} = \sum_{ijk} \phi_N^\dagger \phi^{(i)} \phi^{(j)T} \frac{i\tau_2}{\sqrt{2}} \frac{i\sigma_2}{\sqrt{2}} \phi^{(k)} + H.C. \quad (\text{E.1})$$

Os diagramas de Feynman não-relativísticos são topologicamente iguais aos diagramas de Feynman relativísticos, discutidos no Capítulo 4 e apresentados na Fig.(4.1). Eles são derivados da Lagrangeana (E.1). Primeiro vamos verificar a carga do nêutron no contexto não-relativístico, que obviamente deve se anular.

O operador de carga do quark é escrito como

$$\hat{Q}_q = \frac{1}{6} + \frac{\tau_z}{2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.2})$$

O quark que interage com o fóton é o quark 3. Os quatro termos da correntes eletromagnética são representados novamente na Fig.(E.1):

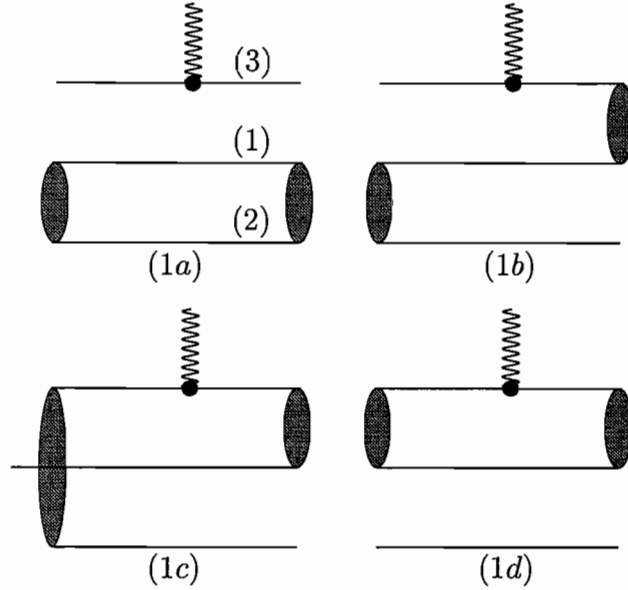


Figura E.1: Diagramas de Feynman não-relativísticos para a corrente eletromagnética do núcleon.

A carga associada à corrente microscópica para o nêutron descrita na Fig.(E.1), de acordo com o diagrama (1a) acima, é

$$Q_{an}^{NR} = \langle d | \hat{Q}_q^{(3)} | d \rangle \frac{\text{Tr}[(i\tau_2)(-i\tau_2)]}{2} \frac{\text{Tr}[(i\sigma_2)(-i\sigma_2)]}{2} = -\frac{1}{3}, \quad (\text{E.3})$$

onde $|d\rangle$ é o estado de isospin do quark d .

A carga microscópica do diagrama (1a) tem seus traços definidos no espaço de spin-isospin. As matrizes τ e σ constituem o acoplamento entre os quarks representado pela "bolha" na Fig.(E.1). Observemos na Eq.(E.3) que o operador carga atua apenas no quark d . Isso porque o estado de isospin seleciona a projeção $-\frac{1}{2}$ que corresponde ao quark d . As outras cargas dos diagramas (1b) à (1c), são dados por

$$Q_{bn}^{NR} = \frac{\langle d | \hat{Q}_q(i\tau_2)(-i\tau_2) | d \rangle \langle \uparrow | (i\sigma_2)(-i\sigma_2) | \uparrow \rangle}{2} = -\frac{1}{12}, \quad (\text{E.4})$$

$$Q_{cn}^{NR} = \frac{\langle d | (i\tau_2)\hat{Q}_q(i\tau_2) | d \rangle \langle \uparrow | (i\sigma_2)(-i\sigma_2) | \uparrow \rangle}{2 \cdot 2} = \frac{1}{6}, \quad (\text{E.5})$$

$$Q_{dn}^{NR} = \frac{\text{Tr}[(-i\tau_2)\hat{Q}_q(\tau_2)] \text{Tr}[(i\sigma_2)(-i\sigma_2)]}{2 \cdot 2} = \frac{1}{6}. \quad (\text{E.6})$$

A carga total do nêutron é a soma das 4 contribuições, representadas pelos diagramas da Fig.(E.1), correspondente às Eq.s(E.3) à (E.6) com seus respectivos pesos topológicos.

$$Q_n^{NR} = Q_{an}^{NR} + 4Q_{bn}^{NR} + 2Q_{cn}^{NR} + 2Q_{dn}^{NR} = 0 \quad (\text{E.7})$$

Como deveria ser, a carga do nêutron resulta nula. Também, este resultado pode ser obtido usando a função de onda não-relativística no espaço de spin-isospin:

$$\langle n \uparrow | \hat{Q}_q | n \uparrow \rangle = 0, \quad (\text{E.8})$$

onde

$$\begin{aligned} |n \uparrow \rangle = & \frac{1}{\sqrt{18}} [2 |d \uparrow d \uparrow u \downarrow \rangle + 2 |d \uparrow u \downarrow d \uparrow \rangle + 2 |u \downarrow d \uparrow d \uparrow \rangle \\ & - |d \uparrow d \downarrow u \uparrow \rangle - |d \downarrow d \uparrow u \uparrow \rangle - |d \downarrow u \uparrow d \uparrow \rangle \\ & - |d \uparrow u \uparrow d \downarrow \rangle - |u \uparrow d \uparrow d \downarrow \rangle - |u \uparrow d \downarrow d \uparrow \rangle]. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Como deveria ser esperado, o cálculo da corrente eletromagnética do núcleon através do uso da Lagrangeana efetiva Eq.(E.1) é idêntico ao efetuado utilizando-se uma função de onda totalmente simétrica da Eq.(E.9). A normalização no cálculo da corrente eletromagnética através da Lagrangeana efetiva, Eq.(E.1), é obtida calculando-se a carga do próton. Da Eq.(E.1) obtemos as seguintes "cargas microscópicas" para o próton:

$$Q_{ap}^{NR} = \langle u | \hat{Q}_q | u \rangle \frac{\text{Tr}[(i\tau_2)(-i\tau_2)] \text{Tr}[(i\sigma_2)(-i\sigma_2)]}{2 \cdot 2} = \frac{2}{3}, \quad (\text{E.10})$$

$$Q_{bp}^{NR} = \frac{\langle u | \hat{Q}_q(i\tau_2)(-i\tau_2) | u \rangle \langle \uparrow | (i\sigma_2)(-i\sigma_2) | \uparrow \rangle}{2 \cdot 2} = \frac{1}{6}, \quad (\text{E.11})$$

$$Q_{cp}^{NR} = \frac{\langle u | (i\tau_2)\hat{Q}_q(i\tau_2) | u \rangle \langle \uparrow | (i\sigma_2)(-i\sigma_2) | \uparrow \rangle}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{12}, \quad (\text{E.12})$$

$$Q_d^{NR} = \frac{\text{Tr}[(-i\tau_2)\hat{Q}_q(\tau_2)]}{2} \frac{\text{Tr}[(i\sigma_2)(-i\sigma_2)]}{2} = \frac{1}{6}. \quad (\text{E.13})$$

Portanto a carga do próton não normalizada resulta em

$$N_p^{NR} = Q_{ap}^{NR} + 4Q_{bp}^{NR} + 2Q_{cp}^{NR} + 2Q_{dp}^{NR} = \frac{9}{6}. \quad (\text{E.14})$$

Este resultado será necessário para o cálculo dos momentos magnéticos.

E.1 Momentos Magnéticos

Vamos calcular o momento magnético do nêutron e o momento magnético do próton, no modelo SU(6) não-relativístico, usando as correntes microscópicas derivadas da Lagrangeana efetiva, Eq.(E.1). O operador momento magnético do quark, em unidades de magnetons de Bohr para o núcleon ($\frac{1}{2m_N}$), é definido como

$$\hat{\mu}_q = \hat{Q}_q \sigma_z \frac{m_N}{m}, \quad (\text{E.15})$$

onde m é a massa do quark.

No espaço de spin a matriz σ_z seleciona os quarks com spin para "cima" ou spin para "baixo". O momento magnético do núcleon é também escrito em termos das correntes microscópicas como

$$\mu_N = \mu_{aN} + 4\mu_{bN} + 2\mu_{cN} + 2\mu_{dN}. \quad (\text{E.16})$$

Cada termo da Eq.(E.16) é uma contribuição para o momento magnético microscópico não-relativístico. Cada um deles é derivado do seu respectivo diagrama da Fig.(E.1). As contribuições para o momento magnético do próton são

$$\mu_{ap}^{NR} = \frac{m_N}{mN_p^{NR}} \langle u | \hat{Q}_q | u \rangle \langle \uparrow | \sigma_z | \uparrow \rangle = \frac{4}{9} \frac{m_N}{m}, \quad (\text{E.17})$$

$$\mu_{bp}^{NR} = \frac{m_N}{mN_p^{NR}} \frac{\langle u | \hat{Q}_q | u \rangle}{2} \frac{\langle \uparrow | \sigma_z | \uparrow \rangle}{2} = \frac{1}{9} \frac{m_N}{m}, \quad (\text{E.18})$$

$$\mu_{cp}^{NR} = \frac{m_N}{mN_p^{NR}} \frac{\langle u | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | u \rangle}{2} \frac{\langle \uparrow | \sigma_2 \sigma_z \sigma_2 | \uparrow \rangle}{2} = \frac{1}{18} \frac{m_N}{m}, \quad (\text{E.19})$$

$$\mu_{dp}^{NR} = \frac{2m_N}{2m} \frac{\text{Tr}[\hat{Q}_q]}{2} \frac{\text{Tr}[\sigma_z]}{2} = 0. \quad (\text{E.20})$$

Portanto, o momento magnético do próton, em magnetons de Bohr, é dado por

$$\mu_p = \frac{m_N}{m} \left(\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} \right) = \frac{m_N}{m}, \quad (\text{E.21})$$

onde o fator de normalização $N_p^{NR} = \frac{6}{9}$ vem da Eq.(E.14).

Para o momento magnético do nêutron temos que

$$\begin{aligned} \mu_n &= \langle n \uparrow | \hat{Q}_q \sigma_z \frac{m_N}{m} | n \uparrow \rangle \\ &= \frac{m_N}{m} \left(\langle d | \hat{Q}_q | d \rangle \langle \uparrow | \sigma_z | \uparrow \rangle + 4 \frac{\langle d | \hat{Q}_q | d \rangle}{2} \frac{\langle \uparrow | \sigma_z | \uparrow \rangle}{2} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\langle d | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | d \rangle}{2} \frac{\langle \uparrow | \sigma_2 \sigma_z \sigma_2 | \uparrow \rangle}{2} \right) \cdot \frac{6}{9} = -\frac{2m_N}{3m} \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

onde o fator 6/9 é a normalização, Eq.(E.14).

Escolhemos a função de onda do nêutron e do próton com spin "para cima". Porém isso é indiferente. Poderíamos escolher o spin "para baixo".

Portanto

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = -\frac{2}{3}, \quad (\text{E.23})$$

é a razão entre os momentos magnéticos do nêutron e do próton, no modelo não relativístico.

E.2 Limite $m, m_N \rightarrow \infty$ do Modelo na Frente de Luz.

Verifiquemos que os limites $m, m_N \rightarrow \infty$ nas correntes microscópicas do modelo não relativístico, apresentado no Capítulo 4 reproduzem os valores não-relativísticos da carga e do momento magnético do núcleon. No limite da massa tendendo para infinito, as expressões dos traços, contidas nas integrais podem ser fatoradas. Assim, temos os seguintes traços das correntes relativísticas:

$$\begin{aligned}\bar{u}(p', s') O_{aN} u(p, s) &= 2p^{+2} \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \text{Tr}[(\not{k}_2 + m)(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p})(\not{k}_1 + m) \\ &\quad (\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p}')]\bar{u}(p', s')(\not{k}'_3 + m)\gamma^+(\not{k}_3 + m)u(p, s),\end{aligned}\quad (\text{E.24})$$

$$\begin{aligned}\bar{u}(p', s') O_{bN} u(p, s) &= p^{+2} \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \bar{u}(p', s')(\not{k}'_3 + m)\gamma^+(\not{k}_3 + m)(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p}) \\ &\quad (\not{k}_1 + m)(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p}')(\not{k}_2 + m)u(p, s),\end{aligned}\quad (\text{E.25})$$

$$\begin{aligned}\bar{u}(p', s') O_{cN} u(p, s) &= p^{+2} \langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle \bar{u}(p', s')(\not{k}_1 + m)(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p})(\not{k}'_3 + m)\gamma^+ \times \\ &\quad (\not{k}_3 + m)(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p}')(\not{k}_2 + m)u(p, s),\end{aligned}\quad (\text{E.26})$$

$$\begin{aligned}\bar{u}(p', s') O_{dN} u(p, s) &= p^{+2} \text{Tr}[\hat{Q}_q] \text{Tr}[(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p}')(\not{k}'_3 + m)\gamma^+(\not{k}_3 + m) \\ &\quad (\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p})(\not{k}_1 + m)]\bar{u}(p', s')(\not{k}_2 + m)u(p, s).\end{aligned}\quad (\text{E.27})$$

As correntes eletromagnéticas acima podem ser decompostas em uma parte escalar e outra parte vetorial, como efetuado no Apêndice D, Eq.s(D.6)-(D.8). Aqui, da parte escalar da corrente eletromagnética resulta a carga do núcleon, e da parte vetorial resulta o momento magnético.

Carga elétrica

As expressões das cargas microscópicas são escritas através da Eq.(D.7) como:

$$\begin{aligned}Q_{aN} &= p^{+2} \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \text{Tr}[(\not{k}_2 + m)(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p})(\not{k}_1 + m)(1 - \alpha)\not{p}'] \\ &\quad \times \text{Tr}[\gamma^+ \frac{\not{p}' + m_N}{\sqrt{2p^{+2} + 2m_N}} (\not{k}'_3 + m)\gamma^+(\not{k}_3 + m) \frac{\not{p} + m_N}{\sqrt{2p^{+2} + 2m_N}}],\end{aligned}\quad (\text{E.28})$$

$$\begin{aligned}Q_{bN} &= \frac{p^{+2}}{2} \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \text{Tr}[\gamma^+ \frac{\not{p}' + m_N}{\sqrt{2p^{+2} + 2m_N}} (\not{k}'_3 + m)\gamma^+(\not{k}_3 + m)(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p}) \\ &\quad \times (\not{k}_1 + m)(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p}')(\not{k}_2 + m) \frac{\not{p} + m_N}{\sqrt{2p^{+2} + 2m_N}}],\end{aligned}\quad (\text{E.29})$$

$$\begin{aligned}
Q_{cN} &= \frac{p^{+2}}{2} \langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle \text{Tr} \left[\gamma^+ \frac{\not{p}' + m_N}{\sqrt{2p'^+ 2m_N}} (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) \right. \\
&\quad \left. \times (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_2 + m) \frac{\not{p} + m_N}{\sqrt{2p^+ 2m_N}} \right], \tag{E.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{dN} &= \frac{p^{+2}}{2} \text{Tr} [\hat{Q}_q] \text{Tr} [(\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) \\
&\quad \times (\not{k}_1 + m)] \text{Tr} \left[\gamma^+ \frac{\not{p}' + m_N}{\sqrt{2p'^+ 2m_N}} (\not{k}_2 + m) \frac{\not{p} + m_N}{\sqrt{2p^+ 2m_N}} \right]. \tag{E.31}
\end{aligned}$$

Na expressão dada pela Eq.(E.28), $k'_3 \rightarrow k_3$ quando $q \rightarrow 0$, onde a carga é definida, ocorre a simplificação

$$(\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) = (\not{k}_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m). \tag{E.32}$$

A Eq.(E.32) pode ser simplificada:

$$\begin{aligned}
(\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) &= (2m)^2 \sum_{s_3} u(k_3, s_3) \bar{u}(k_3, s_3) \gamma^+ u(k_3, s_3) \bar{u}(k_3, s_3) \\
&= (2m)^2 \frac{k^+}{m} \sum_{s_3} u(k_3, s_3) \bar{u}(k_3, s_3) \\
&= 2k^+ (\not{k}_3 + m). \tag{E.33}
\end{aligned}$$

Com essa simplificação a carga Q_{aN} resulta

$$\begin{aligned}
Q_{aN} &= 2k_3^+ \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \text{Tr} [(\not{k}_2 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m) (1 - \alpha) \not{p}'] \\
&\quad \times \text{Tr} \left[\gamma^+ \frac{\not{p}' + m_N}{\sqrt{2m_N}} (\not{k}_3 + m) \frac{\not{p} + m_N}{\sqrt{2m_N}} \right]. \tag{E.34}
\end{aligned}$$

Considerando o limite não relativístico, no qual m e m_N tendem para o infinito,

$$\begin{aligned}
Q_{aN} &= (2m)^4 \langle N | \hat{Q}_q^{(3)} | N \rangle \text{Tr} \left[\frac{1 + \gamma^0}{2} (\alpha + (1 - \alpha) \gamma^0) \frac{1 + \gamma^0}{2} (\alpha + (1 - \alpha) \gamma^0) \right] \\
&\quad \times \text{Tr} \left[\frac{1 + \gamma^0}{2} \right] \\
&= 4m_N^2 (2m)^4 \langle N | \hat{Q}_q^{(3)} | N \rangle. \tag{E.35}
\end{aligned}$$

As outras "cargas microscópicas" são obtidas pelo mesmo procedimento:

$$Q_{bN} = m_N^2 (2m)^4 \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle, \tag{E.36}$$

$$Q_{cN} = m_N^2(2m)^4 \langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle, \quad (\text{E.37})$$

$$Q_{dN} = m_N^2(2m)^4 \text{Tr}[\hat{Q}_q]. \quad (\text{E.38})$$

A carga do núcleon é dada por

$$Q_N = Q_{aN} + 4Q_{bN} + 2Q_{cN} + 2Q_{dN}. \quad (\text{E.39})$$

Para o nêutron a carga resulta em

$$\begin{aligned} Q_N &= m_N^4(2m)^4 [4 \langle n | \hat{Q}_q | n \rangle + 4 \langle n | \hat{Q}_q | n \rangle + 2 \langle n | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | n \rangle + 4 \text{Tr}[\hat{Q}_q]] \\ &= m_N^4(2m)^4 \left[-\frac{8}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.40})$$

A normalização é dada pela carga do próton:

$$N_p = m_N^4(2m)^4 \left[\frac{16}{3} - \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right] = 6m_N^4(2m)^4. \quad (\text{E.41})$$

Momento magnético

Vamos usar, por questão de simplicidade um referencial tal que os quarks estejam inicialmente parados e, depois da interação com o fóton, apenas o quark 3 absorva o fóton que transfere momento somente na direção x. Ou seja, sem perda de generalidade,

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{1x} = k_{2x} = k_{3x} = p_x = 0, \\ k'_{3x} = p'_x = q. \end{array} \right.$$

O momento magnético anômalo é obtido usando as Eq.(4.2) e Eq.(D.11). De ambas temos que

$$\kappa_i = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{2im_N B_{iN}^y}{N_p q} \quad (\text{E.42})$$

N_p é a normalização, Eq.(E.41) e B_{iN}^y é a componente vetorial no espaço de spin-isospin da corrente microscópica " + ". O momento magnético anômalo decorrente da Eq.(4.4) é a soma

$$\kappa_N = \kappa_{aN} + 4\kappa_{bN} + 2\kappa_{cN} + 2\kappa_{dN}. \quad (\text{E.43})$$

O momento magnético anômalo é obtido de $F_2(Q^2)$ no limite momento transferido nulo.

Ou seja

$$\begin{cases} F_{2n}(0) = \kappa_n = \mu_n \\ F_{2p}(0) = \kappa_p = \mu_p - 1. \end{cases}$$

Das Eq.s(D.2) e (D.12), B_{aN}^y fica

$$\begin{aligned} B_{aN}^y &= p^{+2} \langle N | \hat{Q}_q^{(3)} | N \rangle \text{Tr}[(\not{k}_2 + m)(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p})(\not{k}_1 + m)(1 - \alpha)\not{p}'] \\ &\times \text{Tr}[\gamma^2 \gamma^5 \gamma^+ \frac{\not{p}' + m_N}{\sqrt{2p'^+ 2m_N}} (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) \frac{\not{p} + m_N}{\sqrt{2p^+ 2m_N}}]. \end{aligned} \quad (\text{E.44})$$

Na expansão em q da Eq.(E.44) temos que

$$\begin{aligned} \lim_{m, m_N \rightarrow \infty} B_{aN}^y &= \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle (2m)^4 m_N^4 \text{Tr}[\gamma^2 \gamma^5 \gamma^+ (\frac{1 + \gamma^0}{2} - \frac{q}{2m_N} \gamma^1) \gamma^+ (\frac{1 + \gamma^0}{2})] \times \\ &\text{Tr}[(\frac{1 + \gamma^0}{2})(\alpha + (1 - \alpha)\gamma^0)(\frac{1 + \gamma^0}{2})(\alpha + (1 - \alpha)\gamma^0 - \frac{q}{m_N} \gamma^1)] + \mathcal{O}(q^2). \end{aligned} \quad (\text{E.45})$$

Na Eq.(E.45) usamos que no limite m_N e m tendendo para o infinito, temos as seguintes simplificações:

$$\begin{aligned} \alpha + (1 - \alpha)\not{p} &\rightarrow m_N[\alpha + (1 - \alpha)\gamma^0], \\ \alpha + (1 - \alpha)\not{p}' &\rightarrow m_N[\alpha + (1 - \alpha)\gamma^0 - \frac{q}{m_N} \gamma^1], \\ \not{p} + m_N &\rightarrow 2m_N(\frac{1 + \gamma^0}{2}), \\ \not{p}' + m_N &\rightarrow 2m_N(\frac{1 + \gamma^0}{2}) - \frac{q}{2m}, \\ \not{k}_i + m &\rightarrow 2m(\frac{1 + \gamma^0}{2}), \\ \not{k}'_3 + m &\rightarrow 2m(\frac{1 + \gamma^0}{2} + \frac{q}{2m} \gamma^1). \end{aligned}$$

Assim, da Eq.(E.44) resulta em

$$\lim_{m, m_N \rightarrow \infty} B_{aN}^y = 2iq \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle m_N^3 \left[1 - \frac{m_N}{m} \right] + \mathcal{O}(q^2). \quad (\text{E.46})$$

Substituindo a Eq.(E.46) na Eq.(E.42), obtemos o momento magnético anômalo relativo à corrente J_{aN}^+ :

$$\kappa_{aN} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{2im_N B_{aN}^y}{Q_p} \frac{1}{q} = \frac{2}{3} \left(\frac{m_N}{m} - 1 \right) \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle. \quad (\text{E.47})$$

A componente microscópica B_{bN}^y vem das Eq.s(D.3) e (D.12):

$$B_{bN}^y = p^{+2} \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \frac{1}{2} Tr[\gamma^2 \gamma^5 \gamma^+ \frac{\not{p}' + m_N}{\sqrt{2p'^2 + 2m_N}} (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) \times (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_2 + m) \frac{\not{p} + m_N}{\sqrt{2p^2 + 2m_N}}]. \quad (E.48)$$

A contribuição de B_{cN}^y vem das Eq.s(D.4) e (D.12):

$$B_{cN}^y = p^{+2} \langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle \frac{1}{2} Tr[\gamma^2 \gamma^5 \gamma^+ \frac{\not{p}' + m_N}{\sqrt{2p'^2 + 2m_N}} (\not{k}_1 + m) \times (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_2 + m) \frac{\not{p} + m_N}{\sqrt{2p^2 + 2m_N}}]. \quad (E.49)$$

E das Eq.s(D.5) e (D.12) obtemos a contribuição de B_{dN}^y :

$$B_{dN}^y = p^{+2} Tr[\hat{Q}_q] \frac{1}{2} Tr[(\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) \times (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m)] Tr[\gamma^2 \gamma^5 \gamma^+ \frac{\not{p}' + m_N}{\sqrt{2p'^2 + 2m_N}} (\not{k}_2 + m) \frac{\not{p} + m_N}{\sqrt{2p^2 + 2m_N}}]. \quad (E.50)$$

As contribuições ao momento magnético anômalo relativas à B_{bN}^y , B_{cN}^y e B_{dN}^y são obtidos de modo semelhante à κ_{aN} . Ou seja, fazemos a expansão em ordem q das Eq.s(E.48), (E.49), (E.50) e substituindo na Eq.(E.42) obtemos

$$\kappa_{bN} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{2im_N}{N_p} \frac{B_{bN}^y}{q} = \frac{m}{6p^+} \left(\frac{m_N}{m} - 1 \right) \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle, \quad (E.51)$$

$$\kappa_{cN} = -\frac{1}{6} \left(\frac{m_N}{m} + 1 \right) \langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle, \quad (E.52)$$

$$\kappa_{dN} = -\frac{1}{3} Tr[\hat{Q}_q]. \quad (E.53)$$

O momento magnético anômalo do núcleon é dado por

$$\begin{aligned} \kappa_N &= \kappa_{aN} + 4\kappa_{bN} + 2\kappa_{cN} + 2\kappa_{dN} \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{m_N}{m} - 1 \right) \langle N | \hat{Q}_q^{(3)} | N \rangle - \frac{1}{3} \langle N | \tau_2 \hat{Q}_q^{(3)} \tau_2 | N \rangle \\ &\quad - \frac{2}{3} Tr[\hat{Q}_q]. \end{aligned} \quad (E.54)$$

Na Eq.(E.54) o momento magnético anômalo do nêutron resulta em

$$\kappa_n = -\frac{2m_N}{3m}. \quad (\text{E.55})$$

E o momento magnético anômalo do próton resulta em

$$\kappa_p = \frac{m_N}{m} - 1. \quad (\text{E.56})$$

Portanto, das Eq.(E.55) e Eq.(E.56)

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = \frac{\kappa_n}{\kappa_p + 1} = -\frac{2}{3}. \quad (\text{E.57})$$

Chamamos a atenção do leitor de que os diversos termos do momento magnético, calculados não-relativisticamente e através do limite não-relativístico do modelo na Frente de Luz se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mu_{iN}^{NR} &= \lim_{m_N, m \rightarrow \infty} (F_{1iN}(0) + F_{2iN}(0)) \\ &= \frac{Q_{iN}}{N_p} + \kappa_{iN}, \end{aligned} \quad (\text{E.58})$$

onde μ_{iN}^{NR} vem das Eq.s(E.17) à (E.20), com a normalização da Eq.(E.14), Q_{iN} é definido nas Eq.s(E.28) à (E.31).

Assim demonstramos a consistência do limite não-relativístico da corrente eletromagnética do núcleon na Frente de Luz, definida pelas Eq.s(4.12) à (4.15) .

