

SBI-IFUSP



305M810T3509

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

Caracterização Topológica de Atratores: O Circuito de Chua

Dariel Mazzoni Maranhão



*Dissertação de Mestrado submetida
ao Instituto de Física da Universi-
dade de São Paulo.*

Banca Examinadora:

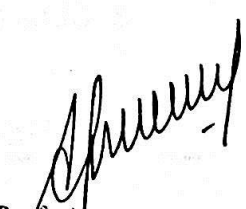
Prof. Dra. Carmen Pimentel C. do Prado - IFUSP (orientadora)

Prof. Dr. Ibere Luiz Caldas - IFUSP

Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana - UFPR

Carmen P. C. do Prado

São Paulo
2001


Prof. Armando Corbani Ferraz
residente da Comissão de Pós Graduação

data da defesa 20/03/01

530.155352

M311c

M

ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Maranhão, Dariel Mazzoni

Caracterização Topológica de Atratores: O Circuito
de Chua. São Paulo, 2001.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Geral.

Orientador: Profa. Dra. Carmen Pimentel C. do Prado
Área de Concentração: Física da Matéria Condensada

Unitermos: 1. Caos; 2. Dinâmica Simbólica;
3. Circuito de Chua.

USP/IF/SBI-021/2001

- Isso tinha de acontecer, Don?

- Não...- disse ele, numa voz fraca, mal respirando.

- Mas acho... gosto do drama...

- Bem, vamos andando! Cure-se! Com o pessoal que vem chegando, vamos ter que voar muito!

Mas enquanto brincava com ele, a despeito de toda sua sabedoria e compreensão da realidade, o meu amigo Donald Shimoda caiu em direção ao botão da gasolina e morreu.

Ouvi um tumulto, o mundo tombou e escorregi pelo lado da fuselagem rasgada para o capim vermelho e molhado. Parecia-me que o peso do Manual no meu bolso me inclinava para o lado, e quando bati em terra ele caiu, o vento lentamente folheando suas páginas.

Apanhei-o, sem forças. Será assim que termina, pensei, será que tudo que um Mestre diz não passa de um amontoado de palavras bonitas que não o podem salvar do primeiro ataque de um cão danado?

Tive de ler três vezes antes de conseguir acreditar que fossem aquelas as palavras na página.

*Tudo
neste livro
pode estar
errado.*

Extraído de: *Manual do Messias, Lembretes para a Alma Avançada.*

Richard Bach, *Ilusões: As Aventuras de um
Messias Indeciso.*

Este trabalho é dedicado a duas pessoas que mudaram para sempre minha vida: Silvana, minha esposa, e a pequena Júlia, minha filha, que já não está entre nós.

Agradecimentos

À Profa. Dra. Carmen Pimentel Cintra do Prado, orientadora, sem a qual este trabalho não existiria.

Ao CNPq pelo indispensável apoio financeiro.

Aos Drs. Claudio Shida e Nestor Oiwa pelo apoio em momentos difíceis.

Aos meus pais e irmãos.

Aos colegas e amigos pelo apoio demonstrado.

Este trabalho foi elaborado inteiramente com “software” de livre distribuição. Agradeço a toda a comunidade desenvolvedora.

Resumo

Neste trabalho a dinâmica caótica presente no sistema de equações diferenciais que descrevem o circuito de Chua é caracterizada através de uma análise topológica para dois atratores presentes neste circuito: o atrator espiral e o atrator conhecido como "double-scroll". Iniciamos estudando a simetria existente nas equações que definem o circuito, suas consequências no diagrama de bifurcações e na bacia de atração de três outros atratores coexistentes no circuito.

Aplicamos diferentes técnicas de localização de órbitas periódicas instáveis e construímos mapas de primeiro retorno, codificando simbolicamente os conjuntos de órbitas periódicas instáveis imersas nos atratores espiral e "double-scroll". Esses conjuntos de órbitas periódicas são organizados hierarquicamente através de sua representação em planos simbólicos. O estudo do conjunto de órbitas periódicas identificadas no atrator espiral, juntamente com mapas de primeiro retorno, indicam a existência de uma órbita homoclínica na evolução dinâmica do circuito de Chua.

Propomos também modelos geométricos para o fluxo que gera cada um dos atratores e apresentamos moldes topológicos consistentes com esses modelos. Os moldes topológicos foram testados através da comparação de um invariante topológico, o número de elos. O número de elos obtido diretamente das órbitas extraídas do atrator concorda, em ambos os casos, com aquele obtido a partir das órbitas previstas pelo molde topológico.

Abstract

In this work the chaotic dynamic present in the differential equations that describe the Chua's circuit is typified through a topological analysis of two attractors present in this circuit: the spiral-like and the double-scroll. We shall start by studying the symmetry existing in the equations that describe the circuit, its consequences in the bifurcation diagram and in the basin of attraction of three other attractors coexisting in the circuit.

We applied different techniques for the identification of the unstable periodic orbits and built first return maps, codifying, with symbolic dynamics, the sets of orbits embedded in the spiral-like and double-scroll attractors. These sets of periodic orbits are organized hierarchically through its representation in the symbolic plan. The study of the set of periodic orbits in the spiral-like attractor, together with its first return maps, indicate the existence of an homoclinic orbit in the dynamical evolution of the Chua's circuit.

We also propose geometric models for the flows that generate each individual attractor and we present templates consistent with these models. The templates were tested through the comparison of a topological invariant, the linking number, obtained both in the analysis of the periodic orbits present in the flow and in the templates.

Conteúdo

Introdução	7
1 Comportamento Caótico do Circuito de Chua	11
1.1 Sistemas Dinâmicos e Caos Determinístico	11
1.1.1 Introdução	11
1.1.2 Atratores e Sistemas Dissipativos	14
1.2 O Circuito de Chua	21
1.3 Estabilidade Linear dos Pontos Fixos	24
1.4 Simetria do Circuito de Chua	29
1.5 Diagrama de Bifurcações	30
1.6 Bacia de Atração	31
2 Dinâmica Simbólica	36
2.1 O Mapa Logístico	36
2.1.1 Estiramentos e Dobramentos do Mapa logístico	37
2.1.2 Árvore Alternante Binária	40
2.2 O Circuito de Chua	44
2.2.1 Mapas de Primeiro Retorno	44
2.2.2 Localização das Órbitas Periódicas Instáveis	46
2.2.3 Codificação Simbólica das Órbitas Periódicas	51
3 Plano Simbólico	58
3.1 O Mapa Unimodal e o Atrator Espiral	58
3.1.1 Órbita Homoclínica	67
3.2 O Mapa Quártico e o "Double-scroll"	74
4 Teoria dos Nós	81
4.1 Introdução	81
4.2 Convenção de Cruzamento	83
4.3 O Número de Elos	84
4.4 Fios, Tranças e Grupo de Tranças	85

CONTEÚDO	6
5 Molde Topológico	88
5.1 Descrição Geométrica	88
5.2 Descrição Algébrica	90
5.3 Matriz de Elos	92
5.4 Localização dos Nós no Molde	93
5.4.1 Construção da k -ésima Árvore	93
5.4.2 “Kneading Theory”	94
5.5 Cálculo Algébrico do Número de Elos	95
6 Caracterização Topológica do Circuito de Chua	101
6.1 Regiões Topológicas	101
6.2 Molde Topológico do Atrator Espiral	105
6.2.1 O Molde Topológico e o Regime Hiperbólico	109
6.3 Molde Topológico do Atrator “Double-scroll”	110
Conclusão	119
Apêndice	122
A Cálculo Numérico do Mapa de Poincaré: O Truque de Hénon	122
B Técnicas de Localização de Órbitas Periódicas	124
B.1 Retorno Aproximado (“Close Returns”)	124
B.2 Método de Newton-Raphson	125
C Condição de Admissibilidade para uma Seqüência Simbólica	127
Referências Bibliográficas	128

Introdução

Poincaré [1] percebeu, quando estudava o problema de três corpos na mecânica celeste, que sob certas situações, sistemas dinâmicos simples podem exibir soluções complexas “sem uma forma integral”. Concluiu que, apesar de conhecer exatamente as leis da natureza, prever o estado final de um sistema dinâmico depende fundamentalmente de conhecer com grande precisão seu estado no instante inicial. Para alguns sistemas, pequenas diferenças em seu estado inicial provocarão grandes diferenças no seu estado final. O que Poincaré descobriu foi a *dependência sensível às condições iniciais*, que atualmente é o ponto de partida para as idéias sobre sistemas dinâmicos *caóticos*.

Na tentativa de estabelecer “soluções” para sistemas complexos (para o problema de três corpos), sistemas estes que não são solúveis analiticamente, Poincaré sugeriu estudar as *órbitas periódicas instáveis* como maneira de se obter uma visão global do comportamento dinâmico.

Foi nos últimos quarenta anos, entretanto, que a Ciência do Caos floresceu através do desenvolvimento de diversos campos. Em um deles, vindo da Matemática, está no estudo topológico de sistemas dinâmicos integráveis ou quasi-integráveis, como por exemplo através do teorema KAM. Em outro, vindo da Física e da Biologia, o estudo de sistemas discretos de baixa dimensão, como o mapa logístico. Também na Meteorologia, com a descoberta, devido a Lorenz, de um sistema caótico estável (o atrator que leva seu nome) na tentativa de entender a imprevisibilidade do clima.

Atualmente, duas abordagens são usadas no estudo de sistemas caóticos. A primeira, a abordagem métrica, baseia-se no estudo da distância entre pontos (ou seja a geometria) no atrator caótico. Nesta abordagem, que envolve definições e cálculos como expoentes de Lyapunov, funções de escala, dimensões generalizadas (fractal, de correlação, etc.), não descreve o modelo dinâmico associado ao sistema em questão. A segunda, conhecida como abordagem topológica, tem como meta desvendar a estrutura topológica do atrator caótico, usando ferramentas como a *dinâmica simbólica e invariantes topológicos*. A análise topológica deriva da observação de dois processos básicos responsáveis pela criação de um atrator caótico: os *estiramentos e dobramentos* (“stretching and folding”). O processo de estiramento é responsável pela divergência de pontos vizinhos próximos no espaço de fases e está por trás da “dependência sensível às condições iniciais”. O processo de dobramento faz com que pontos do espaço de fases nunca escapem de um conjunto compacto e está por trás

das *propriedades de recorrência*. Tais processos agem de forma a organizar as órbitas periódicas instáveis que existem no atrator caótico.

Órbitas periódicas instáveis, imersas num atrator caótico em regime hiperbólico¹ [2, 3, 4] existem em abundância e são infinitas. De fato, órbitas periódicas instáveis formam o esqueleto sobre o qual o atrator repousa e identificá-las no interior do atrator revela sua organização topológica. O ponto de partida deste trabalho é a extração e identificação das órbitas periódicas instáveis que existem em um atrator caótico. Iremos estudar um sistema dinâmico conhecido como *circuito de Chua* [5], um circuito eletrônico que exhibe comportamentos complexos causado por um *diodo não-linear*. Suas equações serão integradas numericamente e seu atrator construído em seu espaço de fases. O espectro de órbitas periódicas instáveis será então extraído.

Aplicaremos dois métodos para a extração de órbitas periódicas instáveis. O primeiro baseia-se na técnica conhecida como “retorno aproximado” [3] (“close returns”), aplicável diretamente à série temporal gerada pelo fluxo caótico em seu espaço de fases tridimensional. Um segmento de uma trajetória caótica, aproximando-se de uma órbita periódica instável, ao longo de sua variedade estável, percorrerá de forma muito próxima a órbita por algum intervalo de tempo, durante o qual o sistema é brevemente previsível. Este segmento da trajetória é eventualmente ejetado ao longo de sua variedade instável, sendo posteriormente capturado pela variedade estável de outra órbita, num processo que se repete indefinidamente. Tal fenômeno pode ser estudado pela *teoria do sombreamento* (“shadowing theory”). Dizemos que um curto segmento de uma trajetória “sombreia” uma órbita periódica instável por um certo intervalo de tempo. Esse curto segmento retorna muito próximo de algum ponto periódico dessa órbita. Podemos facilmente ajustar o ponto de partida do segmento de maneira a coincidir com a órbita periódica instável, ou seja, fazendo o segmento retornar precisamente ao seu ponto inicial. Este método pode ser aplicado a atratores caóticos obtidos de séries temporais, correspondendo a sistemas dinâmicos dos quais não se conhecem as equações. Mindlin e Lathrop, Kostelich [2, 3] aplicaram esta técnica para o atrator estranho reconstruído a partir de uma série temporal experimentalmente obtida da reação química de Belousov-Zhabotinskii com bons resultados.

O segundo método usa o esquema de Newton-Raphson para sistemas autônomos [6, 7, 8]. Este método permite a determinação exata das órbitas periódicas instáveis, uma vez que, neste caso, se conhece as equações responsáveis pelo fluxo. De posse do espectro de órbitas periódicas instáveis, podemos proceder a análise topológica do atrator.

Um sistema caótico de baixa dimensão, em seu espaço de fases (menor ou igual a 3), e em regime hiperbólico, possui um rico conjunto de propriedades de recorrência imersas no conjunto caótico. No caso de um sistema cujo espaço de fases pode ser construído em três dimensões (um fluxo tridimensional), órbitas periódicas instáveis são curvas fechadas, formando nós (ou laços) orientados e elos [9, 10]. Estes nós e elos

¹Um sistema dinâmico em regime hiperbólico possui todas as possíveis órbitas periódicas instáveis em decorrência das tangências homoclínicas entre suas variedades instável e estável.

são invariantes sob pequenas variações dos parâmetros, ao menos enquanto existirem, podendo ser usados para identificar classes de atratores estranhos. Essa identificação baseia-se no *molde topológico* ou “portador de nós”, uma construção matemática que pode ser vista como um mapa expandido em uma superfície ramificada [9, 10, 11], para onde as órbitas de um fluxo podem ser transportadas preservando a estrutura topológica existente no interior do atrator.

As órbitas periódicas são representadas no molde topológico através da *dinâmica simbólica*. Cada uma das órbitas identificadas no fluxo recebe um “rótulo” próprio, dado por uma sequência apropriada de símbolos, de acordo com as regiões de visitação dessa órbita no interior do atrator. Esse “rótulo” reflete a estrutura topológica do atrator que organiza todas as órbitas periódicas instáveis nele imersas. O molde topológico que se ajusta a esta estrutura é então verificado através de um conjunto de inteiros chamados de *números de elos* (“linking numbers”): compara-se os números de elos previstos no molde com aqueles extraídos diretamente das órbitas identificadas no fluxo. A concordância entre os números de elos previstos no molde e aqueles obtidos diretamente das órbitas no fluxo mostra a consistência do modelo topológico proposto pelo molde.

O circuito de Chua possui uma diversidade de comportamentos complexos quando variamos seus parâmetros. Nele podemos observar crises [12], diferentes rotas para o caos (duplicação de período, intermitência, etc.), diversos tipos de bifurcação (bifurcação de Hopf, etc.) [13], etc. Também podemos identificar diversos atratores [14]. Escolhemos dois destes atratores para análise de suas estruturas topológicas: o atrator tipo espiral de Rossler [8] e o atrator conhecido como “double-scroll” [5]. O atrator tipo espiral é o de mais simples estudo. Seu molde topológico é composto por duas regiões, da mesma forma que o molde para o atrator de Rossler. Já o “double-scroll”, mais complexo, possui semelhanças com o molde topológico do atrator de Lorenz [6], pois os dois atratores são *equivariantes* quanto ao campo de vetores que definem suas equações do fluxo.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No capítulo 1, discutimos os conceitos ligados ao caos determinístico, como dinâmica caótica e atratores, em mapas e equações diferenciais. As propriedades da dinâmica caótica são ilustradas através do mapa do padeiro dissipativo. Em seguida introduzimos o circuito de Chua e as equações diferenciais que o representam, destacando dois atratores que podem ser obtidos destas equações: o atrator do tipo espiral e o atrator “double-scroll”. Uma importante propriedade de simetria do circuito de Chua é evidenciada através de um diagrama de bifurcações e da bacia de atração para três estados assintóticos coexistentes no circuito.

No capítulo 2, apresentamos a dinâmica simbólica, aplicada a mapas unidimensionais, através do estudo do mapa logístico. A seguir, localizamos as órbitas periódicas instáveis nos atratores espiral e “double-scroll”. Então, estendemos as idéias da dinâmica simbólica aplicada no mapa logístico aos mapas de primeiro retorno obtidos destes dois atratores, obtendo uma codificação simbólica para as órbitas localizadas

nos atratores.

No capítulo 3, as órbitas periódicas instáveis, identificadas no capítulo anterior, são organizadas através da construção do plano simbólico para os atratores estudados. O plano simbólico é um gráfico bidimensional onde as órbitas periódicas são representadas hierarquicamente. Do plano simbólico extraímos informações referente a poda de órbitas que alguns sistemas dinâmicos sofrem em sua população de órbitas. A análise da população de órbitas encontradas no atrator espiral permitiu inferir a existência da órbita homoclínica no circuito de Chua. A órbita homoclínica é responsável pelo comportamento complexo em certos sistemas dinâmicos que apresentam caos.

No capítulo 4, apresentamos alguns conceitos da teoria dos nós. Nós e elos são cordas a qual unimos suas extremidades formando uma curva suave, e são utilizados para representar órbitas imersas em um fluxo tri-dimensional. Dos nós e elos extraímos os invariantes topológicos, quantidades que podem ser utilizadas na classificação das órbitas periódicas extraídas dos atratores do circuito de Chua.

No capítulo 5, introduzimos as motivações para se construir um molde topológico, através de duas descrições: uma geométrica e outra algébrica. A descrição geométrica mostra a origem do molde no fluxo representado no espaço de fases. Já a descrição algébrica relaciona as diferentes informações que podem ser extraídas do molde ao representarmos as órbitas periódicas na estrutura do molde.

No capítulo 6, empreendemos a análise topológica dos atratores espiral e “double-scroll” iniciando com a construção de um modelo geométrico para as trajetórias de cada um dos atratores. Finalmente, apresentamos os moldes topológicos para os atratores espiral e “double-scroll” e a verificação destes moldes através da comparação de um invariante topológico, o número de elos, obtido a partir das órbitas previstas pelo molde e das órbitas extraídas diretamente do fluxo.

Finalizamos este trabalho com as conclusões.

Capítulo 1

Comportamento Caótico do Circuito de Chua

Neste capítulo faremos uma breve introdução aos principais conceitos envolvendo dinâmica caótica e atratores. Sistemas dinâmicos não-lineares podem ser descritos por mapas e sistemas de equações diferenciais. A dinâmica caótica determinista e suas propriedades serão discutidas no contexto de um mapa bidimensional conhecido como mapa do padeiro (dissipativo).

A seguir, faremos uma apresentação das equações que descrevem o circuito de Chua e dois dos diversos atratores que esse conjunto de equações apresenta: o atrator tipo espiral e o atrator simétrico "double-scroll". A partir do cálculo dos pontos fixos para o conjunto de equações do circuito, analisaremos a estabilidade destes pontos e o comportamento dinâmico das trajetórias em relação a eles no interior de cada um dos atratores. Mostraremos também como duas importantes propriedades de simetria do circuito de Chua, a simetria ímpar e a equivariância se manifestam no diagrama de bifurcações e na bacia de atração.

1.1 Sistemas Dinâmicos e Caos Determinístico

1.1.1 Introdução

Qualquer sistema que evolua no tempo pode ser considerado um sistema dinâmico. Sistemas dinâmicos determinísticos são definidos por dois componentes fundamentais. O primeiro, uma 'regra' ou dinâmica, determinando como o sistema evoluirá. O segundo, o estado inicial do sistema, a condição a partir da qual o sistema começa a evoluir. Dentre as maneiras de se expressar uma regra, destacamos duas que descrevem muitos dos fenômenos encontrados na natureza: as equações diferenciais e as equações de diferenças ou mapas. Um sistema dinâmico pode evoluir de forma contínua no tempo, e então é descrito por equações diferenciais, ou evoluir de forma descontínua, discreta, descrito assim por equações de diferenças.

As equações diferenciais formam a base matemática das teorias físicas atuais. Chamamos de *trajetória* a uma solução de uma equação diferencial; e ao conjunto de soluções da equação diferencial, de *fluxo*. Alguns desses sistemas dinâmicos, embora tenham sua evolução temporal descrita por uma regra bem definida, apresentam um comportamento imprevisível depois de um certo tempo. Dizemos que tais sistemas tem comportamento caótico.

O comportamento caótico pode aparecer em sistemas dinâmicos governados por equações *não-lineares*, que apresentem uma propriedade especial, conhecida como dependência sensível as condições iniciais.

A principal diferença entre as soluções de um sistema linear e um sistema não linear vem do fato de que sistemas lineares obedecem ao princípio da superposição. Para mostrar isso, consideremos como exemplo as soluções da seguinte equação diferencial linear

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x.$$

Esta equação (e o sistema dinâmico que ela eventualmente descreve) é linear porque todos os termos envolvidos são funções lineares de x .

A 'regra' que determina a dinâmica em um sistema linear é linearmente proporcional às suas variáveis. Pode-se mostrar que a soma das soluções de um sistema linear também é uma solução. Desse modo, a solução completa de um sistema linear é obtida pela soma de todas as soluções particulares desse sistema. A fundamentação matemática disso é o princípio da superposição. Assim, são solução de nosso exemplo

$$x_1(t) = \text{sen}(t)$$

e

$$x_2(t) = \text{cos}(t),$$

uma vez que

$$\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} = -\text{sen}(t) = -x_1(t)$$

e

$$\frac{d^2x_2(t)}{dt^2} = -\text{cos}(t) = -x_2(t),$$

ou seja, tanto x_1 quanto x_2 satisfazem a equação diferencial linear. E como o a equação é linear, a solução geral é dada pela soma das soluções particulares

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

Podemos facilmente verificar isto:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} \\ &= -[x_1(t) + x_2(t)] \\ &= -x(t).\end{aligned}$$

É desta forma que os sistemas lineares podem ser resolvidos.

Vejam agora o que acontece se aplicarmos o princípio da superposição a um sistema não-linear. Como exemplo, consideremos a equação diferencial de segunda ordem não-linear

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x^2.$$

Vamos assumir que existam duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$, como no problema linear. Logo, pelo princípio da superposição, a soma $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ também seria solução. Então,

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} \\ &= -(x_1^2 + x_2^2) \\ &\neq -(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) \\ &= -(x_1 + x_2)^2 \\ &= -x^2,\end{aligned}$$

o que mostra que as soluções da equação diferencial não-linear não podem ser adicionadas para se obter a solução completa. Em sistemas não-lineares não podemos aplicar o princípio da superposição. Portanto, soluções como x_1 e x_2 são apenas soluções particulares e sua soma não constitui a solução global do sistema. Tratar sistemas não-lineares implica, muitas vezes, a utilização de métodos alternativos que não são gerais.

Mapas são sistemas dinâmicos com evolução temporal *discreta*. A 'regra' da dinâmica para mapas é dada por uma equação de diferenças, que consiste em relacionar o estado atual do sistema com seu estado (imediatamente) anterior. Um ponto de uma trajetória em um fluxo é dado por um parâmetro real t , contínuo, representando o tempo. Analogamente, um ponto de uma trajetória de um mapa é indexado por um inteiro, representando o tempo de maneira discreta. Como exemplo, podemos considerar o mapa conhecido como mapa de deslocamentos de Bernoulli, dado por

$$x_{n+1} = Dx_n \pmod{1} \quad (1.1)$$

onde $x_0 \in [0, 1]$, x_0 sendo o estado inicial do mapa, e $D = 2, 3, 4, \dots$ é um parâmetro. Retornaremos aos mapas mais adiante na discussão do *caos determinístico*. Antes, no início da próxima seção, discutiremos o que são e para quais condições encontramos atratores em sistemas dinâmicos.

1.1.2 Atratores e Sistemas Dissipativos

Sistemas de equações diferenciais podem gerar trajetórias que, depois de um tempo suficientemente longo, convergem para uma região finita e limitada de seu espaço de fases. Chamaremos estas regiões de *atratores*. Atratores ocorrem em sistemas dinâmicos dissipativos. Em sistemas dissipativos, um elemento de volume de seu espaço de fases sofre uma *contração*. Para mostrar isso, consideremos um sistema de equações diferenciais na forma

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)$$

onde $i = 1, 2, \dots, n$, λ é um parâmetro e f_i é o conjunto de funções definindo o sistema. Esse sistema de equações é chamado autônomo, pois nenhum f_i depende explicitamente de t . Vamos assumir que as soluções sejam da forma

$$x_i = \varphi_i[t, \lambda, x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]$$

onde $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ são as condições iniciais. Assumimos que f_i seja ao menos uma vez continuamente diferenciável, e φ_i diferenciável com respeito a t e $x_i(0)$.

Consideremos, agora, o vetor

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

como um ponto representando o estado do sistema em um espaço de fases n -dimensional. Para cada ponto desse vetor temos outro vetor

$$V(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

tangente a $X(t)$. O vetor $V(t)$ define o fluxo no espaço de fases.

Um elemento de volume no espaço de fases pode representar a incerteza na condição inicial do sistema dinâmico. Esse elemento de volume, e portanto a incerteza na condição inicial, irá se propagar pelo espaço de fases. Vamos considerar um elemento de volume no espaço de fases

$$\delta\Omega(t) = \delta x_1(t)\delta x_2(t) \dots \delta x_n(t).$$

Para $t = 0$, $\delta\Omega(0)$ é a incerteza presente na condição inicial $X(0)$ em um dado sistema. Com a evolução temporal do sistema, $\delta\Omega$ irá mudar. Para vermos como se

dá essa mudança, vamos introduzir a quantidade $J(t)$ conhecida como Jacobiana da transformação,

$$\delta\Omega(t) = J(t)\delta\Omega(0),$$

sendo que $J(t)$ pode ser escrito como

$$J(t) = \frac{\partial[x_1(t), \dots, x_n(t)]}{\partial[x_1(0), \dots, x_n(0)]}.$$

A quantidade $J(t)$ será útil para calcularmos a evolução temporal de $\Omega(t)$

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = \frac{dJ(t)}{dt} \delta\Omega(0). \quad (1.2)$$

Primeiro, então, vamos diferenciar $dJ(t)/dt$;

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{\partial[\dot{x}_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]}{\partial[x_1(0), \dots, x_n(0)]} \\ &+ \frac{\partial[x_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, x_n(t)]}{\partial[x_1(0), \dots, x_n(0)]} \\ &+ \dots + \frac{\partial[x_1(t), x_2(t), \dots, \dot{x}_n(t)]}{\partial[x_1(0), \dots, x_n(0)]}. \end{aligned}$$

Aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial[x_1(t), \dots, \dot{x}_j(t), \dots, x_n(t)]}{\partial[x_1(0), \dots, x_n(0)]} = \frac{\partial[x_1(t), \dots, \dot{x}_j(t), \dots, x_n(t)]}{\partial[x_1(t), \dots, x_n(t)]} J(t),$$

que podemos generalizar para

$$\frac{\partial[x_1(t), \dots, \dot{x}_j(t), \dots, x_n(t)]}{\partial[x_1(t), \dots, x_n(t)]} = \frac{\partial \dot{x}_j(t)}{\partial x_j(t)}$$

levando a

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_i(t)}{\partial x_i(t)} J(t). \quad (1.3)$$

Podemos notar que

$$\nabla \cdot V(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_i(t)}{\partial x_i(t)}$$

é o divergente do vetor $V(t)$. Substituindo $\nabla \cdot V(t)$ na equação (1.3) e levando o resultado na equação (1.2) temos

$$\delta\dot{\Omega}(t) = [\nabla \cdot V(t)] \delta\Omega(t).$$

Portanto, a taxa de variação de um elemento de volume $\Omega(t)$ no espaço de fases é determinada pelo divergente de $V(t)$.

Com isso temos um critério para distinguir entre sistemas dinâmicos conservativos e dissipativos. Para um sistema conservativo, o elemento de volume no espaço de fases não muda com a evolução temporal do sistema. Portanto, $\nabla \cdot V = 0$ para qualquer $x_i(t)$ e, como $\delta\Omega(t) = \delta\Omega(0) = \text{constante}$, $|J(t)| = |J(0)| = 1$, resultando no teorema de Liouville. Para um sistema dinâmico dissipativo, o elemento de volume no espaço de fases sofrerá contração. Portanto, $\nabla \cdot V \neq 0$ e como consequência $|J(t)| \neq 1$.

Como exemplo de sistemas dissipativos, um oscilador harmônico amortecido terá $\nabla \cdot V < 0$; então, seu elemento de volume $\delta\Omega$ sofre uma contração no espaço de fases até que sua dimensão se reduza a um ponto. Em um sistema bidimensional dissipativo, o elemento de volume sofre contração ao menos em uma das direções. Se, no sistema bidimensional dissipativo, uma direção contrair o elemento de volume e a outra expandir, podemos ter uma situação em que o fluxo produz um conjunto denominado ciclo limite no espaço de fases. O ciclo limite é representado por uma curva fechada. Trajetórias próximas são atraídas ou repelidas por ele, que define uma solução periódica para o sistema.

Para esses dois exemplos, o conjunto limite (o limite para um tempo suficientemente longo) é o resultado da contração do volume no espaço de fases. Estes dois conjuntos limites são exemplos de atratores. Entretanto, para uma idéia mais precisa do que é um atrator, necessitamos de uma definição formal. A definição dada a seguir é devida a Eckmann [15].

Um conjunto compacto B , sob a ação do fluxo φ , é um atrator se forem satisfeitas as seguinte condições:

- O conjunto B é invariante sob o fluxo φ , isto é, a ação do fluxo sobre B resulta no próprio conjunto B ;
- O conjunto B tem uma vizinhança contraente, ou seja, o fluxo contrai volumes do espaço de fases;
- O fluxo φ é recorrente, ou seja, qualquer trajetória iniciando em algum subconjunto aberto de B sempre retorna a este subconjunto para um tempo suficientemente longo;
- O fluxo é indecomponível, ou seja, B não pode ser decomposto em duas partes invariantes que não sejam triviais, como por exemplo uma coleção de pontos fixos.

Contudo, alguns atratores possuem uma outra característica, além daquelas acima citadas, que os distingue dos demais. Para estes atratores, pontos que inicialmente se encontram próximos, estarão macroscopicamente afastados depois de um tempo suficientemente longo. Esta característica é chamada de *dependência sensível as condições iniciais* e atratores que a possuem são chamados de atratores estranhos. Nos

atratores estranhos, ocorrem dois processos que determinam a dependência sensível às condições iniciais: os processos de *estiramento e dobramento*¹. Nesses processos, volumes no espaço de fases contraem em uma direção, expandem em outra e dobram sobre si mesmos. Na figura 1.1 temos três modos de contração do volume V_0 no espaço de fases: (a) contração do volume levando a um ponto; (b) contração na direção vertical e expansão na direção horizontal e (c) os processos de estiramento e dobramento para o qual o resultado da expansão e contração é dobrado sobre si mesmo, levando a uma figura com diversas folhas. Um exemplo desse processo é dado pelo *mapa da ferradura de Smale* [16, 17].

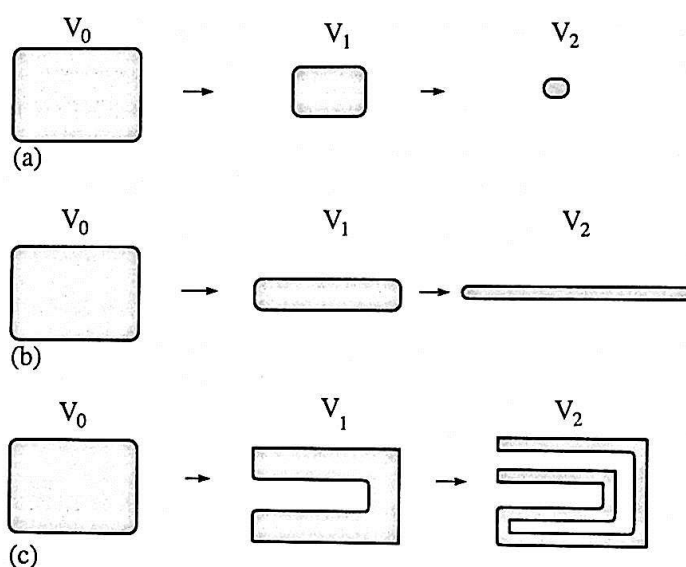


Figura 1.1: Em (a) o volume no espaço de fases contrai. Em (b) a contração do volume ocorre através da contração do comprimento na direção vertical e expansão do comprimento na direção horizontal. Em (c) a contração do volume ocorre expandindo e contraindo as direções horizontais e verticais respectivamente, e depois dobrando a folha sobre si mesma.

