

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

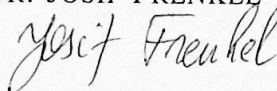
INSTITUTO DE FÍSICA

Efeitos de Temperatura em Eletrodinâmica Quântica com Interações de Chern-Simons

SAULO HENRIQUE PEREIRA[†]

Orientador:

PROF. DR. JOSIF FRENKEL



Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências na área de Física.

BANCA EXAMINADORA

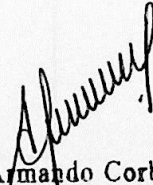
PROF. DR. JOSIF FRENKEL - IFUSP

PROF. DR. MARCELO O. C. GOMES - IFUSP

PROF. DR. ADRIANO A. NATALE - IFT-UNESP

São Paulo

Abril de 2003



Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3790

el. 1

def. 02/09/03



P436 e
M
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Pereira, Saulo Henrique

Efeitos de Temperatura em Eletrodinâmica
Quântica

com Interações de Chern-Simons.

São Paulo, 2003.

Mestrado (Dissertação) Universidade de São Paulo
Instituto de Física. Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Josif Frenkel

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Eletrodinâmica Quântica;
2. Temperatura Finita;
3. Ação Efetiva.

USP/IF/SBI-022/2003

OPF
L-32

* * *

aos meus dois afilhados,
Mateus Silva e Matheus Mendonça

* * *

Agradecimentos

... “se, por fim, for descoberto que toda a realidade física pode ser descrita por um conjunto finito de equações, ficarei desapontado. Pensarei que o Senhor foi atipicamente pouco criativo” ...
Freeman Dyson, *Infinito em Todas as Direções*

Agradecimentos

Ao professor Dr. Josif Frenkel, pela orientação constante, sábia e paciente.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao professor Dr. Fernando Brandt, pelas inúmeras ajudas computacionais.

Aos professores Dr. Oscar Éboli e Diógenes Galetti pela iniciação científica cujos frutos estão sendo colhidos agora.

Aos meus amigos do Instituto de Física e os de minha cidade natal, pelo apoio constante.

Aos meus familiares, meu pai Henrique, minha mãe Ana e meu irmão Sandro, por tudo.

Resumo

Estudamos as principais características das teorias de Chern-Simons, Maxwell e Férmions em $2 + 1$ dimensões, como simetrias \mathcal{C} , \mathcal{P} , \mathcal{T} e invariância de *gauge*. Introduzimos conceitualmente o formalismo de Matsubara para cálculos a temperatura finita em teorias de campo. Estudamos as correções de ordens mais altas da QED_{2+1} a temperatura finita, obtendo a parte da ação efetiva que viola paridade usando o método de expansões derivativas em um limite que generaliza o estático. Do cálculo explícito dos termos quadrático, cúbico e de quarta ordem nos campos e linear no campo magnético nós encontramos que essas contribuições podem ser somadas em todas as ordens nas derivadas. E então mostramos que para cada ordem nas derivadas a ação efetiva pode também ser somada em todas as ordens nos campos A_0 , sendo expressa em função do termo dominante da ação efetiva no limite estático. Provamos a invariância de *gauge* ‘grande’ e ‘pequena’ da ação efetiva resultante, no contexto das expansões derivativas.

Abstract

We study the main features of the Chern-Simons, Maxwell and Fermion theories in $2 + 1$ dimensions, $\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{T}$ symmetries and gauge invariance. We conceptually introduce the Matsubara formalism in finite temperature field theory computations. We study the higher order corrections in thermal QED_{2+1} of effective action parity violating part in a limit that generalize the static one. From explicit calculation of the quadratic, cubic and the quartic terms in fields and linear in the magnetic field we find that these contributions can be summed to all orders in derivatives. And then we show that at every order in the derivatives the effective action can also be summed to all orders in the A_0 fields, which is expressed in terms of the leading order effective action in the static limit. We prove the both ‘small’ and ‘large’ gauge invariance of the resulting effective actions, within the framework of derivative expansion.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Introdução	1
1 Aspectos Gerais de Teorias em 2+1 Dimensões e a Teoria de Chern-Simons	5
1.1 Teoria de Maxwell	5
1.2 Teoria de Chern-Simons	7
1.3 Férmions	12
1.4 Simetrias CPT	13
1.5 Teoria de Chern-Simons Não-Abeliana e Invariância de <i>Gauge</i> ‘Grande’	15
2 Teoria de Campos a Temperatura Finita	18
2.1 Formalismo de Matsubara	18
2.2 Integrais de Trajetória e a Função de Partição para o Campo Escalar	21
2.3 Função de Partição para Férmions	26
3 Expansão Derivativa e Violação da Paridade da Ação Efetiva da QED a Temperatura Finita	29
3.1 Expansão Derivativa em Ordens Dominantes	30
3.1.1 Termo linear em \vec{A}	34
3.1.2 Termo quadrático em \vec{A}	37

3.2	Expansão Derivativa em Ordens Mais Altas	39
3.2.1	Termo linear em \hat{A}_0	41
3.2.2	Termo quadrático em \hat{A}_0	45
3.2.3	Termo cúbico em \hat{A}_0	49
4	Características Gerais da Ação Efetiva	53
4.1	Generalização da Ação Efetiva	53
4.1.1	Termo linear nas derivadas	53
4.1.2	Termo cúbico nas derivadas	54
4.1.3	Termo de quinta ordem nas derivadas	59
4.2	Invariância por Transformações de <i>Gauge</i> 'Pequenas' e Localidade .	60
	Conclusão	65
	A	67
	B	70
	Bibliografia	78

Introdução

A física moderna do nosso mundo em $3 + 1$ dimensões espaço-temporal é bem entendida em um certo sentido, já que muitos dos fenômenos conhecidos podem ser explicados e calculados com bastante precisão, seja na área da cosmologia como na área da teoria quântica. Claro que em muitos aspectos estas teorias ainda apresentam muitos problemas, mas são geralmente problemas específicos, aos quais ainda se tenta aplicar as mesmas teorias de maneiras diferentes, a fim de se obter resultados compatíveis com os observados na natureza. A física de partículas elementares tem seus pilares na teoria quântica de campos, onde a “Eletrodinâmica Quântica”, a “Teoria das Interações Fracas” e a “Cromodinâmica Quântica” são seus principais alicerces. Na tentativa de se unificar essas teorias, surgiu o que conhecemos hoje como “Teorias de *Gauge*”, que basicamente tentam relacionar e agrupar aquelas três em um modelo mais sólido e único. Um dos sucessos foi conseguido com a unificação da Eletrodinâmica com as Interações Fracas, no modelo de Weinberg-Salam, ou “Teoria Eletro-Fraca”. Muito se tem feito para tentar incluir também a Cromodinâmica Quântica, mas as dificuldades ainda são grandes e maiores ainda quando se tenta incluir também a Teoria da Gravitação. Na verdade, nem se sabe se tais modelos podem ser unificados de maneira consistente, e essas questões estão mesmo muito além do que discutiremos aqui.

O que é importante disso que foi dito é que as teorias de *gauge* são de extrema importância no mundo das partículas elementares. Sabemos que um férmion (um elétron por exemplo) está envolto numa nuvem de fótons, partículas sem massa, que é a maneira como os elétrons interagem entre si, por exemplo se repelindo. No caso da interação forte da Cromodinâmica Quântica também sabemos que os quarks são rodeados por uma nuvem de glúons, partículas não massivas, responsáveis pela interação entre eles. No caso da interação Fraca, responsável pela interação entre os

léptons, também existe um conjunto de partículas mediadoras, os chamados bósons vetoriais, que são massivos. Essas partículas mediadoras das três interações, Eletromagnética, Forte e Fraca, são partículas de spin 1. A origem delas pode ser entendida no contexto das teorias de *gauge*. Quando impomos a condição de que a lagrangeana de uma teoria seja invariante por transformações de *gauge* locais (isto é, que seja invariante por transformações dependentes das coordenadas do espaço-tempo), o resultado é que essa lagrangeana ganha alguns termos a mais, a fim de ser satisfeita a invariância de *gauge*. Esses novos termos que aparecem na lagrangeana contém campos de *gauge* não massivos com as propriedades requeridas pelos campos intermediadores das forças, ou seja, podemos dizer que surgem os campos das partículas intermediadoras. Por exemplo, numa lagrangeana de férmions, a imposição de que esta lagrangeana seja invariante de *gauge* local faz com que tenhamos de somar à lagrangeana inicial um termo que tem exatamente as propriedades do campo eletromagnético, através de um quadrivetor potencial, representando o campo do fóton. Desta maneira podemos pensar que a imposição da invariância de *gauge* local leva ao surgimento da interação eletromagnética, que é a maneira como os elétrons interagem entre si. O mesmo acontece com as interações fortes. Impondo uma invariância de *gauge* local na lagrangeana dos quarks nos leva a ter de adicionar 8 novos campos de *gauge* resultantes dos geradores do grupo $SU(3)$, que acredita-se ser o grupo responsável pelas interações fortes, ou seja, aparecem os 8 glúons mediadores da interação forte. Essas partículas mediadoras, tanto no caso eletromagnético quanto no caso das interações fortes são não massivas, pois qualquer termo de massa na lagrangeana leva a uma quebra da invariância de *gauge*. No caso das interações fracas aparece um problema, pois sabe-se que os bósons vetoriais são massivos, de maneira que a invariância de *gauge* local não consegue explicar o aparecimento das partículas mediadoras. É aqui que entram os modelos conhecidos como “quebra espontânea de simetria” e “modelo de Higgs”, a fim de explicar a massa daquelas partículas.

Já no mundo em $2 + 1$ dimensões espaço-temporal muitas novidades aparecem. E o estudo desse ‘universo’ simplificado pela diminuição de uma componente espacial pode trazer muito entendimento ao mundo real. Por exemplo, o estudo da eletrodinâmica quântica em $2 + 1$ dimensões apresenta uma série de características

notáveis, uma delas é permitir a presença de um novo termo na lagrangeana que seja invariante de *gauge* e possa gerar massa ao campo de *gauge*. Essa nova teoria que aparece em qualquer dimensão ímpar do espaço-tempo é conhecida como “Teoria de Chern-Simons”, que apresenta muitas características importantes [1-4], e algumas delas serão estudadas no primeiro capítulo deste trabalho.

No segundo capítulo vamos tratar de maneira geral a teoria de campos a temperatura finita [5-8]. Afinal, a grande maioria dos fenômenos que nos rodeiam têm uma profunda relação com a temperatura. Muitos métodos existem para se tratar fenômenos a temperatura finita, mas aqui nos restringiremos ao formalismo de Matsubara, que em geral se aplica a fenômenos no equilíbrio, não havendo dependência temporal. A principal modificação dos cálculos da teoria quântica de campos a temperatura nula para o caso dependente da temperatura decorre do fato que as integrações temporais passam a ser feitas no eixo imaginário e em um intervalo finito, que relacionamos à temperatura. A integração na componente temporal do momento, relacionada à energia, passa a ser feita na forma de um somatório sobre frequências discretas, as chamadas frequências de Matsubara, que é o objeto principal que queremos introduzir conceitualmente.

Os dois últimos capítulos são os mais importantes e formam a parte principal do trabalho desenvolvido, o que resultou na publicação de um trabalho, ref. [16].

Quando estudamos uma lagrangeana de férmions em $2 + 1$ dimensões através do método perturbativo aparece uma peculiaridade que não tem análogo em $3 + 1$ dimensões, que é o aparecimento de um termo de Chern-Simons. O que acontece é que mesmo que não haja na lagrangeana original da teoria um termo de Chern-Simons, ele é gerado naturalmente por efeitos quânticos radiativos, isso já no cálculo do diagrama de um *loop* da ação efetiva de um férmion massivo. Este termo quebra a paridade e a simetria de reversão temporal. Esses e outros aspectos da teoria de Chern-Simons justificam tanto interesse recente no seu estudo. Quando tratamos o problema a temperatura nula e no caso abeliano, a indução do termo de Chern-Simons é sabido ser vinda apenas do diagrama de 1 *loop*, não havendo correções de ordens mais altas, de acordo com o teorema de Coleman-Hill [17]. Cálculos explícitos na ordem de 2 *loops* foram realizados [18], mostrando a ausência de correções nesta ordem tanto para o caso abeliano como para o não abeliano.

Acredita-se que para o caso não abeliano também não haja correções de ordens mais altas, mas não existe prova disso ainda.

Outras características interessantes aparecem quando se estuda a teoria a temperatura finita [10-15]. Sabe-se que as teorias de Chern-Simons não-abelianas são invariantes por transformações de *gauge* 'grandes', desde que o coeficiente do termo de Chern-Simons seja quantizado. A temperatura finita, no entanto, o termo de Chern-Simons induzido tem um coeficiente contínuo, dependente da temperatura. Isso é incompatível com a natureza discreta do coeficiente de Chern-Simons necessária para a invariância de *gauge* 'grande' ser satisfeita. Esse aparente paradoxo já é bem entendido na teoria abeliana. Estudos de um modelo em $0 + 1$ dimensão [10] fornecem muitas informações sobre essa teoria. A temperatura finita a ação efetiva se torna não-analítica, ao contrário da teoria a temperatura nula. Assim, a ação efetiva deve ser tratada em certos limites, como o limite de longos comprimentos de onda e o limite estático. Para o caso abeliano, não há problemas com a invariância de *gauge* 'grande' no limite de longos comprimentos de onda. Já para o caso de limite estático, cada termo individual da série perturbativa viola a invariância de *gauge* 'grande', embora acredite-se que a ação completa seja invariante. No capítulo 3 calculamos correções para ordens mais altas da parte que viola paridade da ação efetiva a temperatura finita a fim de elucidarmos o problema. Utilizamos para isto o método de expansões derivativas, que consiste em obter uma expansão em série de potências da derivada, assim podemos obter resultados analíticos em um limite que generaliza o estático. No apêndice B estão os mesmos cálculos obtidos no espaço de momentos, através dos gráficos das funções de 2 e 4 pontos.

No capítulo 4 analisamos os resultados obtidos no capítulo 3 e mostramos que é possível generalizar alguns resultados, obtendo o comportamento da ação efetiva linear, cúbica e de quinta ordem nas derivadas para todas as ordens nos campos. Determinamos neste caso a ação efetiva que gera, em todas as ordens de perturbação, as amplitudes de Green térmicas que violam a paridade neste limite mais geral. Finalmente provamos a invariância de *gauge* e a localidade desta ação efetiva a temperatura finita que é linear no campo magnético.

Capítulo 1

Aspectos Gerais de Teorias em 2+1 Dimensões e a Teoria de Chern-Simons

O estudo da física em duas dimensões espaciais apresenta muitos aspectos interessantes, tanto na teoria quanto experimentalmente. O comportamento de elétrons e fótons diferem de maneira significativa daquela encontrada na eletrodinâmica clássica e quântica em $3 + 1$ dimensões espaço-temporal. Por exemplo, existe um novo tipo de teoria de *gauge*, diferente da teoria de Maxwell, conhecida como “Teoria de Chern-Simons”, com novidades interessantes em $2 + 1$ dimensões, como a geração de excitações massivas sem quebrar a invariância de *gauge* da teoria [1-3]. Esta nova teoria também tem aplicações em certos fenômenos da física da matéria condensada em 2 dimensões espaciais, como o Efeito Hall Quântico Fracionário [4]. Mais genericamente, esta teoria se aplica a qualquer dimensão ímpar do espaço-tempo, mas aqui nos restringiremos ao caso em $2 + 1$ dimensões. A teoria de Maxwell da eletrodinâmica e a teoria de Dirac para férmions também apresentam algumas peculiaridades em $2 + 1$ dimensões. As simetrias discretas \mathcal{P} , \mathcal{C} e \mathcal{T} também serão revistas e terminaremos com uma breve descrição da teoria de Chern-Simons não-abeliana [3], a fim de apresentarmos o conceito de invariância de *gauge* ‘grande’. É disso que trataremos neste capítulo.

1.1 Teoria de Maxwell

A teoria de Maxwell é definida em termos do campo vetorial $A^\mu = (A^0, \vec{A})$, onde $\vec{A} = (A^1(x), A^2(x))$ é o potencial vetor e $A^0(x)$ o potencial escalar, e $x \equiv x^\mu =$

$(x^0, x^1, x^2) = (t, x, y) = (t, \vec{x})$. A lagrangeana de Maxwell acoplada a uma corrente $J^\mu(x)$ é:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu \quad (1.1)$$

com o tensor eletromagnético sendo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.2)$$

A equação de movimento obtida com a equação de Euler-Lagrange clássica é

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (1.3)$$

que é manifestamente invariante por transformações de *gauge* do tipo

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda. \quad (1.4)$$

A conservação da corrente $\partial_\mu J^\mu = 0$ segue diretamente da antissimetria de $F_{\mu\nu}$.

Note que esta teoria de *gauge* de Maxwell pode ser definida em qualquer dimensão d espaço-temporal, o tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ continuará sendo da forma (1.2), a lagrangeana de Maxwell (1.1) e as equações de movimento (1.3) não mudam sua forma, apenas teremos o índice $\mu = 0, 1, 2, \dots, (d-1)$. A única diferença real é que o número de campos independentes contidos no tensor antissimétrico eletromagnético $F_{\mu\nu}$ é diferente em diferentes dimensões, sendo dado por $\frac{1}{2}d(d-1)$. No caso de $2+1$ dimensões teremos 3 campos independentes e o campo magnético será um (pseudo-) escalar $B = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \epsilon^{ij} \partial_i A_j$ e não um (pseudo-) vetor $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ como em $3+1$ dimensões. Isto porque o rotacional em duas dimensões produz um escalar. O campo elétrico $\vec{E} = -\vec{\nabla} A_0 - \dot{\vec{A}}$ é um vetor bidimensional. Assim, o tensor eletromagnético em $2+1$ dimensões será:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y \\ E_x & 0 & B \\ E_y & -B & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Na representação do campo magnético B foi utilizado o tensor totalmente antissimétrico $\epsilon^{\mu\nu\rho} \equiv \epsilon_{\mu\nu\rho}$ que satisfaz a propriedade ϵ_{012} (ou qualquer permutação cíclica) é igual a $+1$, ϵ_{102} (ou qualquer permutação cíclica) é igual a -1 e é igual a zero no caso de dois índices serem repetidos. No caso do campo magnético foi usada a definição $\epsilon^{0ij} \equiv \epsilon^{ij}$.

1.2 Teoria de Chern-Simons

A novidade que aparece quando trabalhamos em $2 + 1$ dimensões é que podemos considerar uma teoria de *gauge* completamente diferente da teoria de Maxwell, conhecida como Teoria de Chern-Simons. Ela satisfaz os critérios de ser invariante de Lorentz, invariante de *gauge* e local. A lagrangeana de Chern-Simons é

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho = \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho}. \quad (1.6)$$

Muitas coisas podem ser ditas a respeito desta nova lagrangeana. Por uma transformação de *gauge* do tipo (1.4), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{CS} &= \mathcal{L}_{CS} + \delta\mathcal{L}_{CS} \\ &= \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} + \frac{\kappa}{4} \partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\rho} \Lambda F_{\nu\rho}) - \frac{\kappa}{4} (\Lambda \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

mas o último termo será nulo, pois de acordo com a identidade de Bianchi,

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} = \epsilon^{\mu\nu\rho} (\partial_\mu \partial_\nu A_\rho - \partial_\mu \partial_\rho A_\nu) = 0, \quad (1.8)$$

devido a simetria de $\partial_\mu \partial_\nu$ na troca dos índices e a antissimetria do tensor $\epsilon^{\mu\nu\rho}$. Portanto

$$\delta\mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{4} \partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\rho} \Lambda F_{\nu\rho}) \quad (1.9)$$

é uma quantidade dependente apenas de uma derivada espaço-temporal total, e numa integração em todo o espaço se transforma em um termo de superfície que se anula na fronteira, logo pode ser desprezada, de maneira que a ação de Chern-Simons, $S_{CS} = \int d^3x \mathcal{L}_{CS}$, é invariante de *gauge*.

Quando acoplada a uma corrente J^μ

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} - A_\mu J^\mu \quad (1.10)$$

a equação de movimento obtida com as equações de Euler-Lagrange clássicas será

$$\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = J^\mu \quad (1.11)$$

que também é invariante.

Outra característica importante da Lagrangeana de Chern-Simons (1.6) é que ela é de primeira ordem nas derivadas espaço-temporais. Desta maneira, sua estrutura canônica é significativamente diferente da teoria de Maxwell. Vale também dizer que não é possível escrever uma teoria de Chern-Simons em $3 + 1$ dimensões, ou em qualquer dimensão par do espaço-tempo, devido às propriedades do tensor $\epsilon^{\mu\nu\rho}$.

Vamos estudar melhor as equações de movimento (1.11) da Teoria de Chern-Simons, escrevendo-as separadamente, onde $J^\mu = (\rho, \vec{J})$:

$$\begin{aligned}\rho &= \kappa B \\ J^1 &= -\kappa E_y \\ J^2 &= \kappa E_x.\end{aligned}\tag{1.12}$$

A primeira destas equações nos diz que a densidade de carga ρ é localmente proporcional ao campo magnético, assim, o efeito do termo de Chern-Simons é ligar o fluxo magnético com a densidade de carga elétrica. Onde quer que exista um, existirá o outro, sendo diretamente proporcionais. As duas outras equações (1.12) asseguram que a relação fluxo-carga é preservada sobre evolução temporal, desde que a derivada da primeira equação junto com a conservação da corrente $\dot{\rho} + \partial_i J^i = 0$ nos fornece exatamente as duas últimas equações. Desta maneira, o acoplamento de Chern-Simons é apenas um vínculo neste nível. Podemos considerar o campo de matéria como tendo sua própria dinâmica e o efeito de adicionar um termo de Chern-Simons é que o fluxo magnético fica ligado à densidade de carga. Esta ligação fluxo-carga é o que está por trás do conceito de *anyons*, que são partículas que podem ter spin fracionário e conseqüentemente permitir uma estatística diferente da usual, diferentemente dos bósons e férmions que possuem spin inteiro ou semi-inteiros, respectivamente, e são característicos de sistemas em $3 + 1$ dimensões. Já em $2 + 1$ dimensões, o operador momento angular não está restrito apenas a valores inteiros ou semi-inteiros, o que permite a existência dos *anyons*. O acoplamento fluxo-carga resultante do termo de Chern-Simons leva a uma interação do tipo Aharonov-Bohm, importante no estudo de vários modelos, como o Efeito Hall Quântico Fracionário [4].

Vamos olhar com um pouco mais de cuidado também o termo de Chern-Simons

na lagrangeana (1.6). A menos da constante multiplicativa, podemos escrevê-lo explicitamente

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho &= \epsilon^{0ij} A_0 \partial_i A_j - A_1 (\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0) + A_2 (\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) \\ &= A_0 B - A_1 E_y + A_2 E_x\end{aligned}\quad (1.13)$$

e vemos que o termo de Chern-Simons é o campo magnético vezes o potencial escalar somado com componentes do campo elétrico vezes componentes do potencial vetor. Se fizermos uma escolha particular para a forma do campo de *gauge* ou potencial $A(x)$, por exemplo

$$A_\mu(x) = (A_0(t), \vec{A}(\vec{x}))\quad (1.14)$$

de maneira que a componente temporal do potencial dependa só do tempo e as componentes espaciais dependam só das coordenadas espaciais, vemos diretamente da equação (1.13) que só o termo com o campo magnético sobrevive, ou seja, para esta escolha particular do campo de *gauge*, o termo de Chern-Simons se resume ao produto do campo magnético com o potencial escalar, não havendo qualquer dependência com o campo elétrico. Esta escolha particular do campo de *gauge* é de grande interesse e será baseada nela que faremos cálculos perturbativos na parte principal deste trabalho, já que os cálculos para um campo de *gauge* no caso geral são praticamente impossíveis de serem calculados de forma fechada. Podemos concluir então que, numa lagrangeana em $2+1$ dimensões, qualquer termo do tipo $A_0 B$ é um termo de Chern-Simons, consequência da escolha do campo de *gauge* conforme (1.14).

