

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

O Fator de Forma $J/\psi-D-D$ em Regras de Soma da QCD

Ricardo D'Elia Matheus

SBI-IFUSP



305M810T3812

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências

Fernando S. Navarra

Orientador: Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra (USP)
Prof. Dr. Rogério Rosenfeld (IFT)
Prof^ª. Dra. Mirian Enriqueta Bracco (UFRJ)

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo:

3812
ex. 1

*Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da FAPESP
São Paulo, Março de 2003*

SBI-IFUSP



305M810T3812

Armando Corbani Ferraz
Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

M 4 2 11
M
ex. 1

O Fator de Forma $J/\psi - D - D$ em Regras de Soma da QCD

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Matheus, Ricardo D'Elia

O fator de forma $J/\psi - D - D$ em regras de soma da QCD. São Paulo, 2003.

Dissertação (Mestrado) Universidade de São Paulo
Instituto de Física. Departamento de Física Experimental

Orientador: Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. QCD;
2. Regras de Soma da QCD;
3. Quarks Pesados;
4. Plasma de Quarks e Gluons;
5. Meson Charmosos.

USP/IF/SBI-024/2003

Agradecimentos

Aos meus avós,
Caetano, Josefina, Osvaldo e Francisca.

Aos meus pais,
Cláudio e Elisabeth.

Agradecimentos

A Fernando Silveira Navarra pela sua orientação, seu incentivo e sua atitude positiva e aberta a discussões.

A Marina Nielsen e ao colega Rômulo Rodrigues da Silva por todo trabalho realizado em conjunto e por todas as dúvidas respondidas.

Aos colaboradores do projeto temático da FAPESP, Mirian E. Bracco e Marcelo Chiapparini, pela ajuda na elaboração deste trabalho e aos colegas Alberto Lozêa Feijó Soares e Raquel S.M. Carvalho, cujas teses foram de grande valia.

Às professoras Maria José Bechara e Ana Regina Blak pelos conhecimentos transmitidos e pelo apoio e incentivo dados durante meu curso de graduação.

Aos meus caros amigos: Ilomar, Lécio, Caio, Lucas, Rubens, Bob, Leão, Diego e Dimitri, pelas muitas horas de estudo e (ainda maiores) horas de diversão compartilhadas - sem vocês a minha graduação jamais teria sido concluída.

Aos meus amigos (que já me deram o título de mestre a algum tempo) Jorge, Ivan, Flexa, Arthur e meu irmão Mauro, pelos momentos compartilhados em meu jogo preferido (sem o qual o estresse poderia ter sido grande demais) e ao André pela duradoura amizade.

A meus pais, Cláudio e Elisabeth, por tornarem tudo isto possível e por sua constante presença e apoio às minhas ambições. Acima de tudo eu lhes agradeço pelo amor e os ensinamentos que me foram dados.

À minha querida Mirela por estar ao meu lado mesmo nos momentos mais difíceis, mas principalmente por fazer parte dos momentos mais felizes da minha vida.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho calculamos o fator de forma e a constante de acoplamento para o vértice $J/\psi DD$ nos casos em que os mesons J/ψ ou D estão fora da camada de massa, utilizando as técnicas das Regras de Soma da QCD. Nós estudamos a regra de soma com dupla transformada de Borel da função de três pontos contendo duas correntes mesônicas pseudoescalares e uma vetorial. Encontramos assim a dependência de momento do fator de forma para cada caso e concluímos que elas levam à mesma constante de acoplamento, permitindo obter esta com maior precisão. Estudamos também a regra de soma da função de dois pontos dos mesons J/ψ e D com o objetivo de aplicar os resultados destas regras de soma na função de três pontos.

Abstract

In this work, we calculate the form factor and the coupling constant for the $J/\psi DD$ vertex for both D and J/ψ off-shell mesons, using the QCD Sum Rules. We study the double Borel sum rule for the three point function of two pseudoscalar and one vector meson current. We find the momentum dependence in both cases and find out that they lead to the same coupling constant, thus allowing us to calculate it with greater precision. We study also the QCD sum rule for the two point function of the J/ψ and D mesons so we can apply the results obtained in the three point function calculation.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Regras de soma da QCD	4
2.1	Introdução	4
2.2	Função de correlação	5
2.3	Expansão do Produto de Operadores de Wilson (OPE)	8
2.4	Lagrangianas efetivas	12
2.5	Transformada de Borel	13
3	Correlator do méson D	15
3.1	Lado da OPE	15
3.1.1	Termo perturbativo	17
3.1.2	Condensado de quarks	20
3.2	Lado fenomenológico	22
3.2.1	Correlator de dois pontos	22
3.2.2	O contínuo e a densidade espectral	25
3.3	Regra de soma	27
3.4	Análise numérica	28
4	Correlator do méson J/ψ	30
4.1	Lado da OPE	30
4.2	Lado fenomenológico	34
4.3	Regra de soma	36
4.4	Análise numérica	37
5	O vértice J/ψ-D-D: méson D “<i>off-shell</i>”	39
5.1	Lado da OPE	40
5.2	Lado fenomenológico	45

5.3	Regra de soma	46
5.4	Análise numérica	48
6	O vértice J/ψ-D-D:	
	méson J/ψ “<i>off-shell</i>”	56
6.1	Lado da OPE	56
6.1.1	Termo perturbativo	56
6.1.2	Condensado de quarks	60
6.2	Lado fenomenológico	61
6.3	Regra de soma	62
6.4	Análise numérica	63
7	Constante de acoplamento	69
8	Conclusões	72
A	Relações de dispersão	74
B	Cálculo de integrais	78

Capítulo 1

Introdução

Em 1998, o trabalho de Matinyan e Müller [1] inaugurou uma nova área da física de hadrons a energias intermediárias: a teoria de campos para as interações entre mesons charmosos (D , D^* , J/ψ) e mesons leves (π , ρ). O formalismo foi rapidamente modificado de maneira a incorporar novos vértices [2, 3, 4], invariância de gauge [5, 6], simetria quiral [7] e também incorporar barions [8].

O rápido avanço deste tipo de teoria ocorreu porque em várias situações experimentais mesons charmosos são produzidos e vivem mergulhados na matéria nuclear tempo suficiente para interagir com ela. Estas situações ocorrem, tanto em colisões de ions pesados relativísticos como em colisões próton (ou antipróton) - núcleo a baixas energias. No primeiro caso, já realizado tanto no CERN-SPS [9, 10, 11] como no BNL-RHIC [12], após a colisão inicial (a altas energias), forma-se um estado intermediário, uma “bola de fogo”, contendo muitas partículas produzidas no início da colisão (os “comovers”), que provavelmente estão em equilíbrio térmico e interagem com energias da ordem da temperatura de centenas de MeV. Esta “bola de fogo” pode também ser formada pelo “plasma de quarks e gluons” (QGP), como será discutido adiante. O segundo caso será realizado num futuro próximo no GSI [13] e na JHF (“Japanese Hadron Facility”) [14]. Nestes aceleradores mesons D e J/ψ serão produzidos copiosamente em colisões próton (e anti-próton) - núcleo a energias próximas do limiar de produção. Nesta situação um méson J/ψ pode ser produzido no interior do núcleo (ou fragmento pesado), viver e decair dentro dele, fornecendo assim informações sobre os efeitos do meio nuclear sobre o méson charmoso.

As teorias baseadas em lagrangianas efetivas para mesons pesados podem ser assim utilizadas tanto para o estudo da seção de choque charmonium-comover como para o estudo de efeitos do meio nuclear sobre a massa do charmonium [15] e até mesmo para foto-produção de mesons charmosos a baixas energias [16].

No caso de colisões núcleo-núcleo, a matéria formada nos novos aceleradores está

atingindo densidades e temperaturas previamente inéditas. Espera-se que nestas condições seja formado o plasma de quarks e gluons. Neste estado os quarks e gluons estão desconfinados permitindo que uma nova física, semelhante àquela dos primeiros instantes do universo, possa ser estudada.

Matsui e Satz [17] mostraram que, a altas temperaturas, no interior do QGP, além do desconfinamento ocorre também a “blindagem de cor” (*color screening*), em virtude da qual, o potencial entre o quark e o anti-quark se torna de alcance tão curto que a formação do estado ligado é impossível. Assim, uma das assinaturas experimentais que evidenciam a formação do QGP é a supressão do J/ψ . No entanto, parte desta supressão pode ser dada pela destruição dos mesons charmosos em colisões com comovers, que são formadas em números cada vez maiores com o crescimento da energia. Por isso, torna-se importante ter um conhecimento quantitativo de seções de choque envolvendo o charmonium e os comovers.

Investigações experimentais da produção de estados charmosos em reações nucleares foram realizadas nos últimos anos no CERN-SPS (p+A, O+U, S+U, Pb+Pb) [9, 10, 11]. Estes estudos mostram que a produção dos mesons J/ψ e ψ' é realmente suprimida em relação aos valores esperados para reações do tipo núcleon-núcleon. Para as colisões do tipo p+A a supressão dos mesons J/ψ e ψ' , pode ser explicada pela absorção do charmonium, ainda um estado precursor, pelos nucleons. Esta explicação pode ser estendida para as colisões do tipo O+U e S+U para o J/ψ , mas não para o ψ' , onde uma supressão adicional é observada [10]. Este feito pode ser descrito e explicado quantitativamente como uma absorção do ψ' por uma nuvem de hadrons secundários que se movem juntos com os nucleons. Estes são os comovers, que são predominantemente mesons leves [18]–[21]. Medidas recentes da produção de estados charmosos nas colisões do tipo Pb+Pb no experimento NA50 no CERN [11] têm revelado a presença de um mecanismo adicional de supressão “anômala” também para o J/ψ . É possível que esta supressão seja causada pela formação do plasma de quarks e gluons. No entanto, ainda é possível explicar essa absorção pelo mecanismo mais convencional da interação do J/ψ com comovers [22, 23, 24]. Portanto, é de fundamental importância conhecermos mais profundamente a seção de choque de absorção do J/ψ por hadrons, para podermos entender a natureza da supressão anômala observada.

Vários métodos têm sido usados para determinar a seção de choque de absorção de partículas charmosas por mesons leves [1] - [8] e [25] - [27]. Os valores estimados desta seção de choque mostram uma forte dependência com o mecanismo de absorção empregado no cálculo e os valores obtidos se mostram diferentes de método para método. A energias mais baixas, o uso da QCD perturbativa não é muito confiável e o mecanismo de troca de mesons, implementado com o uso de lagrangianas efetivas tem a vantagem de ser

completamente não-perturbativo.

Os vários cálculos feitos com lagrangianas efetivas diferem entre si por várias razões, mas o que faz com que os resultados variem mais (chegando a mudar em duas ordens de grandeza) é o uso ou não de fatores de forma nos vértices e da escolha das constantes de acoplamento correspondentes. Sabemos da literatura que as constantes de acoplamento dos mais variados processos mesônicos têm valores teóricos muito diferentes entre si. Estas constantes raramente podem ser inferidas de dados experimentais. Portanto, torna-se muito importante calcular com a máxima precisão seus valores e os fatores de forma. Isto pode ser feito com o auxílio das regras de soma da QCD (QCDSR) [28]. Como a energia que circula em cada vértice é relativamente baixa e como há uma escala de grande massa (a massa do charme) no problema, há boas chances de fazer um cálculo confiável usando poucos termos da expansão do produto de operadores (OPE). Com este ponto de partida, o nosso grupo iniciou uma série de cálculos [29, 30, 31, 32, 33] com o objetivo de determinar todos os fatores de forma e todas as constantes de acoplamento relevantes. Esta dissertação faz parte deste programa e seu conteúdo foi publicado em [34]. Neste texto há muito mais informações e mais detalhes do que no artigo publicado. O objetivo deste trabalho é obter uma forma funcional para o fator de forma $g_{J/\psi DD}(q^2)$ usando as QCDSR e calcular também a constante de acoplamento $g_{J/\psi DD}$ do vértice.

Em QCDSR, especialmente nos trabalhos citados acima, calculamos primeiro o fator de forma depois a constante de acoplamento. Na referência [30] foi introduzida uma nova maneira de dar este passo, que consiste em calcular o fator de forma em dois casos diferentes, considerando mesons diferentes fora da camada de massa, e depois calculando independentemente cada fator de forma no polo do méson “off-shell” correspondente. Como será visto adiante, ao adotar este método reduzimos as incertezas nos resultados.

O nosso trabalho é semelhante ao feito na referência [33], onde foi calculado o vértice $D - D - \rho$. A substituição de um méson vetorial leve por um pesado tem consequências interessantes.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentamos um resumo das Regras de Soma da QCD e as principais fórmulas a serem utilizadas posteriormente. Os capítulos 3 e 4 contêm a aplicação das regras de soma para as funções de dois pontos dos mesons D e J/ψ respectivamente. Encontramos expressões analíticas para as constantes de decaimento dos mesons, f_D e $f_{J/\psi}$, que serão importantes para as regras de soma de três pontos. Em seguida, nos capítulos 5 e 6, aplicamos as regras de soma aos vértices de três pontos, encontrando expressões para o fator de forma no caso em que o méson D está “off-shell” (cap. 5) e no caso do méson J/ψ “off-shell” (cap. 6). Obtemos em seguida a constante de acoplamento no capítulo 7. Apresentamos as conclusões obtidas no capítulo 8.

Capítulo 2

Regras de soma da QCD

2.1 Introdução

As regras de soma da QCD são uma técnica que permite um tratamento aproximado de efeitos não-perturbativos na QCD. O método, desenvolvido a mais de vinte anos [28], possui uma grande gama de aplicações sendo muito bem sucedida em algumas delas. Alguns exemplos são:

- Determinação das massas de quarks leves (u, d, s) e pesados (c, b);
- Determinação de massas e constantes de decaimento de mesons e barions leves e pesados;
- Cálculo de fatores de forma de mesons e barions;
- Estudo da distribuição de quarks de valência e distribuição de estrutura de spin de nucleons; função de estrutura do fóton e mesons ρ e π ;
- Momentos magnéticos de mesons e barions;
- Propriedades da matéria hadrônica em altas temperaturas e densidades.

Uma vantagem das Regras de Soma consiste em se tratar de um método analítico. Ao estudarmos um vértice, o método consiste em descrever o vértice em questão sob duas perspectivas. Em ambas as perspectivas construímos a função de correlação¹ (ou correlator) do vértice e o desenvolvemos até que possamos obter uma forma comparável à outra perspectiva².

Do ponto de vista fundamental descrevemos os hadrons em função das suas correntes interpolantes de quarks. As correntes interpolantes são as correntes associadas ao méson

¹A função de correlação será melhor introduzida na seção 2.2

²Colocamos ambos os lados na forma de relações de dispersão

em questão, ou seja, correntes na forma $\bar{q}_a(x)\gamma_\mu q_a(x)$ no caso de mesons vetoriais e $\bar{q}_a(x)i\gamma_5 q_a(x)$ no caso de pseudo-escalares³. Nesta perspectiva o correlator é desenvolvido pela aplicação do Teorema de Wick, o que equivale a fazer uma Expansão de Produto de Operadores de Wilson (OPE), e isto nos permite separar os termos perturbativos daqueles não-perturbativos. Esta perspectiva é também chamada de lado da OPE.

Do ponto de vista fenomenológico construímos as regras de Feynman do vértice como se os mesons fossem partículas fundamentais. Assim as correntes que aparecem no correlator ganham a interpretação de operadores de campo dos mesons correspondentes, com a ressalva de que estes operadores incluem a criação e aniquilação de todos os estados ressonantes do méson fundamental. Desta forma as constantes de acoplamento e o fator de forma entram como parâmetros fenomenológicos que são determinados a partir da comparação dos dois lados.

Esta comparação é feita após fazermos uma transformada nos momentos de ambos os lados, conhecida como transformada de Borel, cuja utilidade será exposta na seção 2.5.

A precisão deste método é limitada por uma aproximação da função de correlação na OPE e pela estrutura muito complicada das integrais de dispersão que surgem no decorrer dos cálculos. Assim as Regras de Soma devem ser estudadas, quanto aos seus limites de validade e margens de erro, caso a caso.

As seções seguintes mostrarão com mais detalhes as características das Regras de Soma mais relevantes para este trabalho, delineando assim os passos do método para aplicação na determinação de fatores de forma e constantes de acoplamento.

2.2 Função de correlação

Seja a densidade de Lagrangiana da QCD,

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^j G_j^{\mu\nu} + \sum_f \bar{q}_f(i\mathcal{D} - m_q)q_f \quad (2.1)$$

onde a derivada covariante é,

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2}g_s \lambda_l A_\mu^l \quad \text{para } \mathcal{D} \equiv \gamma_\mu D^\mu \quad (2.2)$$

λ_l são as matrizes de Gell-Mann geradoras do grupo SU(3), A_μ^l representa a componente μ do l -ésimo potencial vetor do campo de glúon ($l=1,2,\dots,8$), q_f é o espinor do campo de

³Os operadores $q_a(x)$ são os operadores de campo dos quarks que constituem o méson em questão.

quark para diferentes sabores $f = d, u, s, \dots$ e g_s é a constante de acoplamento forte. $G_{\mu\nu}^j$ é o tensor do campo de glúon não abeliano, definido por,

$$G_{\mu\nu}^j = \partial_\mu A_\nu^j - \partial_\nu A_\mu^j - g_s f_{jkl} A_\mu^k A_\nu^l \quad (2.3)$$

onde f_{jkl} são as constantes de estrutura do grupo SU(3). É comum dizer que a Lagrangiana (2.1) governa todas as propriedades dos processos hadrônicos. Entretanto, o uso direto de (2.1) e suas correspondentes regras de Feynman, somente é possível com a teoria perturbativa. Também devemos exigir que alguns dos quarks e glúons envolvidos no processo hadrônico sejam altamente virtuais, isto é, tenham altos momentos transferidos. Esta condição garante que a correspondente constante de estrutura fina para as interações fortes, $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$, seja suficientemente pequena, legitimando a expansão perturbativa⁴ (estes são chamados processos duros). Geralmente, estes objetos virtuais são obtidos em espalhamentos de hadrons com altos momentos transferidos. Entretanto, para escalas de energias baixas (ou seja, escalas de energia bem menores do que a dos processos duros), os quarks que participam do espalhamento estão confinados nos hadrons e a dinâmica a grandes distâncias deve ser relevante. Portanto, temos que combinar os resultados perturbativos (curtas distâncias) com certas funções de onda ou distribuições de momentos não perturbativas dos quarks confinados nos hadrons (longas distâncias). Para calcular estas características, devemos saber sobre a dinâmica da QCD a distâncias da ordem do raio dos hadrons R_h . Isto é, $R_h \simeq 1/\Lambda_{QCD}$ é o valor máximo para a distância em que a teoria perturbativa em α_s pode ser aplicada. Λ_{QCD} é o chamado parâmetro da QCD e tem um valor estimado de aproximadamente 200 MeV. Isto implica que, $R_h \simeq 1/0.2 \text{ GeV}^{-1} = 1 \text{ fm}$. Portanto, devemos imaginar um processo sem hadrons no estado inicial e no estado final, no qual os quarks se propagam livremente em curtas distâncias e, necessariamente, a curtos tempos. Tal situação não é hipotética como pode parecer, ela acontece na natureza quando um par quark-antiquark é produzido e absorvido por um fóton virtual, por exemplo, em um espalhamento elástico elétron-elétron como o mostrado na figura 2.1.

A propagação de um estado intermediário quark-antiquark como o mostrado na figura 2.1, acrescenta uma pequena correção quântica da ordem de α_{em}^2 ($\alpha_{em} = e^2/4\pi$), à seção de choque do espalhamento do processo $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ e por isto, deve ser levada em consideração. Tomando separadamente a amplitude do par quark-antiquark, identificamos um objeto fundamental do ponto de vista da QCD. A forma desta amplitude para a criação e aniquilação de um par quark-antiquark, pode ser escrita como:

⁴ α_s decresce quando o momento transferido aumenta.

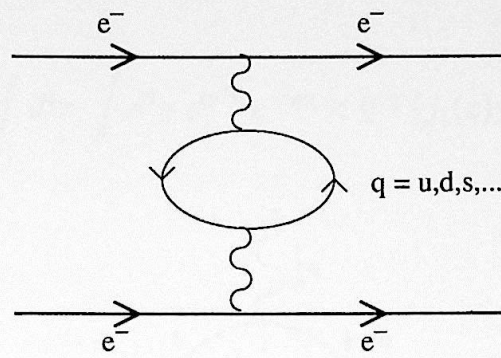


Figura 2.1: Diagrama de espalhamento elétron-elétron com correção por criação de pares quark-antiquark

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ j_\mu(x) j_\nu(0) \} | 0 \rangle \quad (2.4)$$

onde q é o quadrimomento transferido do fóton virtual com $q^2 < 0$ e

$$j_\mu = \bar{\psi}_q \gamma_\mu \psi_q \quad (2.5)$$

é a corrente de quarks com sabores $q_f = u, d, s, c, \dots$. Na amplitude (2.4), vemos que o estado final e o inicial não contêm hadrons, isto é, identificamos o estado de vácuo da QCD (indicado pela notação $|0\rangle$). A estrutura $\Pi_{\mu\nu}(q)$ tem uma parte invariante e uma parte tensorial, que depende necessariamente de objetos com dois índices μ e ν como $g_{\mu\nu}$ e $q_\mu q_\nu$. Esta parte tensorial de $\Pi_{\mu\nu}$ pode ser proporcional a um tensor do tipo $(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})$ e a uma amplitude invariante $\Pi(q^2)$ que descreve todos os efeitos dinâmicos do processo. Portanto, é conveniente representar $\Pi_{\mu\nu}(q)$ da seguinte maneira:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \Pi(q^2) \quad (2.6)$$

A amplitude $\Pi_{\mu\nu}(q)$ representa um importante exemplo de função de dois-pontos e descreve a dinâmica para curtas distâncias e curtos intervalos de tempos do processo mostrado na figura 2.1 [35]. Neste trabalho, usaremos não só a função correlação (2.4) mas também uma outra similar a ela. Esta função, normalmente chamada função de três-pontos, descreve como três mesons representados por suas correntes interpolantes de quarks interagem entre si. Esta interação pode ser representada pelo diagrama da figura 2.2. A função de três-pontos pode ser escrita na representação do espaço dos momentos como:

$$\Gamma(p, p', q) = \int d^4x \int d^4y e^{ip'x} e^{-iqy} \langle 0 | T \{ j_1(x) j_2^\dagger(y) j_3^\dagger(0) \} | 0 \rangle \quad (2.7)$$

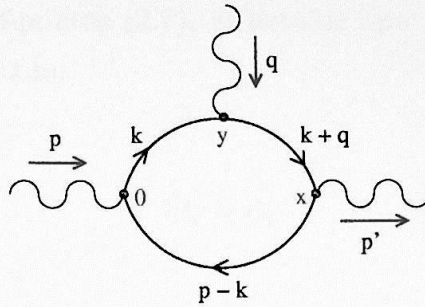


Figura 2.2: Diagrama do “loop” de três pontos

A Eq. (2.7) é um elemento fundamental da Mecânica Quântica: a função de Green do processo [36]. A amplitude (2.7) descreve a propagação das partículas entre os respectivos pontos 0, x e y , de maneira semelhante à função dois-pontos (2.4).

As funções correlação (2.4) e (2.7), podem então ser calculadas de duas maneiras distintas: A primeira maneira considera apenas os graus de liberdade da QCD, ou seja, os campos de quarks. A segunda considera os graus de liberdade puramente hadrônicos. Estas duas descrições são possíveis devido a uma prescrição fundamental das RSQCD, o chamado Princípio da Dualidade, que diz que é possível descrever um hádron tanto no nível de quarks como no nível hadrônico.

2.3 Expansão do Produto de Operadores de Wilson (OPE)

O cálculo da função correlação envolvendo os graus de liberdade da QCD fundamenta-se na expansão em produto de operadores de Wilson (OPE). Na OPE, o produto temporalmente ordenado de dois operadores locais $A(x)$ e $B(0)$, é expandido em termos de um conjunto completo de operadores locais [37],

$$i \int dx e^{iqx} T \{ A(x) B(0) \} = \sum_d C_d(q) \hat{O}_d(0) \quad (2.8)$$

Os coeficientes C_d , chamados coeficientes de Wilson, contêm as informações sobre a física de curto alcance, e podem ser calculados pela teoria perturbativa. Os operadores locais $\hat{O}_d(0)$ são operadores compostos, construídos a partir de campos de quarks e glúons, e contêm todos os efeitos não perturbativos de longa distância. O índice d denota a

dimensão do operador, expressa em unidade de potência de massa. Os operadores $\hat{O}_d(0)$ em (2.8) são ordenados de forma crescente pela dimensão d e acrescentam correções não perturbativas às Regras de Soma. Os coeficientes $C_d(q)$ são funções do momento transferido q e aparecem naturalmente da integral (2.4) no caso da função dois-pontos e de p , p' e q , no caso da função três-pontos (2.7). A lista de operadores não perturbativos com mais baixa ordem é iniciada com:

$$\hat{O}_3 = \bar{q}q \tag{2.9}$$

e com,

$$\hat{O}_4 = G_{\mu\nu}^j G^{j\mu\nu} \tag{2.10}$$

Os valores esperados destes operadores no vácuo da QCD, são conhecidos como condensados de quarks (no caso de (2.9)) e de gluons (para (2.10)). É importante dizer que os operadores com dimensão $d = 1$ e 2 são operadores sem cor, ou seja, não dependem dos campos q e $G_{\mu\nu}^j$ [35].

O operador com dimensão $d = 5$ é,

$$\hat{O}_5 = \bar{q}\sigma_{\mu\nu}\frac{\lambda^j}{2}G^{j\mu\nu}q \tag{2.11}$$

onde λ^a são as matrizes de Gell-Mann, $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ e $G_{\mu\nu}^j$ é o tensor de campo dos gluons. Operadores com $d > 5$ podem ser encontrados em várias referências como por exemplo [35, 38].