Descreveremos agora um mapa em que os processos de esticar e dobrar são substituídos pelo processo de foliação, resultando também em dependência sensível às condições iniciais. Esse mapa é o mapa da 'transformação do padeiro', dado por

$$x_{n+1} = 2x_n \pmod{1} \quad (1.4)$$

$$y_{n+1} = \begin{cases} ay_n & , 0 \leq x_n < 1/2 \\ ay_n + 1/2 & , 1/2 \leq x_n \leq 1 \end{cases} \quad (1.5)$$

onde $a > 0$. Esta transformação é dissipativa para $a < 1/2$, uma vez que

$$|J| = \left| \frac{\partial(x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial(x_n, y_n)} \right| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 2a, \quad (1.6)$$

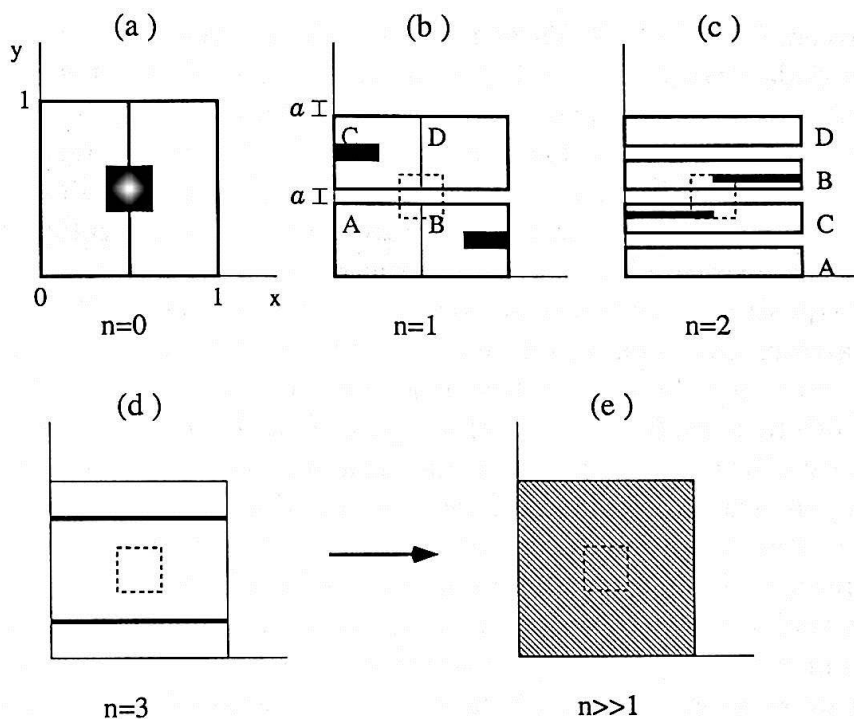


Figura 1.2: Transformação do padeiro dissipativa para $a < 1/2$. O quadrado de área unitária é foliado na direção da contração y .

resultando em $J < 1$. Como o mapa é dissipativo ($a < 1/2$), a transformação contrai áreas por um fator de $|J| = 2a < 1$ em cada iteração. O quadrado unitário na figura 1.2(a) é expandido na direção x por um fator 2 (conforme equação 1.4), contraído na direção y por um fator a (equação 1.5) e então a região expandida é deslocada de $1 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq a$ para a região $0 \leq x \leq 1$ e $1/2 \leq y \leq 1/2 + a$, provocando uma foliação na direção da contração y . A primeira transformação, para $n = 1$, pode ser vista na figura 1.2 (b), onde o quadrado unitário em (a) sofre a primeira iteração do mapa. Na figura 1.2 (c), a transformação é aplicada novamente sobre (b), resultando numa segunda foliação ($n = 2$) que gera quatro folhas. E assim, para cada n -ésima iteração teremos 2^n folhas. Como resultado, o conjunto de pontos remanescente será um atrator, com uma estrutura multifoliada na direção de y .

Do exposto acima para o 'mapa do padeiro' dissipativo, vemos que pontos inicialmente próximos, após sucessivas iterações do mapa, estarão exponencialmente separados. Podemos ver isso observando novamente a figura 1.2(a) que mostra um bloco preto no centro do quadrado unitário, representando a incerteza inicial de algum ponto inicial (x_0, y_0) . Em (b), após a primeira iteração, este bloco divide-se em dois. Na segunda iteração (c), os dois blocos pretos em (b) estendem-se em duas folhas, alongando-se até o centro do intervalo unitário. Na terceira iteração em (d), os

¹Tradução da expressão inglesa "stretching and folding".

dois blocos em (c) são mapeados ao longo de todo o intervalo $0 \leq x \leq 1$. Finalmente, para uma dada iteração $n \gg 1$ (figura 1.2(e)), estes filamentos do bloco original preencherão quase todo o quadrado unitário, interseccionando inúmeras vezes a região do bloco original (pontilhada no centro). Assim, uma determinada trajetória $(x_0, y_0) \rightarrow (x_1, y_1) \rightarrow (x_2, y_2) \rightarrow \dots \rightarrow (x_n, y_n) \rightarrow \dots$ para $n \rightarrow \infty$ percorrerá toda a região do quadrado unitário muitas vezes, de maneira que retornará próximo de (x_0, y_0) infinitas vezes. Chamamos esta propriedade de *recorrência*: as trajetórias no interior do quadrado unitário estão confinadas em seu interior. Pode-se mostrar que, para um atrator estranho, a propriedade de recorrência é devida a existência de um conjunto denso de órbitas periódicas instáveis no espaço de fases [16, 18]. Dizemos que uma órbita periódica é instável se, para uma dada trajetória arbitrariamente próxima desta órbita, uma pequena diferença em sua posição inicial faz com que a trajetória percorra um caminho diferente do anterior.

Nesse contexto, em um atrator estranho como o gerado pelo 'mapa do padeiro', prever a posição de uma trajetória em seu interior não é um problema trivial. Um atrator estranho, devido a propriedade de recorrência e às instabilidades presentes no fluxo, apresenta trajetórias que não fecham sobre si mesmas, evoluindo por todas as regiões do atrator. O comportamento do sistema é então imprevisível, e dizemos que tal dinâmica é *caótica*. Atratores estranhos, possuindo uma dimensão fractal e associados a sistemas que apresentam uma dinâmica caótica, também são conhecidos como atratores caóticos.

A instabilidade presente no fluxo, ou seja, a dependência sensível às condições iniciais presente em atratores estranhos pode ser quantificada através dos chamados expoentes de Liapunov. Imaginemos um sistema dinâmico com vários graus de liberdade. A cada grau de liberdade associamos um expoente de Liapunov. O expoente de Liapunov nos informa com que taxa a distância, no espaço de fases, entre pontos próximos irá divergir, contrair ou se permanecerá inalterada.

Em um atrator possuindo um conjunto denso de órbitas periódicas instáveis, trajetórias próximas no espaço de fases se separarão a uma taxa exponencial. Podemos obter esta taxa para o caso de um mapa unidimensional dado por

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

linearizando o mapa ao redor da órbita exata x_i . No caso de um mapa unidimensional, a separação exponencial entre δx_0 e uma trajetória vizinha δx_n é dada por

$$|\delta x_n| \sim |\delta x_0| e^{\lambda n}$$

onde λ é o coeficiente de Liapunov definido por

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{|\delta x_n|}{|\delta x_0|}$$

Seja uma órbita $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$. Uma órbita vizinha, partindo de $x_0 + \delta x_0$ será

$$\begin{aligned} x_n + \delta x_n &= f(x_{n-1} + \delta x_{n-1}) \\ &\approx f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})\delta x_{n-1} + \dots \end{aligned}$$

Considerando apenas os termos lineares na equação acima temos

$$\delta x_n \cong f'(x_{n-1})\delta x_{n-1},$$

e como a aproximação é linear

$$f'(x_{n-1})\delta x_{n-1} \approx f'(x_{n-1})f'(x_{n-2})\delta x_{n-2} \approx f'(x_{n-1})f'(x_{n-2}) \dots f'(x_1)f'(x_0)\delta x_0,$$

isto é

$$\delta x_n \approx \prod_{i=1}^{n-1} f'(x_{i-1})\delta x_0.$$

Com a expressão

$$|\delta x_n| \approx \prod_{i=1}^{n-1} |f'(x_{i-1})| |\delta x_0|,$$

podemos escrever o coeficiente de Liapunov para mapas unidimensionais

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_{i-1})|.$$

Para um mapa bidimensional dado por

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n), \end{aligned}$$

a linearização em torno da órbita (x_0, y_0) resulta

$$\delta X_{n+1} = A_n \delta X_n$$

onde

$$\delta X_n = \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix}$$

e A_n é a matriz Jacobiana

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial g}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

A linearização, análoga ao caso unidimensional, resulta na seguinte equação

$$\delta X_n = A_{n-1}A_{n-2} \dots A_0 \delta X_0 = J_n \delta X_0.$$

Se J_n é uma matriz diagonal, como no caso da transformação do padeiro, então os coeficientes de Liapunov fornecem a taxa de divergência de trajetórias próximas nas direções dos eixos x_i e y_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Portanto, para o 'mapa do padeiro'

$$\delta X_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \delta X_n = A_n \delta X_n,$$

de maneira que o 'erro' associado a x é dilatado por um fator 2, enquanto que o 'erro' associado a y é comprimido por um fator $a < 1/2$. Logo, para $\|\delta X_0\|$ suficientemente pequeno (e n suficientemente grande)

$$\delta X_n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \delta X_0,$$

tal que $\delta X_n = e^{n\lambda} \delta X_0$. Logo, temos $\delta x_n = e^{n \ln 2} \delta x_0$, e então $\lambda_1 = \ln 2 > 0$, enquanto que para $\delta y_n = e^{n \ln a} \delta y_0$ temos $\lambda_2 = \ln a < 0$ (pois $a < 1/2$). Esse resultado nos mostra que para $\lambda > 0$, pontos inicialmente próximos irão divergir quando iterados, indicando uma expansão do comprimento, enquanto que para $\lambda < 0$ os pontos convergem quando iterados, resultado de uma contração do comprimento. Já vimos que o atrator gerado pelo 'mapa do padeiro', para o qual convergem as trajetórias no quadrado unitário, possui uma estrutura de aspecto muito fragmentado. Este objeto geométrico terá uma dimensão não inteira (diferente de 2, a dimensão do quadrado unitário original), ou seja, uma dimensão *fractal*.

1.2 O Circuito de Chua

O circuito de Chua [5, 19] é um circuito eletrônico simples (figura 1.3) com equações diferenciais dadas por

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{(v_2 - v_1)}{R} - h(v_1) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{(v_1 - v_2)}{R} + i \\ L \frac{di}{dt} &= -v_2, \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde C_1 e C_2 são os dois capacitores, v_1 e v_2 as voltagens que por eles passam, R é um resistor linear, L um indutor, i a corrente sobre o indutor e $h(v_1)$ é a curva característica (voltagem versus corrente) de um diodo *não-linear*. A função $h(v_1)$, que tem simetria ímpar (figura 1.3), é dada por

$$h(v_1) = m_1 v_1 + \frac{1}{2} (m_2 - m_1) (|v_1 + B_p| - |v_1 - B_p|). \tag{1.8}$$

As equações (1.7) tem um comportamento complexo, rico e diversificado [22] para

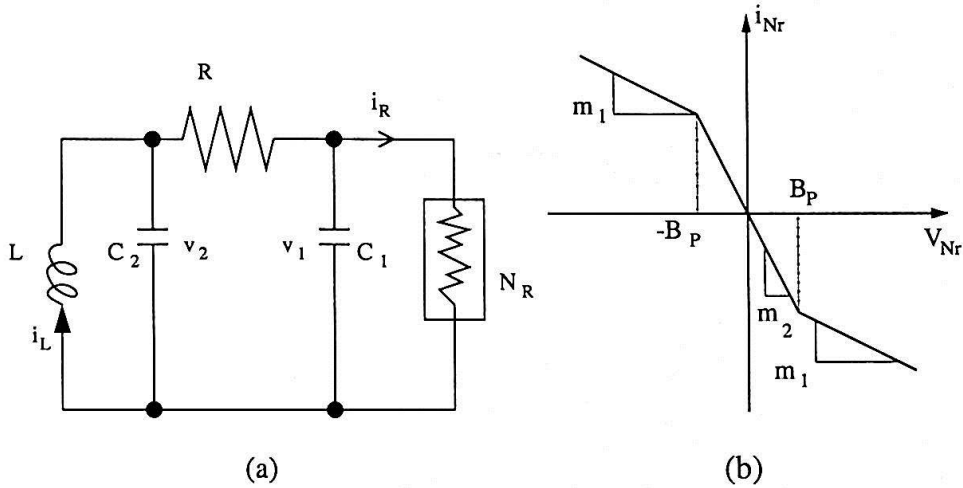


Figura 1.3: (a) Circuito de Chua formado por quatro elementos lineares mais um elemento não-linear N_R . (b) Curva característica v - i do elemento não-linear.

uma grande faixa de valores de seus parâmetros. Na figura 1.4 temos um dos atratores gerados pelo circuito de Chua, que ficou conhecido como “double-scroll”, em seu espaço de fases tridimensional.

Neste trabalho vamos estudar dois cenários para os parâmetros do circuito de Chua na forma das equações (1.7). No primeiro cenário, obtido² para $R = 1.5$, R escolhido como o parâmetro de controle para o circuito de Chua, temos um regime caótico com a coexistência de dois atratores do tipo espiral, que denominaremos por $A_{espiral}^+$ e $A_{espiral}^-$ cada um localizado em domínios distintos do espaço de fases, simétricos um ao outro. De acordo com [12, 13] ambos atratores aparecem como resultado de uma cascata de bifurcação de período de dois ciclos limites também simétricos. Chamaremos este cenário de espiral E . Um desses atratores, que identificamos como $A_{espiral}^-$, pode ser visto na figura 1.5. No segundo cenário temos o atrator conhecido como “double-scroll”. Segundo [12] e [13], depois de uma *crise de fronteira* [20, 21], os dois atratores espirais $A_{espiral}^+$ e $A_{espiral}^-$ fundem-se formando um grande atrator simétrico $A_{simetrico}$. Neste segundo cenário, que chamaremos de cenário simétrico S , os parâmetros são os mesmos que no cenário anterior (espiral E), exceto o valor do parâmetro de controle: $R = 1.42857$. A projeção deste atrator no plano xy ($x = v_1$ e $y = v_2$) pode ser observado na figura 1.6. Nossa análise topológica se restringirá aos dois atratores encontrados nestes dois cenários.

O circuito de Chua pode ser reescrito de forma que suas equações se reduzam a apenas *dois* parâmetros [22]. Introduzindo as variáveis adimensionais,

²Para este cenário, os outros parâmetros são: $1/C_1 = 9.0$, $1/C_2 = 1.0$, $1/L = 7.0$, $m_1 = -0.5$, $m_2 = -0.8$, $B_p = 1.0$.

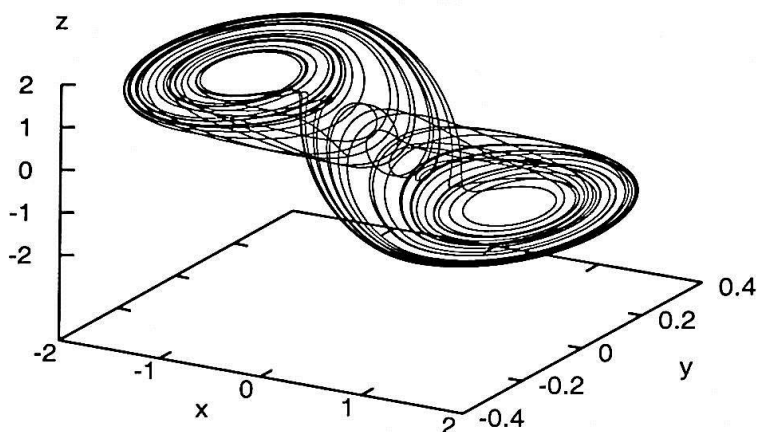


Figura 1.4: Atrator "double-scroll" em seu espaço de fases ($x = v_1$, $y = v_2$ e $i = z$). O valor do parâmetro R é 1.38 para as equações do circuito de Chua. As demais constantes são: $1/C_1 = 9.0$, $1/C_2 = 1.0$, $1/L = 7.0$, $m_1 = 0.5$, $m_2 = -0.8$ e $B_P = 1.0$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_1}{B_P} & y &= \frac{v_2}{B_P} & z &= \frac{i}{gB_P} \\ \tau &= \frac{tq}{C_2} & a &= \frac{m_2}{g} & b &= \frac{m_1}{g} \\ \alpha &= \frac{C_2}{C_1} & \beta &= \frac{g}{Lg^2}, \end{aligned}$$

onde $g = 1/R$, temos a seguinte forma *adimensional* para as equações (1.7):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha(y - x - f(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y \end{aligned} \tag{1.9}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} bx + a - b & \text{se } x \geq 1 \\ ax & \text{se } |x| \leq 1 \\ bx - a + b & \text{se } x \leq -1 \end{cases} \tag{1.10}$$

e α , β , a e b são reais, α e $\beta > 0$, a e $b < 0$. Com as equações na forma (1.9), na seção 1.3, calcularemos os pontos fixos para os atratores nos cenários espiral E e simétrico S . Na seção 1.6, estudaremos a coexistência de atratores no circuito de Chua.

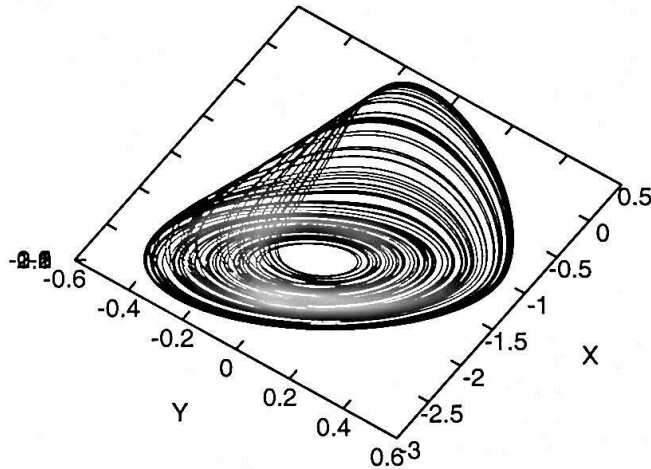


Figura 1.5: Atrator espiral obtido das equações do circuito de Chua no cenário espiral E . Este atrator localiza-se no semiplano $x < 0$ no espaço de fases. Esta posição chamamos de domínio D^- do espaço de fases. O segundo atrator espiral, localizado no semiplano $x > 0$ do espaço de fases, ocupa o domínio D^+ simétrico ao atrator situado em D^- .

1.3 Estabilidade Linear dos Pontos Fixos

Se tomarmos as equações do circuito de Chua em sua forma adimensional com dois parâmetros (equações (1.9) e (1.10)), podemos facilmente calcular seus pontos fixos. Os pontos fixos de um sistema dinâmico correspondem às soluções estacionárias desse sistema. Assim, nas equações (1.9) devemos ter

$$\frac{dx}{d\tau} = 0, \quad \frac{dy}{d\tau} = 0, \quad \frac{dz}{d\tau} = 0,$$

e o sistema de equações a resolver é

$$\begin{aligned} \alpha(y - x - f(x)) &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ -\beta y &= 0, \end{aligned} \tag{1.11}$$

com $f(x)$ dada pela equação (1.10). A solução do sistema é

$$\begin{aligned} x &= -f(x) \\ z &= f(x) \\ y &= 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

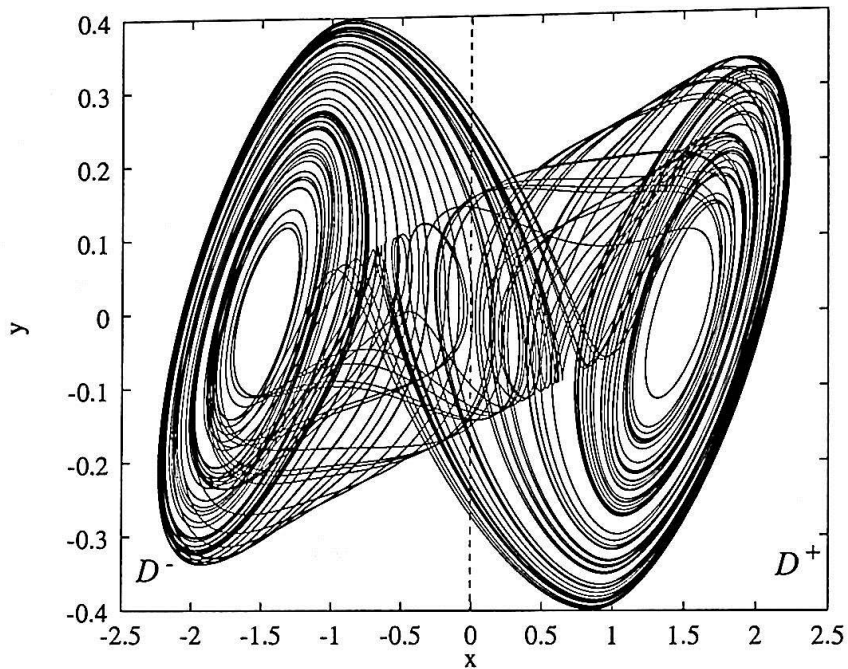


Figura 1.6: Atrator "double-scroll" obtido das equações do circuito de Chua no cenário simétrico S. Os domínios do espaço de fases visitados pelas trajetórias são D^- (semiplano $x < 0$) e D^+ (semiplano $x > 0$), divididos pela linha pontilhada em $x = 0$, assinalados no gráfico acima.

Substituindo $f(x)$ na primeira das equações (1.12), temos

$$x = \begin{cases} -bx - a + b & , \text{ se } x \geq 1 \\ -ax & , \text{ se } |x| \leq 1 \\ -bx + a - b & , \text{ se } x \leq -1. \end{cases} \quad (1.13)$$

Na equação (1.13) para $x \geq 1$ e $x \leq -1$ temos

$$x_{\pm} = \pm \frac{a - b}{1 + b},$$

onde x_+ corresponde a solução para $x \geq 1$ e x_- a solução para $x \leq -1$. Para $|x| < 1$ a solução de (1.13) é $x_0 = 0$. A segunda equação de (1.12) leva em $z_{\pm} = x_{\mp}$.

Portanto, o sistema (1.11) apresenta três pontos fixos: $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $p_{\pm} = (x_{\pm}, y_{\pm}, z_{\pm})$, onde

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0,$$

e

$$x_{\pm} = \pm \frac{a - b}{1 + b}, \quad y_{\pm} = 0, \quad z_{\pm} = \mp x_{\pm},$$

sendo que $a = m_2/g$, $b = m_1/g$ e $g = 1/R$ como nas variáveis adimensionais nas relações (1.9) e (1.10).

Toda "dinâmica" do circuito de Chua se desenrola ao redor destes três pontos fixos. O comportamento dinâmico dos atratores espirais A_{espiral}^{\pm} e $A_{\text{simetrico}}$, pode ser entendido se examinarmos os auto-valores obtidos da linearização das equações do fluxo ao redor dos pontos fixos.

Consideremos novamente um sistema dinâmico dado por n equações diferenciais na forma

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.14)$$

com $i = 1, 2, \dots, n$, e f_i as funções definindo o fluxo. Um ponto fixo é um ponto $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ tal que

$$f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0$$

para todos i . Um ponto fixo, ou ponto de equilíbrio, será estável se atrair para si trajetórias próximas e instável se repelir as trajetórias próximas. A teoria da estabilidade linear pode nos dar um quadro do comportamento dinâmico do fluxo próximo dos pontos fixos.

Vamos então expandir o fluxo $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ao redor do ponto de equilíbrio \bar{X} . Como $\delta x_i = x_i - \bar{x}_i$, a expansão será

$$\delta f_i(x_1, \dots, x_n) = f_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \delta x_j \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x_i=\bar{x}_i} + \dots,$$

onde $j = 1, 2, \dots, n$. Identificando a equação acima com o diferencial da equação (1.14) próximo de \bar{X}

$$\delta \dot{x}_i = \delta f_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

temos, para termos de primeira ordem,

$$\delta \dot{x}_i = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x_i=\bar{x}_i} \delta x_j.$$

Estas equações são lineares para o deslocamento δx_i , uma vez que a Jacobiana da transformação $\delta x_i \rightarrow \delta \dot{x}_i$, dada por

$$J_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x_i=\bar{x}_i},$$

tem elementos constantes, pois J_{ij} é calculada em cada ponto \bar{x}_i . Assim o sistema de equações original pode ser reescrito em notação vetorial como

$$\delta \dot{X}(t) = J \delta X(t),$$

que é um sistema de equações linear.

Vamos admitir que as soluções da equação acima são dadas por

$$\delta X(t) = e^{\lambda t} \delta X(0),$$

então, teremos

$$(J - I)\delta X(0) = 0,$$

onde I é a matriz identidade, λ os auto-valores da matriz Jacobiana e $\delta X(0)$ seus auto-vetores. Logo, os auto-valores podem ser encontrados de

$$\det(J - \lambda I) = 0.$$

Em geral, as soluções de λ_i para a equação acima possuem uma parte real ($Re(\lambda_i)$) e outra complexa ($Im(\lambda_i)$),

$$\lambda_i = Re(\lambda_i) + Im(\lambda_i),$$

de modo que podemos escrever as soluções do sistema linearizado como

$$\delta X(t) = e^{Re(\lambda)t} e^{Im(\lambda)t} \delta X(0).$$

Podemos agora discutir a estabilidade das soluções $\delta X(t)$ em relação aos auto-valores λ_i da matriz Jacobiana. Como a parte imaginária do auto-valor é uma função limitada, a estabilidade irá depender apenas da parte real de λ_i . Sendo assim, se $Re(\lambda_i) > 0$, $\delta X(t) \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow \infty$, ou seja, as trajetórias se afastam da vizinhança do ponto fixo \bar{X}_i . Por outro lado, se $Re(\lambda_i) < 0$, $\delta X(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$, ou seja, as trajetórias se aproximam da vizinhança do ponto fixo \bar{X}_i .

Dessa forma, a estabilidade linear para um ponto fixo é determinada pelos auto-valores da matriz Jacobiana:

1. Se $Re(\lambda_i) < 0$ para todo o λ_i o ponto fixo será assintoticamente estável;
2. Se $Re(\lambda_i) > 0$ para um ou mais λ_i o ponto fixo será instável.

O auto-vetor de J associado a cada λ_i define a direção pela qual a trajetória se aproxima ou se afasta do ponto fixo.

As trajetórias em cada um dos atratores espirais evoluem ao redor de um ponto fixo: para o atrator A_{espiral}^+ ao redor do ponto p_+ , enquanto que o atrator A_{espiral}^- ao redor do ponto p_- . A localização dos atratores espirais no espaço de fases definem a região de domínio para estes atratores: D^- para o atrator A_{espiral}^- , situado no semiplano $x < 0$ e D^+ para A_{espiral}^+ , situado no semiplano $x > 0$.

Vamos agora analisar a estabilidade dos três pontos fixos p_0 e p_{\pm} . Os auto-valores da matriz Jacobiana para o circuito de Chua (equações (1.9)) no ponto fixo p_0 , são dados pela equação

$$\lambda^3 + [\alpha(1+a) + 1]\lambda^2 + (\alpha a + \beta)\lambda + \beta\alpha(1+a) = 0, \quad (1.15)$$

e para os pontos fixos p_{\pm} , a equação de auto-valores é

$$\lambda^3 + [\alpha(1+b) + 1]\lambda^2 + (\alpha b + \beta)\lambda + \beta\alpha(1+b) = 0. \quad (1.16)$$

Para os atratores espirais A_{espiral}^{\pm} , os auto-valores para o ponto fixo p_0 são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2.74960, \\ \lambda_{2,3} &= -0.97480 \pm i3.05948, \end{aligned} \quad (1.17)$$

e para p_{\pm}

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -3.5376, \\ \lambda_{2,3} &= 0.14230 \pm i3.16015. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Para p_0 , o auto-vetor associado a $\lambda_1 > 0$ define uma direção instável. As trajetórias do atrator A_{espiral}^{\pm} se afastam de p_0 nesta direção. Os auto-vetores associados aos auto-valores $\lambda_{2,3}$ definem direções estáveis pois $Re(\lambda_{2,3}) < 0$. Neste caso, as trajetórias espiralam em direção a p_0 uma vez que $\lambda_{2,3}$ são complexos conjugados, num comportamento semelhante a um foco estável neste plano. Um ponto fixo com duas direções estáveis e outras instável é classificado como um ponto de sela espiral hiperbólico (um ponto de equilíbrio instável).

Nos pontos fixos p_{\pm} , o auto-vetor associado ao auto-valor $\lambda_1 < 0$ define uma direção estável, com as trajetórias aproximando-se de p_{\pm} . Contudo, os auto-vetores associados aos auto-valores $\lambda_{2,3}$ definem duas direções instáveis pois $Re(\lambda_{2,3}) > 0$. Como $\lambda_{2,3}$ são complexos conjugados, as trajetórias no atrator espiralam divergindo de p_{\pm} , em um comportamento semelhante ao de um foco instável. Estes pontos fixos também são pontos de sela espirais hiperbólicos.

Para o atrator "double-scroll" ($A_{\text{simétrico}}$) as trajetórias evoluem ao redor dos três pontos fixos. Os mesmos domínios definidos para os atratores espirais são aplicados para o atrator simétrico: domínio D^- para o semiplano $x < 0$ e D^+ para o semiplano $x > 0$. O atrator $A_{\text{simétrico}}$ esta situado simetricamente em D^- e D^+ .

Os auto-valores da matriz Jacobiana são dados pela mesma equação (1.15) para p_0 , e equação (1.16) para p_{\pm} .

Para o ponto fixo p_0 os auto-valores são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2.21738, \\ \lambda_{2,3} &= -0.96584 \pm i2.71116. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Para os pontos fixos p_{\pm} , os auto-valores são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -3.94214, \\ \lambda_{2,3} &= 0.18535 \pm i3.04699. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Os pontos fixos p_0 e p_{\pm} para o atrator $A_{\text{simétrico}}$ tem a mesma classificação que para os atratores espirais.

1.4 Simetria do Circuito de Chua

O circuito de Chua, representados pelas equações (1.7) e (1.9), tem uma característica importante: a *simetria ímpar*. Um conjunto de equações na forma $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$, tem simetria ímpar³ se, quando fazemos $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$, obtemos $\vec{F}(-\vec{x}) = -\vec{F}(\vec{x})$. Esta simetria será explorada ao longo deste trabalho.

Outra propriedade de simetria do circuito de Chua é a *equivariância* do campo de vetores que define as equações do fluxo. Seja o campo de vetores dado na forma $\vec{F}(\lambda, \gamma\vec{x}(t))$. Dizemos que $\vec{F}(\lambda, \gamma\vec{x}(t))$ é equivariante se, para um certo γ ,

$$\vec{F}(\lambda, \gamma\vec{x}(t)) = \gamma\vec{F}(\lambda, \vec{x}(t)), \quad (1.21)$$

onde $\vec{x}(t) = (x, y, z)$ é o conjunto de variáveis equivariantes, t é o tempo, λ é o vetor de parâmetros e γ é a matriz que define a equivariância.

Para o circuito de Chua $\lambda = (C_1, C_2, L, m_1, m_2, R)$ e a *matriz equivariante* é dada por

$$\gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

As equações que definem o circuito de Chua não mudam se trocarmos \vec{x} por $\gamma\vec{x}$ nas equações (1.7) e (1.9). O significado disso é que se $\vec{x}(t)$ é solução, então $\gamma\vec{x}(t)$ também é uma solução. Esta propriedade fará com que *órbitas simétricas* sejam globalmente invariantes sob γ , isto é, órbitas simétricas serão únicas no fluxo [6, 23]. Assim, seja O_s uma órbita simétrica situada no fluxo. Por ser simétrica, a aplicação de γ sobre O_s , γO_s , resulta em uma órbita idêntica a O_s . Já as *órbitas assimétricas* O_a devem aparecer no fluxo aos pares. Assim, a aplicação de γ à órbita O_a , produz uma segunda órbita γO_a . O par de órbitas O_a e γO_a estão simetricamente posicionados no espaço de fases. Retornaremos a essa discussão no capítulo 6 na investigação das órbitas periódicas do atrator "double-scroll".

Como mencionamos antes, cada um dos atratores espirais está situado em um domínio no espaço de fases, dispostos simetricamente: D^- para A_{espiral}^- (situado no eixo x negativo) e D^+ para A_{espiral}^+ (situado no eixo x positivo), a escolha do domínio a qual pertence o atrator arbitrária. Órbitas encontradas em um dos atratores serão encontradas também no outro atrator (situado no outro domínio) ou seja, essas órbitas assimétricas em sua forma, se apresentam posicionadas em uma configuração simétrica no espaço de fases. Note que não existem órbitas simétricas (percorrendo os dois domínios) para os atratores espirais.

Para o atrator $A_{\text{simetrico}}$ "double-scroll", as órbitas assimétricas igualmente surgem aos pares. Entretanto, órbitas simétricas também estão presentes. As órbitas simétricas percorrem os dois domínios D^- e D^+ , pois o atrator "double-scroll" situa-se nestes dois domínios.

³A simetria ímpar também é conhecida como *simetria de inversão*

1.5 Diagrama de Bifurcações

O diagrama de bifurcações fornece um meio de conhecermos a transição entre diferentes tipos de movimentos que um sistema dinâmico pode apresentar quando variamos seus parâmetros. Um diagrama de bifurcação é um gráfico onde plotamos o parâmetro a ser atualizado no eixo horizontal e uma representação dos movimentos do sistema dinâmico, no estado estacionário, no eixo vertical.

Construímos um diagrama de bifurcações (figura 1.7) para algumas faixas de valores dos parâmetros do circuito de Chua. Elegemos um parâmetro de controle dentre o conjunto de parâmetros desse sistema e o variamos em pequenos incrementos. A cada incremento integramos numericamente o sistema de equações. Quando o sistema atinge um comportamento assintótico (após certo transiente) registramos a intersecção das trajetórias com um plano transversal (uma seção de Poincaré). Para obtermos a intersecção da trajetória com este plano transversal, empregamos o método de Hénon (veja apêndice A). No diagrama, apenas uma das variáveis é plotada em função do parâmetro de controle. Assim, a cada valor do parâmetro de controle, temos uma sucessão de valores (assintóticos) de pontos de intersecção com plano transversal chamado de seção de Poincaré.

Mais precisamente, uma seção de Poincaré pode ser definida da seguinte maneira [24]: seja um sistema dinâmico com n equações diferenciais (equação (1.14)). Seja também $X_0 = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ uma órbita de período T do fluxo $\varphi(t)$ do sistema (1.14). Vamos tomar, então, uma superfície $\Sigma \in \mathbb{R}^n$ com dimensão $n - 1$ de tal modo que o fluxo seja transversal a Σ . Seja ainda X_0^* o ponto onde a órbita X_0 intercepta Σ e $V \subseteq \Sigma$ uma vizinhança de X_0^* . Então a aplicação $P : V \rightarrow \Sigma$ define um mapa de Poincaré para o ponto $X_1 \in V$ por

$$P(X_1) = \varphi(X_1, \tau),$$

onde $\tau = \tau(X_1)$ é o tempo para que a órbita $\varphi(X_1, t)$, iniciando em X_1 , retorne a Σ pela primeira vez. A superfície Σ é chamada de seção de Poincaré.