Outras características interessantes que aparecem da Teoria de Chern-Simons é quando a acoplamos junto à Teoria de Maxwell. O resultado é uma nova forma de teoria de *gauge* com geração de massa. Seja a lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho.\quad (1.15)$$

As equações clássicas de movimento para os campos obtidas são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2} \epsilon^{\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0\quad (1.16)$$

onde $\mu = \kappa e^2$, que descreve a propagação de um único grau de liberdade com massa

$$m_{MCS} = \kappa e^2 = \mu \quad (1.17)$$

onde e^2 tem dimensão de massa em 2 + 1 dimensões e κ é adimensional. Esta é a nova característica desta lagrangeana. Ela fornece massa ao campo de *gauge* sem quebrar a simetria ou a invariância da lagrangeana. Uma maneira mais direta de ver isso é reescrever a equação de movimento (1.16) em termos do campo dual pseudo-vetorial

$$\tilde{F}^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} \quad (1.18)$$

$$F^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho} \tilde{F}_\rho. \quad (1.19)$$

Substituindo em (1.16), obtemos a forma equivalente

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu \tilde{F}_\rho + \mu \tilde{F}^\nu = 0 \quad (1.20)$$

e agora multiplicamos por $\epsilon_{\alpha\beta\nu}$ e usamos a propriedade

$$\epsilon_{\alpha\beta\nu} \epsilon^{\nu\mu\rho} = \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\rho - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\rho \quad (1.21)$$

para obtermos

$$\partial_\beta \tilde{F}_\alpha - \partial_\alpha \tilde{F}_\beta + \mu F_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.22)$$

O campo dual \tilde{F}^μ é manifestamente invariante de *gauge* e satisfaz a identidade de Bianchi $\partial_\mu \tilde{F}^\mu = 0$. Multiplicando por -1 e tomando então o divergente desta equação

$$\begin{aligned} \partial^\alpha (\partial_\alpha \tilde{F}_\beta - \partial_\beta \tilde{F}_\alpha - \mu F_{\alpha\beta}) &= \square \tilde{F}_\beta - \partial^\alpha \partial_\beta \tilde{F}_\alpha - \mu \partial^\alpha F_{\alpha\beta} \\ &= \square \tilde{F}_\beta - \partial_\beta \partial^\alpha \tilde{F}_\alpha + (1/2) \mu^2 \epsilon_{\beta\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \square \tilde{F}_\beta + \mu^2 \tilde{F}_\beta = 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

onde foi usado a equação de movimento (1.16) e a identidade de Bianchi. Então

$$[\partial_\alpha \partial^\alpha + \mu^2] \tilde{F}_\beta = 0 \quad (1.24)$$

que demonstra claramente que as excitações do campo de *gauge* são massivas.

Vamos agora obter o propagador da teoria de Chern-Simons dada pela lagrangeana (1.15). É útil somar a essa lagrangeana um termo fixador de *gauge* dependente de um parâmetro ξ , que nos permite escolher o *gauge* apropriado no final dos cálculos. A lagrangeana será:

$$\mathcal{L}_{MCSG} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu A^\rho - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (1.25)$$

que pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}_{MCSG} = \frac{1}{2}A^\mu[g_{\mu\nu}\square + (\frac{1}{\xi} - 1)\partial_\mu\partial_\nu + \mu\epsilon_{\mu\rho\nu}\partial^\rho]A^\nu \quad (1.26)$$

e o propagador $D^{\mu\nu}(x)$ é definido como o inverso da parte quadrática da lagrangeana, devendo satisfazer

$$[g_{\mu\sigma}\square + (\frac{1}{\xi} - 1)\partial_\mu\partial_\sigma + \mu\epsilon_{\mu\rho\sigma}\partial^\rho]D^{\sigma\nu}(x) = \delta_\mu^\nu\delta(x). \quad (1.27)$$

No entanto é mais conveniente trabalhar com o propagador no espaço de momentos, e para isso escrevemos $D^{\sigma\nu}(x)$ e $\delta(x)$ como transformadas de Fourier,

$$D^{\sigma\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-ik\cdot x} D^{\sigma\nu}(k) \quad (1.28)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-ik\cdot x} \quad (1.29)$$

e substituindo em (1.27) obteremos

$$[-k^2 g_{\mu\sigma} - (\frac{1}{\xi} - 1)k_\mu k_\sigma - i\mu\epsilon_{\mu\rho\sigma}k^\rho]D^{\sigma\nu}(k) = \delta_\mu^\nu. \quad (1.30)$$

Para que $D^{\sigma\nu}$ satisfaça a equação anterior, ele deverá ser da forma

$$D^{\sigma\nu}(k) = A(k^2)g^{\sigma\nu} + B(k^2)k^\sigma k^\nu + C(k^2)\epsilon^{\sigma\nu\alpha}k_\alpha. \quad (1.31)$$

Substituindo em (1.30) e identificando os termos dos dois lados da igualdade, encontramos os valores para A , B e C :

$$A(k^2) = \frac{1}{(k^2 - \mu^2)} \quad (1.32)$$

$$B(k^2) = \xi \frac{1}{k^4} - \frac{1}{k^2(k^2 - \mu^2)} \quad (1.33)$$

$$C(k^2) = \frac{-i\mu}{k^2(k^2 - \mu^2)} \quad (1.34)$$

e o propagador no espaço de momentos será então dado por

$$D^{\mu\nu}(k) = \frac{k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu - i\mu \epsilon^{\mu\nu\rho} k_\rho}{k^2(k^2 - \mu^2)} + \frac{\xi}{k^4} k^\mu k^\nu \quad (1.35)$$

que possui um pólo em $k^2 = \mu^2$, mostrando novamente que o campo de *gauge* adquire uma massa μ . Vale lembrar que essa massa gerada pelo termo de Chern-Simons é completamente independente do mecanismo de Higgs de geração de massa, onde neste último a massa é gerada por campos de *gauge* através do valor esperado no vácuo de campos de Higgs, e esses valores são não-nulos. Também é possível tratar o mecanismo de Higgs no contexto da teoria de Chern-Simons [2], mas isso não será feito aqui.

1.3 Férmions

Também é importante estudar as características dos campos fermiônicos em $2 + 1$ dimensões, os quais apresentam aspectos interessantes. A primeira diferença é que o conjunto de matrizes irredutíveis de Dirac são matrizes 2×2 , ao invés de 4×4 . A lagrangeana de férmions acoplada a um campo de *gauge* de interação A_μ é:

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x) \quad (1.36)$$

e a equação de movimento é a equação de Dirac acoplada ao campo de *gauge* :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (1.37)$$

As matrizes gama de Dirac satisfazem as relações de anticomutação $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, onde $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$, e na representação de Dirac (existe mais uma representação inequivalente dessa) são dadas por:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \sigma^3 \\ \gamma^1 &= i\sigma^1 \\ \gamma^2 &= i\sigma^2 \end{aligned} \quad (1.38)$$

onde σ^i são as matrizes de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

e as matrizes gama também satisfazem as identidades

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} I - i\epsilon^{\mu\nu\rho} \gamma_\rho \quad (1.40)$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) = -2i\epsilon^{\mu\nu\rho} \quad (1.41)$$

Vale notar que no caso de 2 + 1 dimensões não existe a matriz γ^5 , que anticomuta com todas as outras matrizes, assim, não existe a noção de quiralidade neste caso. Outra diferença importante com relação ao caso em 3 + 1 dimensões é que naquele caso o traço de um número ímpar de matrizes gama é sempre nulo. Já aqui o traço de três matrizes, ou qualquer número ímpar maior que um, será uma combinação de símbolos totalmente antissimétricos $\epsilon^{\mu\nu\rho}$, e são estes termos que darão uma contribuição ao termo de Chern-Simons no caso de uma expansão perturbativa, contribuindo para a quebra de paridade no caso de uma teoria massiva. Isso se tornará mais claro adiante.

1.4 Simetrias CPT

As simetrias discretas de paridade \mathcal{P} , conjugação de carga \mathcal{C} e reversão temporal \mathcal{T} agem de maneira completamente diferente em 2 + 1 dimensões.

Nossa noção usual de transformação de paridade é uma reflexão $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ das coordenadas espaciais. Entretanto, em duas dimensões espaciais, tal transformação é uma rotação, com $\det(\Lambda) = (-1)^2 = 1$ e não $\det(\Lambda) = -1$, característico da transformação por paridade. Assim, a transformação de paridade deve ser tomada diferentemente, como sendo a reflexão de apenas uma coordenada espacial $(x, y) \rightarrow (-x, y)$.

Para que a lagrangeana de férmions (1.36) desacoplada do campo de *gauge* seja invariante por uma transformação de Lorentz, e conseqüentemente a equação de movimento (1.37) ter a mesma forma em qualquer referencial,

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0 \quad (1.42)$$

o campo espinorial $\psi(x)$ deve se transformar de acordo com

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \quad (1.43)$$

onde $S(\Lambda)$ é a lei de transformação para espinores pela matriz Λ , e a relação a ser satisfeita pelas matrizes de Dirac é:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu. \quad (1.44)$$

Para a transformação de paridade \mathcal{P} temos

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

e é fácil encontrar que a transformação que satisfaz (1.44) é dada por

$$S(\Lambda) = P = \gamma^1 \quad (1.46)$$

mostrando que o termo de massa na lagrangeana de férmions quebra a paridade

$$m\bar{\psi}'\psi' \rightarrow m(\gamma^1)^2\bar{\psi}\psi = -m\bar{\psi}\psi. \quad (1.47)$$

A fim de que a lagrangeana de Maxwell com fontes e as equações de Maxwell sejam invariantes por paridade, o campo de *gauge* deve se transformar de acordo com

$$\begin{aligned} A^1 &\rightarrow -A^1 \\ A^2 &\rightarrow A^2 \\ A^0 &\rightarrow A^0 \end{aligned} \quad (1.48)$$

o que significa que, enquanto o termo de Maxwell não muda por transformação de paridade, o termo de Chern-Simons muda de sinal

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \rightarrow -\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho. \quad (1.49)$$

A conjugação de carga \mathcal{C} converte a equação de movimento de Dirac de um elétron (1.37) na equação de um pósitron

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi_c = 0. \quad (1.50)$$

Para que isso seja satisfeito, $\psi_c \equiv C\gamma^0\psi^*$ e a matriz de conjugação de carga C deve satisfazer

$$(\gamma^\mu)^T = -C^{-1}\gamma^\mu C. \quad (1.51)$$

A transformação que tem esta propriedade é $C = \gamma^2$. Note então que o termo de massa de férmion é invariante sobre C , assim como o termo de Chern-Simons para o campo de *gauge*.

A reversão temporal \mathcal{T} é um operador anti-unitário que leva $x^0 \rightarrow -x^0$. Sua ação nos campos spinorial e de *gauge* é

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \gamma^2 \psi \\ \vec{A} &\rightarrow -\vec{A} \\ A^0 &\rightarrow A^0\end{aligned}\tag{1.52}$$

de onde podemos ver que o termo de massa de férmion e o termo de campo de *gauge* de Chern-Simons mudam por inversão temporal.

O fato de que o termo de massa da lagrangeana de férmions e o termo de Chern-Simons terem as mesmas propriedades de transformação por simetrias discretas \mathcal{PCT} será muito importante quando estudarmos correções radiativas da lagrangeana de férmions, no capítulo 3.

1.5 Teoria de Chern-Simons Não-Abeliana e Invariância de *Gauge* ‘Grande’

Embora a parte principal deste trabalho seja desenvolvido apenas para o caso abeliano em 2+1 dimensões, vamos brevemente apresentar aqui a teoria de Chern-Simons no caso não-abeliano, a fim de explicar o que vem a ser a invariância de *gauge* ‘grande’, conceito que só aparece neste caso. A densidade de lagrangeana \mathcal{L}_G da teoria de Maxwell-Chern-Simons no caso não-abeliano é dada por

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2g^2} \text{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\mu}{2g^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} \text{tr} \left(F_{\mu\nu} A_\alpha - \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\alpha \right),\tag{1.53}$$

onde estamos usando a representação

$$A_\mu = g T^a A_\mu^a\tag{1.54}$$

$$F_{\mu\nu} = g T^a F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]\tag{1.55}$$

para os campos, que empregam a representação matricial do grupo

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c,\tag{1.56}$$

onde T^a são os geradores do grupo e f^{abc} os coeficientes de estrutura constante. A constante de acoplamento é g e μ/g^2 é adimensional. As equações de movimento para os campos que seguem de (1.53) são covariantes,

$$\mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2} \epsilon^{\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0, \quad (1.57)$$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + [A_\mu, \] \quad (1.58)$$

e sabemos que no limite ($g = 0$) o campo adquire uma massa μ . O campo dual

$$\tilde{F}^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (1.59)$$

satisfaz a identidade de Bianchi

$$\mathcal{D}_\mu \tilde{F}^\mu = 0. \quad (1.60)$$

A equação

$$\mathcal{D}_\alpha \tilde{F}^\beta - \mathcal{D}_\beta \tilde{F}^\alpha - \mu \tilde{F}_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.61)$$

é a versão dual de (1.22) e o análogo não-abeliano de (1.23) é

$$(\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}^\alpha + \mu^2) \tilde{F}_\mu = 0. \quad (1.62)$$

A lagrangeana (1.53) não é invariante por transformações de *gauge*. Considere uma transformação finita

$$A_\mu \rightarrow U^{-1} A_\mu U + U^{-1} \partial_\mu U. \quad (1.63)$$

A mudança na ação devido a esta transformação será

$$\begin{aligned} \int d^3x \mathcal{L}_G \rightarrow & \int d^3x \mathcal{L}_G + \frac{\mu}{g^2} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\alpha} \text{tr}[\partial_\mu (A_\nu \partial_\alpha U U^{-1})] \\ & + \frac{\mu}{3g^2} \int d^3x \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \text{tr}[\partial_\alpha U U^{-1} \partial_\beta U U^{-1} \partial_\gamma U U^{-1}]. \end{aligned} \quad (1.64)$$

O segundo termo do lado direito da equação acima é o análogo não-abeliano da equação (1.9). Se considerarmos transformações $U(x)$ que tendem à identidade no infinito, este termo se anula quando transformado numa integral de superfície. Para o último termo, no entanto, temos de considerar uma forma explícita para

U . Escolhendo o grupo de *gauge* como sendo o grupo $SU(2)$ por exemplo, uma parametrização conveniente para U é

$$U(x) = e^{i\sigma^a \theta^a(x)}. \quad (1.65)$$

Disto segue que a ação muda por

$$\int d^3x \mathcal{L}_G \rightarrow \int d^3x \mathcal{L}_G + \mu \frac{8\pi^2}{g^2} w(U), \quad (1.66)$$

onde

$$w(U) = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \text{tr}[\partial_\alpha U U^{-1} \partial_\beta U U^{-1} \partial_\gamma U U^{-1}] \quad (1.67)$$

será uma função do parâmetro θ e suas derivadas. O coeficiente $w(U)$ é conhecido como *winding number* ou número de ‘laços’ da transformação de *gauge* U . Assim, a integral de superfície não é nula, mas toma valores inteiros que caracteriza a classe de equivalência a que pertence U , em outras palavras, é dependente da topologia do espaço-tempo.

Concluimos assim que a ação não é invariante de *gauge*, mas muda por uma quantidade $\mu(8\pi^2/g^2)w(U)$. Mas sabemos também que a quantidade que deve mesmo ser invariante de *gauge* é a exponencial da ação $e^{iS} = e^{i \int d^3x \mathcal{L}}$, e isso permite que a ação possa diferir ainda por um fator inteiro múltiplo de 2π , ou seja $S \rightarrow S + 2\pi n$. Desta maneira, a exponencial da ação será invariante de *gauge* se for satisfeita a condição de quantização

$$4\pi \frac{\mu}{g^2} = n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.68)$$

e dizemos que a teoria é invariante por transformações de *gauge* ‘grande’. Note que o caso $n = 0$ anula a contribuição vinda do termo excedente em (1.66), e isso corresponde a uma teoria abeliana. Assim, quando $n = 0$, dizemos que a teoria é invariante por transformações de *gauge* ‘pequena’, mas se ela permitir n diferente de zero, é uma teoria com invariância de *gauge* ‘grande’. Portanto a invariância de *gauge* está relacionada com a estrutura topológica da teoria.

Capítulo 2

Teoria de Campos a Temperatura Finita

Desde a década de 50 tem havido grande interesse por fenômenos da teoria quântica de campos a temperatura finita [5-8]. O formalismo para estudar tais teorias foram desenvolvidos e muitos avanços foram alcançados por Matsubara. Entretanto, com o passar dos anos, métodos alternativos de se trabalhar com os cálculos em teorias de campos a temperatura finita foram desenvolvidos.

O formalismo de Matsubara ou formalismo do tempo imaginário é o mais conhecido, mas existem outros, como o formalismo do tempo real, o formalismo das integrais de trajetória e a dinâmica de campos térmicos. Para determinados tipos de problemas um ou outro formalismo pode ser mais conveniente. Vamos aqui dar uma breve descrição do formalismo de Matsubara, a fim de justificarmos as chamadas “frequências de Matsubara” e em seguida, com o formalismo de integrais de trajetória, vamos calcular a função de partição no caso de um campo escalar e de um campo fermiônico, mostrando as diferenças com relação ao tratamento a temperatura nula. Neste capítulo estaremos tratando o caso em $d + 1$ dimensões, sendo trivial a aplicação ao caso de $2 + 1$ dimensões.

2.1 Formalismo de Matsubara

Vamos explicitar qualitativamente as idéias por trás do formalismo de Matsubara [5], a fim de darmos uma explicação lógica às conhecidas frequências de Matsubara, muito importantes no estudo de teorias de campos a temperatura finita.

Um dos objetos mais importantes em teoria quântica de campos é a função de Green que está diretamente relacionada ao propagador da teoria. A função de Green representa a evolução de um sistema qualquer da coordenada espaço-temporal x a uma posterior x' . Cálculos de diagramas de Feynman são feitos utilizando-se essas funções, então, para tratarmos perturbativamente qualquer processo à temperatura finita, vamos nos deparar novamente com funções de Green. Por exemplo, na teoria de Klein-Gordon a temperatura nula, a função de Green $G(x)$ deve satisfazer a equação

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)G(x) = -\delta^4(x), \quad (2.1)$$

e será dada por

$$G(x) = \int \frac{d^{(d+1)}k}{(2\pi)^{(d+1)}} e^{-ik \cdot x} G(k),$$

$$G(k) = \frac{1}{k^2 + m^2}. \quad (2.2)$$

No formalismo de Matsubara devemos fazer uma rotação do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano, que corresponde a tomar o tempo em um eixo imaginário

$$t \rightarrow -i\tau$$

e agora qualquer integração no eixo temporal deve ser feita até um limite finito β , $0 \leq \tau \leq \beta$, e a identificação $\beta = \frac{1}{T}$ introduz a dependência com a temperatura do modelo que estamos tratando. Isso leva a uma ligeira modificação na função de Green, $G(x) \rightarrow -\mathcal{G}(\tau, \vec{x})$, que agora deve satisfazer

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \nabla^2 - m^2 \right) \mathcal{G}(\tau, \vec{x}) = -\delta(\tau) \delta^d(\vec{x}). \quad (2.3)$$

Vamos ver o que acontece com a função de Green. Podemos adiantar que a parte espacial da função de Green permanece igual, a única mudança ocorrendo na parte temporal, que agora representa a temperatura e portanto está definida em um intervalo finito. Isso leva ao fato de que a transformada de Fourier da parte temporal só pode envolver frequências discretas, ou seja,

$$\mathcal{G}(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \mathcal{G}(\omega_n)$$

$$\mathcal{G}(\omega_n) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} \mathcal{G}(\tau) \quad (2.4)$$

com $\omega_n = \frac{n\pi}{\beta}$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Sabemos que a função de Green de dois pontos depende somente da diferença $\tau - \tau'$ e cada uma das variáveis satisfaz $0 \leq \tau, \tau' \leq \beta$, de maneira que o intervalo onde está definida a função é $-\beta \leq \tau - \tau' \leq \beta$. Além disso, pode-se mostrar com as propriedades de ciclicidade do traço e da definição de ordenamento temporal que as funções de Green para bósons ou férmions devem satisfazer a propriedade

$$\mathcal{G}(\tau) = \pm \mathcal{G}(\tau + \beta), \quad \tau < 0 \quad (2.5)$$

onde o sinal positivo se aplica a bósons e o negativo a férmions. Isso pode ser melhor entendido lembrando que as funções de onda para bósons são simétricas enquanto para férmions são anti-simétricas nas suas variáveis. Levando isso em conta, voltamos à equação (2.4) e notamos que embora todos os modos inteiros sejam permitidos na expansão de Fourier, somente modos inteiros 'pares' contribuem para as funções de Green bosônicas enquanto somente modos 'ímpares' contribuem para as funções de Green fermiônicas, isso devido à periodicidade ou anti-periodicidade das condições satisfeitas por \mathcal{G} em (2.5). Para vermos melhor isso, considere a segunda equação (2.4). Usando a equação (2.5) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\omega_n) &= \frac{1}{2} \int_{-\beta}^0 d\tau e^{i\omega_n \tau} \mathcal{G}(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} \mathcal{G}(\tau) \\ &= \pm \frac{1}{2} \int_{-\beta}^0 d\tau e^{i\omega_n \tau} \mathcal{G}(\tau + \beta) + \frac{1}{2} \int_0^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} \mathcal{G}(\tau) \\ &= \pm \frac{1}{2} \int_{-\beta}^0 d\tau e^{i\omega_n(\tau - \beta)} \mathcal{G}(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} \mathcal{G}(\tau) \\ &= \frac{1}{2} (1 \pm e^{-i\omega_n \beta}) \int_0^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} \mathcal{G}(\tau) \\ &= \frac{1}{2} (1 \pm (-1)^n) \int_0^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} \mathcal{G}(\tau). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Isso mostra imediatamente que, para bósons (sinal positivo), $\mathcal{G}(\omega_n)$ se anula para n ímpar, enquanto que para férmions (sinal negativo) $\mathcal{G}(\omega_n)$ se anula para n par. Assim concluímos que a transformada de Fourier da variável τ no caso da função

de dois pontos nos dá

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\tau) &= \frac{1}{\beta} \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \mathcal{G}(\omega_n) \\ \mathcal{G}(\omega_n) &= \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \mathcal{G}(\tau)\end{aligned}\quad (2.7)$$

onde

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{2n\pi}{\beta} & \text{bósons} \\ \frac{(2n+1)\pi}{\beta} & \text{férmions} \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.8)$$

Estas são as chamadas frequências de Matsubara. Com isto, podemos finalmente escrever as funções de Green

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\tau, \vec{x}) &= \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} \mathcal{G}(\omega_n, \vec{k}) \\ \mathcal{G}(\omega_n, \vec{k}) &= \int_0^\beta d\tau \int d^d x e^{ik \cdot x} \mathcal{G}(\tau, \vec{x}),\end{aligned}\quad (2.9)$$

e no espaço de momentos a função de Green para este caso é

$$\mathcal{G}(\omega_n, \vec{k}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2}. \quad (2.10)$$

Concluimos então que, se quisermos calcular quantidades a temperatura finita, devemos tratar o tempo como um parâmetro imaginário, de maneira que a teoria se torna uma teoria Euclidiana. Cálculos perturbativos podem então serem feitos analogamente ao caso de temperatura nula, a única diferença sendo que os valores de energia são agora quantizados, e a integração na parte correspondente a energia deve ser trocada por uma soma discreta em ω_n , de acordo com (2.8),

$$\int \frac{d^{(d+1)} k_E}{(2\pi)^{(d+1)}} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \quad (2.11)$$

conforme a teoria seja para bósons ou férmions.