Substituindo as correntes de quarks em (2.7), a ordenação temporal ficará em função dos campos de quarks. Usando o teorema de Wick [39], o produto temporalmente ordenado de seis campos de quarks (quando as correntes representam mesons escalares), pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T \{ q_b(y)_l \bar{q}_a(x)_i q_a(x)_j \bar{q}_c(0)_m q_c(0)_n \bar{q}_b(y)_k \} = \\ = \langle 0 | T \{ q_b(y)_l \bar{q}_a(x)_i \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ q_a(x)_j \bar{q}_c(0)_m \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ q_c(0)_n \bar{q}_b(y)_k \} | 0 \rangle + \\ + \langle 0 | T \{ q_b(y)_l \bar{q}_a(x)_i \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ q_a(x)_j \bar{q}_c(0)_m \} | 0 \rangle : q_c(0)_n, \bar{q}_b(y)_k : + \dots \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde os índices a, b e c são índices de cor, $(i - n)$ são índices de Dirac, $|0\rangle$ é o vácuo perturbativo e “:” representa o ordenamento normal. Os termos com $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$ são identificados como os propagadores livres de quarks como:

$$\langle 0|T\{q_a(x)_j \bar{q}_b(y)_k\}|0 \rangle = [S_{ab}^q(x-y)]_{jk} \tag{2.13}$$

O termo com “:.”, que seria nulo no vácuo perturbativo que conhecemos, introduz as informações não perturbativas do vácuo da QCD nas Regras de Soma, já que (2.12) será avaliada no vácuo da QCD. O produto normal dos operadores de quarks mostrado no segundo termo da Eq. (2.12), pode ser expandido em uma série de Taylor em torno de $x = 0$ dada por:

$$\begin{aligned} :q_a(x)_j, \bar{q}_c(0)_m : &= :q_a(0)_j, \bar{q}_c(0)_m : + x^\mu :(\partial_\mu q_a(0)_j), \bar{q}_c(0)_m : + \\ &+ \frac{1}{2} x^\mu x^\nu :(\partial_\mu \partial_\nu q_a(0)_j), \bar{q}_c(0)_m : + \dots \end{aligned} \tag{2.14}$$

O valor esperado no vácuo da QCD, do termo dominante em (2.14) [35], dá origem ao condensado de quarks:

$$\langle 0| :q_a(0)_j, \bar{q}_c(0)_m : |0 \rangle \equiv -\frac{1}{12} \langle \bar{q}q \rangle \delta_{ac} \hat{1}_{jm} \tag{2.15}$$

Esta contribuição é representada pela linha interrompida na figura (2.3a).

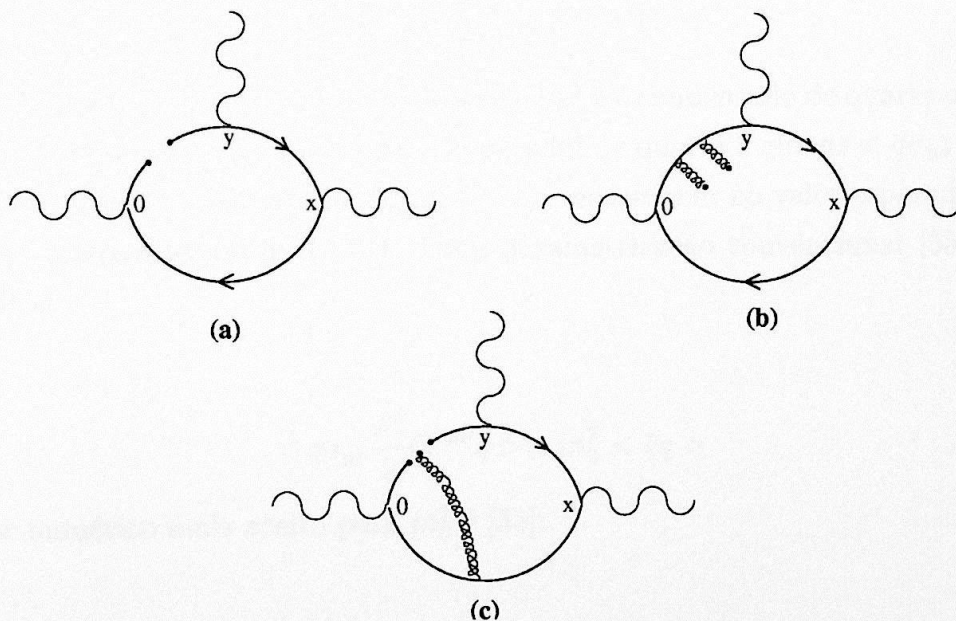


Figura 2.3: Alguns dos diagramas obtidos com a expansão em produto de operadores

A linha interrompida na figura 2.3a significa que não há fluxo de momento por ela. No próximo capítulo vamos verificar que este é o caso estudando o efeito do condensado

de quarks na função de dois pontos do méson D, equação (3.36). A interpretação física de um processo envolvendo o condensado de quarks é a seguinte: no ponto 0, o méson se abre em dois quarks; o quark leve (na linha de cima) carrega momento zero e é absorvido pelo vácuo, que na QCD contém pares de quarks e antiquarks com momento próximo de zero; no ponto y , muito próximo de 0, um quark com as mesmas características é emitido pelo vácuo e absorvido pelo méson que entra no loop neste ponto.

Os condensados que podem ser introduzidos com a OPE são parâmetros puramente não perturbativos. Seus valores numéricos não podem ser diretamente calculados e têm que ser determinados por outros métodos. O valor numérico de $\langle \bar{q}q \rangle$ pode ser determinado, por exemplo, usando-se a hipótese de PCAC (Corrente Axial Parcialmente Conservada) [40]:

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{2(m_u + m_d)} \quad (2.16)$$

onde m_u e m_d são as massas dos quarks u e d , m_π e f_π são respectivamente a massa e a constante de decaimento do pión. Tomando $m_\pi = 138$ MeV, $f_\pi = 132$ MeV e tomando os valores usuais para as massas dos quarks, $m_u + m_d \cong 14$ MeV, obtemos:

$$\langle \bar{q}q \rangle \cong -(0,228 \text{ GeV})^3 \quad (2.17)$$

Outros operadores, como o condensado de gluons e o condensado de quarks e gluons podem ser obtidos de maneira semelhante. O operador de quarks e gluons $\langle \bar{q}\sigma_{\mu\nu}\frac{\lambda^a}{2}G^{a\mu\nu}q \rangle$, ou condensado mixto, mostrado na figura (2.3c), tem origem no valor esperado do vácuo da QCD do terceiro termo de (2.14). Uma parametrização convencional [35] para este condensado é:

$$\langle \bar{q}\sigma_{\mu\nu}\frac{\lambda^a}{2}G^{a\mu\nu}q \rangle = m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle \quad (2.18)$$

O valor numérico mais aceito para m_0^2 é [35]:

$$m_0^2 = 0,8 \pm 0,2 \text{ GeV}^2 \quad (2.19)$$

Neste trabalho, as contribuições dos condensados de gluons não foram consideradas. Entretanto, a contribuição dos condensados de quarks (na verdade apenas a dos quarks leves) foi levada em consideração.

2.4 Lagrangianas efetivas

O cálculo da função de correlação pelo lado fenomenológico baseia-se no uso de lagrangianas efetivas. Essas lagrangianas descrevem a interação do vértice do ponto de vista puramente hadrônico permitindo que, usando as regras de Feynman, estudemos o vértice como se este representasse uma interação fundamental.

O vértice que estudaremos neste trabalho é visto pelo lado fenomenológico na forma mostrada na figura 2.4:

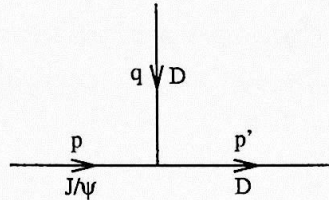


Figura 2.4: Diagrama do vértice J/ψ - D - D visto do lado fenomenológico

A lagrangiana efetiva que descreve este vértice é [6]:

$$\mathcal{L}_{\psi DD} = ig_{\psi DD} \psi^{*\mu} (D\partial_{\mu}\bar{D} - \partial_{\mu}D\bar{D}) \quad (2.20)$$

Desta lagrangiana obtemos a seguinte regra de Feynman para o vértice da figura 2.4:

$$-g_{(J/\psi DD)} (q + p')_{\mu} \quad (2.21)$$

Além disso quando as linhas mostradas na figura representam partículas reais, temos que representar um J/ψ que entra (sai) por seu tensor de polarização ϵ_{μ} (ϵ_{μ}^*). Assim, a amplitude invariante, no espaço dos momentos, que descreve a absorção de um méson D por um J/ψ é:

$$\mathcal{M} = -g_{(J/\psi DD)} (q + p')_{\mu} \epsilon^{\mu} = \langle J/\psi, D | D \rangle \quad (2.22)$$

Podemos então calcular o correlator (2.7) inserindo conjuntos completos de estados dos mesons. Vamos obter o correlator em função do vértice (2.22) e das amplitudes de transição entre o vácuo e os estados do méson D e do méson J/ψ parametrizadas respectivamente por [40]:

$$\langle 0 | j_D(0) | m_D, \vec{p} \rangle = \frac{m_D^2}{m_c + m_l} f_D \quad (2.23)$$

$$\langle 0 | j_\mu(0) | m_{J/\psi}, \lambda, \vec{p} \rangle = m_{J/\psi} f_{J/\psi} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(p) \quad (2.24)$$

onde m_l é a massa do quark leve do méson D .

Estas parametrizações, juntamente com o vértice obtido da lagrangiana efetiva, introduzem os parâmetros $f_{J/\psi}$, f_D e a função $g_{(J/\psi)DD}(q^2)$, que serão determinados através das regras de soma. Este procedimento será descrito com mais detalhe nos próximos capítulos.

2.5 Transformada de Borel

Encontrados os correlatores do lado da QCD e do lado fenomenológico, devemos impor a igualdade entre as duas descrições. Para este casamento ser possível, devemos suprimir as contribuições de ordem mais alta da OPE e também as ressonâncias e o contínuo da representação fenomenológica da função de correlação. Isto é feito usando uma transformada nos momentos das partículas chamada transformada de Borel [35], definida como:

$$\beta[f(Q^2)] = \hat{f}(M^2) = \lim_{Q^2/n \rightarrow M} \lim_{Q^2, n \rightarrow \infty} \frac{(Q^2)^{n+1}}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial Q^2} \right)^n f(Q^2) \quad (2.25)$$

onde a razão Q^2/n é mantida fixa quando $Q^2, n \rightarrow \infty$. O parâmetro M é chamado massa de Borel. Dois importantes exemplos de transformadas são:

$$\beta [(Q^2)^k] = 0 \text{ para } k > 0 \quad (2.26)$$

$$\beta \left[\frac{1}{s + Q^2} \right] = e^{-s/M^2} \quad (2.27)$$

No lado da QCD, a transformada de Borel melhora a convergência da OPE, suprimindo a contribuição dos operadores de dimensão mais alta⁵.

Do lado fenomenológico o correlator de dois pontos assume a forma:

⁵Estes termos da OPE são sempre proporcionais a $1/(p^2)^k$ cuja transformada de Borel é proporcional a $1/k!$, reduzindo a importância dos operadores de ordem superior a $d > 4$ [35].

$$\Pi(Q^2) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j \frac{1}{Q^2 + m_j^2} \quad (2.28)$$

onde:

$$m_0 \implies \text{massa do méson no estado fundamental} \quad (2.29)$$

$$m_j \quad j \geq 1 \implies \text{massas das outras ressonâncias} \quad (2.30)$$

$$K_j \implies \text{constante} \quad (2.31)$$

Usando a equação (2.27), temos:

$$\Pi(Q^2) = \sum_j K_j e^{-m_j/M^2} \quad (2.32)$$

Como $m_{(j+1)} > m_j$ a transformada de Borel acaba suprimindo os estados ressonantes. O mesmo acontece com a função de três pontos.

Logo, se for possível encontrar uma região no espaço da massa de Borel em que as contribuições dos operadores de ordem mais altas da OPE e as ressonâncias de massas mais altas da parte fenomenológica sejam igualmente suprimidas, as descrições hadrônica e da QCD se igualarão e poderemos extrair as propriedades hadrônicas de interesse para o estado fundamental dos mesons envolvidos. Então devemos impor um certo intervalo em que a massa de Borel seja adequada para o melhor casamento possível das duas descrições da função correlação. Este intervalo, geralmente chamado “janela de Borel”, está em torno das massas ao quadrado da partículas envolvidas e deve ser testado para cada situação de modo a obter a estabilidade entre ambos os lados (QCD e fenomenologia). Por estabilidade entendemos um regime em que a função (no nosso caso o fator de forma) ou parâmetro (no nosso caso as constantes de acoplamento) a ser determinado independe da massa de Borel. Assim a “janela de Borel” é uma região em que o valor da função estudada não varia muito⁶ em relação a massa de Borel. Escolhida a janela adequada, fixamos M^2 em um ponto dentro desta janela. Nos capítulos seguintes mostraremos mais detalhadamente este procedimento aplicando-o ao vértice de nosso interesse.

⁶Em condições ideais não haveria nenhuma dependência em relação a massa de Borel e conseqüentemente teríamos uma teoria válida em quaisquer regiões de momento das partículas envolvidas, no entanto esse não é o caso. Assim somos forçados a escolher critérios de estabilidade para decidir o quão sensível à variação de M^2 uma função pode ser numa dada região, para considerarmos aquela região estável.

Capítulo 3

Correlator do méson D

Neste capítulo vamos derivar a regra de soma para a função de dois pontos com todos os detalhes, e assim, nos próximos capítulos poderemos omitir ou abreviar algumas passagens, já explicadas anteriormente. A partir da função de dois pontos podemos extrair a massa da partícula em questão ou sua constante de decaimento. No caso do méson D , como a massa é conhecida experimentalmente com grande precisão, utilizamos as QCDSR para encontrar a constante de decaimento f_D . Este cálculo foi feito pela primeira vez nos anos de nascimento das QCDSR por Novikov, Shifman, Vainshtein e Zakharov [41]. Foi refeito anos depois por Narison [42] e mais recentemente por Belyaev e colaboradores [40]. As diferenças entre um cálculo e outro estão relacionadas à precisão e ao método de cálculo. Além destes, existem cálculos feitos em QCD na rede [43], que, em princípio, são mais precisos. O nosso cálculo de f_D serve assim para apresentar os principais conceitos e, através da comparação com resultados confiáveis, fixar os parâmetros que aparecem no formalismo.

3.1 Lado da OPE

Vamos primeiro definimos o correlator $\Pi^D(q)$ mostrado na figura 3.1:

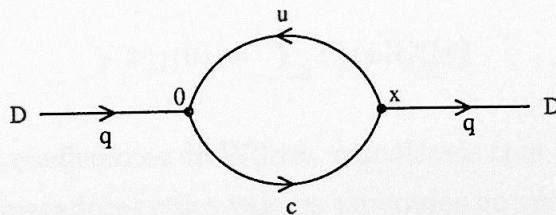


Figura 3.1: Diagrama perturbativo do méson D

que é dado por:

$$\Pi^D(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0|T\{j_D(x)j_D^\dagger(0)\}|0 \rangle \quad (3.1)$$

onde:

$$\begin{aligned} q = q^\mu &\implies \text{quadrivetor momento;} \\ x = x^\mu &\implies \text{quadrivetor posição;} \\ |0 \rangle &\implies \text{v\u00e1cuo f\u00edsico;} \\ j_D(x) = \bar{u}_a(x)i\gamma_5 c_a(x) &\implies \text{quadrivetor corrente do m\u00e9son D;} \\ u_a(x) &\implies \text{operador de campo do quark u.} \\ c_a(x) &\implies \text{operador de campo do quark c;} \\ \gamma_\mu &\implies \text{matriz de Dirac.} \end{aligned}$$

Poder\u00edamos ter definido a corrente do m\u00e9son D com um quark q gen\u00e9rico em lugar do quark u. O quark u foi escolhido para facilitar a notação. Podemos escrever (3.1) na forma:

$$\Pi^D(q) = i \int d^4x e^{iqx} \Pi^D(x) \quad (3.2)$$

onde:

$$\Pi^D(x) = \langle 0|T\{j_D(x)j_D^\dagger(0)\}|0 \rangle \quad (3.3)$$

Na express\u00e3o acima o produto de correntes pode ser expandido numa s\u00e9rie de Wilson¹, do tipo

$$j(x)j(0) = \sum_i C_i(x)\hat{O}_i(x) \quad (3.4)$$

onde C_i s\u00e3o os chamados coeficientes de Wilson, calcul\u00e1veis com as t\u00e9cnicas dos diagramas de Feynman e os \hat{O}_i s\u00e3o operadores cujos valores esperados no v\u00e1cuo s\u00e3o os par\u00e2metros n\u00e3o perturbativos que descrevem os efeitos do v\u00e1cuo. No primeiro termo desta s\u00e9rie $\hat{O}_1 = 1$ e C_1 \u00e9 o termo perturbativo. Vamos calcul\u00e1-lo na pr\u00f3xima se\u00e7\u00e3o.

¹Conforme explicado na se\u00e7\u00e3o 2.3

3.1.1 Termo perturbativo

Nos casos mais simples, a expressão (3.4) pode ser substituída pela simples aplicação do teorema de Wick. Aplicando este teorema ao ordenamento temporal em (3.3) e considerando somente o termo perturbativo (o que não tem nenhum produto normal) temos:

$$\Pi^D(x) = \text{tr}[\gamma_5 S_{ba}^u(-x) \gamma_5 S_{ab}^c(x)] \quad (3.5)$$

onde:

$$[S_{ab}^q(x-y)]_{jk} = \langle 0 | T \{ q_a(x)_j \bar{q}_b(y)_k \} | 0 \rangle \quad (3.6)$$

é o propagador do quark q , a, b são índices de cor e j, k índices matriciais. Substituindo (3.5) em (3.2), encontramos:

$$\Pi^D(q) = i \int d^4x e^{iqx} \text{tr}[\gamma_5 S_{ba}^u(-x) \gamma_5 S_{ab}^c(x)] \quad (3.7)$$

O propagador pode ser reescrito no espaço dos momentos:

$$S_{ab}^q(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} S_{ab}^q(p) \quad (3.8)$$

onde p é o quadri-momento. Desta definição é fácil ver que:

$$S_{ab}^q(-x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} S_{ab}^q(-p) \quad (3.9)$$

Substituindo (3.8) e (3.9) em (3.7) obtemos:

$$\Pi^D(q) = i \int d^4p_1 \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^8} \int d^4x e^{ix(q-p_1-p_2)} \text{tr}[\gamma_5 S_{ba}^u(-p_1) \gamma_5 S_{ab}^c(p_2)] = \quad (3.10)$$

$$= i \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int d^4p_1 \delta^4(q-p_1-p_2) \text{tr}[\gamma_5 S_{ba}^u(-p_1) \gamma_5 S_{ab}^c(p_2)] = \quad (3.11)$$

$$= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}[\gamma_5 S_{ba}^u(p-q) \gamma_5 S_{ab}^c(p)] \quad (3.12)$$

Das regras de Feynman da QCD [44] temos que:

$$S_{ab}^q(p) = i\delta_{ab} \frac{\not{p} + m_q}{p^2 - m_q^2}; \quad (3.13)$$

onde $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ e $m_q = m_q \hat{1}$ é a massa do quark q . Substituindo (3.13) em (3.12) chegamos a:

$$\Pi^D(q) = -3i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(q-p)^2 - m_u^2][p^2 - m_c^2]} \text{tr}\{\gamma_5[-(\not{q} - \not{p}) + m_u]\gamma_5[\not{p} + m_c]\} \quad (3.14)$$

O termo contendo o traço pode ser imediatamente calculado:

$$\text{tr}\{\gamma_5[-(\not{q} - \not{p}) + m_u]\gamma_5[\not{p} + m_c]\} = 4(q-p)p + 4m_u m_c \quad (3.15)$$

Inserindo a equação acima em (3.14) temos:

$$\Pi^D(q) = -3i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(q-p)^2 - m_u^2][p^2 - m_c^2]} [4(q-p)p + 4m_u m_c] \quad (3.16)$$

Observando esta equação, notamos que $\Pi^D(q)$ é um invariante de Lorentz pois todos os quadrivetores estão envolvidos em produtos escalares. Como p é uma variável de integração, concluímos que $\Pi^D(q) = \Pi^D(q^2)$. Para desenvolver o cálculo de $\Pi^D(q^2)$ vamos usar o método de Cutkosky [45]. Partimos da relação de dispersão²:

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{2\pi i} \int ds \frac{D[\Pi(s)]}{s - q^2} \quad (3.17)$$

onde a função $D[\Pi(q^2)]$ é chamada de descontinuidade de $\Pi(s)$ e pode ser obtida a partir de (3.16) através das substituições:

$$\frac{1}{(q-p)^2 - m_u^2} \rightarrow -(2\pi i)\delta((q-p)^2 - m_u^2)\theta(q_0 - p_0); \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{p^2 - m_c^2} \rightarrow -(2\pi i)\delta(p^2 - m_c^2)\theta(p_0); \quad (3.19)$$

²Veja o apêndice A.

em $\Pi(q^2)$, ou seja, colocando as partículas virtuais na camada de massa, ou ainda, fazendo “cortes” ou “descontinuidades” no diagrama da figura 3.1. Aplicando (3.18) e (3.19) a (3.16) encontramos a descontinuidade de (3.16):

$$D[\Pi^D(s)] = \bar{\Pi} = 3i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} \delta[(q-p)^2 - m_u^2] \theta(q_0 - p_0) \delta[p^2 - m_c^2] \theta(p_0) [4(q-p)p + 4m_u m_c] \quad (3.20)$$

Como a expressão acima é um escalar podemos calculá-la em qualquer referencial. Em particular adotaremos:

$$\begin{aligned} q^\mu &= (\sqrt{s}, 0) \\ q^2 &= s \\ q \cdot p &= \sqrt{s} p_0 \end{aligned}$$

Assim, (3.20) fica:

$$= 3i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} \delta(s + p^2 - 2\sqrt{s} p_0 - m_u^2) \theta(\sqrt{s} - p_0) \delta(p^2 - m_c^2) \theta(p_0) [4\sqrt{s} p_0 - 4p^2 + 4m_u m_c] \quad (3.21)$$

Como temos $\delta[p^2 - m_c^2]$ podemos substituir p^2 por m_c^2 no resto do integrando:

$$= \frac{6i}{\sqrt{s}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} \delta\left(p_0 - \frac{s + m_c^2 - m_u^2}{2\sqrt{s}}\right) \theta(\sqrt{s} - p_0) \delta(p_0^2 - \vec{p}^2 - m_c^2) \theta(p_0) [\sqrt{s} p_0 - m_c^2 + m_u m_c] \quad (3.22)$$

As funções $\theta(\sqrt{s} - p_0)$ e $\theta(p_0)$ limitam a integral ao intervalo $0 < p_0 < \sqrt{s}$:

$$\bar{\Pi} = \frac{6i}{\sqrt{s}} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^2} \int_0^{\sqrt{s}} dp_0 \delta\left(p_0 - \frac{s + m_c^2 - m_u^2}{2\sqrt{s}}\right) \delta(p_0^2 - \vec{p}^2 - m_c^2) [\sqrt{s} p_0 - m_c^2 + m_u m_c] \quad (3.23)$$

É importante notar que, até agora, consideramos m_u como a massa de um quark genérico (tendo escolhido u por facilidade de notação). Consideraremos agora que este é um quark leve (u ou d) e desprezaremos sua massa. Podemos resolver a integral em p_0 usando a primeira das duas funções δ :

$$\bar{\Pi} = \frac{6i}{\sqrt{s}} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^2} \delta \left[\left(\frac{s + m_c^2}{2\sqrt{s}} \right)^2 - \vec{p}^2 - m_c^2 \right] \frac{s - m_c^2}{2} = \quad \{s \geq m_c^2\} \quad (3.24)$$

$$= \frac{3i}{\pi\sqrt{s}} \int_0^\infty |\vec{p}| d|\vec{p}|^2 \delta \left[\left(\frac{s + m_c^2}{2\sqrt{s}} \right)^2 - \vec{p}^2 - m_c^2 \right] \frac{s - m_c^2}{2} \quad \{s \geq m_c^2\} \quad (3.25)$$

A função delta tem suporte se $(s - m_c^2)^2 \geq 0$, o que vale para qualquer s , logo:

$$\bar{\Pi} = D[\Pi^D(s)] = \frac{3i}{4\pi} \frac{1}{s} (s - m_c^2)^2 \quad (3.26)$$

Substituindo a expressão acima em (3.17), encontramos:

$$\Pi^D(q^2) = \frac{3}{8\pi^2} \int_{m_c^2}^\infty ds \frac{1}{s - q^2} \frac{(s - m_c^2)^2}{s} \quad (3.27)$$

Passando para o espaço euclideo através da transformação $q^2 \rightarrow -Q^2$, temos:

$$\Pi^D(Q^2) = \frac{3}{8\pi^2} \int_{m_c^2}^\infty ds \frac{1}{s + Q^2} \frac{(s - m_c^2)^2}{s} \quad (3.28)$$

Faremos a seguir a transformada de Borel de $\Pi^D(Q^2)$. Assim, usando (2.27):

$$\beta[\Pi^D(Q^2)] = \beta \left[\frac{3}{8\pi^2} \int_{m_c^2}^\infty ds \frac{1}{(s + Q^2)} \frac{(s - m_c^2)^2}{s} \right] = \quad (3.29)$$

$$= \frac{3}{8\pi^2} \int_{m_c^2}^\infty ds \beta \left[\frac{1}{(s + Q^2)} \right] \frac{(s - m_c^2)^2}{s} = \quad (3.30)$$

$$= \frac{3}{8\pi^2} \int_{m_c^2}^\infty ds e^{-s/M^2} \frac{(s - m_c^2)^2}{s} \quad (3.31)$$

3.1.2 Condensado de quarks

A correção não perturbativa de ordem mais baixa vem do condensado de quarks. O méson D possui um quark pesado e um quark leve. O condensado de quarks pesados é numericamente desprezível mas o de quarks leves é importante. Este condensado aparece na aplicação do teorema de Wick em (3.3) como o seguinte termo (mais uma vez usaremos u para denotar o quark leve):

$$\Pi^D(x) = \cdots - \underbrace{(\gamma_5)_{ij} (\gamma_5)_{kl} [-S_{ba}^c(-x)]_{li}}_{\Pi^{D(\langle qq \rangle)}(x)} \langle \underline{0} | : u_a(x)_j \bar{u}_b(0)_k : | \underline{0} \rangle + \cdots \quad (3.32)$$

onde i, j, k, l são índices matriciais e a, b são índices de cor. Este termo pode ser representado pelo diagrama da figura 3.2. O termo $\langle \underline{0} | : u_a(x)_j \bar{u}_b(0)_k : | \underline{0} \rangle$ pode ser expandido

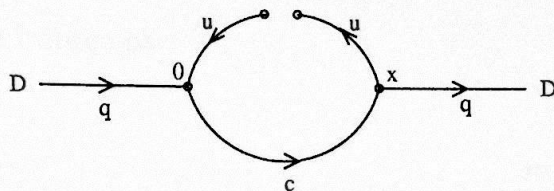


Figura 3.2: Diagrama do condensado de quarks do méson D

na série (2.14). Vamos considerar apenas o primeiro termo que coincide com o condensado de quarks. Assim usando a notação de (2.15) temos

$$\langle \underline{0} | : u_a(x)_j \bar{u}_b(0)_k : | \underline{0} \rangle \cong -\frac{1}{12} \langle \bar{q}q \rangle \delta_{ab} \hat{1}_{jk} \quad (3.33)$$

e assim o parâmetro fenomenológico fica sendo o escalar $\langle \bar{q}q \rangle$. Substituindo (3.33) em (3.32):

$$\Pi^{D(\langle qq \rangle)}(x) = -\frac{1}{12} \langle \bar{q}q \rangle \delta_{ab} \text{tr}[S_{ba}^c(-x)] \quad (3.34)$$

e inserindo esta expressão em (3.2) obtemos:

$$\Pi^{D(\langle qq \rangle)}(q) = -\frac{i}{12} \langle \bar{q}q \rangle \delta_{ab} \int d^4x e^{iqx} \text{tr}[S_{ba}^c(-x)] \quad (3.35)$$

Usando agora a transformada de Fourier do propagador (3.9):

$$\begin{aligned} \Pi^{D(\langle qq \rangle)}(q) &= -\frac{i}{12} \langle \bar{q}q \rangle \delta_{ab} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \underbrace{\int d^4x e^{ix(q-p)} \text{tr}[S_{ba}^c(-p)]}_{(2\pi)^4 \delta^4(q-p)} = \\ &= -\frac{i}{12} \langle \bar{q}q \rangle \delta_{ab} \text{tr}[S_{ba}^c(-q)] \end{aligned} \quad (3.36)$$

e sua definição (3.13), temos (a função δ em (3.36) mostra que o momento total entrando no loop da figura 3.2 é integralmente transferido ao quark c . O quark leve, ao “condensar-se” não carrega nenhum momento):

$$\Pi^{D(\langle qq \rangle)}(q) = \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{4} \frac{1}{q^2 - m_c^2} \text{tr}[-\not{q} + m_c] \quad (3.37)$$

Como $\text{tr}[-\not{q} + m_c] = 4m_c$, obtemos:

$$\Pi^{D(\langle qq \rangle)}(q) = \Pi^{D(\langle qq \rangle)}(q^2) = \langle \bar{q}q \rangle \frac{m_c}{q^2 - m_c^2} \quad (3.38)$$

Passando para o espaço euclideo, através da transformação $q^2 \rightarrow -Q^2$, encontramos:

$$\Pi^{D(\langle qq \rangle)}(Q^2) = -\langle \bar{q}q \rangle \frac{m_c}{Q^2 + m_c^2} \quad (3.39)$$

cuja transformada de Borel (eq. (2.27)), dá:

$$\beta[\Pi^{D(\langle qq \rangle)}(Q^2)] = -m_c \langle \bar{q}q \rangle e^{-m_c^2/M^2} \quad (3.40)$$

Finalmente, somando (3.31) e (3.40) chegamos à expressão final para a transformada de Borel do correlator de dois pontos do méson D :

$$\beta[\Pi^D(Q^2)] = \beta[\Pi^{D(pert)}(Q^2)] + \beta[\Pi^{D(\langle qq \rangle)}(Q^2)] = \quad (3.41)$$

$$= -m_c \langle \bar{q}q \rangle e^{-m_c^2/M^2} + \frac{3}{8\pi^2} \int_{m_c^2}^{\infty} ds e^{-s/M^2} \frac{(s - m_c^2)^2}{s} \quad (3.42)$$

Este é o resultado que desejávamos obter. A equação (3.42) será identificada ao resultado obtido, fazendo-se o cálculo do correlator pelo lado fenomenológico. Este último será apresentado na próxima seção.