Na construção do diagrama de bifurcações para o circuito de Chua, a seção de Poincaré Σ interceptada pelas trajetórias é $P_y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$ e o parâmetro eleito como de controle é R na equação (1.7) (seção 1.2). Ao variarmos R no intervalo 1.22 à 1.70, identificamos diversos comportamentos, entre eles os dois atratores espirais simétricos A_{espiral}^+ e A_{espiral}^- , que surgem da cascata de bifurcação de período de dois ciclos limites também simétricos e o “double-scroll” $A_{\text{simetrico}}$, que surge da “fusão” dos dois atratores espirais A_{espiral}^+ e A_{espiral}^- [12]. Após um transiente de $t = 100$ (unidades arbitrárias), registramos uma das variáveis, x no nosso caso, que faz a intersecção com a seção de Poincaré, até o instante $t = 200$. A figura 1.7 mostra a sobreposição dos dois atratores encontrados nessa faixa do parâmetro R , com as seguintes condições iniciais: $x^+ = (0.1, 0.0, -0.1)$ e $x^- = (-0.1, 0.0, 0.1)$. Para obtermos o diagrama, integramos o sistema de equações para o primeiro valor do parâmetro R duas vezes: primeiro, usando x^+ como condição inicial e depois usando x^- . Para o valor seguinte de R , a nova condição inicial x^+ foi escolhida como

o último valor obtido da integração anterior de x^+ . Isso é repetido para cada valor do parâmetro R . Procedemos de maneira idêntica para x^- . Esta técnica para a obtenção de um diagrama de bifurcações tem sido aplicada no estudo do atrator de Newton-Leipnik [25].

O diagrama mostra claramente a simetria ímpar encontrada no circuito de Chua. Nele, podemos identificar os dois domínios D^- e D^+ tanto para os atratores espirais como para o “double-scroll”, separados por $x = 0$. Também podemos identificar a propriedade de equivariância da variável x , para a qual pontos do domínio D^+ ($x > 0$) são simétricos aos pontos do domínio D^- ($x < 0$). Os dois ciclos limites que observamos em $R \approx 1.6$ tornam-se atratores espirais⁴ para $R \approx 1.55$. Já para $R \approx 1.3$ até $R \approx 1.47$ identificamos a presença do “double-scroll”.

Podemos notar melhor a simetria ímpar contida no circuito de Chua observando a figura 1.8. Nela, temos a ampliação do diagrama de bifurcações para um pequeno intervalo de R entre 1.430 e 1.435. Essa figura nos mostra que, para um diagrama completo do circuito de Chua, devemos levar em conta as duas condições iniciais x^+ e x^- . Em $R \approx 1.4325$ notamos uma única cor indicando apenas o ramo verde. Mas isso é apenas um efeito de visualização do procedimento numérico (as duas cores estão lá de fato).

1.6 Bacia de Atração

A análise de um sistema dinâmico pode ser complicada, pois condições iniciais, em diferentes regiões do espaço de fases do sistema, geram órbitas com diferentes comportamentos assintóticos. É até mesmo comum que, para um mesmo valor de seu conjunto de parâmetros, observemos mais de um comportamento assintótico presente. O conjunto de condições iniciais, associado a cada um dos diferentes comportamentos assintóticos presentes em um determinado sistema dinâmico, é chamado *bacia de atração*.

A bacia de atração de um sistema dinâmico pode então ser determinada encontrando-se o estado assintótico do sistema estudado para diferentes pontos iniciais de seu espaço de fases.

Na prática, para uma dada região do espaço de fases, distribuímos uma grade com pontos igualmente distanciados uns dos outros. Em cada ponto deixa-se o sistema evoluir até que o estado assintótico seja atingido (pode ser um ponto fixo, um atrator⁵, caótico ou não, ou ainda o infinito). Cada estado assintótico, originário de algum ponto inicial, é representado por uma cor. O resultado é então um diagrama multicolorido onde os pontos de uma mesma cor definem uma mesma bacia de atração.

⁴O diagrama de bifurcações na figura 1.7 é interpretado da *direita para a esquerda* de seu parâmetro R .

⁵Atrator aqui pode ser um conjunto estranho caótico, ciclo limite ou torus.

Com essa técnica, determinamos as bacias de atração para o circuito de Chua (definido agora pela equação (1.9), com $\alpha = 15.60$, $\beta = 28.58$, $m_1 = -1/7$ e $m_2 = 2/7$). Notamos que coexistem, para um mesmo conjunto de valores de seus parâmetros, três atratores [26, 27]. Os três atratores podem ser vistos na figura 1.9. Podemos obtê-los, por exemplo, a partir das condições iniciais:

- atrator vermelho: $(-0.005, 0.017, 0.019)$;
- atrator azul: $(-0.002, 0.014, 0.010)$;
- atrator verde: $(-0.008, 0.020, 0.028)$.

Para obtermos os atratores da figura 1.9, consideramos um transiente de $\tau = 200$ (20000 iterações para um passo de integração $h = 0.01$) e plotamos os valores até $\tau = 400$.

Percebemos, a partir da figura 1.9, que as peças dos três atratores, no plano $y = 0$ para os intervalos de $x \in [-1.0, -0.3]$ e $x \in [0.3, 1.0]$, são facilmente distinguíveis um do outro. Explorando esse fato foi possível determinar a bacia de atração para estes três atratores (figura 1.10)⁶. A bacia de atração foi determinada para um plano de corte do espaço de fases em $x = 0$ (plano yz). Consideramos agora um transiente de $\tau = 200$ (20000 iterações para um passo de integração $h = 0.01$) para cada ponto do espaço de fases. As cores da bacia de atração correspondem as cores dos atratores da figura 1.9: vermelho é a bacia de atração do atrator vermelho; azul a bacia do atrator azul e verde a bacia do atrator verde. Estas bacias de atração possuem uma *fronteira fractal* [29]. A figura 1.11, (duas ampliações da figura 1.10) mostra uma estrutura *auto-similar* nas fronteiras das bacias de atração entre os atratores. A natureza fractal da bacia de atração é, provavelmente, a principal causa da dificuldade em se localizar todos os atratores que coexistem no circuito de Chua.

A simetria ímpar encontrada no circuito de Chua pode ser vista na figura 1.10. As variáveis z e y , pertencentes a figura, mostram a simetria ímpar e a equivariância. Esta simetria será fundamental na construção dos mapas de primeiro retorno para os atratores espirais e para o “double-scroll”, pois permitirão uma considerável simplificação nos modelos topológico para o circuito de Chua.

É visível também na figura 1.10 que as bacia de atração envolvem de forma não trivial os três pontos fixos para o circuito de Chua (secção 1.3).

⁶Bacias de atração similares, obtidas para uma variante do circuito de Chua pode ser vista em [28].

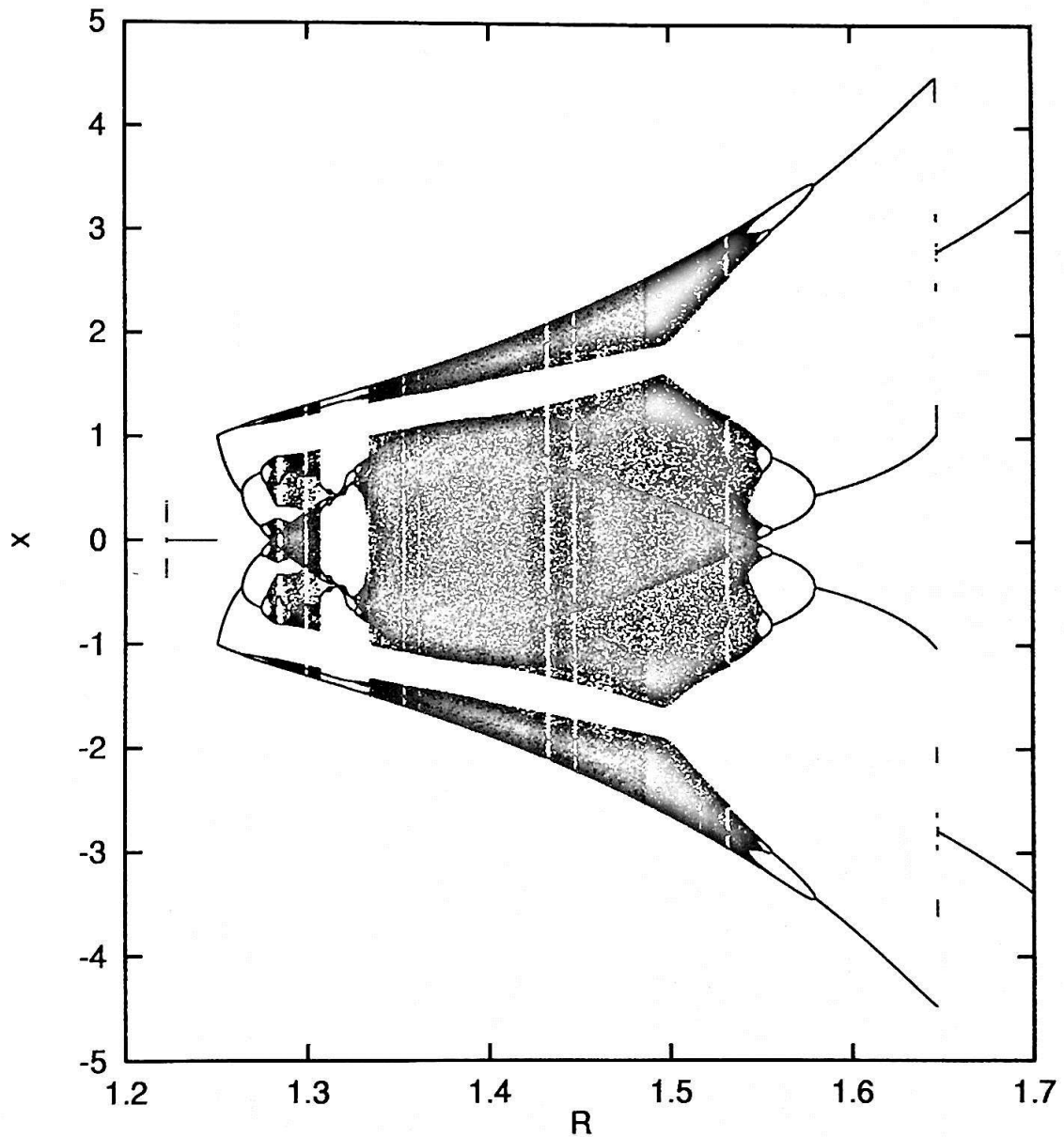


Figura 1.7: Diagrama de bifurcações para o circuito de Chua. As duas cores representam as duas condições iniciais: vermelho $x^+ = (-0.1, 0.0, 0.1)$ e verde $x^- = (0.1, 0.0, -0.1)$. Note como as trajetórias nas duas condições iniciais se completam indicando que para um diagrama de bifurcações completo, devemos levar em conta as duas condições iniciais.

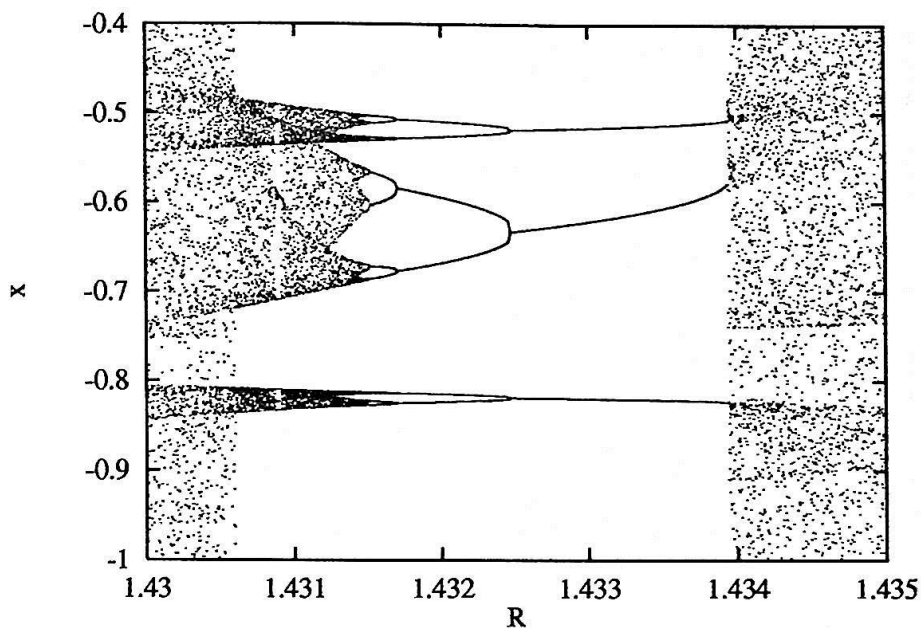


Figura 1.8: Ampliação de um pequeno segmento do diagrama da figura 1.7. As cores indicam as diferentes condições iniciais. Para $R = 1.431$ até $R = 1.434$ os ramos em bifurcação se complementam, indicando a complementariedade das condições iniciais x^+ e x^- .

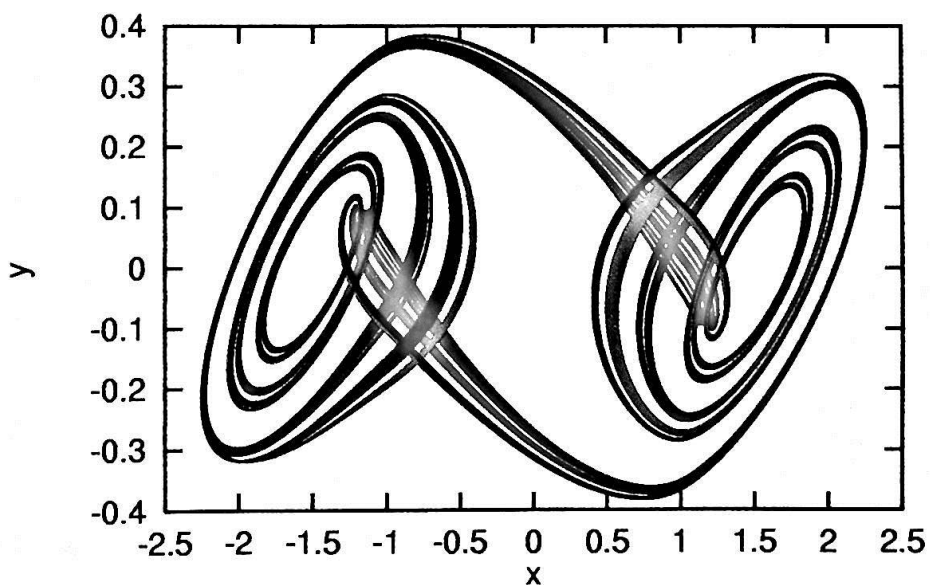


Figura 1.9: Projeção no plano (x, y) dos três atratores coexistentes no circuito de Chua. Os parâmetros e condições iniciais estão no texto.

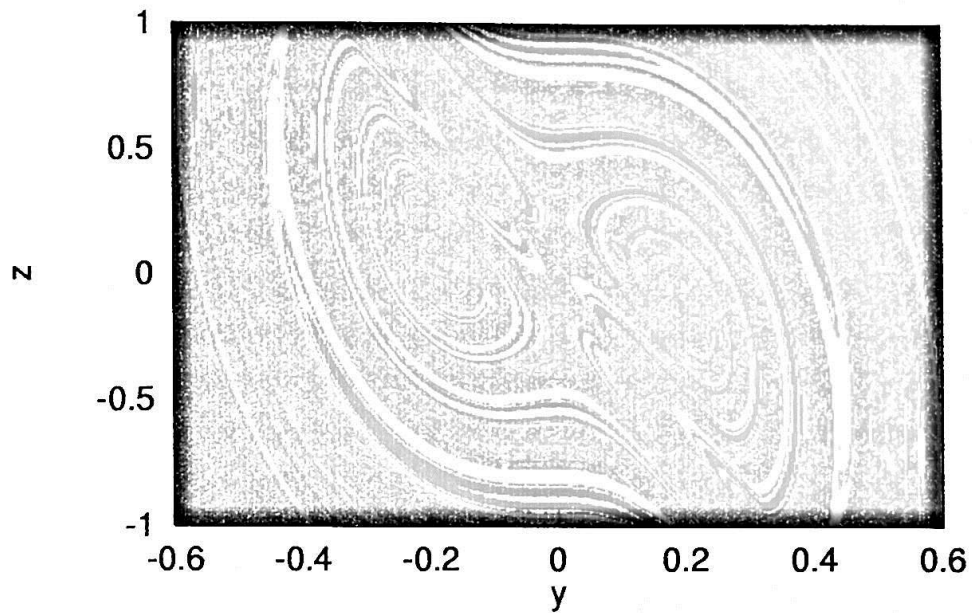


Figura 1.10: Bacia de atração para os três atratores coexistentes encontrados por Lozi (ref. [26, 27]) para um corte no plano $x = 0$. Aqui plotamos as coordenadas y e z do espaço de fases. As cores correspondem aos atratores encontrados na figura 1.9.

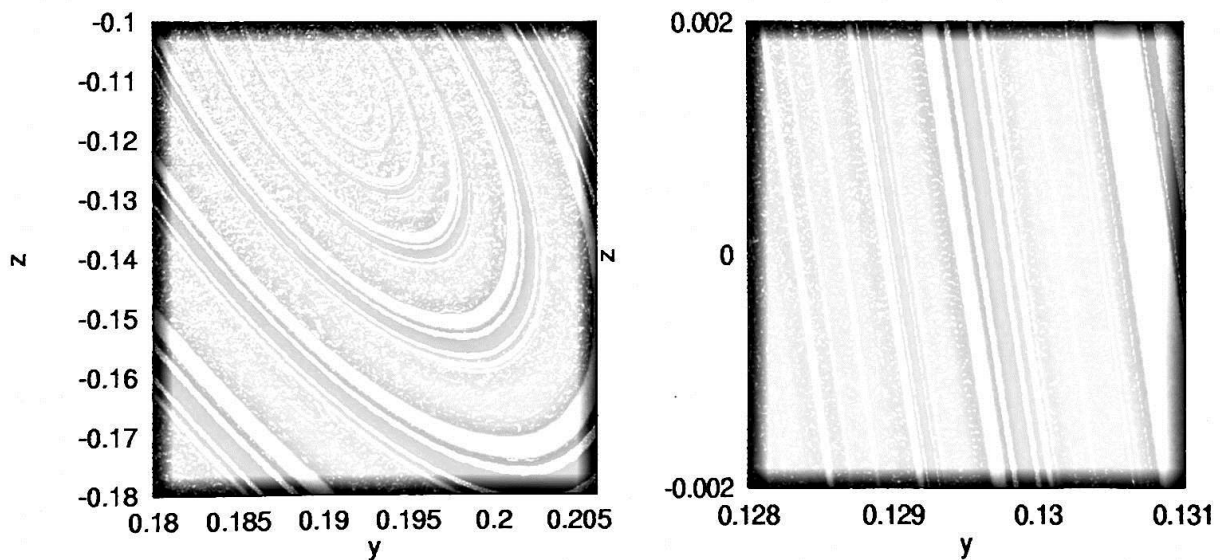


Figura 1.11: Duas ampliações da figura 1.10 mostrando uma estrutura auto-similar. A fronteira entre as bacias de atração é fractal como mostra a figura da direita.

Capítulo 2

Dinâmica Simbólica

Faremos neste capítulo uma breve introdução a alguns conceitos relacionados com a dinâmica simbólica, como a árvore alternante binária os processos de *estiramento e dobramento* discutindo o exemplo do *mapa logístico*. Chama-se dinâmica simbólica ao processo de expressar trajetórias de um sistema dinâmico através de símbolos. É uma técnica poderosa para descrever qualitativamente a evolução de um sistema dinâmico, pois com poucos símbolos, podemos descrever a infinidade de movimentos imersos em um atrator caótico. Como exemplo, vamos mostrar como as órbitas periódicas instáveis, encontradas no mapa logístico, podem ser organizadas relativamente umas às outras. Depois, aplicaremos estes conceitos ao circuito de Chua, obtendo a localização e, em seguida, a codificação simbólica das órbitas periódicas instáveis imersas nos atratores A_{espiral}^{\pm} e $A_{\text{simetrico}}$ gerados pelo circuito. Nossas principais ferramentas serão duas: as técnicas de localização de órbitas periódicas instáveis imersas nos atratores em regime caótico e os mapas de primeiro retorno, que definem as partições dos atratores, fornecendo um meio de codificar simbolicamente as órbitas periódicas instáveis.

2.1 O Mapa Logístico

O mapa logístico, um sistema dinâmico discreto usado como modelo para a dinâmica de populações biológicas, é definido por

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n). \quad (2.1)$$

Este mapa pertence a uma classe de mapas conhecidos como *unimodais* [16]. Podemos definir mapas unimodais como segue. Seja f uma função que leva um intervalo I nele mesmo, onde I é um intervalo unitário. Dizemos que f é um mapa unimodal se: (a) $f(0) = f(1) = 0$ e (b) f possuir um único ponto de extremo em c , um ponto de máximo, com $0 < c < 1$. Este mapa é crescente no intervalo $[0, c)$ e decrescente em $(c, 1]$.

São propriedades do mapa logístico, para $\mu > 4$ (para maiores detalhes veja Devaney, *op.cit.* [16]):

- O regime é *hiperbólico*, isto é, existe uma infinidade de órbitas periódicas de diversos períodos, todas instáveis;
- O conjunto estranho é um *repulsor caótico*, ou seja, as trajetórias são atraídas para $-\infty$;
- Quase todas as condições iniciais $x_0 \in [0, 1]$ são repelidas para $-\infty$, mas um conjunto invariante fractal do tipo conjunto de Cantor (com medida nula), que chamaremos de Λ , permanece neste intervalo;
- Antes de irem para $-\infty$ as trajetórias apresentam um transiente caótico.

2.1.1 Estiramentos e Dobramentos do Mapa logístico

Vamos supor $\mu = 4$ no mapa logístico no intervalo unitário $I = [0, 1]$. Nestas condições, o mapa é caótico. Podemos reescrever o mapa como $x_{n+1} = f(x_n)$ com $f(x) = 4x(1-x)$. A primeira iteração do mapa para um dado ponto inicial x_0 é dada por $x_1 = f(x_0)$. Iremos representá-la simplesmente por f . A segunda iteração $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$ será representada por f^2 e a n -ésima iteração do mapa ($x_n = \underbrace{ff \dots f}_{n \text{ vezes}}(x_0) = f^n(x_0)$) por f^n . A função f e suas compostas agem sempre sobre $x_0 \in I$. x_i é a i -ésima iterada de f , $i = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$

Vemos na figura 2.1 (b) como são as três primeiras iterações do mapa. Na primeira iteração f temos duas opções: ou o ponto iterado está a direita (“Right”) ou a esquerda (“Left”) do ponto máximo do intervalo $I = [0, 1]$, $c \in I$ (figura 2.1 (a)). Assim, $f(I)$ é o intervalo I esticado e dobrado uma vez. Na segunda iteração f^2 , o intervalo originado por f é novamente esticado e dobrado resultando em quatro possibilidades: LL, RL, RR e LR. Na terceira iteração f^3 as possibilidades são: LLL, RLL, RRL, LRL, LRR, RRR, RLR e LLR e assim por diante.

A técnica da dinâmica simbólica consiste justamente em seguir todo o processo de estiramento e dobramento buscando codificá-lo através de poucos símbolos. Esse processo de descrever a dinâmica é qualitativo. Não sabemos qual é o trajeto exato de um ponto inicial evoluindo no sistema, apenas o “caminho” percorrido pelo ponto nas vizinhanças do espaço de fases do sistema. A teoria simbólica completa para mapas unimodais é conhecida como “kneading theory” [16].

Necessitamos agora de um novo mapa que seja um modelo para a dinâmica do mapa logístico $f(x) = \mu x(1-x)$ para $\mu > 4$, quando sua dinâmica é representada por dois símbolos. Este mapa terá que agir sobre dois símbolos que, segundo a dinâmica simbólica, descrevem as iterações de $f(x)$. Uma vez que dois símbolos (“L” e “R”) definem o estado do sistema, necessitamos de um espaço de símbolos. Um ponto

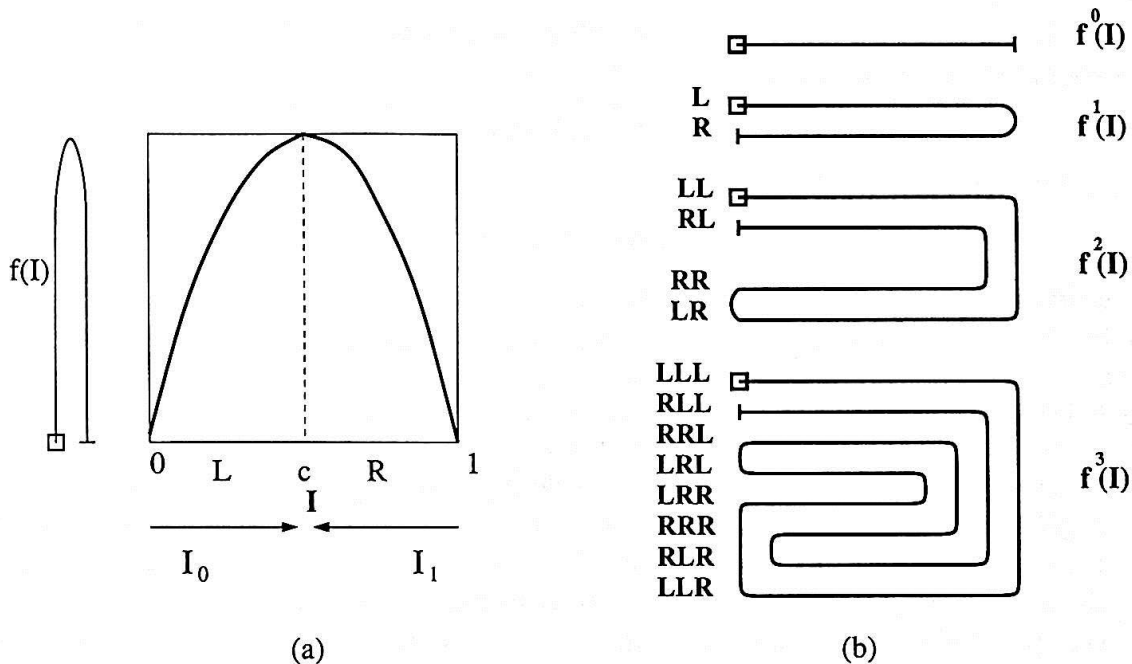


Figura 2.1: Em (a) o processo de estiramento e dobramento é mostrado para um mapa *unimodal* como o mapa logístico. Em (b) a dinâmica simbólica é usada para seguir os processos de estirar e dobrar

nesse espaço irá ser uma infinita seqüência de *L* e *R*. De agora em diante, usaremos a seguinte notação: $L \rightarrow 0$ e $R \rightarrow 1$. Definimos, então

$$\Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) | s_j = 0 \text{ ou } 1\},$$

onde Σ_2 é conhecido como espaço de seqüências de símbolos “0” e “1”. Elementos nesse espaço consistem em seqüências infinitas dos inteiros “0” e “1” como (000...) ou (1010...). Tal espaço é dotado de uma métrica [16].

Podemos definir uma dinâmica no espaço de símbolos. Essa dinâmica é dada pelo *mapa de deslocamentos* σ

$$\sigma : \Sigma_2 \mapsto \Sigma_2$$

definido por $\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ onde o primeiro símbolo é suprimido e todos os outros deslocados uma posição para a esquerda.

Como uma seqüência $s = (s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots)$ representa um ponto em Σ_2 , s será periódico de comprimento n se for dado pela seqüência

$$s = (s_0 s_1 \dots s_{n-1}, s_0 s_1 \dots s_{n-1}, \dots),$$

de modo que, para σ , existem 2^n pontos periódicos de comprimento n , cada um deles gerados por uma das 2^n seqüências obtidas a partir das combinações de 0's e 1's para um dado comprimento n .

2.1. O MAPA LOGÍSTICO

Dessa maneira, podemos representar as órbitas periódicas em Σ_2 . Órbitas de período 1 serão dadas por

$$(0000\dots) \text{ ou } (1111\dots).$$

Órbitas de período 2 serão

$$(010101\dots) \text{ ou } (101010\dots),$$

órbitas de período 3 serão

$$(001001001\dots), (010010010\dots) \text{ e } (100100100\dots)$$

e assim por diante.

O conjunto de órbitas periódicas forma um subconjunto denso em Σ_2 , pois esse subconjunto encerra todo o espaço de Σ_2 . Para mostrar isso, basta tomar uma seqüência periódica $\tau_n = (s_0 \dots s_n, s_0 \dots s_n, \dots)$ que se aproxime de um ponto arbitrário $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ pertencente a Σ_2 . Podemos tomar n suficientemente grande de modo que $\tau_n \rightarrow s$, o que mostra a proximidade entre as seqüências¹. Logo, sempre será possível encontrar uma aproximação s que pertence a Σ_2 para qualquer seqüência periódica τ_n . Os pontos periódicos τ_n 'preenchem' todo o espaço Σ_2 .

Para σ , nem todos os pontos são periódicos. Em Σ_2 , uma seqüência do tipo $s = (s_0 s_1 s_2 \dots s_n \dots)$ é uma seqüência que não se repete. Esta seqüência representa um ponto não periódico de σ . O número de seqüências não periódicas excede o de seqüências periódicas. Órbitas não periódicas, representadas pelas seqüências não periódicas, também são densas em Σ_2 .

Tanto o mapa σ como f exibem dependência sensível as condições iniciais para suas trajetórias. A demonstração também pode ser encontrada em [16]. Por consequência, as órbitas periódicas existentes no conjuntos Σ_2 e Λ são todas instáveis.

Vamos agora definir o itinerário de um ponto x . Os pontos da trajetória de algum $x \in \Lambda$, Λ o conjunto contido na união de I_0 e I_1 (figura 2.1(a)), irão incidir sobre o intervalo I_0 ou I_1 . Assim, podemos definir o itinerário de x como a seqüência $S(x) = s_0 s_1 s_2 \dots s_i \dots$ onde $s_i = 0$ se $f^i(x) \in I_0$, $s_i = 1$ se $f^i(x) \in I_1$. Portanto, o itinerário de x é uma infinita seqüência de 0's e 1's. Podemos ver $S(x)$ como um mapa de Λ em Σ_2 . A propriedade de homeomorfismo² de $S(x)$ garante que os conjuntos Λ e Σ_2 são equivalentes. Através do homeomorfismo também é possível mostrar que existe uma equivalência entre as dinâmicas do mapa de deslocamentos σ e do mapa logístico $f(x) = \mu x(1-x)$ com $\mu > 4$. Essa equivalência é garantida pela conjugação topológica³ entre estes mapas. Desse modo, todas as propriedades referentes às

¹A rigor, seja $s, t \in \Sigma_2$ tal que $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Então $d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq 1/2^n$. A grandeza d é a métrica do espaço Σ_2 e para n suficientemente grande $d[s, t] \rightarrow 0$, garantindo que $\tau_n \rightarrow s$.

²Um mapa f é um homeomorfismo se for bijetor e se f e f^{-1} são contínuas.

³A dinâmica de $f(x) = \mu x(1-x)$ para $\mu > 4$ em Λ (o conjunto estranho que, sob a ação de f , permanece no intervalo $[0, 1]$, uma vez que quase todos os pontos nesse intervalo tendem para $-\infty$ exceto Λ), é equivalente a dinâmica de σ em Σ_2 . Os mapas σ em Σ_2 e $f(x) = \mu x(1-x)$, $\mu > 4$ em Λ são topologicamente conjugados [16].

órbitas σ em Σ_2 valem para f em Λ . Podemos então estudar as propriedades das órbitas de f em Λ através das seqüências geradas por σ em Σ_2 . É o que faremos no próximo capítulo ao organizarmos as órbitas periódicas dos atratores espiral e "double-scroll" hierarquicamente.

2.1.2 Árvore Alternante Binária

A dinâmica simbólica oferece um modo de identificar pontos ou órbitas periódicas por meio de símbolos. Entretanto, apesar de completa, (todas as órbitas são identificadas) sua localização não é exata. Apenas localizamos as órbitas relativamente umas às outras. Estas órbitas podem ser resumidas num diagrama que é conhecido como árvore alternante binária.

A árvore, um diagrama mostrando os possíveis intervalos visitados pelas trajetórias de um sistema dinâmico (como o mapa logístico já mencionado), pode ser vista na figura 2.2

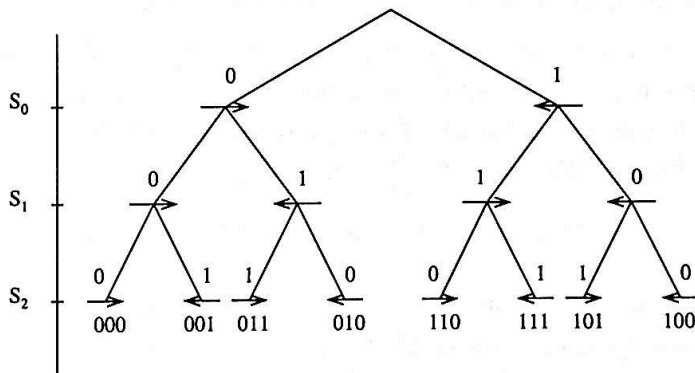


Figura 2.2: Árvore alternante binária mostrando pontos periódicos (órbitas periódicas) até o terceiro nível ($n = 0$ é o primeiro nível, $n = 1$ o segundo nível e $n = 2$ o terceiro nível).