Apêndice F

Estimativa do Raio de Carga do Nêutron

Deduziremos aqui uma expressão analítica para o raio quadrático médio do nêutron, a partir das correntes microscópicas $J_{aN}^+ - J_{dN}^+$, obtidas no Capítulo 4. Consideremos o limite $Q^2 \rightarrow 0$. Nesta estimativa também consideramos que a parte spinorial da corrente eletromagnética pode ser fatorada da integração nos momentos dos quarks. Nesta aproximação consideramos o núcleon como um conjunto de três quarks constituintes livres. Inicialmente, por simplicidade, o núcleon está em repouso, isto é, $p^0 = m_N, \vec{p} = 0$; $k_i = m, \vec{k}_i = 0$. Após a interação com o fóton $p'^0 = \sqrt{\vec{p}'^2 + m_N^2}, \vec{p}' = (\vec{q}_\perp, q_z)$ e $\vec{q}_\perp = (q, 0)$. Em termos das coordenadas da Frente de Luz, a cinemática é feita no referencial de Drell-Yan, onde $q^+ = 0$. Isso implica que

$$m_N^2 = p'^+ p'^- - \vec{q}_\perp^2 = m_N(m_N = q^-) - \vec{q}_\perp^2 \quad (\text{F.1})$$

e $q^- = \frac{\vec{q}_\perp^2}{m_N}$. Como $q^+ = 0$ temos que $q^0 = \frac{\vec{q}_\perp^2}{2m_N}$ e $q_z = -\frac{\vec{q}_\perp^2}{2m_N}$. Com isto o momento final do núcleon até ordem q_\perp^2 é dado por

$$\begin{aligned} p'^0 &= \sqrt{m_N^2 + \vec{q}_\perp^2 + q_z^2} = m_N + \frac{\vec{q}_\perp^2}{2m_N}, \\ \vec{p}' &= (\vec{q}_\perp, q_z). \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Para os quarks, os momentos iniciais são dados por

$$k_i^0 = 0, \vec{k}_i = 0. \quad (\text{F.3})$$

Os momentos cinemáticos na Frente de Luz são conservados no processo de absorção do fóton, portanto $k_3'^+ = k_3^+$ e $\vec{k}_3'^+ = \vec{k}_3^+ + \vec{q}_\perp$. O momento $k_3'^-$ vem da condição de camada de energia”-”para o quark. Isto faz com que $k_3'z \neq p'_z$ e que $k_3'^0 - k_3^0 \neq p'^0 - p^0$. Desta forma temos, para os momentos finais até ordem q_\perp^2 , o seguinte:

$$\begin{aligned} k_1'^0 = k_2'^0 = m; \quad k_3'^0 &= \sqrt{m^2 + q_\perp^2 + \frac{q_\perp^4}{4m_N^2}} = m + \frac{q_\perp^2}{2m}; \\ \vec{k}_1' = \vec{k}_2' &= 0; \quad \vec{k}_3' = (\vec{q}_\perp, \frac{q^2}{2m}). \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Das Eq.s(F.1), (F.2) e (F.4) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\not{p}'}{m_N} &= \gamma^0 - \frac{q}{m_N} \gamma^1 + \frac{q^2}{2m_N^2} \gamma^+, \\ \frac{\not{k}_3'}{m} &= \gamma^0 - \frac{q}{m} \gamma^1 + \frac{q^2}{2m^2} \gamma^+. \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Assim, fazendo uso dessa cinemática, primeiramente na corrente J_{aN}^+ , Eq.(D.12), com A_{aN} da Eq.(D.7) e (D.3), temos

$$\begin{aligned} A_{aN} &= p^{+2} \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \text{Tr}[(\not{k}_2 + m)(\alpha m_n + (1 - \alpha)\not{p})(\not{k}_1 + m) \times \\ &(\alpha m_n + (1 - \alpha)\not{p}')(\not{k}_1 + m)] \text{Tr}[\gamma^+ \frac{\not{p}' + m_N}{\sqrt{2m_N 2p'^+}} (\not{k}_3' + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) \frac{\not{p} + m_N}{\sqrt{2m_N 2p^+}}] \\ &= (2mm_N)^4 \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \text{Tr}[(\frac{1 + \gamma^0}{2})(\alpha + (1 - \alpha)\gamma^0) \\ &(\frac{1 + \gamma^0}{2})(\alpha + (1 - \alpha)\gamma^0) + (1 - \alpha)\frac{q}{m_N} \gamma^1 + (1 - \alpha)\frac{q^2}{2m_N^2} \gamma^+] \\ &\times \text{Tr}[\gamma^+(\frac{1 + \gamma^0}{2} - \frac{q}{2m_N} \gamma^1)(\frac{1 + \gamma^0}{2} - \frac{q}{2m} \gamma^1) \gamma^+(\frac{1 + \gamma^0}{2})] + O(q^4). \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Efetutando os traços na Eq.(F.6) resulta que

$$A_{aN} = (2mm_N)^4 \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle (1 + (1 - \alpha)\frac{q^2}{2m_N^2}) + O(q^4). \quad (\text{F.7})$$

Para a componente da corrente J_{bN}^+ , usando as Eq.s(D.10), (D.7) e(D.3), analogamente, temos

$$\begin{aligned}
A_{bN} &= \frac{p^{+2}}{2} \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle Tr[\gamma^+ \frac{\not{p}' + m_N}{\sqrt{2m_N 2p^{+'}}} (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) \times \\
&\quad (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_2 + m) \frac{\not{p} + m_N}{\sqrt{2m_N 2p^{+'}}}] \\
&= (2mm_N)^4 \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle Tr[\gamma^+ (\frac{1 + \gamma^0}{2} - \frac{q}{2m_N} \gamma^1) \times \\
&\quad (\frac{1 + \gamma^0}{2} - \frac{q}{2m} \gamma^1) \gamma^+ (\frac{1 + \gamma^0}{2}) (\alpha + (1 - \alpha) \gamma^0) (\frac{1 + \gamma^0}{2}) \times \\
&\quad (\alpha + (1 - \alpha) \gamma^0 + (1 - \alpha) \frac{q}{m_N} \gamma^1 + (1 - \alpha) \frac{q^2}{2m_N^2} \gamma^+) (\frac{1 + \gamma^0}{2})] + O(q^4) \\
&= (2mm_N)^4 \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle [1 + (1 - \alpha) \frac{q^2}{2m_N^2}] + O(q^4). \tag{F.8}
\end{aligned}$$

Para a componente da corrente J_{cN}^+ , usando as Eq.s(D.10), (D.7) e(D.4), temos

$$\begin{aligned}
A_{cN} &= \frac{p^{+2}}{2} \langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle Tr[\gamma^+ \frac{\not{p}' + m_N}{2m_N} (\not{k}_1 + m) (\alpha m_n + (1 - \alpha) \not{p})] \times \\
&\quad (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_2 + m) \frac{\not{p} + m_N}{2m_N}. \\
&= \frac{(2mm_N)^4}{2} \langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle Tr[\gamma^+ (\frac{1 + \gamma^0}{2} - \frac{q}{2m_N} \gamma^1) \times \\
&\quad (\frac{1 + \gamma^0}{2}) (\alpha + (1 - \alpha) \gamma^0) (\frac{1 + \gamma^0}{2}) \gamma^+ (\frac{1 + \gamma^0}{2} - \frac{q}{2m} \gamma^1) \\
&\quad (\alpha + (1 - \alpha) \gamma^0 + (1 - \alpha) \frac{q}{m_N} + (1 - \alpha) \frac{q^2}{2m_N^2} \gamma^+) (\frac{1 + \gamma^0}{2})] + O(q^4) \\
&= \frac{(2mm_N)^4}{8} \langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle [1 + (1 - \alpha) \frac{q^2}{2m_N^2} - (3\alpha - 2) \frac{q^2}{4mm_N}] \\
&\quad + O(q^4). \tag{F.9}
\end{aligned}$$

E finalmente, para a componente escalar da corrente J_{dN}^+ usando as Eq.s(D.10), (D.7) e(D.5), temos

$$\begin{aligned}
A_{dN} &= \frac{p^{+2}}{2} Tr[\hat{Q}_q] Tr[(\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) \times \\
&\quad (\alpha m_n + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m)] Tr[\frac{\not{p}' + m_N}{2m_N} (\not{k}_2 + m) \frac{\not{p} + m_N}{2m_N}] \\
&= \frac{(2mm_N)^4}{2} Tr[\hat{Q}_q] Tr[\alpha + (1 - \alpha) \gamma^0 + (1 - \alpha) \frac{q}{m_N} \gamma^1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \alpha) \frac{q^2}{2m_N^2} \gamma^+ \left(\frac{1 + \gamma^0}{2} - \frac{q}{2m} \gamma^1 \right) \gamma^+ \left(\frac{1 + \gamma^0}{2} \alpha + (1 - \alpha) \gamma^0 \right) \times \\
& \quad Tr \left[\gamma^+ \left(\frac{1 + \gamma^0}{2} - \frac{q}{2m_N} \gamma^1 \right) \left(\frac{1 + \gamma^0}{2} \right) \right] \\
& = \frac{(2mm_N)^4}{4} Tr[\hat{Q}_q] \left[1 + (1 - \alpha) \left(\frac{q^2}{2m_N^2} - \frac{q^2}{2mm_N} \right) \right]. \tag{F.10}
\end{aligned}$$

A soma dos termos de ordem zero em q^2 são a carga do nêutron e a normalização. Ou seja

$$\begin{aligned}
A_{TN} & = A_{aN} + 4A_{bN} + 2A_{cN} + 2A_{dN} \\
& = \frac{(2mM_N)^4}{2} \left[2 \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle + \langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle + Tr[\hat{Q}_q] \right] + O(q^2) \tag{F.11}
\end{aligned}$$

Substituindo os valores de isospin para o nêutron e para o próton, obtemos zero para a carga do nêutron, como é de se esperar, e, $9(2mm_N)^4$ para a normalização.

O raio do nêutron pode ser escrito como

$$r_n^2 = -6 \frac{dF_{1n}}{dq^2} + \frac{3}{2m_N^2} \mu_N, \tag{F.12}$$

da Eq.(4.3). Para esta estimativa do raio do nêutron, fazemos

$$\frac{dF_{1n}}{dq^2} \sim \frac{2}{9(2mm_N^4)} \frac{dA_{Tn}}{dq^2}, \tag{F.13}$$

e, com isto resulta

$$r_n^2 = \frac{5 - 4\alpha}{3mm_N} + \frac{3}{2m_N} \mu_n. \tag{F.14}$$

Esta estimativa é comparada aos resultados numéricos do modelo, no Capítulo 5.

Apêndice G

Invariantes de spin-isospin para o núcleon

Segundo a Ref.[25] um conjunto completo de invariantes relativísticos que acoplam o campo do núcleon aos campos dos quarks é dada na tabela.G.1. Por exemplo, a Lagrangeana efetiva usada neste trabalho, Eq.(4.1), para descrever o núcleon é composta pelos invariantes G_2 e G_6 com a par isoescalar:

$$\mathcal{L}_{N-3q} = \alpha m_N \epsilon^{lmn} \bar{\Psi}_{(l)} \gamma^5 G \Psi_{(m)}^c \bar{\Psi}_{(n)} \Psi_N + (1 - \alpha) \epsilon^{lmn} \bar{\Psi}_{(l)} \gamma_\mu \gamma^5 G \Psi_{(m)}^c \bar{\Psi}_{(n)} i \partial^\mu \Psi_N + H.C. \quad (G.1)$$

onde ϵ^{lmn} é o termo totalmente antisimétrico e l, m e n s o os índices de cor. $G = i\tau_2$. Ψ é o campo do quark e Ψ_N é o campo do núcleon.

Um outro exemplo para a Lagrangeana efetiva seria usar um par pseudovetorial e isovetorial [71], de acordo com os invariantes G_3 e G_5 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{N-3q} = & \alpha_{G_3} m_N \epsilon^{lmn} \bar{\Psi}_{(l)} \gamma^\mu \vec{\tau} G \Psi_{(m)}^c \bar{\Psi}_{(n)} \gamma^5 \gamma_\mu \vec{\tau} \Psi_N + \\ & \alpha_{G_5} \epsilon^{lmn} \bar{\Psi}_{(l)} \gamma_\mu \vec{\tau} G \Psi_{(m)}^c \bar{\Psi}_{(n)} \gamma^5 \vec{\tau} \partial^\mu \Psi_N + H.C., \end{aligned} \quad (G.2)$$

onde α_{G_3} e α_{G_5} são os coeficientes arbitrários ou funções de vértices.

G_1	$\mathbf{1}G \otimes \gamma^5$
G_2	$\gamma^5 G \otimes \mathbf{1}$
G_3	$\gamma^\mu \vec{\tau} G \otimes \gamma^5 \gamma_\mu \vec{\tau}$
G_4	$\gamma^\mu \gamma^5 G \otimes \gamma_\mu$
G_5	$\not{P} \vec{\tau} G \otimes \gamma^5 \vec{\tau}$
G_6	$\not{P} \gamma^5 G \otimes \mathbf{1}$
G_7	$\sigma^{\mu\nu} \vec{\tau} G \otimes \gamma^5 \sigma_{\mu\nu} \vec{\tau}$
G_8	$i\sigma^{\mu\nu} P_\nu \vec{\tau} G \otimes \gamma^5 \gamma_\mu \vec{\tau}$

Tabela G.1: Invariantes relativísticos da Ref.[25], $G = i\tau_2$ (isospin) e P^μ é o operador de momento do núcleon.

Bibliografia

- [1] N. Isgur e G. Karl, Phys. Rev. **D 18** (1978), 4187; Phys. Rev. **D 19** (1979) 2653.
- [2] G. Karl, Intr. Mod. Phys. **E 1** (1992) 491.
- [3] A. De Rujula, H. Georgi, and S. L. Glashow, Phys. Rev. **D12** (1975) 147.
- [4] A. Faessler, F. Fernandez, G. Luebeck e Shimizu, Phys. Lett. **B 112** (1982) 201; U. Straub, Z. Y. Zhang, K. Brauer, A. Faessler, S. B. Khadkikar e G. Luebeck, Nucl. Phys. **A 508** (1983) 335c; A. Valcarsce, A. Faessler e F. Fernandez, Phys. Lett. **B345** (1995) 367.
- [5] M. Malheiro e W. Melnitchouk, Phys. Rev. **C55** (1995) 431; W. Melnitchouk e M. Malheiro, Phys. Rev. **C56** (1995) 2373. F. M. Steffens, W. Melnitchouk e A. W. Thomas, Eur. Phys. J. **C11** (1999) 673.
- [6] Lewis H. Ryder, "Quantum Field Theory", Cambridge University Press, (1985).
- [7] Rajat K. Bhaduri, "Models of the Nucleon, Lectures Notes and Supplements in Physics", Addison Wesley (1988).
- [8] W. Bentz, H. Mineo, K. Yasaky, Nucl. Phys. **A 670** (2000) 48c ; S. Pepin, M. C. Birse, J. A. McGovern e N. R. Walet Phys. Rev. **C 61** (2000) 05 5209; W. Bentz, H. Mineo, K. Yasaky, Phys. Rev. **C 60** (1999) 06 5201.
- [9] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122** (1961) 345.
- [10] A. W. Thomas e G. Krein, Phys. Lett. **B 456** (1999) 5.

- [11] Wilson R.B. de Araújo, Dissertação de Mestrado, “Modelo Relativístico do Próton”, IFUSP(1995).
- [12] Hércules Borges Rodrigues, Dissertação de Mestrado, “Quantização Relativística do Skyrmion”, UFRGS (1991).
- [13] Fernando Monti Steffens, Dissertação de Mestrado, “Efeitos de Vibração no Skyrmion”, UFRGS (1992)
- [14] Stênio Wulk Alves de Melo, Tese de Doutorado, “Estudos sobre Sólitons Bariônicos no Modelo de Skyrme”, UFRJ (1992).
- [15] Jorge Ananias Neto, Tese de Doutorado, “Propriedades Analíticas do sóliton de Skyrme”, PUC-RJ(1992).
- [16] Orildo Luis Battistel, Tese de Doutorado, “Fenomenologia Hadrônica no Modelo de Skyrme”, IFUSP (1994).
- [17] Arnaldo Gammal, Tese de Doutorado, “O Termo Sigma Nuclear no Modelo de Skyrme”.
- [18] Isabela Porto Cavalcanti, Tese de Doutorado, “A interação Núcleon-Núcleon no Modelo de Skyrme”, IFUSP (1999)
- [19] Y. B. Dong, A. Faessler, K. Shimizu, Eur. Phys. **J A6** (1999) 203.
- [20] N. Isgur, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 172.
- [21] J. Carbonell, B. Desplanques, V. Karmanov e J.-F. Mathiot, Phys. Rep.**300** (1998) 215.
- [22] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. 21, (1949) 392.
- [23] P. L. Chung, F. Coester, B. D. Keister e W. N. Polizou, Phys. Rev. **C37**(1988) 2000.
- [24] P. L. Chung e F. Coester Phys. Rev. **D44** (1991) 229.
- [25] M.Beyer, C. Kurts e H.J.Weber, Ann.Phys.(NY)269(1998)129.

- [26] R. Dashen e Gell-Man, 1966, in Proceedings of the 3rd Coral Gables Conference on Symmetry Principles at High-Energy, 1966, editado por A. Permuter (Freeman, San Francisco, 1967); S. Fubini, G. Segre e D. Walecka, Ann. Phys. **39** (1966) 381; V. de Alfara, S. Fubini, G. Furlan, C. Rossetti, "Currents in Hadron Physics (North Holland Amsterdam 1973); M. Sawicki, Phys. Rev. **D44**(1991) 433; Phys. Rev. **D46** (1992) 474; T. Frederico, G. A. Miller, Phys. Rev **D45** (1992) 4207.
- [27] W. R. B. de Araújo, T. Frederico, M. Beyer e H. J. Weber, J. Phys. **G 25** (1999) 1589.
- [28] H. J. Melosh, Phys. Rev. D **9** (1974) 1095.
- [29] J. P. B. C. de Melo e T. Frederico, Phys. Rev. **C55** (1997) 2043.
- [30] W. R. B. de Araújo, E. F. Suisso, T. Frederico, M. Beyer e H. J. Weber, Phys. Lett. **B 478** (2000) 86.
- [31] M. K. Jones et al., Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 1938.
- [32] W. Jaus, Phys. Rev. D **60** (1999) 054026.
- [33] B. L. G. Bakker, Ho Meoying Choi e Chueng Ruong Ji, hep-Ph/0008147.
- [34] S. J. Brodsky and F. Schlumpf, Phys. Lett. **B329** (1994) 111; Prog. Part. Nucl. Phys. **34** (1995) 69.
- [35] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. London **A114**, 243 (1927).
- [36] E. P. Wigner, Ann. Math. **40**, (1939) 149.
- [37] H. Leutwyler and J. Stern, Ann. Phys. (N.Y) **112**, (1978) 94.
- [38] S. Weinberg, Phys. Rev. **150** (1966) 1313.
- [39] L. Susskind, Phys. Rev. **165** (1968) 1535.
- [40] J. B. Kogut e D. E. Soper, Phys. Rev. D **1** (1970) 2901.

- [41] S. Kopecky et al., Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 2427.
- [42] S. J. Brodsky, H.C.Pauli e S.S .Prusky, Phys. Rep.**301** (1998) 299.
- [43] J. P. B. C de Melo, J. W. L. Naus e T. Frederico, Phys. Rev. **C59** (1999) 2278.
- [44] J. P. B. C. de Melo, Tese de Doutorado, “Covariância na Frente de Luz”, IFUSP (1998).
- [45] L. L. Frankfurt e M. I. Strikman, Nucl. Phys. **B148**, (1979) 107; Phys. Rep. **76** (1981) 76.
- [46] J. M. Namyslowski, Progress in Particle and Nuclear Physics **14** (1985) 49.
- [47] Jorge H.O.Sales, Tese de doutorado, “Função de Green na Frente de Luz: Equação de Bethe-Salpeter”, ITA-CTA (2000).
- [48] I.L.Grach e L.A.Kondratyuk, Sov. J. Nucl. Phys. **38** (1984) 198.
- [49] B. D. Keister, Phys. Rev. **D39** (1994) 1500.
- [50] F. Cardarelli, I. L. Grach, I. M. Narodetskii, E. Pace, G. Salmé e S. Simula, Phys. Lett. **B349** (1995) 393.
- [51] B. Bakamjian e L. H. Thomas, Phys. Rev.**92** (1953) 1300.
- [52] C. M. Shakin e Wei-Dong Son, Phys. Rev**C51** (1995) 2171.
- [53] J. P. B. C de Melo, J.H.O. Sales, T. Frederico e P.U.Sauer, Nucl. Phys. **A 631** (1998) 574c0; J. P. B. C de Melo, T. Frederico, H. W. L. Naus e P.U.Sauer Nucl. Phys. **A 660** (1999) 219.
- [54] W. R. B. de Araújo, J. P. B. C. de Melo and T. Frederico, Phys. Rev. **C52** (1995) 2773.
- [55] U. Vogl e W.Weise, Prog. Nucl. Part. Phys. **27** (1991) 195.
- [56] E.F.Suisso, W.R.B.de Araújo, T.Frederico, M.Beyer e H.J.Weber, ”Relativistic Quark Spin Coupling Effects in the Correlations Between Nucleon Eletroweak Properties”, nucl/th0007055.

- [57] F. Cardarelli e S. Simula, Phys. Lett. **B 67**(1999) 1.
- [58] S. Godfrey e N. Isgur, Phys. Rev. **D 32**, 189(1985). Procurar
- [59] F. Cardarelli, E. Pace, G. Salme, S. Simula, Phys. Lett. **B 357** (1995) 267.
- [60] S. Kopecky et al., Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 2427.
- [61] S. Platchkov et al., Nucl. Phys. **A510** (1990) 740.
- [62] T. Eden et al., Phys. Rev. **C50** (1994) R1749; M. Meyerhoff et al., Phys. Lett. **B327** (1994) 201; C. Herberg et al., Eur. Phys. J. **A5** (1999) 131; I. Passchier et al., Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 4988; M. Ostrick et al., Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 276.
- [63] W. Albrecht et al., Phys. Lett. **B 26** (1968) 642.
- [64] S. Rock et al., Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 1139.
- [65] E. E. W. Bruins et al., Phys. Rev. Lett. (1995) 1.
- [66] G. Holer et al., Nucl. Phys. **B144** (1976) 505.
- [67] S. J. Brodsky e J. R. Primack, Ann. Phys. (N.Y.) **52** (1969) 315.
- [68] J. J. Murphy II, Y. M. Shin, and D. M. Skopik, Phys. Rev. **C9**(1974)3125.
- [69] R. Rosenfelder, Phys. Lett. **B479** (2000) 381.
- [70] W. Konen, H. J. Weber, Phys. Rev. **D 41** (1991) 2201.
- [71] M. Oettel, R. Alkofer and L. Von Smekal, Eur. Phys. J. **A8** (2000) 553.
- [72] J. C. Bloch, C. D. Roberts and S. M. Schimdt, Phys. Rev. **C 61** (2000) 065207.
- [73] J. D. Bjorken and S. D. Drell, "Relativistic Quantum Fields" (mcGraw-Hill, New York, 1965).
- [74] B. D. Keister e Polizou, Adv. Nucl. Phys. **20** (1991) 225.

[75] A.R.Edmonds, "Angular Momentum Quantum Mecanics", Princeton University Press (1957).

1

2

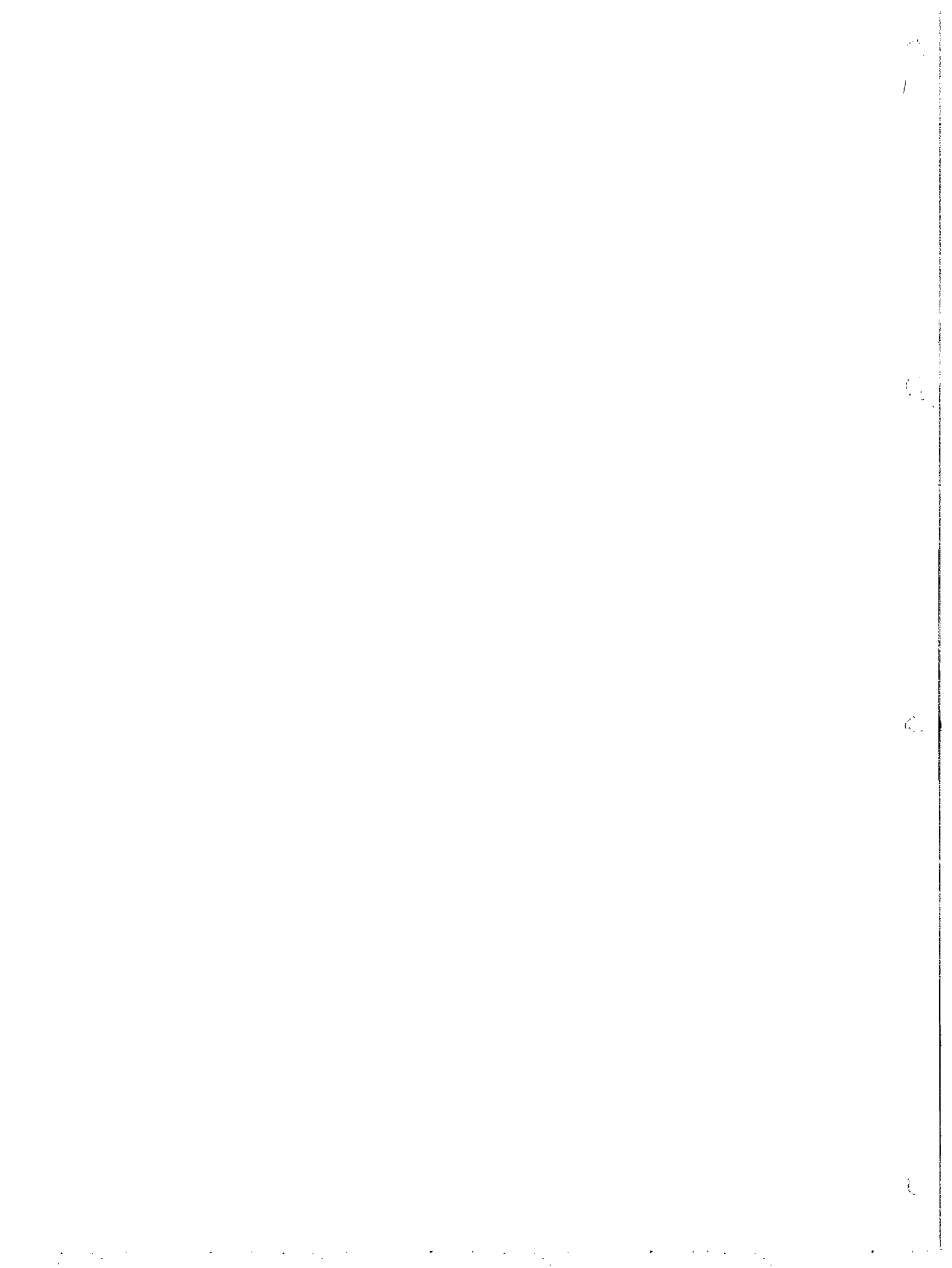
3

4

• Artigos em Anexo :

Nesta parte anexamos os seguintes artigos:

- “Feynman versus Bakamjian-Thomas in light-front dynamics”, W. R. B. de Araujo, M.Beyer, T. Frederico e H.J.Weber, *J. Phys.G* **25** (1999) 1589.
- “Relativistic quark spin coupling effects in the nucleon eletromagnetic form factors”, W.R.B.de Araujo, E.F.Suisso, M.Beyer, T. Frederico e H.J.Weber, *Phys. Lett.B* **478**, (2000) 86.
- “Relativistic Quark Coupling Effects in the Correlations Between Nucleon Eletroweak Properties”, E.F.Suisso, W.R.B.de Araujo, M.Beyer, T.Frederico e H.J.Weber, aceito para publicação em *Nucl.Phys.A*, nucl-th/0007055.



