

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física

# Contextualidade estendida para medições de precisão finita

Daniel Fernandes Borges Moitinho

Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Bárbara Lopes Amaral

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.



Banca Examinadora:

Profa. Dra. Bárbara Lopes Amaral – Orientadora (Instituto de Física – USP)

Prof. Dr. Leonardo Antônio Mendes de Souza (Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas - UFV)

Prof. Dr. Adélcio Carlos de Oliveira (Departamento de Estatística, Física e Matemática - UFSJ)

São Paulo  
2024

**FICHA CATALOGRÁFICA**  
**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação**  
**do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Moitinho, Daniel Fernandes Borges

Contextualidade estendida para medições de precisão finita. São Paulo,  
2024.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, Instituto de Física,  
Departamento de Física Matemática

Orientador(a): Profa<sup>o</sup> Dra<sup>o</sup> Bárbara Lopes Amaral

Área de Concentração: Fundamentos da Teoria Quântica

Unitermos: 1. Teoria quântica; 2. Contextualidade; 3. Informação quântica

USP/IF/SBI-009/2024

University of São Paulo  
Physics Institute

# Extended contextuality for finite precision measurements

Daniel Fernandes Borges Moitinho

Supervisor: Prof(a). Dr(a). Bárbara Lopes Amaral

Dissertation submitted to the Physics Institute of the  
University of São Paulo in partial fulfillment of the  
requirements for the degree of Master of Science.

Examining Committee:

Profa. Dra. Bárbara Lopes Amaral – Supervisor (Physics Institute - USP)

Prof. Dr. Leonardo Antônio Mendes de Souza (Institute of Exact and Technological Sciences  
- UFV)

Prof. Dr. Adélcio Carlos de Oliveira (Department of Statistics, Physics and Mathematics -  
UFSJ)

São Paulo  
2024

## **AGRADECIMENTOS**

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil. Sou grato a todos que me apoiaram nesta jornada, apesar dos obstáculos que a vida apresentou. Agradeço especialmente à minha orientadora, Bárbara, pelo seu tratamento humano e profissional. Ela acreditou em mim, mesmo com a distância imposta pela pandemia. Aos meus colegas de grupo que, de uma maneira ou de outra, me ajudaram a refletir melhor sobre os desafios do projeto, minha gratidão.

Por fim, agradeço à minha família e à minha namorada. Sem o apoio deles não teria alcançado o que alcancei. Como diz o ditado, “quem caminha sozinho pode até chegar mais rápido, mas aquele que vai acompanhado, chega mais longe”.

## RESUMO

O formalismo de contextualidade, dos conjuntos de Kochen-Specker são importantes para fundamentos da mecânica quântica, pois apresenta uma distinção clara entre a teoria quântica e o realismo não-contextual. A teoria quântica consegue superar os valores da teoria clássica não-contextual, violando as chamadas desigualdades não-contextuais. Além disso, os conjuntos de Kochen-Specker são relevantes para o processamento de informação quântica quando a desigualdade é violada, pois apresentam vantagens em comparação com seus análogos clássicos. Porém, há uma lacuna na teoria contextual de Kochen-Specker, mostrando que era possível atingir os valores quânticos na desigualdade de maneira não-contextual ao se considerar medições com precisão finita. Isso torna a teoria contextual impossível de ser comprovada experimentalmente, além de não poder ser usada como vantagem para o processamento de informação quântica. Percebe-se, entretanto, que há um limite imposto às medições do modelo quântico, mas nenhum limite para o possível modelo de variáveis ocultas. Isso levou a criação de uma noção de contextualidade estendida, o modelo não-contextual ontologicamente fiel, que leva em conta a imprecisão de medidas. Assim, foi criada uma desigualdade com valores que levam em conta as imperfeições experimentais, com um limite inferior quando comparado a estatística do modelo quântico.

**Palavras-chave:** Contextualidade; Informação quântica; Teoria quântica.

## ABSTRACT

The contextuality formalism, of Kochen-Specker sets, is important for the foundations of quantum mechanics, as it presents a clear distinction between quantum theory and non-contextual realism. Quantum theory manages to surpass the values of non-contextual classical theory, violating the so-called non-contextual inequalities. Furthermore, Kochen-Specker sets are relevant for quantum information processing when the inequality is violated, as they have advantages compared to their classical analogues. However, there is a gap in the Kochen-Specker contextual theory, showing that it was possible to reach the quantum values in the inequality in a non-contextual way when considering measurements with finite precision. This makes contextual theory impossible to prove experimentally, in addition to not being able to be used as an advantage for processing quantum information. It is clear, however, that there is a limit imposed on the measurements of the quantum model, but no limit to the possible hidden variable model. This led to the creation of a notion of extended contextuality, the ontologically faithful non-contextual model, which takes into account the imprecision of measurements. Thus, an inequality was created with values that take experimental imperfections into account, with a lower limit when compared to the statistics of the quantum model.

**Keywords:** Contextuality; Quantum information; Quantum theory.

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

VO	VARIÁVEIS OCULTAS
EPR	EINSTEIN, PODOLSKY E ROSEN
KS	KOCHEN-SPECKER
MKC	MEYER, KENT E CLIFTON
NP	NÃO-PERTURBANTE
OVP	OPERADOR VALORADO POSITIVO
VONC	VARIÁVEIS OCULTAS NÃO-CONTEXTUAIS

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Exemplo de grafo simples não-direcional.	12
Figura 2	Hipergrafo simples.	12
Figura 3	Conjunto de vetores KS-21.	16
Figura 4	Ilustração de uma medida de variável oculta contextual.	17
Figura 5	Hipergrafo de compatibilidade do conjunto KS-21.	25
Figura 6	Representação do hipergrafo de compatibilidade do exemplo 1.1	26
Figura 7	Conjunto de <i>behaviors</i> do exemplo 1.1.	27
Figura 8	Configuração experimental das medições do KS-21.	31
Figura 9	Resultados experimentais para os valores de $S$ , definidos pela equação 1.5, no conjunto KS-21.	32
Figura 10	Demonstração violação da desigualdade da equação 1.5 independente do estado quântico.	33
Figura 11	Relações de ortogonalidade do conjunto KS-21.	35
Figura 12	Representação do conjunto KS-21, no modelo de medidas densas $\mathcal{P}_d$ .	40
Figura 13	Hipergrafo de compatibilidade do cenário KCBS.	50
Figura 14	Conjunto KS de 6 bases para $\mathbb{C}^4$ , uma base por linha.	51
Figura 15	Hipergrafo de compatibilidade do conjunto KS-18.	52

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>6</b>
<b>SEÇÃO 1 .....</b>	<b>11</b>
1.1 TEORIA DOS GRAFOS .....	11
1.2 A TEORIA DE VARIÁVEIS OCULTAS NÃO-CONTEXTUAIS.....	13
1.3 O CONJUNTO DE KOCHEN-SPECKER.....	15
1.4 A HIPÓTESE DA NÃO-CONTEXTUALIDADE.....	17
1.5 DESIGUALDADES NÃO-CONTEXTUAIS .....	18
1.6 POLITOPOS .....	19
1.7 TEORIA DE PROBABILIDADE GERAL .....	20
1.8 GRAFOS DE COMPATIBILIDADE .....	24
1.9 O <i>BEHAVIOR</i> CLÁSSICO .....	277
1.10 O <i>BEHAVIOR</i> QUÂNTICO .....	288
1.11 O <i>BEHAVIOR</i> NÃO-PERTURBANTE.....	3030
1.12 REALIZAÇÃO EXPERIMENTAL DO KS-21 .....	31
<b>SEÇÃO 2 .....</b>	<b>36</b>
2.1 MEDIDAS REAIS .....	37
2.2 A VIOLAÇÃO DA DESIGUALDADE.....	38
2.3 UMA DESCRIÇÃO ALTERNATIVA .....	40
<b>SEÇÃO 3 .....</b>	<b>44</b>
3.1 MODELO QUÂNTICO $\epsilon$ -PRECISO .....	44
3.2 DE APROXIMADO PARA EXATO VONC .....	46
<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>54</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>55</b>



## INTRODUÇÃO

Na mecânica clássica, o estado de um sistema é essencialmente uma lista de suas propriedades, ou seja, é a especificação de um conjunto de parâmetros a partir dos quais a lista de propriedades pode ser reconstruída, incluindo as posições e o momento de todas as partículas do sistema. A dinâmica da teoria específica determina como essas propriedades mudarão de acordo com a lei de evolução do estado.

No entanto, essa descrição não é aplicável a sistemas quânticos na interpretação de Copenhague (Faye, 2019). Segundo essa interpretação, um sistema quântico deve ser entendido como um registro do que um observador fez no sistema e do que foi observado. O estado do sistema, então, reside nas probabilidades que podem ser inferidas, em termos da teoria, para os resultados de possíveis observações futuras no sistema.

A convenção de Copenhague se baseia essencialmente nas ideias de Niels Bohr sobre complementaridade (Fowler, 1923; Bohr, 1934; 1948). Essa é a ideia de atribuir à matéria pares de propriedades complementares que não podem ser medidas simultaneamente, como as propriedades atribuídas à matéria de partícula ou onda, bem como a posição e o momento. Isso engloba tanto o princípio da incerteza de Heisenberg (1927) quanto a dualidade partícula-onda de De Broglie (1924).

De acordo com a visão de Bohr (1923), observar um objeto quântico envolve uma interação física incontrolável com o aparato de medição, que afeta ambos os sistemas. Visualmente falando, a ideia é de um objeto pequeno colidindo com um aparato grande. O efeito que isso produz no aparato de medição é o que gera o resultado da medida que, por ser incontrolável, só pode ser previsto estatisticamente.

O ato de medição, então, afeta o objeto quântico de tal maneira que limita quais outras quantidades podem ser medidas com precisão. De acordo com a complementaridade, quando observamos a posição de um objeto, afetamos seu momento de maneira incontrolável. Portanto, não podemos determinar com precisão indefinida a posição e o momento da partícula simultaneamente. Assim, a complementaridade envolve uma doutrina de interação física incontrolável que, segundo Bohr, fundamenta as relações de incerteza de Heisenberg e é a fonte do caráter estatístico da teoria quântica.

Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) (1935), apesar de reconhecerem os resultados significativos da teoria quântica, expressaram duas principais decepções com a sua construção.

Primeiramente, eles acreditavam que a teoria quântica havia abandonado a tarefa histórica das ciências naturais de fornecer conhecimento sobre aspectos significativos da natureza que são independentes dos observadores e suas observações. No entanto, o conhecimento fundamental do vetor de estado da mecânica quântica é tratado a partir de resultados de medidas, através de probabilidades dadas pela regra de Born (Born, 1926). A teoria, portanto, não descrevia o que poderia ser verdade na ausência de observação. Poderiam existir leis, mesmo que probabilísticas, para encontrar resultados na presença de observadores, mas nenhuma lei de qualquer natureza sobre como o sistema funciona independentemente de alguém o observar, marcando a teoria quântica como **irrealista**.

Em segundo lugar, a teoria quântica é essencialmente estatística. As probabilidades construídas na função de estado são fundamentais e, diferentemente da mecânica estatística, não são entendidas como originárias da falta de conhecimento de detalhes finos. Nesse sentido, a teoria é **indeterminada**. Portanto, Einstein começou a investigar até que ponto a teoria quântica estava ligada ao **irrealismo** e ao **indeterminismo**.

Einstein questionava se era possível, pelo menos em princípio, atribuir certos parâmetros ao sistema quântico na ausência de medidas, o que posteriormente foi chamado de variáveis ocultas (VO) por Bell (1966). Logo, todas as variáveis relevantes do sistema podem ser derivadas dos estados quânticos? Assim, começou a construção do artigo, no qual se refletia, durante as discussões em Solvay (Fine; Ryckman, 2020) a ideia de um experimento teórico. O experimento tratava-se de uma caixa que continha um relógio para liberar em um tempo específico um fóton com determinada energia. Se isso fosse possível, desafiaria a validade do princípio da incerteza de Heisenberg.

O texto de EPR se concentrou na premissa de duas hipóteses antagônicas, se uma fosse verdadeira a outra seria falsa. A primeira hipótese era que a mecânica quântica é incompleta, a outra hipótese era que duas medidas incompatíveis não podem ter realidade simultaneamente. Uma hipótese ou outra deve acontecer. Portanto, baseado nas hipóteses, se a mecânica quântica for completa (a primeira hipótese falhou), então, por exemplo, medidas incompatíveis não podem ter valores reais simultaneamente.

A primeira hipótese de EPR discute a ideia de uma teoria completa. Segundo o texto, uma teoria completa é aquela na qual “cada elemento da realidade física deve ter uma contrapartida na teoria física” (Einstein; Podolsky; Rosen, 1935, p. 777). Isso é considerado no texto como a hipótese do **realismo**, que trata as variáveis descritas pelo sistema como sendo aquelas que possuem valores definidos. E, ainda, se acrescenta que “Se, sem perturbar de

maneira alguma o sistema, nós conseguíssemos prever com certeza (por exemplo com a probabilidade igual a 1) o valor da quantidade física, então existe um elemento da realidade correspondente a essa quantidade” (Einstein; Podolsky; Rosen, 1935, p. 777).

A hipótese do realismo sugere que, se os valores de posição e momento de um sistema quântico fossem definidos, o modelo de descrição construído pela mecânica quântica estaria incompleto. Isso ocorre porque nenhuma função de estado na mecânica quântica é simultaneamente um autoestado de posição e momento. Além disso, a probabilidade conjunta de medidas incompatíveis não é bem definida para nenhum estado na quântica.

O experimento mental proposto por EPR para superar essa barreira envolve dois sistemas quânticos que estão espacialmente separados, mas cuja função de onda total do par vincula simultaneamente as posições e momentos do sistema. No exemplo utilizado, o momento linear total é zero no eixo  $x$ . Portanto, se o momento linear de um dos sistemas é  $\vec{p}$  ao longo do eixo  $x$ , então para o outro sistema o momento linear seria de  $-\vec{p}$ . Ao mesmo tempo, suas posições estariam correlacionadas. Isso significa que, ao medir a posição de um sistema, também haveria a possibilidade de inferir a posição do outro sistema.

Ao propor esse experimento da maneira como foi feito, foram levantadas duas hipóteses que foram observadas posteriormente: a **separabilidade** e a **localidade**. A primeira hipótese afirma que, quando um sistema está separado de outro, talvez muito distante, cada sistema possui sua própria realidade. Isso pressupõe que cada sistema mantém sua identidade separadamente, mesmo que cada sistema tenha suas posições e momentos vinculados.

A segunda hipótese é a da localidade. Considerando que cada sistema está separado, a localidade supõe que nenhuma mudança ocorre em um sistema como consequência direta da medida em outro sistema, quando esses sistemas estão separados. Com base nessas duas hipóteses, eles concluem que cada sistema pode ter valores bem definidos de posição e momento simultaneamente. Por isso, a teoria criada no texto de EPR é chamada de **realismo local**.

A teoria de EPR propõe que, de fato, existe a possibilidade de “completar” a teoria quântica se o experimento proposto fosse viável. No entanto, veremos ao longo do texto por que, tendo em vista os **teoremas de impossibilidade**, o estado quântico é a máxima informação que temos sobre o sistema. Os teoremas de impossibilidade são teoremas que afirmam que uma situação específica não é fisicamente possível. Entre esses teoremas, os mais conhecidos são o de Bell (1966) e o de Kochen-Specker (KS) (1967).

Bell operacionalizou o que as hipóteses de realismo e localidade significavam no sistema físico em questão e comparou-o com o sistema quântico. Para isso, ele tentou “completar” a mecânica quântica com novas variáveis, de tal maneira que houvesse a possibilidade de determinar os valores dos resultados das medidas antes de se fazer a medida. Dessa forma, a reprodução da estatística apresentada pelo modelo quântico seria devido a uma média feita a partir de estados melhor definidos, pois eles determinam exclusivamente o resultado antes de qualquer experimento que possa ser realizado. A essas novas variáveis, atribuiu-se o nome de **variáveis ocultas (VO)**.