2.2 Integrais de Trajetória e a Função de Partição para o Campo Escalar

Nossa discussão da teoria de campos a temperatura finita será feita no contexto das propriedades termodinâmicas no equilíbrio, ou seja, trataremos sistemas em

equilíbrio, não havendo assim qualquer dependência temporal ou dinâmica do sistema. Um dos objetos fundamentais da termodinâmica estatística de sistemas em equilíbrio a uma temperatura T é a função de partição Z do sistema, definida por

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} \quad (2.12)$$

onde \hat{H} é o operador Hamiltoniano e $\beta = (k_B T)^{-1} = T^{-1}$ em unidades onde a constante de Boltzmann é tomada igual a 1. O traço na equação (2.12) significa soma dos elementos diagonais de matriz da exponencial entre todos os estados independentes do sistema. Tendo sido calculada a função de partição Z , a energia livre de Helmholtz F é dada por

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta F} \quad (2.13)$$

e assim quantidades termodinâmicas como pressão P e entropia S podem ser calculadas usando a relação da energia livre com a energia interna E :

$$F = E - TS. \quad (2.14)$$

Em geral, a função de partição de um sistema estatístico quântico não pode ser calculado exatamente. Podemos ver de (2.12) que uma expansão perturbativa em potências de uma constante de acoplamento não se aplica, já que temos uma soma sobre todos os valores esperados em todos os possíveis estados no espaço de Hilbert e existe um número infinito de tais estados numa teoria quântica de campos.

Vamos tratar primeiro de campos escalares ϕ , e para contornar este problema, vamos relembrar que a amplitude de transição numa teoria quântica de campos a temperatura zero tem uma representação funcional dada por

$$\begin{aligned} \langle \phi_2(\vec{x}), t_2 | \phi_1(\vec{x}), t_1 \rangle &= \langle \phi_2(\vec{x}) | e^{-i\hat{H}(t_2-t_1)} | \phi_1(\vec{x}) \rangle \\ &= N \int D\phi \int D\pi \exp i \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left(\pi \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right) \\ &= N \int D\phi \int D\pi e^{iS} \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde $\pi \equiv \partial \mathcal{L} / \partial (\partial_0 \phi)$, N é uma constante de normalização irrelevante e o operador de campo $\hat{\phi}(t, \vec{x})$ na representação de Heisenberg está relacionado ao auto-estado $|\hat{\phi}(\vec{x}), t\rangle$ por

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) |\phi(\vec{x}), t\rangle = \phi(\vec{x}) |\phi(\vec{x}), t\rangle. \quad (2.16)$$

A evolução de um auto-estado é dada por $|\phi(\vec{x}), t\rangle = e^{i\hat{H}t}|\phi(\vec{x})\rangle$ e assim a função de partição (2.12) pode ser escrita explicitamente como uma somatória sobre os auto-estados $\phi(\vec{x})$,

$$Z = \sum_{\phi(\vec{x})} \langle \phi(\vec{x}) | e^{-\beta\hat{H}} | \phi(\vec{x}) \rangle, \quad (2.17)$$

de maneira que a quantidade que estamos calculando em (2.15) é exatamente a função de partição do sistema se fizermos a troca de variáveis

$$\tau = it = ix^0 \quad (2.18)$$

e tomarmos o limite de integração como sendo

$$t_1 = 0 \quad t_2 = -i\beta. \quad (2.19)$$

Assim obtemos

$$\begin{aligned} Z &= \langle \phi_2(\vec{x}) | e^{-\beta\hat{H}} | \phi_1(\vec{x}) \rangle \\ &= N(\beta) \int D\phi \int D\pi \exp \int_0^\beta d\tau \int d^d x \left(i\pi \frac{\partial\phi}{\partial\tau} - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde agora ϕ e π são funções de τ e \vec{x} , e a integral de trajetória é sobre todas as funções $\phi(\tau, \vec{x})$ e $\pi(\tau, \vec{x})$ satisfazendo as condições de contorno

$$\phi(\beta, \vec{x}) = \phi_2(\vec{x}) \quad \phi(0, \vec{x}) = \phi_1(\vec{x}). \quad (2.21)$$

Aqui percebemos que a mudança de variáveis (2.18-2.19) é o principal passo que relaciona a teoria de campos com a mecânica estatística. Não existe mais dependência temporal, o que temos é a função de partição, um objeto termodinâmico sem dependência temporal.

Para finalizar, vamos tomar

$$|\phi_2(\vec{x})\rangle = |\phi_1(\vec{x})\rangle = |\phi(\vec{x})\rangle \quad (2.22)$$

na equação (2.20) de maneira que temos finalmente

$$\begin{aligned} Z &= N(\beta) \int_{\text{period}} D\phi \int D\pi \exp \int_0^\beta d\tau \int d^d x \left(i\pi \frac{\partial\phi}{\partial\tau} - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right) \\ &= N(\beta) \int_{\text{period}} D\phi \exp \int_0^\beta d\tau \int d^d x \mathcal{L}(\phi, \bar{\partial}_\mu \phi) \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde $\bar{\partial}_\mu \phi \equiv (i\partial\phi/\partial\tau, \nabla\phi)$ e a última igualdade só se obtém quando a Lagrangeana e a Hamiltoniana são do tipo

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + f(\phi, \nabla\phi) \quad (2.24)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 - f(\phi, \nabla\phi) \quad (2.25)$$

e as condições de contorno (2.21) junto com (2.22) significam que a integração é restrita a funções $\phi(\tau, \vec{x})$ que são periódicas em τ com período β ,

$$\phi(\tau = 0, \vec{x}) = \phi(\tau = \beta, \vec{x}) \quad (2.26)$$

e a soma sobre todos os auto-estados significa que todas as funções devem ser integradas.

Para uma teoria escalar livre, com lagrangeana dada por

$$\mathcal{L}(\phi, \bar{\partial}_\mu \phi) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad (2.27)$$

teremos para a função de partição

$$Z = N(\beta) \int_{\text{period}} D\phi \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau' \int d^3x' \int_0^\beta d\tau \int d^d x \phi(\vec{x}') A(\vec{x}', \vec{x}) \phi(\vec{x})\right) \quad (2.28)$$

onde

$$A(\vec{x}', \vec{x}) = (-\bar{\partial}'_\mu \bar{\partial}^\mu + m^2) \delta(\vec{x}' - \vec{x}) \quad (2.29)$$

e

$$\delta(\vec{x}' - \vec{x}) \equiv \delta(\tau' - \tau) \delta(\vec{x}' - \vec{x}) \quad \bar{x} \equiv (-i\tau, \vec{x}). \quad (2.30)$$

Desta maneira, do que já conhecemos da teoria de campos e integração gaussiana no formalismo de integrais de trajetória [9], a função de partição pode então ser escrita como

$$Z = N(\beta) \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln A\right) \quad (2.31)$$

onde o operador traço deve ser tomado de maneira apropriada, obedecendo a condição de periodicidade (2.26). Com esta condição, podemos fazer uma expansão de Fourier em ϕ ,

$$\phi(\bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}} \tilde{\phi}(\bar{p}) \quad (2.32)$$

com $\bar{p} \equiv (i\omega_n, \vec{p})$ e ω_n é a frequência de Matsubara para bósons,

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}, \quad (2.33)$$

com n inteiro. Da mesma maneira, escrevemos

$$\delta(\bar{x}' - \bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-i\bar{p}\cdot(\bar{x}' - \bar{x})} \quad (2.34)$$

$$A(\bar{x}', \bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-i\bar{p}\cdot(\bar{x}' - \bar{x})} (-\bar{p}^2 + m^2) \quad (2.35)$$

e fazendo $\bar{x}' = \bar{x}$ e integrando sobre todos os valores de \bar{x} ,

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln A &= \int_0^\beta d\tau \int d^d x \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln(-\bar{p}^2 + m^2) \\ &= \int d^d x \sum_n \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2). \end{aligned} \quad (2.36)$$

A soma sobre as frequências pode ser feita com a fórmula (A.9) do apêndice, resultando finalmente

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln A &= \int d^d x \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left\{ \beta \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} + 2 \ln[1 - \exp(-\beta \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})] \right. \\ &\quad \left. + (\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}) + \text{constantes independentes de } x \right\}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Voltando à função de partição (2.31), podemos escrever

$$-\beta F = \ln Z = - \int d^d x \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left(\frac{\beta}{2} \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} + \ln[1 - \exp(-\beta \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})] \right). \quad (2.38)$$

Quando a massa do campo escalar é desprezível comparada com a temperatura, a integral (2.38) pode ser facilmente calculada, e no caso $d = 3$ encontramos

para a densidade de energia livre \mathcal{F} (a menos de uma constante independente da temperatura que representa a energia de ponto zero do vácuo)

$$\mathcal{F} = -\frac{\pi^2 T^4}{90} \quad T \gg m \quad (2.39)$$

onde foi escrito $F = \int d^d x \mathcal{F}$, e para a pressão e densidade de entropia \mathcal{S}

$$P = -\left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_T = \frac{\pi^2 T^4}{90} \quad (2.40)$$

$$\mathcal{S} = -\left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_V = \frac{2\pi^2 T^3}{45} \quad (2.41)$$

onde $S = \int d^d x \mathcal{S}$.

2.3 Função de Partição para Férmions

Para aplicarmos nosso estudo ao caso de férmions devemos tomar alguns cuidados. Devemos lembrar que os observáveis físicos sempre envolvem potências pares dos campos de Dirac ψ , já que estes mudam de sinal por uma rotação de 2π . Assim, os auto-estados $|\pm \psi(\vec{x})\rangle$ do operador $\hat{\psi}(\vec{x})$ correspondem ao mesmo valor dos observáveis físicos e descrevem o mesmo estado. Para evitar problemas e sermos consistentes com a estatística de Fermi, vamos partir então da expressão

$$Z = \sum_{\psi(\vec{x})} \langle \psi(\vec{x}) | e^{-\beta \hat{H}} | -\psi(\vec{x}) \rangle, \quad (2.42)$$

e o análogo da expressão (2.23) para o caso de férmions é

$$Z = N(\beta) \int_{\text{antiperiod}} D\bar{\psi} D\psi \exp \int_0^\beta d\tau \int d^d x \mathcal{L}(\psi) \quad (2.43)$$

onde em \mathcal{L} o campo ψ é entendido como sendo função de τ e \vec{x} , e τ anti-periódico em $0 < \tau < \beta$,

$$\psi(\tau = 0, \vec{x}) = -\psi(\tau = \beta, \vec{x}) \quad (2.44)$$

e uma expansão de Fourier apropriada para $\psi(\vec{x})$ é

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \tilde{\psi}(\vec{p}) \quad (2.45)$$

onde as frequências de Matsubara para férmions são

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, \quad (2.46)$$

com n inteiro.

Para o caso de um campo livre, a lagrangeana apropriada é

$$\mathcal{L}(\psi) = \bar{\psi}(\bar{x})(i\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu - m)\psi(\bar{x}) \quad (2.47)$$

e assim temos

$$Z = N(\beta) \int_{\text{antiperiod}} D\bar{\psi} D\psi \exp\left(-\int d\bar{x}' \int d\bar{x} \bar{\psi}(\bar{x}') D(\bar{x}', \bar{x}) \psi(\bar{x})\right) \quad (2.48)$$

com

$$D(\bar{x}', \bar{x}) = (i\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu + m)\delta(\bar{x}' - \bar{x}). \quad (2.49)$$

Podemos então escrever

$$Z = N(\beta) \exp(\text{Tr ln D}) \quad (2.50)$$

e o traço pode ser calculado similarmente ao caso do campo escalar, através de uma transformada de Fourier, com a diferença que agora as frequências são dadas por (2.46) e tem de ser tomado também o traço sobre os índices de Dirac. Escrevendo

$$D(\bar{x}', \bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-i\bar{p} \cdot (\bar{x}' - \bar{x})} (-\bar{\not{p}} + m) \quad (2.51)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \text{Tr ln D} &= \int_0^\beta d\tau \int d^d x \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} 2 \ln(m^2 - \bar{p}^2) \\ &= 2 \int d^d x \sum_n \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln(\omega_n^2 + \bar{p}^2 + m^2). \end{aligned} \quad (2.52)$$

A soma sobre as frequências pode ser feita com a fórmula (A.9) do apêndice, resultando finalmente

$$\begin{aligned} \text{Tr ln D} &= 2 \int d^d x \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left\{ \beta \sqrt{\bar{p}^2 + m^2} + 2 \ln[1 + \exp(-\beta \sqrt{\bar{p}^2 + m^2})] \right. \\ &\quad \left. + (\sqrt{\bar{p}^2 + m^2}) + \text{constantes independentes de } x \right\}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Voltando à função de partição (2.50), podemos escrever

$$-\beta F = \ln Z = 2 \int d^d x \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left(\beta \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} + 2 \ln[1 + \exp(-\beta \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})] \right). \quad (2.54)$$

Para o caso $d = 3$, quando a massa do campo fermiônico é desprezível comparada com a temperatura encontramos para densidade de energia livre \mathcal{F} (a menos de uma constante independente da temperatura que representa a energia de ponto zero do vácuo)

$$\mathcal{F} = -\frac{7\pi^2 T^4}{180} \quad T \gg m \quad (2.55)$$

e para a pressão e densidade de entropia

$$P = \frac{7\pi^2 T^4}{180} \quad (2.56)$$

$$\mathcal{S} = \frac{7\pi^2 T^3}{45}. \quad (2.57)$$

Capítulo 3

Expansão Derivativa e Violação da Paridade da Ação Efetiva da QED a Temperatura Finita

Aqui começa a parte mais importante de nosso trabalho, concluída no capítulo seguinte. Muitos estudos têm sido feitos na tentativa de se entender melhor a invariância de *gauge* e a quebra de paridade da ação efetiva de Chern-Simons a temperatura finita [10-15]. Dando continuidade a esses estudos, conseguimos avançar um pouco mais no entendimento das peculiaridades que aparecem quando se estuda um termo de Chern-Simons induzido radiativamente de uma lagrangeana de férmions a temperatura finita, e os resultados foram publicados em [16].

Os cálculos foram feitos com um campo de *gauge* ainda particular, mas que generaliza o chamado *gauge* estático, e muitas conclusões podem ser tiradas daí. A parte dominante da ação efetiva que viola a paridade pode ser calculada exatamente no limite estático. O que fizemos foi considerar os termos seguintes, de ordens mais altas, utilizando o método de expansões derivativas para um campo de *gauge* mais geral.

Na primeira seção deste capítulo vamos rederivar a parte dominante da ação efetiva que viola paridade no contexto da expansão derivativa, no limite estático, mostrando que ela é linear em B , o campo magnético. Também mostraremos que não há contribuições de ordens mais altas que a linear em \vec{A} (ou B) para a parte que viola a paridade, de maneira que a ação efetiva que viola paridade é completamente determinada no limite estático. Na segunda seção vamos considerar termos de

ordens superiores ao dominante, generalizando o limite estático, e calcular a parte da ação efetiva que viola a paridade. Aqui teremos contribuições não lineares em \vec{A} , embora nos ateremos apenas aos termos lineares por simplicidade. Os cálculos se tornam cada vez mais complicados, mas algumas características interessantes podem ser percebidas.

3.1 Expansão Derivativa em Ordens Dominantes

Vamos considerar um férmion de massa $M > 0$ interagindo com um campo de gauge $A_\mu(x)$. A densidade de lagrangeana será dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)[\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - M]\psi(x). \quad (3.1)$$

A ação efetiva que se obtém desta lagrangeana é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{ef}[A, M] &= -i \ln \det[\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - M] \\ &= -i \text{Tr} \ln[\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - M], \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde “Tr” significa o traço sobre os índices de Dirac e integração numa base completa de estados. A ação efetiva à temperatura finita não é calculável exatamente no caso geral, mas apenas em alguns limites. Aqui usaremos o chamado limite estático, que corresponde a tomar a componente temporal do momento externo k nula, $k_0 = 0$, e $\vec{k} \rightarrow 0$, que é consistente com assumir uma forma específica para campo de *gauge* A_μ dado por (1.14):

$$A_0 = A_0(t), \quad \vec{A} = \vec{A}(\vec{x}). \quad (3.3)$$

Isto significa que mesmo que o campo de *gauge* (3.3) escolhido não seja o que chamamos de *gauge* estático, cálculos perturbativos [11] mostram que o comportamento das ordens dominantes das amplitudes que violam a paridade, no limite estático, correspondem a esta escolha do campo de *gauge*.

Por uma transformação de *gauge* do tipo:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Omega, \quad \Omega(t) = \left(-\int_0^t + \frac{t}{\beta} \int_0^\beta \right) dt' A_0(t') \quad (3.4)$$

o campo de *gauge* (3.3) se transforma como

$$\begin{aligned}
A_0(t) &\rightarrow A_0(t) + \partial_0 \Omega \\
&= A_0(t) + \frac{\partial}{\partial t} \left(- \int_0^t A_0(t') dt' + \frac{t}{\beta} \int_0^\beta A_0(t') dt' \right) \\
&= A_0(t) - A_0(t) + \frac{1}{\beta} \int_0^\beta A_0(t') dt' \\
&= \frac{1}{\beta} \int_0^\beta A_0(t') dt' \\
&= \frac{a}{\beta}, \quad a = \int_0^\beta A_0(t') dt'
\end{aligned}$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} = \vec{A}(\vec{x}) \quad (3.5)$$

de maneira que é possível reduzir efetivamente A_0 a um campo a que é independente do tempo.

Vamos utilizar o formalismo do tempo imaginário para calcular a ação efetiva, onde não há distinção entre componentes contravariantes e covariantes, $c^\mu \equiv c_\mu$. A temperatura finita, a energia toma valores discretos. Fazendo a mudança $p_\mu \rightarrow -i\partial_\mu$, onde $p_\mu = (\omega_n, \vec{p})$ e separando a componente temporal, a ação efetiva (3.2) no espaço Euclidiano fica:

$$S_{ef} = - \sum_n \text{Tr} \ln(\not{p} + \gamma_0 \tilde{\omega}_n + M + e\mathcal{A}), \quad (3.6)$$

onde $\not{p} = \vec{\gamma} \cdot \vec{p}$ e $\mathcal{A} = \vec{\gamma} \cdot \vec{A}$. Também temos

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n + \frac{ea}{\beta} = \frac{(2n+1)\pi}{\beta} + \frac{ea}{\beta}, \quad (3.7)$$

onde β representa o inverso da temperatura em unidades onde a constante de Boltzmann vale um. Os momentos são operadores que não comutam com quantidades dependentes das coordenadas. Estamos trabalhando na seguinte representação das matrizes gama no espaço Euclidiano:

$$\gamma_0 = i\sigma_3, \quad \gamma_1 = i\sigma_1, \quad \gamma_2 = i\sigma_2, \quad (3.8)$$

que satisfazem a propriedade

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = -\delta_{\mu\nu} I - \epsilon_{\mu\nu\rho} \gamma_\rho. \quad (3.9)$$

Vamos definir

$$K_n = \frac{1}{\not{p} + \gamma_0 \tilde{\omega}_n + M}. \quad (3.10)$$

Desta forma, a ação efetiva pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{ef}[A, M] &= - \sum_n \text{Tr} \ln(K_n^{-1} + eA) \\ &= - \sum_n \text{Tr} \ln[K_n^{-1}(1 + eK_n A)] \\ &= - \sum_n \text{Tr} \ln K_n^{-1} - \sum_n \text{Tr} \ln(1 + eK_n A). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Levando em conta que o primeiro termo está associado à teoria livre, sem interação com o campo de *gauge* A_μ , ele não contribui para a parte que viola a paridade. A ação efetiva que nos interessa é dada finalmente por, usando a expansão de \ln dada em (A.15):

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{ef}[A, M] &= - \sum_n \text{Tr} \ln(1 + eK_n A) \\ &= - \sum_n \text{Tr} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} (eK_n A)^{j+1}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Esta expansão mostra que a ação efetiva contém todas as potências de \vec{A} . No que segue, vamos mostrar que os termos quadráticos e de ordens mais altas em \vec{A} não contribuem para a parte que viola a paridade na ação efetiva.

Uma parametrização usual é definir a quantidade

$$\gamma_0 \tilde{\omega}_n + M = \rho_n e^{\gamma_0 \phi_n}, \quad (3.13)$$

onde

$$\rho_n = \sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + M^2}, \quad \phi_n = \tan^{-1} \frac{\tilde{\omega}_n}{M}, \quad (3.14)$$

de maneira que podemos escrever

$$\begin{aligned}
K_n &= \frac{1}{\not{p} + \gamma_0 \tilde{\omega}_n + M} \\
&= \frac{1}{\not{p} + \rho_n e^{\gamma_0 \phi_n}} \\
&= \frac{1}{e^{\gamma_0 \phi_n/2} (e^{-\gamma_0 \phi_n/2} \not{p} e^{-\gamma_0 \phi_n/2} + \rho_n) e^{\gamma_0 \phi_n/2}} \\
&= e^{-\gamma_0 \phi_n/2} \frac{1}{\not{p} + \rho_n} e^{-\gamma_0 \phi_n/2} \\
&= e^{-\gamma_0 \phi_n/2} K_n^{(0)} e^{-\gamma_0 \phi_n/2}, \quad K_n^{(0)} = \frac{1}{\not{p} + \rho_n}. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

onde na quarta linha foi utilizada a igualdade

$$\begin{aligned}
e^{-\gamma_0 \phi_n/2} \not{p} e^{-\gamma_0 \phi_n/2} &= (1 - \frac{\gamma_0 \phi_n}{2} + \frac{\gamma_0^2 \phi_n^2}{4 \cdot 2} + \dots) \not{p} (1 - \frac{\gamma_0 \phi_n}{2} + \frac{\gamma_0^2 \phi_n^2}{4 \cdot 2} + \dots) \\
&= \not{p} - \frac{\gamma_0 \phi_n}{2} \not{p} - \not{p} \frac{\gamma_0 \phi_n}{2} + \frac{\gamma_0 \phi_n}{2} \not{p} \frac{\gamma_0 \phi_n}{2} + \frac{\gamma_0^2 \phi_n^2}{4 \cdot 2} \not{p} + \not{p} \frac{\gamma_0^2 \phi_n^2}{4 \cdot 2} + \dots \\
&= \not{p} \tag{3.16}
\end{aligned}$$

pois todos os termos se cancelam devido a anticomutação de γ_0 e \not{p} , só restando o primeiro termo. Vale lembrar aqui que p comuta com ϕ e ρ , pois estes não dependem das coordenadas.