A comparação da árvore (figura 2.2) com os processos de esticar e dobrar é imediata. No primeiro nível (s_0) temos duas possibilidades: "0" ou "1" conforme o intervalo resultante esteja a esquerda ou a direita do ponto de máximo c de I . No segundo nível (s_1) temos quatro possibilidades: "00", "01", "10" e "11", onde cada um dos intervalos gerados no nível anterior é multiplicado por duas possibilidades. No terceiro nível (s_2) teremos oito possibilidades (cada uma das possibilidades do nível dois é multiplicada por duas possibilidades) e assim sucessivamente para os demais níveis.

Toda informação referente a organização das órbitas existentes estão condensadas na árvore. Nela:

- Um ponto $x \in I$ é representado por uma seqüência de "0"s e "1"s, lidos desde o primeiro nível (s_0) até o n -ésimo nível (s_{n-1}), um símbolo por nível. Como exemplo, um $x \in I$ arbitrário será representado por uma seqüência do tipo $(s_0 s_1 s_2 \dots s_n \dots)$ cada s_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) um símbolo entre "0" e "1";

- As setas representam a orientação do intervalo: o símbolo "0" conserva a orientação e "1" reverte a orientação do intervalo original em relação a suas pré-imagens $f^{-i}(I)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. A orientação é definida de acordo com o sinal da derivada de $f^n(x)$, $x \in I$. No gráfico de $f(I)$ (figura 2.1(a)), o ramo $I_0 = [0; c]$ é monotonicamente crescente com $f'(I) > 0$ e I_0 conservando a orientação de I ; o ramo $I_1 = (c; 1]$ é monotonicamente decrescente com $f'(I) < 0$ e I_1 revertendo a orientação de I . Em uma dada seqüência $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, o número de símbolos "1"s determina o sinal de $(f^n)'$: este sinal governa a dinâmica local próximo de x contido em seu itinerário s .
- A dinâmica, dada pelo mapa de deslocamentos σ , surge em todos os níveis da árvore; para um dado nível n todas as seqüências das possíveis órbitas até esse nível estão organizadas umas em relação às outras. Observamos que, na figura 2.2, lendo os símbolos desde o primeiro nível (s_0) até o terceiro (s_2), os pontos (000), (001), (011), etc. estão ordenados tanto em σ quanto em f na mesma maneira que se apresentam na árvore binária.

Assim, a árvore fornece a ordem de 'criação' das seqüências: no exemplo acima, para seqüências (órbitas) de período 3, (000) é a primeira a ser criada, (001) a segunda e assim por diante. As seqüências são então ordenadas por uma ordem de precedência. Para o nível 3 temos

$$000 \prec 001 \prec 011 \prec 010 \prec 110 \prec 111 \prec 101 \prec 100,$$

onde o símbolo \prec indica a precedência entre as seqüências. A última seqüência, no caso (100), é chamada na dinâmica simbólica de 'geratriz' de todas as seqüências (órbitas) de período 3. A presença da seqüência geratriz indica a existência de todas as seqüências precedentes.

- Para um dado nível n todas as 2^{n-1} seqüências, representando pontos de órbitas periódicas, estão presentes na árvore.

Uma órbita periódica possui um itinerário. Esse itinerário é um conjunto de pontos visitados sequencialmente pela órbita periódica.

A representação do itinerário de uma órbita periódica (período n) dada pela seqüência

$$s = (s_0 s_1 \dots s_{n-1}, s_0 s_1 \dots s_{n-1}, \dots)$$

é obtida deslocando-se os símbolos da seqüência s acima, através do mapa de deslocamentos σ

$$\sigma(s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots) = (s_1 s_2 \dots s_{n-1} s_0 \dots).$$

Uma dada órbita periódica como a representada por s acima, possui uma sub-sequência de n símbolos $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ que se repetem indefinidamente. A partir

de agora, representaremos uma órbita periódica s de período n pela subsequência $s_0s_1 \dots s_{n-1}$. Como um exemplo, uma órbita do terceiro nível $n = 2$ pode ser representada pela seqüência $s = (s_0s_1s_2) = (001)$. Seu itinerário é obtido deslocando-se o primeiro símbolo da seqüência para a última posição e deslocando-se todos os outros para a esquerda⁴

$$s_0s_1s_2 : 001 \rightarrow 010 \rightarrow 100.$$

Após três deslocamento consecutivos, (três aplicações sucessivas de σ) as seqüências se repetem. As seqüências (001), (010) e (100) representam os três pontos que definem o itinerário da órbita periódica s . Observe que estes três pontos sempre se repetirão com a aplicação de σ

$$\sigma(001) = 010, \sigma(010) = 100, \sigma(100) = 001.$$

Por isso, os pontos que compõe o itinerário de uma órbita periódica são chamados de pontos periódicos.

Como um segundo exemplo, uma órbita com seqüência $t = (011)$ define três pontos em seu itinerário,

$$s_0s_1s_2 : 011 \rightarrow 110 \rightarrow 101$$

onde os pontos (011), (110) e (101) definem os três pontos periódicos do itinerário desta segunda órbita.

Veremos no capítulo 3 que a seqüência $S(x) = s_0s_1s_2 \dots$ usada para expressar um ponto $x \in I$, I o intervalo de definição do mapa unimodal f , é chamada também de "futuro simbólico"⁵. O futuro simbólico de uma órbita periódica, representado por $S(x)$, encerra dois tipos de informações: (1) o itinerário da órbita, formado pelos pontos periódicos pertencentes à órbita; (2) a ordem em que estes pontos periódicos se apresentam. Vamos agora mostrar como a informação (2), a ordem dos pontos periódicos, pode ser obtida de $S(x)$. Como há uma correspondência entre as dinâmicas de σ em Σ_2 e f em Λ no mapa logístico, garantida pela conjugação topológica, uma órbita periódica em Σ_2 deve corresponder a um ponto único $x \in \Lambda$. E da mesma maneira que os pontos de $x \in I$ são ordenados no intervalo $I \in \mathbf{R}$, os pontos da árvore alternante também são ordenados. Podemos então obter uma ordenação para os pontos periódicos na árvore se os escrevermos em forma binária. Seja então Γ_n o conjunto de seqüências periódicas de período n em Σ_2 . Identificamos cada seqüência com uma cadeia de símbolos $s_0s_1s_2 \dots s_{n-1}$ formada por 0's e 1's de uma maneira natural. Devido a conjugação topológica, cada seqüência de Γ_n corresponde a um único ponto em $x \in I = [0, 1]$ em f . Seja ainda $N(s_0s_1 \dots s_{n-1})$ um inteiro entre 0 e

⁴Isto é equivalente a uma *permutação cíclica* da seqüência de n símbolos $s = (s_0, s_1, \dots, s_n)$.

⁵Usamos a expressão futuro simbólico no sentido de que toda a evolução dinâmica de um ponto $x \in I$, isto é, seu "passado", "presente" e também "futuro" estão representados na seqüência $S(x)$.

2.1. O MAPA LOGÍSTICO

$2^n - 1$ correspondendo a ordem, da esquerda para a direita, dos pontos gerados pela árvore binária. Podemos ter N em forma binária B . Pode-se mostrar [16] que

$$N(s_0s_1 \dots s_{n-1}) = a_0 \cdot 2^{n-1} + a_1 \cdot 2^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot 2^0 \quad (2.2)$$

$$B(s_0s_1 \dots s_{n-1}) = a_0a_1 \dots a_{n-1}, \text{ com } a_j = 0 \text{ ou } a_j = 1 \quad (2.3)$$

$$a_j = \sum_{i=0}^j s_i \text{ mod } 2. \quad (2.4)$$

Podemos ainda escrever N como um número fracionário e real $\beta(s_0s_1 \dots s_{n-1})$ entre 0 e $(2^n - 1)/2^n$, que também dá a ordem das seqüência na árvore binária da esquerda para a direita, tal que

$$\beta(s_0s_1 \dots s_{n-1}) = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2^n}. \quad (2.5)$$

A fração $\beta(s_0s_1 \dots s_{n-1})$ pode ser vista como a “coordenada simbólica” do itinerário, isto é, do futuro simbólico, de $s_0s_1 \dots s_{n-1}$. No próximo capítulo iremos completar a idéia de coordenada simbólica ao introduzirmos o plano simbólico para as seqüências simbólicas obtidas das órbitas periódicas extraídas dos atratores espiral e “double-scroll”.

Como um exemplo da ordenação das seqüências, na tabela 2.1 temos as coordenadas simbólicas para as seqüências simbólicas de período $n = 3$ para a árvore binária. Abaixo mostramos as posições relativas dos pontos periódicos de duas órbitas de

Tabela 2.1: Coordenadas simbólicas para $n = 3$ para a árvore alternante binária.

N posição x	B posição x em binário	$s_0s_1s_2$ seqüência simbólica	β $x \in [0, 1]$
0	000	000	0.0000
1	001	001	0.1250
2	010	011	0.2500
3	011	010	0.3750
4	100	110	0.5000
5	101	111	0.6250
6	110	101	0.7500
7	111	100	0.8750

período três (100) e (110), segundo a tabela 2.1. Os pontos periódicos são obtidos pela permutação cíclica dos símbolos que formam a órbita. As posições relativa dos pontos periódicos na órbita (100) é

$$\begin{aligned} s_0s_1s_2 &: 001 \rightarrow 010 \rightarrow 100 \\ N &: 1 \rightarrow 3 \rightarrow 7. \end{aligned}$$

E na órbita (110) é

$$\begin{array}{l} s_0 s_1 s_2 : 011 \rightarrow 110 \rightarrow 101 \\ N : 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6. \end{array}$$

Todas estas idéias, exemplificadas pela dinâmica simbólica do mapa logístico, também se aplicam a qualquer mapa unimodal. Na próxima seção, as aplicaremos no atrator espiral, cujo mapa de primeiro retorno é unimodal. Também estenderemos estas idéias ao atrator "double-scroll" que, ao contrário ao atrator espiral, possui um mapa de primeiro retorno na forma de um mapa quártico com três pontos de extremos.

2.2 O Circuito de Chua

Todas as idéias desenvolvidas na seção anterior podem ser generalizadas para mapas que não sejam unimodais. Na verdade, em mapas bimodais e mesmo em mapas de outras classes, os pontos extremos (máximos ou mínimos) os repartem em ramos. Quando os mapas de primeiro retorno são extraídos de atratores, cada ramo representa uma região topológica desse atrator. Por exemplo, mapas unimodais (como o mapa logístico) terão um único ponto crítico definindo dois ramos, representando duas regiões no atrator; mapas bimodais terão dois pontos críticos definindo três ramos, representando três regiões no atrator, e assim por diante. Estes ramos são o resultado dos processos de estiramento e dobramento, agindo sobre o sistema dinâmico, provocados pelas suas variedades estável e instável. A cada ramo, então, atribuímos um símbolo e uma trajetória do sistema dinâmico em questão é caracterizada por uma seqüência de símbolos que descrevem a seqüência de ramos pelos quais esta trajetória passa.

Nesta seção, usaremos mapas de primeiro retorno associados aos atratores tipo espiral (A_{espiral}^{\pm}) e "double-scroll" ($A_{\text{simetrico}}$) para identificar as diferentes regiões topológicas desses atratores e proceder com a codificação simbólica de suas órbitas periódicas instáveis.

2.2.1 Mapas de Primeiro Retorno

Obtemos um mapa de primeiro retorno plotando a intersecção da trajetória do sistema com uma superfície transversal à trajetória (uma seção de Poincaré), ou seja \vec{x}_{i+1} em função do retorno anterior \vec{x}_i à superfície de seção. Através de um mapa de primeiro retorno podemos visualizar os processos de estirar e dobrar responsáveis pela particular geometria de um sistema dinâmico apresentando comportamento caótico.

Aplicamos estas idéias ao circuito de Chua. Para a obtenção do mapa, usamos o seguinte conjunto como plano transversal à trajetória gerada pelo atrator

$$P_{x_{\pm}} = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid x = x_{\pm} = \pm \frac{a-b}{1+b}, y \leq y_{\pm} = 0 \right\}, \quad (2.6)$$

onde x_{\pm} e y_{\pm} são as duas coordenadas dos pontos fixos (seção 1.3) do circuito de Chua e a e b as constantes adimensionais (seção 1.2). Tal conjunto define duas seções de Poincaré, uma delas passando por x_{-} e a outra por x_{+} , situadas nos domínios D^{-} e D^{+} respectivamente. Evidentemente, para os atratores tipo espiral A_{espiral}^{\pm} apenas uma das seções ($P_{x_{+}}$ ou $P_{x_{-}}$) é necessária na construção do mapa de primeiro retorno para um dos atratores. A intersecção da trajetória com a superfície transversal a ela (uma seção de Poincaré) foi obtida com o “truque de Hénon”, que está detalhado no apêndice A. Para o atrator tipo espiral (A_{espiral}^{-}), o mapa de primeiro retorno, que pode ser visto na figura (2.3), possui dois ramos, com um único ponto de extremo (ponto de máximo), como um mapa unimodal. Ao ramo à esquerda do ponto de máximo ($w < w_c$), monotonicamente crescente, associamos o símbolo “0”, enquanto que ao ramo à direita do ponto de máximo ($w > w_c$), monotonicamente decrescente, associamos o símbolo “1”.

Comumente, um mapa de primeiro retorno é construído usando apenas uma das variáveis que compõe o fluxo em seu espaço de fases. Entretanto, seguindo as sugestões dadas em [6], a variável w usada no mapa da figura 2.3 é dada por $w = |z| + 1.3|y|$, onde $y = v_2$ e $z = i$ nas equações (1.7), tal que y e z assim definidas são variáveis equivariantes (seção 1.4). O fator 1.3 é um fator empírico. Usamos w como definido acima porque o mapa de primeiro retorno construído com apenas uma das variáveis se mostra em múltiplas folhas, com os ramos duplicados, dificultando a determinação do ponto de máximo do mapa e a correta partição dos ramos.

Para o atrator “double-scroll”, o mapa de primeiro retorno pode, numa primeira aproximação, ser considerado como “quártico” (figura 2.4), possuindo três pontos de extremos (dois máximos e um mínimo locais), definindo quatro ramos. Na figura 2.4 os ramos identificados com os símbolos “0” e “2” são monotonicamente crescente e conservam a orientação dos intervalos (em relação a sua pré-imagem), enquanto que os ramos identificados com os símbolos “1” e “3” são monotonicamente decrescente e revertem a orientação dos intervalos (em relação a sua pré-imagem). A superfície P usada no mapa de primeiro retorno para o atrator $A_{\text{simétrico}}$ é a mesma usada para o atrator espiral, definida pela equação (2.6). Nesse mapa, compomos a união dos conjuntos $P_{x_{+}}$ e $P_{x_{-}}$

$$P = P_{x_{+}} \cup P_{x_{-}},$$

de tal forma que temos o mapa de primeiro retorno com pontos nos dois domínios D^{+} e D^{-} do atrator simétrico “double-scroll”. As regiões do mapa em D^{+} e D^{-} são antissimétricas: os ramos são idênticos nos dois domínios mas invertidos. Isso se deve a propriedade de equivariância (seção 1.4). Assim, usamos a variável w na construção do mapa, definida por $w = |z| + 0.95|y|$, ou seja, usamos o valor absoluto das variáveis equivariantes $z = i$ e $y = v_2$ e 0.95 é um fator empírico. As razões para definir w dessa forma são duas: a primeira, é que com w os pontos do mapa de primeiro retorno que estão no domínio D^{+} são mapeados exatamente sobre os pontos do mapa em D^{-} ; a segunda, é que w ‘anula’ a duplicação dos ramos, permitindo a

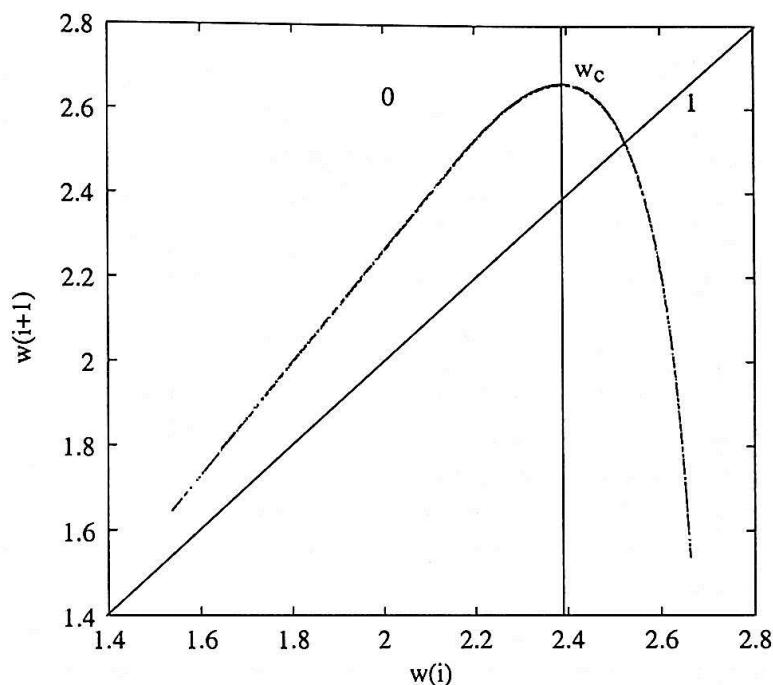


Figura 2.3: Mapa de primeiro retorno para o atrator tipo espiral A_{espiral}^- . Este mapa é formado por dois ramos identificados pelos símbolos "0" e "1" que são os ramos *monotonicamente crescente* ($w < w_c$) e *monotonicamente decrescente* ($w > w_c$) respectivamente. A variável w é dada por $w = |z| + 1.3|y|$ e o ponto de máximo é $w_c = 2.39$.

correta partição dos mesmos.

Observando o mapa de primeiro retorno para o "double-scroll" (figura 2.4), notamos que a região entre w_{c2} e w_{c3} não é contínua. Esta região possui outros pontos de extremos, com ramos adicionais. Entretanto, estes ramos são de difícil visualização. Optamos então por limitar o número de pontos extremos a 3, repartindo o mapa em 4 ramos. Assumimos portanto que este mapa é aproximadamente quártico.

2.2.2 Localização das Órbitas Periódicas Instáveis

Utilizamos duas técnicas para a localização de órbitas periódicas em um atrator. A primeira, conhecida como retorno aproximado, lida diretamente com a série temporal, obtida numericamente ou experimentalmente. A segunda, conhecida como Newton-Raphson, utiliza o conhecimento prévio das equações que definem o fluxo que origina o atrator. A técnica de Newton-Raphson é uma extensão do método de Newton aplicado em equações diferenciais autônomas. As propriedades de recorrência existentes em um sistema dinâmico são evidenciadas no espectro de órbitas periódicas instáveis imersas no conjunto caótico. Para entendermos isto, vamos considerar um fluxo tridimensional recorrente nas vizinhanças de uma órbita periódica

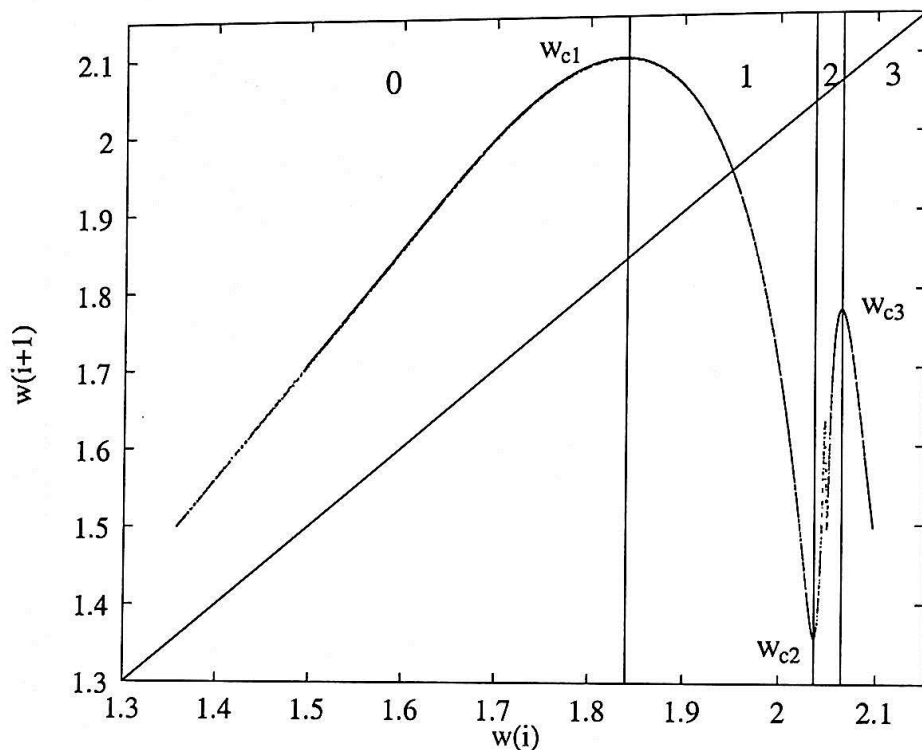


Figura 2.4: Mapa de primeiro retorno para o atrator $A_{\text{simétrico}}$ "double-scroll" (cenário simétrico S). Este mapa é formado por quatro ramos identificados pelos símbolos "0", "1", "2" e "3". Os ramos identificados pelos símbolos "0" e "2" são monotonicamente crescentes, enquanto que os ramos identificados pelos símbolos "1" e "3" são monotonicamente decrescentes. A variável w é dada por $w = |z| + 0.95|y|$ e os pontos críticos são: $w_{c1} = 1.84$, $w_{c2} = 2.037$ e $w_{c3} = 2.065$.

hiperbólica⁶. Uma vez que este fluxo é recorrente, vamos escolher uma superfície de seção transversal ao fluxo e que esteja nas vizinhanças de seu ponto fixo. Dessa maneira, a superfície de seção será um mapa compacto nele mesmo, podendo formar um conjunto caótico, na forma de ferradura, contendo uma infinidade de órbitas periódicas. Uma trajetória nesse conjunto caótico determina pontos na superfície de seção que estão arbitrariamente próximos de cada ponto do conjunto, inclusive de seu ponto de partida.

Consideremos agora um pequeno segmento de uma trajetória caótica, retornando próximo de algum ponto periódico. Com pequenos ajustes no ponto de partida desse segmento podemos fazer com que ele retorne precisamente ao ponto de partida. Assim procedendo, teremos uma órbita periódica.

A técnica do retorno aproximado se baseia nas observações acima. Esta técnica foi inicialmente aplicada por Lathrop e Kostelich em [3] e também Mindlin *et. al.* [2] ao problema de extração de órbitas periódicas de uma série temporal experimental,

⁶Órbitas hiperbólicas devem ser entendidas como originadas por um fluxo com ao menos duas direções assintóticas: uma instável, caracterizando uma variedade instável; e outra estável, caracterizando uma variedade estável.

obtida a partir da reação química de Besoulov-Zhabotinskii.

A técnica do retorno aproximado consiste então em seguir uma trajetória caótica no interior do atrator. Essa trajetória se aproxima de uma órbita periódica 'sombreando-a'. Como a órbita é instável, após um intervalo de tempo, a trajetória será ejetada em direção a outra órbita, percorrendo-a por algum tempo, novamente ejetada para outra órbita e assim sucedendo indefinidamente. Cada aproximação é medida por uma distância euclidiana ε valendo poucos por cento das dimensões do atrator em seu espaço de fases.

Como proposto por Lathrop e Kostelich [3], construímos histogramas de *retorno aproximado* para os atratores espiral (A_{espiral}^-) e "double-scroll" ($A_{\text{simetrico}}$). O método para a construção dos histogramas de retorno aproximado é detalhada no apêndice B.

Na figura 2.5 podemos ver o histograma de retorno aproximado para o atrator espiral (A_{espiral}^-). Nesse histograma, cada pico indica o número de vezes que uma trajetória no atrator se aproxima de alguma órbita periódica, com uma tolerância ε , quando evolue no tempo. A técnica do retorno aproximado trabalha diretamente com o atrator em seu espaço de fases, construído ou reconstruído a partir da série temporal. A série temporal pode tanto ser obtida experimentalmente como obtida numericamente. Aqui, a obtenção da série temporal foi feita a partir da integração numérica⁷ das equações para o circuito de Chua (equações (1.7)).

A figura 2.5 possui doze picos, todos igualmente espaçados com intervalos de tempo $\Delta t = 163$ (unidades arbitrárias). Este valor de Δt é o período das órbitas periódicas instáveis: órbitas de período 1 terão $\Delta t = 163$; órbitas de período 2 terão $2\Delta t = 326$ e assim por diante.

Na figura 2.6 temos o histograma de retorno aproximado para o atrator "double-scroll" ($A_{\text{simetrico}}$). Agora os picos são igualmente espaçados somente até o quarto pico com $\Delta t = 175$. Já o quinto pico, bem pronunciado, não possui um Δt múltiplo de 175 como os demais. Podemos concluir com isso que este atrator possui órbitas periódicas de período independente. Daí em diante, os demais picos não são bem definidos e espaçados irregularmente. Esse comportamento, diferente ao observado para o atrator espiral, provavelmente se deve ao fato da dinâmica do "double-scroll" se dar ao redor dos três pontos fixos, nos dois domínios D^+ e D^- simultaneamente. Já nos atratores espirais, a dinâmica se desenrola ao redor de dois pontos fixos, em apenas um dos domínios: D^+ ou D^- .

Localizar uma órbita periódica instável através da técnica de retorno aproximado consiste em localizar, na série temporal ou no atrator em seu espaço de fases, trechos da trajetória que retornem próximos a algum ponto periódico dessa órbita. A localização é obtida com alguma imprecisão, definida pelo valor de ε .

Ao contrário da técnica do retorno aproximado, o método de Newton-Raphson permite localizar uma órbita periódica instável com a precisão desejada. Para tanto, duas condições são necessárias: primeiro, uma estimativa inicial da localização da

⁷A técnica de integração numérica utilizada em todo este trabalho foi a de Runge-Kutta de quarta ordem [30].

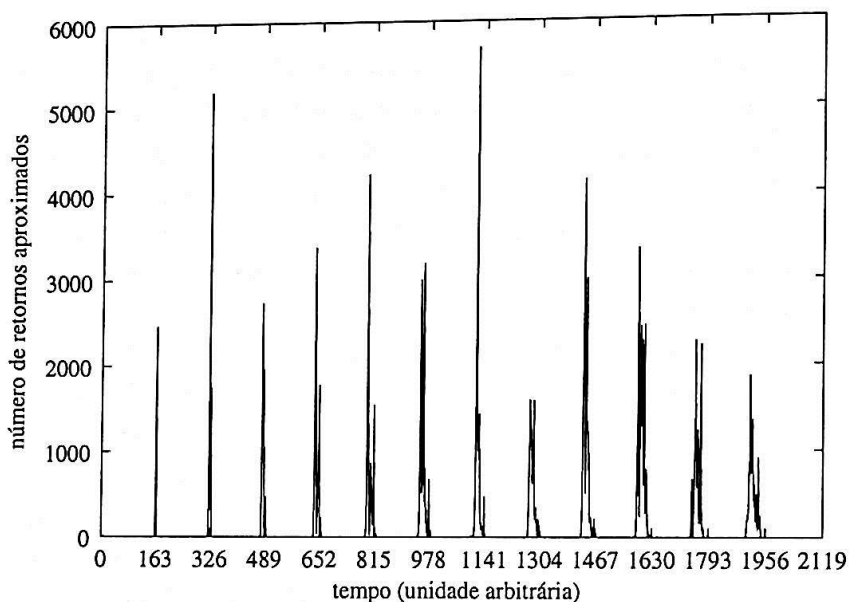


Figura 2.5: Histograma de retornos aproximados para o circuito de Chua para o atrator tipo espiral A_{espiral}^- (cenário espiral E). Aqui temos $\varepsilon = 0.5\%$ das dimensões do atrator em seu espaço de fases.

órbita; segundo, o conhecimento *a priori* das equações do fluxo que geram o atrator caótico (o método de Newton-Raphson está detalhado no apêndice B). Portanto, para utilizarmos este método, empregamos a técnica de retorno aproximado para obtermos uma estimativa inicial da localização das órbitas e, a partir daí, refinamos esta estimativa com o método de Newton-Raphson.

Seguindo as sugestões de Letellier *et. al.* em [6], criamos um algoritmo para a obtenção das órbitas periódicas no qual reúnem-se as técnicas de retorno aproximado e de Newton-Raphson, aplicando-o ao circuito de Chua (equações (1.7)). O algoritmo é como segue. Consideremos uma mapa em duas dimensões, de coordenadas (genéricas) (x, y) , obtido pela intersecção das trajetórias de um fluxo (tridimensional) com um plano perpendicular xy . A coordenada (x_0, y_0) indica o ponto inicial de uma órbita e o ponto (x_n, y_n) a n -ésima iteração da órbita no mapa. A distância euclidiana $d_n(x_0, y_0, x_n, y_n)$ define o retorno aproximado dessa órbita. Procuramos então por $d_n < \varepsilon$ na série (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots$, gerada pelo mapa⁸ e, ao acharmos, iniciamos com o método de Newton-Raphson até encontrarmos $d_n = 0$, localizando então uma órbita de período n . Aplicamos este algoritmo para os dois atratores estudados: o atrator tipo espiral (A_{espiral}^-) e o “double-scroll” ($A_{\text{simétrico}}$). O plano xy , perpendicular ao fluxo, que utilizamos para construir o mapa bidimensional é o mesmo usado para construir os mapas de primeiro retorno, dado pela equação (2.6). Para o atrator espiral A_{espiral}^- , xy é a seção de Poincaré definida pelo conjunto P_x^- . Para o atrator $A_{\text{simétrico}}$, xy é a seção de Poincaré dada pelo conjunto P .

⁸Usamos ε da ordem 0.5% a 1.0% das dimensões do atrator em seu espaço de fases.

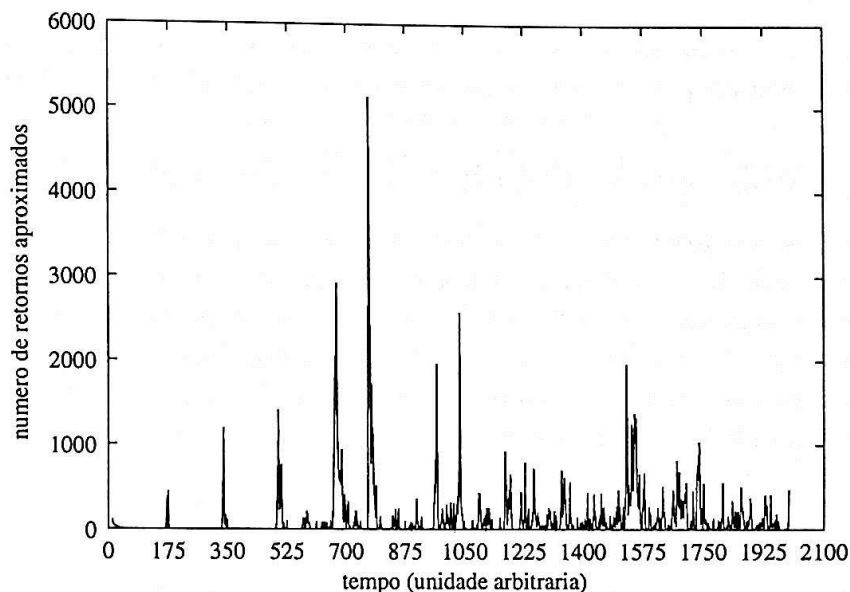


Figura 2.6: Histograma de retornos aproximados para o circuito de Chua para o atrator tipo “double-scroll” (cenário simétrico S). Aqui temos $\varepsilon = 0.5\%$ das dimensões do atrator em seu espaço de fases.

Na tabela 2.2 temos o espectro de órbitas periódicas instáveis até o período 8, obtido com nosso algoritmo para o atrator espiral $A_{espiral}^-$. Obtivemos o espectro completo, usando uma série temporal gerada pelo mapa em duas dimensões do parágrafo anterior. Esta série possui comprimento suficientemente grande para permitir que uma determinada órbita seja identificada mais de três vezes. Verificamos então exaustivamente o espectro de órbitas obtido para garantir que todas as órbitas estivessem presentes. Podemos ver também, na tabela 2.3, o espectro de órbitas periódicas instáveis para o atrator “double-scroll” $A_{simetrico}$ até o período 6. Para estas tabelas:

- A primeira coluna mostra o período das órbitas, definido pelo número de vezes em que ela retorna a superfície de seção;
- A segunda coluna, o número de órbitas diferentes encontradas para um dado período;
- A terceira e quarta colunas indicam, respectivamente, as coordenadas y e z da intersecção da órbita com a superfície da seção de Poincaré. A coordenada x é a coordenada do ponto fixo pela qual a seção é definida;
- A quinta coluna indica o período orbital em unidades definidas nas equações (1.7) e
- Finalmente, a última coluna mostra a codificação simbólica das órbitas, obtidas com os mapas de primeiro retorno (figuras 2.3 e 2.4), para os atratores $A_{espiral}^-$ e

$A_{simetrico}$ respectivamente. Uma determinada órbita é codificada pela seqüência simbólica do ponto periódico com coordenada y mais afastado da origem.

2.2.3 Codificação Simbólica das Órbitas Periódicas

Os mapas de primeiro retorno fornecem um modo de codificar simbolicamente as órbitas periódicas instáveis. Uma determinada órbita segue um itinerário, que é uma seqüência de símbolos, expressando as diversas partições do atrator pelas quais a órbita passa. Estas partições decorrem dos diversos ramos evidenciados no mapa de primeiro retorno. Para o atrator espiral $A_{espiral}^-$, cada código $s(w_i)$ de uma determinada órbita é dado por

$$s(w_i) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } w_i < w_c \\ 1 & , \text{ se } w_i > w_c \end{cases}$$

onde w_i é a coordenada w do i -ésimo ponto periódico (veja seção 2.2.1). Dessa forma, uma órbita de período p possui p pontos periódicos e é representada pela seqüência simbólica de p símbolos

$$s = s(w_1)s(w_2)s(w_3) \dots s(w_p),$$

Para o atrator "double-scroll" $A_{simetrico}$, cada código $s(w_i)$ para uma determinada órbita é dado por

$$s(w_i) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } w_i < w_{c1} \\ 1 & , \text{ se } w_{c1} < w_i < w_{c2} \\ 2 & , \text{ se } w_{c2} < w_i < w_{c3} \\ 3 & , \text{ se } w_{c3} < w_i \end{cases}$$

de modo que uma dada órbita de período p é representada pela mesma seqüência simbólica de p símbolos do parágrafo anterior.