Feynman versus Bakamjian–Thomas in light-front dynamics

W R B de Araújo†, M Beyer‡, T Frederico§ and H J Weber‡

† Laboratório do Acelerador Linear, Instituto de Física da USP CP 663118, CEP 05315-970, São Paulo, Brazil

‡ Department of Physics, University of Virginia, Charlottesville, VA, USA

§ Departamento de Física, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Centro Técnico Aeroespacial, 12.228-900 São José dos Campos, São Paulo, Brazil

Received 11 January 1999, in final form 14 April 1999

Abstract. We compare the Bakamjian–Thomas (BT) formulation of relativistic few-body systems with light-front field theories that maintain closer contact with Feynman diagrams. We find that Feynman diagrams distinguish Melosh rotations and other kinematical quantities belonging to various composite subsystem frames that correspond to different loop integrals. The BT formalism knows only the rest frame of the *whole* composite system, where everything is evaluated.

The goal of this letter is to point out subtle, but important, differences between the Bakamjian–Thomas (BT) formulation of relativistic few-body systems [1] and light-front field theories that maintain closer contact with Feynman diagrams (see, e.g., [2]). To be specific, we consider the triangle diagram that is a major ingredient of recent electromagnetic and weak baryon form factor evaluations in light-front dynamics.

We start with the effective Lagrangian for the N–q coupling

$$\mathcal{L}_{N-3q} = \sum_{(i,j,k)} \bar{\Psi}_{(i)} i\tau_2 \gamma_5 \Psi_{(j)}^C \bar{\Psi}_{(k)} \Psi_N \quad (1)$$

where τ_2 is the isospin matrix and the sum is over permutations of {1, 2, 3}. The conjugate quark field is $\Psi^C = C\bar{\Psi}^T$, where $C = i\gamma^2\gamma^0$ is the charge conjugation matrix.

In the nucleon rest frame, and choosing $i = 1$, $j = 2$, and $k = 3$ the spin coupling of the quarks to the nucleon is given by:

$$\chi(s_1, s_2, s_3; s_N) = \bar{u}_1 \gamma_5 u_2^C \bar{u}_3 u_N, \quad (2)$$

where the light-front spinor $u_1 = u(p_1, s_1)$ is

$$u(p, s) = \frac{p \cdot \gamma + m}{\sqrt{2p^+ 2m}} \gamma^+ \gamma^0 \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

where $p^+ = p^0 + p^3$, $p^- = p^0 - p^3$, $p_\perp = (p_1, p_2)$, and χ_s is the two-component Pauli spinor. The Dirac spinor of the instant form

$$u_D(p, s) = \frac{p \cdot \gamma + m}{\sqrt{2m(p^0 + m)}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

carries the subscript D . The expression (2) appears in the evaluation of the two-loop Feynman diagram of the $J^+ = J^0 + J^3$ component of the nucleon electromagnetic current once the integrations over the ‘–’ components of the quark momenta, $p_i^- = p_i^0 - p_i^3$, are carried out.

There are two loops rather than one because of the integrals over both relativistic Jacobi relative momentum variables q_3, Q_3 defined as usual ($x_i = p_i^+/P^+$)

$$p_1 = q_3 - \frac{x_1}{1-x_3} Q_3 + x_1 P, \quad (5)$$

$$p_2 = -q_3 - \frac{x_2}{1-x_3} Q_3 + x_2 P, \quad (6)$$

$$p_3 = Q_3 + x_3 P, \quad (7)$$

and $P = p_1 + p_2 + p_3$ all valid for the + and \perp components only, so that $q_3^+ = 0, Q_3^+ = 0$. Equivalently, there are integrations over three quark momentum variables in the nucleon rest frame, $k_i = p_i - x_i P$, with the restrictions $\sum_i k_{\perp i} = 0$ and $\sum_i x_i = 1$.

This spin-flavour invariant of the nucleon with quark pair spin zero is the simplest of a basis of eight such states given in greater detail in [3], for example. The only nucleon spin invariant used and tested in form factor calculations contains the additional projector $\gamma \cdot P + M_0$ onto large Dirac components, a characteristic feature of the BT formalism, where P is the total nucleon momentum and M_0^2 the sum of the free quark light-cone energies.

The residues of the triangle Feynman diagram are evaluated at the on- k^- -shell poles of the spectator particles [4]. The numerator of the fermion propagator of the quark which absorbs the photon momentum can be considered on- k^- -shell because $(\gamma^+)^2 = 0$. More generally, spin sums may be performed covariantly provided they occur before the k_i^- integrations. Thus, all the numerators of the fermion propagators can be substituted by the positive energy spinor projector, written in terms of light-front spinors.

The Melosh rotation is given by:

$$[R_M(p)]_{s's} = \bar{u}_D(p, s') u(p, s). \quad (8)$$

To evaluate equation (2), we observe that the Wigner rotation of the light-front spinors is one for kinematical light-front boosts. Let us recall that, as a result of the transitivity of the kinematic generators in the front form, a wavefunction is defined everywhere, once it is defined in the rest frame of the composite system. Thus, the matrix element of the pair coupled to spin zero is evaluated in the rest frame of the pair (cm) which, again, is found by a kinematical light-front boost Λ from the nucleon rest frame. Because the Wigner rotation is unity for such a Lorentz transformation, we can write (namely $u_{\text{cm}}(\vec{k}^{\text{cm}}, s) = u(\vec{k}^{\text{cm}}, s)$):

$$\begin{aligned} I(s_1, s_2, 0) &= \bar{u}(\vec{k}_1, s_1) \gamma_5 u^C(\vec{k}_2, s_2) \\ &= \bar{u}(\vec{k}_1^{\text{cm}}, s_1) \gamma_5 u^C(\vec{k}_2^{\text{cm}}, s_2), \end{aligned} \quad (9)$$

where $\vec{k}^{\text{cm}} = (k^{+\text{cm}}, \vec{k}_{\perp}^{\text{cm}})$ are the kinematical momentum variables of each particle 1 or 2 in the rest frame of the pair 12, $k^{(\text{cm})\mu} = (\Lambda k)^\mu$. The particle momenta in the pair rest frame are obtained by a kinematical light-front transformation from those in the nucleon rest frame to the pair rest frame due to the transitivity of kinematic generators mentioned above. Thus, inserting the completeness relation for positive energy Dirac spinors in equation (9), we obtain:

$$\begin{aligned} I(s_1, s_2, 0) &= \sum_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} \bar{u}(\vec{k}_1^{\text{cm}}, s_1) u_D(\vec{k}_1^{\text{cm}}, \bar{s}_1) \bar{u}_D(\vec{k}_2^{\text{cm}}, \bar{s}_2) \gamma_5 C \\ &\quad \times \bar{u}_D^T(\vec{k}_2^{\text{cm}}, \bar{s}_2) (\bar{u}(\vec{k}_2^{\text{cm}}, s_2) u_D(\vec{k}_2^{\text{cm}}, \bar{s}_2))^T. \end{aligned} \quad (10)$$

Using the definition of the Dirac spinors we get the relevant Clebsch-Gordan coefficients,

$$\bar{u}_D(\vec{k}_1^{\text{cm}}, \bar{s}_1) \gamma_5 C \bar{u}_D^T(\vec{k}_2^{\text{cm}}, \bar{s}_2) \rightarrow \chi_{\bar{s}_1}^\dagger i \sigma_2 \chi_{\bar{s}_2}^* = \sqrt{2} (\frac{1}{2} \bar{s}_1 \frac{1}{2} \bar{s}_2 | 00). \quad (11)$$

From equations (2), (8), (10) and (11), we finally derive the expression for the spin coupling of the nucleon and the quarks, resulting from one part of the effective Lagrangian:

$$\chi(s_1, s_2, s_3; s_N) = \sum_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} [R_M^\dagger(\vec{k}_1^{\text{cm}})]_{s_1 \bar{s}_1} [R_M^\dagger(\vec{k}_2^{\text{cm}})]_{s_2 \bar{s}_2} [R_M^\dagger(\vec{k}_3)]_{s_3 s_N} \chi_{\bar{s}_1}^\dagger i \sigma_2 \chi_{\bar{s}_2}^*. \quad (12)$$

The above expression of the nucleon spin wavefunction differs from the BT construction in so far as rest frames of composite subsystems play a role in Feynman diagrams, while in the BT only the overall cms matters. In particular, the Melosh rotations of the spin-zero coupled pair (12) have the momentum arguments evaluated in the rest frame of the pair in equation (12), while in the BT construction the arguments of the Melosh rotations are all evaluated in the nucleon rest frame. Also, various total momentum '+' components, such as P_{12}^+ and P^+ now appear in different frames, whereas in the BT case only M_0 occurs for P^+ in the nucleon rest frame.

To illustrate the different kinematics in the two-body cm system (Feynman) and three-body frames (BT formulation) we compare the energy of quark 1, i.e. $p_1 \cdot (p_1 + p_2)/M_2$ and $p_1 \cdot P/M_0$, where $M_2^2 = (p_1 + p_2)^2$ is the mass squared of the two-body (12)-subsystem and $M_0^2 = P^2$ that of the nucleon. Using $q_3^2 = (x_2 p_1 - x_1 p_2)^2/(1 - x_3)^2$ to obtain $2p_1 \cdot p_2$, we find

$$M_2^2 = \frac{1 - x_3}{x_1 x_2} (x_2 m_1^2 + x_1 m_2^2) - \frac{(1 - x_3)^2}{x_1 x_2} q_3^2, \quad (13)$$

$$M_0^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i^2}{x_i} - \frac{1 - x_3}{x_1 x_2} q_3^2 - \frac{Q_3^2}{x_3(1 - x_3)}. \quad (14)$$

We are careful to define the relevant projections with four-vectors whose '+' components are zero, namely $\pi_{12} \equiv p_1 + p_2 - (1 - x_3)P$ and $\pi_1 \equiv p_1 - x_1 P$, to avoid using off-shell '-' components of the momenta. Using

$$\pi_1^2 = \left(q_3 - \frac{x_1}{1 - x_3} Q_3 \right)^2 = m_1^2 + x_1^2 M_0^2 - 2x_1 p_1 \cdot P, \quad (15)$$

$$\pi_{12}^2 = Q_3^2 = M_2^2 - 2(1 - x_3)(p_1 + p_2) \cdot P + (1 - x_3)^2 M_0^2 \quad (16)$$

and

$$\begin{aligned} \pi_1 \cdot \pi_{12} &= p_1 \cdot (p_1 + p_2) - (1 - x_3)p_1 \cdot P - x_1 P \cdot (p_1 + p_2) + x_1(1 - x_3)M_0^2 \\ &= -q_3 \cdot Q_3 + \frac{x_1}{1 - x_3} Q_3^2 \end{aligned} \quad (17)$$

to eliminate $(p_1 + p_2) \cdot P$ in equation (15), we arrive at

$$p_1 \cdot P = \frac{(m_1^2 - q_3^2)}{2x_1} + \frac{q_3 \cdot Q_3}{1 - x_3} + \frac{x_1}{2} \left(M_0^2 - \frac{Q_3^2}{(1 - x_3)^2} \right), \quad (18)$$

$$p_1 \cdot (p_1 + p_2) = \frac{1 - x_3}{2x_1} (m_1^2 - q_3^2) + \frac{x_1 M_2^2}{2(1 - x_3)}. \quad (19)$$

Clearly, the momentum variables of the (12)-subsystem depend only on M_2 and q_3 , while those in the nucleon cm system also depend on M_0 and Q_3 . As a consequence we also expect dynamical quantities to change, e.g. form factors.

The same considerations will apply to the spin-zero pair invariant with an additional $\gamma \cdot P$ from the projector which reduces to γ_0 in the nucleon rest frame. Another instructive spin-flavour invariant will be discussed next, where the boost Λ appears explicitly, because of the vector character.

Let us now consider the vector spin-flavour coupling

$$\chi(s_1, s_2, s_3; s_N) = \bar{u}_1 \gamma^\mu u_2^C \bar{u}_3 \gamma_\mu \gamma_5 u_N, \quad (20)$$

where the spins of the 12-pair are coupled to unity and the relevant vector-isospin matrix element has been omitted for simplicity. Instead of equation (10), we now obtain the coupling

$$\begin{aligned} I^\mu(s_1, s_2, 1) &= \bar{u}(\vec{k}_1, s_1) \gamma^\mu u^C(\vec{k}_2, s_2) \\ &= \bar{u}(\vec{k}_1^{\text{cm}}, s_1) (\Lambda^{-1} \gamma)^\mu u^C(\vec{k}_2^{\text{cm}}, s_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Equation (21) then leads to the Clebsch–Gordan coefficients upon restricting to the large Dirac components ($\chi_s = [1, 0]u(k, s)$), namely

$$\begin{aligned} \bar{u}_D(\vec{k}_1^{\text{cm}}, \bar{s}_1) \gamma^\nu C \bar{u}_D^\dagger(\vec{k}_2^{\text{cm}}, \bar{s}_2) \bar{u}_D(\vec{k}_3, \bar{s}_1) (\Lambda \gamma)_\nu \gamma_5 u_N \rightarrow \chi_{\bar{s}_1}^\dagger (\vec{\sigma} i \sigma_2) \chi_{\bar{s}_2}^* \cdot \chi_{\bar{s}_3}^\dagger (\Lambda \sigma) \chi_{s_N} \\ = -\sqrt{6} \sum_{mm'} \Lambda_{m'm} (\frac{1}{2} \bar{s}_1 \frac{1}{2} \bar{s}_2 | 1m') (\frac{1}{2} \bar{s}_3 \frac{1}{2} s_N | 1, -m), \end{aligned} \quad (22)$$

and to

$$\begin{aligned} \chi(s_1, s_2, s_3; s_N) = \sum_{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3} [R_M^\dagger(\vec{k}_1^{\text{cm}})]_{s_1 \bar{s}_1} [R_M^\dagger(\vec{k}_2^{\text{cm}})]_{s_2 \bar{s}_2} [R_M^\dagger(\vec{k}_3)]_{s_3 \bar{s}_3} \\ \times \chi_{\bar{s}_1}^\dagger (\vec{\sigma} i \sigma_2) \chi_{\bar{s}_2}^* \cdot \chi_{\bar{s}_3}^\dagger (\Lambda \sigma) \chi_{s_N}. \end{aligned} \quad (23)$$

Other spin–flavour three–quark couplings are treated similarly.

In conclusion, we compare the evaluation of Feynman diagrams with the BT formulation of multi–quark systems. We emphasize that Feynman diagrams distinguish Melosh rotations and other kinematical quantities belonging to various composite subsystem frames that correspond to different loop integrals. Moreover, the light–cone spinors in equations (9), (10), and (21) are no longer all in the nucleon rest frame, which has consequences for the *normalization* of the spin–flavour invariants. This may become important at higher momentum transfers and is relevant for the orthogonality of the wavefunctions (i.e. at $q^2 = 0$). The BT formalism knows only the rest frame of the *whole* composite system, where everything is evaluated.

Thus, BT is much closer to nonrelativistic few–body theory, apart from ignoring systematically small Dirac components, so that one is justified in calling it ‘minimally relativistic’.

Acknowledgments

HJW and TF are grateful to G Röpke and the many–particle research group for their warm hospitality. WRBA thanks CNPq for financial support and TF thanks CNPq and CAPES/DAAD/PROBRAL.

References

- [1] Bakamjian B and Thomas L H 1953 *Phys. Rev.* **92** 1300
- [2] Carbonell J, Desplanques B, Karmanov V and Mathiot J-F 1998 *Phys. Rep.* **300** 215 and references therein
- [3] Beyer M, Kuhrt C and Weber H J 1998 *Ann. Phys., NY* **269** 129 and references therein
- [4] de Melo J P B C and Frederico T 1997 *Phys. Rev. C* **55** 2043 and references therein



ELSEVIER

6 April 2000

PHYSICS LETTERS B

Physics Letters B 478 (2000) 86–93

Relativistic quark spin coupling effects in the nucleon electromagnetic form factors

W.R.B. de Araújo ^a, E.F. Suisso ^b, T. Frederico ^b, M. Beyer ^c, H.J. Weber ^{c,1}

^a Laboratório do Acelerador Linear, Instituto de Física da USP, C.P. 663118, CEP 05315-970, São Paulo, Brazil

^b Dep. de Física, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Centro Técnico Aeroespacial, 12.228-900 São José dos Campos, São Paulo, Brazil

^c FB Physik, Universität Rostock, 18051 Rostock, Germany

Received 27 September 1999; received in revised form 30 November 1999; accepted 8 February 2000

Editor: J.-P. Blaizot

Abstract

We investigate the effect of different forms of relativistic spin coupling of constituent quarks in the nucleon electromagnetic form factors. The four-dimensional integrations in the two-loop Feynman diagram are reduced to the null-plane, such that the light-front wave function is introduced in the computation of the form factors. The neutron charge form factor is very sensitive to different choices of spin coupling schemes, once its magnetic moment is fitted to the experimental value. The scalar coupling between two quarks is preferred by the neutron data, when a reasonable fit of the proton magnetic momentum is found. © 2000 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

The purpose of this work is to study the nucleon electromagnetic form factors using different forms of relativistic spin coupling between the constituent quarks forming the nucleon. We use an effective Lagrangian to describe the quark spin coupling to the nucleon. We keep close contact with covariant field theory and perform a three-dimensional reduction of the amplitude for the photon absorption process by the nucleon to the null-plane, $x^+ = x^0 + x^3 = 0$, (see, e.g., Ref. [1]). After the three-dimensional reduction, one can introduce the nucleon light-front wave function in the two-loop momentum integrations which define the electromagnetic current. We consider the

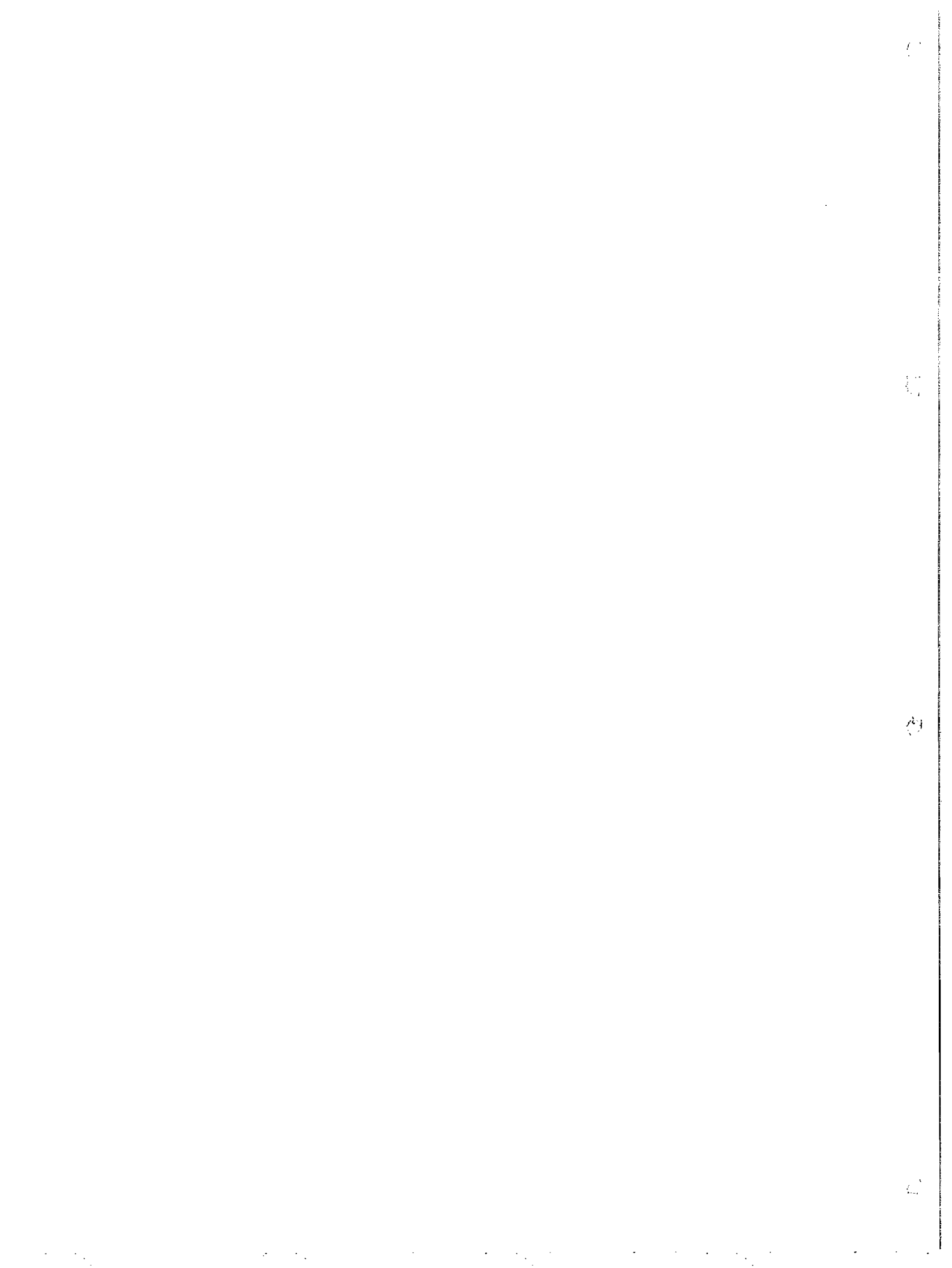
triangle diagram that is a major ingredient of recent electromagnetic and weak baryon form factor evaluations in light front dynamics.

We start with the effective Lagrangian for the N-q coupling

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{N-3q} = & \alpha \epsilon^{lmn} \bar{\Psi}_{(l)} \tau_2 \gamma_5 \Psi_{(m)}^C \bar{\Psi}_{(n)} \Psi_N \\ & + (1 - \alpha) \epsilon^{lmn} \bar{\Psi}_{(l)} \tau_2 \gamma_\mu \gamma_5 \Psi_{(m)}^C \bar{\Psi}_{(n)} i \partial^\mu \Psi_N \\ & + \text{H.C.}, \end{aligned} \quad (1)$$

where τ_2 is the isospin matrix, the color indices are $\{l, m, n\}$ and ϵ^{lmn} is the totally antisymmetric symbol. The conjugate quark field is $\Psi^C = C \bar{\Psi}^T$, where $C = i \gamma^2 \gamma^0$ is the charge conjugation matrix; α is a parameter to dial the spin coupling parameterization, and m_N is the nucleon mass.

¹ Permanent address: Dept. of Physics, University of Virginia, Charlottesville, USA.



The macroscopic matrix element of the nucleon electromagnetic current $j_N^+(Q^2)$ in the Breit-frame and in the light-front spinor basis is given by

$$\begin{aligned} \langle s' | j_N^+(Q^2) | s \rangle &= \bar{u}(p', s') \left(F_{1N}(Q^2) \gamma^+ \right. \\ &\quad \left. + i \frac{\sigma^{\mu\nu} Q_\mu}{2m_N} F_{2N}(Q^2) \right) u(p, s) \\ &= \frac{p^+}{m_N} \langle s' | F_{1N}(Q^2) \\ &\quad + i \frac{F_{2N}(Q^2)}{2m_N} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{q}_\perp \times \boldsymbol{\sigma}) | s \rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

where F_{1N} and F_{2N} are the Dirac and Pauli form factors, respectively. \mathbf{n} is the unit vector along the z-direction. The Breit-frame momenta are $Q^\mu = (0, \mathbf{q}_\perp)$, such that $(Q^+ = Q^0 + Q^3 = 0)$ and $\mathbf{q}_\perp = (q^1, q^2)$; $p = \left(\sqrt{\frac{q_\perp^2}{4} + m_N^2}, -\frac{q_\perp}{2} \right)$ and $p' = \left(\sqrt{\frac{q_\perp^2}{4} + m_N^2}, \frac{q_\perp}{2} \right)$.

The light-front spinors are

$$u(p, s) = \frac{\not{p} + m_N}{2\sqrt{p^+ m_N}} \gamma^+ \gamma^0 \begin{pmatrix} \chi_s^{\text{Pauli}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

The Dirac spinor of the instant form

$$u_D(p, s) = \frac{\not{p} + m_N}{\sqrt{2m(p^0 + m)}} \begin{pmatrix} \chi_s^{\text{Pauli}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

carries the subscript D .

The Sachs form factors are defined by

$$\begin{aligned} G_{EN}(Q^2) &= F_{1N}(Q^2) + \frac{Q^2}{4m_N^2} F_{2N}(Q^2), \\ G_{MN}(Q^2) &= F_{1N}(Q^2) + F_{2N}(Q^2). \end{aligned} \quad (5)$$

The magnetic moment is $\mu_N = G_{MN}(0)$ and the mean square radius is $r_N^2 = 6 \frac{dG_{EN}(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0}$.