Bell, usando um conjunto específico de vetores de estado, mostrou, usando as hipóteses de realismo e localidade, que não é possível completar a teoria quântica usando variáveis ocultas locais. Kochen-Specker, por sua vez, construiu um conjunto de vetores no qual, usando a hipótese do realismo, não era possível completar a teoria quântica usando variáveis ocultas **não-contextuais**, isto é, variáveis que não dependem de quais medidas compatíveis estão sendo medidas conjuntamente. Com a teoria de Bell, obteve-se as desigualdades de Bell e, com a teoria de KS, obtiveram-se as desigualdades não-contextuais, nas quais, em ambas as desigualdades, os modelos clássicos representados pelos modelos de VO possuem uma cota superior à qual o modelo quântico viola.

Houve uma busca pela validação experimental da violação de ambas as desigualdades, e observaram-se propriedades experimentais relevantes para quando o modelo quântico viola as desigualdades. As provas dos teoremas da impossibilidade de Bell e KS deram-se na teoria da mecânica quântica por medidas projetivas. No entanto, na prática, quando construímos um dispositivo de medida, dificilmente se implanta uma medida projetiva. De fato, quando fazemos uma medida, obtemos uma faixa de “erro” que é esperada, já que, na prática, não existe medida com precisão infinita.

Quando levamos em conta as imprecisões das medidas, diferentemente das desigualdades de Bell, que possuem uma restrição física mais forte pelo fato de estarem embasadas na relatividade, em que uma informação não pode viajar mais rápido do que a velocidade da luz (Peres, A., Terno, D. R., 2004), as desigualdades de KS possuem uma lacuna quando assumimos a precisão finita de medidas. Isso foi apresentado por Meyer (1999), generalizado por Kent (1999) e refinado por Clifton e Kent (2001). Segundo eles, **anulando** a teoria de KS, mostrando que não somos forçados a teorias contextuais, isto é, medidas que dependem de quais outras medidas compatíveis estamos fazendo conjuntamente, para completar a mecânica quântica. Isso indica que a teoria de KS não consegue anular, de maneira

teórica, por limitações práticas do mundo real, como é o caso da precisão finita de medidas, o modelo de variáveis ocultas não-contextuais (VONC).

A desigualdade com efeito da teoria Meyer, Kent e Clifton (MKC) perderia o sentido quando se fazem medidas experimentais e as desigualdades são violadas. Para que se conseguisse sair do impasse causado pela teoria de MKC sobre as desigualdades da teoria de KS, Winter (2014) percebeu que nos artigos apresentados por MKC existiam considerações sobre os limites das medidas no modelo quântico, mas nenhuma consideração sobre os limites das medidas no modelo de VO. Então, Winter criou um modelo de contextualidade estendida, que leva em conta os efeitos da imprecisão de medidas nas desigualdades, mostrando que os efeitos da contextualidade da teoria de KS podem ser provados experimentalmente.

Na seção 1 deste texto vamos tratar da teoria de KS, apresentando a prova para o conjunto KS-21 (Lisonêk *et al.*, 2014) mostrando como se constrói a partir de teorias de probabilidades gerais as desigualdades não-contextuais e sua violação pelo modelo quântico, na seção 2 trataremos sobre como a imprecisão de medidas afeta a desigualdade não-contextual, na seção 3 apresentamos a teoria de Winter para contornar a lacuna da teoria de KS e validar de maneira teórica os experimentos feitos com o propósito de se mostrar os efeitos da contextualidade.

## SEÇÃO 1

O artigo de EPR (1935) levantou uma série de questionamentos na tentativa de encontrar respostas para o que são considerados postulados pela Interpretação de Copenhague. Esses questionamentos geraram a construção de vários ramos de pesquisa de fundamentos da mecânica quântica. A tentativa de completar a mecânica quântica, nos termos que se conhecia na época, uma ciência que era independente de observadores e suas observações, levou à construção do que se conhece hoje como teoria de variáveis ocultas (VO) (Bell, 1966).

Para entendermos a impossibilidade de se completar a mecânica quântica sob hipóteses razoáveis, iremos introduzir a teoria de grafos. Isso nos ajudará a entender a explicação de Kochen-Specker (1967), usando o conjunto KS-21 (Lisonêk *et al.*, 2014). Além disso, também introduziremos superficialmente a teoria de politopos e de probabilidades gerais (Amaral; Cunha, 2018). Isso será útil para entendermos as desigualdades não-contextuais.

### 1.1 TEORIA DOS GRAFOS

A teoria de grafos é uma ferramenta matemática poderosa, que permite estruturar relações entre conjuntos e assim estabelecer propriedades sobre essas relações. Um grafo pode ser definido a partir das seguintes estruturas:

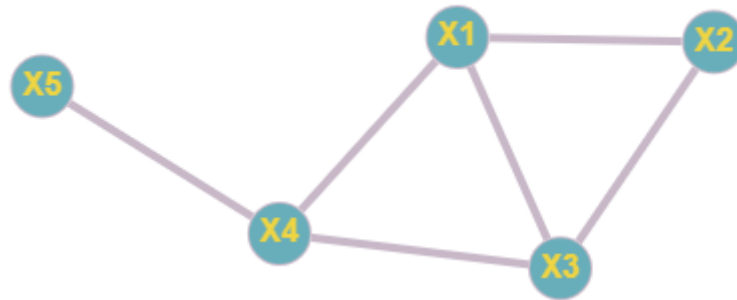
- i. Vértices: É um conjunto não-vazio  $V$ .
- ii. Arestas: É um conjunto de pares não-ordenados  $E$  dos vértices que pode ser vazio, tal que  $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in V \text{ e } x \neq y\}$ .

Para se evitar ambiguidades vamos tratar exclusivamente de grafos simples não direcionados, isso significa na prática que:

- i. Não é permitido laços: Ter o par da seguinte forma  $\{x, x\}$ .
- ii. Não é permitido arestas múltiplas: Ter pares  $E = \{\{x, y\}, \{x, y\}\}$ , ou seja, ter mais de uma aresta ligando um par de vértices.
- iii. Não ter direção significa que a ordem não é relevante, ou seja  $\{x, y\} = \{y, x\}$ .

Exemplo 1.1: Um grafo sendo formado por  $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  e  $E = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_5\}\}$  exemplificado pela figura 1.

Figura 1: Exemplo de grafo simples não-direcional.

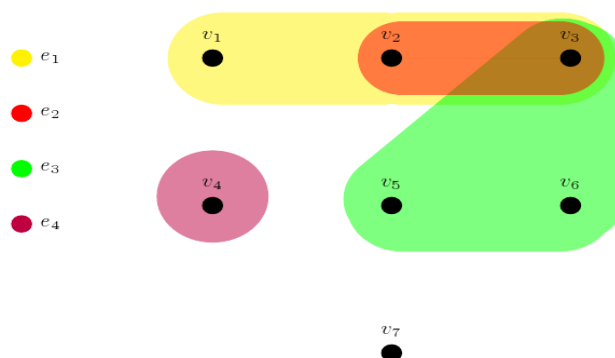


Fonte: Próprio autor com criação no Site *Graph Online*. Disponível em: <https://graphonline.ru/pt/>.

Em um hipergrafo, diferente do grafo, as arestas não estão mais limitadas a serem pares de vértices, e sim, são agora subconjuntos genéricos dos vértices, podendo conter de 1 até o número total de vértices, veja o exemplo 1.2. Nesse trabalho, só será importante tratar de hipergrafos simples não-direcionados. Com exceção das arestas as definições são semelhantes entre o grafo e o hipergrafo.

Exemplo 1.2:  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$  e  $E = \{e_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, e_2 = \{v_2, v_3\}, e_3 = \{v_3, v_5, v_6\}, e_4 = \{v_4\}\}$ .

Figura 2: Hipergrafo simples.



Fonte: Próprio autor com adaptação da plataforma *LaTeX Stack Exchange*. Disponível em: <https://tex.stackexchange.com/questions/1175/drawing-a-hypergraph>.

## 1.2 A TEORIA DE VARIÁVEIS OCULTAS NÃO-CONTEXTUAIS

A tentativa de completar a mecânica quântica proposta por Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) (1935) através de suas hipóteses de realismo local, gerou a construção do que Bell (1966) chamaria de variáveis ocultas. Na mecânica quântica, um estado  $\rho$  é o máximo de informação que se pode ter de um sistema, e nele o máximo que podemos acessar no geral são as estatísticas geradas por medidas nesse estado.

A teoria de variáveis ocultas, em contrapartida, através da hipótese de realismo, conseguiria em teoria nos dizer qual o resultado de uma medição com probabilidade igual a 1. Ou seja, através da introdução de uma nova variável não conhecida,  $\lambda$ , (por isso o nome variável oculta) teríamos total informação sobre o sistema, independente dos observáveis e seus observadores. Por isso segundo EPR (Einstein, A.; Podolsky, B.; Rosen, N., 1935), a teoria quântica é dita incompleta, pois não consegue descrever o sistema em sua totalidade.

A hipótese de realismo sugere que, com as variáveis  $\rho$  e  $\lambda$ , poderíamos determinar o resultado de uma medida sem dispersão. Na prática, isso significa que poderíamos conhecer o resultado de uma medida. Por exemplo, consideremos o valor associado ao observável  $A$  associado a teoria de VO, que denotaremos como  $A(\rho, \lambda)$ . Com as duas variáveis  $\rho$  e  $\lambda$ , poderíamos especificar o valor da medida. Em termos quânticos, isso seria equivalente a medir um autoestado de uma projeção. Com o valor esperado da medida  $\langle A \rangle_\rho$  recuperaríamos a estatística do modelo quântico, o valor esperado seria dado por:

$$\langle A \rangle_\rho = \int d\lambda \Pr(\lambda) A(\rho, \lambda)$$

Sendo  $\Pr(\lambda)$  a distribuição de probabilidade da variável  $\lambda$ . Note que nenhuma hipótese foi feita sobre a natureza da variável oculta.

Na prova original de Kochen-Specker (KS), as medidas se restringiram a medidas projetivas unidimensionais, pois elas já são o suficiente para entrar em contradição com a possibilidade de teorias de variáveis ocultas, o que Bell depois apontaria como sendo uma teoria de variável oculta não-contextual (VONC). A teoria de variáveis ocultas para projetores unidimensionais, com a hipótese de realismo, é equivalente a atribuir valores bem definidos para a medição de cada projetor. Ou seja, existe uma função verdade  $v(P_i)$ , sendo  $P_i$  um projetor tal que  $v(P_i) = \{0,1\}$ , no qual o valor é igual a 0 se o valor atribuído pela teoria de VO a essa medição é igual a 0, e o valor é igual a 1 se o valor atribuído pela teoria de VO a essa medição é igual a 1. Como se está lidando com projetores unidimensionais, podemos associar cada um



deles a um vetor  $|a_i\rangle$  de modo que podemos associar a função verdade dos projetores aos vetores,  $v(P_i) = v(|a_i\rangle)$ , que significa dizer que apesar de variáveis ocultas referirem a resultados da medição de projetores, para esse caso específico, é equivalente a atribuir valores aos vetores correspondentes.

A construção do conjunto KS foi feita sem sugerir a hipótese de não-contextualidade. O contexto de uma medida seria quais outras medidas compatíveis podem ser realizadas em conjunto. Na mecânica quântica, uma medida só é compatível com outra se elas comutam, isto é, se eu tenho duas medidas  $P$  e  $Q$ ,  $P$  é compatível com  $Q$  se e somente se  $[P, Q] = PQ - QP = 0$ . Em geral, essa propriedade não ocorre para todas as medidas. Essa propriedade é crucial para que os efeitos associados a contextualidade possam existir, como veremos a seguir. Veremos também que, sob a hipótese de realismo, que o valor de uma medida não deve depender de quais outras medidas compatíveis estão sendo feitas em conjunto. Veremos a seguir por que dessa hipótese ser razoável.

Quando trabalhamos apenas com medidas clássicas, essa pergunta não faz sentido pois a princípio, todas as medições podem ser realizadas conjuntamente. No entanto, na mecânica quântica, a existência de medidas compatíveis, isso é medidas que podem ser acessadas conjuntamente, é a exceção não a norma.

O trabalho de Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) foi uma forma de contornar a existência de medições incompatíveis, propondo um experimento mental no qual duas partículas, que tiveram um vínculo de momento no passado, são separadas. Nesse cenário, poderíamos medir tanto a posição quanto o momento dessas partículas, mas não simultaneamente, assim argumentavam que as medidas feitas, nessa situação, não seriam incompatíveis.

Posteriormente, Bell mostrou que, para um conjunto específico de vetores de estado, nesse caso o par de qubits no estado singleto  $|\Psi^-\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|01\rangle - |10\rangle)$ , essa possibilidade não contemplaria a estatística quântica. Para que a teoria de variáveis ocultas pudesse contemplar a estatística quântica, ela teria que violar a localidade, por isso, afirmamos que, sob a hipótese da localidade, não existem variáveis ocultas que contemplam a estatística da mecânica quântica. No caso de Kochen-Specker (KS), veremos que, sob a hipótese da não-contextualidade, também não existem variáveis ocultas que reproduzem a estatística da mecânica quântica.

### 1.3 O CONJUNTO DE KOCHEN-SPECKER

A prova do conjunto KS é construída da seguinte forma: se cria um conjunto de medidas projetivas unidimensionais, construídas de maneira que a atribuição de valor (hipótese do realismo) seja impossível. Para isso vamos precisar de um hipergrafo em que:

- i. Cada vetor é representado por um vértice do grafo.
- ii. Dois vértices são conectados por uma aresta se e somente se os projetores associados aos vetores são compatíveis.

Como estamos apenas trabalhando com medidas projetivas unidimensionais, então decorre desse fato a seguinte propriedade: Se duas medidas projetivas unidimensionais são compatíveis elas são também ortogonais.

Para atribuir valores temos que considerar duas hipóteses:

Hipótese 1.1:  $v(P_i) = v(|a_i\rangle) = \{0,1\}$ , a cada vetor  $|a_i\rangle$ , temos a função  $v$  que determina o seu valor, logo, em que é 0 quando o vetor foi medido e 1 quando não.

Hipótese 1.2:  $\sum_i^n v(P_i) = 1$ , em que  $n$  é a dimensão do espaço de Hilbert, o que significa a cada conjunto de vetores que formam uma base para o espaço, pelo menos uma delas deve ser medida, então um e apenas um vetor é medido.

As funções  $v()$  são chamadas de **funções verdade**. São funções que mostram o resultado da medida de maneira não-contextual, ou seja:  $v(f): \mathcal{P} \rightarrow \{0,1\}$ , em que  $\mathcal{P} = \{P_i\}$  é o conjunto de todas as projeções.

Um conjunto de KS é construído de maneira tal que é impossível satisfazer as condições das hipóteses 1.1 e 1.2 simultaneamente. Para mostrar um exemplo de tal conjunto vamos usar o conjunto KS-21 que é o conjunto de medidas com essa propriedade que possui o menor número de contextos. Depois explicaremos o motivo dessa propriedade ser tão valiosa. O conjunto KS-21 contém 21 vetores, 7 bases ou contextos em um espaço de Hilbert de dimensão 6, em que cada vetor está em exatamente 2 contextos como mostra a figura 3.

Na figura 3 temos que cada coluna representa um contexto, no qual cada elemento da coluna representa uma medição de um projetor unidimensional na direção do vetor que aparece em cada uma das entradas da tabela. A tentativa de completar a estatística da mecânica quântica por meio da VONC consistiria em atribuir o valor igual a 1 a um e apenas um vetor de cada contexto. Portanto, pela hipótese 1.1 eu atribuo o valor de maneira não-contextual  $\{0,1\}$  a um

vetor  $e$ , pela hipótese 1.2, eu atribuo um e apenas um valor de um vetor igual a 1, sendo os demais iguais a 0. Utilizamos na figura 3 que  $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ , os fatores de normalização foram omitidos para facilitar a visualização.

Figura 3: Conjunto de vetores KS-21.

100000	100000	010000	001000	000100	000010	000001
010000	001111	001111	0101 $w w^2$	0110 $w^2 w$	01 $w w^2$ 01	01 $w^2 w$ 10
001000	0101 $w w^2$	1001 $w^2 w$	1001 $w^2 w$	1010 $w w^2$	10 $w^2 w$ 01	10 $w w^2$ 10
000100	0110 $w^2 w$	1010 $w w^2$	110011	110011	$w w^2$ 0101	$w^2 w$ 0110
000010	01 $w w^2$ 01	10 $w^2 w$ 01	$w w^2$ 0101	$w^2 w$ 1001	$w^2 w$ 1001	$w w^2$ 1010
000001	01 $w^2 w$ 10	10 $w w^2$ 10	$w^2 w$ 0110	$w w^2$ 1010	111100	111100

Fonte: Amaral; Cunha, 2018, p.116.