3.2 Lado fenomenológico

3.2.1 Correlator de dois pontos

Passamos então ao cálculo do lado fenomenológico do diagrama de dois pontos do méson D . Começamos mais uma vez da definição do correlator (eq (3.1)):

$$\Pi^D(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ j_D(x) j_D^\dagger(0) \} | 0 \rangle \quad (3.43)$$

Usando a definição do produto temporalmente ordenado temos:

$$\Pi^D(q) = i \int d^4x e^{iqx} \left\{ \langle 0 | \theta(x_0) j_D(x) j_D^\dagger(0) | 0 \rangle + \langle 0 | \theta(-x_0) j_D^\dagger(0) j_D(x) | 0 \rangle \right\} \quad (3.44)$$

Podemos assumir que o conjunto dos mesons formados pela corrente j_D (ou seja, pelo quark c e um quark leve) é um conjunto completo, logo podemos escrever o operador unidade através de um relação de completeza:

$$\hat{1} = \sum_{j=0}^{\infty} \int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0} \frac{1}{(2\pi)^3} |m_j, \vec{p}\rangle \langle m_j, \vec{p}| \quad (3.45)$$

onde:

$$m_0 = m_D \implies \text{massa do D} \quad (3.46)$$

$$m_j \quad j \geq 1 \implies \text{massas das outras ressonâncias} \quad (3.47)$$

Inserindo (3.45) entre as correntes da equação (3.44) temos:

$$\begin{aligned} \Pi^D(q) = & i \int d^4x e^{iqx} \int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0(2\pi)^3} \left\{ \theta(x_0) \langle 0 | j_D(x) | m_D, \vec{p} \rangle \langle m_D, \vec{p} | j_D^\dagger(0) | 0 \rangle \right. \\ & + \left. \theta(-x_0) \langle 0 | j_D^\dagger(0) | m_D, \vec{p} \rangle \langle m_D, \vec{p} | j_D(x) | 0 \rangle \right\} \\ & + MS \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde:

$$\begin{aligned} MS = & i \int d^4x e^{iqx} \sum_{j=1}^{\infty} \int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0(2\pi)^3} \left\{ \theta(x_0) \langle 0 | j_D(x) | m_j, \vec{p} \rangle \langle m_j, \vec{p} | j_D^\dagger(0) | 0 \rangle \right. \\ & + \left. \theta(-x_0) \langle 0 | j_D^\dagger(0) | m_j, \vec{p} \rangle \langle m_j, \vec{p} | j_D(x) | 0 \rangle \right\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Fazemos então uso do operador de translação \hat{U} , que possui as seguintes propriedades:

$$\hat{U}(a) j(x) \hat{U}^{-1}(a) = j(x+a) \quad (3.50)$$

$$\hat{U}(a) |m_j, \lambda, \vec{p}\rangle = e^{ip a} |m_j, \lambda, \vec{p}\rangle \quad (3.51)$$

$$\hat{U}^{-1}(a) \hat{U}(a) = \hat{1} \quad (3.52)$$

Usando estas propriedades escrevemos:

$$\begin{aligned} \langle 0 | j_D(x) | m_D, \vec{p} \rangle &= \underbrace{\langle 0 | \hat{U}^{-1}(-x)}_{\langle 0 | \hat{1}} \underbrace{\hat{U}(-x) j_D(x) \hat{U}^{-1}(-x)}_{j_D(0)} \underbrace{\hat{U}(-x) | m_D, \vec{p} \rangle}_{e^{-ipx} | m_D, \vec{p} \rangle} = \\ &= e^{-ipx} \langle 0 | j_D(0) | m_D, \vec{p} \rangle \end{aligned} \quad (3.53)$$

e portanto:

$$\langle m_D, \vec{p} | j_D(x) | 0 \rangle = e^{ipx} \langle m_D, \vec{p} | j_D(0) | 0 \rangle \quad (3.54)$$

Como a massa do quark leve m_l que compõe o méson satisfaz à condição $m_l \ll m_c$ temos (usando (2.23)):

$$\langle 0 | j_D(0) | m_D, \vec{p} \rangle = \frac{m_D^2}{m_c + m_l} f_D \approx \frac{m_D^2}{m_c} f_D \quad (3.55)$$

onde m_D é a massa do méson, f_D é a constante de decaimento do méson D e m_c é a massa do quark c . Inserindo as equações (3.53) e (3.55) em (3.48) temos:

$$\Pi^D(q) = \frac{m_D^4}{m_c^2} f_D^2 i \int d^4x e^{iqx} \int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0(2\pi)^3} \{ \theta(x_0) e^{-ipx} + \theta(-x_0) e^{ipx} \} + MS \quad (3.56)$$

Vamos agora transformar a integral tridimensional acima numa integral quadridimensional usando a identidade (que pode ser provada integrando-se o lado direito em p_0 no plano complexo):

$$\int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0(2\pi)^3} \{ \theta(x_0) e^{-ipx} + \theta(-x_0) e^{ipx} \} \mathcal{P}[\vec{p}, p_0] = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m_D^2} \mathcal{P}[\vec{p}, p_0] \quad (3.57)$$

onde $\mathcal{P}[\vec{p}, p_0]$ é um polinômio em p_0 . A equação (3.56) transforma-se em:

$$\Pi^D(q) = -\frac{m_D^4}{m_c^2} f_D^2 \int d^4x e^{iqx} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m_D^2} + MS \quad (3.58)$$

que pode ser facilmente integrada em x e p , transformando-se em:

$$\Pi^D(q^2) = -\frac{m_D^4}{m_c^2} f_D^2 \frac{1}{q^2 - m_D^2} + MS \quad (3.59)$$

Finalmente, passando para o espaço euclideano e fazendo a transformada de Borel:

$$\beta[\Pi^D(Q^2)] = \frac{m_D^4}{m_c^2} f_D^2 e^{-\frac{m_D^2}{M^2}} + \beta[MS(Q^2)] \quad (3.60)$$

3.2.2 O contínuo e a densidade espectral

O termo $\beta[MS(Q^2)]$ é chamado de termo do contínuo e vamos agora examiná-lo melhor. Vamos, por um momento, voltar à definição do correlator de dois pontos do méson D :

$$\Pi^D(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ j_D(x) j_D^\dagger(0) \} | 0 \rangle \quad (3.61)$$

Usando a definição do produto temporalmente ordenado temos:

$$\Pi^D(q) = i \int d^4x e^{iqx} \left\{ \langle 0 | \theta(x_0) j_D(x) j_D^\dagger(0) | 0 \rangle + \langle 0 | \theta(-x_0) j_D^\dagger(0) j_D(x) | 0 \rangle \right\} \quad (3.62)$$

Inserimos então um conjunto completo de estados $\sum_\Gamma |\Gamma\rangle \langle \Gamma|$ entre os operadores de corrente e usamos os operadores de translação para escrever:

$$\begin{aligned} \Pi^D(q) = & i \int d^4x e^{iqx} \sum_\Gamma \left\{ \theta(x_0) e^{-ip_\Gamma x} \langle 0 | j_D(0) | \Gamma \rangle \langle \Gamma | j_D^\dagger(0) | 0 \rangle \right. \\ & \left. + \theta(-x_0) e^{ip_\Gamma x} \langle 0 | j_D^\dagger(0) | \Gamma \rangle \langle \Gamma | j_D(0) | 0 \rangle \right\} \quad (3.63) \end{aligned}$$

Todas as partículas no estado $|\Gamma\rangle$ são partículas na camada de massa, e portanto: $p_\Gamma^2 = t \geq 0$. Assim podemos inserir na soma sobre Γ a identidade matemática:

$$\int_0^\infty ds \int d^4p \theta(p_0) \delta(p^2 - s) \delta^{(4)}(p - p_\Gamma) = 1 \quad (3.64)$$

É fácil, reorganizando os termos da função obtida, encontrar a definição da função espectral associada ao operador j_D :

$$\sum_\Gamma \langle 0 | j_D(0) | \Gamma \rangle \langle \Gamma | j_D^\dagger(0) | 0 \rangle (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p_\Gamma) \equiv 2\pi \rho^D(p^2) \quad (3.65)$$

Assim a equação (3.63) fica:

$$\begin{aligned} \Pi^D(q) &= \int d^4x e^{iqx} \int_0^\infty ds \rho^D(s) \times \\ &\times \underbrace{\int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} [i\theta(x_0)e^{-ipx}\theta(p_0)\delta(p^2 - s) + i\theta(-x_0)e^{ipx}\theta(p_0)\delta(p^2 - s)]}_{\Delta_F(x;s)} \end{aligned} \quad (3.66)$$

A função $\Delta_F(x; s)$ é o propagador de Feynman de um méson escalar e pode ser escrito na forma:

$$\Delta_F(x; s) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{s - p^2 - i\epsilon} \quad (3.67)$$

Substituindo esta forma em (3.66) e integrando sobre x e p , obtemos:

$$\begin{aligned} \Pi^D(q^2) &= \int d^4x e^{iqx} \int_0^\infty ds \rho^D(s) \Delta_F(x; s) = \\ &= \int_0^\infty ds \rho^D(s) \frac{1}{s - q^2 - i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Assim a função $\Pi^D(q^2)$ aparece como uma transformada de Fourier de um campo livre se propagando com massa quadrática arbitrária s integrada sobre todos valores de s . A densidade espectral age como um peso estatístico dado a cada massa. Observações experimentais nos permitem escrever a função $\rho^D(s)$ na forma:

$$\rho^D(s) = \lambda \delta(s - m_D^2) + \theta(s - \underbrace{[m_D^2 + \Delta_s]}_{s_0}) \rho^D(s) \quad (3.69)$$

onde λ é uma constante, $\Delta_s > 0$ e s_0 é conhecido como parâmetro de "threshold" do contínuo. Isto significa separar a densidade espectral em uma massa fundamental isolada (no caso a do méson D) e um contínuo de ressonâncias de massa superior. Substituindo (3.69) em (3.68) temos ($\epsilon \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned}\Pi^D(q^2) &= \frac{-\lambda}{q^2 - m_D^2} + \int_0^\infty ds \rho^D(s) \frac{\theta(s - s_0)}{s - q^2} = \\ &= \frac{-\lambda}{q^2 - m_D^2} + \int_{s_0}^\infty ds \rho^D(s) \frac{1}{s - q^2}\end{aligned}\quad (3.70)$$

Se compararmos este resultado com a equação (3.59) podemos concluir que:

$$MS = \int_{s_0}^\infty ds \rho^D(s) \frac{1}{s - q^2} \quad \text{e que} \quad \lambda = \frac{m_D^4}{m_c^2} f_D^2 \quad (3.71)$$

Assim a equação (3.60) fica:

$$\beta[\Pi^D(Q^2)] = \frac{m_D^4}{m_c^2} f_D^2 e^{-\frac{m_D^2}{M^2}} + \int_{s_0}^\infty ds \rho^D(s) e^{-\frac{s}{M^2}} \quad (3.72)$$

Este é o resultado a ser identificado com o correlator obtido no lado da OPE (eq. (3.42)).

3.3 Regra de soma

Igualando o lado fenomenológico (eq. (3.72)) ao lado da OPE (eq. (3.42)), obtemos:

$$-m_c < \bar{q}q > e^{-m_c^2/M^2} + \frac{3}{8\pi^2} \int_{m_c^2}^\infty ds e^{-s/M^2} \frac{(s - m_c^2)^2}{s} = \frac{m_D^4}{m_c^2} f_D^2 e^{-\frac{m_D^2}{M^2}} + \int_{s_0}^\infty ds \rho^D(s) e^{-\frac{s}{M^2}} \quad (3.73)$$

O integrando da integral no lado esquerdo desta equação corresponde, de acordo com as relações de dispersão, à densidade espectral calculada pelo lado da OPE. Assim se dividirmos esta integral em dois intervalos ($m_c^2 \rightarrow s_0$ e $s_0 \rightarrow \infty$) e assumirmos que, no lado direito de (3.73)

$$\rho^D(s) = \frac{3}{8\pi^2} \frac{(s - m_c^2)^2}{s} \quad (3.74)$$

podemos cancelar a integral no segundo intervalo com a equivalente do lado direito. Esta igualdade entre a integral do lado da OPE e a integral do lado fenomenológico é também

conhecida pelo nome de dualidade quark-hadron e supõe que ambas as representações (de pares de quarks e de mesons), com diferentes graus de liberdade, se comportam da mesma maneira em energias maiores do que a do estado fundamental. Com este cancelamento (3.73) transforma-se em:

$$-m_c \langle \bar{q}q \rangle e^{-m_c^2/M^2} + \frac{3}{8\pi^2} \int_{m_c^2}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \frac{(s - m_c^2)^2}{s} = \frac{m_D^4}{m_c^2} f_D^2 e^{-\frac{m_D^2}{M^2}} \quad (3.75)$$

Resolvendo a equação acima para f_D encontramos finalmente:

$$f_D^2 = \frac{3m_c^2}{8\pi^2 m_D^4} \int_{m_c^2}^{s_0} ds e^{\frac{m_D^2 - s}{M^2}} \frac{(s - m_c^2)^2}{s} - \frac{m_c^3}{m_D^4} \langle \bar{q}q \rangle e^{\frac{m_D^2 - m_c^2}{M^2}} \quad (3.76)$$

Este resultado coincide com o encontrado por Belyaev e colaboradores [40]. Na prática o efeito de descontar a somatória sobre as ressonâncias, que não nos interessavam de qualquer forma, foi colocar um limite superior na integral proveniente do lado da OPE. Esse resultado será utilizado diretamente nas outras regras de soma que seguem. É, em parte, por causa deste cancelamento que não temos, em Regras de Soma da QCD, que lidar com divergências ultravioleta e renormalização.

3.4 Análise numérica

O valor de f_D pode ser obtido calculando-se numericamente a expressão da equação (3.76). Vamos fixar as massas e o condensado de quarks usando valores usuais na literatura:

$$\begin{aligned} m_c &= 1,3 \text{ GeV}; \\ m_D &= 1,87 \text{ GeV}; \\ \langle \bar{q}q \rangle &= -(0,23)^3 \text{ GeV}^3. \end{aligned}$$

A seguir analisamos f_D como função da massa de Borel para vários valores do parâmetro de "threshold", s_0 . O resultado deste cálculo pode ser visto na figura 3.3

Vemos que a curva com $s_0 = (m_D + 0,5 \text{ GeV})^2$ é a curva mais estável³ nas proximidades do valor mais aceito de f_D que é de 0,170 GeV (uma certa diferença em relação a este valor é esperada pois estamos levando em conta apenas dois termos da OPE). Com base nesta curva podemos traçar um limite para a variação de f_D com M^2 . Na figura 3.3

³Muitas vezes nos referiremos à curva mais estável de um gráfico. Com isso estamos nos referindo simplesmente à curva com menor inclinação.

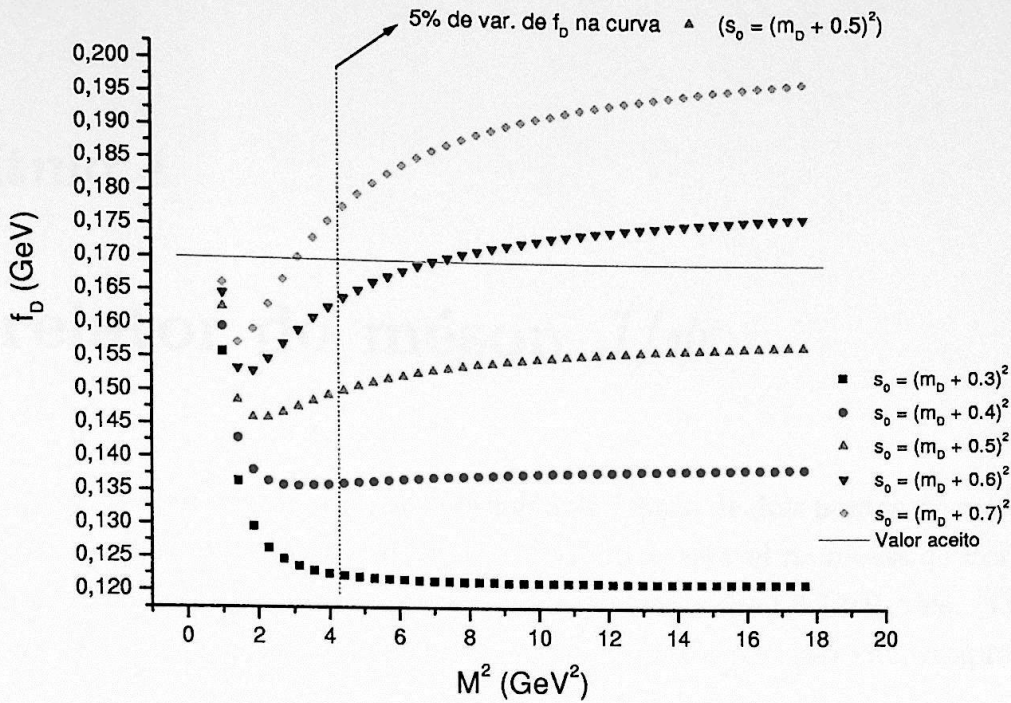


Figura 3.3: Gráfico de f_D como função de M^2

estabelecemos uma tolerância de 5% de variação⁴ do valor de f_D para a curva com $s_0 = (m_D + 0,5 \text{ GeV})^2$ (linha vertical pontilhada) o que nos permite escolher a massa de Borel na região $M^2 \geq 4,3 \text{ GeV}^2$. Esta análise nos permite assim determinar os dois parâmetros do cálculo:

$$s_0 = (m_D + 0,5 \text{ GeV})^2 \tag{3.77}$$

$$M^2 \geq 4,3 \text{ GeV}^2 \tag{3.78}$$

Uma vez determinados na análise acima, estes valores serão usados posteriormente, no cálculo da função de três pontos.

⁴Isto significa apenas que a função f_D assume valores que não diferem entre si em mais do que 5% na região escolhida. É um critério de estabilidade que utilizaremos consistentemente ao longo do trabalho.

Capítulo 4

Correlator do méson J/ψ

Neste capítulo vamos estudar a regra de soma da função de dois pontos do méson J/ψ , encontrando os valores apropriados de s_0 e a região mais estável na massa de Borel. Este resultado não é novo e já foi obtido nos trabalhos pioneiros das QCDSR, refs. [41] e [42]. O nosso cálculo de $f_{J/\psi}$ será útil nos próximos capítulos e por isso vamos apresentá-lo aqui.

4.1 Lado da OPE

Começaremos a regra de soma do méson J/ψ também com o lado da OPE. Definimos o correlator $\Pi_{\mu\nu}^{J/\psi}$ do vértice mostrado no diagrama da figura 4.1: como:

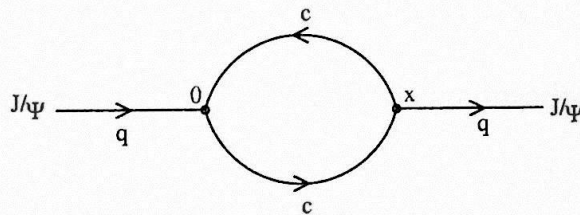


Figura 4.1: Diagrama perturbativo do méson D

$$\Pi_{\mu\nu}^{J/\psi}(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle \underline{0} | T \{ j_\mu(x) j_\nu^\dagger(0) \} | \underline{0} \rangle \quad (4.1)$$

onde:

$$\begin{aligned} q = q^\mu &\implies \text{quadrivetor momento;} \\ x = x^\mu &\implies \text{quadrivetor posição;} \\ | \underline{0} \rangle &\implies \text{v\u00e1cuo f\u00edsico;} \end{aligned}$$

$$j_\mu(x) = \bar{c}_a(x)\gamma_\mu c_a(x) \implies \text{quadrivetor corrente do } J/\psi;$$

$$c_a(x) \implies \text{operador de campo do quark } c;$$

$$\gamma_\mu \implies \text{matriz de Dirac.}$$

Como no capítulo anterior vamos reescrever (4.1):

$$\Pi_{\mu\nu}^{J/\psi}(q) = i \int d^4x e^{iqx} \Pi_{\mu\nu}^{J/\psi}(x) \quad (4.2)$$

onde:

$$\Pi_{\mu\nu}^{J/\psi}(x) = \langle 0|T\{j_\mu(x)j_\nu(0)\}|0 \rangle \quad (4.3)$$

Aplicando o teorema de Wick em (4.3) e considerando somente o termo perturbativo¹ (o que não têm nenhum produto normal) temos:

$$\Pi_{\mu\nu}^{J/\psi}(x) = -tr[\gamma_\mu S_{ab}^c(x)\gamma_\nu S_{ba}^c(-x)] \quad (4.4)$$

Substituindo (4.4) em (4.2), temos:

$$\Pi_{\mu\nu}^{J/\psi}(q) = -i \int d^4x e^{iqx} tr[\gamma_\mu S_{ab}^c(x)\gamma_\nu S_{ba}^c(-x)] \quad (4.5)$$

Podemos escrever o correlador $\Pi_{\mu\nu}^{J/\psi}(q)$ em função de um invariante $\Pi^{J/\psi}(q^2)$ na forma:

$$\Pi_{\mu\nu}^{J/\psi}(q) = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})\Pi^{J/\psi}(q^2); \quad (4.6)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço de Minkowski. Logo:

$$\Pi^{J/\psi}(q^2) = -\frac{1}{3q^2} \Pi^{J/\psi}{}^\nu{}_\nu(q) \quad (4.7)$$

Substituindo (4.5) em (4.7), temos:

$$\Pi^{J/\psi}(q^2) = \frac{i}{3q^2} \int d^4x e^{iqx} tr[\gamma^\nu S_{ab}^c(x)\gamma_\nu S_{ba}^c(-x)] \quad (4.8)$$

¹O termo de condensado de quarks do quark c não foi considerado por oferecer uma contribuição muito pequena

Reescrevendo os propagadores como em (3.8) e (3.9), temos:

$$\begin{aligned}
 \Pi^{J/\psi}(q^2) &= \frac{i}{3q^2} \int d^4x \frac{e^{iqx}}{(2\pi)^8} \int d^4p_1 \int d^4p_2 e^{-ip_1x} e^{-ip_2x} \text{tr}[\gamma^\nu S_{ab}^c(p_1) \gamma_\nu S_{ba}^c(-p_2)] = \\
 &= \frac{i}{3q^2} \int d^4p_1 \int d^4p_2 \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4x e^{ix(q-p_1-p_2)} \text{tr}[\gamma^\nu S_{ab}^c(p_1) \gamma_\nu S_{ba}^c(-p_2)] = \\
 &= \frac{i}{3q^2} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int d^4p_1 \delta^4(q-p_1-p_2) \text{tr}[\gamma^\nu S_{ab}^c(p_1) \gamma_\nu S_{ba}^c(-p_2)] = \\
 &= \frac{i}{3q^2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}[\gamma^\nu S_{ab}^c(q-p) \gamma_\nu S_{ba}^c(-p)] \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Usando (3.13), temos:

$$\Pi^{J/\psi}(q^2) = \frac{-i}{q^2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(q-p)^2 - m_c^2][p^2 - m_c^2]} \text{tr}\{\gamma^\nu[(\not{q}-\not{p}) + m_c] \gamma_\nu[-\not{p} + m_c]\} \quad (4.10)$$

Resolvendo o traço temos:

$$\text{tr}\{\gamma^\nu[(\not{q}-\not{p}) + m_c] \gamma_\nu[-\not{p} + m_c]\} = 8(q-p)p + 16m_c^2 \quad (4.11)$$

Inserindo (4.11) em (4.10):

$$\Pi^{J/\psi}(q^2) = \frac{-i}{q^2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(q-p)^2 - m_c^2][p^2 - m_c^2]} [8(q-p)p + 16m_c^2] \quad (4.12)$$

Aplicando o método de Cutkosky [45] a (4.12), assim com nas eqs. (3.17) a (3.19), encontramos a descontinuidade de (4.12):

$$\bar{\Pi}^{J/\psi}(q^2) = \frac{i}{q^2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \delta[(q-p)^2 - m_c^2] \theta[q_0 - p_0] \delta[p^2 - m_c^2] \theta(p_0) [8(q-p)p + 16m_c^2] \quad (4.13)$$

Como $\bar{\Pi}^{J/\psi}(q^2)$ é um escalar podemos calculá-lo em qualquer referencial, em particular adotaremos:

$$\begin{aligned}
 q^\mu &= (\sqrt{s}, 0) \\
 q^2 &= s \\
 q \cdot p &= \sqrt{s} p_0
 \end{aligned}$$

Com isso:

$$\bar{\Pi}^{J/\psi}(s) = \frac{i}{s} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} \delta[s+p^2-2\sqrt{s} p_0-m_c^2] \theta[\sqrt{s}-p_0] \delta[p^2-m_c^2] \theta(p_0) [8\sqrt{s} p_0-8p^2+16m_c^2] \quad (4.14)$$

Usando o fato de termos $\delta[p^2-m_c^2]$ no integrando podemos substituir p^2 por m_c^2 , chegando a:

$$\bar{\Pi}^{J/\psi}(s) = \frac{i}{s^{3/2}\pi^2} \int d^4 p \delta(p_0 - \sqrt{s}/2) \theta[\sqrt{s}-p_0] \delta[p_0^2 - \vec{p}^2 - m_c^2] \theta(p_0) [\sqrt{s} p_0 + m_c^2] \quad (4.15)$$

As funções $\theta[\sqrt{s}-p_0]$ e $\theta(p_0)$ limitam a integral em p_0 ao intervalo: $0 < p_0 < \sqrt{s}$.

$$\bar{\Pi}^{J/\psi}(s) = \frac{i}{s^{3/2}\pi^2} \int d^3 \vec{p} \int_0^{\sqrt{s}} dp_0 \delta(p_0 - \sqrt{s}/2) \delta[p_0^2 - \vec{p}^2 - m_c^2] [\sqrt{s} p_0 + m_c^2] \quad (4.16)$$

Usando a primeira δ para fazer a integral em p_0 temos:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}^{J/\psi}(s) &= \frac{i}{s^{3/2}\pi^2} \int d^3 \vec{p} \delta(s/4 - \vec{p}^2 - m_c^2) (s/2 + m_c^2) = \\ &= \frac{2i}{s^{3/2}\pi^2} \int_0^\infty d|\vec{p}|^2 |\vec{p}| \delta(s/4 - \vec{p}^2 - m_c^2) (s/2 + m_c^2) \end{aligned} \quad (4.17)$$

e finalmente obtemos a descontinuidade:

$$D[\Pi^{J/\psi}(s)] = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{s\sqrt{s}} (s + 2m_c^2) \sqrt{s - 4m_c^2} \quad \{s \geq 4m_c^2\} \quad (4.18)$$

Inserindo a expressão acima em (3.17) encontramos:

$$\Pi^{J/\psi}(q^2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{4m_c^2}^\infty ds \frac{(s + 2m_c^2) \sqrt{s - 4m_c^2}}{s\sqrt{s}(s - q^2)} \quad (4.19)$$

Passando para o espaço euclidiano através da transformação $q^2 \rightarrow -Q^2$, temos:

$$\Pi^{J/\psi}(Q^2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{4m_c^2}^\infty ds \frac{1}{(s + Q^2)} \frac{(s + 2m_c^2) \sqrt{s - 4m_c^2}}{s\sqrt{s}} \quad (4.20)$$

Fazendo a transformada de Borel obtemos:

$$\beta [\Pi^{J/\psi}(Q^2)] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{4m_c^2}^\infty ds e^{-s/M^2} \frac{(s + 2m_c^2) \sqrt{s - 4m_c^2}}{s\sqrt{s}} \quad (4.21)$$

O resultado (4.21) é o que desejávamos obter neste cálculo, esta é a expressão que será comparada com o resultado obtido pelo lado fenomenológico (eq. (4.37)).