Como um exemplo, seja uma órbita de período 3 identificada pela seqüência $s = (110)$. Esta órbita possui três pontos periódicos, de seqüências: "110", "101" e "011". Estes pontos são obtidos pela permutação cíclica dos símbolos que compõe a órbita (110). A menos que seja dito ao contrário, as órbitas periódicas são expressas com os símbolos entre parênteses, iniciando com o símbolo cuja a coordenada y está mais afastada da origem ($y = 0$).

É interessante comparar o espectro de órbitas periódicas instáveis para o atrator espiral $A_{espiral}^-$, com as órbitas contidas na árvore alternate binária. A árvore binária possui 2^n pontos periódicos em cada nível n . Na verdade, cada uma das combinações possíveis dos dois símbolos 0 e 1 em cada nível (período) n da árvore binária forma um ponto periódico pertencente ao itinerário de alguma órbita. Na tabela 2.4 podemos ver o espectro de órbitas que a árvore binária fornece. Uma órbita é representada por uma das seqüências que identifica um dos pontos periódicos de seu itinerário. Os

demais pontos podem ser obtidos pela permutação cíclica desta seqüência. O espectro de órbitas obtido a partir da árvore binária é completo. Entretanto, em muitos sistemas reais, no qual o conjunto de órbitas periódicas pode ser codificado por dois símbolos, nem todas as órbitas previstas pela árvore binária estão presentes. Estes sistemas tem suas órbitas descritas por uma árvore binária incompleta. Dizemos que estes sistemas sofreram um processo de 'poda' [31] ou que as órbitas ausentes foram 'podadas'.

Comparando a tabela 2.2 com a tabela 2.4, notamos que o processo de poda já se manifesta nas órbitas de período 1. Na árvore binária, duas órbitas de período 1 são possíveis: (0) e (1). No atrator espiral A_{espiral}^- , a órbita (0) sofre uma poda. Chamaremos as órbitas que sofrem poda de órbitas não-permitidas. Do período 2 até o período 6 não há podas de órbitas em relação a árvore binária. Todas as órbitas encontradas na árvore binária entre estes períodos estão presentes no atrator espiral A_{espiral}^- . A poda de órbitas volta a ocorrer a partir do período 7.

O processo de poda também ocorre para o atrator $A_{\text{simetrico}}$ "double-scroll". Para termos uma idéia de como isso acontece, podemos comparar algumas órbitas de baixo período, como por exemplo (301) ou (200), com a árvore alternante de quatro símbolos (tabela 2.5). Para a árvore de quatro símbolos, as possibilidades para órbitas de período 3 são 17 (o número de pontos periódicos é $4^n = 4^3 = 64$ para $n = 3$). Entretanto, na tabela 2.3 vemos que o atrator $A_{\text{simetrico}}$ possui apenas 5 órbitas de período 3: (100), (101), (200), (301) e (300), com o processo de poda agindo sobre as 12 restantes, ou seja, as demais órbitas são não-permitidas.

Tabela 2.2: (I) Espectro de órbitas periódicas instáveis para o atrator tipo espiral $A_{espiral}^-$ (cenário espiral E). As coordenadas y e z são do ponto periódico mais afastado da seção de Poincaré P_- . O período orbital é dado em unidades arbitrárias (de acordo com as constantes das equações (1.7)).

período	número	coordenada y	coordenada z	período orbital	seqüência
1	1	0.355969	2.060343	3.279190	1
2	1	0.380220	2.098244	6.461487	10
3	2	0.380330	2.112240	9.696066	101
		0.388819	2.119516	9.603776	100
4	3	0.378275	2.107688	12.992824	1011
		0.388977	2.129868	12.804077	1001
		0.393345	2.131243	12.734498	1000
5	6	0.379110	2.109425	16.264183	10111
		0.383923	2.107424	16.170103	10110
		0.387477	2.126501	16.109447	10011
		0.389686	2.122016	16.062037	10010
		0.393488	2.138606	15.911679	10001
		0.395959	2.138435	15.866200	10000
6	9	0.378759	2.108697	19.546526	101111
		0.382473	2.103817	19.459271	101110
		0.385952	2.123788	19.283093	100101
		0.388119	2.127780	19.375027	100111
		0.391105	2.125702	19.309144	100110
		0.392440	2.136122	19.220406	100011
		0.394071	2.133682	19.189325	100010
		0.396380	2.143670	19.036973	100001
		0.397506	2.143324	19.018181	100000
7	14	0.371094	2.092864	22.440264	1010001
		0.378905	2.109001	22.824396	1011111
		0.382176	2.102901	22.577219	1011100
		0.383986	2.107582	22.629468	1011010
		0.387854	2.127253	22.659564	1001111
		0.388598	2.129113	22.500291	1001101
		0.389490	2.121509	22.524176	1001010
		0.390528	2.124196	22.599004	1001110

Tabela 2.2: (II) Continuação da tabela anterior.

período	número	coordenada y	coordenada z	período orbital	seqüência
		0.391506	2.134834	22.391497	1000101
		0.391599	2.126654	22.421867	1001100
		0.392931	2.137031	22.482003	1000111
		0.393678	2.132132	22.337552	1000100
		0.395643	2.141608	22.338444	1000011
		0.396356	2.140688	22.324893	1000010
8	21	0.378841	2.108867	26.104150	10111111
		0.382458	2.103781	25.919815	10111010
		0.386482	2.124861	25.741422	10010101
		0.387477	2.126868	25.800078	10011101
		0.387958	2.127460	25.936486	10011111
		0.388603	2.128735	25.805775	10011011
		0.389222	2.120818	25.775319	10010110
		0.389744	2.121874	25.666215	10010100
		0.390449	2.123682	25.719244	10011100
		0.391039	2.133930	25.529405	10001001
		0.391203	2.125962	25.763030	10011010
		0.391869	2.135055	25.687414	10001011
		0.392728	2.136657	25.767951	10001111
		0.393090	2.137859	25.607471	10001101
		0.393896	2.133196	25.652132	10001010
		0.394462	2.134780	25.728950	10001110
		0.394859	2.141104	25.506201	10000101
		0.395114	2.136042	25.552924	10001100
		0.396134	2.142237	25.596963	10000111
		0.396308	2.139451	25.470544	10000100
		0.396598	2.141827	25.586062	10000110

Tabela 2.3: Espectro de órbitas periódicas instáveis para o atrator "double-scroll" $A_{simétrico}$ (cenário simétrico S). As coordenadas y e z são do ponto periódico mais afastado da seção de Poincaré $P_{x\pm}$. O período orbital é dado em unidades arbitrárias (de acordo com as constantes das equações (1.7)).

período	número	coordenada y	coordenada z	período orbital	seqüência
1	1	0.238835	1.723136	3.465016	1
2	3	0.255731	1.756439	6.749340	10
		0.271755	1.801976	15.866850	20
		0.273648	1.807467	15.372343	30
3	5	0.254354	1.764066	10.172782	101
		0.261392	1.772365	10.004193	100
		0.267794	1.790563	11.593808	200
		0.277315	1.822740	20.938180	301
		0.279492	1.825021	20.612217	300
4	5	0.253742	1.762397	13.650343	1011
		0.264896	1.782299	13.438200	1000
		0.266346	1.786426	13.870500	2000
		0.274056	1.808673	15.491100	3020
		0.275432	1.818019	28.290667	3011
5	8	0.253928	1.762884	17.111360	10111
		0.257382	1.761085	16.928493	10110
		0.261704	1.773286	16.756951	10010
		0.265074	1.791833	18.207347	20011
		0.267593	1.790039	18.180170	20010
		0.269944	1.796750	19.624129	20120
		0.272808	1.811622	19.231108	30201
		0.274656	1.810440	19.369224	30200
6	13	0.256868	1.759637	20.402852	101110
		0.259515	1.777453	20.362564	100111
		0.262449	1.775395	20.201285	100110
		0.265025	1.791706	21.625707	200111
		0.265219	1.792290	21.600775	200101
		0.271572	1.801488	22.849405	202010
		0.272749	1.811363	22.606195	302011
		0.274438	1.809847	22.485890	302010
		0.276692	1.821237	22.233624	301201
		0.277925	1.820145	22.336550	301200
		0.278753	1.826136	20.734740	300301
		0.279709	1.828285	21.877167	300201
		0.280337	1.827820	21.952100	300200

Tabela 2.4: Espectro de órbitas da árvore alternante binária até o período 8. As órbitas estão representadas por um ponto de seu itinerário que não é necessariamente o mais afastado da origem como nas tabelas anteriores. Para uma dada órbita, seus pontos periódicos são obtidos pela permutação cíclica da seqüência simbólica usada em sua representação.

período	número	seqüência	período	número	seqüência
1	2	0	8	30	0101011
		1			0011111
2	1	01			0101111
3	2	001			0110111
		011			0111111
4	3	0001			0000001
		0011			0000011
		0111			00000101
5	6	00001			00001001
		00011			00000111
		00101			00001011
		00111			00001101
		01011			00010011
		01111			00010101
6	9	000001			00011001
		000011			00100101
		000101			00001111
		000111			00010111
		001011			00011011
		001101			00011101
		001111			00100111
		010111			00101011
		011111			00101101
7	18	0000001			00110101
		0000011			00011111
		0000101			00101111
		0001001			00110111
		0000111			00111011
		0001011			00111101
		0001101			01010111
		0010011	01011011		
		0010101	00111111		
		0001111	01011111		
		0010111	01101111		
		0011011	01111111		
		0011101			

Tabela 2.5: Órbitas previstas pela árvore de quatro símbolos até o período 3. Como na tabela anterior, uma órbita está representada por um ponto de seu itinerário que não é necessariamente o mais afastado da origem.

período	número	seqüência	período	número	seqüência
1	4	0			223
		1			331
		2			311
		3			113
2	6	01			133
		02			123
		03			012
		12			023
		13			233
		23			
3	17	001			
		011			
		002			
		022			
		003			
		033			
		221			
		211			

Capítulo 3

Plano Simbólico

Órbitas periódicas possuem uma organização no interior do atrator. Essa organização é qualitativa: as órbitas periódicas são organizadas umas em relação às outras. Toda a organização está contida nas seqüências simbólicas usadas para rotular as órbitas periódicas. Nesse capítulo mostraremos como as seqüências simbólicas, representando as órbitas periódicas extraídas dos atratores, podem mostrar sua organização. Para tal, introduziremos o conceito de plano simbólico, que é um gráfico bi-dimensional onde as seqüências simbólicas são representadas hierarquicamente. Do plano simbólico, podemos obter informações a respeito do processo de poda de órbitas que age nos atratores. Construímos o plano simbólico para os atratores espiral e “double-scroll”. Mostramos também como se dá o surgimento da órbita homoclínica no circuito de Chua e sua relação com o regime hiperbólico (regime dinâmico no qual existem no sistema todas as órbitas previstas na árvore binária).

3.1 O Mapa Unimodal e o Atrator Espiral

Como já mostramos no capítulo 2, os símbolos de uma seqüência simbólica $s = s_0 s_1 s_2 \dots s_n$, ao mesmo tempo que identificam, formam o itinerário de uma órbita, representando seu futuro simbólico. Esse itinerário reflete os processos de estiramento e dobras que a órbita sofre no interior do atrator. Tomemos como exemplo um mapa unimodal f como um mapa de primeiro retorno. Iterações “para frente” de f sobre um ponto x , isto é $f^n(x)$ onde $n = 0, 1, 2, \dots$, seguem a variedade instável das diversas foliações do sistema dinâmico representado por f . Iterações “para trás” de f , ou seja $f^{-n}(x)$, seguem a variedade estável dessas foliações. Um ponto x no gráfico de f é representado pela seqüência simbólica s acima. Sua posição, nas diversas foliações de f , é dada pelos símbolos de s . A construção do plano simbólico, a partir das seqüências simbólicas s , permite expressar toda a “história simbólica” dos pontos periódicos, mantendo a mesma organização topológica que esses pontos possuem no interior do atrator em seu espaço de fases. Vamos então mostrar como isso é feito.

Seja uma órbita cujo itinerário é dado por

$$s = s_{-D} \dots s_{-3}s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2s_3 \dots s_D,$$

onde s_0 representa o “presente simbólico”, s_{-i} o “passado” e s_i o “futuro simbólico”. A ordem dos pontos gerados pelo itinerário de s pode ser obtida convertendo a seqüência simbólica de cada ponto do itinerário em um número binário fracionário e real¹ no intervalo $[0, 1]$. O número binário correspondente ao futuro simbólico da seqüência s é dado por

$$\alpha = 0.a_1a_2a_3 \dots = \sum_{i=1}^D \frac{a_i}{2^i}, \quad (3.3)$$

onde

$$a_i = \sum_{j=0}^{i-1} s_j \pmod{2}.$$

O número binário correspondente ao passado simbólico da seqüência s é dado por

$$\beta = 0.b_1b_2b_3 \dots = \sum_{i=1}^D \frac{b_i}{2^i}, \quad (3.4)$$

onde

$$b_i = \sum_{j=1}^i s_{-j} \pmod{2}.$$

O gráfico construído com o conjunto de pontos com coordenadas α e β acima definidas formam o que chamamos de plano simbólico. O plano simbólico como acima definido já foi aplicado, por exemplo, no estudo topológico das órbitas periódicas no mapa de Hénon [31], no estudo do mapa de Hénon com forte dissipação [32] e também no estudo das propriedades de bifurcações de sistemas dinâmicos de duas ou mais dimensões, descritos por uma dinâmica simbólica unidimensional [33]. As coordenadas simbólicas α e β ordenam os pontos periódicos a elas associados da mesma forma que o eixo real \mathbf{R} ordena os números reais. Um exemplo de como ordenar seqüências simbólicas

¹Um número fracionário e real $x_0 \in [0, 1]$ escrito na base decimal, pode ser escrito em base binária de acordo com a expressão

$$x_0 = \frac{\delta_1}{2^1} + \frac{\delta_2}{2^2} + \frac{\delta_3}{2^3} + \frac{\delta_4}{2^4} + \frac{\delta_5}{2^5} + \dots \quad (3.1)$$

$$= 0.\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4\delta_5 \dots \quad (3.2)$$

onde $\delta_i = 0$ ou $\delta_i = 1$.

foi dado no final da seção 2.1.2, quando discutimos a posição relativa dos pontos periódicos de duas órbita de período três na árvore binária. Aqui, estenderemos a idéia da ordenação em um eixo, aplicável a mapas unidimensionais, para os dois eixos usados no plano simbólico [31, 32, 33].

O processo de construção do plano simbólico é o mesmo que o empregado no mapa da ferradura de Smale [17]. Seja um quadrado S (figura 3.1(a)) o qual esticamos na direção vertical por um fator maior que 2 e o contraímos na direção horizontal por um fator menor que $1/2$ (figura 3.1(b)). Então, dobramos o filamento em direção as suas pontas (figura 3.1(c)) e o sobrepomos no quadrado original (figura 3.1(d)). Este é o resultado da aplicação do mapa da ferradura M_F sobre S . Observe que uma fração da região do filamento dobrado é mapeada para fora do quadrado S . Desse modo, a cada mapeamento M_F apenas parte das condições iniciais permanecerá no conjunto. O mapeamento inverso M_F^{-1} , ou seja, para trás no tempo, aplicado sobre V_0 e V_1 na figura 3.1(e) resulta em duas tiras horizontais H_0 e H_1 (figura 3.1(f)). O conjunto invariante Λ que não deixa o quadrado S no primeiro mapeamento para frente e para trás (M_F e M_F^{-1} respectivamente), é dado por

$$(H_0 \cup H_1) \cap (V_0 \cup V_1).$$

A intersecção é formada por quatro quadrados mostrados na figura 3.2(a). O mapeamento seguinte (M_F e M_F^{-1}) resulta em oito quadrados (figura 3.2(b)). O conjunto invariante Λ completo é obtido quando o número de aplicações do mapa é infinito.

Seja x um ponto do conjunto invariante Λ . Nós podemos expressá-lo pela seqüência

$$s = \dots s_{-3}s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\dots$$

com cada $s_{\pm i} = 0$ ou $s_{\pm i} = 1$. Os símbolos da seqüência são dados pelos sucessivos mapeamentos direto e inverso (M_F e M_F^{-1} respectivamente) sobre a região S . Assim, para um mapeamento M_F^{-n} , temos para uma faixa vertical n

$$V_{s_{-1}s_{-2}s_{-3}\dots s_{-i}\dots s_{-n}}$$

que fornece n símbolos s_{-i} , definindo o "passado simbólico" do ponto x . Para um mapeamento M_F^n temos para uma faixa horizontal ($n - 1$)

$$H_{s_0s_1s_2\dots s_i\dots s_{n-1}}$$

que fornece n símbolos s_i , definindo o "futuro simbólico" do ponto x (incluindo o "presente" s_0). Os pontos periódicos do conjunto invariante Λ são formados pelas infinitas faixas $H_{s_0s_1s_2\dots s_i\dots}$ interseccionando com as infinitas faixas $V_{s_{-1}s_{-2}s_{-3}\dots s_{-i}\dots}$. Os pontos de Λ se distribuem ao longo de toda a região de S . É este o processo geométrico a que submetemos as órbitas periódicas instáveis ao representarmos suas seqüências simbólicas no plano simbólico.

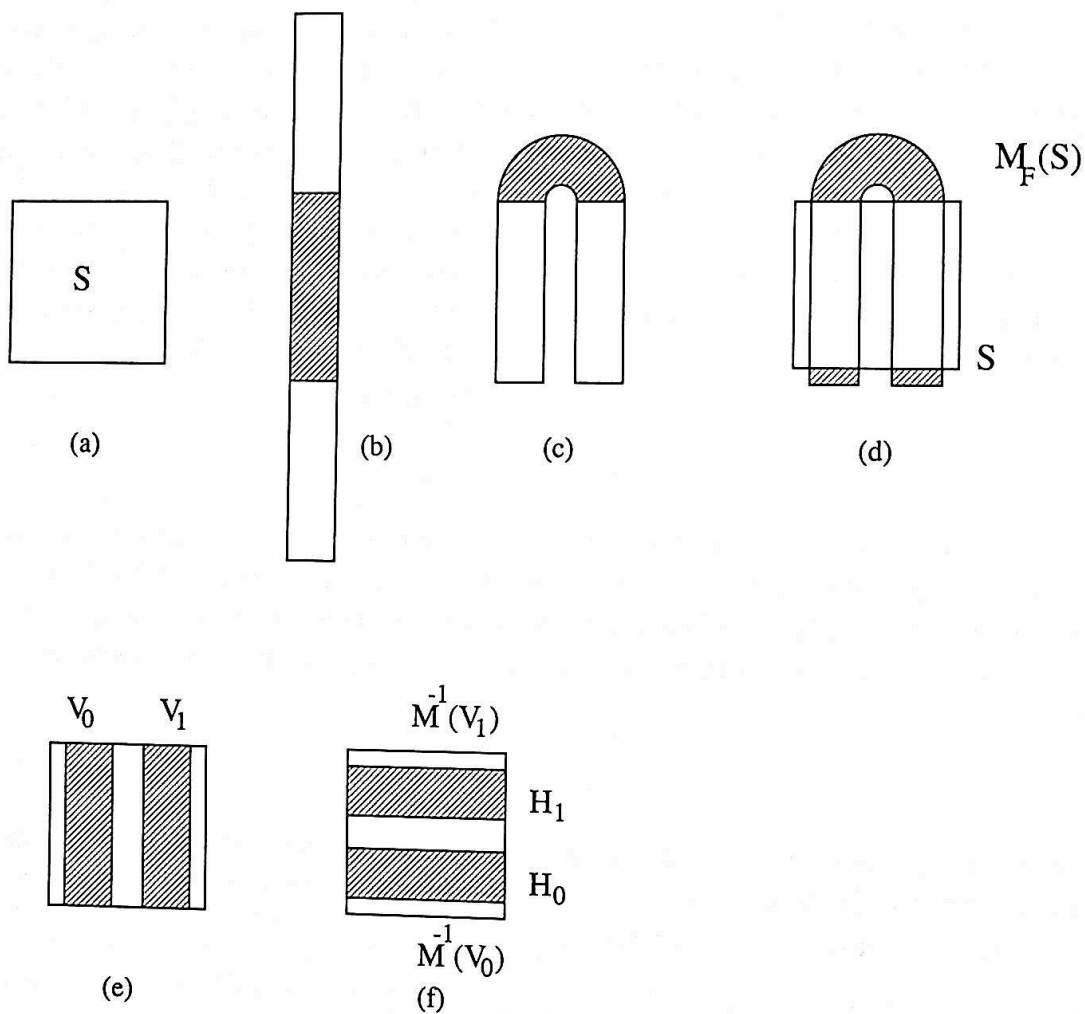


Figura 3.1: O processo geométrico de aplicação do mapa da ferradura de Smale. Uma região em forma de quadrado S (a) é contraída na direção horizontal e esticada na direção vertical (b). A faixa resultante, dobramos no sentido das duas pontas (c) e a sobrepomos na região original S (d), resultando em uma aplicação do mapa da ferradura M_F sobre S . A aplicação inversa do mapa sobre V_0 e V_1 resulta em duas faixas horizontais H_0 e H_1 (f).

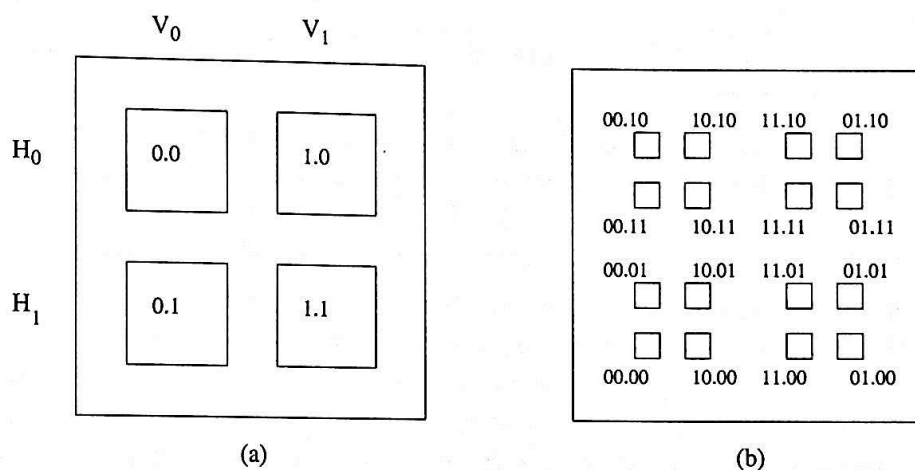


Figura 3.2: Em (a) o conjunto invariante Λ formado pela primeira aplicação do mapa da ferradura, obtido da intersecção $(H_0 \cup H_1) \cap (V_0 \cup V_1)$, resultando em quatro quadrados. Os intervalos são simbolizados de acordo com as faixas a que pertencem: na seqüência $s_{-1}s_0$, a posição das faixas verticais está a esquerda do ponto e na horizontal a direita. Uma segunda aplicação do mapa resulta em oito quadrados (b), também simbolizados de acordo com a faixa de origem pela seqüência $s_{-2}s_{-1}s_0s_1$. Agora, às seqüências dos quadrados anteriores são acrescentados dois símbolos, um a direita e outro a esquerda do ponto, devido a duplicação do número de faixas.

Como dissemos antes, uma dada órbita de período n possui n pontos periódicos, cada um deles dado pela permutação cíclica da seqüência de símbolos que codificam a órbita periódica. Sendo assim, representar uma órbita de período n no plano simbólico é encontrar α e β (as coordenadas binárias) para cada um dos n pontos periódicos dessa órbita². Dessa forma, como mostramos no final da seção 2.1.2, uma órbita de período 3 tem três pontos periódicos distintos, organizados entre si. Cada um dos pontos da órbita possui suas próprias coordenadas simbólicas α e β , que serão representados por três pontos distintos do plano simbólico. Uma órbita de período 7, por sua vez, terá sete pontos periódicos representados no plano através de suas coordenadas simbólicas α e β .

Nas equações (3.3) e (3.4), se s expressa uma órbita caótica, D é infinito. Contudo, na prática, sempre lidamos com conjuntos finitos de dados e D é sempre finito. Pode-se mostrar que um valor de $D = 16$ é suficiente para garantir a convergência das coordenadas α e β [32, 34].

O plano simbólico nos oferece importantes informações a respeito do processo de poda que age sobre o conjunto de órbitas periódicas de um determinado atrator caótico. Para entendermos isso, vamos comparar as órbitas previstas na árvore alternante binária completa com algum sistema dinâmico cujo conjunto de órbitas seja descrito por uma árvore incompleta. Conforme já citamos, o processo de poda divide todo o espectro de órbitas de um sistema dinâmico em permitidas e não-permitidas,

²Não apenas órbitas periódicas, mas também qualquer trajetória do atrator pode ser representada com as coordenadas α e β no plano simbólico.

de acordo com as possibilidades oferecidas pela combinação de símbolos usados para descrever a dinâmica.

Em um sistema dinâmico descrito por uma árvore binária completa, todos os pontos periódicos contidos na árvore são permitidos. Estes pontos periódicos se distribuem ao longo de todas as regiões do plano simbólico, pois todas as combinações possíveis de 0's e 1's corresponderão a um ponto periódico de alguma órbita.

Já em sistemas dinâmicos que são descritos por uma árvore binária incompleta, nem todos os pontos periódicos são permitidos. Os pontos ausentes no sistema dinâmico deixam determinadas regiões do plano simbólico vazias. Um exemplo disso pode ser visto no plano simbólico para o atrator espiral A_{espiral}^- , representado na figura 3.3, em que algumas regiões (como S_0 e S') estão vazias. Na construção do plano para o atrator espiral, usamos as órbitas da tabela 2.2. Dessa maneira, pontos periódicos de órbitas permitidas e não-permitidas dividirão o plano simbólico em regiões visitadas e não visitadas, ou seja, em regiões permitidas e não-permitidas. As regiões não-permitidas são as regiões de poda de seqüências, formadas por seqüências ausentes no sistema dinâmico. Dessas regiões não-permitidas, podemos extrair uma seqüência simbólica que seja máxima para as órbitas desse sistema³.

Agora, vejamos como extrair a seqüência simbólica máxima do plano simbólico. A região não-permitida S_0 é formada por seqüências simbólicas que iniciam com uma *subseqüência* cuja coordenada simbólica α é maior que algum α_0 (todas as seqüências iniciando com a subseqüência de coordenada α_0 são precedidas pelas seqüências permitidas). Essa coordenada α_0 é a fronteira entre as regiões permitidas e a região não-permitida S_0 . Todas as órbitas permitidas iniciarão com uma subseqüência, de coordenada simbólica α , tal que $\alpha \leq \alpha_0$. Tal subseqüência é chamada de "seqüência simbólica máxima"⁴.

Como os pontos periódicos de uma órbita são mapeados em diversas regiões do plano simbólico (lembramos, por exemplo, que uma órbita de período três, como (101), visitará três pontos distintos do plano), as seqüências não-permitidas, que formam a região S_0 , também são mapeadas em diversas regiões do plano, formando todo um conjunto S de regiões não-permitidas, distribuídas em diversas regiões do plano simbólico. O resultado do mapeamento de S_0 pelo plano simbólico é a alternância de regiões preenchidas com regiões não preenchidas, mas com α_0 (que delimita S_0) bem definido.

A seqüência simbólica máxima, então, pode ser obtida identificando α_0 no plano simbólico. Este α_0 é conhecido como "frente de poda", expressão introduzida por Cvitanović [31]. Podemos ver na figura 3.3 o plano simbólico para o atrator espiral A_{espiral}^- , construído a partir do espectro de órbitas da tabela 2.2. No plano, a frente

³Esta seqüência simbólica máxima será a "maior" na ordem de precedência, ou seja, todas as outras seqüências precederão a seqüência simbólica máxima.

⁴Usamos a palavra "poda" como o significado de "pruning" em inglês. O termo "seqüência simbólica máxima" é usado como significado de "kneading sequence" [35].

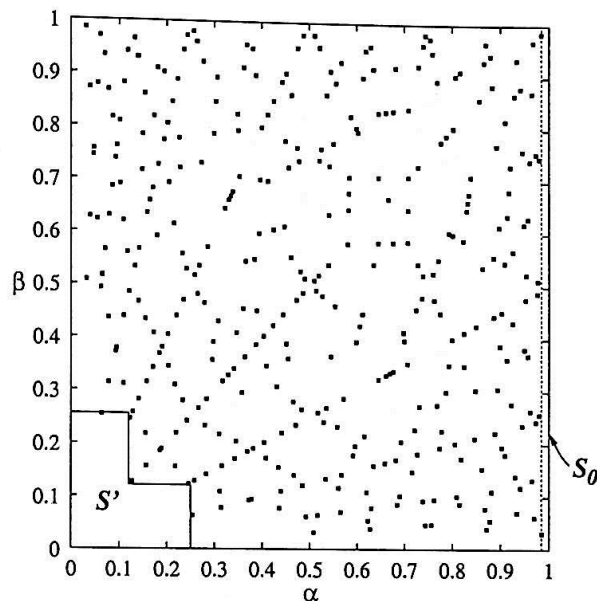


Figura 3.3: Plano simbólico para as seqüências representando órbitas periódicas instáveis (até o período 8) para o atrator espiral A_{espiral}^- , construído a partir da tabela 2.2. Para a “frente de poda” temos $\alpha_0 = 0.9846$ com a “seqüência simbólica máxima” $s_{\text{max}}(\alpha_0) = 100000$. Note que a região do plano assinalada por S' é uma região proibida, ao contrário do que ocorre com para a árvore binária completa (figura 3.4).

de poda é dada por $\alpha_0 = 0.9846$ e a seqüência simbólica máxima⁵ correspondente é $s_{\text{max}}(\alpha_0) = 100000$.

A árvore binária é o modelo de construção de seqüências simbólicas para sistemas cuja a dinâmica pode ser representada por mapas unimodais. Como já dissemos, um sistema cuja dinâmica é assim representada, pode apresentar dois tipos de espectros de órbitas: completo, com todas as órbitas previstas na árvore; e incompleto, com apenas parte das órbitas previstas. Um sistema apresentando um espectro incompleto sofre podas de órbitas. Assim, para entendermos o que ocorre com o espectro de órbitas do atrator espiral, podemos comparar o seu plano simbólico com um plano construído para as órbitas previstas na árvore binária até o nível 8.

Na figura 3.4, construímos o plano simbólico para a árvore binária usando o espectro de órbitas da tabela 2.4 até o período 8. Observe como os pontos se distribuem por quase todas as regiões do plano, sem regiões de concentração de pontos. Isso ocorre porque na árvore completa não há podas de órbitas. Entretanto, como estamos lidando com parte do espectro de órbitas (órbitas até o período 8 apenas), ou

⁵A seqüência simbólica máxima $s_{\text{max}}(\alpha_0)$, é obtida seguindo o caminho inverso da equação 3.3. Primeiro, transformamos α_0 de decimal para binário na forma $0.a_1a_2a_3\dots$. Segundo, como cada $a_i = (s_1 + s_2 + \dots + s_i) \pmod{2}$, começamos obtendo s_1 resolvendo $a_1 = s_1 \pmod{2}$; depois, s_2 de $a_2 = (s_1 + s_2) \pmod{2}$; s_3 de $a_3 = (s_1 + s_2 + s_3) \pmod{2}$ e assim sucessivamente até obtermos todos os s_i .

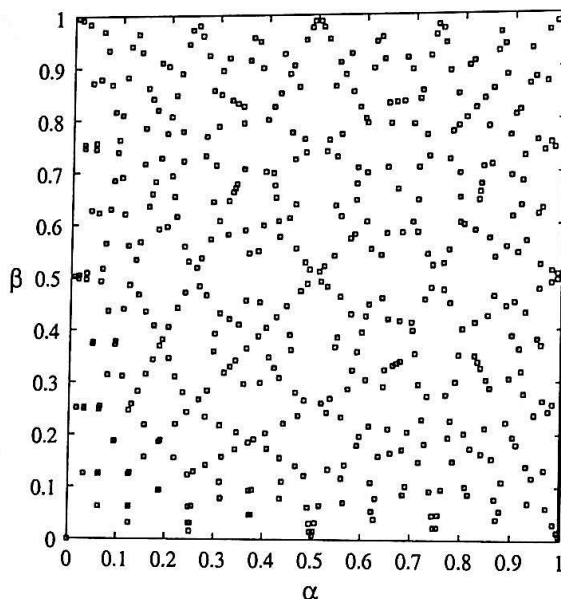


Figura 3.4: Plano simbólico para as seqüências previstas na árvore binária alternante contidas na tabela 2.4. O plano é igualmente preenchido, pois todas as órbitas previstas pela árvore binária estão presentes. Como no plano estão representadas órbitas até o período 8, temos uma frente de poda e uma seqüência simbólica máxima. Para a árvore, $\alpha_0 = 0.9961$ e $s_{max}(\alpha_0) = 10000000$ onde $s(\alpha_0)$ é a geratriz de todas as seqüências para a árvore binária até o período 8.

seja, a árvore utilizada é incompleta, algumas regiões do plano estão vazias. Logo, teremos uma frente de poda no plano simbólico para a árvore binária. Na figura 3.4, $\alpha_0 = 0.9961$ e $s_{max}(\alpha_0) = 10000000$. Na árvore completa, como todas as combinações possíveis de 0's e 1's ocorrem, a cada nível n da árvore todas as combinações estão presentes e todas as seqüências precedem a seqüência $(\underbrace{100\dots 0}_{n \text{ vezes}})$. Logo, até o período $n = 8$, a última seqüência na árvore é exatamente $(\underbrace{10000000}_{n \text{ vezes}})$. Isso está representado na figura 3.5.