Legenda: Cada cor representa um vetor e cada coluna representa um contexto e uma base. Fatores de normalização foram retirados para facilitar a visualização.

A prova se dá pelo fato de que só podemos atribuir o valor 1 a um e apenas um vetor de cada contexto. Ou seja, apenas 7 vetores podem ser iguais a 1, de acordo com as VOCN, um em cada contexto. Entretanto, como cada vetor pertence a exatamente dois contextos diferentes, qualquer atribuição de valor de maneira não-contextual força que exista um número par de vetores iguais a 1, e possuímos um valor ímpar de contextos. Isso torna a atribuição de acordo com as hipóteses 1.1 e 1.2 impossível, mostrando assim que não existe Variável Oculta Não-Contextual (VONC) que complete a mecânica quântica.

A construção de conjuntos Kochen-Specker (KS) é altamente relevante para os fundamentos da física, pois um conjunto KS constitui uma prova por contradição da incompatibilidade entre a teoria quântica e o realismo não-contextual.

A prova original de KS tinha 117 vetores e 132 contextos para dimensão 3 no espaço de Hilbert, o que tornava inviável uma prova experimental por questões de aplicação prática. Do ponto de vista de uma realização experimental, que envolve procedimentos equivalentes em bases, o que no conjunto KS se resume a número de contextos, quanto menor o número de contextos, mais fácil de se realizar experimentalmente ele é. Pois, do ponto de vista físico, quando lidamos com medidas compatíveis na mecânica quântica, existe uma base em comum

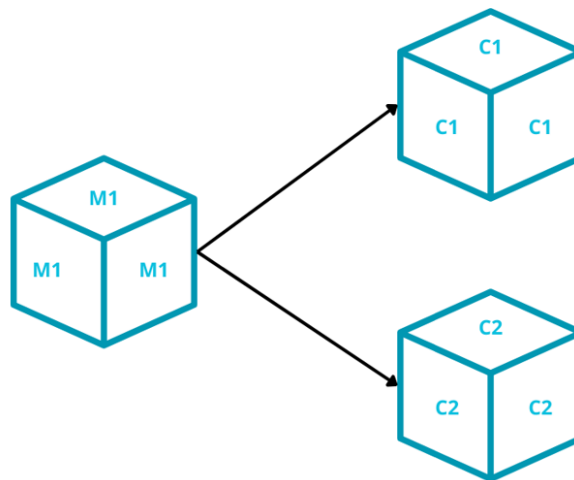
que diagonaliza todas as medidas. Então, no laboratório, quando se faz uma medida, não é analisada a estatística de vetor a vetor e sim de contexto a contexto.

#### 1.4 A HIPÓTESE DA NÃO-CONTEXTUALIDADE

A hipótese de não-contextualidade para as variáveis ocultas, é formulada com base em uma descrição razoável da natureza, como veremos a seguir. A priori não teríamos motivação para criar uma condição de não-contextualidade dentro da teoria de variável oculta, como foi apontado por Bell (1966).

Suponhamos que temos dois contextos  $C_1 = \{M_1, Q_2, \dots, Q_n\}$  e  $C_2 = \{M_1, N_2, \dots, N_m\}$ , em que  $M_1$  é compatível com  $Q_i$  e  $N_j$ , mas que  $Q_i$  não necessariamente é compatível com  $N_j$ . Queremos através da teoria de variável oculta determinar o resultado de  $M_1$ . Se esse resultado depender de qual medida é feita em conjunto, o resultado de  $M_1$  irá depender se iremos medir  $C_1$  ou  $C_2$  logo em seguida, ou se ainda iremos realizar outra medida dentro do contexto ou não, como mostra a figura 4.

Figura 4: Ilustração de uma medida de variável oculta contextual.



Fonte: Próprio autor com adaptação da plataforma PowerPoint.

Legenda: Cada caixa representa uma medição. Uma teoria de variável oculta contextual teria que prever a decisão de medir  $M_1$  com o contexto  $C_1$  ou o contexto  $C_2$ .

Podemos tornar ainda mais absurda essa colocação quando separamos as medidas espacialmente. Digamos que  $Q_i$  e  $N_j$  estejam separadas espacialmente de  $M_1$ , e não se saiba se

ele vai tomar um caminho ou outro, o resultado dependeria de uma medida feita ou não no futuro. (Malin, S. 1997)

Por essas razões, dentro de limites aceitáveis, a hipótese de não-contextualidade é imposta ao sistema clássico. Mesmo que, do ponto de vista experimental, dependêssemos de quais equipamentos usaríamos para realizar a medida  $M_1$ , isso é, se medíssemos  $M_1$  no contexto  $C_1$  com um setup experimental, e, ao medir  $M_1$  em  $C_2$  com outro setup experimental, poderíamos incluir os efeitos experimentais associados aos equipamentos nas equações. Portanto, a hipótese de não-contextualidade é essencial para evitar resultados absurdos e manter a consistência da teoria de variáveis ocultas.

### 1.5 DESIGUALDADES NÃO-CONTEXTUAIS

A prova fornecida pelos conjuntos de Kochen-Specker (KS) tem grande relevância por ser uma prova concreta da diferença entre a estatística do sistema quântico e das Variáveis Ocultas Não-Contextuais (VONC). Para que tenhamos prova experimental da diferença entre os efeitos de associados aos conjuntos de KS e o modelo de VONC, vamos precisar de provas alternativas dos conjuntos de KS.

Existem duas formas de se provar: uma é usando operadores gerais ao invés de projetores unidimensionais (Peres, 1990; Mermin, 1990) utilizando os conjuntos de KS (neste trabalho não vamos abordar esse método). A outra prova é utilizando os vetores do conjunto de KS que nos permitem derivar uma desigualdade (Peres, 1990; Kernaghan; Peres, 1995), à qual existe um teto para VONC que é violado por qualquer estado quântico. Os conjuntos de vetores são sempre o conjunto de KS ou subconjuntos deles, então os conjuntos de KS são a base de todas as provas de teorias de KS.

A importância de termos dados concretos da violação é que se pode testar os valores em laboratório e se ter uma prova concreta da diferença entre a estatística clássica proposta pelas VO e a estatística quântica. Os conjuntos de KS são usados nesses casos para providenciar segurança a ataques clássicos a protocolos de criptografia quântica baseada na complementaridade (Syozil, 2010; Cabello *et al.*, 2011). É também um método de atestar a dimensão  $n$  do seu sistema que não requer um mínimo de preparações, além de conseguir diferenciar sistemas quânticos de clássicos, consegue também diferenciar sistemas quânticos diferentes (Cañas *et al.*, 2014). Então, nesta seção, iremos discutir como chegar nas desigualdades. Para isso, iremos falar inicialmente dos grafos de compatibilidade, a abordagem de hipergrafos, o que são *behaviors*, a diferença entre os *behaviors* clássico, quântico e não-



é o número de meio-espacos definindo o politopo. O sistema de equação pode ser reescrito na forma matricial como:

$$AX \leq B \text{ Eq 1.2.}$$

## 1.7 TEORIA DE PROBABILIDADE GERAL

A teoria de probabilidade geral busca englobar em uma única estrutura matemática as probabilidades clássicas, quânticas e outras generalizações que são úteis como veremos a seguir. Para um maior aprofundamento sobre o tema veja as referências (Barret, 2007; Abramsky; Brandenburger, 2011).

A intenção da teoria de probabilidades gerais é encontrar a mecânica quântica dentro de uma teoria mais geral, mas conceitualmente mais direta. O intuito é que, vendo a mecânica quântica “de fora”, possamos entendê-la mais claramente.

A teoria de operacional, como vemos em Spekkens (2005), da teoria física, serve como modelo no qual pode-se interpretar quais são as intervenções que podemos implementar no laboratório, e o papel é especificar as probabilidades, sendo a ideia básica: O **estado** é representado como um vetor de probabilidades dos resultados das **medidas**.

Nessa teoria temos como hipótese que existem dois tipos de intervenções que podemos fazer na natureza um deles é a **preparação** e a outra é a **operação**. Assumimos por hipótese que podemos fazê-las de maneira irrestrita quantas vezes acharmos necessário.

A preparação prepara o sistema em um dado estado e a operação age no sistema, em geral mudando o seu estado. Quando realizamos a operação, podemos ter diversos resultados diferentes, cada um ocorrendo com alguma probabilidade. A operação age de maneira macroscópica, como um clique em lugar diferente, como uma luz entre diversas sendo iluminadas no dispositivo. Dado o estado do sistema, podemos calcular as probabilidades dos resultados para qualquer medida. Da mesma forma, se soubermos a probabilidade dos resultados de qualquer medida, então o estado é conhecido.

Definição 1.1: A **preparação** produz o que chamamos de **estado** do sistema. Duas preparações são equivalentes se, e somente se, produzem a mesma distribuição estatística para todas as medidas.

Os experimentos também podem ser repetidos, por quantas vezes foram necessárias, para que possamos contar as frequências relativas de cada resultado.

Definição 1.2: Uma medida possui **repetibilidade** se ao medirmos ela novamente, por quantas vezes desejarmos, conseguirmos com probabilidade igual a 1 o mesmo resultado anterior.

Apesar da mecânica quântica permitir estados que requer um número infinito de probabilidades para ser especificado, apesar da mecânica quântica permitir sistemas de dimensão infinita e teorias de probabilidade clássicas permitir conjuntos amostrais infinitos, no nosso caso de estudo nos limitamos a estados com espaço amostral finito. Vamos supor que cada sistema, existe um conjunto finito de medidas  $\mathcal{Q}$  no qual o sistema pode ser completamente especificado listando as probabilidades de seus resultados.

Hipótese 1.3: Um único estado do sistema pode ser completamente especificado listando as probabilidades dos resultados de algum subconjunto de  $\mathcal{Q}$  de todas as possíveis medidas.

$$\vec{Q} := \left( \begin{array}{c} Q(a = 1|X = 1) \\ Q(a = 2|X = 1) \\ \vdots \\ \hline Q(a = 1|X = 2) \\ Q(a = 2|X = 2) \\ \vdots \end{array} \right) \text{Eq 1.3.}$$

em que  $Q(a = i|X = q)$  é a probabilidade de se ter o resultado  $i$  quando a medida  $q \in \mathcal{Q}$  é feita no sistema.

A normalização do sistema requer que:

$$\sum_i Q(a = i|X = q) = 1, \quad \forall q.$$

Entretanto, também se é conveniente o uso de estados subnormalizados. Suponha que o sistema é preparado em algum estado normalizado e uma operação é realizada com resultado  $i$  sendo obtido com probabilidade menor que 1. Existe um estado subnormalizado associado ao resultado  $i$ :

$$\sum_i Q(a = i|X = q) = c, \quad 0 \leq c \leq 1, \forall q.$$



em que  $c = |\vec{Q}|$  é a probabilidade do resultado  $i$ . Os estados subnormalizados também servem para representar sequência de medidas, dado que façamos uma medida que obtenha como resultado  $i$  com probabilidade  $c_1$  e após essa medida façamos outra com resultado  $j$  com probabilidade  $c_2$ :

$$Q(a = i, b = j | X = q_1, X = q_2) = Q(a = i | X = q_1) \cdot Q(b = j | X = q_2)$$

Não há nenhuma razão para supor que todos os vetores  $\vec{Q}$  que possam ser escritos possam ser preparados. Para tanto existe o conjunto de estados permitidos  $\mathcal{S}$ .

Hipótese 1.4: O estado de um sistema pertence a um conjunto de estados normalizados permitidos e  $\vec{0}$  que chamamos de um **espaço de estado**  $\mathcal{S}$ , que é um espaço fechado e convexo, cujos pontos extremos são **estados puros** e  $\vec{0}$ .

Os pontos extremos do espaço de estados  $\mathcal{S}$  são chamados de estados puros, os pontos que não são extremos são chamados de **estados mistos**, que podem ser escritos como a soma convexa de estados puros. Somas convexas são chamadas de **misturas**.

Quando uma operação  $X$  é feita, cada resultado  $i$  é associado a uma transformação  $f_i$  do estado do sistema:

$$\vec{Q} \rightarrow \vec{Q}' = f_i(\vec{Q}).$$

Operações com apenas um resultado preservam a normalização. Se a operação é associada a um resultado com probabilidade  $c < 1$ , então ele decresce a norma do estado por um fator de  $c$ .

Definição 1.3: **Operações** que possuem mais de um resultado possível são chamados de **medições**.

Hipótese 1.5: Operações preservam misturas:

$$\vec{Q} = \sum_i p_i \vec{Q}_i$$

em que se  $\vec{Q}_i$  são estados permitidos,  $\vec{Q}_i \in \mathcal{S}$ , e que  $0 \leq p_i \leq 1$  e  $\sum_i p_i = 1$ , então a operação será na forma:

$$f(\vec{Q}) = \sum_i p_i f(\vec{Q}_i), \forall \vec{Q}_i \in \mathcal{S}.$$

Isso significa que a ação de  $f$  é linear, o que implica que cada transformação pode ser escrita como:

$$f(\vec{Q}) = M\vec{Q}$$

em que  $M$  é uma matriz. A operação é então um conjunto de matrizes  $\{M_i\}$ , cada  $M_i$  correspondendo ao resultado  $i$  dessa operação. O estado subnormalizado associado ao resultado  $i$  é  $M_i\vec{Q} \in \mathcal{S}$  e a probabilidade não-normalizada do resultado  $i$  é dado por  $\frac{|M_i\vec{Q}|}{|\vec{Q}|}$ . Isso significa que se,  $\vec{Q}$  é normalizado a probabilidade do resultado  $i$  é  $|M_i\vec{Q}|$ .

Hipótese 1.6: Para cada sistema, existe um conjunto particular de transformações permitidas. O conjunto que define essas transformações permitidas é definido como  $\mathcal{T}$ . Uma operação é um conjunto de transformações permitidas  $\{M_i\}$ ,  $M_i \in \mathcal{T}$ , tal que as restrições são dadas por:

- I. Positividade:  $0 \leq \frac{|M_i\vec{Q}|}{|\vec{Q}|} \leq 1, \forall \vec{Q} \in \mathcal{S}$ .
- II. Normalização:  $\sum_i \frac{|M_i\vec{Q}|}{|\vec{Q}|} = 1, \forall \vec{Q} \in \mathcal{S}$ .
- III. Preservação do estado:  $M_i\vec{Q} \in \mathcal{S}, \forall \vec{Q} \in \mathcal{S}$ .
- IV. Preservação completa do estado: Cada transformação  $M_i$  deve resultar em um estado permitido quando ele age em um sistema que é parte de um maior sistema multipartite.

A restrição I está ligada ao fato de que a probabilidade de um resultado pode variar do valor zero ao valor um. A restrição II está ligada ao fato de que a soma de todas as probabilidades é igual a um. A restrição III e IV estão ligadas ao fato de que qualquer transformação deve levar um estado permitido para outro estado permitido, seja considerando um sistema único ou um sistema como sendo parte de um sistema composto.

Definição 1.4: O par  $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$  é chamado de **modelo de probabilidade**. Uma teoria de probabilidade é uma coleção de modelos de probabilidade.

Definição 1.5: Uma medida  $Q_1$  é **compatível** com outra medida  $Q_2$  se e somente se satisfazem a condição de **repetibilidade**: ao realizar duas medições sequenciais de  $Q_1$ , obtemos o mesmo resultado, mesmo que uma medição de  $Q_2$  seja realizada entre elas.

A compatibilidade de medidas é um dos problemas chave da mecânica quântica, e é uma das grandes diferenças entre as duas teorias quântica e a clássica, como veremos a seguir.

## 1.8 GRAFOS DE COMPATIBILIDADE

A abordagem de hipergrafos de compatibilidade (Amaral; Cunha, 2018) é uma maneira tanto visual como matemática de tratarmos um sistema, e a partir das distribuições de probabilidades determinar se admite o modelo clássico, quântico ou não-perturbante. Para tanto vamos definir o cenário de compatibilidade a partir dele construir o hipergrafo de compatibilidade.