4.2 Lado fenomenológico

Passamos ao cálculo do lado fenomenológico do diagrama de dois pontos do méson J/ψ . Partimos mais uma vez da definição do correlator (eq (4.1)):

$$\Pi_{\mu\nu}^{J/\psi}(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ j_\mu(x) j_\nu^\dagger(0) \} | 0 \rangle \quad (4.22)$$

Usando a definição do produto temporalmente ordenado temos:

$$\Pi_{\mu\nu}^{J/\psi}(q) = i \int d^4x e^{iqx} \{ \langle 0 | \theta(x_0) j_\mu(x) j_\nu^\dagger(0) | 0 \rangle + \langle 0 | \theta(-x_0) j_\nu^\dagger(0) j_\mu(x) | 0 \rangle \} \quad (4.23)$$

Podemos assumir que o conjunto dos mesons formados pela corrente j_μ (ou seja, pelos quarks c e \bar{c}) é um conjunto completo, logo podemos escrever o operador unidade através de um relação de completeza:

$$\hat{1} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0} \frac{1}{(2\pi)^3} |m_j, \lambda, \vec{p}\rangle \langle m_j, \lambda, \vec{p}| \quad (4.24)$$

onde:

$$m_0 = m_{J/\psi} \implies \text{massa do } J/\psi;$$

$$m_j \text{ para } j \geq 1 \implies \text{massas das outras ressonâncias.}$$

Inserindo esta identidade entre as correntes da eq. (4.23) temos:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{J/\psi}(q) &= i \int d^4x e^{iqx} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0(2\pi)^3} \{ \theta(x_0) \langle 0 | j_\mu(x) | m_{J/\psi}, \lambda, \vec{p} \rangle \langle m_{J/\psi}, \lambda, \vec{p} | j_\nu^\dagger(0) | 0 \rangle \\ &+ \theta(-x_0) \langle 0 | j_\nu^\dagger(0) | m_{J/\psi}, \lambda, \vec{p} \rangle \langle m_{J/\psi}, \lambda, \vec{p} | j_\mu(x) | 0 \rangle \} \\ &+ MS \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde:

$$\begin{aligned} MS &= i \int d^4x e^{iqx} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0(2\pi)^3} \{ \theta(x_0) \langle 0 | j_\mu(x) | m_j, \lambda, \vec{p} \rangle \langle m_j, \lambda, \vec{p} | j_\nu^\dagger(0) | 0 \rangle \\ &+ \theta(-x_0) \langle 0 | j_\nu^\dagger(0) | m_j, \lambda, \vec{p} \rangle \langle m_j, \lambda, \vec{p} | j_\mu(x) | 0 \rangle \} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Fazemos então uso do operador translação (eqs. (3.50), (3.51) e (3.52)), para escrever (analogamente a (3.53) e (3.54)):

$$\langle m_{J/\psi}, \lambda, \vec{p} | j_\mu(x) | 0 \rangle = e^{ipx} \langle m_{J/\psi}, \lambda, \vec{p} | j_\mu(0) | 0 \rangle \quad (4.27)$$

$$\langle 0 | j_\mu(x) | m_{J/\psi}, \lambda, \vec{p} \rangle = e^{-ipx} \langle 0 | j_\mu(0) | m_{J/\psi}, \lambda, \vec{p} \rangle \quad (4.28)$$

Este último elemento de matriz é parametrizado da seguinte forma (de acordo com (2.24)):

$$\langle 0 | j_\mu(0) | m_{J/\psi}, \lambda, \vec{p} \rangle = m_{J/\psi} f_{J/\psi} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(p) \quad (4.29)$$

onde $m_{J/\psi}$ é a massa do méson, $f_{J/\psi}$ é a constante de decaimento do J/ψ e $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(p)$ é seu vetor de polarização. Usando as eqs. (4.28) e (4.29) em (4.25) temos:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{J/\psi}(q) &= m_{J/\psi}^2 f_{J/\psi}^2 i \int d^4x e^{iqx} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0(2\pi)^3} \{ \theta(x_0) e^{-ipx} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(p) \epsilon_\nu^{(\lambda)*}(p) \\ &+ \theta(-x_0) e^{ipx} \epsilon_\nu^{(\lambda)}(p) \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(p) \} \\ &+ MS \end{aligned} \quad (4.30)$$

A soma sobre as polarizações de um méson vetorial massivo é dada por [45]:

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(p) \epsilon_\nu^{(\lambda)*}(p) = \left(\frac{p_\mu p_\nu}{m_{j/\psi}^2} - g_{\mu\nu} \right) \quad (4.31)$$

Usando a expressão acima em (4.30) encontramos:

$$\Pi_{\mu\nu}^{J/\psi}(q) = m_{J/\psi}^2 f_{J/\psi}^2 i \int d^4x e^{iqx} \int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0(2\pi)^3} \{ \theta(x_0) e^{-ipx} + \theta(-x_0) e^{ipx} \} \left(\frac{p_\mu p_\nu}{m_{j/\psi}^2} - g_{\mu\nu} \right) + MS \quad (4.32)$$

Usando, em seguida, a eq. (3.57), obtemos:

$$\Pi_{\mu\nu}^{J/\psi}(q) = -m_{J/\psi}^2 f_{J/\psi}^2 \int d^4x e^{iqx} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m_{J/\psi}^2} \left(\frac{p_\mu p_\nu}{m_{j/\psi}^2} - g_{\mu\nu} \right) + MS \quad (4.33)$$

que, integrada em x e p , fornece:

$$\Pi_{\mu\nu}^{J/\psi}(q) = \frac{-f_{J/\psi}^2}{q^2 - m_{J/\psi}^2} (q_\mu q_\nu - m_{J/\psi}^2 g_{\mu\nu}) + MS \quad (4.34)$$

Toda estrutura vetorial está contida em $(q_\mu q_\nu - m_{J/\psi}^2 g_{\mu\nu})$. O termo do contínuo, MS , também deve possuir esta estrutura tensorial:

$$MS = (q_\mu q_\nu - m_{J/\psi}^2 g_{\mu\nu}) MS(q^2) \quad (4.35)$$

Assim, a função escalar (que multiplica a estrutura tensorial) em (4.34) é dada por:

$$\Pi^{J/\psi}(q^2) = \frac{-f_{J/\psi}^2}{q^2 - m_{J/\psi}^2} + MS(q^2) \quad (4.36)$$

Finalmente, passando para o espaço euclideo e fazendo a transformada de Borel:

$$\beta[\Pi^{J/\psi}(Q^2)] = f_{J/\psi}^2 e^{-\frac{m_{J/\psi}^2}{M^2}} + \beta[MS(Q^2)] \quad (4.37)$$

Este é o resultado a ser comparado com o lado da OPE (eq. (4.21)).

4.3 Regra de soma

Igualando o lado fenomenológico (eq. (4.37)) ao lado da OPE (eq. (4.21)), obtemos:

$$f_{J/\psi}^2 e^{-\frac{m_{J/\psi}^2}{M^2}} + \beta[MS(Q^2)] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{4m_c^2}^{\infty} ds e^{-s/M^2} \frac{(s + 2m_c^2)\sqrt{s - 4m_c^2}}{s\sqrt{s}} \quad (4.38)$$

Analogamente ao que foi visto no capítulo 3, temos que:

$$MS = \frac{1}{4\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} ds \rho^{J/\psi}(s) \frac{1}{s - q^2} \quad (4.39)$$

e portanto

$$\beta [MS(Q^2)] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} ds \rho^{J/\psi}(s) e^{-\frac{s}{M^2}} \quad (4.40)$$

Usando a dualidade quark-hádrón chegamos a:

$$f_{J/\psi}^2 e^{-\frac{m_{J/\psi}^2}{M^2}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{4m_c^2}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \frac{(s + 2m_c^2)\sqrt{s - 4m_c^2}}{s\sqrt{s}} \quad (4.41)$$

Portanto:

$$f_{J/\psi}^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{4m_c^2}^{s_0} ds e^{\frac{m_{J/\psi}^2 - s}{M^2}} \frac{(s + 2m_c^2)\sqrt{s - 4m_c^2}}{s\sqrt{s}} \quad (4.42)$$

Este é o resultado já obtido por outros autores como, por exemplo, Belyaev et al. [40].

4.4 Análise numérica

Podemos então obter o valor de $f_{J/\psi}$. Para tal calculamos numericamente a expressão da equação (4.42) usando os mesmos valores das constantes já usadas na função de dois pontos do méson D e, além delas, $m_{J/\psi} = 3,10$ GeV. O resultado deste cálculo pode ser visto na figura 4.2

Neste caso a curva com $s_0 = (m_{J/\psi} + 0,3 \text{ GeV})^2$ é a curva mais estável nas proximidades do valor conhecido de $f_{J/\psi}$, que é de 0,270 GeV (uma certa diferença em relação a este valor é esperada pois estamos levando em conta somente um único termo da OPE). Com base nesta curva podemos traçar um limite para a variação de $f_{J/\psi}$ com M^2 . Na figura 4.2 estabelecemos uma tolerância de 5% de variação do valor de $f_{J/\psi}$ para a curva com $s_0 = (m_{J/\psi} + 0,3 \text{ GeV})^2$ (linha vertical pontilhada) o que nos permite escolher a massa de Borel na região $M^2 \geq 3,4 \text{ GeV}^2$.

Assim esta análise nos permite obter os dois parâmetros necessários para a utilização da função de dois pontos na regra de soma das funções de três pontos:

$$s_0 = (m_{J/\psi} + 0,3 \text{ GeV})^2 \quad (4.43)$$

$$M^2 \geq 3,4 \text{ GeV}^2 \quad (4.44)$$

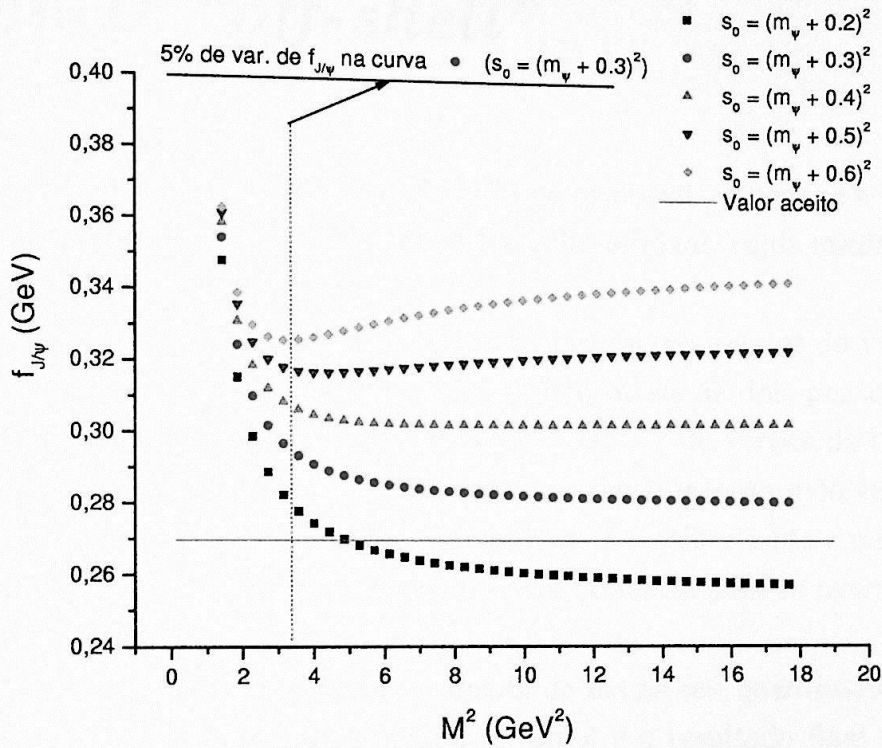


Figura 4.2: Gráfico de $f_{J/\psi}$ como função de M^2

Capítulo 5

O vértice J/ψ - D - D : méson D “*off-shell*”

Tendo introduzido nos capítulos anteriores os principais conceitos e técnicas, vamos apresentar nos próximos capítulos o nosso trabalho original, cujos resultados foram publicados em [34].

Estudaremos a seguir a regra de soma da função de três pontos do vértice J/ψ - D - D (mostrado na figura 5.1). Assim como para os diagramas de dois pontos, começaremos pelo lado da OPE, construindo o correlator. O correlator do vértice de três pontos pode ser construído de duas maneiras diferentes, pois um dos três mesons do vértice estará fora da camada de massa, ou seja $q^2 \neq m^2$. Podemos então escolher tanto o méson D quanto o J/ψ como o méson “*off-shell*”. Os diagramas resultantes de uma ou outra escolha podem ser vistos na figura 5.1.

Quando uma partícula está fora da camada de massa seu quadrimomento quadrado, por exemplo q^2 , não sofrerá transformada de Borel e o resultado final irá depender de q^2 . Assim, o cálculo da função de vértice dará origem ao fator de forma dependente de q^2 , $g(q^2)$. Além disso, como não há massa de Borel definida para a partícula “*off-shell*”, a amplitude de transição entre esta partícula e o vácuo, caracterizada geralmente pela constante de decaimento f , não será uma função da massa M^2 , mas terá um valor constante.

No caso de partículas “*on-shell*”, fazemos a transformada de Borel, por exemplo $P^2 \rightarrow M^2$ e $P'^2 \rightarrow M'^2$, fixando a seguir valores de M^2 e M'^2 no interior da janela de Borel (ou região “fiducial”). As constantes de decaimento passam a ser funções de M^2 ou M'^2 . Nos nossos vértices teremos, por exemplo, $f_D(M^2)$ e $f_{J/\psi}(M^2)$, e para estas últimas usaremos os resultados dos capítulos anteriores.

Finalmente, podemos também ter duas, ou mesmo três partículas “*off-shell*”. Este caso nunca foi estudado nas QCDSR. Recentemente [15], no contexto de teorias efetivas

para mesons pesados, foi sugerido que o processo J/ψ (real) $\rightarrow D$ (virtual) + D (virtual) é relevante para o cálculo da massa do J/ψ no meio nuclear. Este é um vértice com dois mesons D "off-shell" que poderia ser calculado com regras de soma e será, eventualmente, objeto de um trabalho futuro.

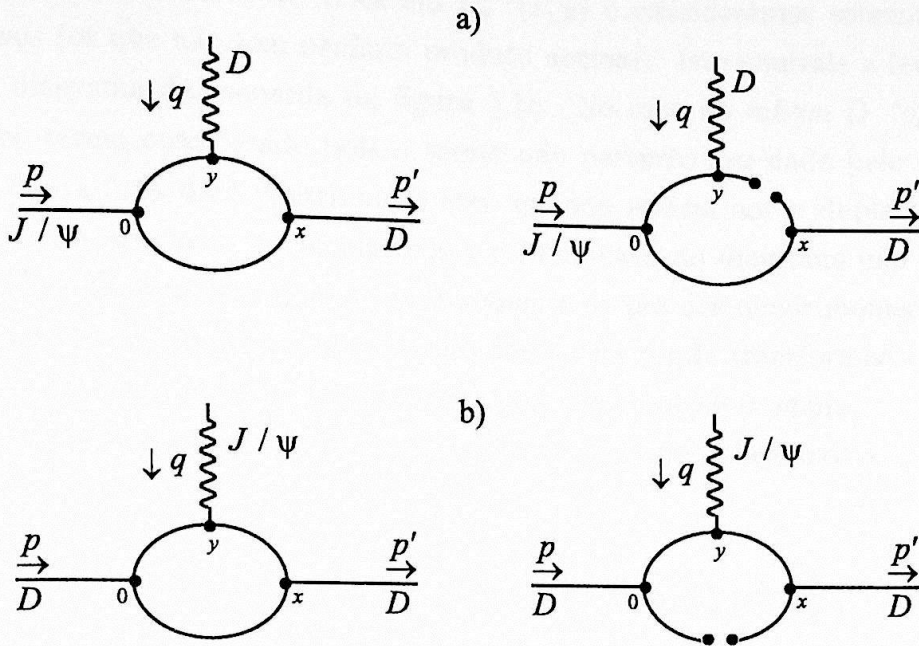


Figura 5.1: (a) D "off-shell", (b) J/ψ "off-shell"

5.1 Lado da OPE

O correlator para o vértice com o méson D "off-shell" (figura 5.1a) fica:

$$\Gamma_{\mu}^{(D)}(p, p', q) = \int d^4x \int d^4y e^{ip'x} e^{-iqy} \langle 0 | T \{ j_D(x) j_D^{\dagger}(y) j_{\mu}^{\dagger}(0) \} | 0 \rangle \quad (5.1)$$

onde usamos as correntes definidas anteriormente e p , p' e q são, respectivamente, o momento do J/ψ , o momento do méson D saindo do vértice e o momento do méson D entrando no vértice. Assim:

$$p + q = p' \quad (5.2)$$

Podemos escrever a eq. (5.1) na forma:

$$\Gamma_{\mu}^{(D)}(p, p', q) = \int d^4x \int d^4y e^{ip'x} e^{-iqy} \Gamma_{\mu}^{(D)}(x, y) \quad (5.3)$$

Aplicamos então o teorema de Wick em $\Gamma_{\mu}^{(D)}(x, y)$ e consideramos somente os termos perturbativos (os que não tem nenhum produto normal). Isto equivale a levar em conta somente o diagrama da esquerda da figura 5.1a. No caso do méson D "off-shell" este será o único termo considerado pois o termo não perturbativo dado pelo diagrama da direita na figura 5.1a dará contribuição zero quando aplicarmos a dupla transformada de Borel. Isto ocorre pois se calcularmos a contribuição do diagrama não perturbativo chegaremos a uma expressão que depende somente de um dos quadrimomentos p ou p' e do quadrimomento q , de forma que quando fizermos a dupla transformada em p e p' (o que envolve infinitas derivadas em cada um) esta contribuição se anula.

Repetindo os passos já mostrados em capítulos anteriores chegamos a:

$$\Gamma_{\mu}^{(D)}(x, y) = tr[S_{cb}^c(-y) \gamma_5 S_{ba}^u(y-x) \gamma_5 S_{ac}^c(x) \gamma_{\mu}] \quad (5.4)$$

Inserindo a expressão acima em (5.3) e usando as definições do propagador de quarks, (3.8) e (3.9), temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu}^{(D)}(p, p', q) &= \int d^4x \int d^4y e^{ip'x} e^{-iqy} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p_1 e^{-ip_1x} \times \\ &\times \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p_2 e^{-ip_2(x-y)} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p_3 e^{-ip_3y} \times \\ &\times tr[S_{cb}^c(-p_3) \gamma_5 S_{ba}^u(-p_2) \gamma_5 S_{ac}^c(p_1) \gamma_{\mu}] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Podemos transformar as exponenciais em funções δ através de:

$$\int d^4x e^{ix(p'-p_1-p_2)} = (2\pi)^4 \delta^4(p' - p_1 - p_2) \quad (5.6)$$

$$\int d^4y e^{iy(p_2-q-p_3)} = (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - q - p_3) \quad (5.7)$$

Usando estas equações em (5.5) temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu}^{(D)}(p, p', q) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p_1 \int d^4p_2 \int d^4p_3 \delta(p' - p_1 - p_2) \delta(p_2 - q - p_3) \times \\ &\times tr[S_{cb}^c(-p_3) \gamma_5 S_{ba}^u(-p_2) \gamma_5 S_{ac}^c(p_1) \gamma_{\mu}] \end{aligned} \quad (5.8)$$

Utilizando as funções δ para integrar em p_2 e p_3 , temos (mudando a variável de p_1 para k):

$$\Gamma_{\mu}^{(D)}(p, p', q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \operatorname{tr}[S_{cb}^c(k-p) \gamma_5 S_{ba}^u(k-p') \gamma_5 S_{ac}^c(k) \gamma_{\mu}] \quad (5.9)$$

Substituindo (3.13) na equação acima e lembrando que $\{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} = 2g_{\mu\nu}$ e também que $\{\gamma_{\mu}, \gamma_5\} = 0$, chegamos a:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu}^{(D)}(p, p', q) &= \frac{-3i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2 - m_c^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_c^2} \frac{1}{(p - k)^2 - m_c^2} \times \\ &\times \operatorname{tr}\{(\not{k} - \not{p} + m_c) \underbrace{\gamma_5 (\not{k} - \not{p}') \gamma_5}_{(\not{p}' - \not{k})} (\not{k} + m_c) \gamma_{\mu}\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Calculando o traço temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu}^{(D)}(p, p', q) &= \frac{3i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{4}{[k^2 - m_c^2](p' - k)^2[(p - k)^2 - m_c^2]} \times \\ &\times [(k \cdot p' - k^2)p_{\mu} + (k^2 - m_c^2 - k \cdot p)p'_{\mu} + \\ &+ (p \cdot p' - 2k \cdot p' + k^2 + m_c^2)k_{\mu}] \end{aligned} \quad (5.11)$$

Aplicamos novamente o método de Cutkosky [45]. Neste caso as relações de dispersão para a dupla descontinuidade nos fornecem:

$$\Gamma_{\mu}^{(D)}(p^2, p'^2, q^2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} ds \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du \frac{DD[\Gamma_{\mu}^{(D)}(s, u, t)]}{(s - p^2)(u - p'^2)} \quad (5.12)$$

A função $A_{\mu} = DD[\Gamma_{\mu}^{(D)}(s, u, t)]$ pode ser calculada fazendo substituições do tipo da eq. (3.19), para eliminar os denominadores de (5.11). Vamos assim encontrar:

$$\begin{aligned} A_{\mu} &= \frac{-6}{\pi} \int d^4k \delta[k^2 - m_c^2] \delta[(p' - k)^2] \delta[p^2 - 2p \cdot k] \theta(k_0) \theta(p'_0 - k_0) \theta(p_0 - k_0) \times \\ &\times [(k \cdot p' - m_c^2)p_{\mu} - k \cdot p p'_{\mu} + (p \cdot p' - 2k \cdot p' + 2m_c^2)k_{\mu}] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Adotaremos agora um sistema de referência particular, mostrado na figura 5.2, no qual o méson J/ψ está em repouso ($\vec{p} = 0$) e o eixo z está na direção do méson D resultante. Neste referencial:

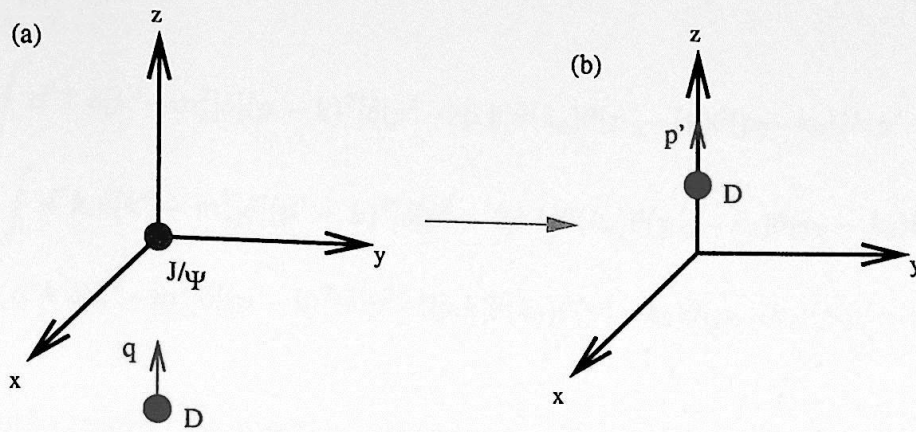


Figura 5.2: Novo referencial (a) antes do choque e (b) depois do choque.