Com esta parametrização, os termos da ação efetiva que contenham potências em ordem mais alta em \vec{A} , que será indicado pelo índice sobrescrito (> 1), podem ser escritos como

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{ef}^{(>1)}[A, M] &= - \sum_n \text{Tr} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} (e K_n A)^{j+1} \\
&= - \sum_n \text{Tr} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} (e^{-\gamma_0 \phi_n/2} e K_n^{(0)} e^{-\gamma_0 \phi_n/2} A)^{j+1} \\
&= - \sum_n \text{Tr} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} (e K_n^{(0)} A)^{j+1}, \tag{3.17}
\end{aligned}$$

onde os fatores de fase intermediários se cancelam por causa da álgebra das matrizes gama e os fatores de fase inicial e final cancelam-se por causa da ciclicidade do traço ($\text{Tr}[ABC] = \text{Tr}[CAB]$).

Vamos verificar isto para o caso $j = 1$. Temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{ef}^{PV(2)}[A, M] &= - \sum_n \text{Tr} \left[\frac{(-1)}{2} (e^{-\gamma_0 \phi_n / 2} e K_n^{(0)} e^{-\gamma_0 \phi_n / 2} A)^2 \right] \\
&= \sum_n \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(e^{-\gamma_0 \phi_n / 2} e K_n^{(0)} e^{-\gamma_0 \phi_n / 2} A) (e^{-\gamma_0 \phi_n / 2} e K_n^{(0)} e^{-\gamma_0 \phi_n / 2} A) \right] \\
&= e^2 \sum_n \frac{1}{2} \text{Tr} \left[e^{-\gamma_0 \phi_n / 2} K_n^{(0)} e^{-\gamma_0 \phi_n / 2} A e^{-\gamma_0 \phi_n / 2} K_n^{(0)} e^{-\gamma_0 \phi_n / 2} A \right] \\
&= e^2 \sum_n \frac{1}{2} \text{Tr} \left[e^{-\gamma_0 \phi_n / 2} K_n^{(0)} e^{-\gamma_0 \phi_n / 2} e^{\gamma_0 \phi_n / 2} A K_n^{(0)} A e^{\gamma_0 \phi_n / 2} \right] \\
&= e^2 \sum_n \frac{1}{2} \text{Tr} \left[e^{-\gamma_0 \phi_n / 2} K_n^{(0)} A K_n^{(0)} A e^{\gamma_0 \phi_n / 2} \right] \\
&= e^2 \sum_n \frac{1}{2} \text{Tr} \left[K_n^{(0)} A K_n^{(0)} A \right] \\
&= e^2 \sum_n \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{1}{\not{p} + \rho_n} A \frac{1}{\not{p} + \rho_n} A \right) \tag{3.18}
\end{aligned}$$

o mesmo sendo válido para os termos com valores de j superiores. Isso ilustra o uso da parametrização (3.13) para os termos de ordem superiores em \vec{A} na ação efetiva.

Podemos agora mostrar que a parte da ação efetiva que viola paridade (PV) para termos em ordens mais altas é nulo. Vale lembrar da equação (1.47) que o termo de massa na lagrangeana é o responsável pela quebra de paridade. Desta maneira, a parte que viola a paridade na ação efetiva, ou o termo ímpar na massa m , pode ser obtido diretamente de

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{ef}^{PV(>1)}[A, M] &= \frac{1}{2} (\mathcal{S}_{ef}^{(>1)}[A, M] - \mathcal{S}_{ef}^{(>1)}[A, -M]) \\
&= 0, \tag{3.19}
\end{aligned}$$

pois a expressão (3.17) é uma função par na massa M , devido às equações (3.14-3.15). Isso mostra que a parte que viola a paridade na ação efetiva é linear em \vec{A} .

3.1.1 Termo linear em \vec{A}

Vamos estudar o termo linear em \vec{A} que viola a paridade. Quando tentamos calcular este termo diretamente da equação (3.12) fazendo $j = 0$ encontramos uma

dificuldade, que é o fato dela não estar regularizada. Então vamos alternativamente olhar para a seguinte equação, que segue diretamente da equação (3.6):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{S}_{ef}^{PV}}{\partial a} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_{ef}[A, M]}{\partial a} - \frac{\partial \mathcal{S}_{ef}[A, -M]}{\partial a} \right) \\
&= -\frac{e}{2\beta} \sum_n \text{Tr} \left(\frac{1}{\not{p} + \gamma_0 \tilde{\omega}_n + M + eA} - \frac{1}{\not{p} + \gamma_0 \tilde{\omega}_n - M + eA} \right) \gamma_0 \\
&= -\frac{eM}{\beta} \sum_n \text{Tr} \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2 + e(\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p} - i\gamma_0 B) + e^2 \vec{A}^2} \gamma_0.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Na última linha, os termos quadráticos no denominador saem diretamente. Para os termos cruzados, o termo entre parênteses sai de

$$\begin{aligned}
\not{p}A + A\not{p} &= \gamma_i \gamma_j p_i A_j + \gamma_i \gamma_j A_i p_j \\
&= (-\delta_{ij} - \gamma_0 \epsilon_{0ij})(p_i A_j + A_i p_j) \\
&= -(\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}) + i\gamma_0 (\epsilon_{ij} \partial_i A_j) \\
&= -(\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}) + i\gamma_0 B,
\end{aligned}$$

onde foi utilizado a relação de comutação

$$[p_\mu, \alpha(x)] = -i\partial_\mu \alpha(x) \tag{3.21}$$

enquanto os termos $\not{p}\gamma_0\tilde{\omega}_n + \gamma_0\tilde{\omega}_n\not{p} = 0$ e $eA\gamma_0\tilde{\omega}_n + \gamma_0\tilde{\omega}_neA = 0$ devido à anticomutação das matrizes gama. Fazendo uso da identidade

$$\frac{1}{A-B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \dots \tag{3.22}$$

válida para dois operadores A e B não necessariamente comutantes, podemos escrever o termo linear em \vec{A} como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{S}_{ef}^{PV(1)}}{\partial a} &= \frac{e^2 M}{\beta} \sum_n \text{Tr} \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} (\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p} - i\gamma_0 B) \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \gamma_0 \\
&= \frac{2ie^2 M}{\beta} \sum_n \int d^2x \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2)^2} B \\
&= \frac{ie^2 M}{2\pi\beta} \sum_n \int d^2x \frac{1}{\tilde{\omega}_n^2 + M^2} B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ie^2}{8\pi} \int d^2x \left[\tanh \frac{1}{2}(\beta M - iea) + \tanh \frac{1}{2}(\beta M + iea) \right] B \\
&= \frac{ie}{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} \int d^2x \tan^{-1} \left(\tanh \frac{\beta M}{2} \tan \frac{ea}{2} \right) B.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

onde na segunda linha foi tomado o traço sobre a base completa de estados e sobre as matrizes gamas. O único termo que dá contribuição não nula é o termo linear no campo magnético B , pois $\text{Tr}(\gamma_0) = 0$ e $\text{Tr}(\gamma_0\gamma_0) = -2$. Na terceira linha foi calculado a integração no momento p utilizando a fórmula (A.6) do apêndice. Na quarta linha foi feita a soma sobre as frequências discretas de acordo com a fórmula (A.10) do apêndice. Assim fica determinado a parte da ação efetiva linear em \vec{A} (ou B) que viola a paridade

$$S_{ef}^{PV(1)} = i \int d^2x B \Gamma(a, M), \tag{3.24}$$

onde

$$\Gamma(a, M) = \frac{e}{2\pi} \tan^{-1} \left(\tanh \frac{\beta M}{2} \tan \frac{ea}{2} \right). \tag{3.25}$$

Dizemos linear em \vec{A} pois sabemos que o campo magnético é do tipo $B = \epsilon_{ij} \partial^i A^j$. De acordo com o que foi discutido na sessão 1.2 do primeiro capítulo, equação (1.13), este é um termo de Chern-Simons, se identificarmos o fator multiplicativo de B como um potencial escalar A_0 . Aqui vemos que esta ação efetiva satisfaz a invariância de *gauge* ‘grande’, pois a função arctan é uma função trigonométrica periódica, tomando os mesmos valores para múltiplos de 2π , que é a condição requerida para que a invariância de *gauge* ‘grande’ seja satisfeita, de acordo com (1.68). O primeiro termo da expansão de Γ será proporcional a $\tanh \frac{\beta M}{2}$, e este primeiro termo, o dominante, é o que se associa ao termo de Chern-Simons, e claramente esta função hiperbólica não satisfaz a periodicidade necessária para que a invariância de *gauge* ‘grande’ seja satisfeita. No entanto, outros termos da série também devem ser levados em conta, pois também contribuem para a parte que viola a paridade. Quando somados vai haver o cancelamento de termos e a ação efetiva total que viola a paridade é invariante de *gauge*. Também vale notar de (3.23) a importante relação abaixo, que será utilizada posteriormente,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial a} = \frac{e^2 M}{2\pi \beta} \sum_n \frac{1}{\tilde{\omega}_n^2 + M^2}. \tag{3.26}$$

Na verdade, no caso mais geral, o que obtemos é a ação efetiva a menos de uma constante aditiva, mas se assumirmos que a ação efetiva é normalizada de maneira que ela se anule quando os campos externos se anulem, então a constante aditiva também se anula, e aquela é a expressão correta. Como já vimos na equação (3.19) que a parte que viola a paridade da ação efetiva é no máximo linear em \vec{A} , então esta é a ação efetiva completa que viola a paridade, isto com o campo de *gauge* específico que nós escolhemos.

3.1.2 Termo quadrático em \vec{A}

Vamos agora estudar o termo quadrático em \vec{A} , que é um termo que conserva a paridade (PC). Tomando $j = 1$ na equação (3.17), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_{ef}^{PC(2)} &= \frac{e^2}{2} \sum_n \text{Tr} K_n^{(0)} \not{A} K_n^{(0)} \not{A} \\
 &= \frac{e^2}{2} \sum_n \text{Tr} \frac{1}{\not{p} + \rho_n} \not{A} \frac{1}{\not{p} + \rho_n} \not{A} \\
 &= \frac{e^2}{2} \sum_n \text{Tr} \frac{\not{p} - \rho_n}{p^2 + \rho_n^2} \not{A} \frac{\not{p} - \rho_n}{p^2 + \rho_n^2} \not{A} \\
 &= \frac{e^2}{2} \sum_n \text{Tr} \frac{1}{p^2 + \rho_n^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla})^2 + \rho_n^2} [(\not{p} - \rho_n) \not{A} (\not{p} - \rho_n) \not{A}], \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

e aqui devemos fazer alguns comentários. A derivada no denominador aparece da expressão

$$\alpha(\vec{x}) \frac{1}{p^2 + \rho_n^2} = \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla})^2 + \rho_n^2} \alpha(\vec{x}), \quad (3.28)$$

que segue diretamente da relação de comutação (3.21). A derivada está agindo no campo $\vec{A}(\vec{x})$ imediatamente a sua direita. Isso é melhor entendido se pensarmos no espaço de momentos. Lá as derivadas correspondem a momentos externos $k_\mu \rightarrow -i\partial_\mu$. Podemos escrever $\vec{A}(\vec{x})$ como uma representação de Fourier do tipo $\vec{A}(\vec{x}) = \int \vec{A}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^2k$, assim a ação da derivada é acrescentar um momento externo \vec{k} . Este cálculo então passa a ser o correspondente à parte simétrica do gráfico da Figura 1 do apêndice.

Tendo isto em mente, podemos terminar nossos cálculos:

$$\begin{aligned}
S_{ef}^{PC(2)} &= \\
&= \frac{e^2}{2} \sum_n \text{Tr} \frac{1}{(p^2 + \rho_n^2)[(\vec{p} + i\vec{\nabla})^2 + \rho_n^2]} (\not{p}\not{A}\not{p}\not{A} - \rho_n\not{p}\not{A}\not{A} - \rho_n\not{A}\not{p}\not{A} + \rho_n^2\not{A}\not{A}) \\
&= -e^2 \sum_n \int d^2x \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left(\frac{2p_i p_j + i(p_i \partial_j + p_j \partial_i) - \delta_{ij}[\rho_n^2 + p_k(p_k + i\partial_k)]}{(p^2 + \rho_n^2)[(\vec{p} + i\vec{\nabla})^2 + \rho_n^2]} A_j \right) A_i \\
&= -e^2 \sum_n \int d^2x \frac{d^2q}{(2\pi)^2} dz \frac{1}{[q^2 - z(1-z)\nabla^2 + \rho_n^2]^2} \left(2(q_i - iz\partial_i)(q_j - iz\partial_j) + \right. \\
&\quad \left. + i[\partial_i(q_j - iz\partial_j) + \partial_j(q_i - iz\partial_i)] - \delta_{ij} [q^2 - 2iz\vec{q} \cdot \vec{\nabla} + i\vec{q} \cdot \vec{\nabla} + z(1-z)\nabla^2 + \rho_n^2] \right) A_j A_i \\
&= -e^2 \sum_n \int d^2x \frac{d^2q}{(2\pi)^2} dz \frac{1}{[q^2 - z(1-z)\nabla^2 + \rho_n^2]^2} \left([2q_i q_j - q^2 \delta_{ij}] - \right. \\
&\quad \left. - \delta_{ij} [z(1-z)\nabla^2 + \rho_n^2] + 2z(1-z)\partial_i \partial_j \right) \\
&= -\frac{e^2}{2\pi} \sum_n \int d^2x dz z(1-z) A_i \frac{(\partial_i \partial_j - \nabla^2 \delta_{ij})}{[\rho_n^2 - z(1-z)\nabla^2]} A_j \\
&= -\frac{e^2}{2\pi} \sum_n \int d^2x dz z(1-z) B \frac{1}{[\rho_n^2 - z(1-z)\nabla^2]} B, \tag{3.29}
\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade foram utilizados a regra de comutação (3.21) e o cálculo dos traços de 2, 3 e 4 matrizes gamas, conforme equações (A.1-A.3) do apêndice. Como os índices i, j e k tomam os valores 1 e 2 apenas, o traço de 3 matrizes será nulo, devido ao símbolo antissimétrico ϵ_{ijk} que é nulo para índices repetidos. Neste ponto podemos ver porque todos os termos de ordem superior a \vec{A} na ação efetiva não contém termos de quebra de paridade, pois a decomposição dos traços de um número maior de matrizes gama sempre vai conter uma combinação de traços de 3 gamas na parte que viola paridade, e este termo será sempre nulo pelo argumento acima. Isso justifica a equação (3.19). Na terceira igualdade foi feita a parametrização de Feynman nos denominadores, de acordo com a fórmula (A.11) do apêndice, e a substituição de variáveis

$$p_j = q_j - iz\partial_j. \tag{3.30}$$

A integração nos momentos então foi feita utilizando os valores tabelados das integrais conforme (A.5-A.8). A soma sobre as frequências discretas pode ser feita usando a fórmula (A.10) do apêndice, e então obtemos para a ação efetiva quadrática em \vec{A} :

$$\begin{aligned}
S_{ef}^{PC(2)} &= \\
&= \frac{e^2\beta}{8\pi} \int d^2x \int_0^1 dz z(1-z) B \frac{1}{\sqrt{M^2 - z(1-z)\nabla^2}} \left[\tanh \frac{1}{2}(\beta\sqrt{M^2 - z(1-z)\nabla^2} - iea) \right. \\
&\quad \left. + \tanh \frac{1}{2}(\beta\sqrt{M^2 - z(1-z)\nabla^2} + iea) \right] B \\
&= \frac{e\beta}{2\pi} \int d^2x \int_0^1 dz z(1-z) B \frac{1}{\sqrt{M^2 - z(1-z)\nabla^2}} \\
&\quad \times \frac{\partial}{\partial a} \tan^{-1} \left(\tanh \frac{\beta\sqrt{M^2 - z(1-z)\nabla^2}}{2} \tan \frac{ea}{2} \right) B. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Falta fazer a integração em z , mas neste ponto não é possível obter uma expressão analítica para tal integração. Os campo \vec{A} 's a que estamos nos referindo estão representados pelos dois campos magnéticos B . Como $B = \epsilon_{ij}\partial^i A^j$, sabemos que a combinação de dois tensores antissimétricos produzem uma combinação de deltas de Kronecker, que são simétricos, de maneira que o termo anterior realmente não viola a paridade.

3.2 Expansão Derivativa em Ordens Mais Altas

Vamos agora generalizar um pouco mais a escolha do campo de *gauge* A_μ permitindo que a componente A_0 do campo dependa lentamente das coordenadas espaciais, o que quer dizer uma dependência pequena com as coordenadas. Isso será importante para utilizarmos o método das expansões derivativas. O campo de *gauge* agora é da forma

$$A_0(t, \vec{x}) = \bar{A}_0(t) + \hat{A}_0(\vec{x}), \quad \int d^2x \hat{A}_0(\vec{x}) = 0. \tag{3.32}$$

Com isto podemos tentar determinar os termos de ordens mais altas, nas derivadas, da ação efetiva neste limite mais geral que o estático.

Com uma escolha apropriada da transformação de *gauge*, o campo pode ser decomposto na forma

$$A_0(t, \vec{x}) = \frac{a}{\beta} + \hat{A}_0(\vec{x}), \quad \vec{A} = \vec{A}(\vec{x}), \quad (3.33)$$

de maneira que o campo a pode ser identificado como sendo a parte constante do campo A_0 . Para este caso, a ação efetiva toma a forma

$$\mathcal{S}_{ef}[A, M] = - \sum_n \text{Tr} \ln \left[1 + \frac{1}{\not{p} + \gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0) + M} (eA) \right]. \quad (3.34)$$

O termo linear em \vec{A} será, de acordo com a expansão de \ln (A.15):

$$\mathcal{S}_{ef}^{(1)}[\hat{A}_0, M] = -e \sum_n \text{Tr} \frac{1}{\not{p} + \gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0) + M} A, \quad (3.35)$$

e aqui vale lembrar que agora haverá termos de ordem mais alta que \vec{A} na parte que viola a paridade da ação efetiva, mas vamos nos restringir ao termo linear por simplicidade e pelo fato de que com um campo \vec{A} já conseguimos obter termos de Chern-Simons, através de B . Outra justificativa é que estamos considerando que os termos de ordem mais alta em \vec{A} dão uma contribuição muito pequena neste caso, pois lembre-se que eles são nulos no caso estático, equação (3.19). Sabemos que a simetria de conjugação de carga é uma boa simetria para o termo de Chern-Simons, no sentido que ela satisfaz essa simetria, e também sabemos que por invariância da conjugação de carga todas as funções de n pontos, com n ímpar, devem ser nulas. Como temos um campo magnético B (que contém um \vec{A}), isso corresponde a uma linha externa em um gráfico de Feynman, assim como um campo A_0 , então o número de campos total de cada termo que formos estudar deve satisfazer a relação $\text{número}(\hat{A}_0) + \text{número}(a) + 1 = \text{par}$, onde o número 1 refere-se ao campo \vec{A} contido em B . Os campos \hat{A}_0 e a devem estar distribuídos de maneira a satisfazer esta igualdade.

Já que estamos interessados somente na parte que viola a paridade da ação efetiva, temos de estudar a expressão dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{ef}^{PV(1)} &= \frac{1}{2} (\mathcal{S}_{ef}^{(1)}[\hat{A}_0, M] - \mathcal{S}_{ef}^{(1)}[\hat{A}_0, -M]) \\ &= -\frac{e}{2} \sum_n \text{Tr} \left(\frac{1}{\not{p} + \gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0) + M} - \frac{1}{\not{p} + \gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0) - M} \right) A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{e}{2} \sum_n \text{Tr} \left(\frac{-2M}{-p^2 - \tilde{\omega}_n^2 - M^2 - e^2 \hat{A}_0^2 - 2e\tilde{\omega}_n \hat{A}_0 + ie\gamma_0 \not{\partial} \hat{A}_0} \right) \mathcal{A} \\
&= -eM \sum_n \text{Tr} \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2 + L} \mathcal{A}, \tag{3.36}
\end{aligned}$$

onde

$$L = 2e\tilde{\omega}_n \hat{A}_0 - ie\gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0) + e^2 \hat{A}_0^2, \tag{3.37}$$

e na terceira linha todos os outros produtos cruzados dos termos dos denominadores se anulam, e foi utilizado a regra de comutação (3.21). Agora, o denominador pode ser expandido, e a ação efetiva calculada para qualquer número de campos \hat{A}_0 .

3.2.1 Termo linear em \hat{A}_0

Usando a expansão do denominador dada por (3.22), e tomando apenas o primeiro termo que contenha os campos, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)} &= eM \sum_n \text{Tr} \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} L \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \mathcal{A} \\
&= eM \sum_n \text{Tr} \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \left[2e\tilde{\omega}_n \hat{A}_0 - ie\gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0) + e^2 \hat{A}_0^2 \right] \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \mathcal{A}. \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Vamos então calcular a parte da ação efetiva que viola a paridade que contenha um campo \hat{A}_0 e um campo B . Isso vai aparecer do segundo termo em L , o primeiro e o último termo não darão contribuição devido ao traço de γ_i ser nulo, e a ação efetiva que temos de calcular é

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})^{(1)} &= eM \sum_n \text{Tr} \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} [-ie\gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0)] \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \mathcal{A} \\
&= eM \sum_n \text{Tr} \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla})^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} [-ie\gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0)] \mathcal{A}. \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Reescrevendo o numerador, temos

$$\begin{aligned}
-ie\gamma_0(\not{\partial}\hat{A}_0)A &= -ie\gamma_0(\partial_i\hat{A}_0)\gamma_i\gamma_jA_j \\
&= -ie\gamma_0(\partial_i\hat{A}_0)(-\delta_{ij} - \epsilon_{ij0}\gamma_0)A_j \\
&= -ie\left[-\gamma_0(\partial_i\hat{A}_0)A_i - \gamma_0(\partial_i\hat{A}_0)\epsilon_{ij0}\gamma_0A_j\right] \\
&= -ie\left[-\gamma_0(\partial_i\hat{A}_0)A_i - \gamma_0\partial_i(\hat{A}_0A_j)\epsilon_{ij0}\gamma_0 + \gamma_0\hat{A}_0\epsilon_{ij0}\gamma_0(\partial_iA_j)\right],
\end{aligned} \tag{3.40}$$

onde na última linha foi utilizado derivação por partes. O primeiro termo desta expressão não dará contribuição para a ação efetiva, pois $\text{Tr}(\gamma_0) = 0$. O segundo termo também não dará contribuição, pois trata-se de uma derivada total. Temos então de calcular apenas o último termo, que fica

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})^{(1)} &= eM \sum_n \text{Tr} \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla})^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} [-ie\gamma_0(\not{\partial}\hat{A}_0)]A \\
&= eM \sum_n \text{Tr} \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla})^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} [-ie\gamma_0\hat{A}_0\epsilon_{ij0}\gamma_0(\partial_iA_j)] \\
&= 2ie^2M \sum_n \text{tr} \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla})^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} [\hat{A}_0\epsilon_{ij}\partial_iA_j] \\
&= 2ie^2M \sum_n \int d^2x \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla})^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \hat{A}_0B \\
&= 2ie^2M \sum_n \int d^2xB \frac{d^2p}{(2\pi)^2} dz \frac{1}{[p^2 + 2iz\vec{p} \cdot \vec{\nabla} - z\nabla^2 + z\tilde{\omega}_n^2 + M^2]^2} \hat{A}_0 \\
&= 2ie^2M \sum_n \int d^2xB \frac{d^2q}{(2\pi)^2} dz \frac{1}{[q^2 - z(1-z)\nabla^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2]^2} \hat{A}_0 \\
&= \frac{ie^2M}{2\pi} \sum_n \int d^2xB dz \frac{1}{\tilde{\omega}_n^2 + M^2 - z(1-z)\nabla^2} \hat{A}_0 \\
&= \frac{ie^2M\beta}{8\pi} \int d^2x dz B \frac{1}{\sqrt{M^2 - z(1-z)\nabla^2}} \left(\tanh \frac{1}{2} \left[\beta \sqrt{M^2 - z(1-z)\nabla^2} - iea \right] \right. \\
&\quad \left. + \tanh \frac{1}{2} \left[\beta \sqrt{M^2 - z(1-z)\nabla^2} + iea \right] \right)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

onde as derivadas agem apenas em \hat{A}_0 e não em B . Na quinta linha foi utilizada a parametrização de Feynman (A.11) e a seguir a mudança de variáveis (3.30) e a

integração no momento q de acordo com a fórmula (A.6) do apêndice. Por último foi feita a soma sobre as frequências discretas de acordo com (A.10). Esta é uma expressão exata para parte da ação efetiva que viola a paridade e é linear em \hat{A}_0 , mas falta ainda a integração em z , que não é tão simples e será mesmo muito mais complicada quando formos tratar de termos quadráticos e cúbicos em \hat{A}_0 , a fim de obtermos uma expressão fechada. O procedimento a ser adotado é o das expansões derivativas.