The nucleon electromagnetic current ($j_N^+(Q^2)$), obtained from the effective Lagrangian by considering the complete antisymmetrization of the matrix element of the current, has five topologically distinct diagrams. We can calculate the photon absorption amplitude considering only the process on quark 3, due to the symmetrization of the microscopic matrix element after the factorization of the color degree of

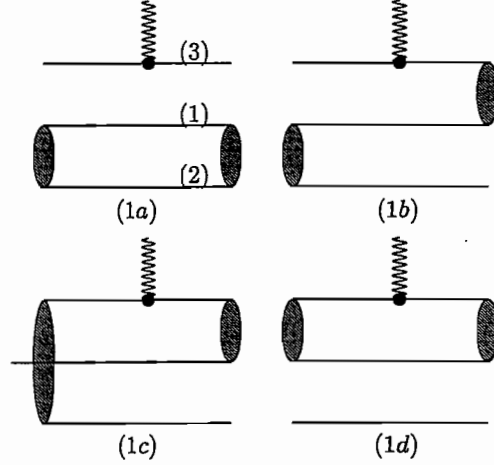


Fig. 1. Feynman diagrams for the nucleon current. The gray blob represents the spin invariant for the coupled quark pair in the effective Lagrangian, Eq. (1). Diagram (1a) represents j_{aN}^+ , Eq. (7). Diagram (1b) represents j_{bN}^+ , Eq. (8). Diagram (1c) represents j_{cN}^+ , Eq. (9). Diagram (1d) represents j_{dN}^+ , Eq. (10).

freedom. Fig. (1a) defines the nucleon spin-space operator j_{aN}^+ and represents the case where quark 3 absorbs the photon while 1 and 2 compose the spectator-coupled quark pair in Eq. (1) for the initial and final nucleons. In Fig. (1b), the coupled quark pair in the initial nucleon is (13) and in the final nucleon the coupled pair is (12). The operator j_{bN}^+ , represented by the diagram (1b), should be multiplied by a factor of 4. A factor 2 comes from the exchange of quarks 1 and 2, and another factor 2 comes from the invariance of this term under the exchange of the pairs in the initial and final nucleons, which is a consequence of time reversal invariance and parity transformation property. The operator j_{cN}^+ is represented by Fig. (1c), where the initial coupled pair quark is (13) and the final coupled pair is (23). This operator is multiplied by a factor of 2 because the quarks 1 and 2 can be exchanged. The operator represented by diagram (1d), j_{dN}^+ , corresponds to the process in which the photon is absorbed by the coupled quark pair (23) while 1 is spectator. In this case, two diagrams are possible by the exchange of quarks 1 and 2. Thus, the microscopic operator of the nucleon current is given by the sum of four terms:

$$\begin{aligned} j_N^+(Q^2) &= j_{aN}^+(Q^2) + 4j_{bN}^+(Q^2) \\ &\quad + 2j_{cN}^+(Q^2) + 2j_{dN}^+(Q^2). \end{aligned} \quad (6)$$

The nucleon current operators $j_{\beta N}^+$, $\beta = a, b, c, d$, are written directly from the Feynman diagrams of Fig. 1. The electromagnetic field is coupled in the usual minimal way ensuring gauge invariance. The electromagnetic current, j_N^+ , is constructed from the Feynman triangle two-loop diagrams of Figs. (1a) to (1d):

$$\begin{aligned} \langle s' | j_{aN}^+(Q^2) | s \rangle &= -\langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \text{Tr} [i\tau_2(-i)\tau_2] \\ &\times \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} \Lambda(k_i, p') \Lambda(k_i, p) \bar{u}(p', s') \\ &\times S(k_3) \gamma^+ S(k_3) u(p, s) \\ &\times \text{Tr} [S(k_2) (\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}) \gamma^5 \\ &\times S_c(k_1) \gamma^5 (\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}')], \end{aligned} \quad (7)$$

with $S(p) = \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon}$, and $S_c(p) = [\gamma^0 \gamma^2 \times \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \gamma^0 \gamma^2]^T$. m is the constituent quark mass and $k_3 = k_3 + Q$. The quark charge operator \hat{Q}_q is diagonal and its matrix elements are $2/3$ for the up quark and $-1/3$ for the down quark. The choice of the function $\Lambda(k_i, p)$ will be discussed later.

The diagram of Fig. (1b) is given by

$$\begin{aligned} \langle s' | j_{bN}^+(Q^2) | s \rangle &= -\langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} \\ &\times \Lambda(k_i, p') \Lambda(k_i, p) \bar{u}(p', s') \\ &\times S(k_3) \gamma^+ S(k_3) (\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}) \gamma^5 \\ &\times S_c(k_1) \gamma^5 (\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}') \\ &\times S(k_2) u(p, s). \end{aligned} \quad (8)$$

The diagram of Fig. (1c) is given by

$$\begin{aligned} \langle s' | j_{cN}^+(Q^2) | s \rangle &= \langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} \\ &\times \Lambda(k_i, p') \Lambda(k_i, p) \bar{u}(p', s') \\ &\times S(k_1) (\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}) \gamma^5 S_c(k_3) \gamma^+ \\ &\times S_c(k_3) \gamma^5 (\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}') \\ &\times S(k_2) u(p, s). \end{aligned} \quad (9)$$

The diagram of Fig. (1d) is given by

$$\begin{aligned} \langle s' | j_{dN}^+(Q^2) | s \rangle &= -\text{Tr} [\hat{Q}_q] \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} \\ &\times \Lambda(k_i, p') \Lambda(k_i, p) \bar{u}(p', s') S(k_2) u(p, s) \\ &\times \text{Tr} [\gamma^5 (\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}') S(k_3) \gamma^+ \\ &\times S(k_3) (\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}) \gamma^5 S_c(k_1)]. \end{aligned} \quad (10)$$

The light-front coordinates are defined as $k^+ = k^0 + k^3$, $k^- = k^0 - k^3$, $k_\perp = (k^1, k^2)$. In each term of the nucleon current, from j_{aN}^+ to j_{dN}^+ , the Cauchy integrations over k_1^- and k_2^- are performed. That means the on-mass-shell pole of the Feynman propagators for the spectator particles 1 and 2, in the photon absorption process, are taken into account. In the Breit-frame, with $Q^+ = 0$, there is a maximal suppression of light-front Z-diagrams in j^+ [2,3]. Thus, the components of the momentum k_1^+ and k_2^+ are bounded, such that $0 < k_1^+ < p^+$ and $0 < k_2^+ < p^+ - k_1^+$ [4]. The four-dimensional integrations of Eq. (7) to (10) are reduced to the three-dimensional volume of the null-plane.

The analytical integration of Eq. (7) of the ‘-’ components of momentum yields

$$\begin{aligned} \langle s' | j_{aN}^+(Q^2) | s \rangle &= 2p^{+2} \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \\ &\times \int \frac{d^2 k_{1\perp} dk_1^+ d^2 k_{2\perp} dk_2^+}{4(2\pi)^6 k_1^+ k_2^+ k_3^{+2}} \\ &\times \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \\ &\times \text{Tr} [(\not{k}_2 + m) (\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}) \\ &\times (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1-\alpha) \not{p}')] \\ &\times \bar{u}(p', s') (\not{k}_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) \\ &\times u(p, s) \frac{\Lambda(k_i, p') \Lambda(k_i, p)}{m_N^2 - M_0^2} \frac{1}{m_N^2 - M_0^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

where $k_1^2 = m^2$ and $k_2^2 = m^2$ and the free three-quark squared mass is defined by

$$M_0^2 = p^+ \left(\frac{k_{1\perp}^2 + m^2}{k_1^+} + \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{k_2^+} + \frac{k_{3\perp}^2 + m^2}{k_3^+} \right) - p_\perp^2, \quad (12)$$

and $M_0'^2 = M_0^2(k_3 \rightarrow k_3', p_\perp \rightarrow p'_\perp)$.

The other terms of the nucleon current, as given by Eqs. (8)–(10) are also integrated over the k^- momentum components of particles 1 and 2, following the same steps used to obtain Eq. (11) from Eq. (7):

$$\begin{aligned} \langle s' | j_{bN}^+(Q^2) | s \rangle &= p^{+2} \langle N | \hat{Q}_q | N \rangle \\ &\times \int \frac{d^2 k_{1\perp} dk_1^+ d^2 k_{2\perp} dk_2^+}{4(2\pi)^6 k_1^+ k_2^+ k_3^{+2}} \\ &\times \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \\ &\times \bar{u}(p', s') (\not{k}_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) \\ &\times (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m) \\ &\times (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_2 + m) \\ &\times u(p, s) \frac{\Lambda(k_i, p')}{m_N^2 - M_0'^2} \frac{\Lambda(k_i, p)}{m_N^2 - M_0^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \langle s' | j_{cN}^+(Q^2) | s \rangle &= p^{+2} \langle N | \tau_2 \hat{Q}_q \tau_2 | N \rangle \\ &\times \int \frac{d^2 k_{1\perp} dk_1^+ d^2 k_{2\perp} dk_2^+}{4(2\pi)^6 k_1^+ k_2^+ k_3^{+2}} \\ &\times \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \\ &\times \bar{u}(p', s') (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) \\ &\times (\not{k}_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') \\ &\times (\not{k}_2 + m) u(p, s) \frac{\Lambda(k_i, p')}{m_N^2 - M_0'^2} \frac{\Lambda(k_i, p)}{m_N^2 - M_0^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \langle s' | j_{dN}^+(Q^2) | s \rangle &= p^{+2} \text{Tr}[\hat{Q}_q] \\ &\times \int \frac{d^2 k_{1\perp} dk_1^+ d^2 k_{2\perp} dk_2^+}{4(2\pi)^6 k_1^+ k_2^+ k_3^{+2}} \\ &\times \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \\ &\times \text{Tr}[(\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}')] \\ &\times (\not{k}_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) \\ &\times (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m) \\ &\times \bar{u}(p', s') (\not{k}_2 + m) u(p, s) \\ &\times \frac{\Lambda(k_i, p')}{m_N^2 - M_0'^2} \frac{\Lambda(k_i, p)}{m_N^2 - M_0^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

The gaussian wave function is introduced in Eqs. (11)–(15) through the substitution [2]:

$$\frac{1}{2(2\pi)^3} \frac{\Lambda(k_i, p)}{m_N^2 - M_0^2} \rightarrow N \exp(-M_0^2/2\beta^2), \quad (16)$$

where N is chosen such that the proton charge is 1. This radial momentum wave function is chosen for both $N - q$ couplings, and such wave function fall off too fast for $-Q^2 > 1$ (GeV/c)² [5], so that small results compared to the data are expected due to that simplistic wave function shape.

The spin-flavor invariant of the nucleon with quark pair spin zero ($\alpha = 1$) is the simplest of a basis of 8 such states given in greater detail in Ref. [6], for example. The only nucleon spin invariant used and tested in form factor calculations contains the additional projector $\not{p} + M_0$ onto large Dirac components, a characteristic feature of the Bakamjian–Thomas formalism [7]. The spin-flavor invariant in the effective Lagrangian, (1), with $\alpha = 1/2$, resembles the Bakamjian–Thomas, but is not equivalent to it, as it will be explained below.

As we have discussed, the residues of the triangle Feynman diagram are evaluated at the on- k^- -shell poles of the spectator particles [4]. The numerator of the fermion propagator of the quark which absorbs the photon momentum can be considered on- k^- -shell because $(\gamma^+)^2 = 0$. Thus, all the numerators of the fermion propagators can be substituted by the positive energy spinor projector, written in terms of

light-front spinors. To explore the physical meaning of the effective Lagrangian, we follow closely the work of Ref. [8], where the case $\alpha = 1$ is discussed in detail. It has been suggested to perform a kinematical light-front boost of the matrix elements of the spin operators between quark states and quark-nucleon states, related to the initial and final nucleons and their respective rest-frames. Because the Wigner rotation is unity for such Lorentz transformations, the matrix elements appearing in the nucleon electromagnetic current, corresponding to the spin coupling of the quarks to the initial or final nucleon, can be evaluated in their respective rest-frames. A typical matrix element of the spin coupling coefficient for $\alpha = 1$ appearing in the evaluation of j^+ , when calculated in the nucleon rest frame, is given by

$$\chi(s_1, s_2, s_3; s_N) = \bar{u}_1 \gamma_5 u_2^c \bar{u}_3 u_N, \quad (17)$$

where $u_i = u(k_i, s_i)$ is the light-front spinor for the i -th quark.

To calculate Eq. (17), we begin by evaluating the matrix element of the pair coupled to spin zero in the rest frame of the pair (c.m.) which, again, is found by a kinematical light-front boost from the nucleon rest frame. Because the Wigner rotation is unity for such a Lorentz transformation, we can write (viz. $u_{c.m.}(k^{c.m.}, s) = u(k^{c.m.}, s)$)

$$\begin{aligned} I(s_1, s_2, 0) &= \bar{u}(k_1, s_1) \gamma_5 u^c(k_2, s_2) \\ &= \bar{u}(k_1^{c.m.}, s_1) \gamma_5 u^c(k_2^{c.m.}, s_2), \end{aligned} \quad (18)$$

where $k^{c.m.} = (k^{+c.m.}, k_{\perp}^{c.m.})$ are the kinematical momentum variables of each particle 1 or 2 in the rest frame of the pair 12, $k^{(c.m.)\mu} = (\Lambda k)^\mu$. The particle momenta in the pair rest frame are obtained by a kinematical light-front transformation from those in the nucleon rest frame to the pair rest frame. Introducing the completeness relation for positive energy Dirac spinors in Eq. (18), one finds

$$\begin{aligned} I(s_1, s_2, 0) &= \sum_{\bar{s}_1, \bar{s}_2} \bar{u}(k_1^{c.m.}, s_1) u_D(k_1^{c.m.}, \bar{s}_1) \\ &\quad \times \bar{u}_D(k_1^{c.m.}, \bar{s}_1) \gamma_5 C \bar{u}_D^T(k_2^{c.m.}, \bar{s}_2) \\ &\quad \times (\bar{u}(k_2^{c.m.}, s_2) u_D(k_2^{c.m.}, \bar{s}_2))^T. \end{aligned} \quad (19)$$

The Clebsch–Gordan coefficients are found by using the Dirac spinors in Eq. (19)

$$\begin{aligned} &\bar{u}_D(k_1^{c.m.}, \bar{s}_1) \gamma_5 C \bar{u}_D^T(k_2^{c.m.}, \bar{s}_2) \\ &\quad \rightarrow \chi_{\bar{s}_1}^\dagger i \sigma_2 \chi_{\bar{s}_2}^* = \sqrt{2} \langle \frac{1}{2} \bar{s}_1 \frac{1}{2} \bar{s}_2 | 00 \rangle. \end{aligned} \quad (20)$$

The Melosh rotation is given by

$$[R_M(p)]_{s's} = \bar{u}_D(p, s') u(p, s). \quad (21)$$

From Eqs. (17), (19)–(21), the form of the spin coupling of the nucleon to the quarks is written as

$$\begin{aligned} &\chi(s_1, s_2, s_3; s_N) \\ &= \sum_{\bar{s}_1, \bar{s}_2} [R_M^\dagger(k_1^{c.m.})]_{s_1 \bar{s}_1} [R_M^\dagger(k_2^{c.m.})]_{s_2 \bar{s}_2} \\ &\quad \times [R_M^\dagger(k_3)]_{s_3 s_N} \chi_{\bar{s}_1}^\dagger i \sigma_2 \chi_{\bar{s}_2}^*. \end{aligned} \quad (22)$$

The Melosh rotations of the spin-zero coupled pair (12) have the momentum arguments evaluated in the rest frame of the pair in Eq. (22), while in the BT construction the arguments of the Melosh rotations are all evaluated in the nucleon rest frame. Moreover, the light-front spinors in Eqs. (18) and (19) are no longer all in the nucleon rest frame, which will have observable consequences in the electromagnetic form factors. Also, the various total momentum '+' components, such as p_{12}^+ and p^+ now appear in different frames, whereas in the BT case only M_0 occurs for p^+ in the nucleon rest frame.

The same considerations will apply to the pair-spin 0 invariant with an additional $\not{p} + m_N$ ($\alpha = 1/2$) from the projector which reduces to $\gamma_0 + 1$ in the nucleon rest frame. However, the Melosh rotations have as arguments the quark momenta in the nucleon rest-frame. This last case still differs from the BT construction because the sum of the '+' components of the quark momenta is the nucleon momentum, p^+ , and not M_0 as in the BT formalism. If a relative minus sign is chosen for the two terms of the effective Lagrangian with $\alpha = 1/2$, the pair is projected on to the small components of the quark spinors. This should imply in a strong deviation from the nonrelativistic quark model (NRQM) predictions, which will be seen in our numerical results. After this formal discussion, we discuss next the observable effects of different choices of quark spin coupling schemes for the nucleon electromagnetic current.

Table 1

Nucleon low-energy electromagnetic observables for different spin coupling parameters with a gaussian light-front wave function compared to calculations performed by Konen and Weber for $m = 330$ MeV and a fixed value of $\beta = 554.3$ MeV (in their work the gaussian parameter is $\beta/\sqrt{3}$)

α	$\langle r^2 \rangle_n$ (fm ²)	$\langle r^2 \rangle_p$ (fm ²)	μ_n (μ_N)	μ_p (μ_N)
KW [5]	-0.023	0.69	-1.73	2.80
1	-0.080	0.71	-1.60	2.71
1/2	-0.024	0.69	-1.73	2.80
0	0.035	0.69	-1.83	2.84
1/2 ^a	-0.112	0.83	-0.65	1.59
experiment	-0.113 ± 0.005 [10]	0.66 ± 0.06 [11], 0.74 ± 0.02 [12]	-1.91	2.79

^a The sign of the second term in Eq. (1) is reversed.

First, in Table 1, we compare our calculations with those of Konen and Weber using a gaussian wave function with $\beta = 554.3$ MeV and a quark mass of 330 MeV. Their calculations have the spinors of the pair projected on the upper components in the nucleon rest-frame. In fact, for $\alpha = 1/2$, our results are in agreement with the ones obtained in Ref. [5]. The effect of a modified quark-pair rest-frame Melosh rotations is seen as the difference found by the calculations with $\alpha = 1$ and $\alpha = 1/2$. Also, we observe that the sign of the neutron square radius is positive for $\alpha = 0$. The data on magnetic moments excludes the special case of $\alpha = 1/2$ with a relative minus sign between the two terms in Eq. (1).

The numerical results for the nucleon electromagnetic form-factors for $\alpha = 1, 0$ and $1/2$ are discussed in the following for a quark mass of 220 MeV [9]. The size parameter β is adjusted such that the neutron magnetic moment becomes $-1.91 \mu_N$. This choice of parameterization through the neutron magnetic moment was used in order to focus our study on the electric neutron form factor, which turns out to be very sensitive to different spin coupling

schemes. In Table 2, the results are shown for the nucleon mean square radius and proton magnetic moment. The neutron mean square radius depends strongly on the spin coupling parameter α . Looking at Table 2, one can deduce from the column $\langle r^2 \rangle_n$ that the case $\alpha = 0$ is excluded but from columns $\langle r^2 \rangle_p$ and μ it seems on the contrary that the case $\alpha = 0$ is the more favorable. However, the results from column $\langle r^2 \rangle_n$ totally exclude the case $\alpha = 0$ whereas $\langle r^2 \rangle_p$ and μ simply disfavor it. The best result for $\langle r^2 \rangle_n$ is found for $\alpha = 1$, i.e., the scalar coupling of the quark pair.

In Fig. 2, we present the model results for the neutron electric form-factor G_{En} , and the scalar coupling is shown to be consistent with data. The calculation with $\alpha = 1/2$ is below the data as anticipated from the small radius. The calculation with $\alpha = 0$ yields a negative G_{En} and it is not shown in the figure. The model results for G_{Mn} is compared to the data in Fig. 3. Below momentum transfers of 1 GeV/c, the model is consistent with the experimental data and above this value it deviates from the data. The difference between the model and experi-

Table 2

Nucleon low-energy electromagnetic observables for different spin coupling parameters with a gaussian light-front wave function adjusted to $\mu_n = -1.91 \mu_N$

α	β (MeV)	$\langle r^2 \rangle_n$ (fm ²)	$\langle r^2 \rangle_p$ (fm ²)	μ_p (μ_N)
1	562	-0.075	0.88	3.11
1/2	664	-0.024	0.72	3.05
0	661	0.079	0.69	2.90
experiment	-	-0.113 ± 0.005 [10]	0.66 ± 0.06 [11], 0.74 ± 0.02 [12]	2.79

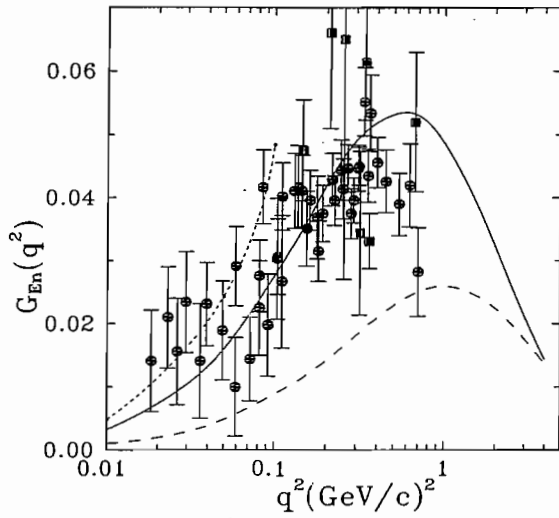


Fig. 2. Neutron electric form factor as a function of the momentum transfer $q^2 = -Q^2$. Results for $\alpha = 1$, solid line; for $\alpha = 1/2$, dashed line. The short-dashed line represents the curve $G_{En}(Q^2) \approx \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_n Q^2$ with the experimental value of $\langle r^2 \rangle_n = -0.113 \text{ fm}^2$ [10]. The full circles are the experimental data from Ref. [13] and the full squares from Ref. [18].

mental values of G_{Mn} could be minimized, at the expense of increasing the deviation of the neutron mean square radius from its experimental value.

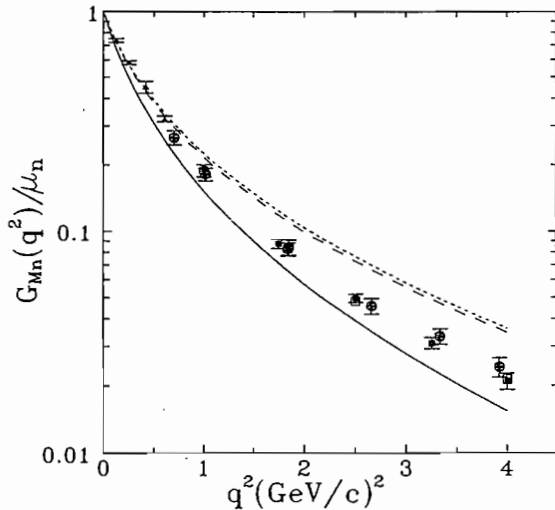


Fig. 3. Neutron magnetic form-factor as a function of the momentum transfer $q^2 = -Q^2$. Model results for $\alpha = 1$, solid line; for $\alpha = 1/2$, dashed line; for $\alpha = 0$, short-dashed line. Experimental data from Ref. [14], full circles; from Ref. [15], empty squares; from Ref. [16], full squares; from Ref. [17], full triangles.

In Fig. 4, we show the ratio of the proton electric to magnetic form factors compared with recent data. The choice of $\alpha = 1$, among the values of 1, 1/2 and 0, shows the smallest deviation from the data. However, the calculation still misses the experimental values. Even in NRQM, the nucleon, considered as a three-quark system, is highly relativistic and the real wave function, once properly obtained, can strongly differ from their nonrelativistic counterparts. In that respect, the difference between the data and the extrapolation done in Figs. 3 and 4 until values of momentum transfer of several GeV/c is not too serious considering the simplicity of the chosen wave function. Also, we have not considered constituent quarks form factors [9], but this discussion is beyond our purpose in this work.

In conclusion, we have tested different spin coupling schemes for the nucleon in a calculation of the nucleon electromagnetic form factors. We find that the electric form factor of the neutron can be used to constrain the quark spin coupling schemes. The comparison with the neutron data below momentum transfer of 1 GeV/c suggests that the scalar pair is preferred in the relativistic quark spin coupling of the nucleon. Our study is performed with a very simple gaussian wave function, assumed to be the same for both structures, even in the ‘‘mixed’’ case

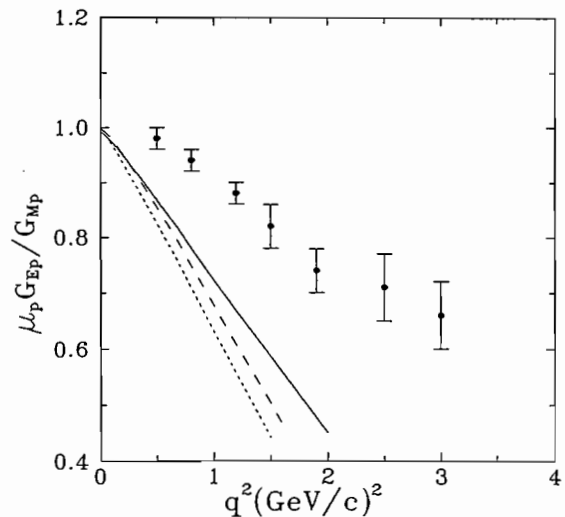


Fig. 4. Proton form-factor ratio $\mu_p G_{Ep}/G_{Mp}$ as a function of momentum transfer. Theoretical curves labeled as in Fig. 3. The experimental data comes from Ref. [19].