$$p^\mu = (\sqrt{s}, 0, 0, 0) \Rightarrow p^2 = s \quad p_0 = \sqrt{s} \quad (5.14)$$

$$p'^\mu = (p'_0, 0, 0, |\vec{p}'|) \quad (5.15)$$

É interessante definir mais dois invariantes:

$$u = p'^2 \quad (5.16)$$

$$t = q^2 \quad (5.17)$$

Usando estas definições (eqs. (5.14) a (5.17)) e $p + q = p'$, temos:

$$|\vec{p}'| = \frac{\sqrt{s^2 + u^2 + t^2 - 2us - 2st - 2ut}}{2\sqrt{s}} \equiv \frac{\sqrt{\lambda(s, u, t)}}{2\sqrt{s}} \quad (5.18)$$

$$p'_0 = \frac{s + u - t}{2\sqrt{s}} \quad (5.19)$$

Podemos então reescrever a equação (5.13) da seguinte forma:

$$A_\mu = \mathcal{I}_1 p_\mu + \mathcal{I}_2 p'_\mu + I_\mu \quad (5.20)$$

De forma que:

$$\mathcal{I}_1 = \frac{-6}{\pi} \int d^4k \delta[k^2 - m_c^2] \delta[(p' - k)^2] \delta[p^2 - 2p \cdot k] \theta(k_0) \theta(p'_0 - k_0) \theta(p_0 - k_0) (k \cdot p' - m_c^2) \quad (5.21)$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{6}{\pi} \int d^4k \delta[k^2 - m_c^2] \delta[(p' - k)^2] \delta[p^2 - 2p \cdot k] \theta(k_0) \theta(p'_0 - k_0) \theta(p_0 - k_0) k \cdot p \quad (5.22)$$

$$I_\mu = \frac{-6}{\pi} \int d^4k \delta[k^2 - m_c^2] \delta[(p' - k)^2] \delta[p^2 - 2p \cdot k] \theta(k_0) \theta(p'_0 - k_0) \theta(p_0 - k_0) (p \cdot p' - 2k \cdot p' + 2m_c^2) k_\mu \quad (5.23)$$

Podemos então resolver as integrais¹ obtendo:

$$\mathcal{I}_1 = -\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda(s, u, t)}} (u - m_c^2) \quad (5.24)$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{3}{2} \frac{s}{\sqrt{\lambda(s, u, t)}} \quad (5.25)$$

$$I_\mu = - \left\{ \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (s - u - t + 2m_c^2) \left[1 - \frac{1}{\lambda} (s - u - t - 2m_c^2)(s + u - t) \right] \right\} p_\mu + \\ - \left\{ \frac{3}{2} \frac{s}{\lambda^{3/2}} (s - u - t + 2m_c^2)(s - u - t - 2m_c^2) \right\} p'_\mu \quad (5.26)$$

Nestas integrais as variáveis s , t e u devem satisfazer as seguintes condições (provenientes das funções δ):

$$s \geq 4m_c^2 \quad (5.27)$$

$$u > t \quad (5.28)$$

$$4m_c^4 + 4m_c^2 u + 4m_c^2 t + 4ut \leq -\frac{4m_c^2}{s} (-2us - 2ts + u^2 + t^2 - 2ut) \quad (5.29)$$

Substituindo as integrais (eqs. (5.24) a (5.26)) em (5.20), temos:

$$A_\mu = -\frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\{ 2(u - m_c^2) + (s - u - t + 2m_c^2) \left[1 - \frac{1}{\lambda} (s - u - t - 2m_c^2)(s + u - t) \right] \right\} p_\mu + \\ - \frac{3}{2} \frac{s}{\sqrt{\lambda}} \left\{ -1 + \frac{1}{\lambda} (s - u - t + 2m_c^2)(s - u - t - 2m_c^2) \right\} p'_\mu \\ = \rho_1 p_\mu + \rho_2 p'_\mu \quad (5.30)$$

¹A integral de I_μ , que ilustra bem a técnica usada para resolver estas integrais, está feita com detalhes no apêndice B

Substituímos esta expressão na equação (5.12). A seguir passamos para o espaço euclídeo com as transformações:

$$\begin{aligned} p^2 &\longrightarrow -P^2 \\ p'^2 &\longrightarrow -P'^2 \\ q^2 = t^2 &\longrightarrow -Q^2 \end{aligned}$$

Fazendo finalmente a dupla transformada de Borel nas variáveis P e P' (de forma que trocamos P^2 por M^2 e P'^2 por M'^2), encontramos:

$$\beta[\Gamma_\mu^{(D)}(p^2, p'^2, q^2)] = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} ds \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du A_\mu e^{-s/M^2} e^{-u/M'^2} \quad (5.31)$$

onde usamos a eq. (2.27).

A equação (5.31), substituindo A_μ de (5.30) e usando as condições de (5.27) a (5.29) para determinar os limites de integração, é o resultado a ser comparado com o lado fenomenológico.

5.2 Lado fenomenológico

O correlator para o vértice com o méson D "off-shell" (figura 5.1a) fica:

$$\Gamma_\mu^{(D)}(p, p', q) = \int d^4x \int d^4y e^{ip'x} e^{-iqy} \underbrace{\langle 0 | T \{ j_D(x) j_D^\dagger(y) j_\mu^\dagger(0) \} | 0 \rangle}_{\mathcal{T}} \quad (5.32)$$

Podemos reescrever o ordenamento temporal \mathcal{T} na forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \theta(x_0)\theta(y_0)\theta(x_0 - y_0)j_D(x)j_D^\dagger(y)j_\mu^\dagger(0) + && \rightarrow \mathcal{T}_1 \\ &+ \theta(x_0)\theta(y_0)\theta(y_0 - x_0)j_D^\dagger(y)j_D(x)j_\mu^\dagger(0) + && \rightarrow \mathcal{T}_2 \\ &+ \theta(-x_0)\theta(y_0)\theta(y_0 - x_0)j_D^\dagger(y)j_\mu^\dagger(0)j_D(x) + && \rightarrow \mathcal{T}_3 \\ &+ \theta(-x_0)\theta(-y_0)\theta(x_0 - y_0)j_\mu^\dagger(0)j_D(x)j_D^\dagger(y) + && \rightarrow \mathcal{T}_4 \\ &+ \theta(-x_0)\theta(-y_0)\theta(y_0 - x_0)j_\mu^\dagger(0)j_D^\dagger(y)j_D(x) + && \rightarrow \mathcal{T}_5 \\ &+ \theta(x_0)\theta(-y_0)\theta(x_0 - y_0)j_D(x)j_\mu^\dagger(0)j_D^\dagger(y) && \rightarrow \mathcal{T}_6 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Assim tratamos cada termo \mathcal{T}_i de acordo com o procedimento utilizado no diagrama de dois pontos. Usamos as eqs. (4.24) e (3.45) para inserir conjuntos completos e as eqs. (4.29) e (3.55) para determinar o valor dos "brackets". Aparece então o elemento de matriz (2.22):

$$\langle m_{J/\psi}, \lambda, \vec{p} | (m_D, -\vec{p}'), (m_D, \vec{q}) \rangle = -g_{(J/\psi)DD}(q^2) (q + p')_\mu \epsilon^{(\lambda)\mu}(q) \quad (5.34)$$

onde $g_{(J/\psi)DD}(q^2)$ é o fator de forma do vértice e a notação foi um pouco alterada. Podemos recombinar os seis termos T_i utilizando a eq. (3.57):

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{(D)}(p^2, p'^2, q^2) &= -\frac{m_D^2 f_D}{m_c} m_{J/\psi} f_{J/\psi} \frac{m_D^2 f_D}{m_c} \times \\ &\times \frac{g_{(J/\psi)DD}^{(D)}(q^2)}{m_D^2 - q^2} \frac{1}{p^2 - m_{J/\psi}^2} \frac{1}{p'^2 - m_D^2} \times \\ &\times \left(-2p'_\mu + \frac{m_D^2 + m_{J/\psi}^2 - q^2}{m_{J/\psi}^2} p_\mu \right) + \\ &+ MS \end{aligned} \quad (5.35)$$

Passando para o espaço euclidiano e fazendo a dupla transformada de Borel (da forma mostrada em (5.31)) temos:

$$\begin{aligned} \beta[\Gamma_\mu^{(D)}(p^2, p'^2, q^2)] &= -\frac{m_D^2 f_D}{m_c} m_{J/\psi} f_{J/\psi} \frac{m_D^2 f_D}{m_c} \times \\ &\times \frac{g_{(J/\psi)DD}^{(D)}(Q^2)}{m_D^2 + Q^2} e^{-\frac{m_{J/\psi}^2}{M^2}} e^{-\frac{m_D^2}{M'^2}} \times \\ &\times \left(-2p'_\mu + \frac{m_D^2 + m_{J/\psi}^2 + Q^2}{m_{J/\psi}^2} p_\mu \right) + \\ &+ \beta[MS] \end{aligned} \quad (5.36)$$

A eq. (5.36) é o resultado a ser comparado com o lado da OPE (eq. (5.31)).

5.3 Regra de soma

No caso do vértice de três pontos podemos montar duas regras de soma para cada caso de méson virtual. Isto ocorre pois ambos os lados, fenomenológico e da OPE, estão expressos na forma $Ap_\mu + Bp'_\mu$, assim podemos igualar a parte que multiplica a "estrutura" p_μ separadamente da parte que multiplica a estrutura p'_μ . Assim usando o lado fenomenológico (eq. (5.36)) e o lado da OPE (eq. (5.31)) para o caso do méson D virtual, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{m_D^2 f_D}{m_c} m_{J/\psi} f_{J/\psi} \frac{m_D^2 f_D}{m_c} \frac{g_{J/\psi DD}^{(D)}(Q^2)}{m_D^2 + Q^2} e^{-\frac{m_{J/\psi}^2}{M^2}} e^{-\frac{m_D^2}{M'^2}} \left(\frac{m_D^2 + m_{J/\psi}^2 + Q^2}{m_{J/\psi}^2} \right) = \\
 & = \frac{3}{16\pi^2 \sqrt{\lambda}} \int_{s_{min}}^{s_0} ds \int_{u_{min}}^{u_0} du \left\{ 2(u - m_c^2) + (s - u - t + 2m_c^2) \times \right. \\
 & \left. \times \left[1 - \frac{1}{\lambda} (s - u - t - 2m_c^2)(s + u - t) \right] \right\} e^{-s/M^2} e^{-u/M'^2} \quad (\text{estrutura } p) \quad (5.37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2m_D^2 f_D}{m_c} m_{J/\psi} f_{J/\psi} \frac{m_D^2 f_D}{m_c} \frac{g_{J/\psi DD}^{(D)}(Q^2)}{m_D^2 + Q^2} e^{-\frac{m_{J/\psi}^2}{M^2}} e^{-\frac{m_D^2}{M'^2}} = \\
 & = \frac{3s}{8\pi^2 \sqrt{\lambda}} \int_{s_{min}}^{s_0} ds \int_{u_{min}}^{u_0} du \left\{ -1 + (s - u - t + 2m_c^2) \times \right. \\
 & \left. \times \frac{1}{\lambda} (s - u - t - 2m_c^2) \right\} e^{-s/M^2} e^{-u/M'^2} \quad (\text{estrutura } p') \quad (5.38)
 \end{aligned}$$

onde, de maneira análoga ao que foi feito nas seções 3.2.2 e 3.3, introduzimos do lado fenomenológico uma densidade espectral:

$$\rho^{fen} = \rho^{fen}(s, t, u) \quad (5.39)$$

e a seguir usamos o princípio da dualidade quark-hádron para identificá-la à dupla descontinuidade, definida em (5.12), (5.13) e (5.30). Como agora temos duas estruturas vamos ter uma densidade espectral para cada estrutura.

$$\rho_1^{fen}(s, t, u) = \rho_1(s, t, u) \quad (5.40)$$

$$\rho_2^{fen}(s, t, u) = \rho_2(s, t, u) \quad (5.41)$$

As variáveis s e u representam os quadrimomentos quadrados dos momentos que entram (s) e que saem (u) do vértice. Também aqui as funções ρ_1 e ρ_2 preservam seu sentido de peso estatístico das massas das partículas que entram e saem do vértice. Massas entre $s_{min} < s < s_0$ e $u_{min} < u < u_0$ são associadas aos estados fundamentais, ou polos. Massas maiores $s > s_0$ e $u > u_0$ estão associadas aos contínuos. Temos agora dois parâmetros de "threshold" do contínuo, s_0 e u_0 . Para eles vamos usar os valores já estudados nos capítulos passados. É importante notar que os integrandos de (5.37) e (5.38) satisfazem as condições dadas pelas eqs. (5.27), (5.28) e (5.29) e estas condições podem fornecer limites superiores menores que s_0 e u_0 . Se isolarmos $g_{J/\psi DD}^{(D)}(Q^2)$:

$$\begin{aligned}
 g_{J/\psi DD}^{(D)}(Q^2) &= -\frac{m_c^2 m_{J/\psi}}{m_D^4 f_D^2 f_{J/\psi} (m_D^2 + m_{J/\psi}^2 + Q^2)} (m_D^2 + Q^2) \times \\
 &\times \frac{3}{16\pi^2 \sqrt{\lambda}} \int_{s_{\min}}^{s_0} ds \int_{u_{\min}}^{u_0} du \left\{ 2(u - m_c^2) + (s - u - t + 2m_c^2) \times \right. \\
 &\times \left. \left[1 - \frac{1}{\lambda} (s - u - t - 2m_c^2)(s + u - t) \right] \right\} e^{\frac{m_{J/\psi}^2 - s}{M^2}} e^{\frac{m_D^2 - u}{M'^2}} \\
 &\quad (\text{estrutura } p)
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned}
 g_{J/\psi DD}^{(D)}(Q^2) &= \frac{m_c^2}{2m_D^4 f_D^2 f_{J/\psi} m_{J/\psi}} (m_D^2 + Q^2) \times \\
 &\times \frac{3s}{8\pi^2 \sqrt{\lambda}} \int_{s_{\min}}^{s_0} ds \int_{u_{\min}}^{u_0} du \left\{ -1 + (s - u - t + 2m_c^2) \times \right. \\
 &\times \left. \frac{1}{\lambda} (s - u - t - 2m_c^2) \right\} e^{\frac{m_{J/\psi}^2 - s}{M^2}} e^{\frac{m_D^2 - u}{M'^2}} \\
 &\quad (\text{estrutura } p')
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

É importante observar que, nas expressões acima $f_D = f_D(M_D^2)$ e $f_{J/\psi} = f_{J/\psi}(M_{J/\psi}^2)$, conforme (3.76) e (4.42). Além disso, de acordo com (3.78) e (4.44) temos que $M_D^2 \geq 4,3 \text{ GeV}^2$ e $M_{J/\psi}^2 \geq 3,4 \text{ GeV}^2$. Estas duas massas de Borel não são iguais às M^2 e M'^2 que surgiram no estudo da função de três pontos. Assim, apesar da notação compacta usada acima, vemos que, na realidade:

$$g_{J/\psi DD}^{(D)} = g_{J/\psi DD}^{(D)}(Q^2, M^2, M'^2, M_D^2, M_{J/\psi}^2) \tag{5.44}$$

Na prática, introduzimos vínculos entre as massas, de forma a ter somente uma variável de Borel independente e assim $g_{J/\psi DD}^{(D)} = g_{J/\psi DD}^{(D)}(Q^2, M^2)$

5.4 Análise numérica

Passamos então para a análise numérica das funções de três pontos do vértice J/ψ - D - D . Neste caso tanto o lado da OPE (eq. (5.31)) quanto o lado fenomenológico (eqs. (5.36)) estão expressos na forma $Ap + Bp'$. Podemos utilizar qualquer uma das duas estruturas (p ou p') para escrever a regra de soma. Em princípio ambas as estruturas nos dariam o mesmo resultado, no entanto as aproximações envolvidas no cálculo afetam cada uma das estruturas de forma diferente. Assim uma destas estruturas pode ser mais

conveniente para o procedimento das regras de soma. Primeiramente analisaremos qual das estruturas é mais apropriada.

Para fazer isto escolhemos alguns valores de Q^2 (os valores escolhidos se encontram dentro da região de Q^2 que utilizaremos na regra de soma; esta região será melhor estudada mais adiante) e usando as expressões para o fator de forma g eqs. (5.42) e (5.43) fazemos gráficos de $g(Q^2, M^2)$ contra M^2 . Estes gráficos podem ser vistos na figura 5.3.

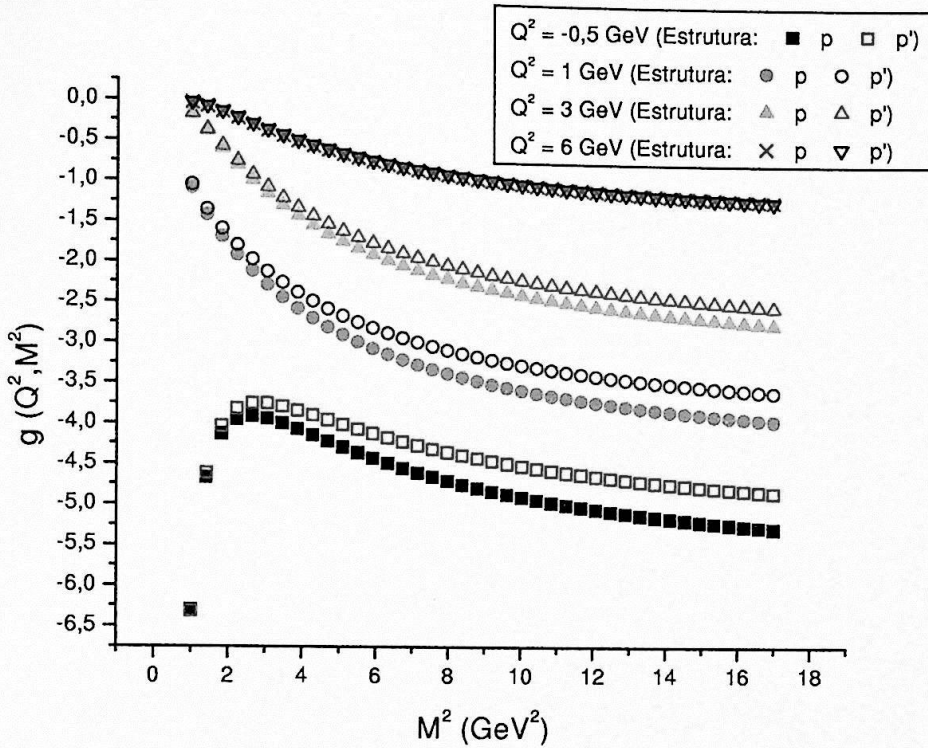


Figura 5.3: Comparação das estruturas p e p'

Observando a figura 5.3 notamos que a diferença entre as estruturas diminui com o aumento de Q^2 . Além disso notamos que as curvas obtidas para a estrutura p' são mais estáveis (apresentam menor variação com M^2) que as curvas de mesma energia para a estrutura p . Assim utilizaremos a regra de soma da estrutura p' ao longo da análise que segue.

Devemos começar estudando o comportamento do fator de forma em função da massa de Borel. No caso das funções de três pontos temos duas massas de Borel, M e M' (associadas a p e p' respectivamente). A rigor deveríamos estudar o comportamento da função em relação às duas massas, procurando uma estabilidade em ambas as variáveis. No entanto, como já visto na seção 2.5, sabemos que o valor destas massas deve estar em torno da massa do méson a cujo momento a massa de Borel está ligada. De modo que a

massa de Borel M (que está associada ao momento p do méson J/ψ) deve estar em torno de $m_{J/\psi}$ e M' (que está associada ao momento p' do méson D) deve estar em torno de m_D :

$$\begin{aligned} p^2 \rightarrow -P^2 \rightarrow M^2 & & p'^2 \rightarrow -P'^2 \rightarrow M'^2 \\ M^2 \cong m_{J/\psi}^2 & & M'^2 \cong m_D^2 \end{aligned}$$

Para facilitar o estudo numérico podemos estabelecer um vínculo entre M^2 e M'^2 :

$$\begin{cases} M^2 = m_{J/\psi}^2 \\ M'^2 = m_D^2 \end{cases} \implies \frac{M^2}{M'^2} = \frac{m_{J/\psi}^2}{m_D^2} \implies M'^2 = \frac{m_D^2}{m_{J/\psi}^2} M^2 \quad (5.45)$$

Substituindo a relação acima em (5.43) ficamos com uma função só de M^2 . Passamos então a estudar o comportamento do fator de forma em função de M^2 escolhendo valores de Q^2 e fazendo um gráfico de $g_{J/\psi DD}^{(D)}(M^2)$. Isto nos leva à questão da escolha dos valores de Q^2 .

Se observarmos a condição (5.29) temos, para a região $s \geq 4m_c^2$ (dada pela condição (5.27)), os seguintes limites de integração para u :

$$u_{max} = \frac{1}{2m_c^2} \left[-st + m_c^2(s + 2t) + \sqrt{(s - 4m_c^2)s(m_c^2 - t)^2} \right] \quad (5.46)$$

$$u_{min} = \frac{1}{2m_c^2} \left[-st + m_c^2(s + 2t) - \sqrt{(s - 4m_c^2)s(m_c^2 - t)^2} \right] \quad (5.47)$$

Já a condição (5.28) impõe que $u > t$, logo se t for maior que u_{max} o intervalo de integração será nulo. Assim temos a condição de que t seja menor que u_{max} . Resolvendo esta inequação chegamos à condição:

$$t < m_c^2 \Leftrightarrow Q^2 > -m_c^2 = -1,69 \text{ GeV}^2 \quad (5.48)$$

o que impõe um limite mínimo para os valores de Q^2 que podemos escolher. Outro fator importante a ser notado antes de fazermos o gráfico de $g_{J/\psi DD}^{(D)}(Q^2, M^2)$ é que na equação (5.43) aparecem, além das constantes já utilizadas anteriormente, os valores de f_D e $f_{J/\psi}$. Estes valores serão tratados da seguinte forma:

- (i) para a constante de decaimento do méson entrando "off-shell" será utilizado o valor obtido da literatura (neste caso $f_D = 0,170 \text{ GeV}$);

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3813

ex. 1

(ii) para as constantes dos outros dois mesons iremos utilizar a função obtida na regra de soma de dois pontos (eqs. (3.76) e (4.42)), daí a importância de determinar os parâmetros obtidos nos capítulos anteriores.

O procedimento (i) se justifica porque, como já foi dito, para a partícula "off-shell" a variável de Borel não está definida e (3.76) não se aplica. No caso do procedimento (ii) poderíamos optar por usar valores constantes para f_D e $f_{J/\psi}$. Em alguns trabalhos este procedimento é adotado. No entanto, em outros trabalhos foi demonstrado que o uso de $f_D = f_D(M^2)$ e $f_{J/\psi} = f_{J/\psi}(M^2)$ melhora significativamente a estabilidade da regra de soma da função de três pontos. Isto ocorre porque, presumivelmente há um "cancelamento de erros" cometidos tanto no cálculo da função de dois pontos como na de de três pontos.

Finalmente utilizaremos $u_0 = (m_D + 0,5 \text{ GeV})^2$ (que é o parametro ligado ao D e foi obtido na eq. (3.77)) e $s_0 = (m_{J/\psi} + 0,3 \text{ GeV})^2$ (que é o parametro ligado ao J/ψ e foi obtido na eq (4.43)). O resultado pode ser visto na figura 5.4.

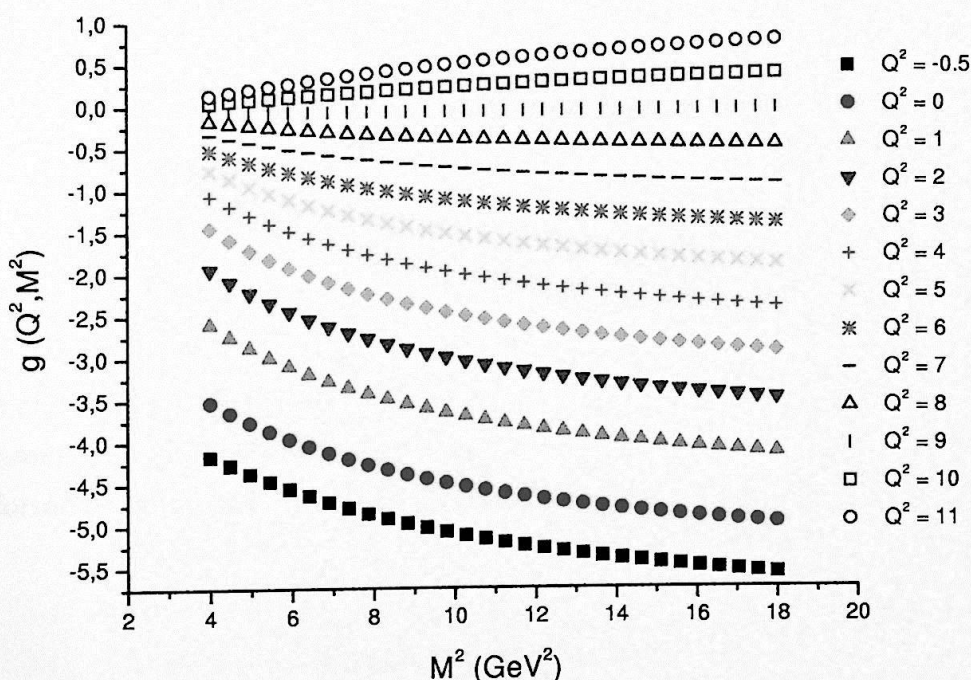


Figura 5.4: Gráfico de $g_{J/\psi DD}^{(D)}(Q^2, M^2)$ em vários valores de Q^2

Na prática valores de Q^2 muito próximos do limite inferior dado por (5.48) causam erros na rotina de integração numérica pois os limites de integração ficam muito próximos um do outro. Assim o menor valor de Q^2 usado foi de $-0,5 \text{ GeV}^2$.

Observando a figura 5.4, notamos que para valores altos de Q^2 ($Q^2 \geq 7 \text{ GeV}^2$) o valor do fator de forma muda de sinal. Isto é mais fácil de ser visualizado se escolhermos uma massa de Borel e fizermos um gráfico da variação de $g_{J/\psi DD}^{(D)}$ com Q^2 . O gráfico obtido está na figura 5.5.