Agora vamos comparar estes resultados para a árvore binária com os resultados para o atrator espiral. Na dinâmica simbólica, a seqüência simbólica máxima também é conhecida como seqüência geratriz. A sua presença implica na ocorrência de todas as seqüências que a precedem. Este resultado, aplicado a mapas unimodais, pode ser visto no apêndice C. Para o atrator espiral $A_{espiral}^-$, a seqüência geratriz é a seqüência (100000) . A ordem de precedência desta seqüência pode ser vista na ordenação presente na árvore binária: a seqüência (100000) ocupa a última posição inclusive para seqüências até o nível 8. Isso pode ser facilmente visto na tabela 2.2 se compararmos a coordenada y entre a órbita (100000) e as demais órbitas. Para (100000) $y = 0.397506$, o maior valor para todas as órbitas na tabela 2.2, o que indica que (100000) é a última seqüência na ordem de precedência⁶. Assim, todas as órbitas cuja as

⁶A ordem de precedência também pode ser verificada observando as coordenadas y ou z das

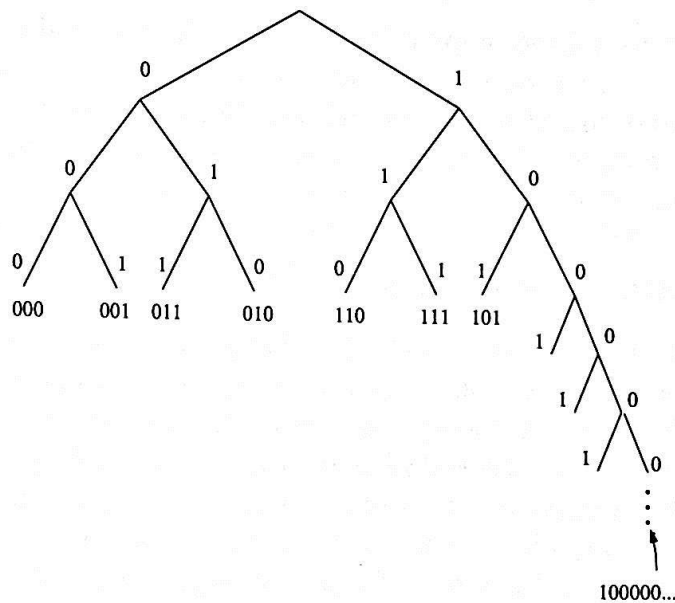


Figura 3.5: Trecho da árvore binária mostrando a localização da seqüência simbólica máxima (100000) em relação as demais seqüências simbólicas das órbitas permitidas. Observe como todas as órbitas de período 8 precedem a seqüência simbólica máxima.

seqüências precedem a seqüência (100000) (até o nível 8) estão presentes no atrator espiral A_{espiral}^- .

O espectro de órbitas para o atrator espiral A_{espiral}^- é completo até o nível 6 com uma única excessão: a órbita de seqüência (0). A partir do nível 7 outras órbitas sofrem poda. A árvore binária possui 18 órbitas de período 7 e 30 órbitas de período 8. No espectro de órbitas do atrator espiral A_{espiral}^- , encontramos apenas 14 órbitas de período 7 e 21 de período 8. As órbitas ausentes do espectro do atrator espiral em relação à árvore binária sofreram poda.

Encontrar poda de órbitas no atrator espiral A_{espiral}^- era uma situação esperada. Quase sempre, os atratores encontrados na Física sofrem podas em seu espectro de órbitas, pois estes atratores, como veremos adiante, não se encontram no regime hiperbólico, isto é, não apresentam o espectro completo de órbitas periódicas instáveis previsto pela árvore completa.

Freqüentemente a poda se manifesta nos primeiros níveis do espectro de órbitas de um sistema dinâmico, tipicamente a partir das órbitas de período 3 ou 4 (veja exemplos em [8, 23, 31, 34]). Entretanto, a poda no atrator espiral se manifesta a partir do nível 7 apenas, deixando os níveis anteriores completos, a única excessão a órbita (0).

Na próxima seção estudaremos as implicações da ausência de podas no espectro de órbitas de um atrator, cuja a dinâmica pode ser representada por dois símbolos,

órbitas localizadas no interior do atrator. A seqüência com maior valor de y é a geratriz.

como o atrator espiral e o mapa logístico, ambos representados pelo modelo de uma árvore binária. Para isso, vamos estudar como a dinâmica no atrator espiral está relacionada com o surgimento da órbita homoclínica no circuito de Chua. Tentaremos assim explicar porque o atrator espiral apresenta um espectro de órbitas completo até o período 6.

3.1.1 Órbita Homoclínica

Como vimos no capítulo 1, as trajetórias nos atratores espirais A_{espiral}^+ e A_{espiral}^- evoluem ao redor de seus pontos fixos p_+ e p_- respectivamente. Os pontos p_{\pm} são classificados, de acordo com a expansão linear, como pontos do tipo sela espiral. Dois dos auto-valores que resultam da linearização em torno de p_+ e p_- são complexos conjugados, com a parte real positiva. O outro auto-valor é real e negativo. Logo, os auto-vetores aos quais estes auto-valores estão associados definem duas direções instáveis no espaço de fases de cada atrator, com o fluxo divergindo do ponto de sela em um movimento espiral nesta superfície. Ao terceiro auto-valor, negativo, está associado um auto-vetor que define uma direção estável para o fluxo, ou seja, o fluxo em cada atrator converge para o ponto fixo p_+ e p_- . Esta é a dinâmica do fluxo próxima aos pontos p_{\pm} . Os atratores espirais, cada um em seu espaço de fases, devem exibir esta dinâmica ao menos quando suas trajetórias estiverem próximas dos pontos de sela. E para que as trajetórias exibindo esta dinâmica não divirjam e os atratores existam, estes dois mecanismos devem se conectar de alguma maneira. A única forma de combinarmos um movimento instável de divergência das trajetórias afastando-se do ponto de sela, com um outro movimento estável de reaproximação desse ponto é através de um mecanismo de dobra e reinjeção das trajetórias.

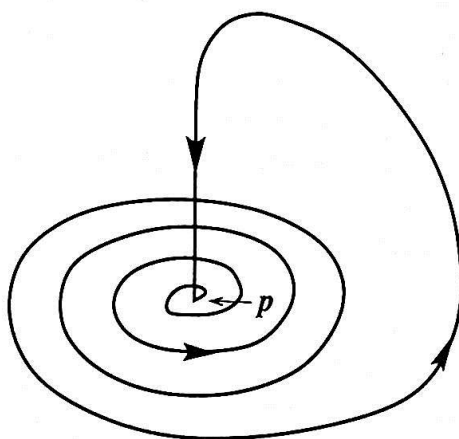


Figura 3.6: Movimento instável de divergência das trajetórias em forma espiral conectado a um movimento estável de reinjeção das trajetórias em direção ao ponto p .

Essa dinâmica é, portanto, caracterizada por dois mecanismos: um comportamento instável, com o fluxo espiralando ao redor do ponto de sela e um comportamento

estável, de reaproximação do ponto de sela, responsável por reinjetar o fluxo novamente para este ponto por meio de um dobramento.

Mas, para entendermos a dinâmica das trajetórias no interior dos atratores espirais e a estreita relação que possuem com o ponto fixo, necessitamos conhecer o comportamento das trajetórias ao longo de todo atrator, ou melhor, por todo o “espaço” ocupado pelo atrator. A forma de visualizarmos o atrator neste “espaço” é através da idéia de variedade instável e variedade estável. Vamos então definir estas duas variedades [17].

A variedade estável de um ponto fixo p (ou de um estado estacionário γ) é o conjunto de pontos x tal que uma trajetória partindo de x e evoluindo “para frente” no tempo, aproxima-se do ponto fixo p (ou estado estacionário γ). De modo similar, a variedade instável de um ponto fixo p (ou estado estacionário γ) é o conjunto de pontos x tal que uma trajetória partindo de x e evoluindo “para trás” no tempo aproxima-se do ponto fixo p (ou estado estacionário γ). As variedades sempre estão associadas a um ponto fixo ou estado estacionário. Assim, vamos chamar a variedade instável associada ao ponto fixo p de $W^u(p)$ (u de “unstable”) e a variedade estável associada ao ponto fixo p de $W^s(p)$ (s de “stable”). Em p as variedades são tangentes aos auto-vetores obtidos da linearização: $W^u(p)$ é tangente aos auto-vetores instáveis enquanto que $W^s(p)$ é tangente ao auto-vetor estável, sendo que cada uma delas possui a mesma dimensão que os auto-vetores tangentes.

Com as variedades instável e estável podemos estender os mecanismos da dinâmica dos atratores espirais A_{espiral}^{\pm} para todo o espaço de fases: o movimento instável do fluxo, em forma de espiral divergindo de p_{\pm} , ocorre no sub-espaço (uma superfície) denominada de variedade instável $W^u(p_{\pm})$ (respectivamente); enquanto que o movimento estável, a reinjeção do fluxo para as vizinhanças de p_{\pm} , ocorre no sub-espaço (uma curva) denominado variedade estável $W^s(p_{\pm})$. De agora em diante, estudaremos as propriedades destas duas variedades para entendermos a dinâmica dos atratores A_{espiral}^{\pm} .

Pode-se mostrar [17] que uma variedade de um tipo não se intersecciona com ela mesma e nem com outra variedade do mesmo tipo. Entretanto, variedades de tipos diferentes, uma instável e a outra estável, podem, sob determinadas condições, aproximarem-se tangencialmente uma da outra e até mesmo se interseccionarem⁷. Aos pontos de intersecção das variedades instável e estável, emanadas do mesmo ponto fixo p , damos o nome de pontos homoclínicos. A existência de um único ponto homoclínico implica a existência de uma infinidade destes pontos [16, 17]. Para visualizarmos isto, vamos tomar um ponto homoclínico q em uma intersecção de $W^u(p)$ e $W^s(p)$, para um certo sistema dinâmico descrito por um mapa f invertível⁸. Uma vez que q está em $W^u(p)$ e $W^s(p)$ simultaneamente, qualquer iterada de q “para frente” $f^n(q)$ ou “para trás” $f^{-n}(q)$, tem que estar também em uma intersecção entre

⁷Isso pode ocorrer em um sistema dinâmico ao variarmos seu parâmetro de controle.

⁸Os argumentos utilizados aqui para mapas também valem para sistemas dinâmicos descritos por fluxos.

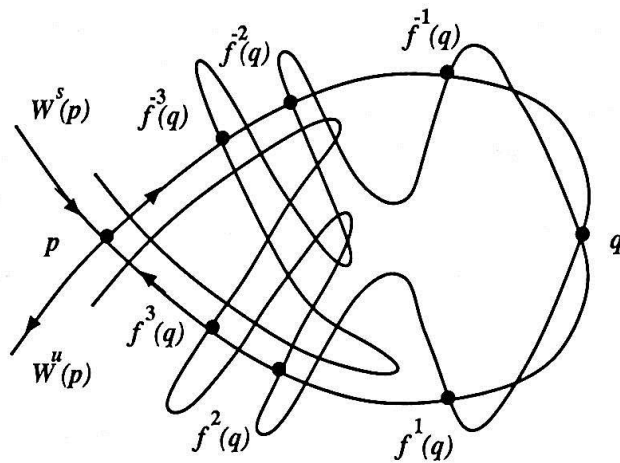


Figura 3.7: Formação dos pontos homoclínicos através das interseções entre as variedades instável $W^u(p)$ e estável $W^s(p)$. As iterações de f sobre o ponto homoclínico q aproximam-se de p pela variedade estável, enquanto que as iterações inversas de f sobre q aproximam-se de p pela variedade instável.

ambas as variedades. Então, cada iterada de q é também um ponto homoclínico⁹. A intersecção entre as variedades estável e instável e a formação dos pontos homoclínicos podem ser visto na figura 3.7. As sucessivas iteradas de q “para frente” tendem ao ponto fixo p pela variedade estável $W^s(p)$, enquanto que as iteradas de q “para trás” tendem à p pela variedade instável $W^u(p)$. Chamamos uma órbita formada pelas sucessivas iteradas de q como acima descrito de órbita homoclínica. As intersecções entre $W^u(p)$ e $W^s(p)$ que formam os pontos homoclínicos são chamadas de intersecções homoclínicas.

A sucessão de pontos homoclínicos, dados pelas intersecções homoclínicas entre $W^u(p)$ e $W^s(p)$, leva a uma intrincada configuração das variedades. A disposição geométrica de $W^u(p)$ e $W^s(p)$ devido as intersecções homoclínicas é chamada de emaranhado homoclínico. O emaranhado homoclínico é responsável por uma dinâmica muito complexa, similar a gerada pelo mapa da ferradura de Smale [16, 17]. A presença de uma órbita homoclínica em um sistema dinâmico leva a um comportamento caótico. Quando temos um ponto de sela, as trajetórias, em geral, se aproximam deste ponto próximas (mas não sobre) a variedade estável, mas são repelidas para longe deste próximas a variedade instável. Após a formação do emaranhado homoclínico, as trajetórias repelidas pela variedade instável são “recapturadas” pela variedade estável, e seguem aleatoriamente, aprisionadas na região do espaço de fases próxima ao ponto de sela. Esta é a origem dos mecanismos de divergência e reinjeção das

⁹Quando q está em uma variedade, suas sucessivas iterações no tempo continuarão sobre esta variedade, aproximando-se do ponto fixo p (no caso de $W^s(p)$) ou afastando-se de p (no caso de $W^u(p)$). Se o ponto q esta inicialmente sobre ambas as variedades, então qualquer iteração de q ($f^n(q)$ ou $f^{-n}(q)$) recai em ambas as variedades. As variedades são, assim construídas, conjuntos invariantes.

trajetórias em sistemas que apresentam uma órbita homoclínica.

Vamos agora mostrar que a órbita homoclínica pode ser identificada na árvore alternante binária e no circuito de Chua. Para iniciar, usaremos um resultado conhecido da dinâmica simbólica. Sabe-se desde o início do desenvolvimento da dinâmica simbólica que, em mapas unimodais (com um único ponto de máximo), a órbita homoclínica pode ser representada pela seqüência simbólica [36]

$$1000\dots = 1\bar{0}, \quad (3.5)$$

onde a barra sobre "0" indica que ele é repetido infinitamente. A seqüência simbólica acima é estabelecida da seguinte maneira. Seja f definindo um mapa unimodal com $p = 0$ um ponto fixo e $q = 1$ um ponto homoclínico. Como sempre o mapa é dividido em dois ramos por seu ponto de máximo; quando uma iterada de f de um ponto $x \in I$ qualquer recai em um ponto situado sobre o ramo esquerdo de f , atribuímos o símbolo "0" à esta iterada; se a iterada recai em um ponto situado sobre o ramo direito, atribuímos o símbolo "1". Pode-se mostrar que a primeira iterada do ponto homoclínico q , $f(q)$, resulta no ramo "0" de f , e todas as sucessivas iteradas $f^n(q)$ recaem também no ramo "0". As iteradas inversas de q , $f^{-n}(q)$, também recaem sobre o ramo "0", ou seja, iteradas "para frente" e "para trás" de q sempre recaem em "0" para qualquer valor inteiro $n > 0$, inclusive para $n \rightarrow \infty$. Somente $q = 1$ ($f^0(q)$) recai no ramo "1" de f . Assim, em um mapa unimodal, a órbita decorrente das sucessivas iteradas de um ponto homoclínico q

$$(\dots, f^{-2}(q), f^{-1}(q), q, f(q), f^2(q), f^3(q), \dots)$$

como acima representado, é chamada de órbita homoclínica, cuja seqüência simbólica é dada pela seqüência (3.5). Como a órbita homoclínica é composta de infinitas iteradas, expressa por infinitos símbolos, para ser percorrida em sua totalidade necessita de um tempo infinito.

Para a árvore binária, a órbita homoclínica é a seqüência simbólica que se situa na extrema direita do diagrama da figura 3.5. Observe que apenas a árvore completa, com a presença de infinitos níveis, revela a seqüência (3.5). Portanto, se um sistema dinâmico tem uma órbita homoclínica como a seqüência (3.5), ele não sofre podas e todas as órbitas previstas na árvore completa estão presentes.

Para um sistema dinâmico a existência da órbita homoclínica, dada pela seqüência (3.5), implica em uma representação da dinâmica por meio de um mapa unimodal. O mapa de primeiro retorno que construímos para o atrator espiral (figura 2.3) é, com grande aproximação, um mapa unimodal. Assim, para o circuito de Chua, se a órbita homoclínica puder ser inferida por meio de um mapa de primeiro retorno, a dinâmica do atrator em seu espaço de fases, representada por este mapa, também implicará na órbita homoclínica. No espaço de fases, esta órbita consiste em infinitas voltas em torno do ponto de sela p_- , divergindo deste, que simbolizamos por infinitos "0"s e uma volta da retorno, convergindo em direção a p_- , a qual simbolizamos por "1".

Podemos inferir a seqüência simbólica (3.5) para a órbita homoclínica no circuito de Chua, se analisarmos a seqüência simbólica máxima (100000) obtida para o atrator A_{espiral}^- e as características que o plano simbólico para este atrator apresenta. Para isso, vamos estudar o que acontece com o conjunto de órbitas de um sistema dinâmico ao surgir a órbita homoclínica.

Quando um sistema dinâmico, para um certo valor de seu parâmetro de controle, atinge a homoclinicidade, isto é, quando a variedade instável W^u tangencia (e intersecciona) a variedade estável W^s , surge uma dinâmica muito complexa, descrita por uma infinidade de órbitas periódicas instáveis. Nesse quadro, toda ordem de órbitas periódicas, de todos os períodos, estão presentes. Um sistema dinâmico nesta situação é dito em regime hiperbólico. Como resultado da existência de infinitas órbitas, de infinitos períodos, a seqüência simbólica máxima para este sistema dinâmico será aquela que é precedida por todas as órbita previstas na árvore binária completa e que, conseqüentemente, terá o maior valor possível para a frente de poda. Essa seqüência, para o caso de um sistema dinâmico em regime hiperbólico, é a seqüência para a órbita homoclínica 100... .

Conjeturamos então que, a medida que um sistema dinâmico se aproxima do regime hiperbólico, apresentando cada vez menos podas de órbitas, sua seqüência simbólica máxima se aproxima da seqüência simbólica da órbita homoclínica para um dado período n . E o espectro de órbitas deste sistema é completo até o período n .

É próximo do regime hiperbólico que se encontra o circuito de Chua, uma vez que o atrator A_{espiral}^- apresenta como seqüência simbólica máxima a seqüência (100000), próxima da órbita homoclínica até o nível 6. A figura 3.5 também mostra a posição da órbita homoclínica em relação as demais seqüências na árvore binária completa. Por meio dela notamos que a seqüência 100... é precedida por todas as seqüência que podem ser encontradas na árvore binária completa. Esta seqüência tem como coordenada simbólica α o valor máximo para qualquer seqüência, ou seja $\alpha = 0.999... = 1$.

A medida que o circuito de Chua se aproxima do regime hiperbólico, a seqüência simbólica máxima obtida para as órbitas de seus atratores aproxima-se da seqüência da órbita homoclínica 1000... para um determinado período n das órbitas. E o espectro de órbitas dos atratores é completo até o período n , a única exceção sendo a órbita (0) como já mencionado. Essas duas características tem relação direta com a presença da órbita homoclínica no circuito de Chua.

Além da proximidade entre a seqüência simbólica máxima (100000) e a seqüência simbólica para a órbita homoclínica (100...), a comparação entre os planos simbólicos para as órbitas no atrator espiral A_{espiral}^- (figura 3.3) e para as seqüências na árvore binária até o nível 8 (figura 3.4), também sugere que o circuito de Chua, representado pelo atrator espiral, está muito próximo do regime hiperbólico. Observe que o plano simbólico para o atrator espiral é similar ao plano simbólico para a árvore binária até o nível 8. Em ambos os planos os pontos se distribuem ao longo de quase todas as regiões, não havendo regiões de concentração de pontos. Na árvore completa, es-

ta característica do plano simbólico se deve a inexistência de podas de seqüências, uma vez que todas as combinações possíveis de "0"s e "1"s formam uma seqüência permitida. A árvore, nessa situação, representa um sistema dinâmico em regime hiperbólico. O plano simbólico para o atrator A_{espiral}^- , ao apresentar características semelhantes ao plano para a árvore completa, revela uma situação de proximidade do regime hiperbólico.

Estes dois fatos, ou seja, a proximidade entre a seqüência simbólica máxima e a órbita homoclínica e as semelhanças entre os planos simbólicos para a árvore binária e para o atrator espiral, mostra que o circuito de Chua, representado pelo atrator espiral A_{espiral}^- , está na eminência de atingir a homoclinicidade, aproximando-se do regime hiperbólico. Isto dificulta o reconhecimento das regiões de poda de órbitas no plano simbólico. Conforme já visto há podas de órbitas no atrator A_{espiral}^- , uma vez que, na prática, é muito difícil atingir o ponto exato onde ocorre a homoclinicidade. As podas ocorrem ao menos em duas situações. Na primeira, a poda da órbita (0), de período $n = 1$, que não foi encontrada no espectro de órbitas na tabela 2.2. A poda de (0) também é visível no mapa de primeiro retorno para o atrator espiral, pois o ramo 0 do mapa não toca a diagonal não estabelecendo uma solução ai. Na segunda, a partir do período 7 já existe podas de órbitas, ou seja, o espectro é completo, em relação a árvore binária, até o período 6.

Assim, para o circuito de Chua, a proximidade da órbita homoclínica determina o comportamento dinâmico que o atrator espiral A_{espiral}^- apresenta: a disposição geométrica das trajetórias em seu interior, espiralando ao redor do ponto de sela divergindo e reinjetando novamente na região do ponto de sela e a complexidade da dinâmica registrada na infinidade de órbitas periódicas imersas no atrator.

A dinâmica complexa acima referida, provocada pela presença da órbita homoclínica, pode ser identificada através da mudança na dinâmica do circuito de Chua ao atingir a homoclinicidade. Podemos investigar esta mudança estudando os mapas de primeiro retorno e os planos simbólicos para o circuito quando este está próximo da homoclinicidade.

Além de representar órbitas periódicas instáveis, o plano simbólico também pode ser empregado para representar uma trajetória do sistema dinâmico. Devido a propriedade de recorrência, uma trajetória caótica percorre, em sua evolução, de forma arbitrariamente próxima, as órbitas periódicas instáveis imersas em um atrator. Assim, podemos esperar que uma longa trajetória, representada em um plano simbólico, visite regiões muito próximas das regiões visitadas pelas órbitas. Um plano simbólico construído com uma trajetória caótica é formado por quase as mesmas regiões permitidas e proibidas que as apresentadas pelo plano construído com as órbitas periódicas instáveis. Desse modo, deve haver uma grande similaridade entre um plano simbólico construído com uma trajetória caótica e um plano construído com um conjunto de órbitas instáveis para um sistema.

Assim, vamos comparar os planos simbólicos para as trajetórias no circuito de Chua antes e depois deste sistema atingir a homoclinicidade. O uso do plano simbólico

para a comparação e identificação de sistemas dinâmicos tem sido aplicado, por exemplo, no estudo da dinâmica de formação de bolhas de ar em líquido viscoso [37].

Observando o diagrama de bifurcações entre $R \approx 1.510$ e $R \approx 1.487$ (figura 1.7), notamos que os atratores existentes são do tipo espirais. Isso é atestado nos mapas de primeiro retorno construídos para esta faixa de valores de R . Para $R \approx 1.495$, o sistema atinge a homoclinicidade, com a geração da órbita homoclínica $\bar{10}$ devido as tangências das variedades instável e estável. Este processo pode ser observado nos mapas de primeiro retorno e nos planos simbólicos correspondentes, nas figuras 3.8(a), (b), (c) e (d). Na figura 3.8(a) o sistema, para $R = 1.510$, está longe da homoclinicidade. O plano simbólico para uma trajetória no circuito apresenta diversas regiões proibidas de visitação (regiões não preenchidas). Em (b) $R = 1.500$, o mapa para o atrator espiral A_{espiral}^- , o qual apresenta extremidades mais alongadas do que o mapa em (a) com o ramo esquerdo aproximando-se da diagonal. O plano simbólico para uma trajetória no interior do atrator é, agora, preenchido em quase todas as regiões apresentando poucas regiões proibidas de visitação. Em (c) $R = 1.495$ o momento que surge a órbita homoclínica. A extremidade esquerda do mapa de primeiro retorno assume a maior aproximação da diagonal. Agora o plano simbólico para uma trajetória ocupa todas as regiões, com excessão daquelas próxima a origem do plano e as estreitas faixas junto aos eixos, revelando que o sistema está muito próximo do regime hiperbólico. Para $R \lesssim 1.495$ ($R = 1.488$ na figura 3.8 (d)), o mapa de primeiro retorno para os atratores do sistema passa a ser bimodal, com dois pontos de extremos (um máximo e outro mínimo), devido ao surgimento do terceiro ramo. O plano simbólico tem o aspecto totalmente diferente dos anteriores apresentando diversas regiões proibidas e poucas regiões permitidas de visitação. As variedades instável e estável, agora, interseccionam levando ao desenvolvimento de um novo comportamento caótico e um novo esquema de bifurcações¹⁰. A dinâmica dos atratores do tipo espiral muda e passa a ser descrita por três símbolos com o atrator, em seu espaço de fases, sendo formado por três regiões de comportamentos distintos. Este mesmo processo pode ser observado no atrator de Rossler ao atingir a homoclinicidade na transição entre um comportamento dinâmico caracterizado por um mapa unimodal para outro caracterizado por um mapa bimodal [8].

Como outro exemplo, uma mudança no comportamento dinâmico do sistema após o surgimento da órbita homoclínica também ocorre no mapa logístico (equação (2.1)). Pode ser demonstrado [16] que a seqüência simbólica máxima para este mapa se aproxima da seqüência simbólica para a órbita homoclínica a medida que este mapa se aproxima da homoclinicidade, o que ocorre para $\mu = 4$ (seu parâmetro de controle). Após a homoclinicidade ($\mu > 4$), quando se estabelece o regime hiperbólico, o atrator deixa de existir e a dinâmica do mapa logístico passa a ser regida por um repulsor caótico levando quase todas as condições iniciais ao infinito. É esta a mudança na

¹⁰ As bifurcações que surgem com o aparecimento da órbita homoclínica e o estabelecimento do regime hiperbólico chamam-se bifurcações homoclínicas [16].

dinâmica a qual nos referimos para o mapa logístico¹¹.

O circuito de Chua também muda quando atinge a homoclinicidade. Procuramos mostrar isso quando estudamos a transição do mapa de primeiro retorno de unimodal para bimodal na dinâmica deste sistema. Um mapa de primeiro retorno bimodal indica que o atrator, em seu espaço de fases, possui três regiões de comportamentos dinâmicos distintos que podem ser descritas por uma dinâmica simbólica de três símbolos. Este comportamento é notadamente diferente do observado em sistemas cujo atrator apresenta um mapa de primeiro retorno unimodal.

Na próxima seção, construiremos o plano simbólico para o atrator "double-scroll", estendendo as idéias aqui apresentadas para um sistema representado por um mapa de retorno unimodal à outro representado por um mapa de retorno quártico (com quatro ramos).

3.2 O Mapa Quártico e o "Double-scroll"

Analogamente aos mapas unimodais, em mapas com mais de um ponto de extremo, como mapas bimodais ou mapas quárticos (figura 3.9), podemos definir o plano simbólico para órbitas de itinerário $s = s_{-D} \dots s_{-3} s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 s_2 s_3 \dots s_D$, com s_0 , s_i e s_{-i} definidos da mesma forma que para mapas unimodais. Dessa forma, para um mapa quártico [38], o futuro simbólico α da seqüência s é dado por

$$\alpha = 0.a_1 a_2 a_3 \dots = \sum_{i=1}^D \frac{a_i}{4^i}, \quad (3.6)$$

onde

$$a_i = \begin{cases} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{cases} \text{ para } s_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \text{ se } \sum_{j=1}^i s_j = 0 \pmod{2}$$

e

$$a_i = \begin{cases} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{cases} \text{ para } s_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \text{ se } \sum_{j=1}^i s_j = 1 \pmod{2}.$$

O passado simbólico β de s é dado por

$$\beta = 0.b_1 b_2 b_3 \dots = \sum_{i=1}^D \frac{b_i}{4^i}, \quad (3.7)$$

¹¹Esta mudança repentina na dinâmica do mapa f_μ que ocorre quando $\mu = 4$ também é conhecida como crise de fronteira. A crise de fronteira ocorre quando uma órbita instável colide com a fronteira da bacia de atração do atrator, causando o desaparecimento do atrator e da bacia [20].

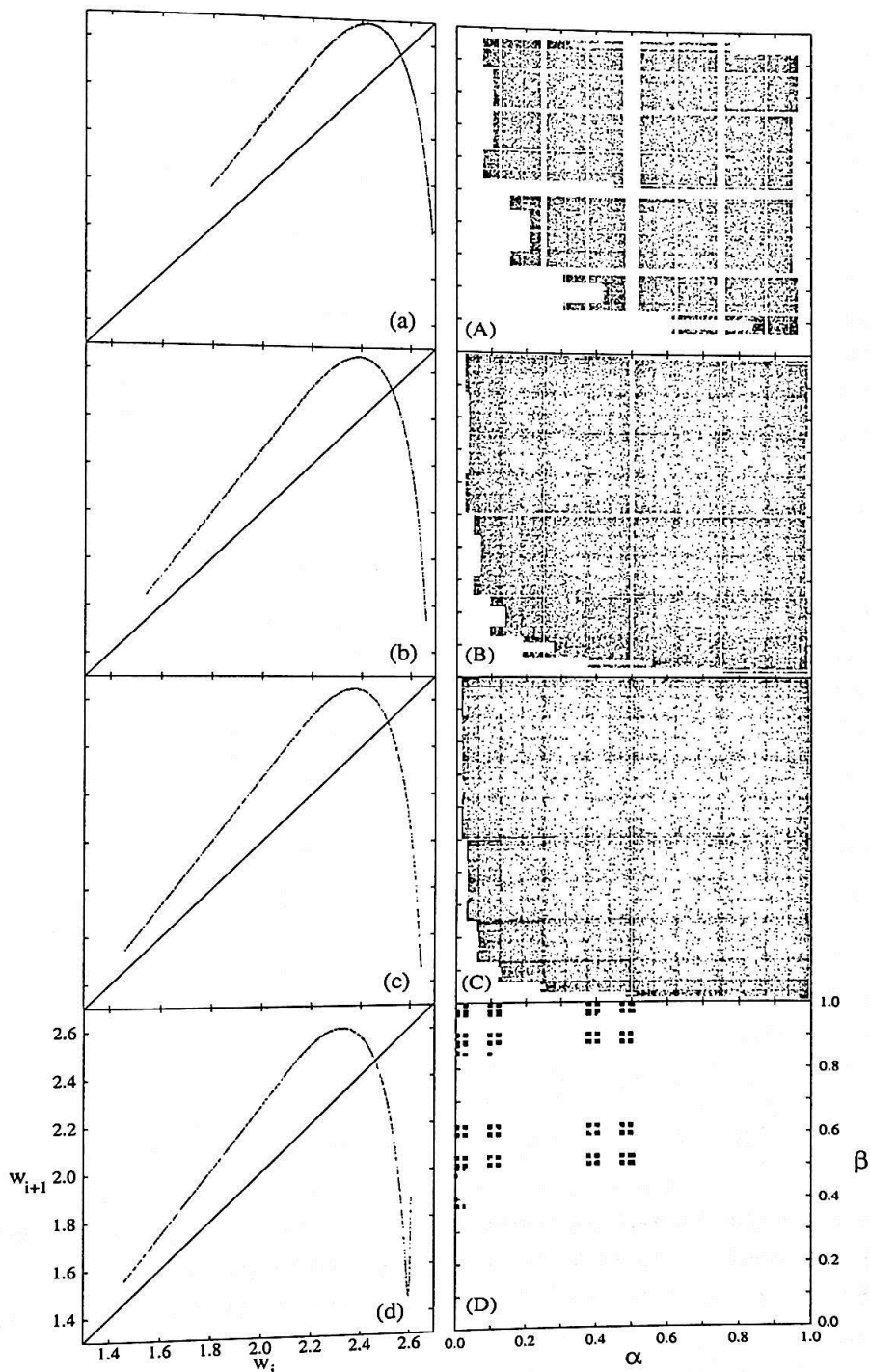


Figura 3.8: Mapas de primeiro retorno e planos simbólicos mostrando a geração da órbita homoclínica e o surgimento do regime hiperbólico. Em (a), $R = 1.510$ e o plano simbólico apresenta diversas regiões proibidas. Em (b), $R = 1.500$ e os ramos do mapa são mais pronunciados que em (a). Poucas regiões do plano são proibidas. Em (c) $R = 1.495$ e o ramo esquerdo do mapa assume a maior aproximação da diagonal. É nesse momento que ocorre a formação da órbita homoclínica e o estabelecimento do regime hiperbólico. No plano simbólico quase não há regiões proibidas, com excessão da região próxima a origem. Em (d) $R = 1.488$ e o terceiro ramo do mapa já aparece bem desenvolvido. O plano simbólico, construído para uma dinâmica de três símbolos, é completamente diferente dos anteriores com muitas regiões proibidas.