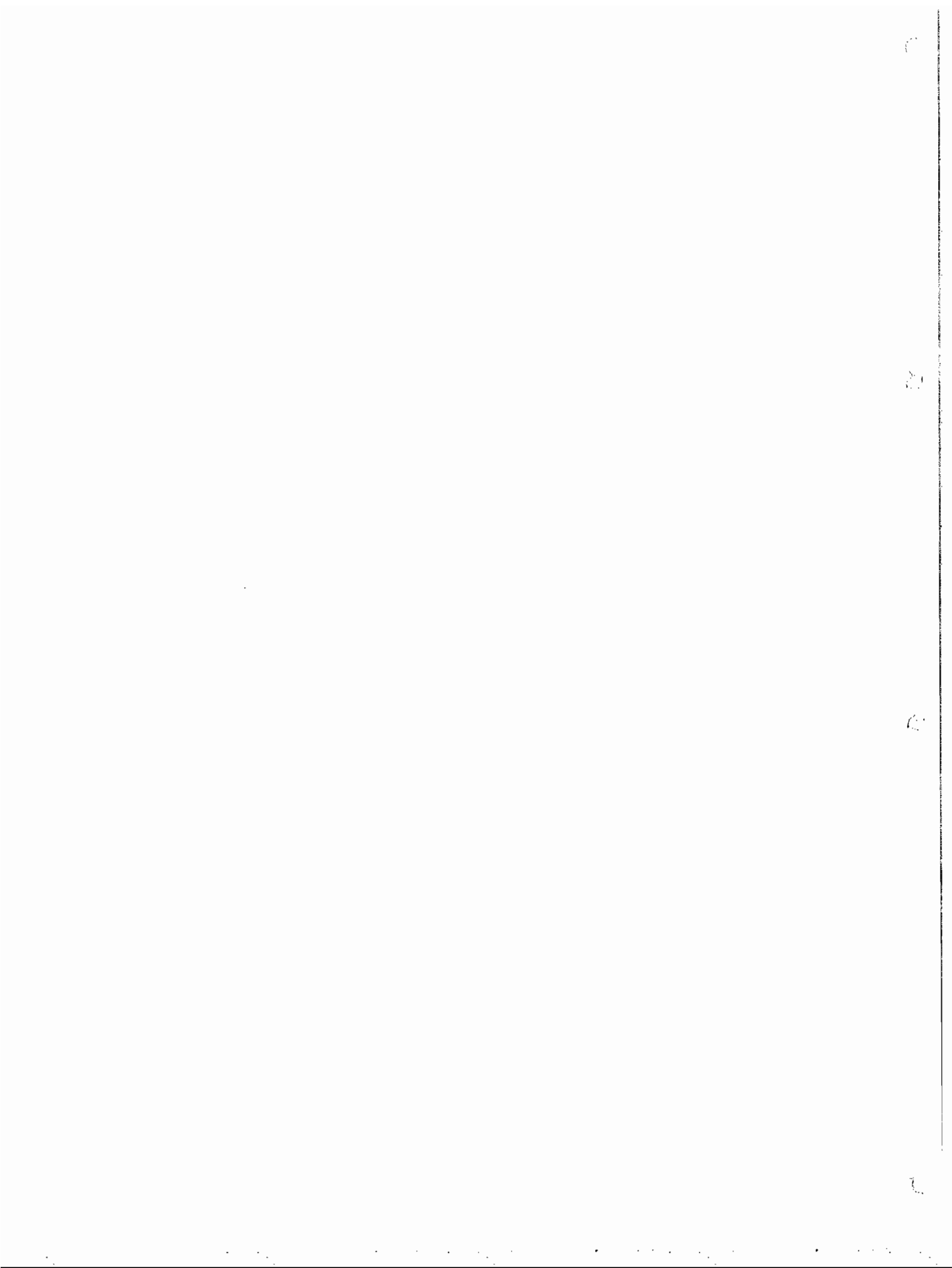
($\alpha = 1/2$). Taking into account the fact that $\langle r^2 \rangle_n$ is the result of a delicate cancellation, the possibility is not excluded that our conclusion depends on the detailed form of the realistic radial wave function.

Acknowledgements

H.J.W. is grateful to G. Röpke and the many particle research group for their warm hospitality. W.R.B.A. thanks CNPq for financial support and LCCA/USP for providing computational facilities, E.F.S. thanks FAPESP for financial support and T.F. thanks CNPq, FAPESP and CAPES/DAAD/PROBRAL.

References

- [1] J. Carbonell, B. Desplanques, V. Karmanov, J.-F. Mathiot, *Phys. Rep.* 300 (1998) 215, and references therein.
- [2] T. Frederico, G.A. Miller, *Phys. Rev. D* 45 (1992) 4207.
- [3] J.P.B. C de Melo, H.W. Naus, T. Frederico, *Phys. Rev. C* 59 (1999) 2278.
- [4] J.P.B.C. de Melo, T. Frederico, *Phys. Rev. C* 55 (1997) 2043, and references therein.
- [5] W. Konen, H.J. Weber, *Phys. Rev. D* 41 (1991) 2201.
- [6] M. Beyer, C. Kuhrts, H.J. Weber, *Ann. Phys. (NY)* 269 (1998) 129, and references therein.
- [7] B. Bakamjian, L.H. Thomas, *Phys. Rev.* 92 (1953) 1300.
- [8] W.R.B. de Araújo, M. Beyer, T. Frederico, H.J. Weber, *J. Phys. G* 25 (1999) 1589.
- [9] F. Cardarelli, E. Pace, G. Salme, S. Simula, *Phys. Lett. B* 357 (1995) 267; *Few Body Syst. Suppl.* 8 (1995) 345; F. Cardarelli, S. Simula, *nucl-th/9906095*.
- [10] S. Kopecky et al., *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995) 2427.
- [11] S.J. Brodsky, J.R. Primack, *Ann. Phys. (NY)* 52 (1969) 315.
- [12] J.J. Murphy II, Y.M. Shin, D.M. Skopik, *Phys. Rev. C* 9 (1974) 3125.
- [13] S. Platchkov et al., *Nucl. Phys. A* 510 (1990) 740.
- [14] W. Albrecht et al., *Phys. Lett. B* 26 (1968) 642.
- [15] S. Rock et al., *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982) 1139.
- [16] A. Lung et al., *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993) 6.
- [17] E.E.W. Bruins et al., *Phys. Rev. Lett.*, 1995, p. 1.
- [18] T. Eden et al., *Phys. Rev. C* 50 (1994) R1749; M. Meyerhoff et al., *Phys. Lett. B* 327 (1994) 201; C. Herberg et al., *Eur. Phys. J. A* 5 (1999) 131; I. Passchier et al., *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999) 4988; M. Ostrick et al., *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999) 276; G. Becker et al., submitted to *Eur. Phys. J.*
- [19] C. Perdrisat, TJLAB E93-27; priv. comm.





ELSEVIER

Nuclear Physics A(....)-....

NUCLEAR
PHYSICS A

www.elsevier.nl/locate/npe

Relativistic quark spin coupling effects in the correlations between nucleon electroweak properties

E.F. Suisso^a, W.R.B. de Araújo^b, T. Frederico^a, M. Beyer^{c,*},
H.J. Weber^d

^a *Dep. de Física, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Centro Técnico Aeroespacial, 12.228-900 São José dos Campos, São Paulo, Brazil*

^b *Laboratório do Acelerador Linear, Instituto de Física da USP, CP 663118, CEP 05315-970, São Paulo, Brazil*

^c *Fachbereich Physik, Universität Rostock, 18051 Rostock, Germany*

^d *Dept. of Physics, University of Virginia, Charlottesville, VA 22901, USA*

Received 25 July 2000; revised 6 March 2001; accepted 20 March 2001

Abstract

We investigate the effect of different relativistic spin couplings of constituent quarks on nucleon electroweak properties. Within each quark spin coupling scheme the correlations between static electroweak observables are found to be independent of the particular shape of the momentum part of the nucleon light-front wave function. The neutron charge form factor is very sensitive to different choices of spin coupling schemes once the magnetic moment is fitted to the experimental value. However, it is found rather insensitive to the details of the momentum part of the three-quark wave function model. © 2001 Published by Elsevier Science B.V.

1. Introduction

In a previous work [1], we have studied nucleon electromagnetic form factors using different forms of relativistic spin couplings between the constituent quarks forming the nucleon. We have used an effective Lagrangian to describe the quark spin coupling to the nucleon keeping close contact with covariant field theory. We have performed a three-dimensional reduction of the amplitude for the (virtual) photon absorption by the nucleon to the null-plane, $x^+ = x^0 + x^3 = 0$, (see, e.g., Ref. [2]). After the three-dimensional reduction the momentum part of the nucleon light-front wave function was introduced into

* Corresponding author.

E-mail address: beyer@darss.mpg.uni-rostock.de (M. Beyer).

1 the two-loop momentum integrations that define the matrix elements of the electromagnetic 1
 2 current. 2

3 In Ref. [1] we have tested different spin couplings for the nucleon in a calculation of 3
 4 nucleon electromagnetic form factors and found that the neutron charge form factor in 4
 5 particular leads to constraints of the quark spin coupling. The comparison with the neutron 5
 6 data below momentum transfer of 1 GeV/c suggests that the scalar pair is preferred in the 6
 7 relativistic quark spin coupling of the nucleon. That study was performed assuming the 7
 8 same gaussian wave function for both the mixed scalar and gradient quark pair couplings. 8

9 Presently, while extending this investigation to other form factors we additionally 9
 10 introduce a power law behavior for the momentum part of the light-front wave function. 10
 11 The purpose is to investigate whether the neutron charge form factor is still reproduced 11
 12 with a scalar quark pair coupling while relaxing the form of the momentum part of the 12
 13 light-front wave function. This is indeed the case for both forms (gaussian and power-law) 13
 14 once the magnetic moment of the neutron is fitted to its experimental value. Moreover, for 14
 15 a given quark spin coupling scheme and independent of the shape of the light-front wave 15
 16 function a model-independent relation between the neutron charge radius and its magnetic 16
 17 moment can be recognized. We also present results on the nucleon axial-vector form factor 17
 18 and on correlations between the static electroweak observables for different spin couplings 18
 19 and wave functions. In the context of the Bakamjian–Thomas (BT) quark spin coupling 19
 20 scheme it was shown that the axial-vector coupling constant, the proton magnetic moment, 20
 21 and the radius are correlated by model-independent relations [3,4]. We point out that the 21
 22 high momentum transfer calculation of the nucleon electromagnetic form factors with 22
 23 that model were first done in Ref. [5]. We show that the different quark spin coupling 23
 24 schemes retain the model-independent correlations found. However, the relations involving 24
 25 the axial-vector coupling constant obtained with a spin coupling scheme from an effective 25
 26 Lagrangian differ from those derived within the Bakamjian–Thomas construction [3]. 26

27 The effective Lagrangian for the N–q coupling is written as [1] 27

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{N-3q} = & \alpha m_N \epsilon^{lmn} \bar{\Psi}_{(l)} i \tau_2 \gamma^5 \Psi_{(m)}^C \bar{\Psi}_{(n)} \Psi_N \\
 & + (1 - \alpha) \epsilon^{lmn} \bar{\Psi}_{(l)} i \tau_2 \gamma_\mu \gamma^5 \Psi_{(m)}^C \bar{\Psi}_{(n)} i \partial^\mu \Psi_N + \text{H.C.}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

31 where τ_2 is the isospin matrix, the color indices are $\{l, m, n\}$ and ϵ^{lmn} is the totally 31
 32 antisymmetric symbol. The conjugate quark field is $\Psi^C = C \bar{\Psi}^T$, where $C = i \gamma^2 \gamma^0$ is 32
 33 the charge conjugation matrix, α is a parameter to vary the relative magnitude of the spin 33
 34 couplings, and m_N is the nucleon mass. 34

35 The macroscopic matrix elements of the nucleon electromagnetic current $J_N^+(q^2)$ in the 35
 36 Breit-frame and in the light-front spinor basis is given by: 36

$$\begin{aligned}
 \langle s' | J_N^+(q^2) | s \rangle = & \bar{u}(p', s') \left(F_{1N}(q^2) \gamma^+ + i \frac{\sigma^{+\mu} q_\mu}{2m_N} F_{2N}(q^2) \right) u(p, s) \\
 = & \frac{p^+}{m_N} \langle s' | F_{1N}(q^2) - i \frac{F_{2N}(q^2)}{2m_N} \vec{q}_\perp \cdot (\vec{n} \times \vec{\sigma}) | s \rangle, \quad (2)
 \end{aligned}$$

42 where F_{1N} and F_{2N} are the Dirac and Pauli form factors, respectively, while \vec{n} is the unit 42
 43 vector along the z-direction. The Breit-frame momenta are $q = (0, \vec{q}_\perp, 0)$, such that $(q^+ = 43$

1 $q^0 + q^3 = 0$) and $\vec{q}_\perp = (q^1, q^2)$;

2
 3
$$p = \left(\sqrt{q_\perp^2/4 + m_N^2}, -\frac{\vec{q}_\perp}{2}, 0 \right) \quad \text{and} \quad p' = \left(\sqrt{q_\perp^2/4 + m_N^2}, \frac{\vec{q}_\perp}{2}, 0 \right).$$

4
 5 The Sachs form factors are defined by

6
 7
$$G_{\text{EN}}(q^2) = F_{1\text{N}}(q^2) + \frac{q^2}{4m_N^2} F_{2\text{N}}(q^2), \quad G_{\text{MN}}(q^2) = F_{1\text{N}}(q^2) + F_{2\text{N}}(q^2). \quad (3)$$

8 The magnetic moment is $\mu_N = G_{\text{MN}}(0)$ and the mean squared radius is

9
 10
$$r_N^2 = 6 \frac{dG_{\text{EN}}(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0}.$$

11
 12 The nonvanishing part of the macroscopic matrix elements of the nucleon weak
 13 isovector-axial-vector current $A_N^+(q^2)$ in the Breit-frame with $q^+ = 0$ in the light-front
 14 spinor basis is given by

15
 16
$$\langle s' | A_N^+(q^2) | s \rangle = \bar{u}(p', s') \left(G_A(q^2) \gamma^+ \gamma^5 \frac{\vec{\tau}}{2} \right) u(p, s) = \frac{p^+}{m_N} G_A(q^2) \langle s' | \frac{\vec{\tau}}{2} \sigma_z | s \rangle, \quad (4)$$

17
 18 where G_A is the weak isovector-axial-vector form factor and $g_A = G_A(0)$ is the axial-
 19 vector coupling constant.

20 The light-front spinors are

21
 22
$$u(p, s) = \frac{\not{p} + m}{2\sqrt{p^+ m}} \gamma^+ \gamma^0 \begin{pmatrix} \chi_s^{\text{Pauli}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

23
 24 The Dirac spinor of the instant form

25
 26
$$u_{\text{D}}(p, s) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(p^0 + m)}} \begin{pmatrix} \chi_s^{\text{Pauli}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

27 carries the subscript D. The Melosh rotation is the unitary transformation between the
 28 light-front and instant form spinors that is given by:

29
 30
$$[R_{\text{M}}(p)]_{s's} = \langle s' | \frac{p^+ + m - i\vec{\sigma} \cdot (\vec{n} \times \vec{p})}{\sqrt{(p^+ + m)^2 + p_\perp^2}} | s \rangle = \bar{u}_{\text{D}}(p, s') u(p, s), \quad (7)$$

31
 32 where \vec{n} the unit vector along the z-direction.

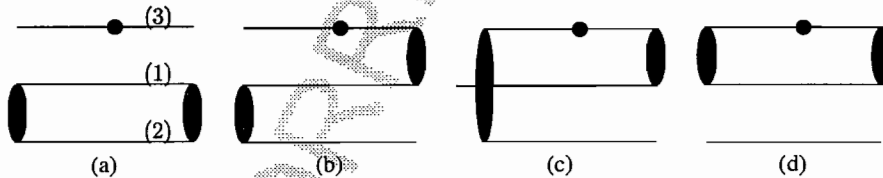
33
 34 In Section 2, the general form of the microscopic matrix elements of the nucleon
 35 electroweak current are discussed. The detailed form of the electromagnetic current is
 36 derived and the light-front wave function is introduced in the computation of the form
 37 factors. Also, the matrix element of the weak isovector-axial-vector current of the nucleon
 38 are derived from the effective Lagrangian. In Section 3, the physics of the different spin
 39 coupling schemes are discussed in comparison with the widely used Bakamjian-Thomas
 40 framework. In Section 4, the numerical results of the static electroweak observables and of
 41 the form factors are presented. The model independence within each spin coupling scheme
 42 is demonstrated for the correlation between the static nucleon electroweak observables. In
 43 Section 5, we give the summary and conclusion.

1 **2. Nucleon electroweak current** 1

2
 3 The microscopic matrix elements of the nucleon electromagnetic and weak isovector-
 4 axial-vector currents are constructed from the effective Lagrangian given in Eq. (1). 4
 5 The current matrix elements are evaluated in impulse approximation. The complete 5
 6 antisymmetrization of the quark states implies four topologically distinct diagrams 6
 7 depicted in Fig. 1. The two-loop triangle diagrams of Fig. 1 represent the impulse 7
 8 approximation for the evaluation of the baryon form factors in light-front dynamics. We 8
 9 calculate the matrix elements of the currents via coupling to the third quark due to the 9
 10 symmetrization of the microscopic matrix element after factorizing the color degree of 10
 11 freedom. The electromagnetic quark current operator is $\bar{\Psi} \hat{Q}_q \gamma^\mu \Psi$, with \hat{Q}_q the charge 11
 12 operator, and the weak isovector-axial-vector current one is $\bar{\Psi} \frac{\tau}{2} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi$. 12

13 In detail, Fig. 1a represents the nucleon spin-space operators J_{aN}^+ and A_{aN}^+ . In these cases 13
 14 the elementary operators act on quark 3 while 1 and 2 compose the coupled spectator quark 14
 15 pair of Eq. (1) for the initial and final nucleons alike. In Fig. 1b, the coupled quark pair 15
 16 of the initial nucleon is (13) whereas it is (12) in the final nucleon. The operators J_{bN}^+ 16
 17 and A_{bN}^+ represented by Fig. 1b are multiplied by a factor of 4. A factor 2 comes from 17
 18 the exchange of quarks 1 and 2 and another factor 2 comes from the invariance under 18
 19 exchanging the pairs in the initial and final nucleons that is a consequence of time reversal 19
 20 and parity transformation properties. The operators J_{cN}^+ and A_{cN}^+ are represented by Fig. 1c, 20
 21 where the initial coupled pair quark is (13) and the final coupled pair is (23). This operator 21
 22 is multiplied by a factor of 2 because quarks 1 and 2 can be exchanged. Finally, the 22
 23 process shown in Fig. 1d does not contribute to the nucleon axial-vector current because 23
 24 of the isoscalar quark pair as given by the Lagrangian of Eq. (1). However this diagram 24
 25 is nonvanishing for the electromagnetic current and denoted by J_{dN}^+ . It corresponds to the 25
 26 process in which the photon is absorbed by the coupled quark pair (13) while 2 is the 26
 27 spectator. In this case, two diagrams are possible by the exchange of quarks 1 and 2 giving 27
 28 rise to a factor of 2. 28

29 The microscopic operator of the nucleon electromagnetic current is given by the sum of 29
 30 four terms: 30



37 Fig. 1. Feynman diagrams for the nucleon electroweak current. The gray blob represents the spin 37
 38 invariant for the coupled quark pair in the effective Lagrangian, Eq. (1). The black circle in the 38
 39 fermion line represents the action of the current operator on the quark. The current operator can 39
 40 represent either the electromagnetic current or the weak isovector-axial-vector current. Diagram (a) 40
 41 represents either J_{aN}^+ , Eq. (10), or A_{aN}^+ , Eq. (21). Diagram (b) represents either J_{bN}^+ , Eq. (11), or 41
 42 A_{bN}^+ , Eq. (22). Diagram (c) represents either J_{cN}^+ , Eq. (12), or A_{cN}^+ , Eq. (23). Diagram (d) represents 42
 43 J_{dN}^+ , Eq. (13). Diagram (d) does not contribute to the weak isovector-axial-vector current due to the 43
 44 isoscalar nature of the coupled quark pair. 44

$$J_N^+(q^2) = J_{aN}^+(q^2) + 4J_{bN}^+(q^2) + 2J_{cN}^+(q^2) + 2J_{dN}^+(q^2). \quad (8)$$

The weak isovector-axial-vector current has contribution from three terms:

$$A_N^+(q^2) = A_{aN}^+(q^2) + 4A_{bN}^+(q^2) + 2A_{cN}^+(q^2). \quad (9)$$

The term $A_{dN}^+(q^2)$ vanishes because of isospin properties.

2.1. Derivation of the electromagnetic current matrix elements

The nucleon current operators $J_{\beta N}^+$, $\beta = a, b, c, d$ and $A_{\gamma N}^+$, $\gamma = a, b, c$, of Eqs. (8) and (9) are constructed directly from the Feynman diagrams of Fig. 1. The electromagnetic current J_N^+ receives contributions from each amplitude represented by the Feynman two-loop triangle diagrams of Figs. 1a-1d, which we repeat here [1]:

$$\begin{aligned} \langle s' | J_{aN}^+(q^2) | s \rangle &= -\langle N | \widehat{Q}_q | N \rangle \text{Tr}[i\tau_2(-i)\tau_2] \\ &\times \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} \Lambda(k_i, p') \Lambda(k_i, p) \bar{u}(p', s') S(k'_3) \gamma^+ S(k_3) \\ &\times u(p, s) \text{Tr}[S(k_2)(\alpha m_N + (1-\alpha)\not{p})\gamma^5 S_c(k_1) \\ &\times \gamma^5(\alpha m_N + (1-\alpha)\not{p}')] \end{aligned} \quad (10)$$

with

$$S(p) = \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad \text{and} \quad S_c(p) = \left[\gamma^0 \gamma^2 \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \gamma^0 \gamma^2 \right]^T.$$

Here m is the constituent quark mass and $k'_3 = k_3 + Q$, and $\langle N | \widehat{Q}_q | N \rangle$ is the isospin matrix. The function $\Lambda(k_i, p)$ is chosen to introduce the momentum part of the three-quark light-front wave function, after the integrations over k^- are performed. The contribution to the electromagnetic current represented by Fig. 1b is given by

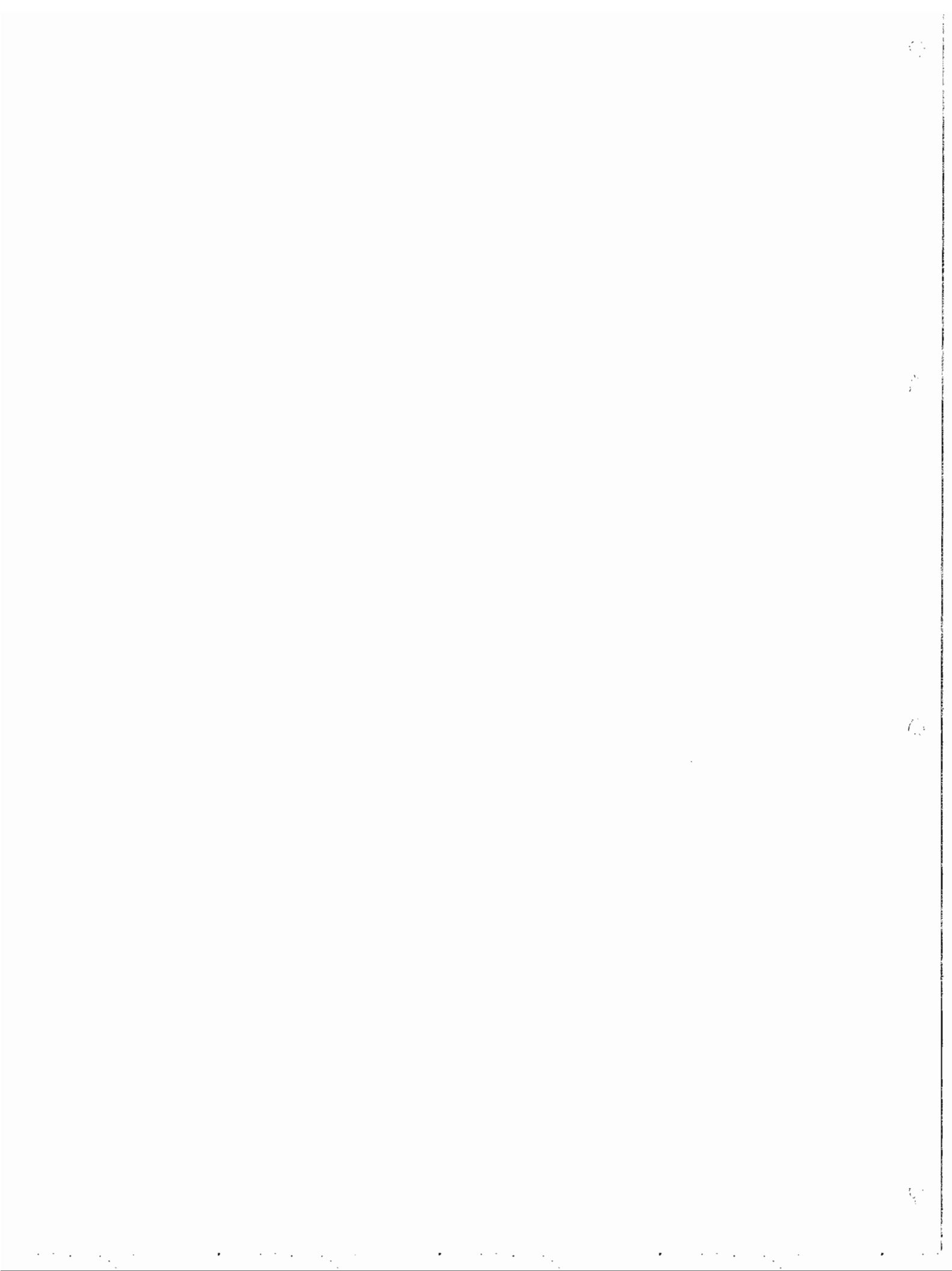
$$\begin{aligned} \langle s' | J_{bN}^+(q^2) | s \rangle &= -\langle N | \widehat{Q}_q | N \rangle \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} \Lambda(k_i, p') \Lambda(k_i, p) \bar{u}(p', s') S(k'_3) \gamma^+ S(k_3) \\ &\times (\alpha m_N + (1-\alpha)\not{p}) \gamma^5 S_c(k_1) \\ &\times \gamma^5 (\alpha m_N + (1-\alpha)\not{p}') S(k_2) u(p, s). \end{aligned} \quad (11)$$

The contribution to the electromagnetic current represented by Fig. 1c is given by

$$\begin{aligned} \langle s' | J_{cN}^+(q^2) | s \rangle &= \langle N | \tau_2 \widehat{Q}_q \tau_2 | N \rangle \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} \Lambda(k_i, p') \Lambda(k_i, p) \bar{u}(p', s') S(k_1) \\ &\times (\alpha m_N + (1-\alpha)\not{p}) \gamma^5 S_c(k_3) \gamma^+ S_c(k'_3) \\ &\times \gamma^5 (\alpha m_N + (1-\alpha)\not{p}') S(k_2) u(p, s). \end{aligned} \quad (12)$$

The contribution to the electromagnetic current represented by Fig. 1d is given by

$$\begin{aligned} \langle s' | J_{dN}^+(q^2) | s \rangle &= -\text{Tr}[\widehat{Q}_q] \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} \Lambda(k_i, p') \Lambda(k_i, p) \bar{u}(p', s') S(k_2) u(p, s) \\ &\times \text{Tr}[\gamma^5 (\alpha m_N + (1-\alpha)\not{p}') S(k'_3) \gamma^+ S(k_3) \\ &\times (\alpha m_N + (1-\alpha)\not{p}) \gamma^5 S_c(k_1)]. \end{aligned} \quad (13)$$



1 The light-front coordinates are defined as $k^+ = k^0 + k^3$, $k^- = k^0 - k^3$, $k_\perp = (k^1, k^2)$. 1
 2 In each term of the nucleon current, from J_{aN}^+ to J_{dN}^+ , the Cauchy integrations over k_1^- and 2
 3 k_2^- are performed. That means the on-mass-shell pole of the Feynman propagators for the 3
 4 spectator particles 1 and 2 of the photon absorption process are taken into account. In the 4
 5 Breit-frame with $q^+ = 0$ there is a maximal suppression of light-front Z-diagrams in J^+ 5
 6 [6,7]. Thus the components of the momentum k_1^+ and k_2^+ are bounded such that $0 < k_1^+ <$ 6
 7 p^+ and $0 < k_2^+ < p^+ - k_1^+$ [8]. The four-dimensional integrations of Eqs. (10)–(13) are 7
 8 reduced to the three-dimensional ones of the null-plane. 8