Definição 1.6:  $X$  compreende o conjunto de todas as medidas disponíveis naquele setup experimental.

Definição 1.7:  $\mathfrak{C}$  é um subconjunto de  $X$ , em que cada subconjunto  $C \in \mathfrak{C}$  é o conjunto de medidas compatíveis que chamaremos de **contexto** e o conjunto de todos os contextos são determinados pelo conjunto  $\mathfrak{C}$ .

Definição 1.8:  $\cup_{C \in \mathfrak{C}} C = X$ .

Definição 1.9:  $C, C' \in \mathfrak{C}$  e se  $C \subseteq C'$  então  $C = C'$ , o que implica que todo contexto é maximal, contendo no contexto o máximo de medidas compatíveis possível.

Definição 1.10: O conjunto de todos os possíveis resultados é o conjunto  $O$ , definido pelo número de resultados possíveis que cada medida possui.

Definição 1.11: Dado a tripla  $(X, \mathfrak{C}, O)$  definimos o **cenário de compatibilidade** ou apenas **cenário**.

Com as relações entre os elementos de  $X$  podemos construir um hipergrafo que representa essas relações.

Definição 1.12: O hipergrafo  $\Gamma$  de compatibilidade para o cenário  $(X, \mathfrak{C}, O)$ , é o grafo construído da seguinte forma:

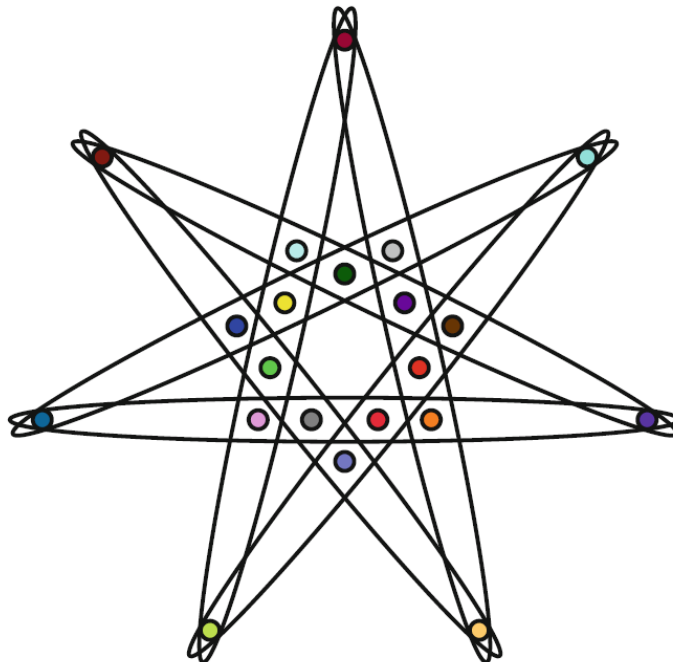
- i. Cada vértice é definido por um elemento de  $X$ .
- ii. Cada medida pertence a uma hiperaresta se e somente se elas são compatíveis, ou seja, cada hiperaresta corresponde a um contexto  $C \in \mathfrak{C}$ .

Com isso conseguimos montar um hipergrafo de compatibilidade, vamos usar o conjunto KS-21 como exemplo na figura 5.

O grafo está definido, mas ele sozinho não define todo o sistema já que temos os resultados das medições, então, incluindo os resultados, conseguimos definir o sistema.

Sozinho o conjunto  $O$  não define todo o sistema, pois precisamos a partir dele definir o número de resultados para cada medida. Sem perda de generalidade podemos definir o número de resultados como sendo iguais em todas as medidas por fim de praticidade. Quando realizamos uma medida em  $C$  temos que  $O^C$  resultados são possíveis, essa medida individual de um contexto se chama **evento**.

Figura 5: Hipergrafo de compatibilidade do conjunto KS-21.



A distribuição de probabilidades de cada possível resultado é chamada de *behavior* e nela conseguimos caracterizar o sistema, a cada possível probabilidade podemos associar os valores em um vetor, como será mostrado mais a frente:

Definição 1.13: Dado as probabilidades de todos os resultados no conjunto  $\mathfrak{C}$ , podemos distribuir o resultado em uma família de funções do tipo:  $p_C: O^C \rightarrow [0,1]$ , tal que  $\sum_{evento \in O^C} p_C(evento) = 1$ , então podemos associar esse a probabilidade de cada evento a uma entrada do vetor.

$\mathfrak{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  para cada  $C_i$  se tem  $O^{C_i} = \{evento_i^1, evento_i^2, \dots, evento_i^{m_i}\}$   
Podemos então definir o vetor  $p$  como sendo:

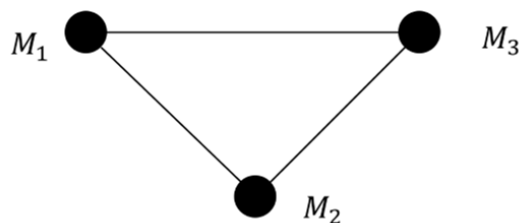
$$[p_{C_1}(evento_1^1) \ p_{C_1}(evento_1^2) \ \dots \ p_{C_1}(evento_1^{m_1}) \ \dots \ p_{C_n}(evento_n^1) \ \dots \ p_{C_n}(evento_n^{m_n})]. \text{ Eq. 1.4}$$

Exemplo 1.1: Para o cenário em que:

- I.  $X = \{M_1, M_2, M_3\}$ .
- II.  $\mathfrak{C} = \{C_i\}$ , tal que  $C_i = \{M_i, M_{i+1}\}$ ,  $i \text{ mod } 3$ .
- III.  $O = \{0,1\}$ .

O grafo de compatibilidade  $\Gamma$  é dado por:

Figura 6: Representação do hipergrafo de compatibilidade do exemplo 1.1.



Fonte: Próprio autor com adaptação da plataforma PowerPoint.  
Legenda: Cada vértice é uma medida, cada aresta é um contexto.

E o conjunto de *behaviors* pode ser expresso na figura 7. Em que cada elemento da tabela representa um evento e cada linha representa um *behavior*. A partir dos conjuntos de *behaviors* representado pelo vetor da equação 1.4, conseguimos determinar se uma distribuição de probabilidades ela é clássica, quântica ou NP. No exemplo usado nós temos que  $P_{C \cap C'}^C \neq P_{C \cap C'}^{C'}$ , pois  $M_1$  tem probabilidade igual a 1 de resultar em 0 no contexto  $C_1$  e probabilidade igual 0 resultar em 1 no contexto  $C_3$ . Não utilizaremos esse tipo de distribuição neste trabalho.

Figura 7: Conjunto de *behaviors* do exemplo 1.1.

	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
$M_1M_2$	1	0	0	0
$M_1M_3$	0	1	0	0
$M_2M_3$	0	0	1	0

Fonte: Próprio autor com adaptação da plataforma PowerPoint.

Legenda: Cada elemento da tabela representa a probabilidade de um evento, por exemplo a probabilidade de se medir (0,0) no contexto  $C_1$  é de 1. O *behavior* é representado pela linha do contexto. A tabela inteira é uma forma de representar a equação 1.4.

## 1.9 O BEHAVIOR CLÁSSICO

O modelo de probabilidade que define o *behavior* clássico, é o modelo clássico de probabilidade. Ele é definido pela tripla  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ , em que  $\Omega$  é um espaço amostral,  $\Sigma$  é um  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$  e  $\mu$ , como na equação 1.3, uma probabilidade de medida em  $\Sigma$ . As transformações são um conjunto  $\{A_i\}$ , em que  $A_i \in \Sigma$ , todas representadas pela  $\sigma$ -álgebra. O fato de todas as transformações serem de  $\sigma$ -álgebra tem um significado espacial, como mostrarei.

Definição 1.14: Um modelo clássico de probabilidade para o cenário  $(X, \mathfrak{C}, \mathcal{O})$  é dado pelo espaço de clássico de probabilidade  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ , em que o  $\Omega$  é o espaço amostral e  $\Sigma$  é um  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$  e  $\mu$  uma probabilidade de medida em  $\Sigma$ . O conjunto de probabilidades e medidas, no qual o estado é um vetor de probabilidade  $\mu \in \Omega$  em  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ , e a transformação,  $\{A_i\}$ , é uma partição de  $\Omega$  na qual  $A_i \in \Sigma$ . Dada a medida  $\{A_i\}$  e o estado  $\mu$ , a probabilidade do encontrarmos o resultado  $i$  é:

$$p(i) = \mu(A_i)$$

Como as transformações seguem  $\sigma$ -álgebra, então, as interseções entre os elementos das partições também são pertencentes a  $\sigma$ -álgebra, logo não existem medidas incompatíveis. Isso, em termos práticos significa que existe uma seção global para o cenário,  $C \in \mathfrak{C} = X$ .

Definição 1.15: Um cenário possui seção global se e somente se  $X = \mathfrak{C}$ .

Teorema 1.1: Para um *behavior*, existe seção global que reproduz as estatísticas das medidas se, e somente se, ele é clássico Abramsky, S.; Brandenburger, A. 2011.

As distribuições de probabilidade pelo sistema clássico formam um politopo convexo, ou seja, existe um conjunto de desigualdades que determinam as condições necessárias e suficientes para o seu pertencimento. É a partir delas que se constroem as desigualdades não-contextuais. Algumas desigualdades são triviais e estão relacionadas a positividade e normalização. Entretanto, existem desigualdades que não são respeitadas de maneira geral por todas as distribuições de probabilidade. Quando um *behavior* viola a desigualdade o chamamos de **contextual**.

Como vimos na equação 1.1 temos que aplicado a nosso sistema como na definição 1.13:

$$S := \sum_{evento \in O^c, C \in \mathfrak{C}} a_C(evento) p_C(evento) \leq \beta \text{ Eq. 1.5.}$$

em que  $a_C$  e  $\beta$  ambos são números reais, em que o número  $a_C$  é uma escolha arbitrária, e como vimos,  $p_C$  são as distribuições de probabilidades do *behavior*. O conjunto de *behaviors* do sistema irá determinar um teto para o que as VOCN conseguem alcançar. Veremos a seguir que equações do tipo 1.5 podem ser violadas para alguns sistemas quânticos.

## 1.10 O BEHAVIOR QUÂNTICO

O *behavior* quântico é definido pelo par  $(\mathcal{H}, \mathcal{P}, \rho)$ , no qual  $\mathcal{H}$  é o espaço de Hilbert complexo,  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  é o espaço das transformações e  $\rho$  é o vetor de estado. No caso do nosso estudo, limitamo-nos a espaços finitos. Os estados são representados pelas matrizes positivas semi-definidas  $\rho$ , tal que  $Tr(\rho) \leq 1$ .

Definição 1.16: Dado espaço de Hilbert complexo, o conjunto de medidas e o estado  $\rho$  atuando em  $\mathcal{H}$ , cada medida sendo uma partição do operador identidade, chamamos a soma de **resolução da identidade**. Isso é válido para medidas projetivas:

$$I_{n \times n} = \sum_i P_i.$$

Dado estado  $\rho$ , a probabilidade do resultado ser  $i$  é:

$$p(i) = \text{Tr}(\rho P_i).$$

No modelo de probabilidade quântico as medidas não são, em geral, compatíveis. Para que elas sejam compatíveis na mecânica quântica, elas devem possuir uma base em comum que diagonalizam ambas as medidas. Isso acontece se, e somente se, elas comutam:

$$[M_i, Q_j] = M_i Q_j - Q_j M_i = 0.$$

Teorema 1.2: O *behavior* quântico é um conjunto convexo, mas no geral não é um politopo.

O conjunto de *behaviors* clássicos está contido no conjunto de *behaviors* quânticos. Para mostrar isso, basta pegar um conjunto no qual todas as medidas são projetores unidimensionais diagonalizados, e que o conjunto de estados  $\rho$  são autoestados dos projetores, Amaral, B.; Cunha, M. T., 2018.

Nessa situação, existem *behavior* quânticos específicos que violam a desigualdade não-contextual. Para exemplificar vamos mostrar a violação no conjunto KS-21.

Para o conjunto KS-21 considere que o conjunto de observáveis  $O_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, 21$ . Cada observável é  $P_i = |v_i\rangle\langle v_i|$  e que  $|v_i\rangle$  é representado pelos vetores usados na construção da prova de KS-21. Os resultados possíveis são 1 ou -1. O teto da desigualdade não-contextual é dado por:

$$S = \sum_{i=1}^{21} 2 \times \Pr \{v(P_i) = 1\} \leq 6 = \beta_{cl} \text{ Eq. 1.6.}$$

Definição 1.17: O valor da cota superior clássica é dado por  $\beta_{cl}$ .



Em que  $\Pr\{v(P_i) = 1\}$  é a probabilidade de medir o vetor associado ao observável quando se realiza um teste  $P_i = |v_i\rangle\langle v_i|$ . Podemos ver que 6 é uma cota superior a desigualdade não-contextual. Isso se deve ao fato de que um, e apenas um vetor pode ser igual a 1 em cada contexto, no conjunto KS-21 cada vetor pertence a um par de contextos simultaneamente, logo o valor que  $S$  pode assumir são apenas valores pares, e o maior número par de valores que não ultrapassa o número de contextos é 6. Mas, quando consideramos os observáveis quânticos os valores de  $S = 7 = \beta_{qu}$ , para todo estado, isso porque na quântica cada contexto forma uma resolução da identidade, o que dá somado  $7 \times I$ , sendo  $I$  a identidade, atingindo o valor máximo quântico que é 7. A escolha de  $a_c = 2$  é apenas uma questão de escolha do autor Lisonêk, P. *et al.*, 2014, para facilitar a visualização. O que demonstra uma clara distinção entre o sistema quântico e o clássico é uma forma de qual descrição é mais adequada ao sistema que estamos trabalhando.

Definição 1.18: O valor da cota superior quântica é dado por  $\beta_{qu}$ .

### 1.11 O BEHAVIOR NÃO-PERTURBANTE

Dentro do modelo de probabilidades gerais existem inúmeros outros tipos de modelos de probabilidade. O limite de quais probabilidades gerais que estamos trabalhando é dado pelo *behavior* não-perturbante, que possui a seguinte propriedade:

Definição 1.19: Um *behavior* é não-perturbante (NP), se e somente se dois contextos possuem interseção,  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ , as distribuições são as mesmas nas interseções.

$$P_{C_1 \cap C_2}^{C_1} = P_{C_1 \cap C_2}^{C_2} \text{ Eq. 1.7.}$$

Isso é se tivermos uma medida,  $M_1$ , com duas repostas possíveis 1 e 0, que pertence a dois contextos, por exemplo:  $C_1 = \{M_1, M_2\}$  e  $C_2 = \{M_1, M_3\}$ , nos contextos  $C_1$  e  $C_2$ , a probabilidade dos resultados 0 ou 1 deve ser consistente quando analisado a medida no contexto  $C_1$  ou  $C_2$ . Isso significa que não é possível que  $M_1$  dê como resposta 0 com probabilidade 1 no contexto  $C_1$ , e 0 de probabilidade de dar a mesma resposta 0 no contexto  $C_2$ .

A importância desses conjuntos de *behaviors* é que ele é um politopo que contém o conjunto quântico. Quando analisamos a desigualdade não-contextual, o limite desse *behavior* é o limite algébrico (todas as probabilidades iguais a 1). Isso, significa que no modelo KS-21,  $S = \sum_{i=1}^{21} 2 \times p(O_i = 1) = 42$ , visto que são todas as repostas de probabilidade iguais a 1,

multiplicada por 2, o que mostra que, de fato o conjunto quântico está contido no conjunto não-perturbante.

Em cenários de Bell, em que os contextos estão separados espacialmente, a condição de não-perturbação tem como interpretação física a propriedade: nenhuma mensagem pode ser enviada de uma parte para outra instantaneamente. Isso mostra a condição de não-sinalização. Em experimentos de Bell a condição de não-sinalização é o que dá significado à ideia de que nenhum sinal pode viajar mais rápido do que a velocidade da luz (Peres, A., Terno, D. R., 2004).