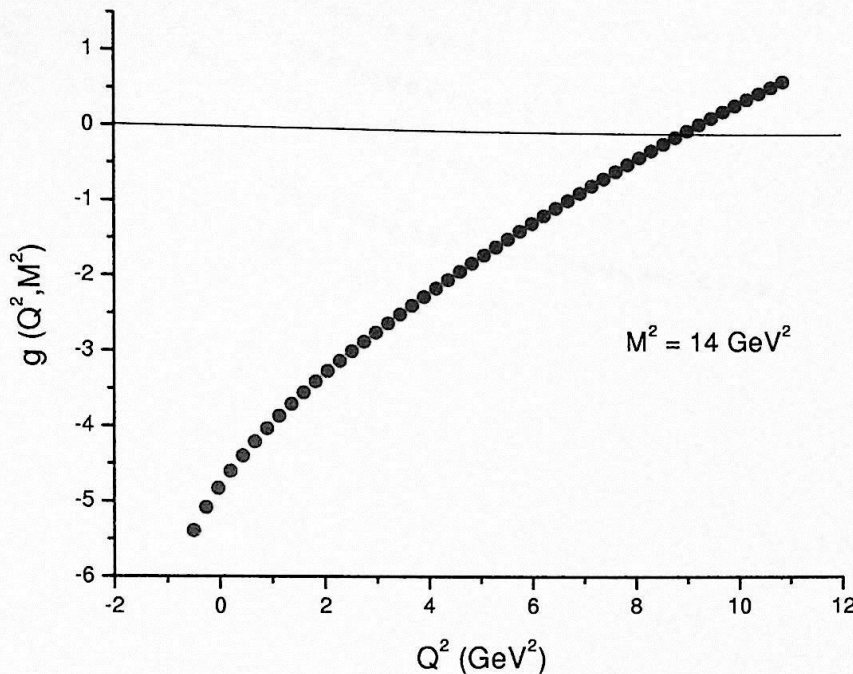


Figura 5.5: Gráfico de $g_{J/\psi DD}^{(D)}(Q^2, M^2)$ para $M^2 = 14 \text{ GeV}^2$

Nota-se claramente que o fator de forma não tende assintoticamente a zero (de fato o comportamento do gráfico indica que teremos valores cada vez maiores para o fator de forma conforme Q^2 aumenta). Isto nos leva a escolher a seguinte região de Q^2 :

$$-0,5 \text{ GeV}^2 \leq Q^2 \leq 6 \text{ GeV}^2 \quad (5.49)$$

Neste intervalo de Q^2 temos as curvas mostradas na figura 5.6.

Aplicando o critério de 5 % de variação à curva mais instável² deste intervalo (que corresponde a $Q^2 = -0,5 \text{ GeV}^2$) obtemos a massa de Borel mínima a ser utilizada:

²A curva mais instável é aquela com maior inclinação no gráfico. Aplicamos o critério de estabilidade à curva mais instável pois, assim que determinamos uma região de estabilidade para esta curva, sabemos que todas as outras curvas (que são mais estáveis) também serão estáveis nesta região.

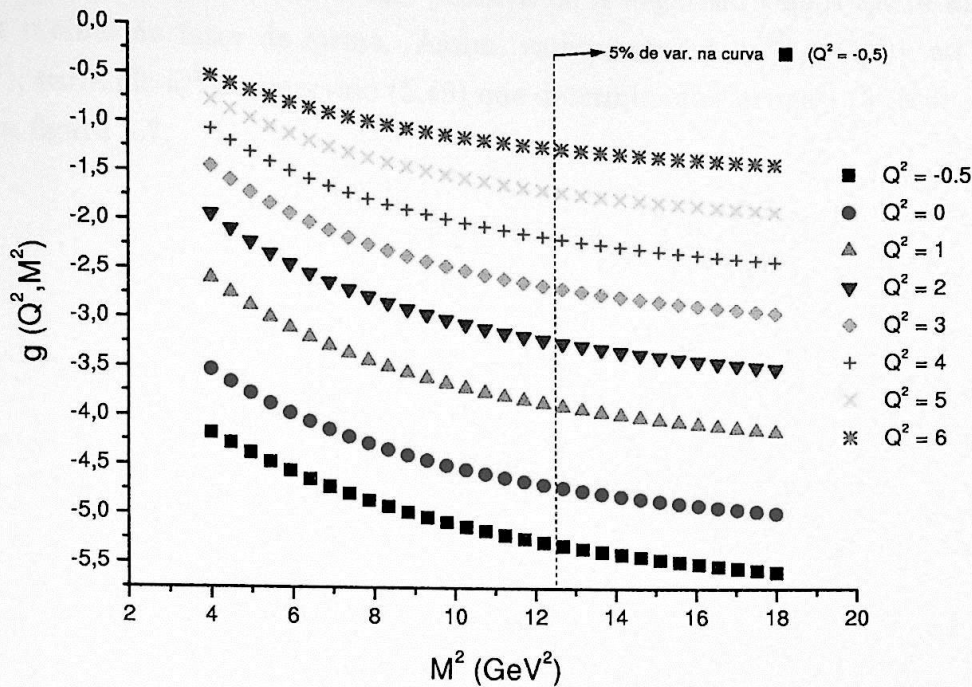


Figura 5.6: Gráfico de $g_{J/\psi DD}^{(D)}(M^2)$ para valores adequados de Q^2

$$M^2 \geq 12,5 \text{ GeV}^2 \quad (5.50)$$

Como valores muito altos de M^2 levam a uma estabilidade trivial devemos escolher o menor valor possível para M^2 , que é $M^2 = 12,5 \text{ GeV}^2$.

No que se refere a função de dois pontos, poderíamos utilizar $\frac{M^2}{2}$ e $\frac{M'^2}{2}$ ao invés de M^2 e M'^2 . Esta substituição nas eqs. (3.76) e (4.42) faria a estabilidade da regra de soma melhorar [46]. No entanto esta escolha pode ser inconveniente no nosso caso. Usando a massa de Borel na região $M^2 \approx 12,5 \text{ GeV}^2$ teremos, de acordo com a relação (5.45), $M'^2 \approx 4,6 \text{ GeV}^2$. A função de dois pontos dada por (3.76) é usada na regra de soma de três pontos para representar a interação no ponto x da figura 5.1, onde é criado um méson D com momento p' . Assim a massa de Borel que deve ser usada na função (3.76) é M' . Assim, se colocarmos $\frac{M'^2}{2}$ ao invés de M'^2 estaremos usando valores em torno de $2,3 \text{ GeV}^2$ na função de dois pontos do méson D , o que viola a condição (3.78). De fato observando a figura 3.3 notamos que a região próxima a $M^2 = 2,3 \text{ GeV}^2$ é realmente uma região muito instável da regra de soma de dois pontos. Como a massa $M'^2 \approx 4,6 \text{ GeV}^2$ está numa região aceita por (3.78) não faremos a substituição de M^2 por $\frac{M^2}{2}$.

Em (4.42) temos $f_{J/\psi}^2$ mas em (5.42) e (5.43) temos o fator de forma como função de $f_{J/\psi}$. Como poderíamos usar a raiz positiva ou a negativa, vemos que é impossível determinar o sinal do fator de forma. Assim, vamos estudar $|g_{J/\psi DD}^{(D)}(Q^2)|$, ao invés de $g_{J/\psi DD}^{(D)}(Q^2)$, variando Q^2 no intervalo (5.49) que determinamos acima³. O resultado pode ser visto na figura 5.7.

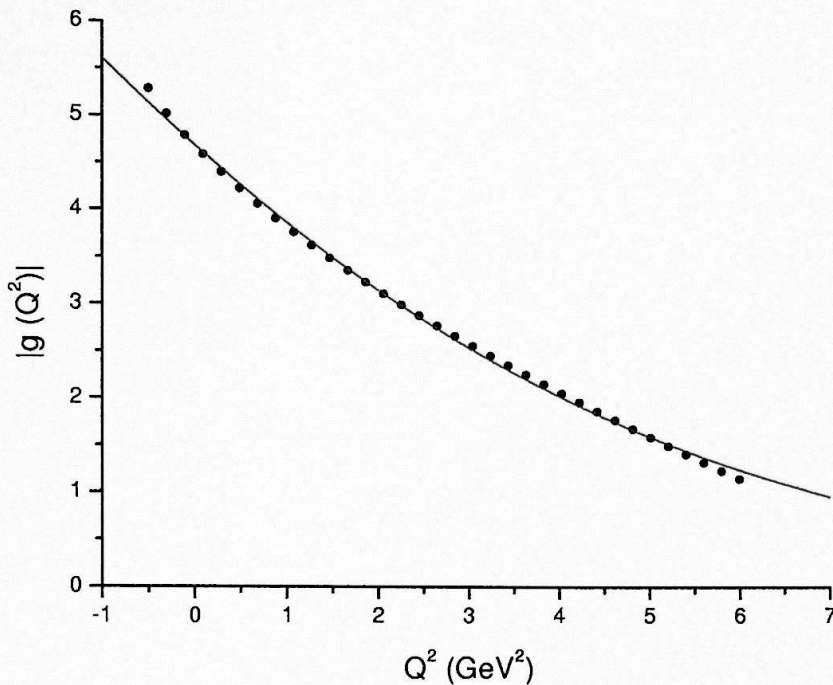


Figura 5.7: Gráfico de $g_{J/\psi DD}^{(D)}(Q^2)$ com $M^2 = 12,5 \text{ GeV}^2$

A linha contínua na figura 5.7 representa a seguinte parametrização (ajustada usando o algoritmo Levenberg-Marquardt):

$$|g_{J/\psi DD}^{(D)}(Q^2)| = Ae^{-\frac{(Q^2+B)^2}{C}} \quad (5.51)$$

$$A = 18,9 \pm 3,1$$

$$B = 15,3 \pm 1,6$$

$$C = 168 \pm 15$$

³Fazemos isto simplesmente para facilitar a comparação com o resultado da regra de soma com o méson J/ψ "off-shell". Faremos também $g_{J/\psi DD} = |g_{J/\psi DD}^{(D)}(Q^2 = -m_D^2)|$, obtendo assim uma constante de acoplamento positivo-definida.

Conhecendo o fator de forma podemos calcular a constante de acoplamento do vértice fazendo $g_{J/\psi DD} = |g_{J/\psi DD}^{(D)}(Q^2 = -m_D^2)|$. Assim obtemos:

$$g_{J/\psi DD} = 8,3 \pm 2,3 \quad (5.52)$$

O erro indicado vem da propagação dos erros nos parâmetros A , B e C . O erro de aproximadamente 25%, apesar de ser da mesma magnitude de outros cálculos com QCDSR, ainda será diminuído nos próximos capítulos, pois a mesma constante de acoplamento será reobtida de uma maneira independente, através do estudo do mesmo vértice com o méson J/ψ fora da camada de massa.

Capítulo 6

O vértice J/ψ - D - D : méson J/ψ “*off-shell*”

6.1 Lado da OPE

O correlator para o vértice com o méson J/ψ “*off-shell*” (figura 5.1b) fica:

$$\Gamma_{\mu}^{(J/\psi)}(p, p', q) = \int d^4x \int d^4y e^{ip'x} e^{-iqy} \langle 0 | T \{ j_D(x) j_{\mu}^{\dagger}(y) j_D^{\dagger}(0) \} | 0 \rangle \quad (6.1)$$

onde usamos as correntes definidas anteriormente e p , p' e q são, respectivamente, o momento do méson D entrando no vértice, o momento do méson D saindo do vértice e o momento do J/ψ . Assim:

$$p + q = p' \quad (6.2)$$

Podemos escrever a eq. (6.1) na forma:

$$\Gamma_{\mu}^{(J/\psi)}(p, p', q) = \int d^4x \int d^4y e^{ip'x} e^{-iqy} \Gamma_{\mu}^{(J/\psi)}(x, y) \quad (6.3)$$

6.1.1 Termo perturbativo

Aplicamos então o teorema de Wick em $\Gamma_{\mu}^{(J/\psi)}(x, y)$ e consideramos somente o termo perturbativo (o que não tem nenhum produto normal). Isto equivale a levar em conta somente o diagrama da esquerda da figura 5.1b (o termo não perturbativo dado pelo diagrama da direita na figura 5.1b será calculado em seguida). Assim, repetindo os passos mostrados anteriormente:

$$\Gamma_{\mu}^{(J/\psi)}(x, y) = \text{tr}[S_{bc}^c(y) \gamma_5 S_{ca}^u(-x) \gamma_5 S_{ab}^c(x-y) \gamma_{\mu}] \quad (6.4)$$

Substituindo a equação acima em (6.3) e usando as eqs. (3.8) e (3.9), temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu}^{(J/\psi)}(p, p', q) &= \int d^4x \int d^4y e^{ip'x} e^{-iqy} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p_1 e^{-ip_1x} \times \\ &\times \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p_2 e^{-ip_2(x-y)} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p_3 e^{-ip_3y} \times \\ &\times \text{tr}[S_{bc}^c(p_3) \gamma_5 S_{ca}^u(-p_1) \gamma_5 S_{ab}^c(p_2) \gamma_{\mu}] \end{aligned} \quad (6.5)$$

Usando $\int d^4x$ e $\int d^4y$ para transformar as exponenciais em funções δ e, usando estas funções para integrar em p_2 e p_3 , temos (mudando a variável de p_1 para k):

$$\Gamma_{\mu}^{(J/\psi)}(p, p', q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \text{tr}[S_{bc}^c(p-k) \gamma_5 S_{ca}^u(-k) \gamma_5 S_{ab}^c(p'-k) \gamma_{\mu}] \quad (6.6)$$

Usando (3.13), temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu}^{(J/\psi)}(p, p', q) &= \frac{-3i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2} \frac{1}{(p'-k)^2 - m_c^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_c^2} \times \\ &\times \text{tr}\{(\not{p} - \not{k} + m_c) \underbrace{\gamma_5 (-\not{k}) \gamma_5}_{\not{k}} (\not{p}' - \not{k} + m_c) \gamma_{\mu}\} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Calculando o traço temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu}^{(J/\psi)}(p, p', q) &= \frac{-12i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2} \frac{1}{(p'-k)^2 - m_c^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_c^2} \times \\ &\times [(k \cdot p' - k^2)p_{\mu} + (p \cdot k - k^2)p'_{\mu} + \\ &+ (m_c^2 - p \cdot p' + k^2)k_{\mu}] \end{aligned} \quad (6.8)$$

Analogamente a (5.12), aplicamos o método de Cutkosky [45]:

$$\Gamma_{\mu}^{(J/\psi)}(p^2, p'^2, q^2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} ds \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du \frac{DD[\Gamma_{\mu}^{(J/\psi)}(s, u, t)]}{(s-p^2)(u-p'^2)} \quad (6.9)$$

Tal que $DD[\Gamma_\mu^{(J/\psi)}(s, u, t)] \equiv A_\mu$ pode ser calculado fazendo substituições do tipo da eq. (3.19), em $\Gamma_\mu^{(J/\psi)}(p, p', q)$. Assim:

$$A_\mu = \frac{6}{\pi} \int d^4k \delta(k^2) \delta[p'^2 - 2p' \cdot k - m_c^2] \delta[p^2 - 2p \cdot k - m_c^2] \theta(k_0) \theta(p'_0 - k_0) \theta(p_0 - k_0) \times \\ \times [(k \cdot p' - k^2)p_\mu + (p \cdot k - k^2)p'_\mu + (m_c^2 - p \cdot p' + k^2)k_\mu] \quad (6.10)$$

Adotaremos agora um sistema de referência particular, mostrado na figura 6.1, no qual o méson D que entra no vértice (com quadrimomento p) está em repouso ($\vec{p} = 0$) e o eixo z está na direção do méson D resultante. Assim obtemos novamente as relações (5.14), (5.15), (5.18) e (5.19), Usando as mesmas definições da seção anterior para u e t (eqs. (5.5) e (5.17)).

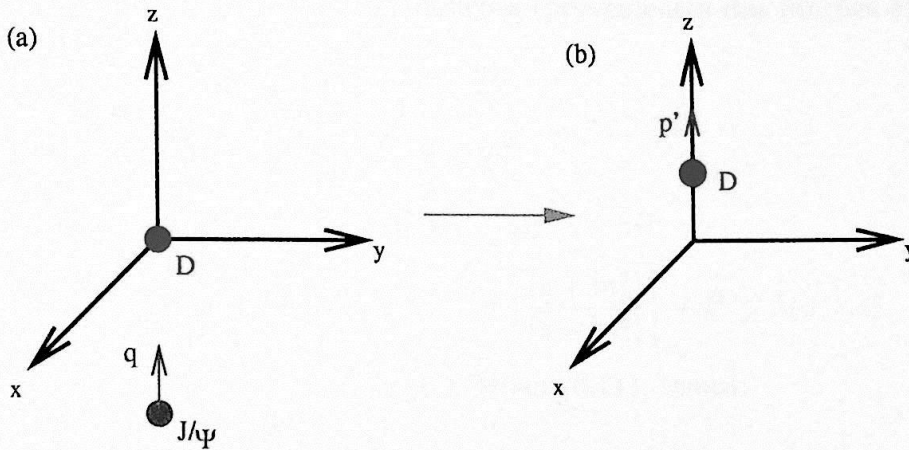


Figura 6.1: Novo referencial (a) antes do choque e (b) depois do choque.

Podemos então reescrever a equação (6.10) da seguinte forma:

$$A_\mu = \mathcal{I}_1 p_\mu + \mathcal{I}_2 p'_\mu + I_\mu \quad (6.11)$$

De forma que:

$$\mathcal{I}_1 = \frac{6}{\pi} \int d^4k \delta(k^2) \delta[p'^2 - 2p' \cdot k - m_c^2] \delta[p^2 - 2p \cdot k - m_c^2] \theta(k_0) \theta(p'_0 - k_0) \theta(p_0 - k_0) (k \cdot p' - k^2) \quad (6.12)$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{6}{\pi} \int d^4k \delta(k^2) \delta[p'^2 - 2p' \cdot k - m_c^2] \delta[p^2 - 2p \cdot k - m_c^2] \theta(k_0) \theta(p'_0 - k_0) \theta(p_0 - k_0) (p \cdot k - k^2) \quad (6.13)$$

$$I_\mu = \frac{6}{\pi} \int d^4k \delta(k^2) \delta[p'^2 - 2p' \cdot k - m_c^2] \delta[p^2 - 2p \cdot k - m_c^2] \theta(k_0) \theta(p'_0 - k_0) \theta(p_0 - k_0) (m_c^2 - p \cdot p' + k^2) \quad (6.14)$$

Podemos então resolver as integrais obtendo:

$$\mathcal{I}_1 = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda(s, u, t)}} (u - m_c^2) \quad (6.15)$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda(s, u, t)}} (s - m_c^2) \quad (6.16)$$

$$I_\mu = \left\{ \frac{3}{4s\sqrt{\lambda}} (2m_c^2 - s - u + t) \left\{ (s - m_c^2) + \frac{(s + u - t)}{\lambda} [(s + m_c^2)(u - s) + t(s - m_c^2)] \right\} \right\} p_\mu +$$

$$- \left\{ \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda^{3/2}} (2m_c^2 - s - u + t) [(s + m_c^2)(u - s) + t(s - m_c^2)] \right\} p'_\mu \quad (6.17)$$

Estas integrais satisfazem as seguintes condições (provenientes das funções δ):

$$s \geq m_c^2 \quad (6.18)$$

$$u \geq t - m_c^2 \quad (6.19)$$

$$(u - s)^2 \left[\frac{(s + m_c^2)}{(s - m_c^2)} \right]^2 + 2(u - s)t \left[\frac{(s + m_c^2)}{(s - m_c^2)} \right] + t^2 \leq \lambda(u, s, t) \quad (6.20)$$

Substituindo as integrais (eqs. (6.15) a (6.17)) em (6.11), temos:

$$A_\mu = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\{ 2(u - m_c^2) + \frac{1}{s} (2m_c^2 - s - u + t) \times \right.$$

$$\times \left. \left\{ (s - m_c^2) + \frac{(s + u - t)}{\lambda} [(s + m_c^2)(u - s) + t(s - m_c^2)] \right\} \right\} p_\mu +$$

$$+ \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\{ (s - m_c^2) - \frac{1}{\lambda} (2m_c^2 - s - u + t) [(s + m_c^2)(u - s) + t(s - m_c^2)] \right\} p'_\mu \quad (6.21)$$

ou, ainda numa forma mais compacta:

$$A_\mu = - \left\{ \frac{3}{\lambda^{3/2}} (s - t - u) (m_c^4 - su) \right\} p_\mu +$$

$$+ \left\{ \frac{3}{\lambda^{3/2}} (s + t - u) (m_c^4 - su) \right\} p'_\mu \quad (6.22)$$

Voltando com este resultado na equação (6.9) teremos a função $\Gamma_\mu^{(J/\psi)}(p^2, p'^2, q^2)$. Passamos então para o espaço euclideo com as transformações:

$$\begin{aligned} p^2 &\longrightarrow -P^2 \\ p'^2 &\longrightarrow -P'^2 \\ q^2 = t^2 &\longrightarrow -Q^2 \end{aligned}$$

Fazendo então a transformada de Borel em P e P' (de forma que trocamos P^2 por M^2 e P'^2 por M'^2):

$$\beta[\Gamma_\mu^{(J/\psi)}(p^2, p'^2, q^2)] = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{s_{min}}^{s_{max}} ds \int_{u_{min}}^{u_{max}} du A_\mu e^{-s/M^2} e^{-u/M'^2} \quad (6.23)$$

onde usamos a eq. (2.27).

A equação (6.23) (substituindo A_μ de (6.22) e usando as condições (6.18), (6.19) e (6.20) para determinar os limites de integração) dá a contribuição do diagrama da esquerda da figura 5.1b, ou seja, somente a parte perturbativa.

6.1.2 Condensado de quarks

A contribuição do primeiro termo não perturbativo (diagrama da direita em 5.1b) é dada por¹:

$$\Gamma_\mu^{(J/\psi)(\langle \bar{q}q \rangle)}(p, p', q) = \int d^4x \int d^4y e^{ip'x} e^{-iqy} \Gamma_\mu^{(J/\psi)(\langle \bar{q}q \rangle)}(x, y) \quad (6.24)$$

onde:

$$\Gamma_\mu^{(J/\psi)(\langle \bar{q}q \rangle)}(x, y) = \text{tr}[S_{bc}^c(y) \gamma_5 (-\frac{1}{12} \delta_{ca} \hat{1} \langle \bar{q}q \rangle) \gamma_5 S_{ab}^c(x-y) \gamma_\mu] \quad (6.25)$$

Substituindo a equação acima em (6.24) e usando as eqs. (3.8) e (3.9), temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{(J/\psi)(\langle \bar{q}q \rangle)}(p', q) &= -\frac{\delta_{ca}}{12} \langle \bar{q}q \rangle \int d^4x \int d^4y e^{ip'x} e^{-iqy} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p_1 e^{-ip_1 y} \times \\ &\times \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p_2 e^{-ip_2(x-y)} \text{tr}[S_{bc}^c(p_1) S_{ab}^c(p_2) \gamma_\mu] \end{aligned} \quad (6.26)$$

Usando $\int d^4x$ e $\int d^4y$ para transformar as exponenciais em funções δ e usando estas funções para integrar em p_1 e p_2 temos:

¹Ver seção 2.3.

$$\Gamma_{\mu}^{(J/\psi)(\langle \bar{q}q \rangle)}(p', q) = -\frac{\delta_{ca}}{12} \langle \bar{q}q \rangle \text{tr} [S_{bc}^c \underbrace{(p' - q)}_p S_{ab}^c(p') \gamma_{\mu}] \quad (6.27)$$

Usando (3.13), temos:

$$\Gamma_{\mu}^{(J/\psi)(\langle \bar{q}q \rangle)}(p', p) = \frac{3}{12} \langle \bar{q}q \rangle \frac{1}{p^2 - m_c^2} \frac{1}{p'^2 - m_c^2} \text{tr}[(\not{p} + m_c)(\not{p}' + m_c)\gamma_{\mu}] \quad (6.28)$$

Como:

$$\text{tr}[(\not{p} + m_c)(\not{p}' + m_c)\gamma_{\mu}] = 4m_c[p_{\mu} + p'_{\mu}] \quad (6.29)$$

temos:

$$\Gamma_{\mu}^{(J/\psi)(\langle \bar{q}q \rangle)}(p', p) = \frac{m_c \langle \bar{q}q \rangle}{(p^2 - m_c^2)(p'^2 - m_c^2)} [p_{\mu} + p'_{\mu}] \quad (6.30)$$

Passamos então para o espaço euclidiano com as transformações:

$$\begin{aligned} p^2 &\longrightarrow -P^2 \\ p'^2 &\longrightarrow -P'^2 \end{aligned}$$

Fazendo então a transformada de Borel em P e P' (de forma que trocamos P^2 por M^2 e P'^2 por M'^2):

$$\beta[\Gamma_{\mu}^{(J/\psi)(\langle \bar{q}q \rangle)}(P', P)] = m_c \langle \bar{q}q \rangle e^{-\frac{m_c^2}{M^2}} e^{-\frac{m_c^2}{M'^2}} [p_{\mu} + p'_{\mu}] \quad (6.31)$$

Assim o resultado final a ser comparado com o lado fenomenológico é a soma da equação (6.23) com a equação (6.31).

6.2 Lado fenomenológico

Podemos calcular o lado fenomenológico do vértice de três pontos com o J/ψ "off-shell" de forma exatamente análoga a do D "off-shell", obtendo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu}^{(J/\psi)}(p^2, p'^2, q^2) &= -\frac{m_D^4 f_D^2}{m_c^2} m_{J/\psi} f_{J/\psi} \times \\ &\times \frac{g_{J/\psi DD}^{(J/\psi)}(q^2)}{m_{J/\psi}^2 - q^2} \frac{1}{p^2 - m_D^2} \frac{1}{p'^2 - m_D^2} \times \\ &\times (p'_{\mu} + p_{\mu}) + \\ &+ MS \end{aligned} \quad (6.32)$$

Passando para o espaço euclideo e fazendo a dupla transformada de Borel (da forma mostrada em (5.31)) temos:

$$\begin{aligned} \beta[\Gamma_{\mu}^{(J/\psi)}(p^2, p'^2, q^2)] &= -\frac{m_D^4 f_D^2}{m_c^2} m_{J/\psi} f_{J/\psi} \times \\ &\times \frac{g_{J/\psi DD}^{(J/\psi)}(Q^2)}{m_{J/\psi}^2 + Q^2} e^{-\frac{m_D^2}{M^2}} e^{-\frac{m_D^2}{M'^2}} \times \\ &\times (p'_{\mu} + p_{\mu}) + \\ &+ \beta[MS] \end{aligned} \quad (6.33)$$

A eq. (6.33) é o resultado a ser comparado com o lado da OPE (eqs. (6.23) e (6.31)).