3.2. O MAPA QUÁRTICO E O "DOUBLE-SCROLL"

onde

$$b_i = \begin{cases} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{cases} \text{ para } s_{-i+1} = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \text{ se } \sum_{j=1}^i (1 - s_{-j}) = 0 \pmod{2}$$

e

$$b_i = \begin{cases} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{cases} \text{ para } s_{-i+1} = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \text{ se } \sum_{j=1}^i (1 - s_{-j}) = 1 \pmod{2}.$$

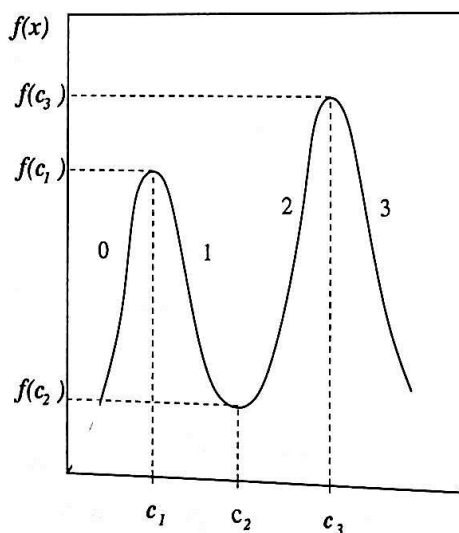


Figura 3.9: Mapa quártico com três pontos críticos e quatro ramos.

Para um mapa quártico, vamos usar a mesma definição de seqüência simbólica máxima usada em mapas unimodais. Seja um mapa quártico f com três pontos de extremos c_1, c_2 e c_3 . O itinerário completo de uma dada seqüência simbólica $s(x) = s_0 s_1 s_2 \dots s_i \dots$ de um ponto x sobre f é dado por

$$s_i = \begin{cases} 0 & , \text{ se } f^i(x) < c_1 \\ C_1 & , \text{ se } f^i(x) = c_1 \\ 1 & , \text{ se } c_1 < f^i(x) < c_2 \\ C_2 & , \text{ se } f^i(x) = c_2 \\ 2 & , \text{ se } c_2 < f^i(x) < c_3 \\ C_3 & , \text{ se } f^i(x) = c_3 \\ 3 & , \text{ se } f^i(x) > c_3. \end{cases}$$

Chamamos os itinerários dos pontos de extremos $f(c_i)$, $i = 1, 2$ e 3 de seqüência simbólica máxima (ou 'kneading sequence'), que simbolizaremos como $K(f(c_i)) = K_i$, ou seja, K_i é a seqüência simbólica do ponto de extremo $f(c_i)$. Isso é análogo aos mapas unimodais. Entretanto, observe que mapas quárticos possuem três "seqüências simbólicas máximas", cada uma delas correspondente a um ponto de extremo [38]. Estas três seqüências formam três frentes de poda no plano simbólico.

Podemos perceber na figura 3.9 que $f(c_2)$ é o menor de todos os pontos do mapa quártico. A seqüência simbólica correspondente a $f(c_2)$ terá coordenada simbólica α menor que qualquer outro ponto do mapa. A seqüência simbólica máxima K_2 , correspondendo a c_2 , determina a 'menor' das seqüências permitidas para o mapa¹².

Na figura 3.9, $f(c_3)$ é o maior de todos os pontos do mapa quártico. A seqüência simbólica correspondente a $f(c_3)$ terá coordenada α maior que qualquer outro ponto do mapa. A seqüência simbólica máxima K_3 , correspondendo a c_3 determina a 'maior' das seqüências permitidas para o mapa.

Já o ponto $f(c_1)$ é intermediário entre $f(c_2)$ e $f(c_3)$. Entretanto, $f(c_1)$ é 'maior' que os ramos '0' e '1' do mapa, de maneira que algumas seqüências serão 'menores' que K_1 no plano simbólico (seqüências cujo valor de α é menor que $\alpha(K_1)$). A seqüência K_1 forma uma terceira 'frente de poda' [38] para estas seqüências.

O mapa de primeiro retorno para o atrator "double-scroll" (figura 2.4) é semelhante a um mapa quártico. O plano simbólico para o atrator $A_{simétrico}$ pode ser visto na figura 3.10, obtido a partir das seqüências simbólicas do seu espectro de órbitas na tabela 2.3. Cada um dos pontos críticos w_{c_1} , w_{c_2} e w_{c_3} da figura 2.4 (seção 2.2.1), tem associado uma frente de poda de valores $\alpha_1 = 0.9920$, $\alpha_2 = 0.0076$ e $\alpha_3 = 0.5603$ respectivamente.

As 'seqüências simbólicas máximas' K_i podem ser obtidas comparando α_i com o valor de α de algumas seqüências para o mapa quártico, previamente calculadas nas tabelas 3.1 e 3.2. Assim, de acordo com os valores de α_i no plano simbólico da figura 3.10, as 'seqüências simbólicas máximas' são $K_1 = 3001$, $K_2 = 0001$ e $K_3 = 21$. Dizemos que todas as seqüências da tabela 2.3 são 'forçadas' pelas seqüências simbólicas máximas: $K_1 = 3001$ e $K_3 = 21$ determinam a 'poda' para a 'ordem ascendente' das seqüências - todas as seqüências de $A_{simétrico}$ precedem K_1 ou K_3 ; enquanto que $K_2 = 0001$ determina a 'poda' para a 'ordem descendente' das seqüências - todas as seqüências de $A_{simétrico}$ sucedem K_2 . As frentes de poda podem ser observadas claramente no plano simbólico (figura 3.10) para o atrator $A_{simétrico}$; as coordenadas (α, β) das seqüências permitidas, isto é seqüências que não sofrem poda, acumulam-se próximas as frentes. Ao contrário do observado para o atrator $A_{espiral}^-$, o plano simbólico para o atrator $A_{simétrico}$ é preenchido apenas parcialmente. Isso se deve ao mecanismo de poda que age sobre $A_{simétrico}$, com a poda de órbitas (seqüências) bem pronunciada.

Observamos que para este valor do parâmetro de controle o atrator $A_{simétrico}$ não se encontra, provavelmente, próximo da homoclinicidade. O plano simbólico (figu-

¹²Deveríamos chamá-la então de "seqüência simbólica mínima".

3.2. O MAPA QUÁRTICO E O "DOUBLE-SCROLL"

ra 3.10), construído a partir de seu espectro de órbitas periódicas instáveis, mostra muitas regiões proibidas.

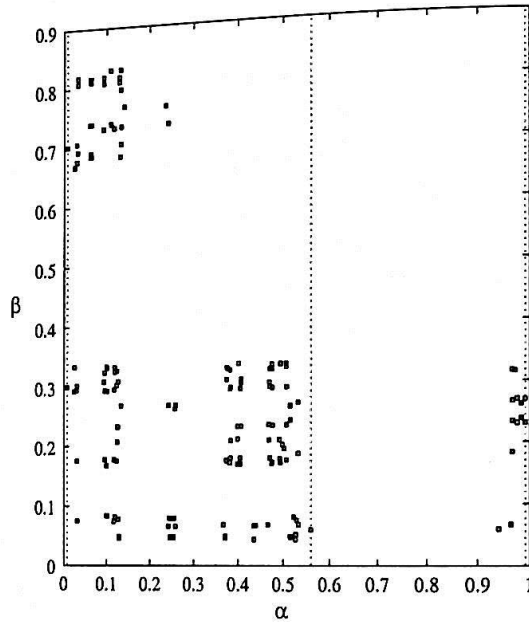


Figura 3.10: Plano simbólico para as seqüências simbólicas (órbitas periódicas) para o atrator "double-scroll" ($A_{simetrico}$), contidas na tabela 2.3. No plano observamos três 'frentes de poda': $\alpha_1 = 0.9920$ (associado a w_{c1}), $\alpha_2 = 0.0076$ (associado a w_{c2}), $\alpha_3 = 0.5603$ (associado a w_{c3}). As 'seqüências de poda' são $K_1 = 3001$, $K_2 = 0001$ e $K_3 = 21$ onde K_1 e K_3 definem a 'ordem ascendente' enquanto que K_2 define a 'ordem descendente' para as seqüências.

A questão das podas de órbitas em um mapa quártico é mais complexa do que em mapas unimodais. Em mapas com mais de duas frentes de podas, algumas órbitas que se formariam no sistema, ao evoluirmos seu parâmetro de controle, podem ser "podadas" antes mesmo de serem "criadas"[8]. Para entendermos isso, seja o valor do parâmetro de controle no mapa da figura 3.9 em que surge o ponto de máximo c_3 e o ramo 3. Isso representa o acréscimo do símbolo 3 na dinâmica simbólica. Se o ramo 2 não encontrar a bissetriz do mapa antes do surgimento do ramo 3, a dinâmica simbólica até o símbolo 2 não se completa, ou seja, não ocorrem todas as seqüências possíveis com os símbolos 0, 1 e 2. Neste caso, a dinâmica simbólica até o símbolo 2 só se completará após o surgimento do símbolo 3. Isto faz com que alguma órbitas sejam "abortadas" antes de sua criação prevista pela ordem de precedência.

Tabela 3.1: Coordenada α associada a cada seqüência periódica seguindo a ordem descendente das seqüências.

s	$\alpha(s)$	s	$\alpha(s)$	s	$\alpha(s)$
0001	0.0077	01	0.1176	1312	0.2723
0001	0.0078	02	0.1333	1311	0.2745
0003	0.0155	0203	0.1400	131	0.2769
0013	0.0156	0213	0.1411	132	0.2857
0012	0.0233	0212	0.1478	1321	0.2879
0011	0.0235	0211	0.1490	1322	0.2901
001	0.0307	021	0.1538	1323	0.2957
002	0.0317	022	0.1587	1333	0.2980
0021	0.0389	0221	0.1634	1332	0.3035
0022	0.0392	0222	0.1647	1331	0.3058
0023	0.0466	0223	0.1712	133	0.3076
0033	0.0470	0233	0.1725	123	0.3174
0032	0.0544	0232	0.1789	1231	0.3190
0031	0.0549	0231	0.1803	1232	0.3215
0033	0.0615	023	0.1846	1233	0.3268
013	0.0634	033	0.1904	1223	0.3294
0131	0.0700	0331	0.1945	1222	0.3346
0132	0.0705	0332	0.1960	1221	0.3372
0133	0.0778	0333	0.2023	122	0.3384
0123	0.0784	0323	0.2039	121	0.3492
0122	0.0856	0322	0.2101	1211	0.3501
0121	0.0862	0321	0.2117	12	0.3529
012	0.0923	032	0.2153	1	0.3999
011	0.0952	031	0.2222	2	0.6666
0111	0.1011	0311	0.2256	2223	0.6692
0112	0.1019	0312	0.2274	2233	0.6745
0113	0.1089	0313	0.2334	223	0.6769
0103	0.1098	03	0.2352	233	0.6984
0102	0.1167	13	0.2666	2333	0.7003
				23	0.7058
				3	0.7999

3.2. O MAPA QUÁRTICO E O "DOUBLE-SCROLL"

Tabela 3.2: Coordenada α associada a cada seqüência periódica seguindo a ordem ascendente das seqüências.

s	$\alpha(s)$	s	$\alpha(s)$	s	$\alpha(s)$
1	0.3999	2	0.6666	3120	0.9098
10	0.4705	3	0.7999	3121	0.9105
1011	0.4747	32	0.8235	3122	0.9176
101	0.4761	3233	0.8249	3123	0.9182
100	0.4923	323	0.8253	312	0.9206
1001	0.4941	322	0.8307	313	0.9230
1000	0.4980	3223	0.8313	3133	0.9254
2000	0.5019	3222	0.8326	3132	0.9260
2001	0.5058	3221	0.8392	31	0.9333
200	0.5079	3220	0.8404	30	0.9411
201	0.5230	3210	0.8460	3031	0.9416
2011	0.5254	3211	0.8482	3132	0.9490
2010	0.5291	3212	0.8549	3033	0.9494
20	0.5333	3213	0.8560	303	0.9523
21	0.5882	321	0.8571	302	0.9538
2120	0.5914	320	0.8615	3023	0.9568
2110	0.5960	3203	0.8627	3022	0.9571
2111	0.5992	3202	0.8638	3021	0.9647
211	0.6031	2301	0.8705	3020	0.9649
210	0.6153	3200	0.8715	3010	0.9725
2101	0.6196	3100	0.8784	3011	0.9727
2100	0.6225	3101	0.8793	3012	0.9803
2200	0.6274	3102	0.8862	3013	0.9805
2201	0.6303	3103	0.8871	301	0.9841
220	0.6349	310	0.8888	300	0.9846
221	0.6461	311	0.8923	3003	0.9882
2211	0.6509	3113	0.8941	3002	0.9883
2210	0.6536	3112	0.8949	3001	0.9960
2220	0.6588	3111	0.9019	3000	0.9961
2221	0.6614	3110	0.9027		

Capítulo 4

Teoria dos Nós

O ponto de partida para analisarmos topologicamente um fluxo tri-dimensional é o conhecimento do conjunto de órbitas periódicas instáveis associado ao sistema dinâmico estudado. As órbitas periódicas instáveis estão por trás da estrutura que suporta o atrator caótico. Estas órbitas formam curvas fechadas, como nós, no interior do atrator. Tais quais os nós, diversas órbitas se entrelaçam, ligando-se mutuamente, formando elos. Os nós e elos formados pelas órbitas periódicas instáveis no interior do atrator são invariantes sob bifurcações para pequenas variações dos parâmetros do atrator, ao menos enquanto as órbitas periódicas em questão existirem. Nesta introdução à teoria dos nós, estabeleceremos a relação entre as órbitas periódicas instáveis e os nós e elos definidos na teoria dos nós, juntamente com um importante invariante topológico: o número de elos¹.

A teoria dos nós tem sido aplicada, por exemplo na teoria quântica de campos, através da álgebra de von Neumann [40] e também na mecânica estatística, na determinação da função de partição da energia de alguns sistemas com redes de spins [39].

As definições dos diversos conceitos aqui introduzidos podem ser encontradas em [10] e [39]. A introdução à teoria dos nós aqui apresentada segue a pequena exposição da teoria, no contexto da análise topológica de atratores caóticos, feita por Tufillaro em [9].

4.1 Introdução

A teoria dos nós estuda objetos unidimensionais conhecidos como "cordas"². Embora possuindo representação unidimensional, as cordas estão imersas no espaço tri-dimensional. Um nó é formado tomando-se uma corda e unindo-se suas extremidades, de modo a formar uma curva suave e fechada que não se intersecciona. Um conjunto de nós formam diversos elos. Mesmo estando imersos num espaço tri-dimensional, os nós

¹Traduzido do inglês "linking numbers".

²Tradução de "strings".

4.1. INTRODUÇÃO

e eles podem ser representados por um simples diagrama bidimensional, projetando-se os mesmos num plano. Exemplos dessa representação são dados nas figuras 4.1 e 4.2, nas quais a linha sólida indica cruzamento por cima, enquanto que a linha quebrada indica o cruzamento por baixo.

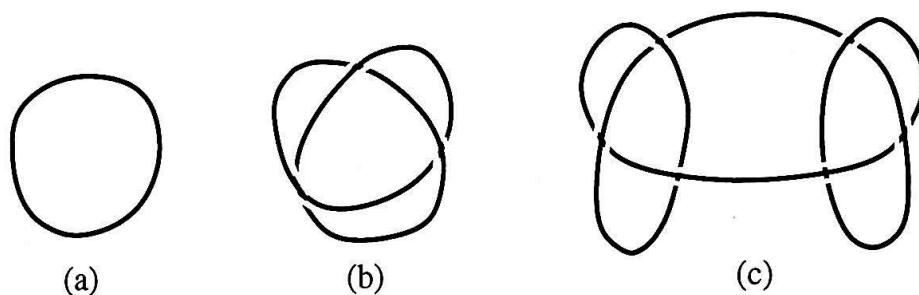


Figura 4.1: Projeção plana de três nós: (a) nó trivial; (b) nó trifoliar; (c) nó quadrado. A linha sólida indica cruzamento por cima; a linha quebrada indica cruzamento por baixo.

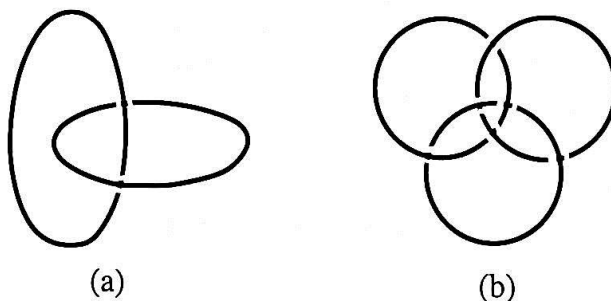


Figura 4.2: Exemplos de elos projetados num plano: (a) elo de Hopf; (b) anéis de Borromean.

Diferentes representações de nós e elos são ditas equivalentes se existirem transformações contínuas que levem um nó ou elo em outro. Por meio destas transformações podemos mostrar se dois nós ou elos são, de fato, diferentes ou equivalentes. Mostrar a equivalência entre dois nós é um dos mais importantes tópicos na teoria dos nós [39].

Através dos movimentos de Reidemeister (ver figura 4.3), podemos estabelecer a equivalência entre dois nós. Estes movimentos, agindo sobre uma representação bidimensional dos nós, não muda os nós. Desse modo, dois nós, se forem equivalentes, podem ser convertidos um no outro por alguma seqüência de movimentos. A figura 4.3 mostra os três tipos de movimentos de Reidemeister.

Uma outra maneira de se estabelecer a equivalência entre dois nós é através dos invariantes topológicos. As duas técnicas juntas, a dos movimentos de Reidemeister e a do cálculo dos invariantes topológicos constituem a ferramenta básica para se estabelecer a equivalência entre dois nós [39].

O conjunto das órbitas periódicas de um fluxo pode ser visto como um grande elo. Este elo é formado por uma infinidade de nós, ou seja, de órbitas periódicas.

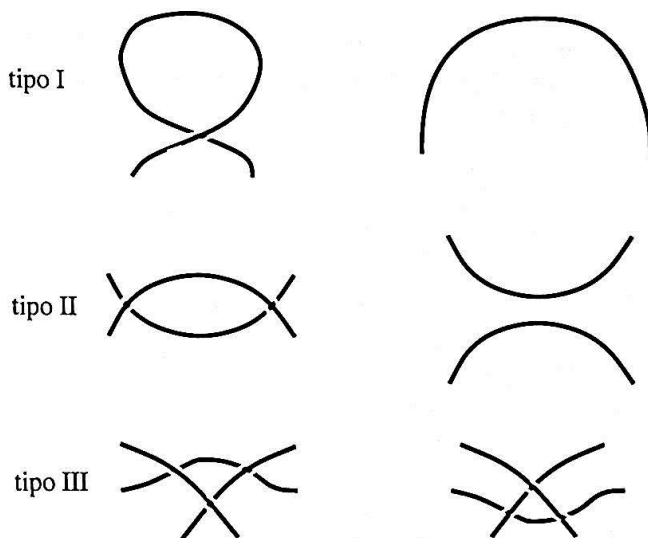


Figura 4.3: Os movimentos de Reidemeister simplificam a análise e distinção de nós. Dois nós são iguais somente se seus diagramas puderem ser convertidos um no outro por alguma combinação dos três movimentos acima.

Assim, podemos chamar os atratores estranhos gerados por uma dinâmica caótica de “portadores de nós”[10]. Ao variarmos os parâmetros do fluxo, as órbitas (ou seja, os nós) podem coalescer, como por exemplo ocorre em uma bifurcação sela-nó, ou colapsar para pontos, como ocorre em uma bifurcação de Hopf. Entretanto, as órbitas, assim como os nós, não podem interseccionarem-se com elas mesmas e com outras órbitas. Caso contrário, será violada a unicidade da solução, pois poderíamos ter duas soluções diferentes para uma mesma condição inicial. Dizemos também que nós e elos, representando órbitas periódicas no interior do atrator, são invariantes (ao menos enquanto existirem, ou seja, enquanto o sistema dinâmico não sofrer bifurcação) sob pequenas variações dos parâmetros do sistema dinâmico a eles associado. Dizemos que as órbitas periódicas no interior do atrator são robustas à pequenas perturbações [41].

4.2 Convenção de Cruzamento

Assim como nós e elos, órbitas periódicas instáveis são curvas fechadas em um fluxo tri-dimensional, que não se interseccionam. Entretanto, órbitas periódicas possuem uma orientação natural: a direção do tempo. Portanto, para associarmos nós e elos às órbitas periódicas de um atrator caótico, em um espaço de fases tri-dimensional, necessitamos dar uma orientação a eles. Desse modo, um nó orientado é uma curva fechada, a qual associamos uma flexa, indicando a direção do tempo ao longo da curva. Como os nós e elos na representação bidimensional se cruzam (eles não se interseccionam), necessitamos de uma convenção para os cruzamentos. A cada cruzamento será atribuído um sinal σ . Este sinal será positivo ($\sigma = +1$) se o cruzamento se der

da direita para a esquerda e negativo ($\sigma = -1$) se o cruzamento se der da esquerda para a direita, sempre mostrando o cruzamento por cima, como mostra a figura 4.4.

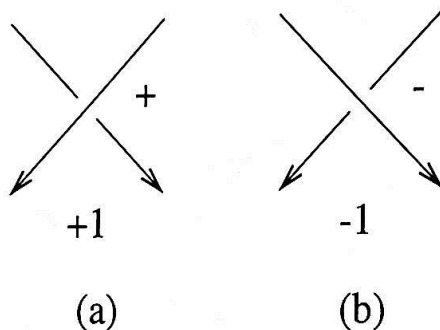


Figura 4.4: Convenção de cruzamento para nós e elos orientados: (a) cruzamento positivo e (b) cruzamento negativo.

4.3 O Número de Elos

Podemos distinguir os diversos nós e elos entre si através dos invariantes topológicos. Invariantes topológicos são quantidades associadas aos nós e elos que não mudam sob as contínuas deformações sofridas por suas cordas. Dois nós são diferentes se eles diferem em ao menos um invariante topológico. Entretanto, ainda não existe um conjunto completo de invariantes topológico úteis para a classificação e distinção dos nós e elos.

Um invariante topológico bastante simples é o número de elos, definido para dois nós orientados, e que é utilizado para indicar como dois nós se entrelaçam. O número de elos é dado pela metade da soma dos cruzamentos entre dois nós, seguindo a convenção de cruzamentos na seção 4.2. Como exemplo, tomemos dois nós triviais α e β , orientados conforme a convenção de cruzamentos na figura 4.4. Se os nós triviais entrelaçam-se uma vez, o número de elos (ligações) é $+1$. Entretanto, se os dois nós apenas sobrepõem-se, sem estarem ligados, o número de elos é 0 (ver figura 4.5). Podemos então definir o número de elos por:

$$E(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_C \sigma(C), \quad (4.1)$$

onde α e β são os nós e $\sigma(C)$ o sinal de cada cruzamento C . Observe que o número de elos é sempre um inteiro, positivo ou negativo, dependendo do particular arranjo dos nós.

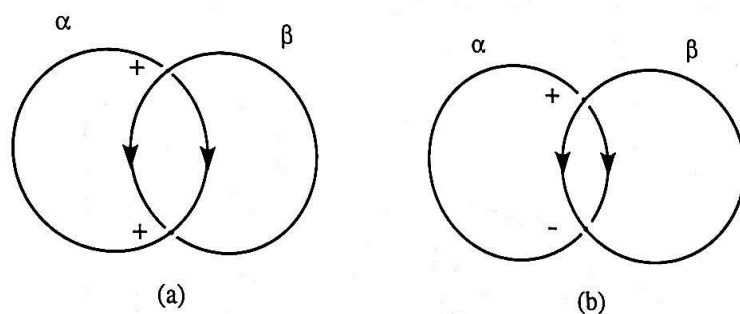


Figura 4.5: Exemplo do cálculo do número de elos para os nós triviais. Em (a) dois nós orientados (observe as flexas) entrelaçados, com os sinais dos cruzamentos dados pela convenção de cruzamentos. O número de elos é calculado como $E(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(+1 + 1) = 1$. Em (b), note que os nós não se entrelaçam; o direito β , apenas se sobrepõe ao esquerdo α , de maneira que o número de elos é 0. De fato, $E(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(+1 - 1) = 0$.

4.4 Fios, Tranças e Grupo de Tranças

Na teoria dos nós, os nós se organizam em elos, os elos se organizam em tranças, e as tranças em grupos de tranças. Os nós no interior de uma trança formam os componentes dessa trança e serão chamados de fios.

Uma trança é um conjunto de fios agrupados do seguinte modo. Sejam duas linhas horizontais, definindo dois níveis (um superior e outro inferior), com n pontos distribuídos em cada nível. De cada um dos pontos do nível superior parte um fio que é ligado a algum ponto do nível inferior. Os fios são orientados de cima para baixo. Na figura 4.6 podemos ver um exemplo de uma trança com seus fios.

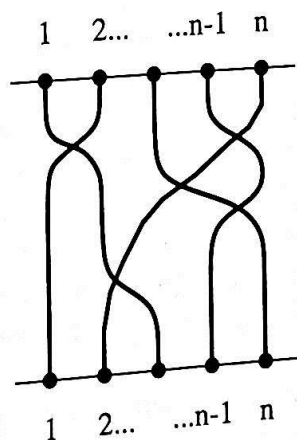


Figura 4.6: Construção de uma trança com n -fios entrelaçando-se.

Uma trança fechada pode ser obtida conectando-se as duas linhas horizontais (os dois extremos) de uma trança. Os nós e elos orientados podem ser completamente representados por uma trança fechada. Na figura 4.7 vemos uma trança com dois

firos, representando um nó trifoliar.

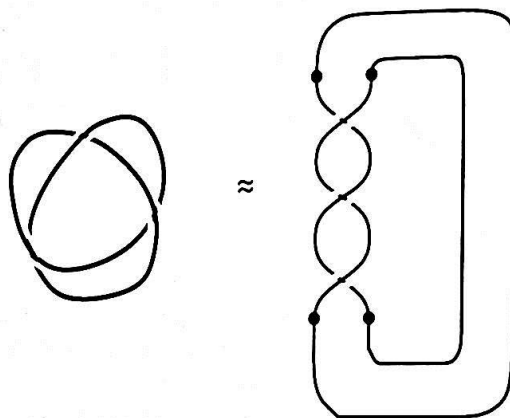


Figura 4.7: Representação em trança de um nó trifoliar

Podemos ainda estender o conceito de tranças, associando a cada um dos fios de uma dada trança um número inteiro representando a estrutura interna do fio. Imaginando cada fio como uma corda real, estas cordas podem sofrer torções. Este inteiro representará as meias-voltas da corda.

Uma trança com inteiros associados às torções pode ser melhor representada através de um tipo de diagrama conhecido com "grafo de fitas". Os fios da trança são trocados por uma fita e as torções são meias-voltas destas fitas. Ao sofrer rotações, as laterais das fitas se cruzam e a cada meia-volta (π radianos), o sinal do cruzamento é dado pela convenção de cruzamentos da seção 4.2. Um exemplo de um grafo de fitas é dado na figura 4.8 (b).

Os fios de uma trança, em geral, trocam de posição entre si deslocando-se no interior da trança. Os deslocamentos dos fios no interior de uma trança são dados pelos operadores d_i e d_i^{-1} . O operador d_i representa o cruzamento positivo (de acordo com a convenção de cruzamentos) entre os i -ésimo e $(i + 1)$ -ésimo fios da trança, enquanto que o operador d_i^{-1} representa o cruzamento negativo entre o i -ésimo e os $(i + 1)$ -ésimo fios da trança. Na figura 4.8 (a), vemos os deslocamentos dos fios, com uma "palavra" algébrica, dada pela seqüência $d_2^{-1}d_3d_1^{-1}$, que identifica como e em que ordem os fios são deslocados. A cada nível, apenas os fios i e $i + 1$ sofrem ação dos operadores (d_i, d_i^{-1}) , estabelecendo um cruzamento por vez, ou seja, cada fio acrescenta ou decrementa apenas uma posição por nível.

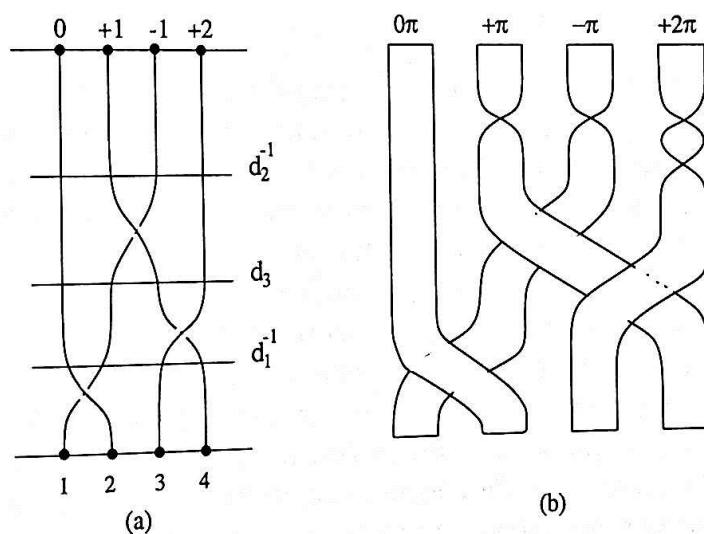


Figura 4.8: Em (a), representação algébrica de uma trança com os números de meia torções de cada fio em π radianos. Os deslocamentos são dados pelos operadores d_i e d_i^{-1} , com d_i o cruzamento positivo e d_i^{-1} cruzamento negativo (segundo a convenção de cruzamentos na seção 4.2) dos i -ésimo e $(i + 1)$ -ésimo fios da trança. A cada aplicação de d_i e d_i^{-1} os fios deslocam-se apenas uma posição por vez. Em (b) a representação geométrica das tranças por meio do “grafo de tranças”. Cada inteiro é o número de rotação de π radianos de cada fio da trança, seguindo a convenção de cruzamentos.

Capítulo 5

Molde Topológico

Órbitas periódicas em um fluxo definidos em uma tri-variedade \mathbf{R}^3 são curvas suaves e fechadas [10] como nós orientados, que podem ser projetados em um plano e dispostos como uma trança. Fios de uma trança podem sobrepor-se uns aos outros, cruzando-se. O molde topológico é uma forma de organizar todos os nós originados pelas órbitas no interior do fluxo de um atrator caótico. Dessa maneira, o molde topológico pode ser construído considerando-se a organização geométrica das órbitas periódicas instáveis imersas no atrator caótico [10, 42].

Quando uma órbita periódica é criada, o tipo de nó a ela associado não muda ao variarmos os parâmetros do sistema dinâmico. Se ocorresse uma mudança em seu tipo, o nó poderia sofrer intersecções, o que violaria o princípio da unicidade da solução. Logo, os tipos de nós, juntamente com o número de elos, são invariantes topológicos que usaremos para identificar as propriedades dinâmicas e o molde topológico do sistema dinâmico estudado.

5.1 Descrição Geométrica

Tomemos um fluxo em \mathbf{R}^3 com uma direção instável $W^u(p)$ e outra estável $W^s(p)$, p é um ponto fixo do tipo sela hiperbólico. As intersecções transversais das variedades instável $W^u(p)$ e estável $W^s(p)$ irão originar um mapa como o *mapa da ferradura de Smale* (figura 5.1). No processo de formação, o mapa da ferradura gera duas peças, em uma revolução. Arranjamos, então, as duas peças para formarmos um mapa de suspensão como na figura 5.1. Os extremos das peças são entrecortados por pedaços da variedade instável e estável que passam pelo ponto p . Uma órbita hiperbólica γ corta as peças do mapa de suspensão, passando pelo ponto p .

Agora, se projetarmos o fluxo em seu espaço de fases sobre a variedade instável $W^u(\gamma)$ ao longo da variedade estável $W^s(\gamma)$, ou seja, colapsarmos W^u ao longo de W^s , podemos identificar uma estrutura com dois ramos formada pelos extremos do mapa de suspensão. A figura 5.2 mostra a sobreposição dos ramos juntamente com suas direções instável e estável. Todas as órbitas existentes no fluxo podem ser projetadas

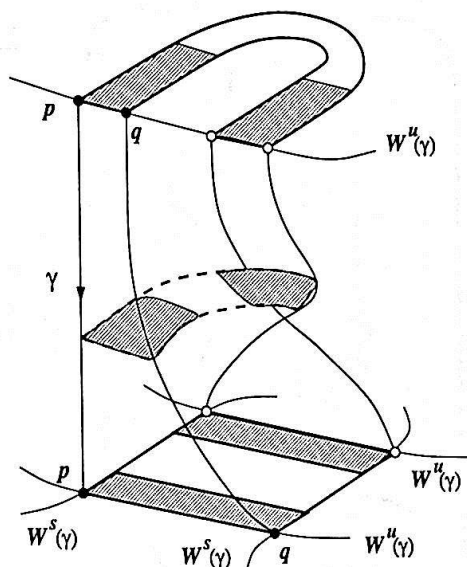


Figura 5.1: Mapa de suspensão mostrando a formação do mapa da ferradura de Smale, as variedades instável $W^u(\gamma)$ e estável $W^s(\gamma)$ com suas interseções ao redor do ponto p e o ponto homoclínico q em uma das interseções das variedades. A órbita hiperbólica γ corta as peças do mapa de suspensão pelo ponto p .

nesta construção, que por sua vez encerra toda a dinâmica subjacente às órbitas periódicas do fluxo em seu espaço de fases. A esta construção damos o nome de *molde topológico*. O molde topológico assim construído é considerado um semi-fluxo sobre uma variedade bidimensional ramificada, pois órbitas inversas não são únicas na linha que une os diversos ramos do molde [10, 41, 42].

As órbitas periódicas projetadas no molde preservarão a organização topológica que possuem no interior do atrator em seu espaço de fases. No molde, as órbitas são representadas por nós e elos, já descritos no capítulo 4, que se manterão constantes enquanto as órbitas existirem. Da estrutura formada pelos nós e elos podemos definir invariantes topológicos que podem ser obtidos diretamente das órbitas do fluxo como também da estrutura de nós e elos formada no molde topológico.