### 1.12 REALIZAÇÃO EXPERIMENTAL DO CONJUNTO KS-21

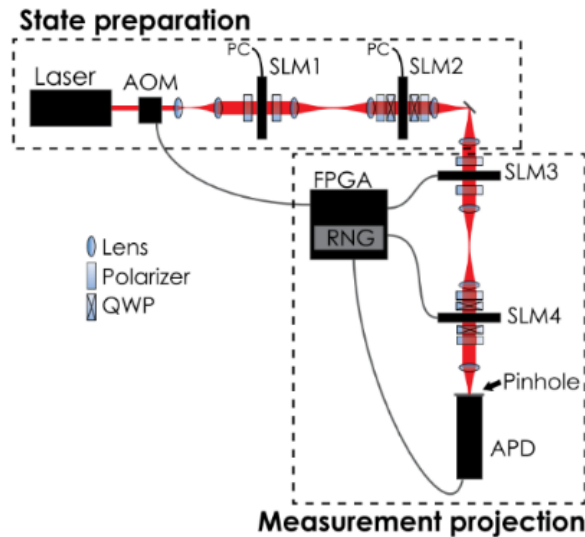
A referência Cañas *et al.*, 2014, estabeleceu um protocolo de comunicação entre Alice e Bob para verificar se Bob acessa dimensionalidade  $n$  do sistema quântico criado por Alice. O procedimento é realizado da seguinte maneira: Bob cria um instrumento de medida no sistema quântico, no qual ele supõe que Alice vai codificar a informação. Esse instrumento consiste em testes  $\{0,1\}$  de projetores  $P_i$  de um sistema de dimensão  $n$  do conjunto KS.

Para se certificar que está acessando a dimensão  $n$  o sistema quântico de Alice, Bob checa a frequência com que cada  $P_i$  produz o 1. Se a desigualdade não-contextual como mostrado na seção 1.11, for violada, ou seja, se ele atinge o valor  $\beta_{qu}$ , então ele acessará a dimensão do sistema de Alice no sistema quântico correto. Caso ele tente acessar o sistema em um sistema quântico diferente ou de maneira clássica, ele sempre atingirá o  $\beta_{cl}$ , como mostra a referência Cañas *et al.*, 2014.

A configuração experimental é montada da seguinte maneira: inicialmente, Cañas *et al.*, 2014, estabelece um sistema de geração de fótons únicos, produzidos por estados coerentes fracos gerados por pulsos ópticos fortemente atenuados. Esses fótons passam por uma sequência de dois moduladores espaciais de luz responsáveis por preparar o estado, e outros dois moduladores espaciais de luz para projetar o estado, conforme ilustrado na figura 8.

A violação da desigualdade foi demonstrada para todos os estados do conjunto KS-21, para qualquer estado quântico Amaral, B. Cunha, T., 2018, inclusive ruído, como mostram as figuras 9 e 10.

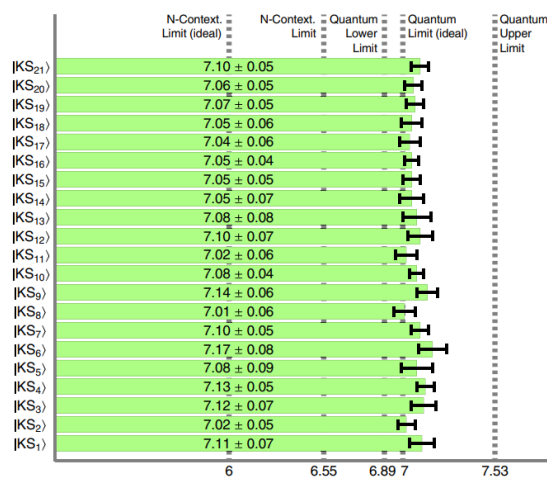
Figura 8: Configuração experimental das medições do KS-21.



Fonte: Cañas et al., 2014, p 3.

Legenda: Acousto-optic modulator (AOM) ou modulador acousto-óptico é o gerador de pulso, colocado após um laser de diodo de onda contínua de 690 nm. O spatial light modulator (SLM) ou moduladores espaciais de luz são usados para gerar um dos 21 estados do conjunto KS-21. Todos SLMs são conectados a um computador não mostrado na figura. A configuração é controlada por field-programmable gate array (FPGA) ou matriz de portas programável em campo para testar a desigualdade não-contextual.

Figura 9: Resultados experimentais para os valores de  $S$ , definidos pela equação 1.5, no conjunto KS-21.

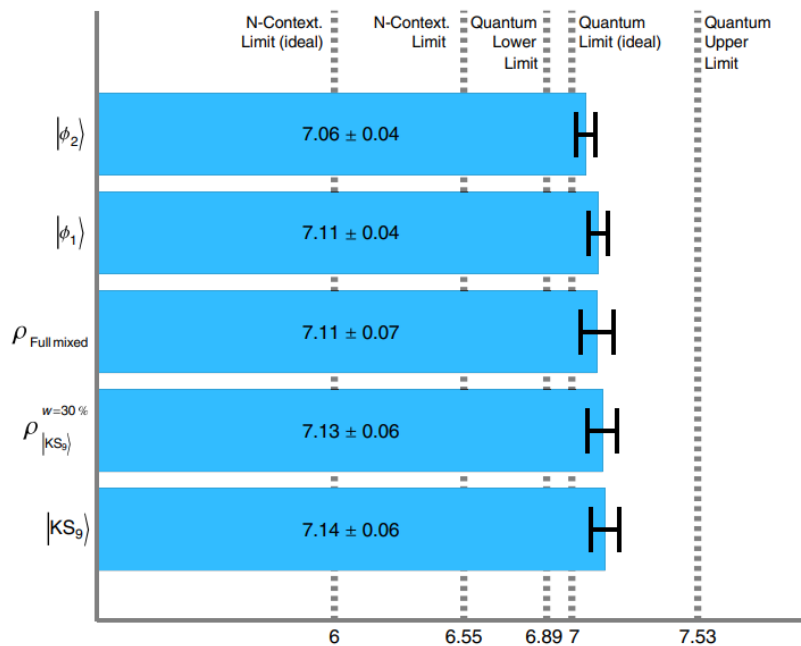


Fonte: Cañas et al., 2014, p 4.

Legenda: Usando os estados iniciais de cada estado do conjunto KS-21. A desigualdade não contextual é igualmente violada para cada um dos estados testados. *N*-Context Limit (Ideal) ou limite não-contextual ideal e o Quantum Limit (Ideal) ou limite quântico ideal são os resultados quando o valor do

erro experimental é  $\bar{\epsilon} = 0$ . Quantum Lower (Upper) Limit ou limite quântico inferior (superior) são os valores do sistema quando o erro experimental  $\bar{\epsilon}$  é levado em consideração.

Figura 10: Demonstração violação da desigualdade da equação 1.5 independente do estado quântico.



Fonte: Cañas et al., 2014, p 4.

Legenda: Fatores de normalização foram omitidos.  $|\phi_1\rangle = (1,1,1,1,1,1)$ ,  $|\phi_2\rangle = (1,0,0,0,1,0)$ , um estado completamente misturado  $\rho = I/6$ ,  $\rho_{|KS_9\rangle}^{\omega=30\%} = (1 - \omega)|KS_9\rangle\langle KS_9| + \omega I/6$ , que é uma mistura parcial composta do estado puro  $|KS_9\rangle = (0,1,0,1,w,w^2)$ , em que  $w = e^{2\pi i/3}$ , e 30% é adicionado ruído branco, em que  $\omega$  é a quantidade ruído branco, e  $I$  é a matriz identidade em dimensão  $n = 6$  e por último  $|KS_9\rangle$ .

Este trabalho está interessado na maneira como os erros experimentais são tratados e em como o formalismo quântico se relaciona com o que está sendo efetivamente medido por aparelhos macroscópicos utilizados em experimentos reais. Ou seja, para cada medida, é possível construir, a partir das estatísticas dos dados brutos registrados, um conjunto de quantidades que correspondem aos observáveis da mecânica quântica. Aqui, “dados brutos” significam medidas de operador valorado positivo (OVP), que é a representação matemática da informação estatística coletada. Para uma revisão extensa sobre o assunto, veja Englert, B. G. 1995, Busch, P., Lahti, P. J., Mittelstaedt, P., 1991, Busch, P., Lahti, P. J., 1996.

Definição 1.20: Medidas OVP (Nielsen, M. A.; Chuang, I. L., 2012) são medidas tais que, dado uma coleção de operadores de medidas  $\{E_i\}$ , em que  $E_i := Q_i^\dagger Q_i$ , sendo  $Q_i^\dagger$  o operador hermitiano de  $Q_i$ . esses operadores agem no estado do espaço do sistema que estão sendo medidos. O índice  $i$  refere ao resultado da medida. Se o estado do sistema quântico é  $|\psi\rangle$  após medida então a probabilidade de ocorrer o resultado  $i$  é dado por:

$$\Pr i = \langle \psi | E_i | \psi \rangle.$$

O estado do sistema após a medida é dado por:

$$\frac{E_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | E_i | \psi \rangle}}.$$

As medidas OVP satisfazem a **equação de completude**:

$$\sum_i E_i = I.$$

As medidas projetivas são casos especiais de medidas OVP, para o caso em que  $Q_i$  são projetores ortogonais, isso é, são hermitianos e  $Q_i Q_j = \delta_{i,j} Q_i$ . Diferentemente das medidas projetivas a medida OVP não possui em geral repetibilidade. Por exemplo, se medirmos o estado  $|\psi\rangle$  e achamos o resultado  $i$ , e depois medimos novamente o estado e achamos o resultado  $j$  a probabilidade de se achar  $j$  pode ser não nula, pois:

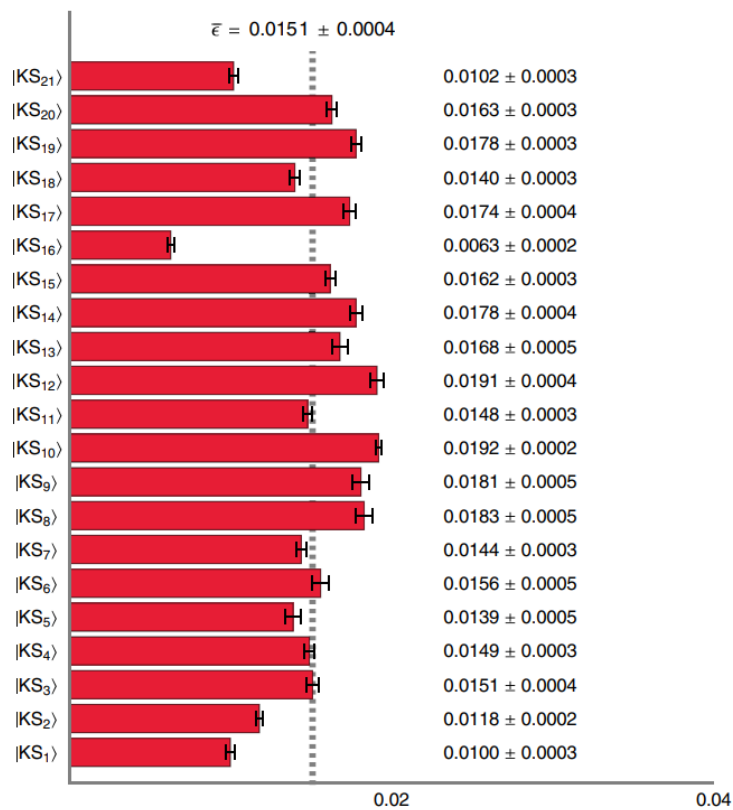
$$\Pr(j|i) = \frac{\langle \psi | E_j E_i | \psi \rangle}{\sqrt{\langle \psi | E_i | \psi \rangle}}.$$

Isso ocorre porque não necessariamente  $Q_i$  e  $Q_j$  são ortogonais. No trabalho de Cañas *et al.*, 2014, as medidas OVP surgem quando se verificam as relações de ortogonalidade. Ou seja, quando se prepara o sistema em um determinado estado, a probabilidade de encontrar a resposta igual 1 ao projetar o mesmo estado é 1, e a probabilidade de encontrar a resposta igual 1 ao projetar estados ortogonais é 0. No entanto, para condições experimentais reais, as probabilidades não serão exatamente iguais 1 ou 0. Cañas *et al.*, 2014, contabiliza a fração do experimento em que o resultado “errado” é observado. Quando o resultado é um desvio da condição de projeção, assume-se que aquela medida é um OVP. Conforme mostrado na figura

11, o resultado da média dos erros de todas as ortogonalidades do conjunto KS é dado por  $\bar{\epsilon} = 0.0151 \pm 0.0004$ .

Na seção seguinte, veremos por que a introdução de imperfeições nas medidas, ou imprecisão de medidas, apresenta um problema conceitual à implementação experimental dos conjuntos de KS.

Figura 11: Relações de ortogonalidade do conjunto KS-21



Fonte: Cañas et al., 2014, p 3.

Legenda: Nestes testes, o estado preparado e o estado medido dos estados do conjunto KS-21 são estados que deveriam ser ortogonais. O parâmetro  $\bar{\epsilon}$  é o erro médio do sistema.

## SEÇÃO 2

Bell nos mostra que, para variáveis ocultas completarem a estatística da mecânica quântica, elas devem ser não-locais. Para Kochen-Specker, as variáveis ocultas devem ser contextuais. No entanto, diferentemente da teoria de Bell, a teoria de KS possui uma lacuna: a precisão das medidas, como foi demonstrado por Meyer, 1999.

A precisão finita faz, na prática, é não realizar de fato a medida que almejamos, mas sim também uma classe de medidas gerais. As (OVP), fazem parte de um conjunto denso que possui características próprias. Dentro dessas características, existe um conjunto que possui uma teoria de VONC que reproduz sua estatística.

Esse fato sozinho não anula o trabalho de KS, já que, em princípio, sempre podemos excluir os efeitos causados por essas medidas dentro da desigualdade. Entretanto, o trabalho pioneiro de Meyer (1999), complementado por Kent (1999) e Clifton e Kent (2001) para uma revisão geral e sistemática do tema, nos leva a esses conjuntos densos que, nas palavras de Meyer, “anulam” a teoria de KS. Meyer, Kent e Clifton (MKC) não tinham como intenção serem defensores da validade da teoria de VONC.

Para muitos físicos, o fato de a teoria quântica poder ser expressa de forma mais elegante em uma linguagem radicalmente não clássica torna as demonstrações explícitas de sua não classicidade essencialmente redundantes. Este artigo não se dirige a eles, mas àqueles que, como nós, estão interessados no que podemos estabelecer com certeza sobre a questão. Como enfatizamos, não defendemos teorias de variáveis ocultas não-contextuais. (Clifton, R.; Kent, A., 2001, p. 12-13)

Mas sim diferenciar crenças teóricas de fatos bem estabelecidos, como aqui no caso é o da precisão finita.

MKC tem a preocupação de tentar mostrar possíveis vantagens computacionais quando utilizamos efeitos quânticos em comparação aos seus análogos clássicos. A precisão, nesses termos, é um recurso computacional. Isso se mostra, por exemplo, quando tratamos de computação clássica. Se tivéssemos números reais com precisão infinita, resolveríamos problemas NP-complete (*nondeterministic polynomial*) (Schönhage, 1979). Teríamos soluções também na mecânica estatística para problemas #P-hard (Freedman, 1998) quando levássemos em conta a precisão infinita. Já na possível computação quântica, só seria necessário polilogaritmos de bits para resolver problemas que possuem tempo polinomial em soluções clássicas (Shor, 1997).

Na seção 2, iremos inicialmente discutir o que é um conjunto denso e suas implicações quando se implementa uma medida na realidade. Depois, iremos mostrar o porquê da teoria

quântica poder violar as desigualdades não-contextuais. Finalizaremos com as implicações da anulação da teoria de KS.

## 2.1 MEDIDAS REAIS

Quando se trata de medidas reais, a precisão é finita e sempre implica na possibilidade de existir um conjunto denso que a representa. O conjunto denso, na topologia, é um conjunto no qual sempre existe, dentro de um limite, um elemento do conjunto denso. Isso é:

Definição 2.2: Dado um espaço métrico  $(X, d)$  e um subconjunto  $\mathcal{M} \subseteq X$ ,  $\mathcal{M}$  é dito denso em  $X$  se e somente se para todo elemento  $x \in X$ ,  $x$  é um ponto limite de  $\mathcal{M}$ , isso é, para qualquer  $r > 0$ ,  $\exists m \in \mathcal{M}$  tal que,  $m \in (x - r, x + r)$ . Isso é existe sempre um elemento de  $\mathcal{M}$  que pertence a qualquer intervalo na redondeza de  $x$ .