6.3 Regra de soma

Usando o lado fenomenológico (eq. 6.33) e os termos perturbativo e do condensado de quarks do lado da OPE (eqs. (6.23) e (6.31)) para o caso do méson J/ψ virtual, obtemos:

$$\begin{aligned} &-\frac{m_D^4 f_D^2}{m_c^2} m_{J/\psi} f_{J/\psi} \frac{g_{J/\psi DD}^{(J/\psi)}(Q^2)}{m_{J/\psi}^2 + Q^2} e^{-\frac{m_D^2}{M^2}} e^{-\frac{m_D^2}{M'^2}} = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{s_{min}}^{s_0} ds \int_{u_{min}}^{u_0} du \left\{ \frac{-3}{\lambda^{3/2}} (s-t-u)(m_c^4 - su) \right\} e^{-\frac{s}{M^2}} e^{-\frac{u}{M'^2}} + \\ &\quad + m_c \langle \bar{q}q \rangle e^{-\frac{m_c^2}{M^2}} e^{-\frac{m_c^2}{M'^2}} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(estrutura } p) \\ \text{(6.34)} \end{array}$$

$$-\frac{m_D^4 f_D^2}{m_c^2} m_{J/\psi} f_{J/\psi} \frac{g_{J/\psi DD}^{(J/\psi)}(Q^2)}{m_{J/\psi}^2 + Q^2} e^{-\frac{m_D^2}{M^2}} e^{-\frac{m_D^2}{M'^2}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{s_{\min}}^{s_0} ds \int_{u_{\min}}^{u_0} du \left\{ \frac{3}{\lambda^{3/2}} (s+t-u)(m_c^4 - su) \right\} e^{-\frac{s}{M^2}} e^{-\frac{u}{M'^2}} + \\
 &\quad + m_c < \bar{q}q > e^{-\frac{m_c^2}{M^2}} e^{-\frac{m_c^2}{M'^2}} \\
 &\hspace{15em} (\text{estrutura } p') \quad (6.35)
 \end{aligned}$$

onde já descontamos as ressonâncias. É importante notar que o integrando satisfaz as condições dadas pelas eqs. (6.18), (6.19) e (6.20) e estas condições podem fornecer limites superiores menores que s_0 e u_0 . Se isolarmos $g_{J/\psi DD}^{(J/\psi)}(Q^2)$, vamos encontrar:

$$\begin{aligned}
 g_{J/\psi DD}^{(J/\psi)}(Q^2) &= \frac{-m_c^2}{m_D^4 f_D^2 m_{J/\psi} f_{J/\psi}} (m_{J/\psi}^2 + Q^2) m_c < \bar{q}q > e^{\frac{(m_D^2 - m_c^2)}{M^2}} e^{\frac{(m_D^2 - m_c^2)}{M'^2}} + \\
 &+ \frac{m_c^2}{m_D^4 f_D^2 m_{J/\psi} f_{J/\psi}} (m_{J/\psi}^2 + Q^2) \times \\
 &\times \frac{1}{4\pi^2} \int_{s_{\min}}^{s_0} ds \int_{u_{\min}}^{u_0} du \left\{ \frac{-3}{\lambda^{3/2}} (s-t-u)(m_c^4 - su) \right\} \times \\
 &\times e^{\frac{m_D^2 - s}{M^2}} e^{\frac{m_D^2 - u}{M'^2}} \\
 &\hspace{15em} (\text{estrutura } p) \quad (6.36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{J/\psi DD}^{(J/\psi)}(Q^2) &= \frac{-m_c^2}{m_D^4 f_D^2 m_{J/\psi} f_{J/\psi}} (m_{J/\psi}^2 + Q^2) m_c < \bar{q}q > e^{\frac{(m_D^2 - m_c^2)}{M^2}} e^{\frac{(m_D^2 - m_c^2)}{M'^2}} + \\
 &+ \frac{m_c^2}{m_D^4 f_D^2 m_{J/\psi} f_{J/\psi}} (m_{J/\psi}^2 + Q^2) \times \\
 &\times \frac{1}{4\pi^2} \int_{s_{\min}}^{s_0} ds \int_{u_{\min}}^{u_0} du \left\{ \frac{3}{\lambda^{3/2}} (s+t-u)(m_c^4 - su) \right\} \times \\
 &\times e^{\frac{m_D^2 - s}{M^2}} e^{\frac{m_D^2 - u}{M'^2}} \\
 &\hspace{15em} (\text{estrutura } p') \quad (6.37)
 \end{aligned}$$

6.4 Análise numérica

Mais uma vez temos que decidir entre utilizar a estrutura p ou p' para escrever a regra de soma. Para fazer isto escolhemos alguns valores de Q^2 (os valores escolhidos se encontram dentro da região de Q^2 que utilizaremos na regra de soma; esta região será melhor estudada mais adiante) e usando as expressões para o fator de forma g (eqs. (6.36) e (6.37)) fazemos um gráfico de $g(Q^2, M^2)$ como função de M^2 . Este gráfico pode ser visto na figura 6.2.

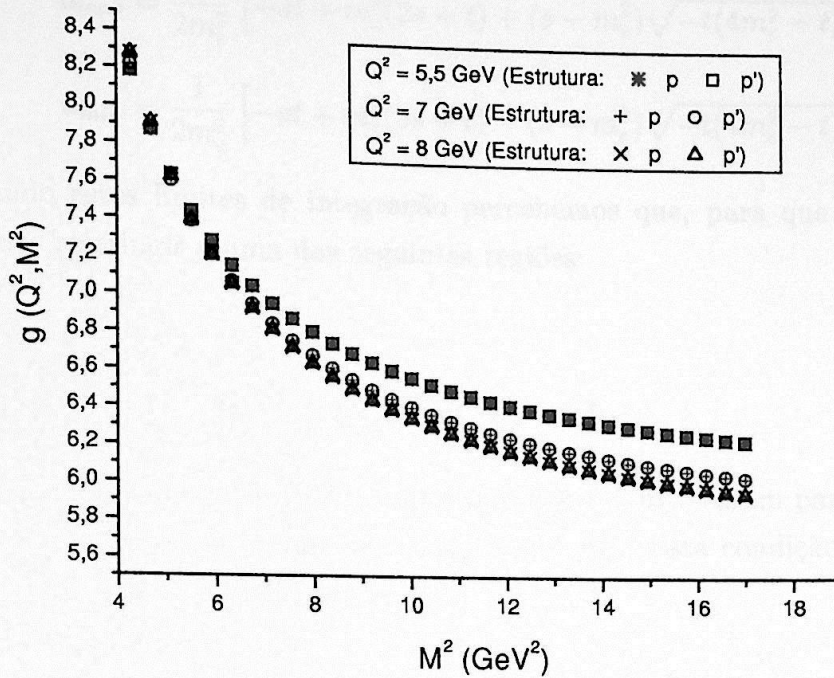


Figura 6.2: Comparação das estruturas p e p'

Observando a figura 6.2 notamos uma completa equivalência entre as estruturas p e p' , assim temos liberdade de escolher qualquer uma delas para escrever a regra de soma. Ao longo da análise que segue estaremos utilizando a regra de soma da estrutura p' , por simples questão de coerência com o caso do méson D "off-shell" (onde tínhamos razões para utilizar esta estrutura).

Assim como para o caso do méson D "off-shell", iniciaremos a análise da função de três pontos com o méson J/ψ "off-shell" determinando valores apropriados de Q^2 para analisar o comportamento da função com M^2 e M'^2 . Aqui também podemos estabelecer uma relação entre M e M' de forma a facilitar os cálculos numéricos:

$$p^2 \rightarrow -P^2 \rightarrow M^2 \quad p'^2 \rightarrow -P'^2 \rightarrow M'^2$$

$$M^2 \cong m_D^2 \quad M'^2 \cong m_D^2$$

Portanto, neste caso $M^2 = M'^2$ e podemos fazer o estudo da estabilidade do fator de forma como função apenas de uma massa ($g = g(M^2)$).

A condição (6.18) nos restringe ao intervalo em s dado por $s \geq m_c^2$. Neste intervalo a condição (6.20) nos dá os seguintes limites de integração em u :

$$u_{max} = \frac{1}{2m_c^2} \left[-st + m_c^2(2s + t) + (s - m_c^2)\sqrt{-t(4m_c^2 - t)} \right] \quad (6.38)$$

$$u_{min} = \frac{1}{2m_c^2} \left[-st + m_c^2(2s + t) - (s - m_c^2)\sqrt{-t(4m_c^2 - t)} \right] \quad (6.39)$$

Observando estes limites de integração percebemos que, para que eles sejam reais, temos que nos restringir a uma das seguintes regiões:

$$t < 0 \quad \text{ou} \quad t > 4m_c^2 \quad (6.40)$$

Adicionalmente a condição (6.20) impõe que $u \geq t - m_c^2$. Assim para não termos um intervalo de integração nulo temos que $u_{max} \geq t - m_c^2$. Esta condição nos restringe ao primeiro dos intervalos de (6.40), assim:

$$t < 0 \Leftrightarrow Q^2 > 0 \text{ GeV}^2 \quad (6.41)$$

o que impõe um limite mínimo para os valores de Q^2 que podemos escolher. Na prática notamos que o fator de forma apresentava um comportamento diferente entre as regiões com $Q^2 \leq 5 \text{ GeV}^2$ e $Q^2 \geq 5 \text{ GeV}^2$, assim tomaremos a segunda região pois esta região, além de ter valores maiores de Q^2 , está mais longe da região proibida.

Utilizaremos o mesmo tratamento dado às constantes de acoplamento que foi utilizado no caso do méson D "off-shell", o que neste caso implica em usar $f_{J/\psi} = 0,270 \text{ GeV}$. Neste caso $s_0 = u_0 = (m_D + 0,5 \text{ GeV})^2$ pois ambas as integrais estão ligadas aos estados do méson D .

Assim, usando a expressão para $g_{J/\psi DD}^{(J/\psi)}(Q^2, M^2)$ de (6.37), construímos o gráfico da figura 6.3.

A figura 6.3 mostra muito pouca mudança de estabilidade em função dos diferentes valores de Q^2 tomados. Neste caso, porém, temos um critério adicional que podemos usar para escolher o intervalo de Q^2 adequado. Este consiste em verificar se, no intervalo de Q^2 escolhido, o primeiro termo perturbativo é realmente maior do que o termo de condensado que foi adicionado. Esta é uma condição necessária para a validade da OPE. Para comparar os dois termos escolheremos uma massa de Borel provisoriamente, usando, mais uma vez, o critério de 5% de mudança do valor de $g_{J/\psi DD}^{(J/\psi)}(Q^2, M^2)$ para a curva mais instável obtida na figura 6.3 (a linha vertical tracejada mostra esse valor na figura). O valor assim obtido é $M^2 = 12,1 \text{ GeV}^2$.

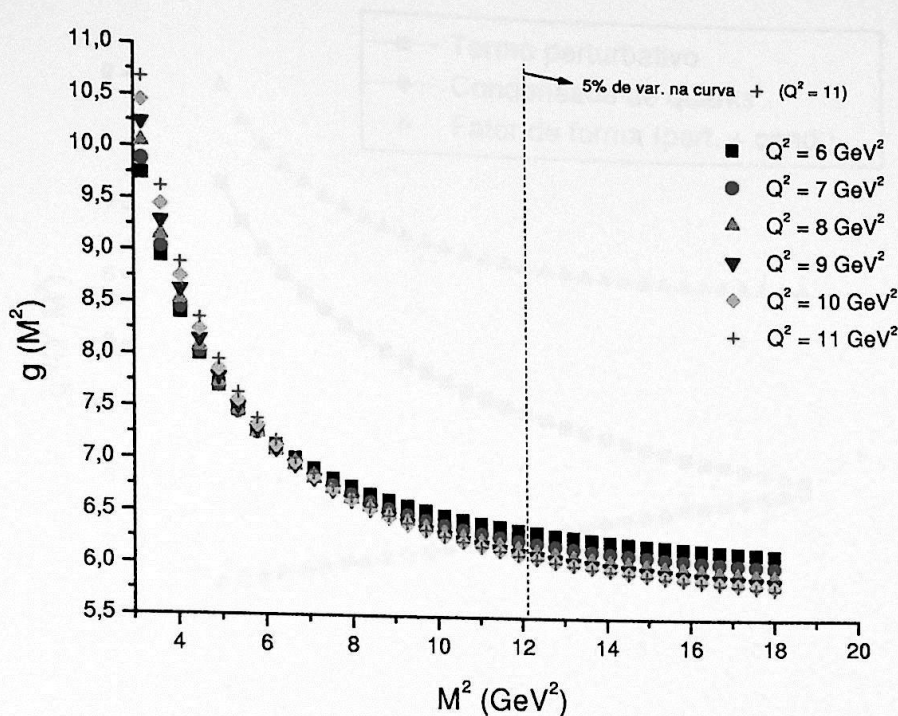


Figura 6.3: Gráfico de $g_{J/\psi DD}^{(J/\psi)}(M^2)$ em vários valores de Q^2

Usando este valor obtemos o gráfico mostrado na figura 6.4, onde estão mostrados separadamente as curvas da contribuição do condensado de quarks, da contribuição perturbativa e da soma das duas partes.

A figura 6.4 mostra claramente que a OPE perde a validade para valores grandes de Q^2 . Assim utilizaremos valores de Q^2 , no intervalo:

$$5,5 \text{ GeV}^2 \leq Q^2 \leq 8 \text{ GeV}^2 \quad (6.42)$$

Neste intervalo a massa de Borel mais apropriada (mais uma vez usando o critério de 5% de variação da curva mais instável) é $M^2 = 11,5 \text{ GeV}^2$. Usando este valor e o intervalo (6.42) construímos a curva vista na figura 6.5.

Assim como no caso do méson D "off-shell" poderíamos utilizar $\frac{M^2}{2}$ e $\frac{M'^2}{2}$ ao invés de M^2 e M'^2 no que se refere a função de dois pontos. Neste caso nem sequer temos o problema de usar massas de Borel em uma região ruim da regra de soma de dois pontos (região esta determinada por (3.78)), já que estaríamos utilizando $\frac{M^2}{2} = \frac{M'^2}{2} \approx 5,7 \text{ GeV}^2$. No entanto não faremos esta substituição para manter a coerência em relação a regra de soma do méson D "off-shell".

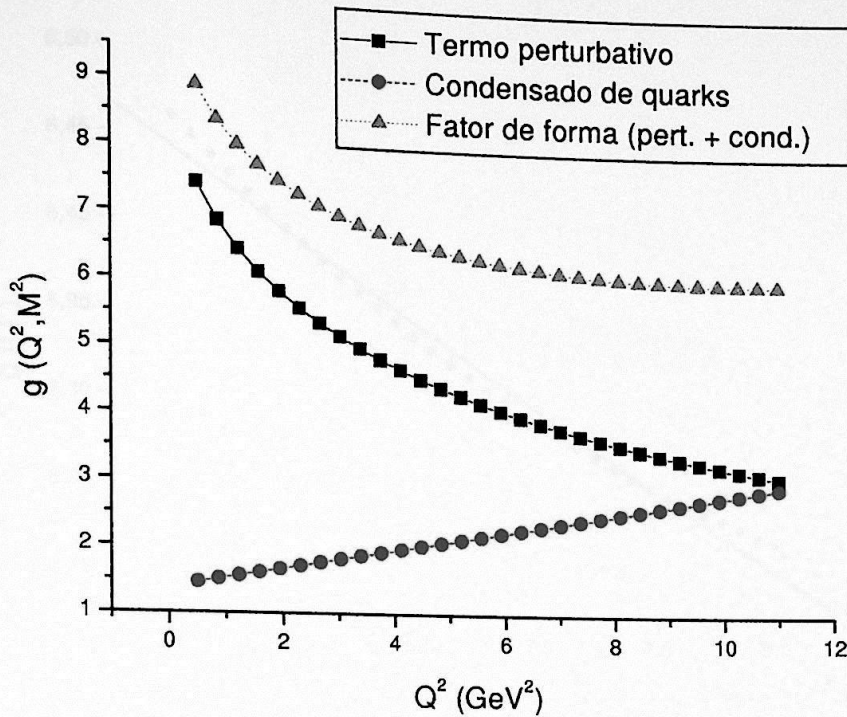


Figura 6.4: Gráfico de $g_{J/\psi DD}^{(J/\psi)}(Q^2, M^2)$ mostrando as contribuições dos diferentes termos da OPE

A linha contínua na figura 6.5 representa a seguinte parametrização (ajustada usando o algoritmo Levenberg-Marquardt):

$$g_{J/\psi DD}^{(J/\psi)}(Q^2) = \frac{A}{(Q^2 + B)} \quad (6.43)$$

$$A = 418,0 \pm 8,7$$

$$B = 59,4 \pm 1,4$$

Conhecendo o fator de forma podemos calcular a constante de acoplamento do vértice fazendo $g_{J/\psi DD} = g_{J/\psi DD}^{(J/\psi)}(Q^2 = -m_{J/\psi}^2)$. Assim obtemos:

$$g_{J/\psi DD} = 8,4 \pm 0,3 \quad (6.44)$$

onde o erro indicado é apenas uma propagação dos erros obtidos da rotina numérica para os parâmetros A e B . O erro em (6.44) é muito menor do que o erro em (5.52). Isto

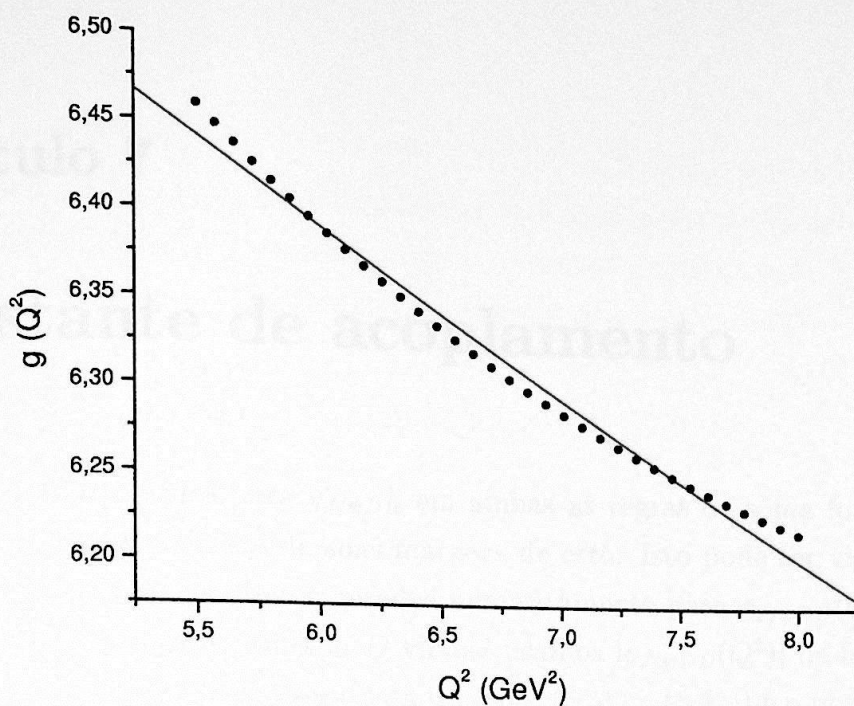


Figura 6.5: Gráfico de $g_{J/\psi DD}^{(J/\psi)}(Q^2)$ com $M^2 = 11,5 \text{ GeV}^2$

ocorre porque os erros nos parâmetros do ajuste deste capítulo são muito menores do que os erros no ajuste feito no capítulo anterior. Apesar do aspecto visual, o ajuste mostrado na figura 6.5 é melhor do que aquele mostrado na figura 5.7.

Capítulo 7

Constante de acoplamento

Os resultados obtidos para $g_{J/\psi DD}$ em ambas as regras de soma foram muito semelhantes e compatíveis dentro de suas margens de erro. Isto pode ser visto na figura 7.1, onde foram colocados os pontos gerados numericamente para $g_{J/\psi DD}(Q^2)$ em ambas as regras de soma (no caso do méson D virtual usamos $|g_{J/\psi DD}(Q^2)|$ de forma a dar conta da diferença de sinal), as funções ajustadas (eqs. (5.51) e (6.43)) e o ponto que dá o valor de $g_{J/\psi DD}$ (visto em (5.52) e (6.44)).

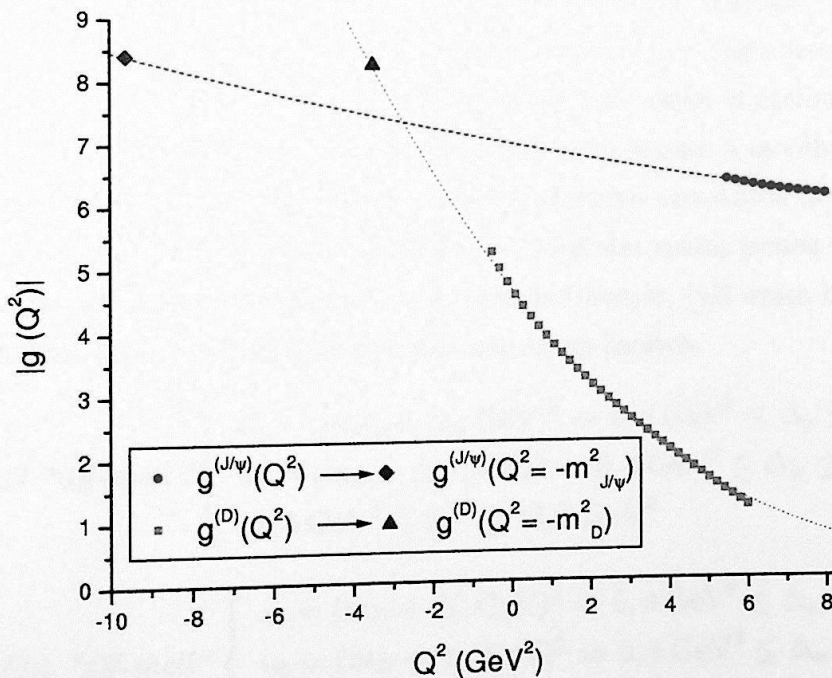


Figura 7.1: comparação dos fatores de forma obtidos nos dois casos

Fazendo a média entre os dois valores obtidos (5.52) e (6.44) e fazendo a propagação dos erros temos:

$$g_{J/\psi DD} = 8,35 \pm 1,16 \quad (7.1)$$

É importante notar que a incerteza indicada é uma incerteza intrínseca ao método de ajuste numérico, refletindo apenas o grau de liberdade existente para ajustar curvas com parâmetros diferentes dos utilizados. No entanto nosso cálculo possui outras fontes de incerteza:

- (i) os parâmetros da QCD (massas e condensados);
- (ii) a OPE (já que ignoramos os termos de ordem maior);
- (iii) a escolha da estrutura p' para escrever a regra de soma;
- (iv) as massas e constantes de decaimento usadas no lado fenomenológico;
- (v) a escolha da massa de Borel M^2 ;
- (vi) o modelo do contínuo (escolha dos valores s_0 e u_0).

Para estimar a incerteza no valor encontrado para a constante de acoplamento podemos variar esses parâmetros dentro de seus limites aceitos e repetir o ajuste. Não variamos (i), já que os valores usados já foram exaustivamente testados por diferentes autores. Quanto ao item (ii), não incluímos termos de ordens altas pois estes contribuem muito pouco para sistemas com quarks pesados. Os motivos que nos levaram à escolha de (iii) já foram explorados anteriormente¹. Assim foram testados diversos conjuntos de parâmetros para (iv), (v) e (vi). Concluímos que mudanças em (iv) tinham muito pouca influência sobre o resultado, ao passo que mudanças em (v) e, principalmente, (vi) eram mais importantes. Esses parâmetros foram variados dentro dos seguintes limites:

$$\text{méson } D \text{ "off-shell"} \left\{ \begin{array}{l} s_0 = (m_{J/\psi} + \Delta_s \text{ GeV})^2 \Rightarrow 0,2 \text{ GeV}^2 \leq \Delta_s \leq 0,5 \text{ GeV}^2 \\ u_0 = (m_D + \Delta_u \text{ GeV})^2 \Rightarrow 0,4 \text{ GeV}^2 \leq \Delta_u \leq 0,55 \text{ GeV}^2 \\ 11,5 \text{ GeV}^2 \leq M^2 \leq 13,5 \text{ GeV}^2 \end{array} \right.$$

$$\text{méson } J/\psi \text{ "off-shell"} \left\{ \begin{array}{l} s_0 = (m_D + \Delta_s \text{ GeV})^2 \Rightarrow 0,4 \text{ GeV}^2 \leq \Delta_s \leq 0,6 \text{ GeV}^2 \\ u_0 = (m_D + \Delta_u \text{ GeV})^2 \Rightarrow 0,4 \text{ GeV}^2 \leq \Delta_u \leq 0,6 \text{ GeV}^2 \\ 9,5 \text{ GeV}^2 \leq M^2 \leq 13,5 \text{ GeV}^2 \end{array} \right.$$

As curvas obtidas através das combinações destes parâmetros estão mostradas na figura

7.2:

¹De fato, no caso do méson J/ψ "off-shell", nem sequer há qualquer diferença entre as estruturas.

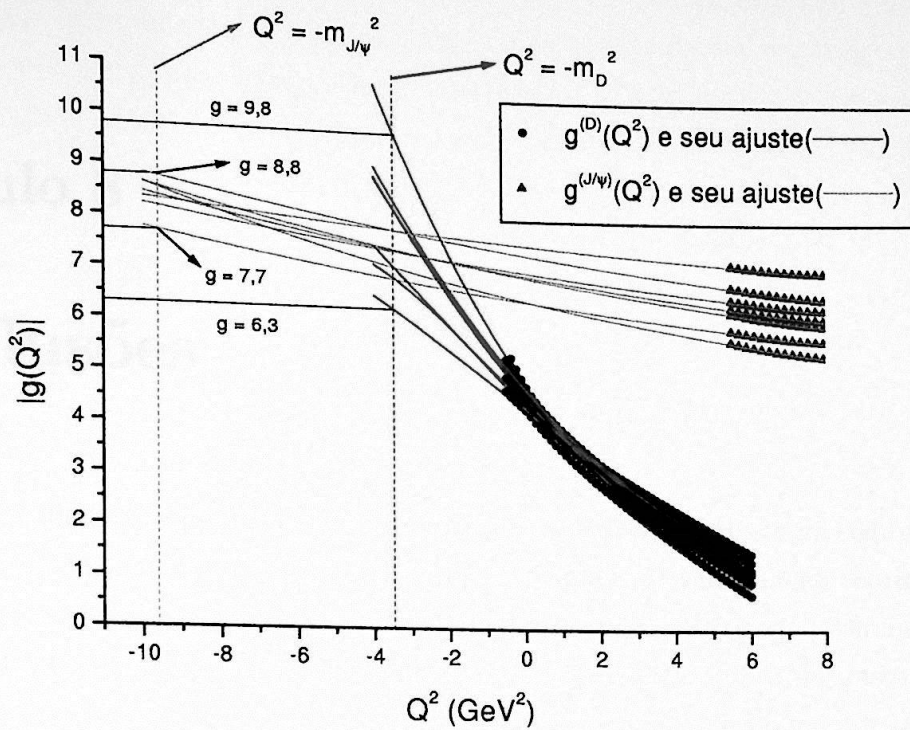


Figura 7.2: curvas obtidas através da variação dos parâmetros do contínuo (s_0 e u_0) e das massas de Borel. As linhas tracejadas mostram o ponto onde obtemos a constante de acoplamento.