Para entendermos melhor o procedimento que será adotado daqui em diante, vamos voltar um pouco na equação (3.41), partindo de

$$(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})^{(1)} = 2ie^2 M \sum_n \int d^2x B \frac{d^2q}{(2\pi)^2} dz \frac{1}{[q^2 - z(1-z)\nabla^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2]^2} \hat{A}_0. \quad (3.42)$$

O que faremos é expandir o denominador em potências das derivadas a fim de obtermos uma expressão linear em \hat{A}_0 mas com um número arbitrário de derivadas. Desta maneira a integração em z pode ser feita e teremos uma expressão fechada para a ação efetiva nesta ordem (linear em \hat{A}_0). Este é o procedimento da expansão derivativa. Fazendo a expansão em (3.42) para $\nabla^2 \rightarrow 0$ (que corresponde a um valor de baixo momento externo no espaço de momentos, $k^2 \rightarrow 0$), usando a equação (A.14) do apêndice temos,

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})^{(1)} = 2ie^2 M \sum_n \int d^2x \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \int_0^1 dz \left[\frac{1}{(q^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2)^2} \right. \\ \left. + \frac{2z(1-z)\nabla^2}{(q^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2)^3} + \frac{3z^2(1-z)^2\nabla^4}{(q^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2)^4} + \dots \right] \hat{A}_0 B \quad (3.43) \end{aligned}$$

e agora a integração em q pode ser feita facilmente para cada termo, utilizando-se da fórmula (A.6) do apêndice. A integração em z também é facilmente calculada, pois trata-se da integração de um polinômio em z apenas, mesmo para termos de ordens mais altas nas derivadas.

Continuando, temos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})^{(1)} &= \\
&= \frac{ie^2 M}{2\pi} \sum_n \int d^2x \int_0^1 dz \left[\frac{1}{(\tilde{\omega}_n^2 + M^2)} + \frac{z(1-z)\nabla^2}{(\tilde{\omega}_n^2 + M^2)^2} + \frac{z^2(1-z)^2\nabla^4}{(\tilde{\omega}_n^2 + M^2)^3} + \dots \right] \hat{A}_0 B \\
&= \frac{ie^2 M}{2\pi} \sum_n \int d^2x \left[\frac{1}{(\tilde{\omega}_n^2 + M^2)} + \frac{1}{6} \frac{\nabla^2}{(\tilde{\omega}_n^2 + M^2)^2} + \frac{1}{30} \frac{\nabla^4}{(\tilde{\omega}_n^2 + M^2)^3} + \dots \right] \hat{A}_0 B.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

A somatória nas frequências pode também ser facilmente feita, mas como estamos interessados numa expressão geral, vamos olhar para as igualdades abaixo, que seguem diretamente de (3.26):

$$\frac{\partial}{\partial M^2} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial \Gamma}{\partial a} \right) = -\frac{e^2}{2\pi\beta} \sum_n \frac{1}{(\tilde{\omega}_n^2 + M^2)^2} \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial^2}{(\partial M^2)^2} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial \Gamma}{\partial a} \right) = \frac{e^2}{2\pi\beta} \sum_n \frac{2}{(\tilde{\omega}_n^2 + M^2)^3}. \tag{3.46}$$

Com isto, substituindo as relações (3.26), (3.45) e (3.46) em (3.44), obtemos os primeiros termos da ação efetiva com amplitudes do tipo $\hat{A}_0 B$ e um número arbitrário de a 's,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})^{(1)} &= i\beta \int d^2x B \left[\hat{A}_0 \frac{\partial \Gamma}{\partial a} - \frac{M}{6} (\nabla^2 \hat{A}_0) \frac{\partial}{\partial M^2} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial \Gamma}{\partial a} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{M}{60} (\nabla^4 \hat{A}_0) \frac{\partial^2}{(\partial M^2)^2} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial \Gamma}{\partial a} \right) + \dots \right].
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Observe que o termo de ordem dominante é aquele para o qual $\nabla^2 = 0$, que corresponde a um momento externo nulo. Esta expressão pode ser comparada com os primeiros termos da expansão da expressão (B.12) do apêndice, onde o mesmo cálculo foi feito, só que no espaço dos momentos e no limite estático $\vec{k}_{10} = 0$. Para comparar, basta lembrar que $k_{1j} \rightarrow -i\partial_{1j}$ e $\vec{k}_1^2 \rightarrow -\nabla^2$. Além disso, a amplitude Π_{0i} está relacionada aos campos externos A_μ de acordo com $A_0(\vec{k}_1)\Pi_{0i}A_i(-\vec{k}_1)$, as derivadas agindo em A_i e A_0 formam o campo magnético e os outros termos da série. Lembre-se também que os coeficientes das amplitudes no espaço de momentos estão relacionados com os do espaço de coordenadas por um fator $\frac{i}{\beta}$. Na verdade

a ação efetiva (3.47) não pode conter um número arbitrário de a 's, mas sim um número par arbitrário de a 's. Como foi dito no comentário após a equação (3.35), o número total de campos deve ser par, para que a invariância da conjugação da carga seja satisfeita. No primeiro termo da expansão da ação efetiva (3.47), não é difícil calcular que $\partial\Gamma/\partial a = c_1 + c_2 a^2 + c_3 a^4 + \dots$, ou seja, o número de campos a será sempre par. Esses campos a correspondem a um momento externo nulo, de maneira que ao gráfico da função de dois pontos, Figura 1 do apêndice B, devemos imaginar que existe ainda um número par arbitrário de linhas externas correspondentes aos campos a 's. O mesmo acontece com todos os outros termos da expansão da ação efetiva (3.47).

3.2.2 Termo quadrático em \hat{A}_0

Vamos agora estudar o termo da ação efetiva que viola a paridade e é quadrático em \hat{A}_0 e contém um campo magnético B . Da equação (3.36) e (3.37), fazendo uso da expansão (3.22), os termos quadráticos em \hat{A}_0 vêm do termo

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})^{(2,3)} &= -eM \sum_n \text{Tr} \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} L \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} L \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \mathcal{A} \\
 &= -eM \sum_n \text{Tr} \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \\
 &\quad \times \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1 + i\vec{\nabla}_2)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} L^{(1)} L^{(2)} \mathcal{A} \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

onde o sobrescrito (2,3) significa que este termo na verdade dá também uma contribuição para o termo cúbico em \hat{A}_0 além do quadrático, como se tornará mais claro logo a seguir. Temos

$$L^{(1)} = 2e\tilde{\omega}_n \hat{A}_0^{(1)} - ie\gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0^{(1)}) + e^2 (\hat{A}_0^{(1)})^2 \quad (3.49)$$

$$L^{(2)} = 2e\tilde{\omega}_n \hat{A}_0^{(2)} - ie\gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0^{(2)}) + e^2 (\hat{A}_0^{(2)})^2 \quad (3.50)$$

e os índices subscritos nas derivadas indicam a ação desses operadores nos campos $\hat{A}_0^{(1)}$ e $\hat{A}_0^{(2)}$.

Do numerador de (3.48), os termos que darão contribuição não-nula (devido ao traço) serão

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}(L^{(1)}L^{(2)}A) = \\
& = \text{Tr} \left[\left(2e\tilde{\omega}_n \hat{A}_0^{(1)} - ie\gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0^{(1)}) + e^2 (\hat{A}_0^{(1)})^2 \right) \left(2e\tilde{\omega}_n \hat{A}_0^{(2)} - ie\gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0^{(2)}) + e^2 (\hat{A}_0^{(2)})^2 \right) A \right] \\
& = \text{Tr} \left[-2ie^2 \tilde{\omega}_n \gamma_0 \left(\hat{A}_0^{(1)} (\not{\partial} \hat{A}_0^{(2)}) + (\not{\partial} \hat{A}_0^{(1)}) \hat{A}_0^{(2)} \right) A - ie^3 \gamma_0 \left((\hat{A}_0^{(1)})^2 (\not{\partial} \hat{A}_0^{(2)}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\not{\partial} \hat{A}_0^{(1)}) (\hat{A}_0^{(2)})^2 \right) A \right] \\
& = \text{Tr} \left[-2ie^2 \tilde{\omega}_n \gamma_0 \gamma_i \gamma_j \left(\hat{A}_0^{(1)} (\partial_i \hat{A}_0^{(2)}) + (\partial_i \hat{A}_0^{(1)}) \hat{A}_0^{(2)} \right) A_j - ie^3 \gamma_0 \gamma_i \gamma_j \left((\hat{A}_0^{(1)})^2 (\partial_i \hat{A}_0^{(2)}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\partial_i \hat{A}_0^{(1)}) (\hat{A}_0^{(2)})^2 \right) A_j \right] \\
& = \text{Tr} \left[-2ie^2 \tilde{\omega}_n \gamma_0 (-\delta_{ij} I - \epsilon_{ij0} \gamma_0) \left(\hat{A}_0^{(1)} (\partial_i \hat{A}_0^{(2)}) + (\partial_i \hat{A}_0^{(1)}) \hat{A}_0^{(2)} \right) A_j \right. \\
& \quad \left. - ie^3 \gamma_0 (-\delta_{ij} I - \epsilon_{ij0} \gamma_0) \left((\hat{A}_0^{(1)})^2 (\partial_i \hat{A}_0^{(2)}) + (\partial_i \hat{A}_0^{(1)}) (\hat{A}_0^{(2)})^2 \right) A_j \right] \\
& = -4ie^2 \tilde{\omega}_n \left(\hat{A}_0^{(1)} (\partial_i \hat{A}_0^{(2)}) + (\partial_i \hat{A}_0^{(1)}) \hat{A}_0^{(2)} \right) \epsilon_{ij} A_j - 2ie^3 \left((\hat{A}_0^{(1)})^2 (\partial_i \hat{A}_0^{(2)}) \right. \\
& \quad \left. + (\partial_i \hat{A}_0^{(1)}) (\hat{A}_0^{(2)})^2 \right) \epsilon_{ij} A_j \\
& = -4ie^2 \tilde{\omega}_n \left[\partial_i (\hat{A}_0^{(1)} \hat{A}_0^{(2)} \epsilon_{ij} A_j) - \hat{A}_0^{(1)} \hat{A}_0^{(2)} \epsilon_{ij} \partial_i A_j \right] - 2ie^3 \left((\hat{A}_0^{(1)})^2 (\partial_i \hat{A}_0^{(2)}) \right. \\
& \quad \left. + (\partial_i \hat{A}_0^{(1)}) (\hat{A}_0^{(2)})^2 \right) \epsilon_{ij} A_j \\
& = -4ie^2 \tilde{\omega}_n \partial_i (\hat{A}_0^{(1)} \hat{A}_0^{(2)} \epsilon_{ij} A_j) + 4ie^2 \tilde{\omega}_n \hat{A}_0^{(1)} \hat{A}_0^{(2)} B - 2ie^3 \left((\hat{A}_0^{(1)})^2 (\partial_i \hat{A}_0^{(2)}) \right. \\
& \quad \left. + (\partial_i \hat{A}_0^{(1)}) (\hat{A}_0^{(2)})^2 \right) \epsilon_{ij} A_j \tag{3.51}
\end{aligned}$$

onde foi usado derivação por partes na penúltima linha. Substituindo na equação (3.48), vemos que o último termo da equação acima não contribui com um termo quadrático em \hat{A}_0 e sim com um termo cúbico, então pode ser desprezado. O primeiro termo também não contribui para a ação efetiva, pois trata-se de uma derivada total. Então, o único termo que contribui é o segundo, dando

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})^{(2)} &= -4ie^3 M \sum_n \text{tr} \frac{\tilde{\omega}_n}{(p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2)[(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2]} \\
&\quad \times \frac{1}{[(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1 + i\vec{\nabla}_2)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2]} \hat{A}_0^{(1)} \hat{A}_0^{(2)} B \tag{3.52}
\end{aligned}$$

Agora, usando a parametrização de Feynman (A.12)

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{[a + (b-a)z + (c-a)y]^3}, \quad (3.53)$$

e fazendo a substituição de variável

$$\vec{p} \rightarrow \vec{q} - iz\vec{\nabla}_1 - y(i\vec{\nabla}_1 + i\vec{\nabla}_2) \quad (3.54)$$

obtemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})^{(2)} &= -4ie^3 M \sum_n \text{tr} \frac{2\tilde{\omega}_n}{(q^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2 + C)^3} \hat{A}_0^{(1)} \hat{A}_0^{(2)} B \\ &= -4ie^3 M \sum_n \int d^2x \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{2\tilde{\omega}_n}{(q^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2 + C)^3} \hat{A}_0^{(1)} \hat{A}_0^{(2)} B \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde

$$\begin{aligned} C &= 2y^2\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{\nabla}_2 + y^2\nabla_1^2 + y^2\nabla_2^2 + 2zy\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{\nabla}_2 + 2zy\nabla_1^2 \\ &\quad - 2y\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{\nabla}_2 - y\nabla_1^2 - y\nabla_2^2 - z\nabla_1^2 + z^2\nabla_1^2 \end{aligned} \quad (3.56)$$

é um coeficiente que contém somente derivadas, mas não a variável de integração q . Agora, fazendo a expansão derivativa com $\vec{\nabla}_1 = \vec{\nabla}_2 \rightarrow 0$ equivale a expandir $C \rightarrow 0$, obtendo assim potências de C . Com isto as integrações tanto em q quanto em z e y podem ser feitas facilmente. Usando novamente a expansão (A.14), obtemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})^{(2)} &= \\ &= \frac{-2ie^3 M}{\pi^2} \sum_n \int d^2x \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int d^2q \tilde{\omega}_n \left(\frac{1}{(q^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2)^3} + \frac{3C}{(q^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2)^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{6C^2}{(q^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2)^5} + \dots \right) \hat{A}_0^{(1)} \hat{A}_0^{(2)} B \\ &= \frac{-2ie^3 M}{\pi^2} \sum_n \int d^2x \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left(\frac{\pi}{2} \frac{\tilde{\omega}_n}{(\tilde{\omega}_n^2 + M^2)^2} + \pi \frac{\tilde{\omega}_n}{(\tilde{\omega}_n^2 + M^2)^3} C \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\pi}{2} \frac{\tilde{\omega}_n}{(\tilde{\omega}_n^2 + M^2)^4} C^2 + \dots \right) \hat{A}_0^{(1)} \hat{A}_0^{(2)} B. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Agora, de (3.26) é fácil observar que

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial a^2} = \frac{-e^3 M}{\pi \beta^2} \sum_n \frac{\tilde{\omega}_n}{(\tilde{\omega}_n^2 + M^2)^2} \quad (3.58)$$

e desta última,

$$\frac{\partial}{\partial M^2} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial a^2} \right) = \frac{2e^3}{\pi \beta^2} \sum_n \frac{\tilde{\omega}_n}{(\tilde{\omega}_n^2 + M^2)^3} \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial^2}{(\partial M^2)^2} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial a^2} \right) = -\frac{6e^3}{\pi \beta^2} \sum_n \frac{\tilde{\omega}_n}{(\tilde{\omega}_n^2 + M^2)^4}. \quad (3.60)$$

Assim, podemos fazer as integrações em y e z nos coeficientes C , que são diretas, pois tratam-se apenas da integração de polinômios naquelas variáveis. Agora, colecionando junto termos de derivadas que têm a mesma ação sobre os campos $\hat{A}_0^{(1)}$ e $\hat{A}_0^{(2)}$, por exemplo $(\nabla_1^2 \hat{A}_0^{(1)}) \hat{A}_0^{(2)} + (\nabla_2^2 \hat{A}_0^{(2)}) \hat{A}_0^{(1)} = 2(\nabla^2 \hat{A}_0) \hat{A}_0$, ou $(\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{\nabla}_2 \hat{A}_0^{(1)}) (\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{\nabla}_2 \hat{A}_0^{(2)}) = (\partial_i \partial_j \hat{A}_0)^2$ e assim por diante, podemos escrever finalmente

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})^{(2)} &= \\ &= i\beta^2 \int d^2 x B \left[\frac{1}{2} \hat{A}_0^2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial a^2} - \frac{M}{12} \left[2(\nabla^2 \hat{A}_0) \hat{A}_0 + (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \cdot (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \right] \frac{\partial}{\partial M^2} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial a^2} \right) \right. \\ &\quad + \frac{M}{60} \left[2\hat{A}_0 (\nabla^4 \hat{A}_0) + 4(\nabla^2 \partial_i \hat{A}_0) (\partial_i \hat{A}_0) + \frac{4}{3} (\partial_i \partial_j \hat{A}_0)^2 + \frac{5}{3} (\nabla^2 \hat{A}_0)^2 \right] \\ &\quad \left. \times \frac{\partial^2}{(\partial M^2)^2} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial a^2} \right) + \dots \right]. \quad (3.61) \end{aligned}$$

Estes são os primeiros termos da ação efetiva que viola a paridade que são quadráticos em \hat{A}_0 e linear em B , com um número ímpar arbitrário de campos a 's. Os mesmos comentários da final da sessão anterior se aplicam aqui. O número total de campos deve ser par, e como já temos três campos explícitos (dois \hat{A}_0 e um B), não é difícil perceber que $\partial^2 \Gamma / \partial a^2 = d_1 a + d_2 a^3 + \dots$, de maneira que aqui a expansão já começa com a contribuição de um a , ou seja, um número par de campos. O mesmo valendo para os demais termos.

Apesar de os cálculos se tornarem cada vez mais complicados, vamos ainda calcular pelo mesmo método a ação efetiva cúbica em \hat{A}_0 .

3.2.3 Termo cúbico em \hat{A}_0

A ação efetiva linear em B e que seja cúbica em \hat{A}_0 vai ter diferentes contribuições. Uma parte vinda da equação (3.48) através do último termo da equação (3.51) e outra parte vinda do próximo termo da expansão de (3.35), de acordo com (3.22). Este termo será:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})^{(3,4,5)} &= \\
 &= eM \sum_n \text{Tr} \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} L \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} L \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} L \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \mathcal{A} \\
 &= eM \sum_n \text{Tr} \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1 + i\vec{\nabla}_2)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \\
 &\quad \times \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1 + i\vec{\nabla}_2 + i\vec{\nabla}_3)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} L^{(1)} L^{(2)} L^{(3)} \mathcal{A} \tag{3.62}
 \end{aligned}$$

onde novamente o sobrescrito (3, 4, 5) significa que este termo dá contribuição também para a ação efetiva com 4 e 5 campos \hat{A}_0 além do cúbico, embora nos ateremos a este último. Temos

$$L^{(1)} = 2e\tilde{\omega}_n \hat{A}_0^{(1)} - ie\gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0^{(1)}) + e^2 (\hat{A}_0^{(1)})^2 \tag{3.63}$$

$$L^{(2)} = 2e\tilde{\omega}_n \hat{A}_0^{(2)} - ie\gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0^{(2)}) + e^2 (\hat{A}_0^{(2)})^2 \tag{3.64}$$

$$L^{(3)} = 2e\tilde{\omega}_n \hat{A}_0^{(3)} - ie\gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0^{(3)}) + e^2 (\hat{A}_0^{(3)})^2 \tag{3.65}$$

e os termos não nulos do numerador e que são cúbicos em \hat{A}_0 virão de

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(L^{(1)} L^{(2)} L^{(3)} \mathcal{A}) &= \\
 &= \text{Tr} \left[\left(2e\tilde{\omega}_n \hat{A}_0^{(1)} - ie\gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0^{(1)}) + e^2 (\hat{A}_0^{(1)})^2 \right) \left(2e\tilde{\omega}_n \hat{A}_0^{(2)} - ie\gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0^{(2)}) + e^2 (\hat{A}_0^{(2)})^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. \times \left(2e\tilde{\omega}_n \hat{A}_0^{(3)} - ie\gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0^{(3)}) + e^2 (\hat{A}_0^{(3)})^2 \right) \mathcal{A} \right] \\
 &= \text{Tr} \left[-i4e^3 \tilde{\omega}_n^2 \gamma_0 \hat{A}_0^{(1)} \hat{A}_0^{(2)} (\not{\partial} \hat{A}_0^{(3)}) \mathcal{A} - i4e^3 \tilde{\omega}_n^2 \gamma_0 \hat{A}_0^{(1)} (\not{\partial} \hat{A}_0^{(2)}) \hat{A}_0^{(3)} \mathcal{A} \right. \\
 &\quad \left. - i4e^3 \tilde{\omega}_n^2 \gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0^{(1)}) \hat{A}_0^{(2)} \hat{A}_0^{(3)} \mathcal{A} + ie^3 \gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0^{(1)}) \gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0^{(2)}) \gamma_0 (\not{\partial} \hat{A}_0^{(3)}) \mathcal{A} \right] \\
 &= i8e^3 \tilde{\omega}_n^2 \hat{A}_0^{(1)} \hat{A}_0^{(2)} \hat{A}_0^{(3)} \epsilon_{ij} \partial_i A_j - i2e^3 (\partial_i \hat{A}_0^{(1)}) (\partial_i \hat{A}_0^{(2)}) (\partial_k \hat{A}_0^{(3)}) \epsilon_{kl} A_l \\
 &\quad - i2e^3 \epsilon_{ij} (\partial_i \hat{A}_0^{(1)}) (\partial_j \hat{A}_0^{(2)}) (\partial_k \hat{A}_0^{(3)}) A_k. \tag{3.66}
 \end{aligned}$$