Um exemplo disso são os conjuntos dos racionais  $\mathbb{Q}$  que são densos na reta real  $\mathbb{R}$ , pois dado  $a < b$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  sempre existirá um  $q \in \mathbb{Q}$  tal que  $a < q < b$ .

A relevância desses conjuntos densos para quântica é que, quando tratamos de medidas reais, não há como um experimento diferenciar uma medida projetiva de uma outra medida projetiva próxima, ou ainda uma medida OVP. De fato, quando temos medidas próximas, como  $A$  e  $B$ , o máximo da diferença entre eles para um estado  $\rho$  adequado é dado pela diferença da norma:

$$|A - B| = \max_{\rho} |Tr(\rho A) - Tr(\rho B)| \text{ Eq. 2.1}$$

Do ponto de vista experimental o que conseguimos garantir é que estamos implementando medidas OVP próximas daquelas que queremos medir. De fato dado um conjunto de medidas projetivas  $\sum_i P_i = I$  e um  $r > 0$ , sempre existe um conjunto  $\mathcal{M} = \{M_i\}$ , com elementos respeitando o somatório, isso é  $\sum_i M_i = I$ , tal que  $|P_i - M_i| < r, \forall i$ . Em particular para um operador hermitiano  $O$  e  $r > 0$  existe  $M_O \in \mathcal{M}$ , com a mesma decomposição espectral que  $O$ , cujas probabilidades dos resultados das medidas  $M_O$  ficam entre  $r$  das probabilidades correspondentes de  $O$ .

A propriedade do conjunto denso dentro de medidas reais impõe um problema conceitual quando vamos tratar de VONC, como veremos na seção a seguir.



## 2.2 A VIOLAÇÃO DA DESIGUALDADE

A violação da desigualdade de Bell se deve aos efeitos da mecânica quântica quando associados aos estados emaranhados, e está intimamente ligada a localidade. Quando compreendemos o efeito da não-contextualidade a medidas separadas espacialmente, estamos lidando, de fato, com cenários de Bell, não há neste caso problema quando lidamos com o conjunto de medidas densas. Entretanto, quando tratamos de cenários em que não há a localidade como efeito existe um problema conceitual quando aplicamos as medidas densas a violação. Como no texto lidamos exclusivamente de medidas locais em velocidades não relativísticas, podemos excluir os efeitos de Bell do nosso cenário.

A violação da desigualdade não-contextual se deve pelo seguinte fato: os valores esperados da mecânica quântica não são acessados por apenas uma medida projetiva. Então, para que a diferença ocorra, temos que ter o mesmo projetor  $P_i$  em diferentes contextos, com medidas incompatíveis, para vários projetores diferentes. Isso é, vamos supor o conjunto de todas as medidas projetivas  $\mathcal{P} = \{P_i\}$ , e aplicarmos a **função verdade** a esses conjuntos:

$$v(P_i) = 1$$

$$\sum_i v(P_i) = 1, \text{ em que } \sum_i P_i = I.$$

Determinar um valor único a um observável  $O$ , com decomposição espectral de projeções  $\mathcal{P} = \{P_i\}$ , é equivalente a distinguir um único membro do conjunto de projeções e designar a ele o valor 1, enquanto se atribui aos demais projetores o valor 0.

Chamamos  $\sum_i P_i = I$  de resolução da identidade. Se a dimensão do espaço de Hilbert for maior que  $n > 2$  vemos, por Gleason (1957) e KS (Kochen; Specker, 1967), que não existe função verdade que complete a mecânica quântica. Para que uma teoria de variável oculta se mantenha viável, ela não pode determinar valores únicos para todos os observáveis.

Então existe um motivo pelo qual a contradição, e logo, o porquê existe a violação da desigualdade. Se pegarmos duas resoluções da identidade  $\sum_i P_i = I, P_i \in \mathcal{P}, \forall i$  e  $\sum_j P'_j = I, P'_j \in \mathcal{P}', \forall j$ , duas resoluções são compatíveis se  $[P_i, P'_j] = 0, \forall i, j$ . Então, se as várias resoluções da identidade geradas por  $\mathcal{P}$  são todas mutuamente compatíveis, podemos fechar o conjunto em produto de suas projeções e seus complementares:

$$P \cap Q = PQ \text{ e } P^C = I - P$$

Isso resulta em uma álgebra booleana, e a álgebra booleana sempre possui funções verdade. Mas, para dimensões maiores que  $n > 2$ , sempre se pode escolher diversos projetores que geram diferentes resoluções da identidade incompatíveis com projetores em comum, diminuindo o número de equações verdade, ao ponto de que elas não possuem solução (Clifton, R.; Kent, A., 2001).

Assumindo precisão infinita, pode-se construir uma teoria de variável oculta que designa valores às projeções. No entanto, para que isso aconteça, ela não é apenas função da variável oculta, mas também da resolução da identidade na qual a projeção é membro. Fisicamente isso significa que o valor medido da projeção depende de qual contexto ela está sendo medida.

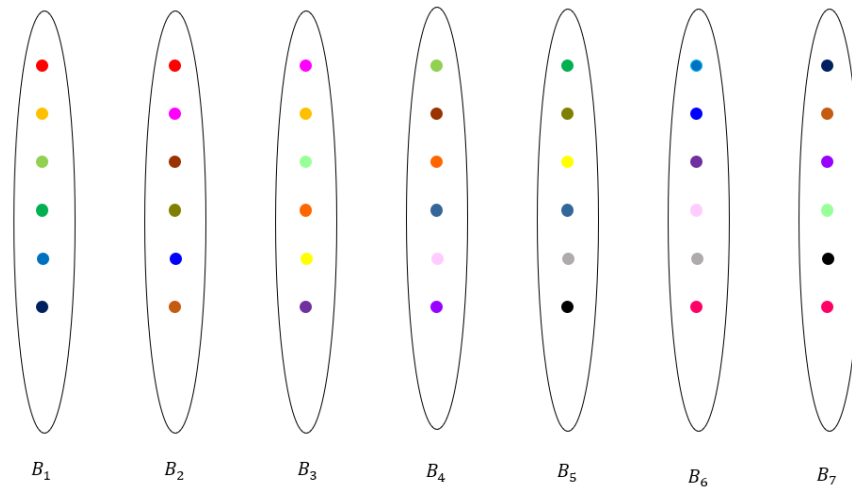
Entretanto, quando consideramos experimentos reais, segundo MKC, não somos forçados a variáveis ocultas não-contextuais, porque, por construção sempre podemos construir um subconjunto denso  $\mathcal{P}_d$  de projeções no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  e de dimensão  $n$ , tal que se admite função verdade em um conjunto denso contável de resoluções da identidade. Isso é possível por construção.

Mostra-se que existe um conjunto denso com a propriedade de que, se existem duas projeções compatíveis  $\mathcal{P}_d$  elas não são membras em duas resoluções incompatíveis, para qualquer projeção compatível, o que faz com que os conjuntos que formam os contextos fiquem disjuntos, como mostra a figura 12 usando o conjunto KS-21 como exemplo. Portanto, dessa forma exclui de maneira trivial os afeitos associados a contextualidade. O fato de os conjuntos serem disjuntos constitui numa álgebra booleana para o conjunto denso, isto é, possui uma teoria de VONC que reproduz suas estatísticas.

O que MKC implica é que, experimentalmente, com precisão finita não há como saber qual medida estamos de fato medindo. Temos apenas uma faixa de precisão de medidas que estão inevitavelmente dentro do conjunto denso de medidas. Dentro delas há a possibilidade de se existir um conjunto  $\mathcal{P}_d$  no qual se existe uma teoria de VONC que reproduz sua estatística. É com essa restrição que se cria uma lacuna na teoria de KS, podendo existir a possibilidade de se designar valores a observáveis de maneira não-contextual.

Resumindo a existência do conjunto denso, segundo MKC, implica que não há, de maneira prática, como excluir teoricamente as teorias de VONC de KS. Impossibilita a verificação experimental dos efeitos associados a contextualidade, “anulando” nas palavras de Meyer, 1999 o argumento de KS tanto para medidas projetivas quanto para medidas OVP (Kent, 1999) para quando consideramos, na lógica quântica, a precisão finita.

Figura 12: Representação do conjunto KS-21, no modelo de medidas densas  $\mathcal{P}_d$ .



Fonte: Próprio autor com adaptação da plataforma PowerPoint.

Legenda: Cada cor representa um vetor do conjunto KS-21. Cada conjunto  $B_i$  representa um contexto do KS-21. Trivialmente não há efeitos de contextualidade para esse conjunto.

### 2.3 UMA DESCRIÇÃO ALTERNATIVA

Usando a teoria operacional de Spekkens (Mermin, 1990) sabe-se que a maneira com que podemos interagir com o sistema são através de preparações e medidas (como se viu na seção 1.7). O papel da teoria operacional é meramente especificar probabilidades  $\Pr(i|P, M)$  de diferentes resultados  $i$ , dado um procedimento de medida  $M$  dado um procedimento de particular de preparação  $P$ .

Uma preparação é considerada equivalente a outra se reproduz a mesma estatística para todas as medidas possíveis. Da mesma forma, uma medida é considerada equivalente a outra se reproduz a mesma estatística para todas as preparações possíveis.

A teoria de MKC implica no seguinte fato na teoria operacional: Já que existe o conjunto denso em todas as medidas que fazemos na realidade, não existem duas medidas equivalentes, pois sempre irá existir entre uma medida e outra uma medida extremamente próxima, que por sua vez não temos como acessar. Não podemos nem somente isolar e usar apenas o conjunto denso de medidas ou só as medidas projetivas, pois na prática elas seriam indistinguíveis. O fato de, na mecânica quântica, o acesso à informação do sistema só nos ser mostrado através de estatísticas daquilo com que interagimos na natureza, e que não temos como saber a medida

exata que estamos aplicando, apenas o que ela reproduz dentro das distribuições de probabilidade, é a lacuna que a teoria do MKC explora quando trata da teoria de KS.

A não-localidade de Bell não é afetada por conta da imprecisão de medidas reais. No próprio artigo de Bell, J. S. 1964, ele mostra que, ao ter um par de partículas de  $spin-\frac{1}{2}$  formado de alguma maneira no estado singleto,  $|\Psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ , movendo-se livremente em direções opostas, as medições podem ser feitas por ímãs de Stern-Gerlach por exemplo, selecionando-se componentes de  $spin$   $\vec{\sigma}_1$  e  $\vec{\sigma}_2$ . Se a medida do componente  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ , em que  $\vec{a}$  é algum vetor unitário, resultar em  $+1$ , então, de acordo com a mecânica quântica, uma medição de  $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{a}$  resultará o valor  $-1$  e vice-versa. Mesmo que a medição esteja separada espacialmente uma da outra, a orientação do ímã não influencia no resultado obtido. Em uma teoria de variável oculta, em que o parâmetro  $\lambda$  especifica completamente o estado quântico, isto é, pré-determina o valor de uma medição. O resultado  $A$  da medida  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$  é então determinado por  $\vec{a}$  e  $\lambda$ , e o resultado  $B$  da medida  $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$  é determinada por  $\vec{b}$  e  $\lambda$ , então teríamos que:

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1.$$

Sendo  $\rho(\lambda)$  a distribuição de probabilidade de  $\lambda$ , então o valor esperado do produto de dois componentes  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$  e  $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$  é dado por:

$$\langle AB \rangle = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda).$$

Isso deve ser igual ao valor esperado da mecânica quântica, que para o estado singleto é dado por:

$$\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b} \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Bell, J. S. 1964 mostra que não é possível encontrar esse resultado em sua famosa desigualdade:

$$\langle BC \rangle + 1 \geq |\langle AB \rangle - \langle AC \rangle| \text{ Eq. 2.1}$$

Sendo  $\vec{c}$  um vetor unitário em uma direção qualquer, e  $C$  o resultado da medida  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{c}$ , em que é completamente especificado por  $\vec{c}$  e  $\lambda$ . Para que a desigualdade seja igual à previsão da mecânica quântica, então:

$$\vec{b} \cdot \vec{c} + 1 \geq |\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}| \text{ Eq. 2.2}$$

Isso entra em contradição com a teoria da mecânica quântica quando temos  $\vec{a} = \vec{b} = -\vec{c}$ , já que teríamos  $0 \geq 2$ . O fato é que no próprio artigo Bell, J. S. 1964 ele mostra que o valor da equação 2.2 não fica arbitrariamente próximos da equação 2.1 mesmo quando usamos  $\vec{a}'$  e  $\vec{b}'$  em que eles são arbitrariamente próximos a  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Ele mostra que se  $\overline{\langle A \rangle}$  é o valor esperado quando se mede a média dos valores  $\vec{a}'$  e  $\vec{b}'$  próximos de  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , o mesmo sendo válido para  $\overline{\vec{a} \cdot \vec{b}}$ , então:

$$\left| \overline{\langle A \rangle} + \overline{\vec{a} \cdot \vec{b}} \right| \leq \epsilon.$$

E supondo que para todo  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ :

$$\left| \overline{\vec{a} \cdot \vec{b}} - \vec{a} \cdot \vec{b} \right| \leq \delta.$$

Então temos que:

$$\left| \overline{\langle A \rangle} + \overline{\vec{a} \cdot \vec{b}} \right| \leq \epsilon + \delta.$$

Bell, J. S. 1964 chega na conclusão que:

$$4(\epsilon + \delta) \geq \sqrt{2} - 1.$$

Logo, a teoria de Bell, J. S. 1964, na desigualdade não-local, viola a desigualdade mesmo quando incluímos a imprecisão de medidas, que aqui está representada pelos vetores próximos  $\vec{a}'$  e  $\vec{b}'$ , que fazem parte do conjunto denso de medidas.

A maneira de contornar a teoria de MKC que é proposto por Spekkens (Mermin, 1990), é encontrar outra definição mais ampla de não-contextualidade que contemple a precisão finita de medidas. Então, quando estamos diante de procedimentos experimentais completamente diferentes que reproduzem as mesmas estatísticas de resultados e dizemos que elas são equivalentes a partir desse momento, existe uma série de restrições para o que podemos avaliar entre efeitos próximos sobre os dois procedimentos. Porém nenhuma restrição foi feita na teoria de MKC quando temos medidas infinitesimalmente próximas, mas que podem representar efeitos ou procedimentos completamente distintos.

Então a partir do fato que MKC não impõe limites a medidas não-contextuais em seu conjunto, iremos construir uma versão estendida do conceito de não-contextualidade que inclua medidas com precisão finita.

## SEÇÃO 3

### 3.1 MODELO QUÂNTICO $\epsilon$ -PRECISO

A seguir, vamos construir um modelo quântico  $\epsilon$ -preciso, proposto por Winter (Winter, 2014), que exige que elementos representando efeitos similares na teoria quântica sejam também similares. A equação 2.1 nos mostra que os efeitos da mecânica quântica possuem uma geometria graças ao operador norma, sendo este a maior distância entre os valores esperados de dois operadores no mesmo estado.

Consequentemente, experimentos podem fixar um efeito na faixa de erro restrito, a faixa de erro estatístico dessa norma. Para construir o modelo  $\epsilon$ -preciso, precisaremos de um conjunto  $\mathcal{E}$  de efeitos suficientemente próximo aos projetores.

Definição 3.1: Chamamos um **modelo quântico  $\epsilon$ -preciso** se, no conjunto de todas as medidas,  $X = \{P_i\}$ , em que  $P_i$  é o projetor associado ao resultado  $i$ , e a coleção de contextos  $\mathfrak{C} = \{C_i\}$ ,  $C \subset X$ , se para cada  $Q_i \in \mathcal{E}$ , sendo  $Q_i$  medidas OVP, que são  $\epsilon$ -próximas ao projetor  $P_i$ .

Isso significa que para cada projetor  $P_i$  sempre irá existir uma medida  $Q_i$ , de efeito similar ao projetor sendo este suficientemente próximo ao projetor.

Definição 3.2: Para cada  $C \in \mathfrak{C}$  e  $\epsilon > 0$ , existe uma coleção de  $Q_i^C \in \mathcal{E}$ , tal que  $\sum_{i \in C} Q_i^C = I$  e  $\|Q_i^C - P_i\| \leq \epsilon$ .