9 After the integrations over the light-front energies the momentum part of the wave 9
 10 function is introduced into the microscopic matrix elements of the current by the 10
 11 substitution [1,6] 11

$$12 \frac{1}{2(2\pi)^3} \frac{\Lambda(k_i, p)}{m_N^2 - M_0^2} \rightarrow \Psi(M_0^2). \quad (14) \quad 13$$

14 To study the model dependence we choose the harmonic wave function and a power-law 14
 15 form [3,4]: 15

$$16 \Psi_{\text{HO}} = N_{\text{HO}} \exp(-M_0^2/2\beta^2), \quad \Psi_{\text{Power}} = N_{\text{Power}} (1 + M_0^2/\beta^2)^{-p}, \quad (15) \quad 17$$

18 and β is the width parameter. The free three-quark mass M_0 is given below in Eq. (17). 19
 20 From perturbative QCD arguments a power-law fall-off with $p = 3.5$ is predicted [4]. The 20
 21 relations between static electroweak observables are not sensitive to p as long as $p > 2$ 21
 22 [3]. We choose for our calculations $p = 3$. Further, the same momentum wave function is 22
 23 chosen all N–q couplings, for simplicity. Note, that the mixed ($\alpha = 1/2$) case could have 23
 24 different momentum dependencies for each spin coupling, however, we choose the same 24
 25 momentum functions just to keep contact with the BT approach. 25

26 The analytical integration of Eq. (10) of the k^- components of the momenta yields: 26

$$27 \langle s' | J_{aN}^+(q^2) | s \rangle = 2p^{+2} \langle N | \widehat{Q}_q | N \rangle \quad 27$$

$$28 \times \int \frac{d^2 k_{1\perp} dk_1^+ d^2 k_{2\perp} dk_2^+}{k_1^+ k_2^+ k_3^+} \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \quad 28$$

$$29 \times \text{Tr}[(\not{k}_2 + m)(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p})(\not{k}_1 + m)(\alpha m_N + (1 - \alpha)\not{p}')] \quad 29$$

$$30 \times \bar{u}(p', s') (\not{k}_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) u(p, s) \Psi(M_0^2) \Psi(M_0^2), \quad (16) \quad 30$$

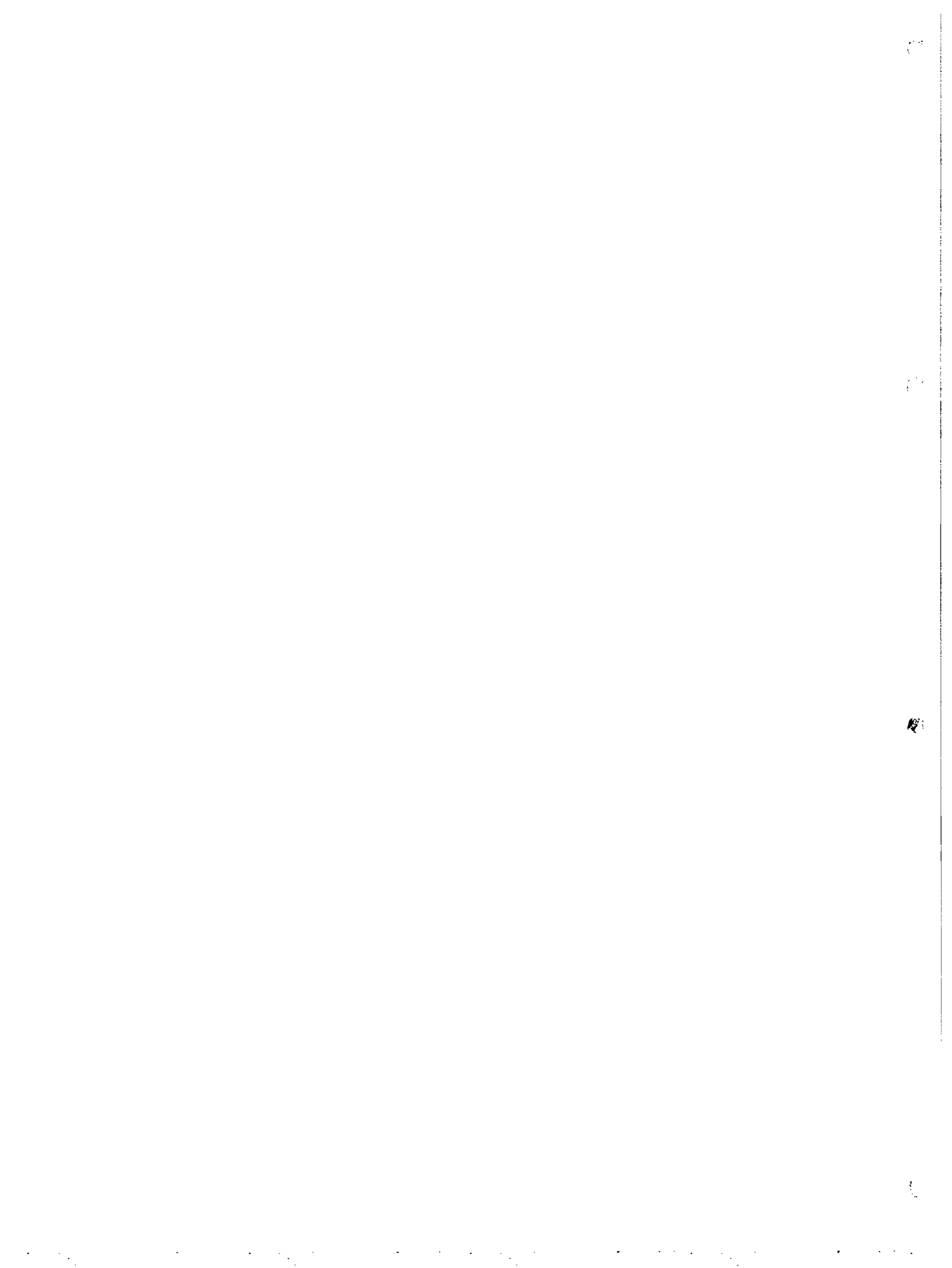
31 where $k_1^2 = m^2$ and $k_2^2 = m^2$. The free three-quark squared mass is defined by 31
 32 32

$$33 M_0^2 = p^+ \left(\frac{k_{1\perp}^2 + m^2}{k_1^+} + \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{k_2^+} + \frac{k_{3\perp}^2 + m^2}{k_3^+} \right) - p_\perp^2, \quad (17) \quad 33$$

34 and $M_0^2 = M_0^2(k_3 \rightarrow k_3', \vec{p}_\perp \rightarrow \vec{p}'_\perp)$. 34
 35 35

36 The other terms of the nucleon current, as given by Eqs. (11)–(13) are also integrated 36
 37 over the k^- momentum components of particles 1 and 2 following the same steps used to 37
 38 obtain Eq. (16) from Eq. (10): 38
 39 39

$$40 \langle s' | J_{bN}^+(q^2) | s \rangle = p^{+2} \langle N | \widehat{Q}_q | N \rangle \quad 40$$



$$\begin{aligned}
 & \times \int \frac{d^2 k_{1\perp} dk_1^+ d^2 k_{2\perp} dk_2^+}{k_1^+ k_2^+ k_3^{+2}} \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \\
 & \times \bar{u}(p', s') (\not{k}_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) \\
 & \times (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_2 + m) u(p, s) \\
 & \times \Psi(M_0^2) \Psi(M_0^2), \tag{18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle s' | J_{cN}^+(q^2) | s \rangle &= p^{+2} \langle N | \tau_2 \widehat{Q}_q \tau_2 | N \rangle \\
 & \times \int \frac{d^2 k_{1\perp} dk_1^+ d^2 k_{2\perp} dk_2^+}{k_1^+ k_2^+ k_3^{+2}} \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \\
 & \times \bar{u}(p', s') (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_3 + m) \\
 & \times \gamma^+ (\not{k}_3 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_2 + m) u(p, s) \\
 & \times \Psi(M_0^2) \Psi(M_0^2), \tag{19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle s' | J_{dN}^+(q^2) | s \rangle &= p^{+2} \text{Tr}[\widehat{Q}_q] \int \frac{d^2 k_{1\perp} dk_1^+ d^2 k_{2\perp} dk_2^+}{k_1^+ k_2^+ k_3^{+2}} \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \\
 & \times \text{Tr}[(\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_3 + m) \gamma^+ (\not{k}_3 + m) \\
 & \quad \times (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_1 + m)] \\
 & \times \bar{u}(p', s') (\not{k}_2 + m) u(p, s) \Psi(M_0^2) \Psi(M_0^2). \tag{20}
 \end{aligned}$$

The normalization is chosen such that the proton charge is unity.

2.2. Derivation of the axial-vector current matrix elements

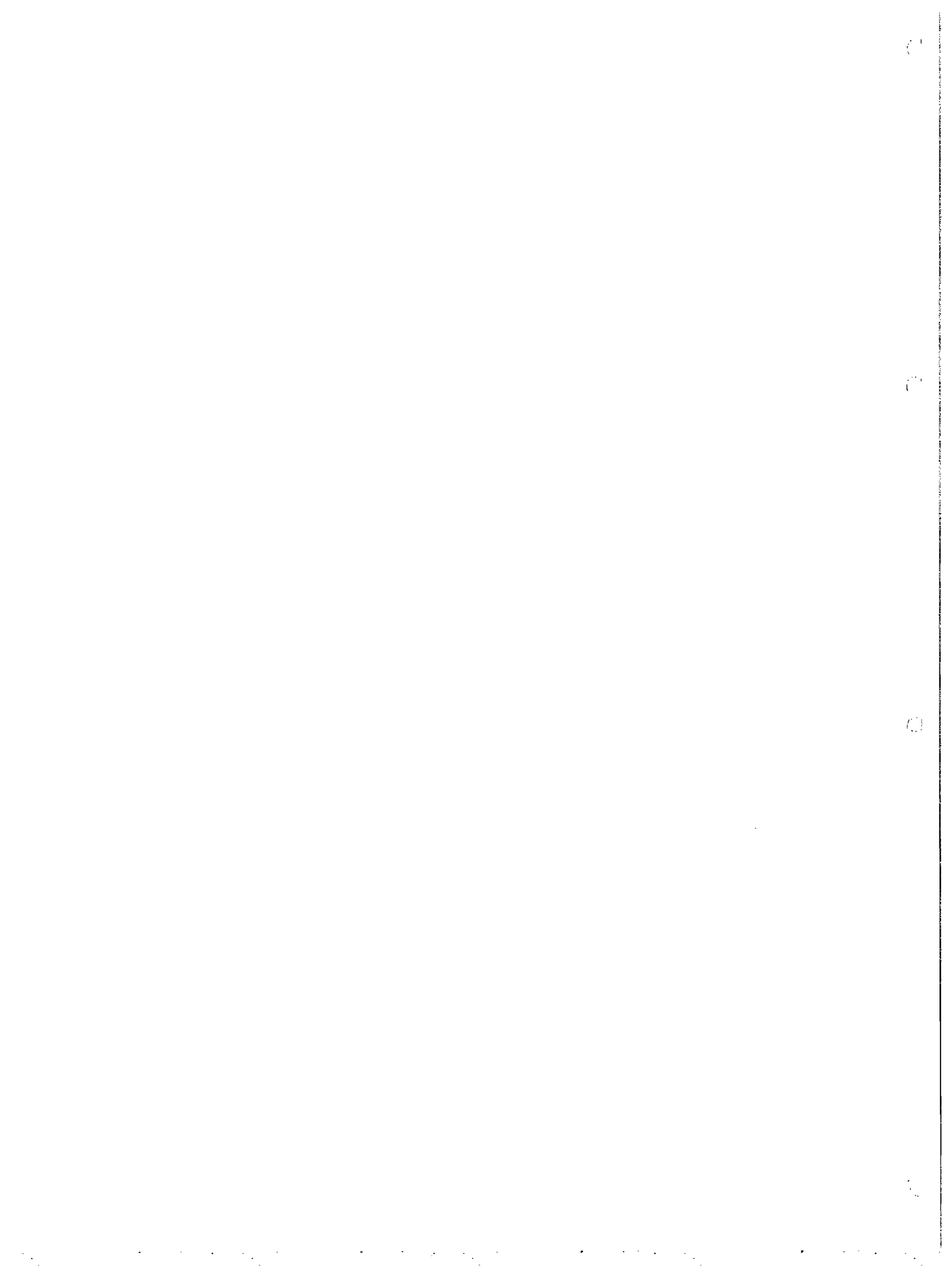
The weak isovector-axial-vector current A_N^+ receives contributions from each amplitude represented by the Feynman two-loop triangle diagrams of Figs. 1a-1c:

$$\begin{aligned}
 \langle s' | A_{aN}^+(q^2) | s \rangle &= -\langle N | \frac{\vec{\tau}}{2} | N \rangle \text{Tr}[\tau_2 (-i) \tau_2] \\
 & \times \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} \Lambda(k_i, p') \Lambda(k_i, p) \bar{u}(p', s') S(k_3') \gamma^+ \gamma^5 S(k_3) \\
 & \times u(p, s) \text{Tr}[S(k_2) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) \gamma^5 S_c(k_1) \gamma^5 \\
 & \quad \times (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}')]. \tag{21}
 \end{aligned}$$

The contribution to the axial-vector current represented by Fig. 1b is given by

$$\begin{aligned}
 \langle s' | A_{bN}^+(q^2) | s \rangle &= -\langle N | \frac{\vec{\tau}}{2} | N \rangle \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} \Lambda(k_i, p') \Lambda(k_i, p) \bar{u}(p', s') S(k_3') \\
 & \times \gamma^+ \gamma^5 S(k_3) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) \gamma^5 S_c(k_1) \\
 & \times \gamma^5 (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') S(k_2) u(p, s). \tag{22}
 \end{aligned}$$

The contribution to the axial-vector current represented by Fig. 1c is given by



$$\begin{aligned}
 \langle s' | A_{cN}^+(q^2) | s \rangle &= \langle N | \tau_2 \frac{\vec{\tau}}{2} \tau_2 | N \rangle \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} \Lambda(k_i, p') \Lambda(k_i, p) \bar{u}(p', s') S(k_1) \\
 &\quad \times (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) \gamma^5 S_c(k_3) \gamma^+ \gamma^5 S_c(k'_3) \\
 &\quad \times \gamma^5 (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') S(k_2) u(p, s). \quad (23)
 \end{aligned}$$

The contribution to the axial-vector current represented by Fig. 1d vanishes because of the isoscalar nature of the coupled quark pair.

In each term of the nucleon axial-vector current, from A_{aN}^+ to A_{cN}^+ , the Cauchy integrations over k_1^- and k_2^- are performed as discussed in the previous section for the electromagnetic current. The spectator particles are on their mass-shell after the integrations on the k^- momentum in Eqs. (21)–(23). The numerators of the Dirac propagators of quark 3 on which the axial operator $\gamma^+ \gamma^5$ acts have the momenta k'_3 and k_3 on the k^- -shell because $(\gamma^+)^2 = 0$. The components of the momentum k_1^+ and k_2^+ are bounded by $0 < k_1^+ < p^+$ and $0 < k_2^+ < p^+ - k_1^+$ [8]. The four-dimensional integrations of Eqs. (21)–(23) are reduced to the three dimensions of the null-plane.

The analytical integration of Eq. (21) of the k^- components of the momenta yields:

$$\begin{aligned}
 \langle s' | A_{aN}^+(q^2) | s \rangle &= 2p^{+2} \langle N | \frac{\vec{\tau}}{2} | N \rangle \int \frac{d^2 k_{1\perp} dk_1^+ d^2 k_{2\perp} dk_2^+}{k_1^+ k_2^+ k_3^{+2}} \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \\
 &\quad \times \text{Tr}[(\not{k}_2 + m)(\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p})(\not{k}_1 + m)(\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}')] \\
 &\quad \times \bar{u}(p', s') (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ \gamma^5 (\not{k}_3 + m) u(p, s) \Psi(M_0^2) \Psi(M_0^2), \quad (24)
 \end{aligned}$$

and $k_1^2 = m^2$ and $k_2^2 = m^2$.

The integrations in the light-front energies in Eqs. (22) and (23) lead to

$$\begin{aligned}
 \langle s' | A_{bN}^+(q^2) | s \rangle &= p^{+2} \langle N | \frac{\vec{\tau}}{2} | N \rangle \\
 &\quad \times \int \frac{d^2 k_{1\perp} dk_1^+ d^2 k_{2\perp} dk_2^+}{k_1^+ k_2^+ k_3^{+2}} \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \\
 &\quad \times \bar{u}(p', s') (\not{k}'_3 + m) \gamma^+ \gamma^5 (\not{k}_3 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) \\
 &\quad \times (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_2 + m) \\
 &\quad \times u(p, s) \Psi(M_0^2) \Psi(M_0^2), \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle s' | A_{cN}^+(q^2) | s \rangle &= p^{+2} \langle N | \tau_2 \frac{\vec{\tau}}{2} \tau_2 | N \rangle \\
 &\quad \times \int \frac{d^2 k_{1\perp} dk_1^+ d^2 k_{2\perp} dk_2^+}{k_1^+ k_2^+ k_3^{+2}} \theta(p^+ - k_1^+) \theta(p^+ - k_1^+ - k_2^+) \\
 &\quad \times \bar{u}(p', s') (\not{k}_1 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}) (\not{k}_3 + m) \\
 &\quad \times \gamma^+ \gamma^5 (\not{k}'_3 + m) (\alpha m_N + (1 - \alpha) \not{p}') (\not{k}_2 + m) \\
 &\quad \times u(p, s) \Psi(M_0^2) \Psi(M_0^2), \quad (26)
 \end{aligned}$$

0

0

0

0

3. Discussion of spin coupling schemes

The physical meaning of the effective Lagrangian for the quark spin coupling emerges if one performs a kinematical light-front boost of the matrix elements of the spin operators between quark states on one hand and quark–nucleon states related to the initial and final nucleons with their respective rest frames on the other hand. This has been suggested in Ref. [9] and also discussed in Ref. [1]. The effective Lagrangian of Eq. (1) contains the spin–flavor invariants of the nucleon with quark pair spin zero ($\alpha = 1$) and spin one ($\alpha = 0$) that are 2 of a basis of 8 such states given in detail in Ref. [10]. The nucleon spin invariant that is widely used and tested in form factor calculations uses the ones chosen here but contain the additional projector $\not{p} + M_0$ onto large Dirac components, a characteristic feature of the Bakamjian–Thomas (BT) spin coupling scheme [11]. The spin–flavor invariant of the effective Lagrangian Eq. (1) with $\alpha = 1/2$ resembles the BT spin coupling scheme but is not equivalent to it, i.e., the Melosh rotations have their arguments defined in the nucleon rest frame with individual ‘+’ momentum constrained by the total nucleon p^+ . The BT construction have the Melosh spin rotation with the individual ‘+’ momentum constrained by the free three-quark mass M_0 . That differs from the above Lagrangian as explicitly shown in Ref. [9]. Moreover, in the point-like nucleon limit, the weak isovector–axial-vector coupling constant represents a situation in which the difference between BT and effective Lagrangian spin coupling schemes is maximized as we will discuss at the end of this section.

The Melosh rotations appear in the equations for the vector and axial-vector current from the residues of the triangle Feynman diagram, which are evaluated at the on- k^- -shell poles of the spectator particles, and each of the numerators of the Dirac propagator are on- k^- -shell. In particular, the numerator of quark 3 comes to be on- k^- -shell because $(\gamma^+)^2 = 0$. Consequently, the numerators of the fermion propagators are substituted by the positive-energy spinor projector, written in terms of light-front spinors. We use that the Wigner rotation is unity for kinematical Lorentz transformations to calculate the spin matrix elements of the nucleon current corresponding to the respective rest-frames of the initial or final nucleon. A typical matrix element of the spin coupling coefficient for $\alpha = 1$ appearing in the evaluation of J^+ as well as in A^+ , when calculated in the nucleon rest frame, is given by

$$\chi(s_1, s_2, s_3; s_N) = \bar{u}_1 \gamma^5 u_2^C \bar{u}_3 u_N, \quad (27)$$

where $u_i = u(k_i, s_i)$ is the light-front spinor for the i th quark.

The matrix element of the pair coupled to spin zero in Eq. (27) is evaluated in the rest frame of the pair (c.m.) reached by a kinematical light-front boost from the nucleon rest frame. The Wigner rotation is unity for such a Lorentz transformation consequently (viz. $u_{c.m.}(\vec{k}^{c.m.}, s) = u(\vec{k}^{c.m.}, s)$):

$$I(s_1, s_2, 0) = \bar{u}(\vec{k}_1, s_1) \gamma^5 u^C(\vec{k}_2, s_2) = \bar{u}(\vec{k}_1^{c.m.}, s_1) \gamma^5 u^C(\vec{k}_2^{c.m.}, s_2), \quad (28)$$

where the particle momenta in the pair (12) rest frame are $\vec{k}^{c.m.} = (k^{+c.m.}, \vec{k}_\perp^{c.m.})$ obtained from $k^{(c.m.)\mu} = (\Lambda k)^\mu$. The operator Λ is the kinematical light-front transformation from

1 the nucleon rest frame to the pair rest frame. Introducing the completeness relation for
 2 positive-energy Dirac spinors in Eq. (28), one finds:

$$3 \quad I(s_1, s_2, 0) = \sum_{\vec{s}_1 \vec{s}_2} \bar{u}(\vec{k}_1^{c.m.}, s_1) u_D(\vec{k}_1^{c.m.}, \vec{s}_1) \bar{u}_D(\vec{k}_1^{c.m.}, \vec{s}_1) \gamma^5 C \bar{u}_D^T(\vec{k}_2^{c.m.}, \vec{s}_2) \\ 4 \quad \times (\bar{u}(\vec{k}_2^{c.m.}, s_2) u_D(\vec{k}_2^{c.m.}, \vec{s}_2))^T, \quad (29) \quad 5 \quad 6$$

7 from which the Clebsch–Gordan coefficients appear by using the Dirac spinors in Eq. (29):

$$8 \quad \bar{u}_D(\vec{k}_1^{c.m.}, \vec{s}_1) \gamma^5 C \bar{u}_D^T(\vec{k}_2^{c.m.}, \vec{s}_2) \rightarrow \chi_{\vec{s}_1}^\dagger i\sigma_2 \chi_{\vec{s}_2}^* = \sqrt{2} \langle \frac{1}{2} \vec{s}_1 \frac{1}{2} \vec{s}_2 | 00 \rangle. \quad (30) \quad 9$$

10 The Melosh rotations of the quark spins in the quark–nucleon coupling are made explicit
 11 using Eqs. (7), (27), (29) and (30):

$$12 \quad \chi(s_1, s_2, s_3; s_N) = \sum_{\vec{s}_1 \vec{s}_2} [R_M^\dagger(\vec{k}_1^{c.m.})]_{s_1 \vec{s}_1} [R_M^\dagger(\vec{k}_2^{c.m.})]_{s_2 \vec{s}_2} [R_M^\dagger(\vec{k}_3)]_{s_3 s_N} \chi_{\vec{s}_1}^\dagger i\sigma_2 \chi_{\vec{s}_2}^*, \quad (31) \quad 13 \quad 14$$

15 where the momentum arguments of the Melosh rotations of the spin-zero coupled pair
 16 (12) in Eq. (31) are taken in the rest frame of the pair. For the third-particle arguments
 17 of the Melosh rotation are taken in the nucleon rest frame. That differs from the BT
 18 construction where the arguments of the Melosh rotations are all taken in the nucleon rest
 19 frame. Moreover, the various total momentum ‘+’ components, p_{12}^+ and p^+ in Eq. (31)
 20 now appear in different frames whereas in the BT case only M_0 occurs in place of p^+ .

21 In the nucleon rest frame the pair-spin 0 invariant related to $p + m_N$ ($\alpha = 1/2$) reduces
 22 to the projector $\gamma_0 + 1$. This means that also the momentum arguments of the Melosh
 23 rotations are taken in the nucleon rest frame. Note, however, that this case still differs from
 24 the BT construction because the sum of the ‘+’ components of the quark momenta adds to
 25 the nucleon momentum p^+ and not to M_0 as in the BT formalism. The difference between
 26 BT and the effective Lagrangian quark spin couplings used here appears in a vanishing
 27 limit of the nucleon radius as the internal quark transverse momentum diverges while the
 28 arguments of the Melosh rotations obtained through the BT construction or the effective
 29 Lagrangian are distinct. In particular, the nucleon weak isovector–axial-vector coupling
 30 constant shows a peculiar behavior in the limit of a point-like nucleon.

31 To give a more explicit example we recall the expression of the axial-vector coupling
 32 constant found in the context of the BT construction [3,12]:

$$33 \quad g_A^{BT} = \frac{5}{3} \left\langle \frac{(m + x_3 M_0)^2 - k_{3\perp}^2}{(m + x_3 M_0)^2 + k_{3\perp}^2} \right\rangle, \quad (32) \quad 34$$

35 where the expectation value is evaluated with the square of the momentum part of the wave
 36 function; x_3 is the light-front momentum fraction with values bounded by $0 < x_3 < 1$. The
 37 prescription given by the effective Lagrangian roughly amounts to substituting the free
 38 three-quark mass M_0 by the nucleon total p^+ which is m_N in this case, viz.

$$39 \quad g_A \approx \frac{5}{3} \left\langle \frac{(m + x_3 m_N)^2 - k_{3\perp}^2}{(m + x_3 m_N)^2 + k_{3\perp}^2} \right\rangle. \quad (33) \quad 40 \quad 41$$

42 In the limit of a point-like nucleon ($\beta \rightarrow \infty$ is the zero radius limit corresponding to the
 43 strong relativistic limit, i.e., $|\vec{k}_{3\perp}| \gg m + x_3 m_N$) the operator in Eq. (33) tends to -1 , while

in Eq. (32) the term that contains the free mass cannot be neglected. From the evaluation of Eq. (33) in this limit one obtains $g_A \approx -5/3$, a value that is approximately found in our calculations. The point-like nucleon limit is a scale invariant point in the sense that the other sensible physical scales, i.e. nucleon and quark masses, are irrelevant for the physics. This idea has its origin in the scale invariance of g_A in quark confining potential models [13], however we stress that in our case only one situation has this property of scale invariance, i.e., the limit of $\beta \rightarrow \infty$. In the next section the numerical results of the electroweak nucleon properties are shown for different momentum parts of the wave function as well as for different quark spin couplings to the nucleon as given by the effective Lagrangian (1).