Podemos desta forma obter diversos valores para $g_{J/\psi DD}$. Tirando a média destes valores e estimando a incerteza obtemos:

$$g_{J/\psi DD} = 8,14 \pm 1,75 \tag{7.2}$$

Capítulo 8

Conclusões

A primeira metade deste trabalho foi revisão de cálculos já feitos e na segunda metade foi apresentada a parte original, que consistiu na primeira determinação teórica da constante de acoplamento $g_{J/\psi DD}$ e dos fatores de forma deste vértice. Tivemos uma preocupação pedagógica, a de mostrar explicitamente o maior número de passagens intermediárias dos cálculos. Mesmo tornando a exposição às vezes enfadonha, acreditamos que esta dissertação será útil por dar essa ajuda aos leitores pedestres, futuros praticantes de regras de soma da QCD. Esperamos que o texto seja utilizado pelos membros do nosso grupo nos próximos estudos das constantes de acoplamento envolvendo mesons charmosos, projeto que durará ainda alguns anos.

Do cálculo propriamente dito, apresentado nos capítulos 5 e 6, podemos dizer que ele utiliza técnicas padrão das QCDSR. Se, por um lado, nos restringimos apenas aos termos de ordem mais baixa da OPE, por outro, introduzimos algum refinamento na estimativa dos erros associados ao número obtido, como mostrado no capítulo 7.

Um fato animador na determinação de $g_{J/\psi DD}$ foi que o número encontrado é, dentro das incertezas, o mesmo, seja ele obtido através da extrapolação ao polo do méson D ou seja ele obtido através da extrapolação ao polo do méson J/ψ . Isto fica claro nas figuras do capítulo 7. Esta igualdade, aqui obtida de maneira espontânea, poderia ter sido imposta na forma

$$g_{J/\psi DD}(Q^2 = -m_{J/\psi}^2) = g_{J/\psi DD}(Q^2 = -m_D^2)$$

e usada como vínculo para diminuir as incertezas no procedimento de extrapolação.

O valor $g_{J/\psi DD} \simeq 8.1$ é relativamente próximo ao valor de 7.7 já usado previamente na literatura de lagrangianas efetivas [1]. Este último número foi obtido fenomenologicamente, com o uso da hipótese de dominância do méson vetorial (“vector meson dominance”). Esta hipótese consiste em afirmar que um fóton real ($Q^2 = 0$) tem uma componente não desprezível (na verdade “dominante”) de méson vetorial J/ψ , que, massa a

parte, possui os mesmos números quânticos do fóton. O uso da hipótese VDM é válido quando lidamos com estados com $Q^2 = 0$, mas a constante de acoplamento do J/ψ tem que ser calculada em $Q^2 = -m_{J/\psi}^2$. Nestas condições o J/ψ é muito diferente do fóton. A coincidência entre os valores só ocorreu porque o fator de forma $g_{J/\psi DD}^{J/\psi}(Q^2)$ varia muito suavemente com Q^2 , como mostra a figura 7.1. Assim, neste caso particular, o uso de VDM “deu certo por acaso”! O mesmo não aconteceu com a constante de acoplamento $g_{\rho DD}$ [33], onde o valor obtido com QCDSR é o dobro do valor obtido com VDM.

Quanto aos fatores de forma, nós confirmamos a observação feita em trabalhos anteriores com regras de soma de que o fator de forma depende fortemente de qual partícula no vértice está fora da camada de massa. Constatamos que quanto mais pesada for esta partícula mais “duro” será o fator de forma. Outra observação importante é que a forma funcional do fator de forma também varia muito, sendo algumas vezes bem descrita por um monopolo e outras vezes por uma gaussiana. Em vista da forte dependência dos resultados (de cálculos com lagrangianas efetivas) com o fator de forma, nossas observações deverão ser levadas em conta em cálculos de seções de choque, tais como os das referências [3, 4, 5, 6, 15, 16].

Apêndice A

Relações de dispersão

Muitas vezes, funções como $\Pi(q^2)$ apresentam valores reais para q^2 abaixo de algum limite s_{min} e exibem um corte de ramificação para q^2 maior que este limite. Para se fazer proveito de um importante teorema da teoria de funções complexas, torna-se necessário permitir que q^2 seja complexa, apesar de isto parecer ir de encontro com a intuição física. Considere uma função complexa $\Pi(s)$ com argumento complexo s e assumimos que: a) $\Pi(s)$ é real para valores reais de $s < s_{min}$; b) $\Pi(s)$ tem cortes de ramificação para valores reais de $s > s_{min}$; c) $\Pi(s)$ é analítica para valores complexos de s (exceto ao longo dos cortes de ramificação). É comum representar Π ao longo do corte de ramificação por sua parte dispersiva (real) e sua parte imaginária:

$$\Pi(s + i\epsilon) = \text{Re}\Pi(s) + i \text{Im}\Pi(s) \tag{A.1}$$

onde $\epsilon > 0$ é infinitesimal. De acordo princípio da reflexão de Schwartz, temos que:

$$\Pi(s + i\epsilon) - \Pi(s - i\epsilon) = 2i \text{Im}\Pi(s) \tag{A.2}$$

Desde que Π seja analítica em cada ponto dentro do contorno C descrito na figura A.1, podemos aplicar o teorema de Cauchy e encontrar que:

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C ds \frac{\Pi(s)}{s - q^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{s_{min}}^R ds \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s - q^2 - i\epsilon} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s|=R} ds \frac{\Pi(s)}{s - q^2} \end{aligned} \tag{A.3}$$

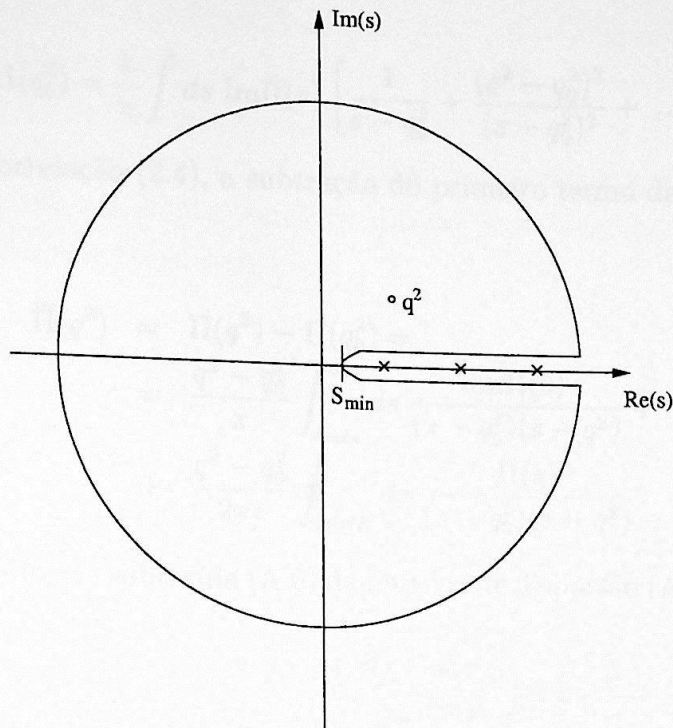


Figura A.1: Contorno C no plano complexo da variável s

Supomos que somente conhecemos¹ $\text{Im}\Pi$ e queremos avaliar Π em algum ponto q^2 qualquer. Então a equação (A.3), não é muito útil para o nosso propósito, já que Π também aparece no lado direito da equação, sob uma integral ao longo do círculo. Esta situação pode ser simplificada se $\Pi(s)$ anular-se suficientemente rápido em $|q^2| \sim R \rightarrow \infty$, logo a integral sobre o círculo tende a zero e obtemos a chamada relação de dispersão não subtraída²:

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{s_{\min}}^{\infty} ds \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s - q^2} \quad (\text{A.4})$$

Muitas vezes, a condição para que a integral do segundo termo de (A.3) se anule não é satisfeita. Então devemos fazer que este termo se comporte bem de alguma maneira. Note que a integral dispersiva (A.4) envolve todos os valores de s . Para se conhecer $\Pi(q^2)$ para valores pequenos de s , necessitamos conhecer $\text{Im}\Pi(s)$ também para grandes valores de s . Em muitos casos, a parte imaginária $\text{Im}\Pi(s)$ não se anula para $s \rightarrow \infty$ e a integral (A.4) também diverge. A maneira de resolver este problema é subtrair de $\Pi(q^2)$ alguns dos primeiros termos de uma série de Taylor em torno de um ponto arbitrário $q^2 = q_0^2$:

¹Em nosso caso é possível obter uma grandeza proporcional a $\text{Im}\Pi$, que é a descontinuidade da função através do método de Cutkosky[45].

²No restante da conta a parte infinitesimal $-i\epsilon$ não será mais mostrada explicitamente.

$$\Pi(q_0^2) = \frac{1}{\pi} \int ds \operatorname{Im}\Pi(s) \left[\frac{1}{s - q_0^2} + \frac{(q^2 - q_0^2)^2}{(s - q_0^2)^2} + \dots \right] \quad (\text{A.5})$$

Para a função correlação (2.4), a subtração do primeiro termo da série nos dá:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}(q^2) &= \Pi(q^2) - \Pi(q_0^2) = \\ &= \frac{q^2 - q_0^2}{\pi} \int_{s_{\min}}^{\infty} ds \frac{\operatorname{Im}\Pi(s)}{(s - q_0^2)(s - q^2)} + \\ &+ \frac{q^2 - q_0^2}{2\pi i} \oint_{|s|=R} ds \frac{\Pi(s)}{(s - q_0^2)(s - q^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Assim obtemos a forma subtraída (A.6) da integral de dispersão (A.4). No caso especial em que $q_0^2 = 0$:

$$\bar{\Pi}(q^2) = \frac{q^2}{\pi} \int_{s_{\min}}^{\infty} \frac{ds}{s} \frac{\operatorname{Im}\Pi(s)}{s - q^2} \quad (\text{A.7})$$

Estas subtrações são necessárias se $\Pi(s) \neq \infty$ conforme $s \rightarrow \infty$. Note que um bom comportamento em (A.4) é exigido para grandes valores de s na derivação da relação de dispersão, o que realmente ocorre com o fator $\frac{1}{s}$ quando s é muito grande. Mais subtrações de outros termos da série acrescentam mais termos proporcionais a $\frac{1}{s^2}$ e $\frac{1}{s^3}$, melhorando ainda mais o comportamento da integral no infinito. Portanto é sempre importante subtrair termos de (A.4) para que (A.7) tenha um comportamento suave no infinito. É especialmente verdade em teorias de campos efetivas, que estamos interessados inicialmente em efeitos quânticos a baixas energias, enquanto não sabemos como calculá-los a altas energias. Geralmente a função $\operatorname{Im}\Pi(s)$ não é bem conhecida a altas energias. A integral de dispersão subtraída (A.7) é influenciada mais fortemente por baixas energias e diminui a importância da região de altas energias.

Neste trabalho, também estaremos lidando com a função correlação de três pontos (2.7) que envolve os quadrimomentos p e p' dos mesons na camada de massa e o quadrimomento transferido $q = p' - p$ do méson fora da camada de massa. Esta dependência com p e p' nos obriga a escrever uma dupla relação de dispersão [47] com duas variáveis complexas s e u para representar a função correlação, dada por:

$$\Gamma(p, p', q) = \int_{s_{\min}}^{\infty} ds \int_{u_{\min}}^{\infty} du \frac{\rho(s, u, q^2)}{(s - p^2)(u - p'^2)} + \text{subtrações} \quad (\text{A.8})$$

A quantidade $\rho(s, u, q^2)$ é a dupla densidade espectral. Os termos subtraídos servem para eliminar os infinitos vindos da integral de dispersão, exatamente como feito com relação (A.4). As subtrações em (A.8) são proporcionais a p^2 e p'^2 e se anulam com a transformada de Borel. Entretanto, a perda destes termos não prejudicará a convergência da integral (A.8), porque a dupla transformada de Borel suprime exponencialmente as contribuições para valores grandes de s e u .

Apêndice B

Cálculo de integrais

Resolveremos neste apêndice a seguinte integral (eq. (5.23)):

$$I_\mu = \frac{-6}{\pi} \int d^4k \delta[k^2 - m_c^2] \delta[(p' - k)^2] \delta[p^2 - 2p \cdot k] \theta(k_0) \theta(p'_0 - k_0) \theta(p_0 - k_0) (p \cdot p' - 2k \cdot p' + 2m_c^2) k_\mu \quad (\text{B.1})$$

já que ela ilustra a técnica usada para resolver várias integrais ao longo do trabalho. Começamos reescrevendo a equação na forma:

$$I_\mu = \frac{-6}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \int_0^{+\infty} d|\vec{k}|^2 \frac{|\vec{k}|}{2} \int_0^\pi d\theta \text{sen}\theta \int_0^{2\pi} d\phi \times \\ \times \delta[k^2 - m_c^2] \delta[(p' - k)^2] \delta[p^2 - 2p \cdot k] \theta(k_0) \theta(p'_0 - k_0) \theta(p_0 - k_0) \times \\ \times (p \cdot p' - 2k \cdot p' + 2m_c^2) k_\mu \quad (\text{B.2})$$

Usando o referencial da figura 5.2 e as relações de (5.14) a (5.19), temos;

$$I_\mu = \frac{-6}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \int_0^{+\infty} d|\vec{k}|^2 \frac{|\vec{k}|}{2} \int_0^\pi d\theta \text{sen}\theta \int_0^{2\pi} d\phi \times \\ \times \delta[k_0^2 - |\vec{k}|^2 - m_c^2] \delta[u + m_c^2 - 2p'_0 k_0 + 2|\vec{p}'||\vec{k}|\cos\theta] \delta[s - 2p_0 \cdot k_0] \times \\ \times \theta(k_0) \theta(\sqrt{s} - k_0) \theta(p'_0 - k_0) (\sqrt{s} p'_0 - 2k_0 \cdot p'_0 + 2|\vec{p}'||\vec{k}|\cos\theta + 2m_c^2) k_\mu \quad (\text{B.3})$$

Usando a definição:

$$\overline{\cos\theta} = \frac{[-u - m_c^2 + 2p'_0 k_0]}{2|\vec{p}'||\vec{k}|} \quad (\text{B.4})$$

em (B.3), temos:

$$\begin{aligned}
 I_\mu &= \frac{-3}{2\pi|\vec{p}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \int_0^{+\infty} d|\vec{k}|^2 \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\phi \times \\
 &\times \delta \left[k_0^2 - |\vec{k}|^2 - m_c^2 \right] \delta [\cos\theta - \overline{\cos\theta}] \delta [s - 2p_0 \cdot k_0] \theta(k_0) \theta(\sqrt{s} - k_0) \theta(p'_0 - k_0) \times \\
 &\times (\sqrt{s} p'_0 - 2k_0 \cdot p'_0 + 2|\vec{p}'||\vec{k}|\cos\theta + 2m_c^2) k_\mu
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Dado o carácter de Lorentz da expressão acima e ao fato de que k_μ é uma variável de integração temos que I_μ deve, em geral, poder ser escrito na forma:

$$I_\mu = Ap_\mu + Bp'_\mu \tag{B.6}$$

pois p_μ e p'_μ , são as variáveis livres do sistema. Em particular, no referencial adotado:

$$I_0 = Ap_0 + Bp'_0 = A\sqrt{s} + Bp'_0 \tag{B.7}$$

$$I_1 = Ap_1 + Bp'_1 = 0 \tag{B.8}$$

$$I_2 = Ap_2 + Bp'_2 = 0 \tag{B.9}$$

$$I_3 = Ap_3 + Bp'_3 = B|\vec{p}'| \tag{B.10}$$

Assim, partimos para o cálculo de I_0 . Começamos integrando o termo I_0 da equação (B.5) em $\cos\theta$. Obtendo:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{-3}{4\pi|\vec{p}'|\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \int_0^{+\infty} d|\vec{k}|^2 \int_0^{2\pi} d\phi \delta \left[k_0^2 - |\vec{k}|^2 - m_c^2 \right] \delta \left[\frac{\sqrt{s}}{2} - k_0 \right] \times \\
 &\times \theta(k_0) \theta(\sqrt{s} - k_0) \theta(p'_0 - k_0) \underbrace{(\sqrt{s} p'_0 - 2k_0 \cdot p'_0 + 2|\vec{p}'||\vec{k}|\overline{\cos\theta} + 2m_c^2)}_{(\sqrt{s} p'_0 - u + m_c^2)} k_0
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Note que para fazer a integral em $\cos\theta$ utilizamos a função $\delta [\cos\theta - \overline{\cos\theta}]$, logo temos a condição de validade seguinte:

$$-1 \leq \overline{\cos\theta} \leq 1 \tag{B.12}$$

$$0 \leq \overline{\cos\theta}^2 \leq 1 \tag{B.13}$$

$$\left[\frac{(s + u - t)}{\sqrt{s}} k_0 - u - m_c^2 \right]^2 \leq \left[\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{s}} |\vec{k}| \right]^2 \tag{B.14}$$

A integral da eq. (B.11) em ϕ é trivial, logo passamos para integral em k_0 . O domínio em k_0 dado pelas funções $\theta(k_0)$ e $\theta(\sqrt{s}-k_0)$ é trivialmente satisfeito pela condição imposta pela função $\delta\left[\frac{\sqrt{s}}{2}-k_0\right]$. Já a função $\theta(p'_0-k_0)$ em conjunto com $\delta\left[\frac{\sqrt{s}}{2}-k_0\right]$, impõe a condição (que já foi citada na eq. (5.28)):

$$-\infty < \frac{\sqrt{s}}{2} < \frac{s+u-t}{2\sqrt{s}} \tag{B.15}$$

$$u > t \tag{B.16}$$

Assim podemos fazer a integral em k_0 , obtendo:

$$I_0 = \frac{-3[\sqrt{s}p'_0 - u + m_c^2]}{4|\vec{p}'|} \int_0^{+\infty} d|\vec{k}|^2 \delta\left[\frac{s}{4} - |\vec{k}|^2 - m_c^2\right] \tag{B.17}$$

A função $\delta\left[\frac{s}{4} - |\vec{k}|^2 - m_c^2\right]$ impõe a condição $s \geq 4m_c^2$, citada na eq. (5.27). Fazendo $k_0 = \frac{\sqrt{s}}{2}$ na condição (B.14) obtemos:

$$|\vec{k}|^2 \geq \frac{s(s-u-t-2m_c^2)^2}{4\lambda} \tag{B.18}$$

Assim, (B.17) fica:

$$I_0 = \frac{-3[\sqrt{s}p'_0 - u + m_c^2]}{4|\vec{p}'|} \int_{\frac{s}{4} \frac{(s-u-t-2m_c^2)^2}{\lambda}}^{+\infty} d|\vec{k}|^2 \delta\left[\frac{s}{4} - |\vec{k}|^2 - m_c^2\right] \tag{B.19}$$

Podemos então integrar em $|\vec{k}|^2$ se a seguinte condição for satisfeita:

$$\frac{s(s-u-t-2m_c^2)^2}{4\lambda} \leq \frac{s}{4} - m_c^2 \tag{B.20}$$

que simplificando fica (como já visto na eq. (5.29)):

$$4m_c^4 + 4m_c^2u + 4m_c^2t + 4ut \leq -\frac{4m_c^2}{s}(-2us - 2ts + u^2 + t^2 - 2ut) \tag{B.21}$$

Finalmente, a eq. (B.19) nos dá:

$$I_0 = \frac{-3[\sqrt{s}p'_0 - u + m_c^2]}{4|\vec{p}'|} \quad (\text{B.22})$$

Analogamente (com as mesmas funções δ e θ , dando origem às mesmas condições) calculamos I_3 :

$$\begin{aligned} I_3 = & \frac{-3}{2\pi|\vec{p}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \int_0^{+\infty} d|\vec{k}|^2 \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\phi \times \\ & \times \delta[k_0^2 - |\vec{k}|^2 - m_c^2] \delta[\cos\theta - \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}'}{|\vec{k}||\vec{p}'|}] \delta[s - 2p_0 \cdot k_0] \theta(k_0) \theta(\sqrt{s} - k_0) \theta(p'_0 - k_0) \times \\ & \times (\sqrt{s}p'_0 - 2k_0 \cdot p'_0 + 2|\vec{p}'||\vec{k}|\cos\theta + 2m_c^2)|\vec{k}|\cos\theta \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

obtendo:

$$I_3 = -\frac{3}{4} \frac{[\sqrt{s}p'_0 - u + m_c^2][-u - m_c^2 + p'_0\sqrt{s}]}{|\vec{p}'|^2\sqrt{s}} \quad (\text{B.24})$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (B.7) e (B.10), temos:

$$B = \frac{I_3}{|\vec{p}'|} \quad (\text{B.25})$$

$$A = \frac{1}{p_0}(I_0 - Bp'_0) \quad (\text{B.26})$$

De forma que obtemos A e B a partir de I_0 (B.22) e I_3 (B.24):

$$B = -\frac{3}{2} \frac{s}{\lambda^{3/2}} (s - u - t + 2m_c^2)(s - u - t - 2m_c^2) \quad (\text{B.27})$$

$$A = -\frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (s - u - t + 2m_c^2) \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (s - u - t - 2m_c^2)(s + u - t) \right] \quad (\text{B.28})$$

Substituindo A e B em (B.6), obtemos I_μ (levando-nos de volta a eq. (5.26)):

$$\begin{aligned} I_\mu = & - \left\{ \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (s - u - t + 2m_c^2) \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (s - u - t - 2m_c^2)(s + u - t) \right] \right\} p_\mu + \\ & - \left\{ \frac{3}{2} \frac{s}{\lambda^{3/2}} (s - u - t + 2m_c^2)(s - u - t - 2m_c^2) \right\} p'_\mu \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Bibliografia

- [1] S.G. Matinyan, B. Müller, *Phys. Rev.* **C58**, 2994 (1998).
- [2] K. Haglin, *Phys. Rev.* **61**, 031902 (2000).
- [3] Z.Lin, C.M.Ko, *Phys. Rev.* **C62**, 034903 (2000).
- [4] W. Liu, C. M. Ko and Z.W. Lin, *Phys. Rev.* **C65**, 015203 (2002).
- [5] K.L.Haglin, G.Gale, *Phys. Rev.* **C63**, 065201 (2001).
- [6] Y. Oh, T. Song and S.H. Lee, *Phys. Rev.* **C63**, 034901 (2001).
- [7] F.S. Navarra, M. Nielsen and M.R. Robilotta, *Phys. Rev.* **C64**, 021901 (2001).
- [8] A. Sibirtsev, K. Tsushima and A.W. Thomas, *Phys. Rev.* **C63**, 044906 (2001).
- [9] C. Baglin et al. (NA38 collab.), *Phys. Lett.* **B255**, 459 (1991).
- [10] B. Ronceux et al. (NA38 collab.), *Phys. Lett.* **B345**, 617 (1995).
- [11] M. Gonin et al. (NA50 collab.), *Nucl. Phys.* **A610**, 404c (1996).
- [12] ver, por exemplo, “New States of Matter in Hadronic Interactions”, Eds. H.T. Elze et al., AIP Conference Proceedings, **631**, (2002); “Quark Matter 2001”, Proceedings of the 15th International Conference on Ultra-Relativistics Nucleus-Nucleus Collisions, Eds. T.J. Hallman et al., North Holland, (2002).
- [13] ver <http://www.gsi.de/GSI-future>.
- [14] ver <http://jkj.tokai.jaeri.go.jp/>.
- [15] C.M. Ko, S.H. Lee, nucl-th/0208003 (2002).
- [16] W.Liu, S.H. Lee, C.M. Ko, nucl-th/0302024 (2002).
- [17] T. Matsui, H. Satz, *Phys. Lett.* **178B**, 416 (1986).
- [18] D. Kharzeev, C. Lourenço, M. Nardi, H. Satz, *Z. Phys.* **C74**, 307 (1997).

- [19] S. Gavin, R. Vogt, *Nucl. Phys.* **A610**, 442c (1996).
- [20] C.Y. Wong, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 196 (1996).
- [21] A. Capella, A. Kaidalov, A. Kouider, C. Gerschel, *Phys. Lett.* **B393**, 431 (1997).
- [22] W. Cassing, C.M. Ko, *Phys. Lett.* **B396**, 39 (1997).
- [23] W. Cassing, E.L. Bratkovskaya, *Nucl. Phys.* **A623**, 570 (1997).
- [24] N. Armesto, A. Capella, *Phys. Lett.* **B430**, 23 (1998).
- [25] D. Kharzeev, H. Satz, *Phys. Lett.* **B334**, 155 (1994); D. Kharzeev, H. Satz, A. Syamtomov, G. Zinovjev, *Phys. Lett.* **B389**, 595 (1996).
- [26] K. Martins, D. Blaschke, E. Quack, *Phys. Rev.* **C51**, 2723 (1995).
- [27] C.Y. Wong, E.S. Swanson, T. Barnes, *Phys. Rev.* **C62**, 045201 (2000).
- [28] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, *Nucl. Phys.* **B147**, 385 (1979); *Nucl. Phys.* **B147**, 519 (1979).
- [29] F.S. Navarra and M. Nielsen, *Phys. Lett.* **B443**, 285 (1998); F.O. Durães, F.S. Navarra and M. Nielsen, *Phys. Lett.* **B 498**, 169 (2001).
- [30] F.S. Navarra, M. Nielsen and M.E. Bracco, *Phys. Rev.* **D 65**, 037502 (2002).
- [31] F.S. Navarra, M. Nielsen, M.E. Bracco, M. Chiapparini and C.L. Schat, *Phys. Lett.* **B489**, 319 (2000).
- [32] M.E. Bracco, F.S. Navarra and M. Nielsen, *Phys. Lett.* **B454**, 346 (1999).
- [33] M.E. Bracco, M. Chiapparini, A. Lozea, F.S. Navarra and M. Nielsen, *Phys. Lett.* **B 521**, 1 (2001).
- [34] R.D. Matheus, F.S. Navarra, M. Nielsen and R. Rodrigues da Silva, *Phys. Lett.* **B541**, 265 (2002).
- [35] P. Colangelo, A. Khodjamirian, "QCD Sum Rules, a modern perspective", hep-ph/0010175, (2000).
- [36] A.V. Radyushkin, "Introduction to QCD Sum Rule Approach", hep-ph/0101227, (2000).
- [37] K.G. Wilson, *Phys. Rev.* **179**, 1499 (1969).
- [38] L.J. Reinders, H. Rubinstein, S. Yazaki, *Phys. Rep.* **127**, 1 (1985).

- [39] F. Mandl, G. Shaw, "Quantum Field Theory", John Wiley & Sons Ed., 102 (1995).
- [40] V.M. Belyaev, V.M. Braun, A. Khodjamirian, R. Rückl, *Phys. Rev.* **D51**, 6177 (1995).
- [41] V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainstein and V.I. Zakharov, *Phys. Rep.* **41**, 3 (1978).
- [42] S. Narison, *Phys. Lett.* **B 198**, 104 (1987); **B 210**, 210 (1988).
- [43] ver, por exemplo, V. Lubicz, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **74**, 291 (1999).
- [44] T. Muta, "Foundations of Quantum Chromodynamics : An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories", World Scientific Pub. Co., 1987.
- [45] C. Itzykson and J.B. Zuber, "Quantum Field Theory", McGraw-Hill Int. Ed., 1985.
- [46] P. Ball, V.M. Braun, H.G. Dosch, *Phys. Rev.* **D44**, 3567 (1991).
- [47] B.L. Ioffe, A.V. Smilga, *Nucl. Phys.* **B216**, 373 (1983).