Ou seja, dentro do contexto, sempre irá existir uma medida densa pertencente ao contexto  $C$ , que pertence ao conjunto  $\mathcal{E}$  de efeitos próximos aos projetores, o que fecha o conjunto de projetores dentro de uma faixa de erro estatística, eliminando dessa forma a necessidade de medidas com precisão infinita, como são as medidas projetivas.

Aqui o que foi feito foi incluir a precisão finita a teoria de variável oculta não-contextual. O que se está tentando ser feito aqui é a ideia de que, tanto na teoria clássica, como na teoria quântica, qualquer estrutura de contexto de um conjunto abstrato de resultados de medidas requer a introdução de uma métrica nas entidades do modelo (preparação, operação e transformação) que refletem um grau de aproximação. O modelo que se é usado para formalizar essa relação é o **modelo ontologicamente fiel** de Winter, A., 2014.

Definição 3.3 O **modelo não-contextual  $\epsilon$ -ontologicamente fiel** de Winter, A., 2014, para o hipergrafo de compatibilidade  $\Gamma$ , para cada  $C \subset X$ , consiste em uma família de variáveis aleatórias das funções verdade,  $v_C(P_i) \in \{0,1\}$ ,  $i \in C \in \mathfrak{C}$ , tal que:

- i.  $\forall C \in \mathfrak{C}, \sum_{i \in C} v_C(P_i) = 1$ .
- ii.  $\forall C, C' \in \mathfrak{C}, \forall i \in C \cap C'$  a probabilidade de não coincidir os resultados  $\Pr\{v_C(P_i) \neq v_{C'}(P_i)\} \leq \epsilon$ .

O que essas equações significam é que, para cada contexto dentro do cenário, a família de funções verdade, é um modelo clássico de variável oculta das medidas que prevê os resultados de  $C$ . Os modelos para o “mesmo” resultado  $i$ , representados pelo mesmo projetor  $P_i$ , ocorrendo em diferentes contextos  $C$  e  $C'$ , quase coincidem.

O método criado pelo Winter, A., 2014 é minimamente invasivo ao método criado por KS, já que não diz nada sobre o experimento em si que está sendo feito para realizar a medida. Em particular, não implica também nenhum histórico, ou dinâmica da variável oculta. Entretanto, ao fazer isso, não assumindo efeito reverso a variável oculta, no modelo ontologicamente fiel  $\epsilon$ -preciso, nós temos que para  $P_i \in C \cap C'$ :

$$\Pr\{v_{C'}(P_i) \neq c \mid v_C(P_i) = c\} \leq \frac{\epsilon}{\Pr\{v_C(P_i) = c\}}$$

Isso significa que, a menos que a probabilidade de dar o resultado  $i$  do projetor associado,  $P_i$ , no contexto  $C$  seja pequena, uma consulta subsequente do mesmo resultado no contexto  $C'$  tem probabilidade alta produzir o mesmo resultado. Essa equação surge da definição 3.3, na qual existe com chance pequena de que o resultado de uma mesma medida em diferentes contextos produza resultados diferentes. Isso mostra que a teoria ontológica fiel na teoria de variável oculta implica uma versão aproximada da repetibilidade da medida, mesmo no nível da mesma medida em diferentes contextos.

O que se pode ver na referência (Cañas *et al.*, 2014), considerando condições de reais do experimento, é que as probabilidades medidas correspondem a elementos projetivos e elementos não-projetivos (OVP) com uma frequência média nessa referência de  $\bar{\epsilon} = 0.0151 \pm 0.0004$ . O que o modelo quântico  $\epsilon$ -preciso indica para essa situação é que os elementos OVP que aparecem são semelhantes aos elementos projetivos que inicialmente se pretendia



implementar, respeitando o operador norma. Após o cálculo da média de erros se foi atribuído um novo valor de referência na desigualdade não-contextual. veremos a seguir por que desse método ser o suficiente para demonstrar a distância entre os valores não-contextuais e o quântico na prática.

### 3.2 DE APROXIMADO PARA EXATO VONC

A ideia de criar o modelo clássico não-contextual ontologicamente fiel é estabelecer uma teoria de KS mais robusta, permitindo dessa forma medidas com precisão finita. Anteriormente, a teoria de variável oculta não-contextual atribuía ao projetor  $P_i$  os valores na função verdade a esse projetor  $v(P_i) = \{0,1\}$ . Agora, com a teoria aproximada no modelo não-contextual ontologicamente fiel, a atribuição de valores deve respeitar a geometria do espaço dos projetores, bem como as das variáveis aleatórias, o que significa, para quântica, respeitar o operador norma Eq. 2.1, na variável oculta pela probabilidade de serem distintos.

A aproximação feita na seção 3.1 pode ser eliminada, ao preço de ter, com probabilidade pequena, nenhum resultado de medida no conjunto  $X$ . Podemos construir um modelo de variável oculta não-contextual ontologicamente fiel de Winter, A., 2014 fazendo uma função verdade da seguinte forma:

$$t(P_i) := \prod_{P_i \in C \in \mathcal{C}} v_C(P_i). \text{ Eq 3.1}$$

Exemplo 3.1:

Suponha que tenhamos um cenário de compatibilidade da seguinte forma:

- I.  $X = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$
- II.  $C_i = \{M_i, M_{i+1}\}, i \text{ mod } 4.$
- III.  $O = \{0,1\}.$

Considerando a probabilidade de termos resultados diferentes iguais a  $\epsilon$ , e  $k_i$  o número de vezes que um projetor aparece em diversos contextos. Nesse cenário de compatibilidade, a função  $t(P_i)$  seria escrita da seguinte forma:

$$t(M_i) = v_{C_{i-1}}(M_i)v_{C_i}(M_i), i \text{ mod } 4.$$

Ou seja, para esse cenário de compatibilidade teríamos  $k_i = 2$ , e temos a seguinte probabilidade:

$$\Pr\{v_C(M_i) \neq t(M_i)\} \leq (k_i - 1)\epsilon = \epsilon.$$

Isso é, a probabilidade de termos resultados diferentes para  $t_i$  e para  $v_C$  é justamente a probabilidade de termos resultados diferentes entre contextos diferentes, isso é,  $\Pr\{v_{C_i}(M_i) \neq v_{C_j}(M_i)\} = \epsilon, \forall j \neq i$ .

Exemplo 3.2:

Suponha que tenhamos um cenário de compatibilidade da seguinte forma:

- I.  $X = \{M_i\}, i = 1, \dots, n$ .
- II.  $C_i = \{M_{i-1}, M_i, M_{i+1}\}, i \text{ mod } n$ .
- III.  $O = \{0,1\}$ .

Nesse exemplo temos  $k_i = 3$ , em que a mesma medida  $M_3$  está presente nos contextos  $C_1, C_2$  e  $C_3$ , teríamos que a probabilidade de termos um  $t(M_3) = v_{C_1}(M_3)v_{C_2}(M_3)v_{C_3}(M_3) \neq v_{C_1}(M_3)$ , seria de:

$$\Pr\{v_{C_1}(M_1) \neq v_{C_2}(M_1)\} + \Pr\{v_{C_1}(M_1) \neq v_{C_3}(M_1)\} \leq 2\epsilon.$$

Extrapolando os resultados para  $k_i = n$ , teríamos

$$\sum_{j \neq i} \Pr\{v_{C_i}(M_i) \neq v_{C_j}(M_i)\} \leq (n - 1)\epsilon.$$

Teorema 3.1: Winter, A., 2014, A coleção,  $t(P_i)$ , como na equação 3.1 representa um modelo de variável oculta não-contextual, para todo  $P_i \in X$ :

$$\Pr\{v_C(P_i) \neq t(P_i)\} \leq (k_i - 1)\epsilon.$$

E,  $t(P_i)$ , representa um modelo de variável oculta pois:

$$\sum_{P_i \in \mathcal{C}} t(P_i) \leq \sum_{P_i \in \mathcal{C}} v_C(P_i) = 1.$$

Ele é menor ou igual ao modelo de VONC pois, existindo a possibilidade de termos resultados diferentes, em diferentes contextos da mesma medida, o valor de  $t(P_i)$  é decrescido nesses momentos, sempre sendo menor, e é igual quando  $\epsilon = 0$ .

Usando a equação 3.1, então o teorema 3.1 significa que:

$$v_{C_i}(P_i) \leq t(P_i) + (k_i - 1)\epsilon. \text{ Eq. 3.2.}$$

Como mostraremos no próximo teorema, a somatória de  $t(P_i)$  é menor que a do modelo não-contextual ontologicamente fiel, mas a diferença entre eles não é maior do que  $(k_i - 1)\epsilon$ , já que os dois são apenas diferentes na medida em que uma mesma medida é medida em diferentes contextos. Logo a soma do  $t(P_i) + (k_i - 1)\epsilon$  é maior ou igual ao valor não-contextual.

**Teorema 3.2:** A desigualdade não contextual, em que  $k_i$  é novamente o número de vezes que um projetor aparece em diversos contextos, e  $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$  é uma constante real positiva, então temos:

$$\sum_i \lambda_i v_{C_i}(P_i) \leq \beta_{cl} + \epsilon \sum_i \lambda_i (k_i - 1). \text{ Eq 3.3.}$$

Para chegar a essa equação 3.3 basta pegar a equação 3.2 e somar em  $i$ . Vemos que o valor da somatória a esquerda é exatamente o  $\beta_{cl}$ , o somatório de  $t(P_i)$  ele é sempre menor ou igual ao  $\beta_{cl}$ , e o valor acrescido é o segundo termo no somatório da direita.

A equação 3.3 é o principal resultado de Winter, A., 2014 pois ele conseguiu englobar a precisão finita de medidas, dentro do modelo quântico  $\epsilon$ -preciso pelo operador norma, e pelo modelo de variável oculta pela probabilidade de serem diferentes. Isso resultou em uma nova cota clássica,  $\beta_{cl}$ , em que se acrescenta o valor referente a frequência com a qual se tem um “erro” experimental. Perceba que, em nenhum momento, foi feita alusão a qualquer tipo de erro na parte matemática de MKC, conforme o próprio autor cita.

Desde que o argumento MKC foi apresentado, e após o debate subsequente, surgiram outras tentativas de lidar com a objeção da precisão finita. Ignorando aquelas que buscavam encontrar algum tipo de falha no MKC [...], consideramos mais interessantes aquelas que introduzem alguma propriedade adicional das variáveis ocultas que deveria garantir a testabilidade experimental. (Winter, A., 2014, p. 7)

Observamos que existe um limite para o valor desse erro, a fim de comprovar os efeitos da contextualidade na configuração experimental. Isso demonstra a diferença entre o modelo quântico e o modelo clássico no que se refere as frequências de 0 ou 1 medidos no experimento. Portanto, para que ocorra de fato uma prova conceitual da diferença de qual modelo está se trabalhando, para  $\lambda_i$  e  $k_i$  como definidos no teorema 3.2, temos que no limite:

$$\beta_{cl} + \epsilon \sum_i \lambda_i (k_i - 1) < \beta_{qu}. \text{ Eq. 3.4.}$$

Isso significa que o valor do maior erro permitido,  $\epsilon$ , depende exclusivamente da estrutura do cenário de compatibilidade com o qual se está trabalhando. Vamos mostrar alguns exemplos a seguir.

### Exemplo 3.3

Uma prova famosa da violação da desigualdade é a violação de KCBS (Klyachko, Can, Binicioğlu e Schumovsky) na referência Klyachko, A. A. *et al.*, 2008, em que o hipergrafo de compatibilidade consiste em:

- I.  $X = \{M_0, M_1, M_2, M_3, M_4\}$ .
- II.  $\mathfrak{C} = \{C_i\}$ , tal que  $C_i = \{M_i, M_{i+1}\}, i \text{ mod } 4$ .
- III.  $O = \{0,1\}$ .

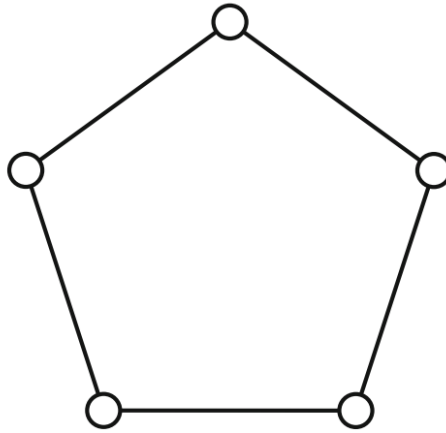
Como mostra a figura 13. Mostra-se que para esse cenário,  $\beta_{cl} = 2$ ,  $\beta_{qu} = \sqrt{5}$ , sendo  $k_i = 2$  e  $\lambda_i = 1$ .

O conjunto consiste em 5 projetores de dimensão  $n = 3$ , com exatamente 2 elementos em cada contexto. Usando a equação 3.4 para expressar o máximo de erro experimental que podemos achar para verificar os efeitos de contextualidade.

$$2 - \epsilon \sum_{i=1}^5 \lambda_i (k_i - 1) < \sqrt{2}.$$

$$\epsilon < \frac{\sqrt{5} - 2}{5} \approx 0.047.$$

Figura 13: Hipergrafo de compatibilidade do cenário KCBS.



Fonte: Amaral; Cunha, 2018, p. 24.

### Exemplo 3.3:

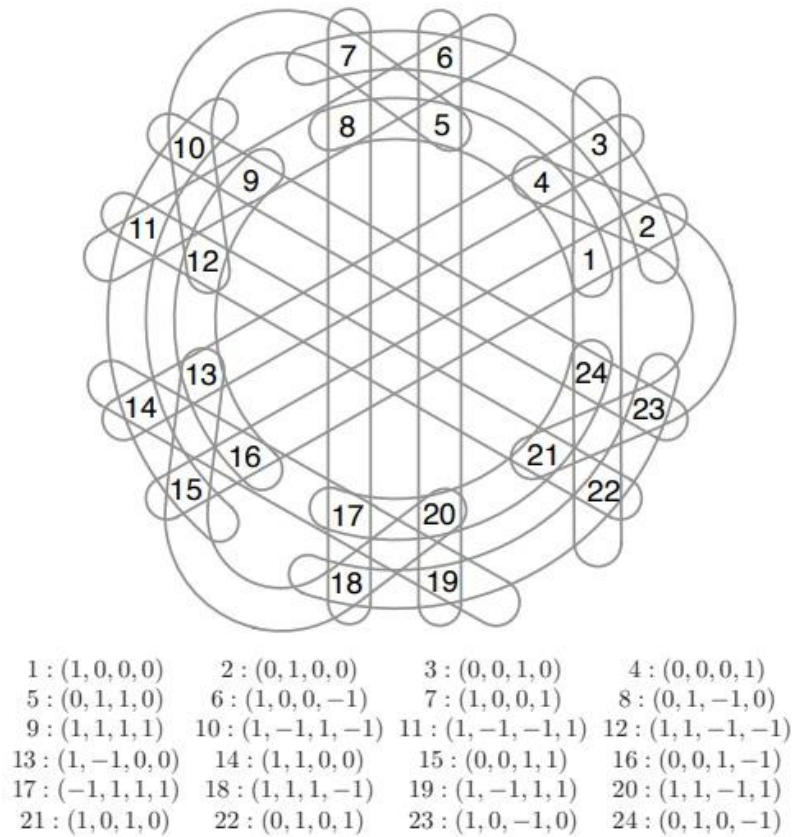
Uma prova contextual da quântica é o quadrado de *Peris-Mermin* (Mermin, 1993; Peres, 1993; 1996). Na referência Cubitt *et al.* (2010), mostra-se que o  $\beta_{cl} = 5$  e que o  $\beta_{qu} = 6$ , sendo o  $k_i = 4$ , como mostra a figura 14.

O conjunto consiste em 24 projetores unidimensionais em  $\mathbb{C}^4$ , formando 24 contextos com 4 elementos em cada contexto. Usando a equação 3.4 para expressar o máximo de erro experimental que podemos achar para verificar os efeitos de contextualidade, sabendo que o  $\lambda_i = 1$ :

$$5 - \epsilon \sum_{i=1}^{24} \lambda_i (k_i - 1) < 6 \therefore \epsilon < \frac{6 - 5}{72} \approx 0.0138.$$

Isso demonstra que, para que um experimentalista consiga comprovar existência de um efeito contextual em seu experimento ao testar os vetores que estão sendo implementados, o maior erro que ele pode encontrar é de  $\epsilon \approx 0.0138$ .