Como foi dito, o último termo da equação (3.51) também dará contribuição em \hat{A}_0^3 , assim, a expressão completa da ação efetiva que temos de calcular é:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})^{(3)} = 2ie^4 M \sum_n \text{tr} \left[\right. \\
 & \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1 + i\vec{\nabla}_2)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \\
 & \times (\hat{A}_0^{(1)})^2 (\partial_i \hat{A}_0^{(2)}) \epsilon_{ij} A_j \\
 & + \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1 + i\vec{\nabla}_2)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \\
 & \times (\partial_i \hat{A}_0^{(1)}) (\hat{A}_0^{(2)})^2 \epsilon_{ij} A_j \\
 & + \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1 + i\vec{\nabla}_2)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \\
 & \times \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1 + i\vec{\nabla}_2 + i\vec{\nabla}_3)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} 4\tilde{\omega}_n^2 \hat{A}_0^{(1)} \hat{A}_0^{(2)} \hat{A}_0^{(3)} \epsilon_{ij} \partial_i A_j \\
 & - \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1 + i\vec{\nabla}_2)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \\
 & \times \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1 + i\vec{\nabla}_2 + i\vec{\nabla}_3)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} (\partial_k \hat{A}_0^{(1)}) (\partial_k \hat{A}_0^{(2)}) (\partial_i \hat{A}_0^{(3)}) \epsilon_{ij} A_j \\
 & - \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1 + i\vec{\nabla}_2)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \\
 & \times \frac{1}{(\vec{p} + i\vec{\nabla}_1 + i\vec{\nabla}_2 + i\vec{\nabla}_3)^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2} \epsilon_{ij} (\partial_i \hat{A}_0^{(1)}) (\partial_j \hat{A}_0^{(2)}) (\partial_k \hat{A}_0^{(3)}) A_k \left. \right].
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Sem entrar em muitos detalhes mas seguindo exatamente os passos do cálculo da ação efetiva linear e quadrática em \hat{A}_0 , vamos apresentar brevemente os resultados para este caso. O termo dominante da ação efetiva cúbica em \hat{A}_0 será aquele linear nas derivadas (só haverá termos de ordem ímpar), e virão dos três primeiros termos

INSTITUTO DE FÍSICA

50

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3790

ex. 1

da soma anterior, e dar a:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})_{lin}^{(3)} &= -\frac{ie^4 M}{3\pi^2} \sum_n \int d^2x d^2q \left[\frac{1}{(q^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2)^3} - \frac{6\tilde{\omega}_n^2}{(q^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2)^4} \right] B \hat{A}_0^3 \\
&= -\frac{ie^4 M}{6\pi} \sum_n \int d^2x \left[\frac{1}{(\tilde{\omega}_n^2 + M^2)^2} - \frac{4\tilde{\omega}_n^2}{(\tilde{\omega}_n^2 + M^2)^3} \right] B \hat{A}_0^3 \\
&= \frac{ie^4 M \beta^2}{12\pi} \sum_n \int d^2x \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{1}{\tilde{\omega}_n^2 + M^2} \right) B \hat{A}_0^3 \\
&= i\beta^3 \int d^2x \frac{1}{3!} B \hat{A}_0^3 \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial a^3}. \tag{3.68}
\end{aligned}$$

O termo c ubico nas derivadas ter a a forma:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})_{cub}^{(3)} &= \frac{ie^4 M}{2\pi^2} \sum_n \int d^2x d^2q \left(\frac{8\tilde{\omega}_n^2}{(q^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2)^5} - \frac{1}{(q^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2)^4} \right) \\
&\quad \times \left[(\nabla^2 \hat{A}_0) \hat{A}_0 + (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \cdot (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \right] \hat{A}_0 B \\
&= -\frac{iM\beta^3}{12} \int d^2x B \hat{A}_0 \left[(\nabla^2 \hat{A}_0) \hat{A}_0 + (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \cdot (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \right] \frac{\partial}{\partial M^2} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial a^3} \right). \tag{3.69}
\end{aligned}$$

O termo de quinta ordem nas derivadas ser a:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})_{qui}^{(3)} &= \\
&= -\sum_n \frac{ie^4 M}{20\pi(\tilde{\omega}_n^2 + M^2)^5} \int d^2x \left[(7\tilde{\omega}_n^2 - M^2) \left(\hat{A}_0^2 [(\nabla^2)^2 \hat{A}_0] B \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 4\hat{A}_0 (\partial_k \hat{A}_0) (\partial_k \nabla^2 \hat{A}_0) B + \frac{5}{3} \hat{A}_0 (\nabla^2 \hat{A}_0)^2 B + \frac{4}{3} \hat{A}_0 (\partial_k \partial_l \hat{A}_0)^2 B \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(11\tilde{\omega}_n^2 - \frac{7M^2}{3} \right) (\partial_k \hat{A}_0)^2 (\nabla^2 \hat{A}_0) B + \left(\frac{40\tilde{\omega}_n^2}{3} - \frac{8M^2}{3} \right) (\partial_k \hat{A}_0) (\partial_l \hat{A}_0) (\partial_k \partial_l \hat{A}_0) B \right] \\
&= -\frac{iM}{120} \int d^2x B \left[\beta^3 \left[\hat{A}_0^2 (\nabla^4 \hat{A}_0) + 4\hat{A}_0 (\partial_i \hat{A}_0) (\nabla^2 \partial_i \hat{A}_0) + \frac{5}{3} \hat{A}_0 (\nabla^2 \hat{A}_0)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{4}{3} \hat{A}_0 (\partial_i \partial_j \hat{A}_0)^2 + \frac{5}{3} (\partial_i \hat{A}_0)^2 (\nabla^2 \hat{A}_0) + 2(\partial_i \hat{A}_0) (\partial_j \hat{A}_0) (\partial_i \partial_j \hat{A}_0) \right] \frac{\partial^2}{(\partial M^2)^2} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial a^3} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4e^2 \beta}{3} \left[(\partial_i \hat{A}_0)^2 (\nabla^2 \hat{A}_0) + (\partial_i \hat{A}_0) (\partial_j \hat{A}_0) (\partial_i \partial_j \hat{A}_0) \right] \frac{\partial^3}{(\partial M^2)^3} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial \Gamma}{\partial a} \right) \right]. \tag{3.70}
\end{aligned}$$

Podemos comparar esses resultados com os obtido no apêndice B para o cálculo da função de 4 pontos no espaço de momentos no limite estático. O termo cúbico em \hat{A}_0 que é linear nas derivadas (3.68) corresponde à contribuição linear nos momentos daquele cálculo, equação (B.21). Lembre-se que agora a amplitude de 4 pontos está relacionada aos campos externos por meio de $A_0(\vec{k}_1)A_0(\vec{k}_2)A_0(\vec{k}_3)\Pi_{000i}A_i(-\vec{k}_4)$. Note também que existe um fator (1/6) diferindo os cálculos do apêndice com os obtidos aqui, isso devido ao fato de que no apêndice foram feitas todas as 6 permutações dos momentos externos e aqui calculamos apenas para uma configuração particular. As equações para os termos cúbicos e de quinta ordem nas derivadas, (3.69) e (3.70) respectivamente, correspondem às equações (B.30) e (B.31), com as devidas observações já feitas. O número total de campos de cada termo continua sendo par, como deveria. Desta maneira vemos que o método das expansões derivativas fornecem os mesmos resultados dos cálculos do espaço de momentos. Conclusões mais importantes serão discutidas no próximo capítulo.

Capítulo 4

Características Gerais da Ação Efetiva

Na primeira seção deste capítulo vamos tratar de propriedades gerais da ação efetiva que seguem do estudo dos resultados do capítulo anterior. Na segunda seção vamos mostrar que os resultados são consistentes com a invariância de *gauge* 'pequena' e são locais.

4.1 Generalização da Ação Efetiva

O método utilizado de expansão nas derivadas da ação efetiva para termos lineares, quadráticos e cúbicos em \hat{A}_0 pode ser estendido para um número arbitrário de campos, embora os cálculos se tornem cada vez mais complicados. Da análise dos resultados obtidos para esses termos até a quinta ordem nas derivadas, podemos generalizar os resultados pelo menos até esta ordem.

4.1.1 Termo linear nas derivadas

Das equações obtidas para a parte da ação efetiva que viola a paridade sendo linear, quadrático e cúbico em \hat{A}_0 , equações (3.47), (3.61) e (3.70) respectivamente, vemos que o termo dessas equações linear nas derivadas, ou seja, proporcional apenas a B , tem uma estrutura simples. Colecionando junto esses termos, teremos:

$$(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})_{lin} = i \int d^2x B \left[\beta \hat{A}_0 \frac{\partial \Gamma}{\partial a} + \frac{1}{2!} \beta^2 \hat{A}_0^2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial a^2} + \frac{1}{3!} \beta^3 \hat{A}_0^3 \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial a^3} + \dots \right] \quad (4.1)$$

que claramente podemos identificar como os primeiros termos de uma soma infinita, e assim somos levados a uma generalização, escrevendo então os termos lineares

nas derivadas da ação efetiva que viola paridade como

$$(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})_{lin} = i \sum_{n=0}^{\infty} \int d^2x \frac{1}{n!} B(\beta \hat{A}_0)^n \frac{\partial^n \Gamma(a, M)}{\partial a^n}, \quad (4.2)$$

mas esta é exatamente a expansão em série de Taylor da função $\Gamma(x = a + \beta \hat{A}_0, M)$ em torno do ponto $x_0 = a$, de maneira que temos que a ordem dominante (linear nas derivadas) da parte da ação efetiva que viola a paridade para todas as ordens em \hat{A}_0 é dado por:

$$(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})_{lin} = i \int d^2x B \Gamma(a + \beta \hat{A}_0, M). \quad (4.3)$$

Vemos que a correção de ordem dominante ao resultado estático (3.24) (obtida com a escolha do campo de *gauge* estático (3.3)), fica completamente determinado a partir do próprio resultado no caso estático, ou seja, do conhecimento de $\Gamma(a + \beta \hat{A}_0, M)$. Em outras palavras, observe que o índice n na expressão (4.2) representa o número de campos \hat{A}_0 , então a expressão (4.3) é a soma dos termos dominantes de todas as amplitudes de n pontos (n par). Este é um resultado geral que não podemos obter perturbativamente, para isto precisaríamos calcular o termo dominante (linear na derivada que está em B) de todas as funções de n pontos. Além disso, esta ação é invariante por transformações de *gauge* ‘grande’ desde que a ação com $\hat{A}_0 = 0$ seja. Para altas temperaturas, $\beta \rightarrow 0$, vemos que a ação efetiva se reduz à equação (3.24), consistente com o fato de que a ação em (3.24) nos dá o termo dominante da ação efetiva que viola paridade a altas temperaturas.

4.1.2 Termo cúbico nas derivadas

Vamos agora analisar os termos que sejam cúbicos nas derivadas da parte da ação efetiva que viola paridade, qual seja, os segundos termos das equações (3.47), (3.61) e (3.70). Colecionando junto estes termos, teremos

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})_{cub} = & -iM \int d^2x B \left[\frac{\beta}{6} (\nabla^2 \hat{A}_0) \frac{\partial}{\partial a} \right. \\ & + \frac{\beta^2}{12} \left(2(\nabla^2 \hat{A}_0) \hat{A}_0 + (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \cdot (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \right) \frac{\partial^2}{\partial a^2} \\ & \left. + \frac{\beta^3}{12} \hat{A}_0 \left((\nabla^2 \hat{A}_0) \hat{A}_0 + (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \cdot (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \right) \frac{\partial^3}{\partial a^3} + \dots \right] \frac{\partial}{\partial M^2} \left(\frac{\Gamma(a, M)}{M} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

e podemos procurar aqui também uma expansão em série com algum coeficiente apropriado. Para isto, note que as derivadas agindo em \hat{A}_0 estão distribuídas sobre dois campos \hat{A}_0 de todas as maneiras possíveis, ou seja, da forma $\hat{A}_0(\nabla^2 \hat{A}_0)$ e $(\vec{\nabla} \hat{A}_0) \cdot (\vec{\nabla} \hat{A}_0)$, e qualquer campo \hat{A}_0 adicional entra como fator multiplicativo apenas. Olhando com atenção os termos da equação (4.4) acima, percebemos uma expansão em série de Taylor da função $\Gamma(a + \beta \hat{A}_0, M)$ a menos de um fator multiplicativo que contenha a ação das derivadas nos campos \hat{A}_0 . Utilizando a igualdade

$$(\vec{\nabla} \hat{A}_0) \cdot (\vec{\nabla} \hat{A}_0) = -(\nabla^2 \hat{A}_0) \hat{A}_0 + \frac{(\nabla^2 \hat{A}_0^2)}{2} \quad (4.5)$$

vemos que este fator multiplicativo deve conter apenas os termos $(\nabla^2 \hat{A}_0)$ e ∇^2 . Como o termo linear em \hat{A}_0 na equação (4.4) deve ser do tipo $(\nabla^2 \hat{A}_0) \frac{\partial}{\partial a}$, não é difícil perceber que a ação efetiva cúbica nas derivadas deve ter a forma geral

$$(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})_{cub} = i \int d^2 x B \left[c_1 (\nabla^2 \hat{A}_0) \frac{\partial}{\partial a} + c_2 \nabla^2 \right] \frac{\partial}{\partial M^2} \left(\frac{\Gamma(a + \beta \hat{A}_0, M)}{M} \right) \quad (4.6)$$

onde c_1 e c_2 são coeficientes a serem determinados por comparação com os primeiros termos da equação (4.4). Substituindo os primeiros termos da equação

$$\begin{aligned} \Gamma(a + \beta \hat{A}_0, M) &= \\ &= \Gamma(a, M) + \beta \hat{A}_0 \frac{\partial \Gamma(a, M)}{\partial a} + \frac{1}{2!} \beta^2 \hat{A}_0^2 \frac{\partial^2 \Gamma(a, M)}{\partial a^2} + \frac{1}{3!} \beta^3 \hat{A}_0^3 \frac{\partial^3 \Gamma(a, M)}{\partial a^3} + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

na equação (4.6), podemos obter os coeficientes c_1 e c_2 por comparação com (4.4). Fazendo isto teremos:

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})_{cub} &= i \int d^2 x B \left[c_1 (\nabla^2 \hat{A}_0) \frac{\partial}{\partial a} + c_2 \nabla^2 \right] \frac{\partial}{\partial M^2} \frac{1}{M} \left(\Gamma(a, M) \right. \\ &\quad \left. + \beta \hat{A}_0 \frac{\partial \Gamma(a, M)}{\partial a} + \frac{1}{2!} \beta^2 \hat{A}_0^2 \frac{\partial^2 \Gamma(a, M)}{\partial a^2} + \frac{1}{3!} \beta^3 \hat{A}_0^3 \frac{\partial^3 \Gamma(a, M)}{\partial a^3} + \dots \right) \\ &= i \int d^2 x B \left\{ \left[c_1 (\nabla^2 \hat{A}_0) + c_2 \beta (\nabla^2 \hat{A}_0) \right] \frac{\partial}{\partial M^2} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial \Gamma}{\partial a} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left[c_1 \beta (\nabla^2 \hat{A}_0) \hat{A}_0 + \frac{c_2}{2} \beta^2 (\nabla^2 \hat{A}_0^2) \right] \frac{\partial}{\partial M^2} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial a^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{c_1}{2} \beta^2 \hat{A}_0 (\nabla^2 \hat{A}_0) \hat{A}_0 + \frac{c_2}{6} \beta^3 (\nabla^2 \hat{A}_0^3) \right] \frac{\partial}{\partial M^2} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial a^3} \right) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Comparando o primeiro termo desta expressão com o correspondente da equação (4.4), temos a relação

$$c_1 + c_2\beta = -\frac{M\beta}{6}.$$

Com o segundo termo, utilizando a igualdade (4.5), temos

$$c_1\beta(\nabla^2\hat{A}_0)\hat{A}_0 + \frac{c_2\beta^2}{2}(\nabla^2\hat{A}_0^2) = (c_1\beta + c_2\beta^2)(\nabla^2\hat{A}_0)\hat{A}_0 + c_2\beta^2(\vec{\nabla}\hat{A}_0) \cdot (\vec{\nabla}\hat{A}_0)$$

e comparando com o segundo termo da expressão (4.4), temos

$$\begin{aligned} c_1\beta + c_2\beta^2 &= -\frac{M\beta^2}{6} \\ c_2\beta^2 &= -\frac{M\beta^2}{12} \end{aligned}$$

de maneira que ficam determinados os coeficientes c_1 e c_2 :

$$c_1 = -\frac{M\beta}{12} \quad (4.9)$$

$$c_2 = -\frac{M}{12}. \quad (4.10)$$

Os mesmos coeficientes são obtidos se for analisado o terceiro termo de (4.8), bastando para isto utilizar a igualdade

$$(\nabla^2\hat{A}_0^3) = 3\hat{A}_0^2(\nabla^2\hat{A}_0) + 6\hat{A}_0(\vec{\nabla}\hat{A}_0) \cdot (\vec{\nabla}\hat{A}_0). \quad (4.11)$$

Desta maneira, o termo da ação efetiva que viola paridade e é cúbico nas derivadas (duas agindo em campos A_0 e uma contida em B) também é obtido exatamente a partir da ação efetiva no caso estático, e é dada pela equação (4.6) com os coeficientes (4.9) e (4.10):

$$(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})_{cub} = -\frac{iM}{12} \int d^2xB \left[\beta(\nabla^2\hat{A}_0) \frac{\partial}{\partial a} + \nabla^2 \right] \frac{\partial}{\partial M^2} \left(\frac{\Gamma(a + \beta\hat{A}_0, M)}{M} \right). \quad (4.12)$$

Esta ação efetiva representa a soma das contribuições da correção de primeira ordem (cúbica nas derivadas) de todas as amplitudes de n pontos (n par). É a primeira correção à parte dominante (4.3) e é também um resultado exato.

Antes de prosseguirmos e tentarmos encontrar uma expressão para a parte da ação efetiva que viola a paridade e que seja de quinta ordem nas derivadas, vamos ver como surgiram as estruturas (3.47), (3.61) e (3.70) dos termos lineares, quadráticos e cúbicos nas derivadas. Com esta análise poderemos calcular a contribuição de quinta ordem.

A ação efetiva original que tínhamos de calcular era dada por

$$\mathcal{S}_{ef} = - \sum_n \text{Tr} \ln(\not{p} + e\mathcal{A} + \gamma_0 \bar{\omega}_n + M) \quad (4.13)$$

onde

$$\bar{\omega}_n = \omega_n + \frac{e}{\beta}(a + \beta \hat{A}_0) = \frac{(2n+1)\pi}{\beta} + \frac{e}{\beta}(a + \beta \hat{A}_0). \quad (4.14)$$

Em analogia com (3.13) e (3.14), fazemos a definição de variáveis

$$\bar{\rho}_n = \sqrt{\bar{\omega}_n^2 + M^2}, \quad \bar{\phi}_n = \tan^{-1} \left(\frac{\bar{\omega}_n}{M} \right) \quad (4.15)$$

e lembramos que agora $\bar{\omega}_n$ é dependente das coordenadas por causa da presença de \hat{A}_0 , de maneira que essas variáveis comutarão com \mathcal{A} mas não com \not{p} . Então teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{ef} &= - \sum_n \text{Tr} \ln(\not{p} + e\mathcal{A} + \bar{\rho}_n e^{\gamma_0 \bar{\phi}_n}) \\ &= - \sum_n \text{Tr} \ln e^{\gamma_0 \bar{\phi}_n/2} \left(e^{-\gamma_0 \bar{\phi}_n/2} \not{p} e^{-\gamma_0 \bar{\phi}_n/2} + e^{-\gamma_0 \bar{\phi}_n/2} e\mathcal{A} e^{-\gamma_0 \bar{\phi}_n/2} + \bar{\rho}_n \right) e^{\gamma_0 \bar{\phi}_n/2} \\ &= - \sum_n \text{Tr} \ln e^{\gamma_0 \bar{\phi}_n/2} \left(\not{p} + e\mathcal{A} + \bar{\rho}_n - \frac{i}{2} \gamma_0 (\not{\partial} \bar{\phi}_n) \right) e^{\gamma_0 \bar{\phi}_n/2} \\ &= - \sum_n \text{Tr} \ln \left(\not{p} + e\mathcal{A} + \bar{\rho}_n - \frac{i}{2} \gamma_0 (\not{\partial} \bar{\phi}_n) \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

pois, da mesma maneira que (3.16), devido à comutação de \mathcal{A} e $\bar{\phi}_n$,

$$e^{-\gamma_0 \bar{\phi}_n/2} e\mathcal{A} e^{-\gamma_0 \bar{\phi}_n/2} = e\mathcal{A} \quad (4.17)$$

e devido à anticomutação de \not{p} e $\bar{\phi}_n$,

$$e^{-\gamma_0 \bar{\phi}_n/2} \not{p} e^{-\gamma_0 \bar{\phi}_n/2} = \not{p} - i \frac{\gamma_0}{2} \not{\partial} \bar{\phi}_n. \quad (4.18)$$

A parte da ação efetiva que viola paridade pode ser calculado da expressão (4.16) através de expansões derivativas e vão ter um número ímpar de $\bar{\phi}_n$. A ação é invariante de *gauge*, e como estamos interessados em termos lineares em \vec{A} , devemos olhar para os termos que contenham B e também termos com derivadas agindo em $\bar{\rho}_n$ e $\bar{\phi}_n$. Da definição destas variáveis vemos que $\bar{\rho}_n$ tem dimensão de energia enquanto $\bar{\phi}_n$ é adimensional. Vamos então construir cada termo mantendo a dimensão correta da ação efetiva e respeitando o número de derivadas para cada termo.

Desta maneira por exemplo, o termo linear na derivada e que contenha um campo A_0 e deixe a ação efetiva adimensional deve ser do tipo

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})_{lin} &= a_1 \sum_n \int d^2x B \bar{\phi}_n \\ &= a_1 \int d^2x B \tan^{-1} \left(\tanh \frac{\beta M}{2} \tan \left(\frac{e(a + \beta \hat{A}_0)}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

e a_1 pode ser determinado levando-se em conta que no limite $\hat{A}_0 = 0$ a ação deve se reduzir ao caso estático (3.26), então $a_1 = \frac{ie}{2\pi}$, de maneira que temos

$$(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})_{lin} = i \int d^2x B \Gamma(a + \beta \hat{A}_0, M). \quad (4.20)$$

Para a ordem de termos cúbicos na derivada precisamos de ter mais duas derivadas agindo nos campos \hat{A}_0 além da derivada em B e um número ímpar de $\bar{\phi}_n$, de maneira que a forma mais geral da ação efetiva que viola a paridade com esta forma é

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})_{cub} &= \sum_n \int d^2x B \left[b_1 \frac{(\nabla^2 \bar{\phi}_n)}{\bar{\rho}_n^2} + b_2 \frac{(\vec{\nabla} \bar{\rho}_n) \cdot (\vec{\nabla} \bar{\phi}_n)}{\bar{\rho}_n^3} \right] \\ &= \sum_n \int d^2x B \left[e M b_1 \left(\frac{(\nabla^2 \hat{A}_0)}{\bar{\rho}_n^4} - \frac{2e\bar{\omega}_n}{\bar{\rho}_n^6} (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \cdot (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \right) \right. \\ &\quad \left. + e^2 M b_2 \frac{\bar{\omega}_n}{\bar{\rho}_n^6} (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \cdot (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Aqui temos contribuição tanto de $B\hat{A}_0$ como de $B\hat{A}_0^3$, e comparando com o resultado obtido anteriormente, segundos termos das equações (3.47) e (3.69), temos

os coeficientes $b_1 = \frac{ie}{12\pi}$ e $b_2 = 0$. Assim, teremos para a ação efetiva que viola paridade até termos cúbicos nas derivadas,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})_{cub} &= \frac{ie^2 M}{12\pi} \sum_n \int d^2 x B \left[\frac{(\nabla^2 \hat{A}_0)}{(\bar{\omega}_n^2 + M^2)^2} - \frac{2e\bar{\omega}_n}{(\bar{\omega}_n^2 + M^2)^3} (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \cdot (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \right] \\
&= -\frac{ie^2 M}{24\pi} \sum_n \int d^2 x B \frac{\partial}{\partial M^2} \left[\frac{(\nabla^2 \hat{A}_0)}{(\bar{\omega}_n^2 + M^2)} + \frac{1}{eM} (\nabla^2 \tan^{-1} \frac{\bar{\omega}_n}{M}) \right] \\
&= -\frac{ie^2 M}{24\pi} \sum_n \int d^2 x B \frac{\partial}{\partial M^2} \left[2 \frac{(\nabla^2 \hat{A}_0)}{(\bar{\omega}_n^2 + M^2)} - \frac{2\bar{\omega}_n}{(\bar{\omega}_n^2 + M^2)^2} (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \cdot (\vec{\nabla} \hat{A}_0) \right] \\
&= -\frac{iM}{12} \int d^2 x B \left[\beta (\nabla^2 \hat{A}_0) \frac{\partial}{\partial a} + \nabla^2 \right] \frac{\partial}{\partial M^2} \left(\frac{\Gamma(a + \beta \hat{A}_0, M)}{M} \right) \quad (4.22)
\end{aligned}$$

onde foi usado as equações (3.26) e (3.58) para se chegar na última igualdade. Esta equação concorda com a expressão (4.8) já obtida anteriormente para a ação efetiva completa da correção de primeira ordem (cúbica nas derivadas) ao termo dominante.