4. Results and discussion

In this section we show the effects of different relativistic spin couplings and momentum wave functions of constituent quarks for nucleon electroweak properties. The correlations between the static electroweak observables are investigated with a different momentum part of the nucleon light-front wave function for each quark spin coupling scheme. The Fock state component of the nucleon corresponding to three constituent quarks as the main part is a strong constraint on the static observables, and the results are mostly dependent on the constituent quark mass and one more static observable. Among the observables the neutron charge radius plays a special role; its correlation with the magnetic moment depends on the quark spin coupling scheme. The parameters of the model are given in Table 1.

To discuss the neutron charge radius in some detail we define an auxiliary dimensionless function $\xi(q^2)$,

$$F_{1n}(q^2) \equiv \frac{q^2}{4m_N^2} \xi(q^2) \quad (34)$$

that simply reparameterizes the neutron Dirac form factor $F_{1n}(q^2)$. Since $F_{1n}(0) = 0$ the function $\xi(q^2)$ serves as a ‘‘magnifying glass’’ for the region $q^2 \simeq 0$. In turn

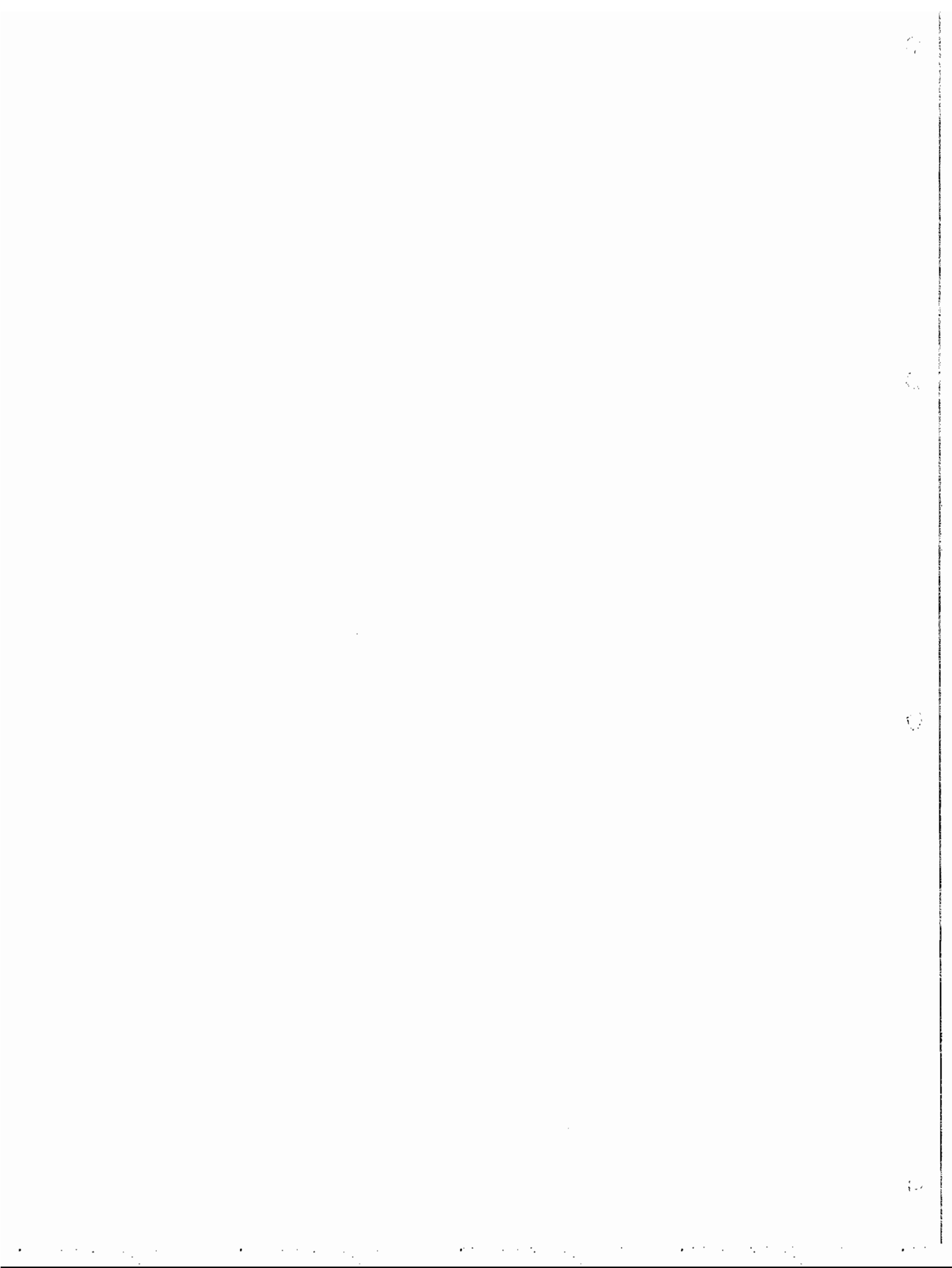
$$G_{En}(q^2) = \frac{q^2}{4m_N^2} (G_{Mn}(q^2) + \xi(q^2)) + O(q^4). \quad (35)$$

Table 1
 Parameters for the HO (β_G) and power-law (β_P) models of the nucleon momentum wave function with different spin coupling schemes from the fit of $\mu_n = -1.91\mu_N$ with $m = 220$ MeV

α	β_G [MeV]	β_P [MeV]
1	562	477
1/2	664	576
0	661	411

Table 2
 Values for $\xi(0)$ from the different models (HO, Power) using the parameters of Table 1, $\xi^{\text{expt.}} = 0.21 \pm 0.08$

α	$\xi_G(0)$	$\xi_P(0)$
1	0.54	0.69
1/2	1.6	1.6
0	3.0	2.6



1 Table 3
 2 Nucleon low-energy electroweak observables for different spin coupling parameters with a gaussian
 3 light-front wave function for $m = 330, 360$ and 380 MeV with the values of β parameter from Konen
 4 and Weber [14] (in their work the gaussian parameter is $\beta/\sqrt{3}$)

5	m [MeV]	α	r_{En}^2 [fm ²]	r_{Ep}^2 [fm ²]	μ_n [μ_N]	μ_p [μ_N]	g_A
7	330	0	0.035	0.69	-1.83	2.84	1.09
8		1/2	-0.024	0.69	-1.73	2.80	1.20
9		1	-0.080	0.71	-1.60	2.71	1.25
10	360	0	0.023	0.66	-1.77	2.77	1.13
11		1/2	-0.025	0.66	-1.67	2.72	1.23
12		1	-0.073	0.67	-1.53	2.62	1.29
13	380	0	0.018	0.62	-1.71	2.72	1.19
14		1/2	-0.027	0.62	-1.61	2.66	1.20
15		1	-0.071	0.63	-1.47	2.56	1.29
16	EXP.		-0.113 ± 0.005 [15]	0.66 ± 0.06 [16], 0.74 ± 0.02 [17], 0.77 ± 0.03 [18]	-1.91	2.79	1.2670 ± 0.0035 [19]

18 The charge radius is then

$$20 \quad \langle r_{En}^2 \rangle = \frac{3}{2m_N^2} (\hat{\mu}_n + \xi(0)), \quad (36)$$

22 where the neutron magnetic moment is given by $\mu_n = \hat{\mu}_n \mu_N$. Using the experimental
 23 value [15] for $\langle r_{En}^2 \rangle$ we find

$$25 \quad \xi^{\text{expt.}}(0) = 0.21 \pm 0.08. \quad (37)$$

26 An interesting question is related to a possible restriction of the values of $\xi(0)$. Presently,
 27 the well-known Foldy approach to the charge radius is achieved by

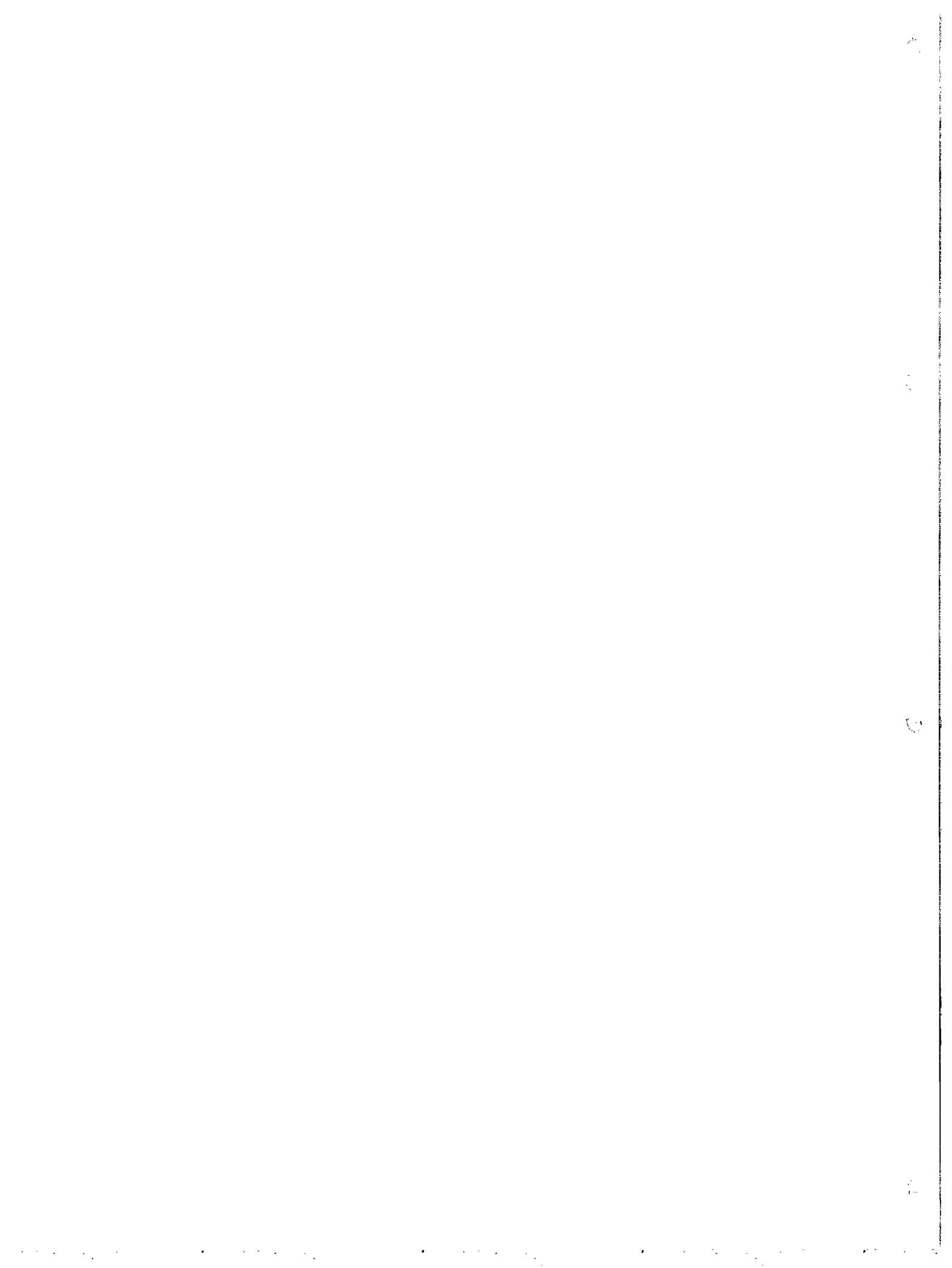
$$29 \quad \xi^{\text{Foldy}}(0) = 0, \quad (38)$$

30 that leads to $\langle r_{En}^2 \rangle^{\text{Foldy}} = -0.126 \text{ fm}^2$. For the naive $SU(6)$ quark model $\langle r_{En}^2 \rangle^{SU(6)} = 0$ that
 31 is achieved by

$$33 \quad \xi^{SU(6)}(0) = -\hat{\mu}_n. \quad (39)$$

34 Our model results for $\xi(0)$ obtained with the parameters of Table 1 are shown in Table 2.

35 In Table 3, we compare our calculations with those of Konen and Weber [14] using
 36 a gaussian wave function with the width parameter β that fits g_A using quark masses m
 37 of 330, 360, and 380 MeV. Their calculations have the spinors of the pair projected on
 38 the upper components in the nucleon rest-frame and correspond exactly to the choice $\alpha =$
 39 $1/2$. Our results are in agreement with those obtained in Ref. [14]. For each m and β ,
 40 we show results for with $\alpha = 1$ and 0. This shows that the effect of the modified quark-
 41 pair rest-frame Melosh rotations discussed above are important and evidenced through the
 42 dependence on α which is also noticeable in the sign of the neutron square radius, as
 43 discussed already in [1].



4.1. Static observables

From now on we use a quark mass of 220 MeV that has been widely used in connection with realistic models for the meson and nucleon phenomenology [12]. In Figs. 2–7 we show results for the correlations between static nucleon electroweak properties, viz. neutron charge radius, proton radius, magnetic moments and weak isovector–axial-vector coupling. Our calculations are done for different spin couplings of quarks, i.e. $\alpha = 0, 1/2, 1$ in the effective Lagrangian of Eq. (1), and momentum wave functions of a harmonic oscillator (HO) (gaussian) and a power-law (Power) form ($p = 3$), viz.

$$\psi_{\text{HO}} = N_{\text{HO}} \exp(-M_0^2/2\beta_G^2), \quad \psi_{\text{Power}} = N_{\text{Power}} (1 + M_0^2/\beta_P^2)^{-p}. \quad (40)$$

The correlation of the static observables is given by varying the β parameter. Two limits are noteworthy, $\beta \rightarrow 0$ that leads to an infinite size of the nucleon corresponding to the nonrelativistic limit and $\beta \rightarrow \infty$ that is the zero-radius limit corresponding to the strong relativistic limit.

In Fig. 2 results are shown for the neutron charge radius as a function of the neutron magnetic moment for $\alpha = 0, 1/2$, and 1 as well as HO and Power momentum wave functions. The results are quite insensitive to the different shapes of the momentum wave functions, however strongly dependent on the quark spin coupling. The neutron charge radius is a result of a delicate cancellation between the different contributions to the current in Eq. (8) and therefore it is strongly sensitive to different quark spin couplings [1]. Here we extend the conclusion of our previous work [1], namely, the neutron charge radius favors the scalar coupling between the quark-pair also for different forms of momentum wave functions. The gradient spin coupling ($\alpha = 0$) is again found in complete disagreement with the experimental data. This conclusion is further supported by the results of the neutron charge form factor shown later in Fig. 8.

The correlation between the magnetic moments of the nucleons is shown in Fig. 3. The different models of quark spin couplings (for α equal to 0, 1/2 and 1) in the plot of μ_p

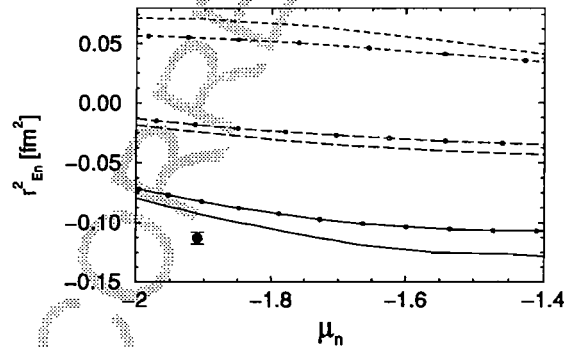
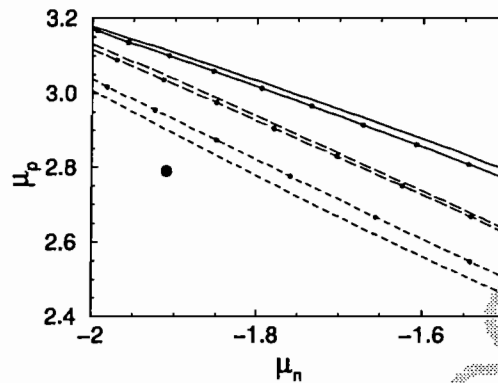


Fig. 2. Neutron charge square radius as a function of the neutron magnetic moment. Results for the gaussian wave function with α equal to 1 (solid line), 1/2 (dashed line) and 0 (short-dashed line). Results for the power-law wave function with α equal to 1 (solid line with dots), 1/2 (dashed line with dots) and 0 (short-dashed line with dots). Experimental data from Ref. [15].

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43

Fig. 3. Proton magnetic moment as a function of the neutron magnetic moment. Theoretical curves labeled as in Fig. 2. The experimental data are represented by the full circle.

against μ_n represent a systematic pattern that is again quite independent of the shape of the momentum wave function. For the chosen constituent mass $m = 220$ MeV the data are not reproduced. The scalar coupling has a stronger discrepancy than the gradient coupling. For the scalar case a change of the constituent mass to about $1/3$ of the nucleon mass still does not lead to a satisfactory result. For β going to infinity the model represents a point-like particle with the nucleon anomalous magnetic moments tending towards zero. This limit although not shown in the figure is achieved in our calculations that explains the decreasing behavior of μ_p as a function of μ_n .

The functional dependence of the proton magnetic moment on the dimensionless product of nucleon mass and proton charge radius ($m_N r_p$) is shown in Fig. 4. We basically reproduce the results previously found within the Bakamjian–Thomas spin coupling scheme [3]. We note that Ref. [3] used a proton radius given by the slope of the Dirac form factor $F_1(Q^2)$. For the different spin coupling schemes there is a weak dependence

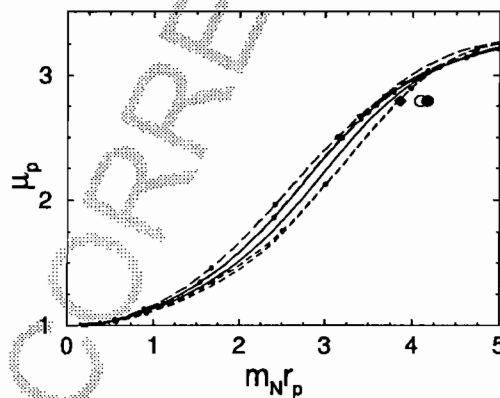


Fig. 4. Proton magnetic moment as a function of the dimensionless product $m_N r_p$. Theoretical curves labeled as in Fig. 2. Experimental points are given by a full diamond [16], open circle [17] and full circle [18].



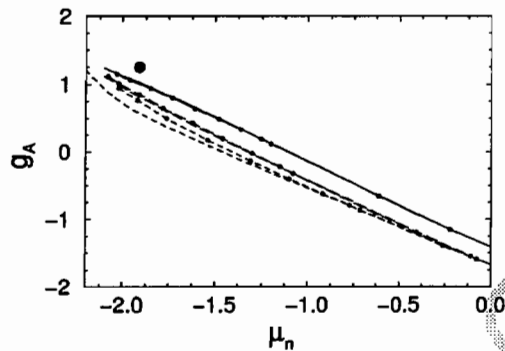


Fig. 5. Nucleon axial-vector coupling constant as a function of the neutron magnetic moment. Theoretical curves labeled as in Fig. 2. The experimental point is given by the full circle.

of μ_p on the shape of the momentum wave function and moreover the dependence on different α 's is small.

The weak isovector-axial-vector coupling constant g_A as a function of the neutron magnetic moment is shown in Fig. 5. Our calculations for $\alpha = 1/2$ and harmonic oscillator wave function are in complete agreement with those of Konen and Weber [14], see Table 3. The dependence on the shape of the momentum wave function is weak while increasing the constituent mass would allow us to achieve an agreement of the scalar quark coupling and the experimental data. The effective Lagrangian for the quark-nucleon coupling leads to an axial-vector coupling constant that changes sign in the limit of a point-like nucleon. This feature is not present in the Bakamjian-Thomas construction [3] as discussed in the previous section. In the limit $\beta \rightarrow 0$ the results for g_A tend to the nonrelativistic value of $5/3$ and in the limit of $\beta \rightarrow \infty$ corresponding to $\mu_n \rightarrow 0$ the axial coupling g_A tends to $\approx -5/3$.

While the change in α has a considerable effect on g_A for a given neutron magnetic moment (see Fig. 5) this behavior is not seen for g_A as a function of the proton magnetic moment shown in Fig. 6. The momentum shape of the wave function and different

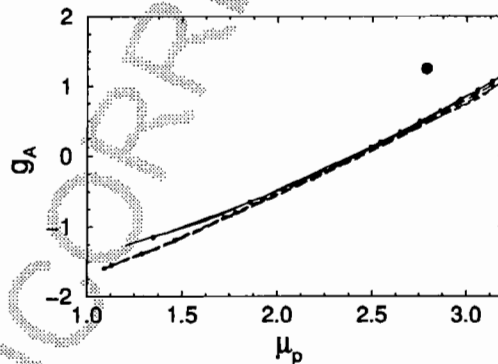


Fig. 6. Nucleon axial-vector coupling constant as a function of the proton magnetic moment. Theoretical curves labeled as in Fig. 2. The experimental point given by the full circle.

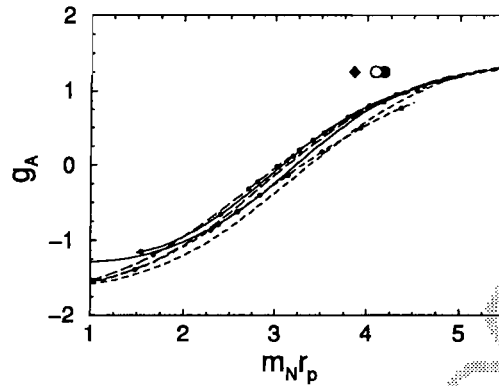


Fig. 7. Nucleon axial-vector coupling constant as a function of the dimensionless product of the proton charge radius and mass. Theoretical curves labeled as in Fig. 2. Experimental points are given by a full diamond [16], open circle [17] and full circle [18].

values of α produce small effects on the function $g_A(\mu_p)$. Only the constituent mass can considerably shift the curve and from Table 3 we conclude that the experimental point can be reached with a mass of about 1/3 of the nucleon mass. However, the simultaneous fit of μ_p , μ_n and g_A for $\alpha = 1$ seems difficult without invoking further physical aspects of the constituent quarks.

In Fig. 7 the function defined by $g_A(m_n r_p)$ has a weak dependence on momentum wave function form and spin coupling schemes. This result could be anticipated from the strong correlations of $g_A(\mu_p)$ and $\mu_p(m_n r_p)$ shown in Figs. 6 and 4, respectively. The experimental point could be fitted by the increase of the constituent mass.

From the results shown in Figs. 2-7 we conclude that without invoking more physics than is contained in the present model, each set of static observables either $\{r_n, r_p, \mu_p, g_A\}$ or $\{r_n, \mu_n, g_A\}$ can be reasonably fitted to the experimental values with only two parameters, i.e. the width of the wave function and the constituent quark mass. The difficulty is related to the precise and simultaneous fit of the magnetic moments as shown in Fig. 3.

4.2. Nucleon form factors

In Figs. 8-13 we show different electromagnetic and weak form factors as a function of q^2 . We give results with the parameters of the gaussian and power-law wave functions as given in Table 1. For each α they are fitted to the neutron magnetic moment.

The neutron charge form factor is shown in Fig. 8. The gradient spin coupling gives a negative contribution for $-q^2 \lesssim 2$ (GeV/c)². The calculation for the mixed case ($\alpha = 1/2$) underestimates the data. For the scalar quark spin coupling both types of momentum wave functions give results close to each other and within the experimental uncertainty agree with the data. For momentum transfers above 1 GeV/c, the model dependence (Power vs. HO) starts to appear in the neutron charge form factor.

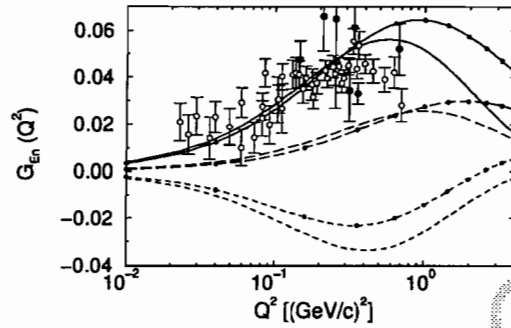


Fig. 8. Neutron charge form factor as a function of the momentum transfer $q^2 = -Q^2$. Theoretical curves labeled as in Fig. 2. The empty circles are the experimental data from Ref. [20] and the full circles from Ref. [21].

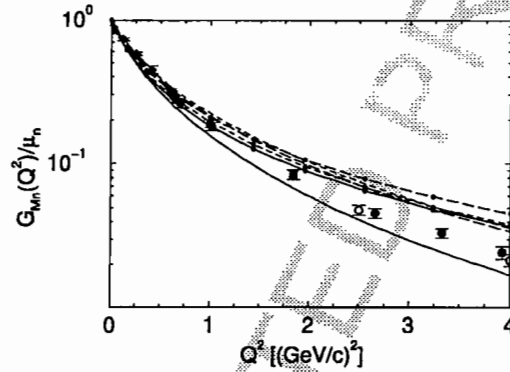
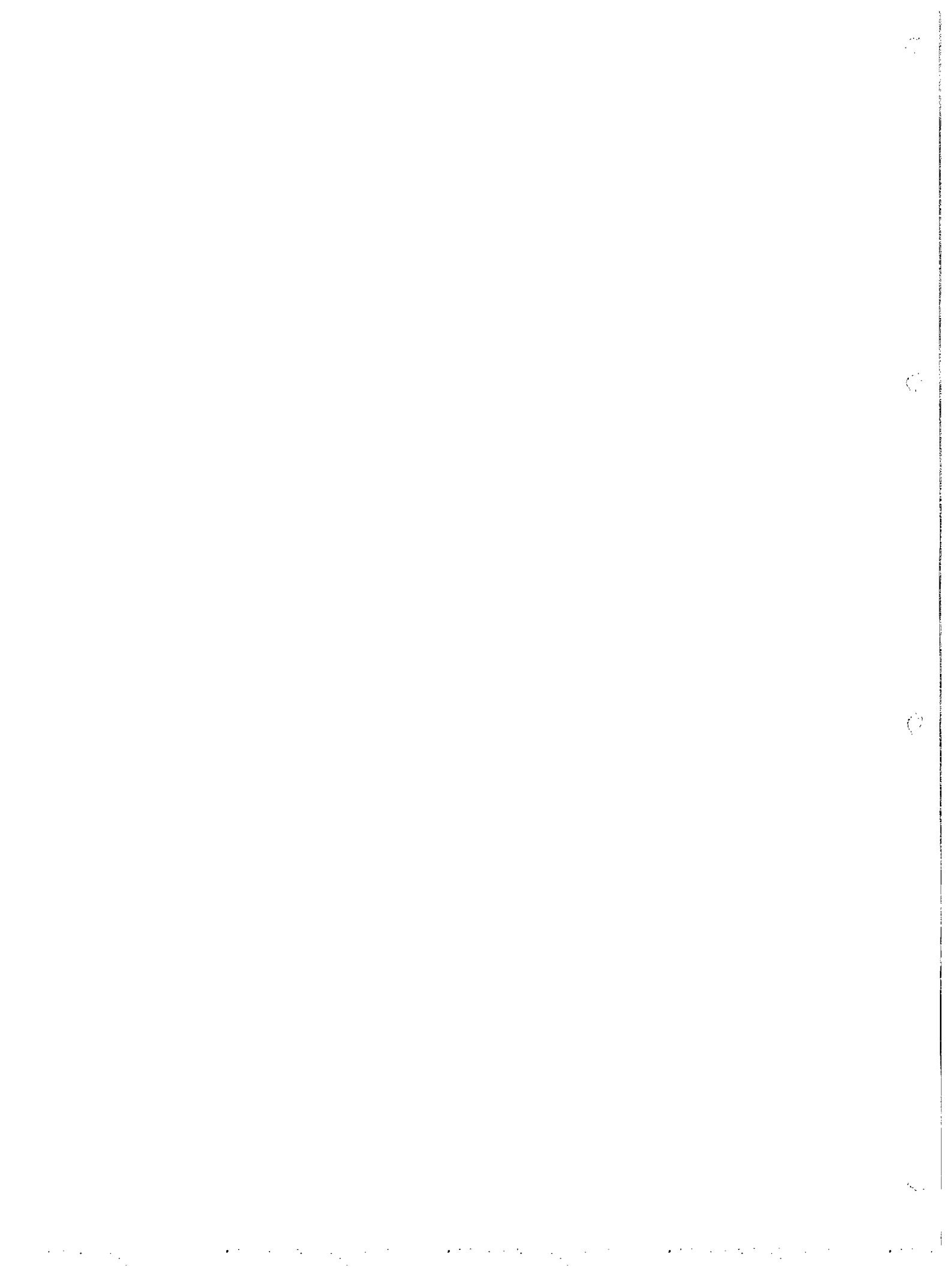


Fig. 9. Neutron magnetic form factor G_{Mn}/μ_n as a function of momentum transfer squared. Theoretical curves labeled as in Fig. 2. The experimental data come from Ref. [22], full circles; Ref. [23], open circles; Ref. [24], full diamonds.