Figura 14: Conjunto KS de 6 bases para  $\mathbb{C}^4$ , uma base por linha.



Fonte: Cubitt *et al.*, 2010, p. 03.

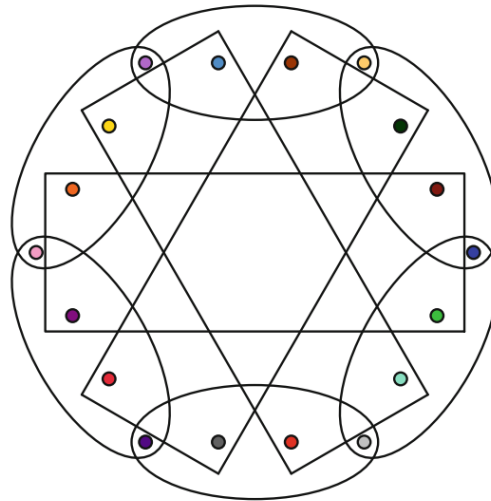
Legenda: Imagem consiste em um conjunto KS de 6 bases para  $\mathbb{C}^4$ , uma base por linha. Os vetores são representados por quadruplas rotuladas pelos números. Valores de normalização estão sendo omitidos para facilitar o entendimento.

### Exemplo 3.4

Para o conjunto KS-18, em que temos 18 projetores unidimensionais, em  $\mathbb{C}^4$ , em que cada vetor do conjunto está em exatamente dois contextos, conforme a figura 15. Ou seja,  $k_i = 2$ . Como mostra a referência Cabello, A. 1996. Para este caso temos que  $\lambda_i = 1$ ,  $\beta_{cl} = 4$  e  $\beta_{qu} = 4,5$ . Portanto, para esse caso, temos:

$$4 - \epsilon \sum_{i=1}^{18} \lambda_i (k_i - 1) < 4,5 \therefore \epsilon = \frac{4,5 - 4}{18} \approx 0.0278.$$

Figura 15: Hipergrafo de compatibilidade do conjunto KS-18.



Fonte: Amaral; Cunha, 2018, p. 115.

Logo o maior erro para se verificar os efeitos de contextualidade é  $\epsilon \approx 0.0278$ .

#### Exemplo 3.4

Para o conjunto KS-21, temos 21 projetores unidimensionais, em  $\mathbb{C}^6$ , em que cada vetor do conjunto está em exatamente dois contextos, conforme mostra a figura 5. Ou seja,  $k_i = 2$ . No caso do exemplo usado como achado na referência Lisonêk, P. *et al.*, 2014, temos que  $\lambda_i = 2$ ,  $\beta_{cl} = 6$  e  $\beta_{qu} = 7$ . Portanto, para esse caso, temos:

$$6 - \epsilon \sum_{i=1}^{21} \lambda_i (k_i - 1) < 7 \therefore \epsilon = \frac{7 - 6}{42} \approx 0.0238.$$

Isso mostra que o maior erro experimental realizável para que se prove a diferença entre os valores contextuais e os não-contextuais é de  $\epsilon \approx 0.0238$ . Na referência de Cañas *et al.*, 2014, o artigo propõe o seguinte conceito, já que existe uma probabilidade de o valor ser medido de maneira “equivocada” a frequência em que isso ocorre é de  $\bar{\epsilon} = 0.0151$ . Portanto, na desigualdade não-contextual temos que considerar o pior cenário possível, que seria, para esse caso, medidas OVP, em que cada medida seria atribuída o valor exatamente igual a 1. Vimos no seção 1.11 que, no modelo não-perturbante, o maior valor alcançado pela desigualdade é o

valor algébrico da desigualdade. Para esse caso apresentado, esse valor é 42. Portanto, o novo valor da desigualdade seria:

$$6(1 - \bar{\epsilon}) + 42\bar{\epsilon} \approx 6.55.$$

Sendo 6.55 o valor arredondado para cima, vemos que  $6(1 - \bar{\epsilon})$  é justamente a frequência  $(1 - \bar{\epsilon})$  em que temos medidas projetivas, que está conectada com o modelo de desigualdade não-contextual pelo valor 6. Já o valor 42 apareceria com frequência  $\bar{\epsilon}$ , que seria o modelo de desigualdade não-perturbante no sistema. Mostrando que, de fato, existe uma diferença entre o modelo clássico, mesmo sendo considerado a imprecisão de medidas, que o modelo quântico consegue superar. Portanto, a contextualidade é um efeito mensurável experimentalmente, que pode ser validado seguindo os critérios apresentados nessa dissertação.



## CONCLUSÃO

Os teoremas de impossibilidade tiveram um grande impacto nos fundamentos da física, não apenas porque os conjuntos de Kochen-Specker (KS) e de Bell fornecem uma prova por contradição da incompatibilidade entre a teoria quântica e o realismo não-contextual e o realismo local, respectivamente, mas também porque são importantes para a construção de testes experimentais.

Os conjuntos KS, em particular, têm potencial de aplicação no processamento de informação quântica. Eles podem ser usados para jogos não-locais (Renner; Wolf, 2004; Scarpa; Severini, 2012), jogos com vantagem independente do estado quântico (D'Ambrosio *et al.*, 2013) distribuição de chave quântica segura contra ataques baseados nas simulações clássicas de complementaridade (Cabello *et al.*, 2011) e, como já demonstramos na referência (Cañas *et al.*, 2014), para atestar a dimensão de medições baseadas nos conjuntos de KS.

Em seus artigos, MKC (Meyer, 1999; Clifton; Kent, 2001) mostraram uma falha no desenvolvimento da teoria de KS e afirmaram que os efeitos associados à contextualidade não poderiam ser verificados por meio de experimentos realizados, devido à precisão finita de medição. Isso indicaria que os efeitos observados nos experimentos poderiam não ser necessariamente efeitos da contextualidade que o modelo quântico apresenta, mas sim apenas um efeito da imprecisão das medidas. Isso condenaria, em todos os casos, qualquer aplicação experimental dos conjuntos de KS no processamento de informação quântica.

O que mostramos aqui, por meio do modelo não-contextual ontologicamente fiel de Winter, não é uma prova da falha da teoria desenvolvida por MKC. Em vez disso, é uma construção que contorna e engloba as imperfeições associadas às medições no sistema, de forma a mostrar que teorias não-contextuais, mesmo com imprecisão de medidas, não conseguem reproduzir as estatísticas da quântica. Uma direção futura possível é associar o entendimento das imperfeições de medidas em teorias operacionais, como introduzir as imprecisões nas medidas, preparações e transformações, e como isso afetaria a estatística contextual e não-contextual. Além disso, é importante avaliar até que ponto os efeitos associados aos conjuntos de KS com imprecisão de medidas apresentam uma vantagem no processamento da informação quântica, quando comparados a modelos clássicos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMSKY, S.; BRANDENBURGER, A. The sheaf-theoretic structure of non-locality and contextuality. **New Journal of Physics**, New York, v. 13, p. 1-33, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1102.0264>.

AMARAL, B.; CUNHA, M. T. **On Graph Approaches to Contextuality and their Role in Quantum Theory**. Edinburgh: Springer Cham, 2018 Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-93827-1>.

BARRETT, J. Information processing in generalized probabilistic theories. **Phys. Rev.**, v. 75, p., 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.75.032304>.

BELL, J. S. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. **Physics Physique Физика**, [S.L.], v. 1, n. 3, p. 195-200, 1 nov. 1964. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physicsphysiquefizika.1.195>.

BELL, J. S. On the problem of Hidden variables in quantum mechanics. **Rev. Mod. Phys.** v. 38, p. 447-452, 1966. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.38.447>.

BORN, M. Z. Quantenmechanik der Stoßvorgänge. **Z. Physik** v. 37, p. 863–867, 1926. <https://doi.org/10.1007/BF01397477>.

BOHR, Niels. **Atomic Theory and the Description of Nature**. Cambridge: Cambridge University Press, 1934.

BOHR, Niels. On the notions of causality and complementarity. **Dialectica**, [s. l.], v. 2, ed. 3–4, p. 312–319, 1948. doi:10.1111/j.1746-8361.1948.tb00703.x

BUSCH, Paul; LAHTI, Pekka J.; MITTELSTAEDT, Peter. The Quantum Theory of Measurement. **The Quantum Theory Of Measurement**, [S.L.], p. 27-98, 1991. Springer Berlin Heidelberg. [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-13844-1\\_3](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-13844-1_3).

BUSCH, Paul; LAHTI, Pekka J.. The standard model of quantum measurement theory: history and applications. **Foundations Of Physics**, [S.L.], v. 26, n. 7, p. 875-893, jul. 1996. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1007/bf02148831>.

CABELLO, Adán. A Proof with 18 Vectors of the Bell-Kochen-Specker Theorem. **New Developments On Fundamental Problems In Quantum Physics**, [S.L.], p. 59-62, 1997. Springer Netherlands. [http://dx.doi.org/10.1007/978-94-011-5886-2\\_8](http://dx.doi.org/10.1007/978-94-011-5886-2_8).

CABELLO, A. *et al.* Hybrid ququart-encoded quantum cryptography protected by Kochen-Specker contextuality. **Phys. Rev. A**, Whashington, v. 84, n. 3, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.030302>.

CAÑAS, G. *et al.* Applying the Simplest Kochen-Specker Set for Quantum Information Processing. **Physical Review Letters**, v. 113, n. 9, 2014. Doi: 10.1103/PhysRevLett.113.090404.

CLIFTON, R.; KENT, A. Simulating quantum mechanics by non-contextual hidden variables. **The Royal Society**, London, v. 456, p. 2101-2114, 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1098/rspa.2000.0604>.

CUBITT, T. S. *et al.* Improving Zero-Error Classical Communication with Entanglement. **Phys. Rev. Lett.**, v. 104, n. 23, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.230503>.

D'AMBROSIO, V. *et al.* Experimental implementation of a Kochen-Specker set of quantum tests. **Phys. Rev.** v. 3, n. 1, 2013. Disponível em: <https://journals.aps.org/prx/abstract/10.1103/PhysRevX.3.011012>.

DE BROGLIE, L. Recherches sur la théorie des Quanta. **Physique**, v. 17, n. 1, p. 1–121, 1927. Disponível em: [https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00006807/document\\_2](https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00006807/document_2).

EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?. **Phys. Rev.** New Jersey, v. 47, n. 10, p. 777-780, 1935. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777>.

ENGLERT, Berthold-Georg; WÓDKIEWICZ, Krzysztof. Intrinsic and operational observables in quantum mechanics. **Physical Review A**, [S.L.], v. 51, n. 4, p. R2661-R2664, 1 abr. 1995. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physreva.51.r2661>.

FAYE, J. Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics. **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**, Winter Edition, 2019. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/entries/qm-copenhagen/>.

FINE, A.; RYCKMAN, T. A. The Einstein-Podolsky-Rosen Argument in Quantum Theory. **The Stanford Encyclopedia of Philosophy** – Summer Edition, 2020. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/entries/qt-epr/>.

FREEDMAN, M. H. Topological views on computational complexity. **Doc. Math. J.**, Berlin, p. 453–464, 1998. Disponível em: <https://eudml.org/doc/224467>.

FOWLER, R. The Structure of the Atom. **Nature**, n. 111, p. 523–526, 1923. <https://doi.org/10.1038/111523a0>.

GLEASON, A. Measures on the closed subspaces of a Hilbert space. **J. Math. Mech.**, v. 6, n. 6, p. 885–893, 1957. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/24900629>.

HEISENBERG, W. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. **Z. Physik**, n. 43, p. 172–198, 1927. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01397280>.

KENT, A. Noncontextual hidden variables and physical measurements. **Phys. Rev. Lett.** v. 83, n. 19, p. 3755-3757, 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.3755>.

KERNAGHAN, M.; PERES, A. Kochen-Specker theorem for eight-dimensional space. **Phys. Lett. A**, v. 198, n. 1, p. 1-5, 1995. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(95\)00012-R](https://doi.org/10.1016/0375-9601(95)00012-R).

KLYACHKO, Alexander A.; CAN, M. Ali; BINICIOĞLU, Sinem; SHUMOVSKY, Alexander S.. Simple Test for Hidden Variables in Spin-1 Systems. **Physical Review Letters**, [S.L.], v. 101, n. 2, p. 020403-1-020403-4, 11 jul. 2008. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.101.020403>.

KOCHEN, S.; SPECKER, E. P. The problem of hidden variables in quantum mechanics. **Journal of Mathematics and Mechanics**, v. 17, p. 59-87, 1967. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1512/iumj.1968.17.17004>.

LISONĚK, P. *et al.* Kochen-Specker set with seven contexts. **Phys.Rev.**, v. 89, n. 4, 2014. Doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.042101>.

MALIN, Shimon. Delayed-Choice Experiments and the Concept of Time in Quantum Mechanics. **Time, Temporality, Now**, [S.L.], p. 43-52, 1997. Springer Berlin Heidelberg. [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-60707-3\\_4](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-60707-3_4).

MERMIN, N. D. Simple unified form for the major no-hidden-variables theorems. **Phys. Rev. Lett.**, New York, v. 65, n. 27, p. 3373-3376, 1990. Doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.65.3373>.

MERMIN, N. D. Hidden variables and the two theorems of John Bell. **Rev. Mod. Phys.**, v. 65, n. 3, p. 803-815, 1993. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.65.803>.

MEYER, D. A. Finite precision measurement nullifies the Kochen-Specker Theorem. **Phys. Rev. Lett.** v. 83, n. 19, p. 3751-3754, 1999. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.3751>.

NIELSEN, Michael A.; CHUANG, Isaac L. Quantum Computation and Quantum Information. **10Th Anniversary Edition**, [S.L.], p. 90-93, 5 jun. 2012. Cambridge University Press. <http://dx.doi.org/10.1017/cbo9780511976667>.

PERES, A. Incompatible results of quantum. **Phys. Lett. A**, v. 151, n. 3, p. 107-108, 1990. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(90\)90172-K](https://doi.org/10.1016/0375-9601(90)90172-K).

PERES, A. Two simple proofs of the Kochen-Specker theorem. **Journal of Physics**. v. 24, 1991. Doi: 10.1088/0305-4470/24/4/003.

PERES, A. **Quantum Theory: Concepts and Methods**. Berlim: Springer, 1993.

PERES, A. Generalized KochenSpecker Theorem. **Found. Phys.** [s. l.], v. 26, n. 6, p. 807-812, 1996. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02058634>.

PERES, Asher; TERNO, Daniel R. Quantum information and relativity theory. **Reviews Of Modern Physics**, [S.L.], v. 76, n. 1, p. 93-123, 6 jan. 2004. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/revmodphys.76.93>.

RENNER, R.; WOLF, S. Quantum pseudo-telepathy and the kochen-specher theorem. **IEEE International Symposium on Information Theory**, Chicago, p. 322, 2004. Doi: 10.1109/ISIT.2004.1365359.

SCARPA, G.; SEVERINI, S. Kochen-Specker sets and the rank-1 quantum chromatic number. **IEEE Trans. Inf. Theory**, [s. l.], v. 58, n. 4, p. 1-12, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/TIT.2011.2178018>.

SCHONHAGE, A. On the power of random access machines. *In*: MAURER, H. A. (eds.). Automata, Languages and Programming (p. 520–529). **Lecture Notes in Computer Science**, v. 71, Berlin, 1979. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/3-540-09510-1\\_42](https://doi.org/10.1007/3-540-09510-1_42).

SHOR, P. W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. **SIAM J. Comput.**, v. 26, p. 1484–1509, 1997. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/S0097539795293172>.

SPEKKENS, R. W. Contextuality for preparations, transformations, and unsharp measurements. **Phys. Rev.** v. 71, n. 5, 2005. Disponível em: <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.71.052108>.

WINTER, A. What does an experimental test of quantum contextuality prove or disprove. **Journal Physics A**, Barcelona, v. 47, p. 01-09, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/42/424031>.

ZIEGLER, Günter M.. Lectures on Polytopes. **Graduate Texts In Mathematics**, [S.L.], p. 1-23, jul. 1995. Springer New York. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4613-8431-1>.