4.1.3 Termo de quinta ordem nas derivadas

Vamos agora encontrar uma expressão para a ação efetiva que viola paridade e contenha termos até quinta ordem nas derivadas. Baseado na análise anterior para os termos linear e cúbico, não é difícil notar que com cinco derivadas existem 12 possíveis maneiras de se aplicar as derivadas nos campos \hat{A}_0 com fatores multiplicativos diferentes. Entretanto, do caso anterior com termos contendo três derivadas, vemos que os termos com $\bar{\phi}_n$ aparecem com no mínimo um operador do tipo ∇^2 agindo nele, e vamos exigir isso aqui também. Além disso, agora precisamos de quatro derivadas agindo nos campos \hat{A}_0 . Com estas exigências, a forma mais geral que podemos escrever para a ação efetiva é

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})_{qui} &= \\
&= \sum_n \int d^2 x B \left[c_1 \frac{\nabla^4 \bar{\phi}_n}{\bar{\rho}_n^4} + c_2 \frac{(\nabla^2 \bar{\phi}_n)(\nabla^2 \bar{\rho}_n)}{\bar{\rho}_n^5} + c_3 \frac{(\partial_i \bar{\rho}_n)(\partial_i \nabla^2 \bar{\phi}_n)}{\bar{\rho}_n^5} + c_4 \frac{(\nabla^2 \bar{\phi}_n)(\partial_i \bar{\rho}_n)^2}{\bar{\rho}_n^6} \right]. \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Os coeficientes podem então ser calculados comparando-se com os resultados já obtidos, que são os terceiros termos das equações (3.47) e (3.61) e a equação (3.70).

O resultado é

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})_{qui} &= \\
&= -\frac{ie}{60\pi} \sum_n \int d^2x_B \left[\frac{\nabla^4 \bar{\phi}_n}{\bar{\rho}_n^4} - \frac{3(\nabla^2 \bar{\phi}_n)(\nabla^2 \bar{\rho}_n) + 4(\partial_i \bar{\rho}_n)(\partial_i \nabla^2 \bar{\phi}_n)}{\bar{\rho}_n^5} + \frac{7(\nabla^2 \bar{\phi}_n)(\partial_i \bar{\rho}_n)^2}{\bar{\rho}_n^6} \right].
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Fazendo a soma sobre as frequências, teremos a seguinte expressão para a ação efetiva completa que viola paridade em todas as ordens nos campos \hat{A}_0 com até cinco derivadas:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_{ef}^{PV(1)})_{qui} &= -\frac{iM}{30} \int d^2x_B \left\{ e^2 \beta^2 [(\partial_i \hat{A}_0)^2]^2 \left(\frac{13}{8} + \frac{5}{12} M^2 \frac{\partial}{\partial M^2} \right) \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial}{\partial M^2} \right) \right. \\
&+ e^2 \beta \left[(\partial_i \hat{A}_0)^2 \nabla^2 \hat{A}_0 \left(\frac{11}{2} + \frac{5}{3} M^2 \frac{\partial}{\partial M^2} \right) + \partial_i \hat{A}_0 \partial_j \hat{A}_0 \partial_i \partial_j \hat{A}_0 \left(\frac{20}{3} + 2M^2 \frac{\partial}{\partial M^2} \right) \right] \frac{\partial}{\partial M^2} \\
&- \beta^2 \left[\partial_i \hat{A}_0 \partial_i \nabla^2 \hat{A}_0 + \frac{5}{12} (\nabla^2 \hat{A}_0)^2 + \frac{1}{3} (\partial_i \partial_j \hat{A}_0)^2 \right] \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\beta}{2} (\nabla^2)^2 \hat{A}_0 \left. \right\} \\
&\times \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial}{\partial M^2} \right)^2 \left(\frac{\Gamma(a + \beta \hat{A}_0, M)}{M} \right).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Nesta expressão, todas as derivadas agem somente nos campos imediatamente a sua direita.

Vale ressaltar que os resultados obtidos aqui são exatos, as equações (4.3), (4.22) e (4.25) representam a soma de todas as amplitudes de n pontos (n par) para a parte da ação efetiva que seja dominante (linear na derivada), correção de primeira ordem (cúbico nas derivadas) e correção de segunda ordem (quinta ordem nas derivadas), respectivamente.

4.2 Invariância por Transformações de *Gauge* ‘Pequenas’ e Localidade

A ação efetiva resultante da interação de um campo fermiônico com um campo de *gauge* é invariante de *gauge* por transformações ‘pequenas’. Mas no caso de expansões derivativas, essa invariância de *gauge* não é evidente. Também existe um problema de localidade com a ação efetiva obtida desta última maneira. Vamos mostrar aqui que a parte da ação efetiva que viola paridade e é linear em \vec{A} é tanto invariante de *gauge* por transformações ‘pequenas’ como local.

Considerando a ação efetiva dada pela equação (3.35), que é linear em \vec{A} , vamos fazer uma transformação de *gauge* do tipo

$$A \rightarrow A + \partial\alpha \quad (4.26)$$

onde α é o parâmetro da transformação. A ação efetiva ficará da forma

$$\mathcal{S}_{ef}^{(1)} \rightarrow \mathcal{S}_{ef}^{(1)} + \delta\mathcal{S}_{ef}^{(1)} \quad (4.27)$$

onde

$$\delta\mathcal{S}_{ef}^{(1)} = -e \sum_n \text{Tr} \frac{1}{\not{p} + \gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0) + M} (\not{p}\alpha). \quad (4.28)$$

Usando a relação de comutação (3.21)

$$[p_i, \alpha] = -i(\partial_i\alpha) \quad (4.29)$$

e definindo $\not{p} + \gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0) + M = \not{p} + C$ apenas para simplificar os cálculos, teremos,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}_{ef}^{(1)} &= -e \sum_n \text{Tr} \frac{1}{\not{p} + C} (\not{p}\alpha) \\ &= ie \sum_n \text{Tr} \frac{1}{\not{p} + C} (\alpha\not{p} - \not{p}\alpha) \\ &= ie \sum_n \text{Tr} \left(\alpha \frac{1}{\not{p} + C} \not{p} - \frac{1}{\not{p} + C} \not{p}\alpha \right) \\ &= ie \sum_n \text{Tr} \left(\alpha\not{p} \frac{1}{\not{p} + C} + i\not{p} \left(\alpha \frac{1}{\not{p} + C} \right) - i(\not{p}\alpha) \frac{1}{\not{p} + C} - \frac{1}{\not{p} + C} \not{p}\alpha \right) \\ &= ie \sum_n \text{Tr} \left(\not{p}\alpha \frac{1}{\not{p} + C} + i(\not{p}\alpha) \frac{1}{\not{p} + C} - i(\not{p}\alpha) \frac{1}{\not{p} + C} - \frac{1}{\not{p} + C} \not{p}\alpha \right) \\ &= ie \sum_n \text{Tr} \left(\not{p} \frac{1}{\not{p} + C} \alpha - \frac{1}{\not{p} + C} \not{p}\alpha \right) \\ &= ie \sum_n \text{Tr} \left[\not{p}, \frac{1}{\not{p} + C} \right] \alpha. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Agora escrevemos

$$\not{p} = \not{p} + C - C = \not{p} + \gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0) + M - (\gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0) + M) \quad (4.31)$$

e então teremos

$$\begin{aligned}
\delta S_{ef}^{(1)} &= ie \sum_n \text{Tr} \left((\not{p} + C - C) \frac{1}{\not{p} + C} - \frac{1}{\not{p} + C} (\not{p} + C - C) \right) \alpha \\
&= ie \sum_n \text{Tr} \left(-C \frac{1}{\not{p} + C} + \frac{1}{\not{p} + C} C \right) \alpha \\
&= ie \sum_n \text{Tr} \left(-C \frac{1}{\not{p} + C} \alpha + \frac{1}{\not{p} + C} C \alpha \right) \\
&= ie \sum_n \text{Tr} \left(-C \frac{1}{\not{p} + C} \alpha + \frac{1}{\not{p} + C} \alpha C \right) \\
&= ie \sum_n \text{Tr} \left(-\frac{1}{\not{p} + C} \alpha C + \frac{1}{\not{p} + C} \alpha C \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.32}$$

onde foi usado o fato de que o numerador comuta com α e a ciclicidade do traço, $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA)$. Isso mostra que a expressão (3.35) é invariante por transformações de *gauge* ‘pequena’.

Vamos agora procurar uma expressão para a ação efetiva, no contexto de expansões derivativas, que seja manifestamente invariante por transformações de *gauge* ‘pequena’. A ação efetiva original era da forma

$$S_{ef} = - \sum_n \text{Tr} \ln \left[\not{p} + \gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0) + M + e\hat{A} \right], \tag{4.33}$$

e sabemos que o campo vetorial \vec{A} tem a seguinte decomposição em duas dimensões

$$A_i = \partial_i \sigma + \epsilon_{ij} \partial_j \rho \tag{4.34}$$

de maneira que

$$(\partial^2 \rho) = -\epsilon_{ij} \partial_i A_j = -B. \tag{4.35}$$

Usando isto e o fato de que somente \not{p} não comuta com σ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
S_{ef} &= - \sum_n \text{Tr} \ln \left(\not{p} + \gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0) + M + e\hat{A} \right) \\
&= - \sum_n \text{Tr} \ln \left[e^{-ie\sigma} \left(e^{ie\sigma} \not{p} e^{-ie\sigma} + \gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0) + M + e(\not{p}\sigma + \epsilon_{ij} \gamma_i \partial_j \rho) \right) e^{ie\sigma} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_n \text{Tr} \ln \left[e^{-ie\sigma} \left(\not{p} - e\not{\partial}\sigma + \gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0) + M + e(\not{\partial}\sigma + \epsilon_{ij}\gamma_i\partial_j\rho) \right) e^{ie\sigma} \right] \\
&= - \sum_n \text{Tr} \ln \left[e^{-ie\sigma} \left(\not{p} + \gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0) + M + e\gamma_0(\not{\partial}\rho) \right) e^{ie\sigma} \right] \\
&= - \sum_n \text{Tr} \ln \left(\not{p} + \gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0) + M + e\gamma_0(\not{\partial}\rho) \right) \tag{4.36}
\end{aligned}$$

onde foi usado que

$$e^{ie\sigma}\not{p}e^{-ie\sigma} = (1 + ie\sigma + \dots)\not{p}(1 - ie\sigma + \dots) = \not{p} - e\not{\partial}\sigma$$

e a propriedade $\epsilon_{ij}\gamma_i \equiv \epsilon_{0ij}\gamma_i = \gamma_0\gamma_j$ que segue diretamente de (3.9). Com isto e da definição da ação efetiva que viola paridade dada por (3.19), teremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{S}_{ef}^{PV}}{\partial a} &= \\
&= -\frac{e}{2\beta} \sum_n \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p} + \gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0) + M + e\gamma_0(\not{\partial}\rho)} - \frac{1}{\not{p} + \gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0) - M + e\gamma_0(\not{\partial}\rho)} \right] \gamma_0 \\
&= -\frac{eM}{\beta} \sum_n \text{Tr} \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2 + N} \gamma_0 \tag{4.37}
\end{aligned}$$

onde

$$N = (-ie\gamma_0(\not{\partial}\hat{A}_0) + 2e\tilde{\omega}_n\hat{A}_0 + e^2\hat{A}_0^2) + ie\gamma_0(\partial^2\rho) - e^2(\partial_i\rho)(\partial_i\rho). \tag{4.38}$$

Os termos quadráticos saem diretamente, para os termos cruzados temos

$$\begin{aligned}
e\not{p}\gamma_0(\not{\partial}\rho) + e\gamma_0(\not{\partial}\rho)\not{p} &= -e\gamma_0(\not{p}(\not{\partial}\rho) - (\not{\partial}\rho)\not{p}) = -ie\gamma_0(\partial^2\rho) \\
\not{p}\gamma_0e\hat{A}_0 + \gamma_0e\hat{A}_0\not{p} &= -e\gamma_0(\not{p}\hat{A}_0 - \hat{A}_0\not{p}) = ie\gamma_0(\not{\partial}\hat{A}_0) \\
e\gamma_0(\not{\partial}\rho)\gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0) + \gamma_0(\tilde{\omega}_n + e\hat{A}_0)e\gamma_0(\not{\partial}\rho) &= 0 \\
e\gamma_0(\not{\partial}\rho)e\gamma_0(\not{\partial}\rho) &= e^2(\partial_i\rho)(\partial_i\rho) \\
\gamma_0\tilde{\omega}_n\gamma_0e\hat{A}_0 + \gamma_0e\hat{A}_0\gamma_0\tilde{\omega}_n &= -2e\tilde{\omega}_n\hat{A}_0
\end{aligned}$$

de onde segue a expressão para N . Com a equação (4.34) vemos que os dois últimos termos de N podem ser expressos em termos do campo magnético B . O penúltimo termo é local em termos de B enquanto o último é um termo não-local, pois pode ser escrito como $-e^2(\partial_i\rho)(\partial_i\rho) = -e^2(\nabla^{-1}B)^2$. A parte não-local dará contribuição da ordem de B^2 , mostrando que o termo linear em B , que é o que nos interessa,

é local. Tomando somente a parte local, usando a expansão (3.22), temos uma expressão para o termo linear em B , dado por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S_{ef}^{PV(1)}}{\partial a} &= -\frac{e^2 M}{\beta} \sum_n \text{Tr} \left[\frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2 + 2e\tilde{\omega}_n \hat{A}_0 + e^2 \hat{A}_0^2 - ie\gamma_0 (\not{D} \hat{A}_0)} \right. \\
 &\quad \left. \times (i\gamma_0 B) \frac{1}{p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2 + 2e\tilde{\omega}_n \hat{A}_0 + e^2 \hat{A}_0^2 - ie\gamma_0 (\not{D} \hat{A}_0)} \right] \gamma_0 \\
 &= \frac{2ie^2 M}{\beta} \sum_n \text{tr} \frac{1}{(p^2 + \tilde{\omega}_n^2 + M^2 + 2e\tilde{\omega}_n \hat{A}_0 + e^2 \hat{A}_0^2)^2 - e^2 (\partial_i \hat{A}_0)^2} B.
 \end{aligned}
 \tag{4.39}$$

Para qualquer ordem nos campos \hat{A}_0 o denominador pode ser expandido, como foi discutido antes. Esta expressão tem a vantagem de ser manifestamente invariante de *gauge* desde o início.

Conclusão

Na primeira parte deste trabalho, capítulos 1 e 2, apenas analisamos as principais características da física em um espaço em $2 + 1$ dimensões, dando ênfase às peculiaridades que aparecem devido a um termo de Chern-Simons, que como sabemos só aparece em dimensões ímpares do espaço-tempo. A invariância de *gauge* da teoria, a geração de massa que ela implica e a quebra das simetrias \mathcal{P} e \mathcal{T} são as principais características desta teoria. Uma breve descrição de como tratar modelos de teoria de campos a temperatura finita foi feita no segundo capítulo, pois na parte principal do trabalho utilizamos esta ferramenta. Sem dúvida os principais resultados estão nos capítulos 3 e 4. Ao estudarmos perturbativamente uma lagrangeana de férmions ocorre a indução de um termo de Chern-Simons. Mostramos que no limite estático este termo responsável pela quebra de paridade da ação efetiva a temperatura finita é linear no campo magnético B . Não existe correções de ordem mais alta neste caso, e a amplitude térmica é simplesmente proporcional a $A_0 B$. Quando tentamos ir além do limite estático, permitindo uma dependência nas coordenadas do campo \hat{A}_0 , conseguimos importantes resultados. Considerando ainda uma ação efetiva linear em \vec{A} , mas agora com um número arbitrário de campos \hat{A}_0 , calculamos os termos lineares, quadráticos e cúbicos em \hat{A}_0 . Encontramos que o resultado final fica ainda dependente dos parâmetros de Feynman, de maneira que não pode ser obtido de forma fechada. Para contornar este problema utilizamos o método das expansões derivativas, válido no caso dos campos \hat{A}_0 terem uma dependência pequena com as coordenadas, o que supomos então. O método consiste em fazer uma expansão em potências das derivadas, de modo que as integrais naqueles parâmetros podem ser feitas e temos uma expressão fechada para as amplitudes, embora em termos de uma soma infinita em potências das derivadas. Estes resultados ficam sendo funções do resultado obtido no limite

estático, ou seja, conhecendo-se a ação efetiva no limite estático, ficam determinados também as primeiras correções ao limite estático. Estes mesmos resultados foram obtidos no Apêndice B no espaço de momentos, através dos cálculos das funções de 2 e 4 pontos, para efeito de comparação. O que surge de novo desta análise é que podemos generalizar nossos resultados e obter uma expressão analítica fechada para os primeiros termos nas derivadas da ação efetiva, ou seja, para os termos dominantes. O termo dominante da ação efetiva (linear na derivada) que viola paridade fica completamente determinado a partir do conhecimento da ação efetiva no limite estático. Vale ressaltar que é um resultado analítico exato, correspondente à soma dos termos dominantes de todas as amplitudes de n pontos, com n par, pois sabemos que as amplitudes com n ímpar se anulam pela conjugação da carga. Perturbativamente teríamos de calcular todos os gráficos de n pontos e somá-los. O mesmo resultado geral foi obtido para a correção em primeira ordem (cúbico nas derivadas) e segunda ordem (quinta ordem nas derivadas) ao termo dominante da ação efetiva que viola paridade. Assim obtivemos exatamente, até a quinta ordem nas derivadas, a parte da ação efetiva que viola paridade, contendo um campo \vec{A} e um número arbitrário de campos \hat{A}_0 . Também verificamos que estes termos são locais e invariantes por transformações de *gauge*. Isto mostra que estas contribuições possuem um significado físico, e podem ser relevantes para a descrição de diversos processos que ocorrem em altas temperaturas.

Apêndice A

Algumas fórmulas e expressões utilizadas no texto.

- Traços de matrizes gama no espaço Euclidiano em $D = 2$, com representação

$$\gamma_0 = i\sigma_3, \quad \gamma_1 = i\sigma_1, \quad \gamma_2 = i\sigma_2.$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = -2\delta_{\mu\nu} \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho) = 2\epsilon_{\mu\nu\rho} \quad (\text{A.2})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 2(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\rho\nu} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}) \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\lambda \gamma_\sigma) = -2(\delta_{\mu\nu}\epsilon_{\rho\lambda\sigma} + \delta_{\rho\lambda}\epsilon_{\mu\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\epsilon_{\rho\lambda\nu} - \delta_{\nu\sigma}\epsilon_{\rho\lambda\mu}) \quad (\text{A.4})$$

- Integrais D-dimensionais obtidas com regularização dimensional:

$$\int d^D p \frac{p_\mu}{(p^2 + s + i\epsilon)^n} = 0. \quad (\text{A.5})$$

$$\int d^D p \frac{1}{(p^2 + s + i\epsilon)^n} = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}}. \quad (\text{A.6})$$

$$\int d^D p \frac{p_\mu p_\mu}{(p^2 + s + i\epsilon)^n} = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - D/2 - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{D}{s^{n-D/2-1}}. \quad (\text{A.7})$$

$$\int d^D p \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + s + i\epsilon)^n} = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - D/2 - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{g_{\mu\nu}}{s^{n-D/2-1}}. \quad (\text{A.8})$$

- Alguns somatórios úteis:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln(\omega_n^2 + x^2) = \beta x + 2 \ln(1 \pm e^{-\beta x}) + (\text{const. independ. de } x) \quad (\text{A.9})$$

onde $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$ para o sinal positivo e $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$ para o sinal negativo. Isso segue de

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln(\omega_n^2 + x^2) \right) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{\omega_n^2 + x^2} = \beta \frac{(e^{\beta x} \pm 1)}{(e^{\beta x} \mp 1)}$$

onde a última igualdade é obtida por meio de uma integração no plano complexo com um contorno apropriado e finalmente fazendo-se a integração em x no último termo obtemos a expressão (A.9). Detalhes podem ser obtidos em [19], pag. 248.

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{(2n+1)\pi}{\beta} + \frac{\theta}{\beta}\right)^2 + \mu^2} &= \frac{\beta}{4\mu} \left[\tanh \frac{1}{2}(\beta\mu - i\theta) + \tanh \frac{1}{2}(\beta\mu + i\theta) \right] \\ &= \frac{\beta \tanh \frac{\beta\mu}{2} (1 - \tanh^2 \frac{i\theta}{2})}{2\mu (1 - \tanh^2 \frac{\beta\mu}{2} \tanh^2 \frac{i\theta}{2})} \\ &= \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial}{\partial \theta} \tan^{-1} \left(\tanh \frac{\beta\mu}{2} \tan \frac{\theta}{2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde a primeira igualdade é obtida da mesma maneira que em (A.9) e na segunda linha foi utilizado a expressão

$$\tanh(A \pm B) = \frac{\tanh A \pm \tanh B}{1 \pm \tanh A \tanh B},$$

e na última linha foi utilizado a igualdade

$$\tanh iz = i \tan z.$$

- Parametrização de Feynman:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[b + (a-b)z]^2} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \frac{1}{[a + (b-a)y + (c-a)z]^3} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{1}{abcd} = 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-y} dz \frac{1}{[a + (b-a)x + (c-a)y + (d-a)z]^4} \quad (\text{A.13})$$

- Expansões úteis:

$$\frac{1}{(1-x)^n} \simeq 1 + nx + \frac{1}{2}n(n+1)x^2 + \dots \quad (\text{A.14})$$

$$\ln(1+x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} x^{j+1} \quad (\text{A.15})$$

Apêndice B

Neste apêndice vamos apresentar os principais resultados do cálculo perturbativo da amplitude do diagrama de auto energia em um *loop* no espaço de momentos derivado da densidade de lagrangeana dada por (3.1). Foi utilizado um programa de manipulação algébrica para ajudar nos cálculos, que para a função de 4 pontos é bem complicado. Os resultados podem ser comparados com os obtidos através do método de expansão derivativa.