The theoretical results for $G_{Mn}(q^2)$ are compared to the experiments in Fig. 9. The calculations with scalar coupling between the quark pair ($\alpha = 1$) give the best agreement with the data for both momentum wave function models. The results for $\alpha = 0$ and $1/2$ overestimate the data. For $-q^2 \gtrsim 1$ (GeV/c) 2 the models deviate from experiments.

In Fig. 10 we show the proton charge form factor compared with experiments. A common behavior is found for the calculations with both wave function models, i.e., the choice of $\alpha = 1$ gives values below the experimental data. This could also be anticipated from Figs. 3 and 4 that show too big values of the proton radius for $\mu_n = -1.91\mu_N$. The spin couplings given by $\alpha = 0$ and $1/2$ approach the data for $-q^2 \lesssim 2$ (GeV/c) 2 , because the proton radius is in better agreement with the experimental values.

In Fig. 11 the results for the proton magnetic form factor are shown. The scalar quark spin coupling results approach experimental data for momentum transfers below 1 GeV/c and for both wave function models. The results obtained with the spin coupling parameterized by $\alpha = 0$ and $1/2$ overestimate the data.



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43

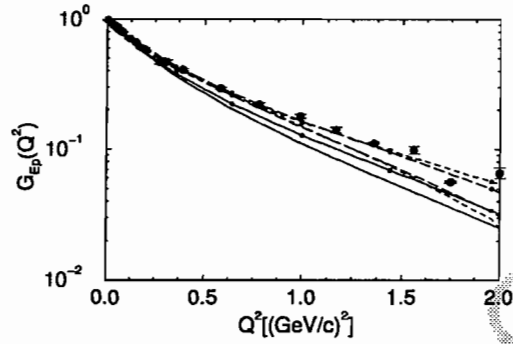


Fig. 10. Proton charge form factor as a function of momentum transfer squared. Theoretical curves labeled as in Fig. 2. The experimental data come from Ref. [25].

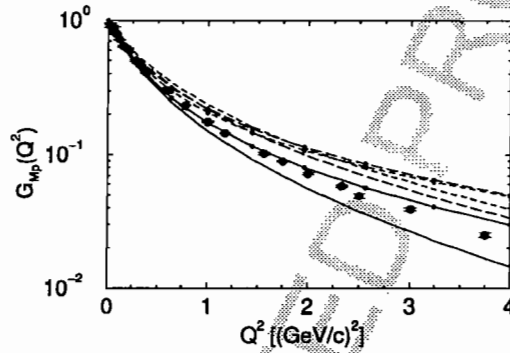


Fig. 11. Proton magnetic form factor G_{Mp}/μ_p as a function of momentum transfer squared. Theoretical curves labeled as in Fig. 2. The experimental data come from Ref. [26].

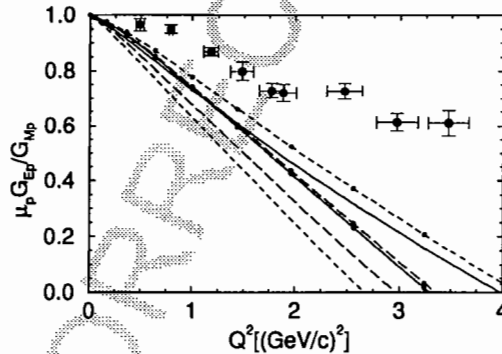
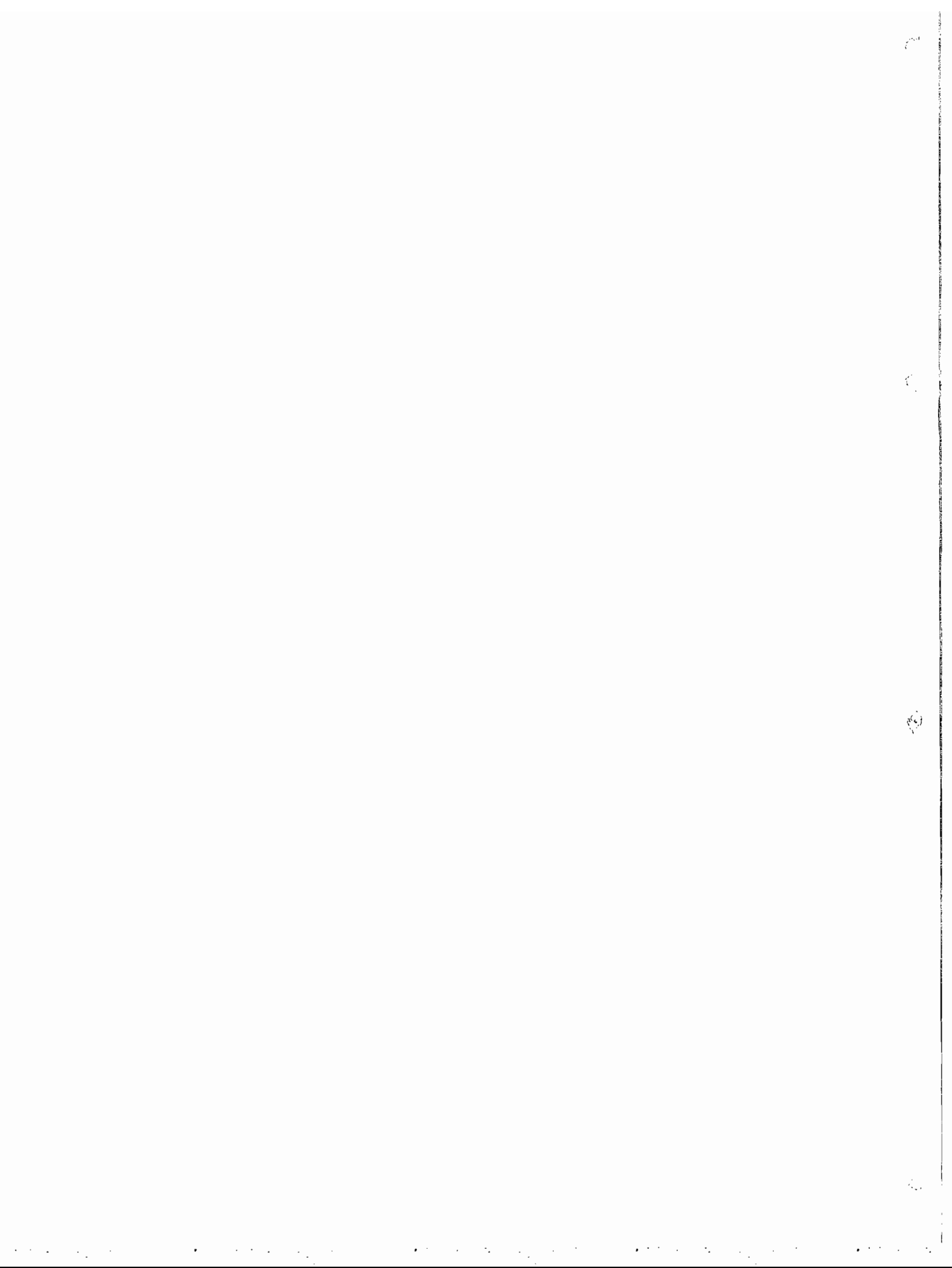


Fig. 12. Proton form factor ratio $\mu_p G_{Ep}/G_{Mp}$ as a function of momentum transfer squared. Theoretical curves labeled as in Fig. 2. The experimental data come from Ref. [27].

In Fig. 12 the results of recent measurements of the ratio $\mu_p G_{Ep}/G_{Mn}$ [27] are compared to our calculations. We observe a dependence on different spin couplings and momentum wave functions. However the data are generally underestimated that indicates the necessity for more sophisticated wave function models, inclusion of other spin couplings, and/or



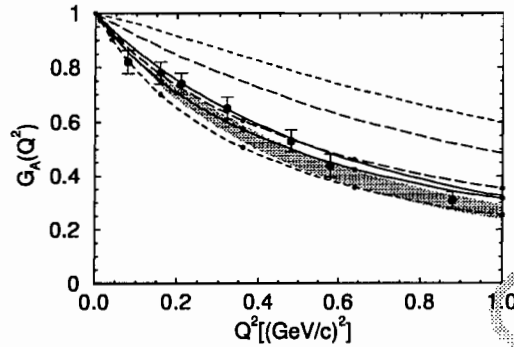


Fig. 13. Normalized axial-vector form factor as a function of momentum transfer squared. Theoretical curves labeled as in Fig. 2. The experimental data come from Ref. [28]. The experimental data of Ref. [29] are given in terms of a dipole form with a combined fit of $m_A = 1.03 \pm 0.05$ GeV.

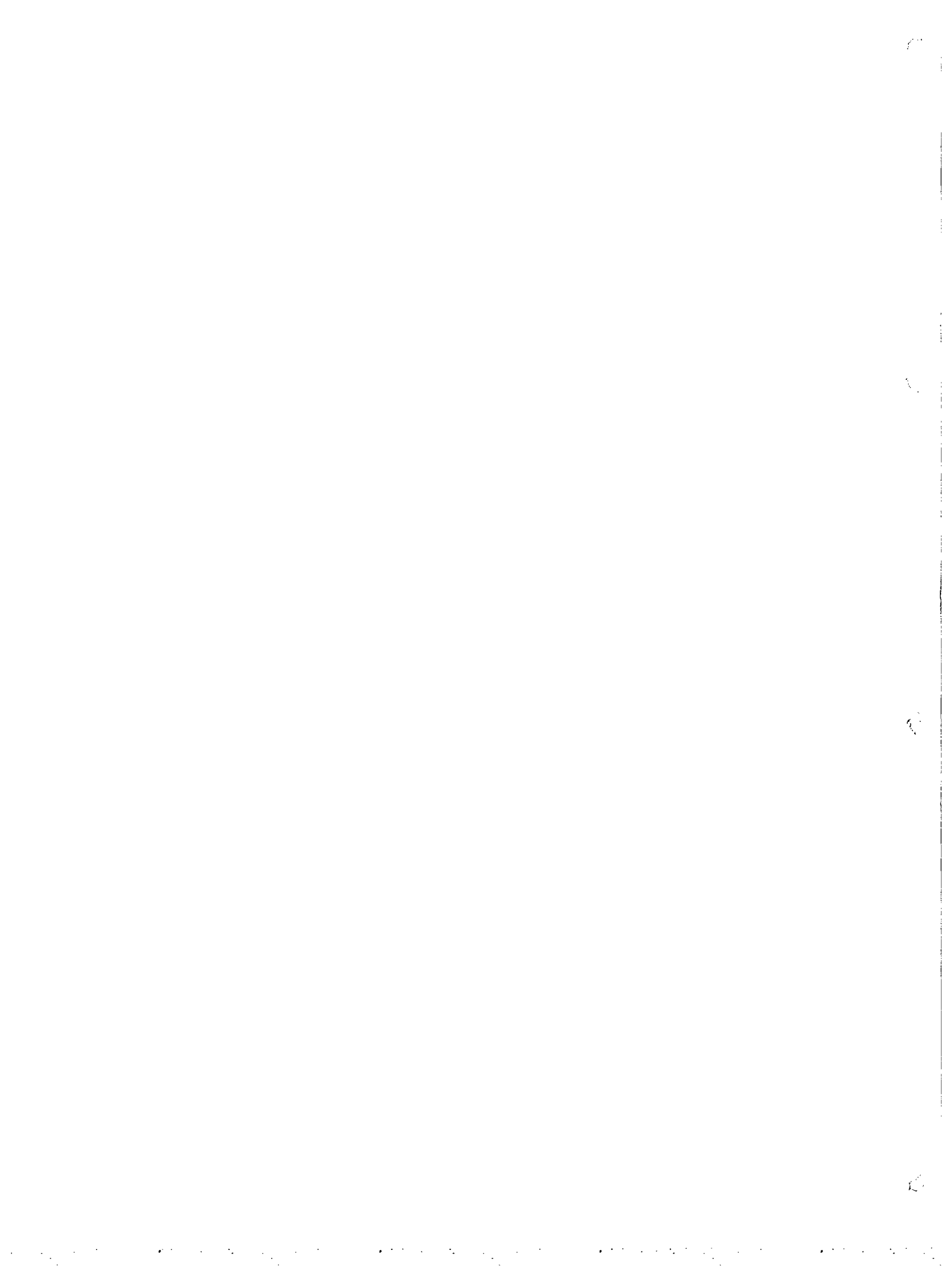
a constituent quark substructure. Let us emphasize that relativistic effects are crucial for the steeper proton charge form factor fall-off.

Finally, in Fig. 13 the model results are compared to experimental data for the nucleon weak isovector-axial-vector form factor. The calculations with the scalar coupling between the quark pair produce the best agreement with the data. However a remarkable sensitivity to the coupling schemes and wave functions models is also seen in Fig. 13. The model dependence found in this figure can be qualitatively understood if one looks at the approximate equation (33) for g_A , where a cancellation between two terms occurs that causes a high sensitivity to details of the models. This could also be expected for q^2 -dependence of the axial-vector form factor.

We must keep in mind that our wave function models are quite simplistic and even in the nonrelativistic quark model the nucleon is highly relativistic and the real wave function can strongly differ from their nonrelativistic counterparts. In this sense, the difference between the data and the present models seen in Figs. 9–13 for momentum transfers of several GeV/c is not too serious considering the simplicity of the model. We should also mention that the concept of *constituent* quarks is expected to break down above the chiral symmetry breaking scale ($4\pi f_\pi \sim 1$ GeV), so that we expect the model to loose validity because current quarks become the relevant degrees of freedom revealing the *constituent* substructure.

5. Summary and conclusion

We have shown the effects of different forms of relativistic spin couplings of constituent quarks on the nucleon electroweak properties. Model-independent (i.e., independent of the momentum shape of the light-front wave function) relations between the static electroweak observables are verified to hold within each quark spin coupling scheme as could be expected as $q^2 \rightarrow 0$. It is found that, while the neutron charge form factor is very sensitive to different choices of spin coupling schemes, it is insensitive to the details of the



1 momentum part of the three-quark wave function model for momentum transfers below 1
2 1 GeV/c. The experimental data on the neutron charge form factor — for momentum
3 transfers below 1 GeV/c — can be reproduced by models with a scalar coupling of the
4 constituent quark pair, independent of the shape of the wave function. This is mostly due
5 to the momentum dependence in lower component of the quark spinors that leads to a
6 mixed-symmetry space part (in a nonrelativistic reduction), compare also Ref. [30]. This
7 feature is strongly suppressed in the mixed case ($\alpha = 1/2$) and comes with an opposite
8 sign for the pure scalar and pure gradient cases, respectively.

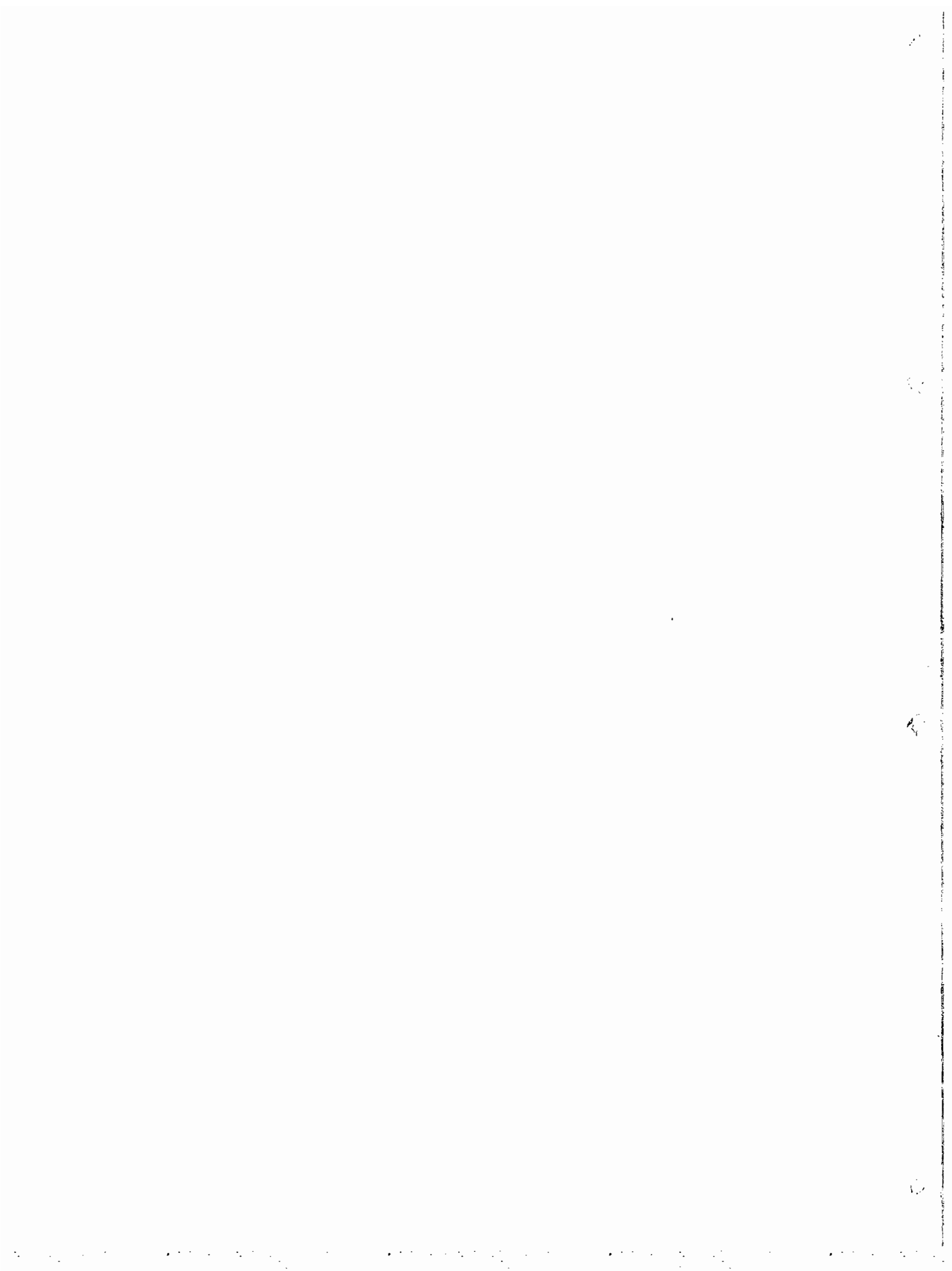
9 The difference between Bakamjian–Thomas and effective Lagrangian spin coupling
10 schemes is particularly noticeable in the weak isovector–axial–vector coupling constant
11 evaluated in the point-like nucleon limit. The correlations involving the set of static
12 observables $\{r_p, \mu_p, g_A\}$ are not very sensitive to spin coupling schemes defined by the
13 effective Lagrangian for different values of α in Eq. (1). Among these relations, the
14 function $g_A(\mu_p)$ is shown to have the smallest dependence on spin coupling schemes
15 and on the shape of the momentum wave function. The correlations involving the
16 neutron magnetic moment are more sensitive to different spin coupling schemes. Overall,
17 for momentum transfers above 1 GeV/c, we observe a dependence on the different
18 spin coupling schemes and momentum wave functions. The new data on the ratio of
19 $\mu_p G_{Ep}/G_{Mp}$ indicates the necessity to improve the wave function models, include other
20 (e.g. axial-vector quark pair) spin coupling, and/or a description of constituent quarks
21 beyond the models discussed in the present work. The influence of pionic corrections in
22 a light front framework has been studied in [31]. From their results we expect that our
23 conclusions do not change drastically, however, a complete study of pionic corrections in
24 the present framework is still an open and challenging problem.

25 26 Acknowledgements

27
28 M.B. thanks R. Tegen for a discussion on g_A . H.J.W. and M.B. thank INPP of the
29 University of Virginia for partial support. M.B. thanks the Deutscher Akademischer
30 Austauschdienst (DAAD) and FAPESP for support, and the Department of Physics of ITA
31 for the warm hospitality and for local support. W.R.B.A. thanks CNPq for financial support
32 and LCCA/USP for providing computational facilities, E.F.S thanks FAPESP for financial
33 support and T.F. thanks CNPq and FAPESP.

34 35 36 References

- 37
38 [1] W.R.B. de Araújo, E.F. Suisso, T. Frederico, M. Beyer, H.J. Weber, Phys. Lett. B 478 (2000)
39 86.
40 [2] J. Carbonell, B. Desplanques, V. Karmanov, J.-F. Mathiot, Phys. Rep. 300 (1998) 215, and
41 references therein.
42 [3] S.J. Brodsky, F. Schlumpf, Phys. Lett. B 329 (1994) 111;
43 S.J. Brodsky, F. Schlumpf, Prog. Part. Nucl. Phys. 34 (1995) 69.
44 [4] S.J. Brodsky, H.-C. Pauli, S.S. Pinsky, Phys. Rep. 301 (1998) 299.



- 1 [5] M.R. Frank, B.K. Jennings, G.A. Miller, Nucleonic Wave Functions, Phys. Rev. C 54 (1996) 1
2 920. 2
3 [6] T. Frederico, G.A. Miller, Phys. Rev. D 45 (1992) 4207. 3
4 [7] J.P.B.C. de Melo, H.W. Naus, T. Frederico, Phys. Rev. C 59 (1999) 2278. 4
5 [8] J.P.B.C. de Melo, T. Frederico, Phys. Rev. C 55 (1997) 2043, and references therein. 5
6 [9] W.R.B. de Araújo, M. Beyer, T. Frederico, H.J. Weber, J. Phys. G 25 (1999) 158. 6
7 [10] M. Beyer, C. Kuhlts, H.J. Weber, Ann. Phys. (NY) 269 (1998) 129, and references therein. 7
8 [11] B. Bakamjian, L.H. Thomas, Phys. Rev. 92 (1953) 1300. 8
9 [12] F. Cardarelli, E. Pace, G. Salme, S. Simula, Phys. Lett. B 357 (1995) 267; 9
10 F. Cardarelli, E. Pace, G. Salme, S. Simula, Few-Body Syst. Suppl. 8 (1995) 345; 10
11 F. Cardarelli, S. Simula, Phys. Lett. B 467 (1999) 1; 11
12 F. Cardarelli, S. Simula, nucl-th/0006023. 12
13 [13] R. Tegen, Phys. Rev. Lett. 62 (1989) 1724. 13
14 [14] W. Konen, H.J. Weber, Phys. Rev. D 41 (1991) 2201. 14
15 [15] S. Kopecky et al., Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 2427. 15
16 [16] S.J. Brodsky, J.R. Primack, Ann. Phys. (NY) 52 (1969) 315. 16
17 [17] J.J. Murphy II, Y.M. Shin, D.M. Skopik, Phys. Rev. C 9 (1974) 3125. 17
18 [18] R. Rosenfelder, Phys. Lett. B 479 (2000) 381. 18
19 [19] D.E. Groom et al., Eur. Phys. J. 15 (2000) 1. 19
20 [20] S. Platchkov et al., Nucl. Phys. A 510 (1990) 740. 20
21 [21] T. Eden et al., Phys. Rev. C 50 (1994) R1749; 21
22 M. Meyerhoff et al., Phys. Lett. B 327 (1994) 201; 22
23 C. Herberg et al., Eur. Phys. J. A 5 (1999) 131; 23
24 I. Passchier et al., Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 4988; 24
25 M. Ostrick et al., Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 276; 25
26 G. Becker et al., Eur. Phys. J., submitted. 26
27 [22] W. Albrecht et al., Phys. Lett. B 26 (1968) 642. 27
28 [23] S. Rock et al., Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 1139. 28
29 [24] E.E.W. Bruins et al., Phys. Rev. Lett. (1995) 1. 29
30 [25] G. Hohler et al., Nucl. Phys. B 144 (1976) 505. 30
31 [26] W. Bartel et al., Nucl. Phys. B 58 (1973) 429. 31
32 [27] M.K. Jones et al., Phys. Rev. Lett. 84 (2000) 1398. 32
33 [28] A. Del Guerra et al., Nucl. Phys. B 99 (1975) 253; Nucl. Phys. B 107 (1976) 65. 33
34 [29] N.J. Baker et al., Phys. Rev. D 23 (1982) 2499; 34
35 S.V. Belikov et al., Z. Phys. A 320 (1985) 625; 35
36 T. Kitagaki et al., Phys. Rev. D 42 (1990) 1331. 36
37 [30] F. Cardarelli, S. Simula, Phys. Rev. C 62 (2000) 065201. 37
38 [31] Z. Dziembowski, H. Holtmann, A. Szczurek, J. Speth, Ann. Phys. 258 (1997) 1. 38
39 39
40 40
41 41
42 42
43 43