Função de 2 pontos

Vamos começar com o cálculo da função de dois pontos da parte que viola a paridade da ação efetiva a temperatura finita em um *loop* fermiônico. Faremos o cálculo no limite estático, pois como estamos tratando o problema a temperatura finita, sabemos que as amplitudes são não-analíticas, então só podemos tratar o problema em determinados limites. O limite estático é caracterizado por $k_{10} = 0$, onde $k_1 = (k_{10}, \vec{k}_1)$ é o momento externo associado ao bóson. O diagrama a ser considerado é:

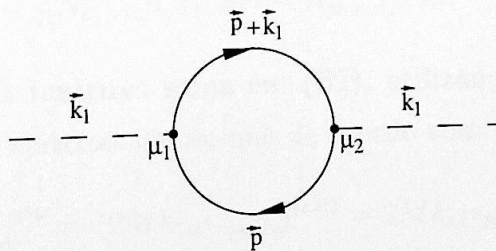


Fig. 1: Gráfico representando a função de 2 pontos de um *loop* fermiônico.

A amplitude de 2 pontos que temos de calcular é dada por:

$$\Pi_{\mu_1\mu_2}^{PV}(k_1, M) = \frac{1}{2}[\Pi_{\mu_1\mu_2}(k_1, M) - \Pi_{\mu_1\mu_2}(k_1, -M)] \quad (\text{B.1})$$

pois estamos interessados apenas na parte que viola a paridade, onde

$$\Pi_{\mu_1\mu_2}(k_1, \pm M) = -\frac{e^2}{(2\pi)^2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^2\vec{p} \frac{N_{\mu_1\mu_2}(p, k_1, \pm M)}{(p^2 - M^2)[(p + k_1)^2 - M^2]} \quad (\text{B.2})$$

e

$$N_{\mu_1\mu_2}(p, k_1, \pm M) = \text{Tr}[\gamma_{\mu_1}(\not{p} + \not{k}_1 \pm M)\gamma_{\mu_2}(\not{p} \pm M)] \quad (\text{B.3})$$

A componente zero do tri-momento associado com o *loop* de férmion é quantizado e puramente imaginário, de acordo com os cálculos a temperatura finita, dado por

$$p_0 = \frac{i\pi(2n + 1)}{\beta} \equiv i\omega_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{B.4})$$

e lembrando que estamos considerando o limite estático, onde $k_{10} = 0$, a amplitude de 2 pontos (B.1) pode ser escrita como

$$\Pi_{\mu_1\mu_2}^{(est)PV}(k_1, M) = -\frac{e^2}{(2\pi)^2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^2\vec{p} \frac{N_{\mu_1\mu_2}^{(est)PV}}{(\vec{p}^2 + M_\omega^2)[(\vec{p} + \vec{k}_1)^2 + M_\omega^2]} \quad (\text{B.5})$$

onde

$$M_\omega^2 \equiv \omega_n^2 + M^2 \quad (\text{B.6})$$

e

$$N_{\mu_1\mu_2}^{(est)PV} = \frac{1}{2}[N_{\mu_1\mu_2}(p, k_1, M) - N_{\mu_1\mu_2}(p, k_1, -M)] \Big|_{k_{10}=0} \quad (\text{B.7})$$

Calculando o traço das matrizes gama em (B7), utilizando (B3), o que temos é apenas o traço de três matrizes gama, que de acordo com (A.2), nos dá

$$N_{\mu_1\mu_2}^{(est)PV} = (2Mk_{1\alpha}\epsilon_{\alpha\mu_1\mu_2})^{(est)} = 2Mk_{1j}\epsilon_{j\mu_1\mu_2}. \quad (\text{B.8})$$

Como estamos no limite estático, onde $k_{10} = 0$, devemos escolher um dos dois índices μ_1 ou μ_2 para ser igual a zero. Escolhemos $\mu_1 = 0$ e $\mu_2 = i$. Agora, utilizando a parametrização de Feynman (A.11) e fazendo a mudança de variáveis

$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - z\vec{k}_1$, podemos facilmente fazer a integração sobre \vec{p} , de acordo com as integrais do apêndice A, e assim obtemos para a amplitude de 2 pontos

$$\begin{aligned}
\Pi_{0i}^{(est)PV}(k_1, M) &= -\frac{2Me^2}{(2\pi)^2\beta}\epsilon_{ij}k_{1j}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int d^2\vec{p}\frac{1}{(\vec{p}^2 + M_\omega^2)[(\vec{p} + \vec{k}_1)^2 + M_\omega^2]} \\
&= -\frac{2Me^2}{(2\pi)^2\beta}\epsilon_{ij}k_{1j}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^1 dz\int d^2\vec{p}\frac{1}{[\vec{p}^2 + z(1-z)\vec{k}_1^2 + M_\omega^2]^2} \\
&= -\frac{Me^2}{2\pi\beta}\epsilon_{ij}k_{1j}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^1 dz\frac{1}{z(1-z)\vec{k}_1^2 + M^2 + \omega_n^2} \tag{B.9}
\end{aligned}$$

A soma sobre as frequências discretas pode ser realizada facilmente com ajuda da equação (A.10) do apêndice, onde tomamos $\theta = 0$, o que nos fornece

$$\Pi_{0i}^{(est)PV}(k_1, M) = -\frac{Me^2}{4\pi}\epsilon_{ij}k_{1j}\int_0^1 dz\frac{\tanh\left(\frac{\beta\sqrt{z(1-z)\vec{k}_1^2 + M^2}}{2}\right)}{\sqrt{z(1-z)\vec{k}_1^2 + M^2}}. \tag{B.10}$$

Aqui vemos que mesmo para o caso mais simples do cálculo da auto-energia em um *loop* no limite estático não podemos obter uma expressão fechada para a amplitude. No entanto, fazendo uma expansão em potências de $(\vec{k}_1)^2$, podemos obter uma expressão fechada para a amplitude de 2 pontos,

$$\begin{aligned}
\Pi_{0i}^{(est)PV}(k_1, M) &= \\
&= -\epsilon_{ij}k_{1j}\frac{Me^2}{2\pi}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\int_0^1 z^s(1-z)^s dz (\vec{k}_1^2)^s \frac{(-1)^s}{s!}\frac{\partial^s}{(\partial M^2)^s}\left[\frac{1}{2M}\tanh\left(\frac{M\beta}{2}\right)\right] \tag{B.11}
\end{aligned}$$

e com a ajuda da equação (3.25), obtemos finalmente

$$\begin{aligned}
\Pi_{0i}^{(est)PV}(k_1, M) &= \\
&= -\epsilon_{ij}k_{1j}M\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\int_0^1 z^s(1-z)^s dz}{s!}(\vec{k}_1^2)^s\frac{\partial^s}{(\partial M^2)^s}\left(\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial a}\Gamma(a, M)\Big|_{a=0}\right). \\
&= -\epsilon_{ij}k_{1j}M\left[\left(\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial a}\Gamma(a, M)\Big|_{a=0}\right) + \frac{\vec{k}_1^2}{6}\frac{\partial}{\partial M^2}\left(\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial a}\Gamma(a, M)\Big|_{a=0}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\vec{k}_1^2)^2}{60}\frac{\partial^2}{(\partial M^2)^2}\left(\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial a}\Gamma(a, M)\Big|_{a=0}\right) + \dots\right] \tag{B.12}
\end{aligned}$$

Esta equação nos dá a amplitude de 2 pontos no espaço de momentos que é obtida da parte que viola paridade da ação efetiva tomando-se derivada funcional com respeito a $A_0(\vec{k}_1)$ e $A_i(-\vec{k}_1)$.

Função de 4 pontos

Vamos agora ao cálculo da amplitude de 4 pontos no espaço de momentos de um *loop* fermiônico. O diagrama a ser considerado é:

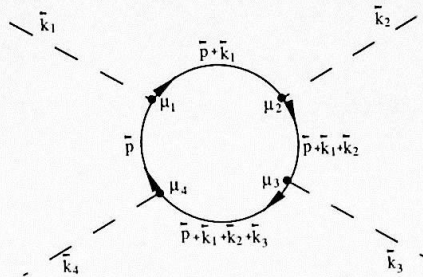


Fig. 2: Gráfico representando a função de 4 pontos de um *loop* fermiônico.

Seguindo os mesmos passos das equações (B.1-B.5), a amplitude que nos interessa é expressa por

$$\Pi_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{(est)PV}(k_1, k_2, k_3, M)_{(1234)} = -\frac{e^4}{(2\pi)^2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^2\vec{p} N_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{(est)PV}(p, k_1, k_2, k_3, M) \times \frac{1}{(\vec{p}^2 + M_\omega^2)[(\vec{p} + \vec{k}_1)^2 + M_\omega^2][(\vec{p} + \vec{k}_1 + \vec{k}_2)^2 + M_\omega^2][(\vec{p} + \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3)^2 + M_\omega^2]} \quad (B.13)$$

onde o índice subscrito (1234) significa que estamos calculando a contribuição apenas do gráfico da Figura 2 acima, embora existam 6 gráficos que dão uma contribuição semelhante, obtidos fazendo-se todas as permutações dos índices dos momentos externos. A amplitude completa é a soma de todas essas contribuições. De forma diagramática simples, os gráficos que contribuem são representados por

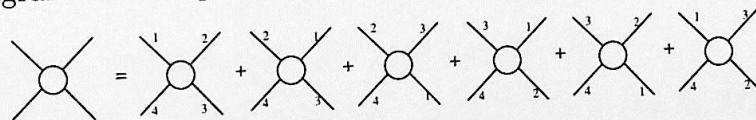


Fig. 3: Representação de todas as contribuições para a função de 4 pontos.

onde os índices numéricos representam os momentos externos. A amplitude final será então dada formalmente por

$$\Pi^{(est)PV} = \Pi_{(1234)}^{(est)PV} + \Pi_{(2134)}^{(est)PV} + \Pi_{(2314)}^{(est)PV} + \Pi_{(3124)}^{(est)PV} + \Pi_{(3214)}^{(est)PV} + \Pi_{(1324)}^{(est)PV}. \quad (\text{B.14})$$

Considerando somente o primeiro gráfico do conjunto acima, detalhado na Figura 4, vamos calcular sua contribuição e as demais serão obtidas simplesmente por troca de índices. Para a equação (B.13), temos que

$$\begin{aligned} N_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{(est)PV}(k_1, k_2, k_3, M) &= \\ &= \frac{1}{2} [N_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p, k_1, k_2, k_3, M) - N_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p, k_1, k_2, k_3, -M)] \Big|_{k_{10}=k_{20}=k_{30}=0} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

onde

$$\begin{aligned} N_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p, k_1, k_2, k_3, \pm M) &= \\ &= \text{Tr}[\gamma_{\mu_1}(\not{p} + \not{k}_1 \pm M)\gamma_{\mu_2}(\not{p} + \not{k}_1 + \not{k}_2 \pm M)\gamma_{\mu_3}(\not{p} + \not{k}_1 + \not{k}_2 + \not{k}_3 \pm M)\gamma_{\mu_4}(\not{p} \pm M)] \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Do caso anterior, para a função de dois pontos, já sabemos que não é possível obter uma forma fechada para a amplitude, o mesmo ocorrendo com a amplitude de 4 pontos, já que os cálculos aqui são bem mais complicados. O que faremos é supor desde o início a aproximação $|\vec{k}_i| \ll M_\omega$ e analisar separadamente cada termo individual até quinta ordem no momento externo e ainda considerar o caso com componentes específicas $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ e $\mu_4 = i$, que corresponde a parte da ação efetiva contendo três campos A_0 e um campo magnético.

A parte que viola paridade vinda do numerador da equação (B.13) é uma função ímpar dos momentos externos, que pode ser linear ou cúbica nos momentos. Tomando os momentos externos iguais a zero no denominador e tomando somente as contribuições lineares do numerador da equação (B.13), obtemos a contribuição de ordem dominante para a amplitude de 4 pontos, ou seja, a contribuição linear nos momentos externos, indicado pelo índice sobrescrito (1),

$$\Pi_{000i(1234)}^{(est)PV(1)} = -\frac{e^4}{(2\pi)^2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^2\vec{p} \frac{N_{000i}^{(est)PV}(p, k_1, k_2, k_3, M)^{(1)}}{(\vec{p}^2 + M^2 + \omega_n^2)^4} \quad (\text{B.17})$$

onde

$$\begin{aligned} N_{000i}^{(est)PV}(p, k_1, k_2, k_3, M)^{(1)} &= \\ &= 2M\epsilon_{ij}[(3k_{1j} + 4k_{2j} + 3k_{3j})\omega_n^2 - (k_{1j} + k_{3j})(\vec{p}^2 + M^2)] \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

vem do cálculo do traço. Agora, substituindo a equação (B.18) na equação (B.17), e fazendo todas as permutações dos índices dos momentos externos, de acordo com a equação (B.14), a amplitude de 4 pontos completa para a contribuição dominante (linear) nos momentos externos será dada por

$$\Pi_{000i}^{(est)PV(1)} = -8\epsilon_{ij}k_{4j} \frac{Me^4}{(2\pi)^2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^2\vec{p} \frac{\vec{p}^2 + M^2 - 5\omega_n^2}{(\vec{p}^2 + M^2 + \omega_n^2)^4}, \quad (\text{B.19})$$

onde $k_1 + k_2 + k_3 = -k_4$ representa a conservação do momento. A integração sobre \vec{p} é direta, com as fórmulas do apêndice A, dando

$$\Pi_{000i}^{(est)PV(1)} = -2\epsilon_{ij}k_{4j} \frac{Me^4}{2\pi\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{4M^2}{(M^2 + \omega_n^2)^3} - \frac{3}{(M^2 + \omega_n^2)^2} \right]. \quad (\text{B.20})$$

Finalmente, fazendo a soma sobre as frequências discretas de acordo com a equação (A.10) do apêndice e utilizando a equação (3.25), podemos expressar a amplitude de 4 pontos linear nos momentos como

$$\Pi_{000i}^{(est)PV(1)} = \epsilon_{ij}k_{4j}\beta^2 \frac{\partial^3}{\partial a^3} \Gamma(a, M) \Big|_{a=0}. \quad (\text{B.21})$$

A fim de obtermos as contribuições em ordens mais altas que as lineares no momento externo, temos de levar em conta a dependência dos momentos no denominador da equação (B.13). Usando a parametrização de Feynman, equação (A.13), e fazendo a mudança de variáveis $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - x\vec{k}_1 - y\vec{k}_{12} - z\vec{k}_{13}$, podemos escrever a contribuição do gráfico da Figura 2 para a amplitude de 4 pontos como

$$\begin{aligned} \Pi_{000i(1234)}^{(est)PV} &= \\ &= -\frac{6e^4}{(2\pi)^2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-y} dz \int d^2\vec{p} \frac{N_{000i}^{(est)PV}}{(\vec{p}^2 + M^2 + \omega_n^2 + K^2)^4} \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

onde

$$N_{000i}^{(est)PV} \equiv N_{000i}^{(est)PV}(p_0, \vec{p} - x\vec{k}_1 - y\vec{k}_{12} - z\vec{k}_{13}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, M) \quad (\text{B.23})$$

mostra a dependência de $N_{000i}^{(est)PV}$ com os momentos após a mudança de variáveis e

$$\vec{k}_{12} \equiv \vec{k}_1 + \vec{k}_2, \quad (\text{B.24})$$

$$\vec{k}_{13} \equiv \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3, \quad (\text{B.25})$$

$$K^2 \equiv \vec{k}_1^2 x(1-x) + \vec{k}_{12}^2 y(1-y) + \vec{k}_{13}^2 z(1-z) - 2(\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_{12} xy + \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_{13} yz + \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_{13} xz) \quad (\text{B.26})$$

A integração em \vec{p} fica fácil com ajuda de uma integração angular, levando a

$$\begin{aligned} \Pi_{000i(1234)}^{(est)PV} &= \\ &= -\frac{6e^4}{2\pi\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-y} dz \int_0^{\infty} p dp \frac{n_i^{(1)} \vec{p}^2 + N_i^{(1)} + N_i^{(3)}}{(\vec{p}^2 + M^2 + \omega_n^2 + K^2)^4}. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

A notação no numerador significa que $n_i^{(1)}$ e $N_i^{(1)}$ são de primeira ordem nos momentos externos e $N_i^{(3)}$ é de terceira ordem. Os cálculos são bem extensos, existindo muitos termos, mas todos de integração simples neste ponto. Os cálculos foram feitos com ajuda de um programa computacional. Fazendo a integração em dp e expandindo o resultado até quinta ordem nos momentos externos, temos as seguintes expressões para a amplitude em terceira e quinta ordem nas derivadas:

$$\begin{aligned} \Pi_{000i(1234)}^{(est)PV(3)} &= \\ &= -\frac{e^4}{2\pi\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-y} dz \left[\frac{N_i^{(3)} - K^2 n_i^{(1)}}{(M^2 + \omega_n^2)^3} - 3 \frac{K^2 N_i^{(1)}}{(M^2 + \omega_n^2)^4} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

e

$$\begin{aligned} \Pi_{000i(1234)}^{(est)PV(5)} &= \\ &= -\frac{e^4}{2\pi\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-y} dz \left[\frac{6K^4 N_i^{(1)}}{(M^2 + \omega_n^2)^5} - \frac{3K^4 n_i^{(1)} - 2K^2 N_i^{(3)}}{(M^2 + \omega_n^2)^4} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

As integrais nos parâmetros de Feynman são diretas, sendo apenas integrações polinomiais. As somas sobre as frequências discretas podem ser feitas com ajuda da equação (A.10), e o resultado expresso em termos de derivadas de $\Gamma(a, M)$. O resultado completo da amplitude de 4 pontos até termos de terceira e quinta ordem nas derivadas é obtido somando-se as seis permutações possíveis dos índices dos momentos externos. O resultado final é:

$$\begin{aligned}
\Pi_{000i}^{(est)PV(3)} &= \\
&= \frac{e^4}{3\pi} \epsilon_{ij} k_{4j} (\vec{k}_1^2 + \vec{k}_2^2 + \vec{k}_3^2 + \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3 + \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_3) \frac{M}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{M^2 - 5\omega_n^2}{(M^2 + \omega_n^2)^4} \\
&= \frac{\epsilon_{ij} k_{4j}}{6} (\vec{k}_1^2 + \vec{k}_2^2 + \vec{k}_3^2 + \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3 + \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_3) M \beta^2 \frac{\partial}{\partial M^2} \left[\frac{1}{M} \frac{\partial^3}{\partial a^3} \Gamma(a, M) \right]_{a=0}
\end{aligned} \tag{B.30}$$

e

$$\begin{aligned}
\Pi_{000i}^{(est)PV(5)} &= \\
&= \frac{M e^4}{30\pi\beta} \epsilon_{ij} k_{4j} \left[(\vec{k}_1^2 \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3 + \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(M^2 + \omega_n^2)^4} - \right. \\
&\quad \left. - \left[\vec{k}_1^2 (3\vec{k}_1^2 + 6\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 + 6\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_3 + 5\vec{k}_2^2 + 5\vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 4(\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2)^2 + \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3 \right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{7\omega_n^2 - M^2}{(M^2 + \omega_n^2)^5} \right] + \\
&\quad + \text{duas permutações cíclicas de } \vec{k}_1, \vec{k}_2 \text{ e } \vec{k}_3. \\
&= -\frac{M}{60} \epsilon_{ij} k_{4j} \left[(\vec{k}_1^2 \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3 + \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3) \frac{4e^2}{3} \frac{\partial^3}{(\partial M^2)^3} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial \Gamma}{\partial a} \right)_{a=0} + \right. \\
&\quad \left. + \left[\vec{k}_1^2 (3\vec{k}_1^2 + 6\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 + 6\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_3 + 5\vec{k}_2^2 + 5\vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 4(\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2)^2 + 6\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3 \right] \frac{\beta^2}{3} \frac{\partial^2}{(\partial M^2)^2} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial a^3} \right)_{a=0} \right] + \\
&\quad + \text{duas permutações cíclicas de } \vec{k}_1, \vec{k}_2 \text{ e } \vec{k}_3.
\end{aligned} \tag{B.31}$$

Referências Bibliográficas

- [1] S. S. Chern and I. Simons, "Characteristic forms and geometric invariants", *Ann. Math.*, vol. 99, p. 48-69, (1974).
- [2] G. V. Dunne, "Aspects of Chern-Simons Theory", hep-th/9902115 16 Feb 1999.
- [3] R. Jackiw and S. Templeton, "Topologically Massive Gauge Theory", *Ann. Phys. (NY)* 140 (1982) 372.
- [4] B. Skoric and A. M. M. Pruiken, "The fractional quantum hall effect: Chern-Simons mapping, duality, luttinger liquids and the instanton vacuum", *Nucl. Phys.*, vol. B559, p. 637-672, (1999).
- [5] A. Das, *Finite Temperature Field Theory*. NY: World Scientific, 1997.
- [6] M. L. Bellac, *Thermal Field Theory*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1996.
- [7] J. I. Kapusta *Finite Temperature Field Theory*. Cambridge University Press, 1989.
- [8] D. Bailin and A. Love *Introduction to Gauge Field Theory*. London, Institute of Physics Publishing, 1994.
- [9] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1996.
- [10] G. Dunne, K. Lee and C. Lu, "Finite temperature Chern-Simons coefficient", *Phys. Rev. Lett.* 78, p. 3434 (1997).

- [11] F. T. Brandt, A. Das and J. Frenkel, "Parity-violating electromagnetic interactions in QED(3) at finite temperature", *Phys. Rev.*, vol. D62, p. 085012, (2000).
- [12] F. T. Brandt, A. Das, J. Frenkel and K. Rao, "Two-loop corrections to the topological mass term in thermal QED(3)", *Phys. Lett.*, vol. B492, p.393-397, (2000).
- [13] F. T. Brandt, A. Das and J. Frenkel, "Absence of higher order corrections to the non-abelian Chern-Simons coefficient", *Phys. Lett.*, vol. B494, p. 339-345, (2000).
- [14] D. Cabra, E. Fradkin, G. L. Rossini, "Gauge invariance and finite temperature effective actions of Chern-Simons gauge theories with fermions", hep-th/9507136 v1 25 Jul 1995.
- [15] K. S. Babu, A. Das and P. Panigrahi, "Derivative expansion and the induced Chern-Simons term at finite temperature in $2 + 1$ dimensions", *Phys. Rev.*, vol. D36, p. 3725, (1987).
- [16] F. T. Brandt, A. Das, J. Frenkel, S. Pereira and J. C. Taylor, "Derivative expansion and the parity violating effective action for thermal $2+1$ dimensional QED at higher orders", *Phys. Rev.*, vol. D64, p. 065018, (2001).
- [17] S. Coleman and B. Hill, "No more corrections to the topological mass term in QED(3)", *Phys. Lett.*, vol. B159, p. 184, (1985).
- [18] Y. C. Kao and M. Suzuki, "Radiatively induced topological mass term in $(2+1)$ -dimensional gauge theories", *Phys. Rev.*, D31, p. 2137, (1985)
- [19] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. New York, McGraw-Hill, 1971.