A projeção das variedades estável e instável na construção do molde topológico é unívoca com os pontos periódicos do fluxo, de modo que a projeção toma cada folha de $W^s(\gamma)$ em um ponto distinto de $W^u(\gamma)$. Cada ponto periódico corresponde a um único ponto na variedade instável $W^u(\gamma)$. Como cada órbita periódica corresponde a um nó no molde, molde este representando diferentes regiões topológicas do atrator em seu espaço de fases, podemos usar rótulos simbólicos para identificar cada um dos nós.

No caso do mapa da ferradura de Smale, os dois ramos (figura 5.3) são rotulados com dois símbolos "0" e "1" e todos os nós (órbitas periódicas) irão ser rotulados com diferentes combinações destes símbolos, de acordo com as regiões visitadas pelos nós.

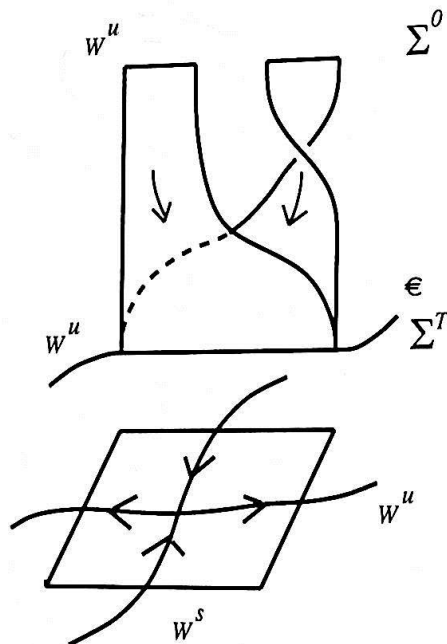


Figura 5.2: A projeção da variedade instável ao longo da variedade estável, resultando em dois ramos. Um dos ramos é torcido indicando a dobra da ferradura do mapa de suspensão. Σ^T e Σ^0 são os extremos do mapa de suspensão, correspondendo a uma revolução completa.

5.2 Descrição Algébrica

Um atrator em seu espaço de fases possui diferentes regiões topológicas que, por sua vez, podem ser representadas no molde topológico. Cada região do atrator define um ramo no molde. Este ramo, e sua localização no molde relativamente aos demais, conserva todas as propriedades topológicas apresentadas pela correspondente região topológica no interior do fluxo. Algumas destas propriedades podem ser expressas algebricamente.

Os ramos de um molde topológico encerram três diferentes informações algébricas [9, 11, 43]: a *torção dos ramos* (valor que descreve o quanto cada ramo é torcido em rotações de $\pm\pi$ rad); a *estrutura de cruzamentos* (que mostra como cada ramo se entrelaça com os demais) e o *arranjo de inserção* (que descreve como cada ramo é inserido na base dos ramos). Como as órbitas no fluxo correspondem aos nós no molde, a fundamentação teórica destas informações algébricas está contida na teoria dos nós que introduzimos no capítulo 4.

Um molde topológico é formado por k ramos que enumeramos $0, 1, 2, \dots, k-1$. Na parte superior temos a torção dos ramos (torção local), mostrando torções múltiplas de $\pm\pi$ rad (a cada $\pm\pi$ rotações = ± 1 seguindo a convenção de cruzamentos da

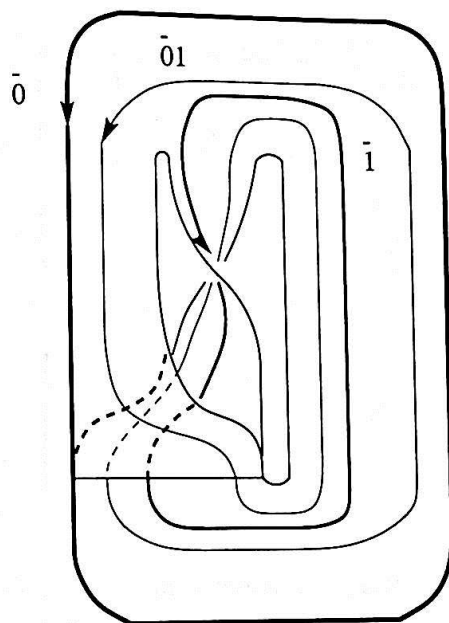


Figura 5.3: Molde topológico mostrando três órbitas (nós) e sua organização: $\bar{0}$ representando a sequência (000...); $\bar{1}$ representando a sequência (111...) e $\bar{01}$ representando a sequência (010101...).

seção 4.2). Como exemplo, na região identificada como (a) na figura 5.4, vemos a torção de $-\pi$ do ramo "0", $+2\pi$ do ramo "1" e 0π no ramo "2" do molde topológico.

Na região intermediária, no molde da figura 5.4, temos a estrutura de cruzamentos dos ramos. Cada ramo pode cruzar os demais um certo número de vezes. Estes cruzamentos também seguem a convenção de cruzamentos da seção 4.2. Uma "palavra" algébrica, como definida na seção 4.4, é associada aos deslocamentos dos ramos no interior do molde por meio dos operadores d_i e d_i^{-1} . Na figura 5.4, na região identificada por (b), a palavra associada aos deslocamentos dos ramos no molde é: $d_1 d_0^{-1}$.

Na região da base do molde, os ramos são inseridos por meio da *inserção padrão*: os ramos são ordenados de trás para frente e da esquerda para a direita. Tal convenção é útil, pois as informações das diferentes permutações dos ramos estão ali contidas. Na região (c) da figura 5.4, a região de expansão do semi-fluxo está confinada na região de inserção dos ramos: os ramos expandem-se antes de serem "colados" na base do molde. Na figura 5.4 podemos ver as três informações algébricas contidas no molde topológico. O molde topológico assim construído é, portanto, uma trança conforme o exposto no capítulo 4.

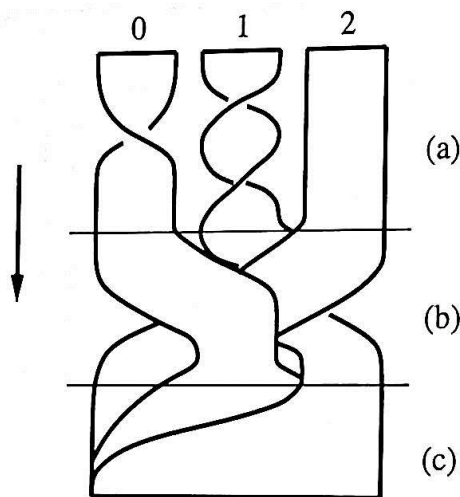


Figura 5.4: Molde topológico com três ramos e as informações algébricas nele contidas: (a) torção local; (b) entrecruzamento dos ramos e (c) inserção padrão dos ramos.

5.3 Matriz de Elos

O molde topológico pode ser expresso também por uma matriz quadrada, chamada de *matriz de elos*. Todas as informações algébricas contidas no molde topológico estão presentes na matriz de elos: as torções locais dos ramos, os cruzamentos dos ramos e a inserção (reintrodução) padrão dos ramos.

Os elementos M_{ij} da matriz de elos M de ordem $k \times k$, com $i, j = 0, 1, \dots, k - 1$, são assim definidos¹

M_{ii} : Soma de todas as torções (em $\pm\pi$ rad) do i -ésimo ramo.

M_{ij} : Soma dos entrecruzamentos do i -ésimo ramo com o j -ésimo ramo.

Naturalmente M é uma matriz simétrica ($M_{ij} = M_{ji}$ para $i \neq j$). No molde da figura 5.4 a matriz de elos é

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Os elementos da diagonal principal mostram o quanto cada ramo é “torcido” de $\pm\pi$. Os elementos fora da diagonal principal mostram os cruzamentos dos ramos uns com os outros, sempre obedecendo a convenção de cruzamentos.

Outra informação contida na matriz M é a maneira pela qual ocorrem as permutações entre ramos no molde topológico. Como no topo do molde os ramos são

¹Definimos os elementos da matriz de elos $k \times k$ como M_{ij} com $i, j = 0, 1, \dots, k - 1$ para que i e j coincidam com os símbolos usados nos ramos. Assim, M_{00} corresponde às torções do ramo 0 do molde, M_{10} aos cruzamentos entre os ramos 1 e 0 e assim por diante.

ordenados em sequência $(0, 1, 2, \dots, i, \dots, k-1$ no caso de k ramos), na base os ramos ocuparão, eventualmente, uma nova posição. Essa permutação σ_M é obtida da seguinte forma. Na i -ésima linha de M , tomamos o ramo que origina o elemento M_{ii} , adicionamos o número de vezes que este ramo do molde troca de lugar com outros à direita de M_{ii} e subtraímos o número de trocas à esquerda de M_{ii} . Na figura 5.4 temos as permutações:

$$\sigma_M(0) = 0 + 1 = 1$$

$$\sigma_M(1) = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$\sigma_M(2) = 2 - 1 - 1 = 0.$$

A permutação dos ramos na base do molde é, então, $\sigma_M(012) = 120$, ou seja, o primeiro ramo ocupa a segunda posição, o segundo ramo ocupa a terceira posição e o terceiro ramo ocupa a primeira posição.

5.4 Localização dos Nós no Molde

Partindo de um molde topológico com k ramos, cada símbolo da seqüência simbólica de uma órbita (nó) mostra quais ramos esta órbita percorre. A organização dos diversos nós (diversas órbitas) em um molde topológico pode ser obtida por dois métodos: o primeiro através da construção da k -ésima árvore (análoga a árvore binária mas para k ramos) e o segundo usando a "kneading theory".

5.4.1 Construção da k -ésima Árvore

No molde, um ramo com torção local par (número par de meia-rotações), é dito "conservando orientação"². Se a torção local é ímpar, ele é dito "invertendo orientação". A organização da árvore é assim definida: no primeiro nível ($n = 1$) temos os k símbolos que nomeiam os k ramos do molde $(0, 1, 2, \dots, k-1)$. No segundo nível ($n = 2$) repetimos os k símbolos para todos os ramos da árvore. Se o ramo é preservado a orientação a repetição preserva a seqüência $(0, 1, 2, \dots, k-1)$. Entretanto, se esse ramo reverte a orientação a ordem da repetição é revertida $(k-1, k-2, \dots, 2, 1, 0)$. Por indução, o $(n+1)$ -ésimo nível é construído a partir do n -ésimo nível com a seguinte regra: se o i -ésimo ramo do n -ésimo nível é "preservando orientação", a ordem dos símbolos no $(n+1)$ -ésimo nível é preservada. Caso contrário a ordem dos símbolos no $(n+1)$ -ésimo nível é revertida. A figura 5.5 mostra como exemplo uma árvore

²Isto é análogo ao mapa unimodal f , para o qual o ramo monotonicamente crescente, simbolizado por "0", preserva a orientação do intervalo I sob f , enquanto que o ramo monotonicamente decrescente, simbolizado por "1", reverte a orientação de I sob f .

com três símbolos “0”, “1” e “2”, com “0” como o único símbolo correspondendo ao ramo de orientação reversa³.

Uma sequência, com período n , é obtida lendo-se do primeiro nível até o n -ésimo nível tomando-se todos os símbolos por qual a leitura é feita. A posição de uma dada sequência é obtida em relação as demais sequências na árvore.

Na figura 5.5 temos a *ordem de precedência* para sequências de período 2 obtida de uma árvore com $k = 3$ ramos (até o nível $n = 2$):

$$02 < 01 < 00 < 10 < 11 < 12 < 20 < 21 < 22,$$

onde o símbolo $<$ é lido como *precede* e indica a ordem de precedência das órbitas. No molde a ordem dos nós com uma dada sequência simbólica é obtida no final da árvore. Todos os pontos que conectam um dado nó no molde são obtidos pela permutação dos símbolos da sequência simbólica que representa a órbita (nó). A órbita periódica (nó) simbolizada por (02) percorre dois ramos do molde: 0 e 2 com itinerário 02 e 20 (figura 5.6). A órbita (01) também percorre dois ramos: 0 e 1 com itinerário 01 e 10.

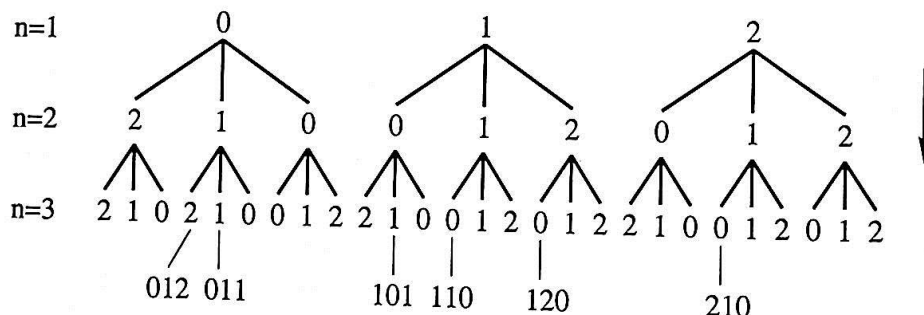


Figura 5.5: k -ésima árvore com $k = 3$. Nesta árvore o símbolo 0 inverte a orientação do intervalo original e os símbolos 1 e 2 preservam a orientação. Um pontos periódico de período n é lido de cima para baixo do primeiro nível até o n -ésimo nível. Em destaque estão os pontos periódicos 012, 011, 101, \dots , 210 em ordem de precedência.

5.4.2 “Kneading Theory”

A “kneading theory” é uma versão refinada da dinâmica simbólica, na qual a noção de itinerário para um dado mapa f com k ramos leva em conta os pontos de extremos também. Um exemplo disto foi dado na seção 3.2 na discussão da sequência simbólica máxima para o atrator $A_{simetrico}$. Aqui usaremos para ordenar as seqüências uma regra derivada da ordenação obtida a partir da árvore acima, útil quando se dispõe de algumas sequências, e não todas, de um determinado nível.

³ Isso é um exemplo hipotético. Quase sempre, os símbolos correspondendo a inversão de orientação são ímpares (“1”, “3”, etc.), enquanto que os símbolos correspondendo a conservação de orientação são pares (“0”, “2”, etc.).

Regra de ordenação 1 *Suponha dois itinerários, $s = \{s_0, s_1, \dots, s_i, \dots, s_n\}$ e $t = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_n\}$. Temos que $s < t$ se $s_i = t_i$ para $0 \leq i < n$, e $s_n < t_n$ quando o número de símbolos em $\{s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\}$ associados a uma inversão na orientação é par, e $s_n > t_n$ quando o número de símbolos associados a uma inversão na orientação é ímpar⁴*

Podemos entender melhor essa regra através de um exemplo. Consideremos as órbitas (012) e (011) na figura 5.5. Suas permutações cíclicas são:

012 201 120

e

011 101 110.

Colocando as permutações em ordem ascendente, temos

011 012 101 110 120 201.

Agora, como o ramo com revertendo orientação é 0, reverteremos a ordem somente dos pontos 011 e 012,

012 < 011 < 101 < 110 < 120 < 210.

Este resultado concorda com a ordenação na árvore da figura 5.5.

5.5 Cálculo Algébrico do Número de Elos

Além da sua representação geométrica, o molde topológico pode ser descrito algebricamente pela matriz de elos por três quantidades [43]. A primeira, um conjunto de inteiros representando a torção local dos ramos, tomados em múltiplos de π rad. A segunda, uma "palavra" descrevendo como os ramos do molde se cruzam (enlaçam). A terceira, o arranjo de inserção que descreve em que ordem os ramos se conectam à base do molde.

Mas, além destas informações a matriz de elos pode nos fornecer um modo de calcularmos o número de elos $E(N_1, N_2)$ de determinado par de órbitas N_1 e N_2 encontradas no molde. O número de elos entre dois nós N_1 e N_2 é igual à metade da soma dos cruzamentos que estes nós fazem em sua projeção bi-dimensional. A cada cruzamento é atribuído +1 ou -1 de acordo com a convenção de cruzamentos descrita

⁴O número de símbolos "1" no itinerário do intervalo I sobre o mapa unimodal f , determina o sinal de $(f^n)'(I)$, $n \geq 1$, uma vez que o ramo "1" reverte a orientação de I mudando seu sinal. Analogamente, o número de símbolos com "revertendo orientação" num mapa com vários ramos determina o sinal do intervalo I sobre este mapa.

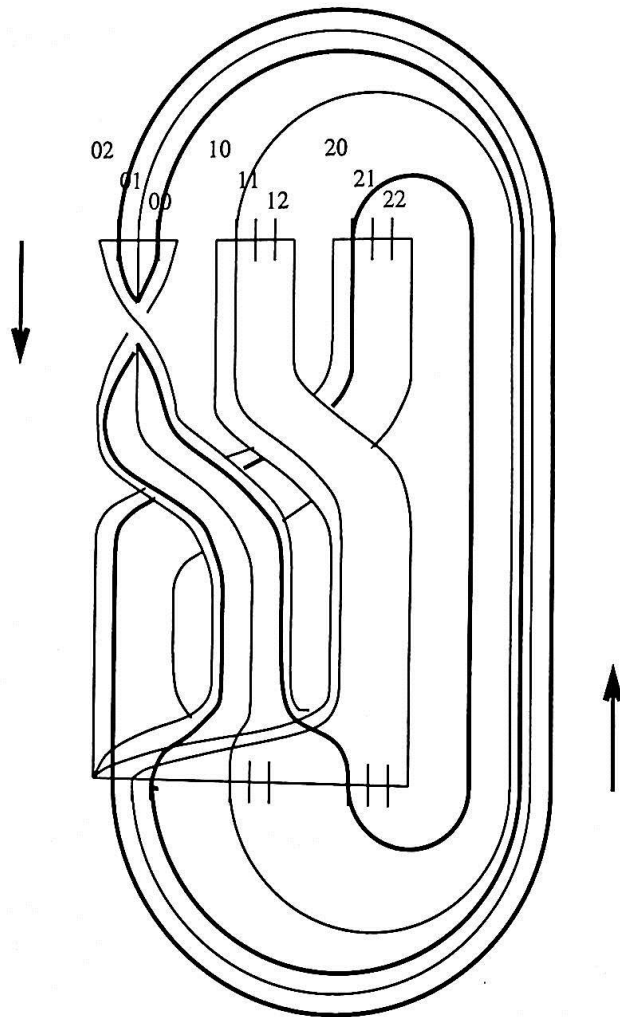


Figura 5.6: Localização de três órbitas periódicas no molde topológico. Aqui vemos as órbitas (02), (01) e (0) e seus pontos periódicos: 02 e 20 para a órbita (02); 01 e 10 para a órbita (01) e 00 para a órbita (0). Uma órbita periódica é determinada no molde conectando todos seus pontos periódicos através da permutação de sua cadeia de símbolos. A ordenação é dada pela k -ésima árvore ou pela "kneading theory".

na seção 4.2. Então, para cada cruzamento p , atribuímos um número $\epsilon(p) = \pm 1$, de forma que o número de elos é definido por

$$E(N_1, N_2) = \frac{1}{2} \sum_p \epsilon(p). \quad (5.1)$$

Os cruzamentos entre dois nós orientados no molde podem se originar: (i) das torções locais dos ramos do molde, (ii) dos cruzamentos entre estes ramos, e (iii) dos cruzamentos causados pelo arranjo de inserção dos ramos na base do molde.

Vamos tomar os nós N_1 e N_2 como órbitas periódicas de período p_1 e p_2 , com sequências simbólicas $(s_1 s_2 \dots s_i \dots s_{p_1})$ e $(r_1 r_2 \dots r_j \dots r_{p_2})$ respectivamente. O ponto periódico i de N_1 é expresso pela sequência $(s_i s_{i+1} \dots s_{p_1} s_1 \dots s_{i-1})$ e, de forma análoga, podemos expressar um ponto periódico j da órbita N_2 . Assim, como exemplificado na seção anterior, as sequências simbólicas são ordenadas por uma ordem de precedência. Quando construídos sobre o molde topológico, os pontos periódicos de N_1 e N_2 são ordenados relativamente uns aos outros na base do molde, obedecendo a ordem de precedência.

Para obtermos o número de elos algebricamente, a partir da matriz de elos, devemos somar três parcelas. A primeira é a soma dos cruzamentos das órbitas periódicas devida às torções locais dos ramos do molde. A segunda é a soma dos cruzamentos das órbitas devida aos cruzamentos dos ramos no molde. E a terceira se origina dos cruzamentos gerados pela inserção dos ramos na base do molde. Entretanto, a matriz de elos não fornece os cruzamentos originários do arranjo de inserção dos ramos na base do molde. Assim, para que o cálculo do número de elos seja correto, devemos introduzir os cruzamentos vindos da inserção dos ramos. Chamaremos o número desses cruzamentos de inserção de $E_{inserir}$. Somando as três parcelas, o número de elos pode ser dado pela seguinte relação

$$E(N_1, N_2) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} M(s_i, r_j) + E_{inserir}(N_1, N_2) \right], \quad (5.2)$$

onde $M(s_i, r_j)$ são os elementos da matriz de elos M . Esta notação é diferente daquela usada na matriz de elos. Além de "indexar" os elementos da matriz M pelos símbolos usados nos ramos, o somatório realiza a soma dos elementos de M de acordo com os símbolos das sequências s e r . Desse modo, como exemplo, $M(1, 0)$ se refere aos cruzamentos dos ramos "1" e "0", cujo elemento de M posiciona-se na linha 1 e coluna 0 (de acordo com a notação para a matriz de elos).

O número de cruzamentos $E_{inserir}$ pode ser obtido se reproduzirmos a região do molde onde ocorrem as inserções dos ramos. O que nos interessa é a configuração final das órbitas periódicas após sofrerem as torções e os cruzamentos dos ramos no interior do molde. Duas regras são necessárias [44] para se conseguir a configuração final das órbitas. A primeira (1) diz que, quando um ramo no molde tem número ímpar de torções, os pontos periódicos de uma órbita, ao passarem por esse ramo,

terão sua ordem invertida. A segunda (2) diz que, quando dois ramos permutam de posição no interior do molde, os pontos periódicos das órbitas que passam por esses ramos também serão permutados. Vamos aplicar estas regras a um exemplo. Seja os ramos de um molde como na figura 5.7, onde estão representadas duas órbitas periódicas: (10) e (101). A matriz de elos do molde é

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

A ordem de precedência entre os pontos periódicos de (10) e (101) pode ser obtida aplicando-se a regra de ordenação da seção 5.4.2. A permutação cíclica de (10) e (101) são:

10 01

e

101 011 110.

Como estes pontos são periódicos, vamos escrevê-los em sua representação estendida para que todos tenham o mesmo número de símbolos. Assim, 10 = 101010, 01 = 010101, 101 = 101101, 011 = 011011 e 110 = 110110. Colocando os pontos em ordem ascendente, temos

010101 011011 101010 101101 110110.

O ramo que inverte a orientação (o ramo que dobra) é o ramo "1" no molde. Vamos inverter as seqüências que iniciam por "1"

010101 011011 110110 101101 101010.

Aplicando a regra de ordenação nas seqüências 010101 e 011011 e também nas seqüências 101101 e 101010 temos

011011 < 010101 < 110110 < 101010 < 101101.

Assim, a ordem de precedência para os pontos periódicos das órbitas (10) e (101) em sua representação mínima é

$$011 < 01 < 110 < 10 < 101. \quad (5.4)$$

O nível inferior da região de inserção dos ramos é dado pela ordem de precedência (5.4) acima. Portanto para o nível inferior temos

$$\underbrace{(011) (01)}_{s_0} \quad \underbrace{(110) (10) (101)}_{s_1}$$

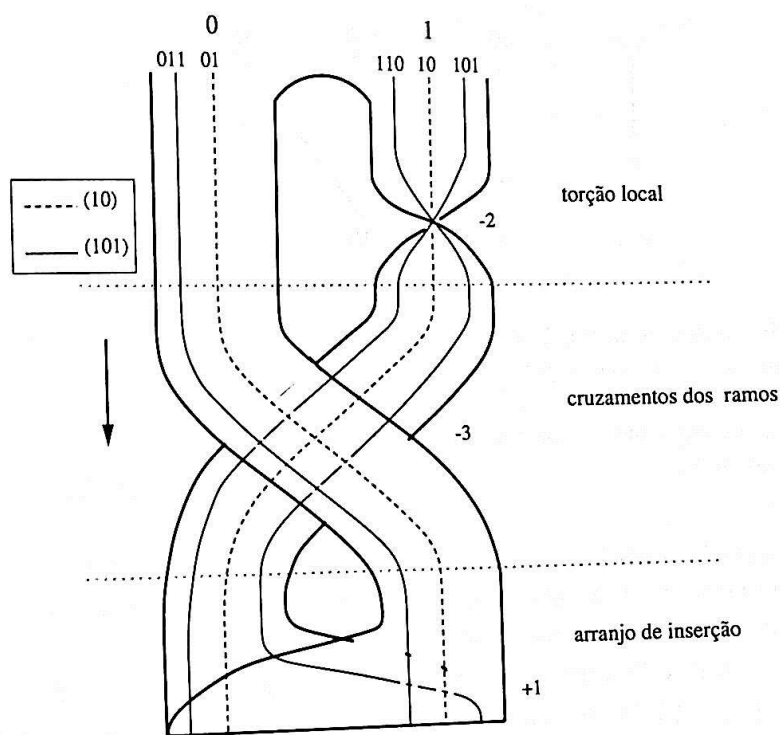


Figura 5.7: Construção das órbitas periódicas codificadas por (10) e (101) sobre o molde topológico. Todos os cruzamentos das órbitas são visíveis e o número de elos é $E(10,101) = -2$. As auto-interseções são descartadas.

onde S_0 e S_1 são os conjuntos de pontos para os ramos 0 e 1 do molde. Como o ramo 1 no molde tem torção local $-\pi$ rad (observe que na matriz de elos $M_{00} = 0$, portanto par, e $M_{11} = -1$, portanto ímpar), os pontos em S_1 terão ordem inversa, de acordo com a regra (1)

$$\underbrace{(011) (01)}_{S_0} \underbrace{(101) (10) (110)}_{S_1}.$$

Este é o resultado dos pontos periódicos, após sua passagem pela torção local do ramo 1. Agora, como os ramos 0 e 1 permutam de posição no molde, os conjuntos S_0 e S_1 serão permutados, de acordo com a regra (2)

$$\underbrace{(101) (10) (110)}_{S_1} \underbrace{(011) (01)}_{S_0}.$$

Esta é a configuração dos pontos periódicos após sua passagem pela região de cruzamento dos ramos. Esta sequência de pontos forma o nível superior da região de inserção dos ramos, que pode ser vista na figura 5.8 na parte superior.

Para finalizar a reprodução da região de inserção, os pontos periódicos do nível superior devem ser unidos com sua respectiva permutação cíclica no nível inferior, a

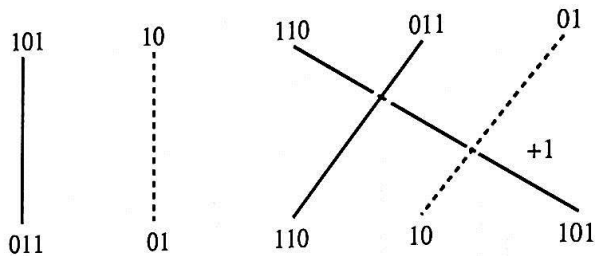


Figura 5.8: Reprodução da região de inserção dos ramos no molde topológico. No nível superior, a configuração final dos pontos periódicos, após as torções locais e os cruzamentos dos ramos. No nível inferior, a ordem de precedência dos pontos periódicos, contida no topo do molde. Os pontos são unidos da esquerda para a direita e de cima para baixo. As auto-intersecções são descartadas. Na figura $E_{inser} = +1$.

partir da esquerda para a direita (figura 5.8). Assim reconstruída, a região de inserção será topologicamente equivalente a correspondente região no molde. Na figura 5.8, o número de cruzamentos de inserção é $E_{inser}(10, 101) = +1$.

Podemos agora calcular o número de elos $E(10, 101)$ entre as órbitas (10) e (101) usando a equação (5.2). A somatória na equação (5.2) para as órbitas (10) ($p_1 = 2$) e (101) ($p_2 = 3$) fica

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 M(s_i, r_j) &= M(1, 1) + M(1, 0) + M(1, 1) + M(1, 0) + M(0, 0) + M(0, 1) \\ &= 2.M(1, 1) + 3.M(1, 0) + M(0, 0). \end{aligned}$$

Levando este resultado na equação (5.2) juntamente com o número de cruzamentos de inserção $E_{inser}(10, 101) = +1$ e usando os elementos da matriz de elos 5.3 temos

$$\begin{aligned} E(10, 101) &= \frac{1}{2} [2M(1, 1) + 3M(1, 0) + M(0, 0) + E_{inser}(10, 101)] \\ &= \frac{1}{2} [-2 - 3 + 0 + 1] \\ &= -2 \end{aligned}$$

O número de elos assim calculado está de acordo com aquele obtido a partir da contagem dos cruzamentos diretamente no molde.

No próximo capítulo, iremos utilizar o cálculo algébrico do número de elos para a confirmação do molde topológico proposto para os atratores espiral e "double-scroll".



Capítulo 6

Caracterização Topológica do Circuito de Chua

Nesse capítulo, mostraremos como aplicar as idéias desenvolvidas nos capítulos 4 e 5 na elaboração do modelo topológico para os atratores espiral e “double-scroll”. Mais especificamente, vamos obter um invariante topológico, o número de elos, diretamente das órbitas periódicas extraídas do fluxo e vamos compará-lo com aquele previsto pelos nós e elos do molde topológico. Desse modo, poderemos verificar a validade do molde topológico proposto para os atratores.

Para auxiliar na obtenção dos moldes topológicos, iniciaremos analisando o suporte das órbitas periódicas, ou seja, o atrator. Revestiremos os atratores em seu espaço de fases com uma máscara, para identificarmos suas diversas regiões topológicas. Essa máscara nos fornecerá um modelo geométrico para o fluxo que dá origem ao atrator. Como modelo geométrico, a máscara pode apresentar “torções” e “dobras” em suas regiões topológicas. Essas torções e dobras tem estreita relação com os ramos dos mapas de primeiro retorno para os dois atratores.

6.1 Regiões Topológicas

Para procedermos com a análise topológica dos atratores A_{espiral}^- e $A_{\text{simetrico}}$, é necessário o conhecimento das regiões topológicas que cada um dos atratores define em seu espaço de fases. Para obtermos estas regiões, podemos capturar a organização global das órbitas periódicas instáveis, analisando diretamente o suporte delas, ou seja, o atrator caótico em seu espaço de fases. Essa idéia já foi utilizado por Braun [42] para um atrator obtido a partir de uma série temporal experimental para uma descarga elétrica luminosa. Braun analisou uma revolução completa de uma seção de corte no atrator. Aqui, utilizamos um procedimento mais simples: a observação direta de uma revolução das trajetórias do atrator em sua projeção bidimensional [6, 8, 10, 34]. Dessa observação podemos perceber os estiramentos e dobras das regiões do atrator e também como o fluxo é dobrado e reinjetado nele mesmo no espaço de fases.

Iniciamos com a observação dos atratores em seu espaço de fases, representados nas figuras 1.5 e 1.6. Na figura 1.5 pode-se notar que o atrator espiral A_{espiral}^- tem duas direções para as trajetórias do fluxo: a primeira região, na base do atrator, as trajetórias espiralam afastando-se do centro, onde se localiza o ponto fixo p_- . Esta região é responsável pela divergência das trajetórias do centro do atrator. Na segunda, as trajetórias espiraladas na região anterior são reinjetadas novamente para a base do atrator através de uma dobra, provocando uma torção nessa região. A segunda região, portanto, é responsável pelo mecanismo de reinjeção das trajetórias. A figura 6.1 mostra a aplicação de uma máscara sobre o atrator espiral A_{espiral}^- . A máscara é um modelo geométrico para o fluxo no espaço de fases do atrator. Ela descreve como as diferentes regiões do fluxo evoluem para gerar o atrator. Na figura, a peça assinalada como (a) é a máscara para a região do atrator em que as trajetórias espiralam divergindo, sem torções, a partir do centro. Na mesma figura, a peça assinalada por (b) é a máscara para a região em que as trajetórias são reinjetadas de volta à base do atrator, através de uma dobra, provocando uma torção.

As regiões topológicas de um atrator estão relacionadas com os ramos do mapa de primeiro retorno para este atrator. Para mostrar isso, recordemos a forma de um mapa unimodal f que possui um único ponto de máximo (figura 2.1(a)). O mapa de primeiro retorno para o atrator espiral A_{espiral}^- (figura 2.3) também é unimodal. Para o mapa de primeiro retorno, o ramo a esquerda do ponto de máximo, identificado com o símbolo "0" no contexto da dinâmica simbólica, corresponde à região do atrator em que as trajetórias espiralam sem torção. Essa região se localiza na base do atrator (figura 6.1(a)). No mapa de primeiro retorno essa região é responsável pela conservação da orientação de um intervalo I em relação a sua pré-imagem sob f (veja seção 2.1.2), resultado da inexistência de torções (torção local nula), não possuindo dobras. Logo, assim como o ramo "0" no mapa de primeiro retorno, a região sem torções no atrator A_{espiral} será identificada pelo símbolo "0". A peça (a) da figura 6.1 é então a região "0". O ramo da direita do ponto de máximo para o mapa de primeiro retorno, identificado pelo símbolo "1", corresponde a região do atrator em dobra do fluxo (figura (b) em 6.1). No mapa de primeiro retorno essa região reverte a orientação de um intervalo I em relação a sua pré-imagem sob f , devido a presença da torção local nessa região do fluxo. Então, como no ramo "1" do mapa de primeiro retorno, essa região será identificada pelo símbolo "1" e a chamaremos de região 1.

É interessante visualizarmos a posição das variedades estável W^s e instável W^u relativamente ao modelo geométrico para o fluxo no atrator espiral. A variedade instável, bidimensional, está próxima ao plano que passa pela base do atrator, comximadamente perpendicular à direção da variedade estável. A variedade estável, unidimensional, é aprotológico para este atrator, os diversos ramos do molde resultarão das próprias peças W^s como descrevemos no capítulo 5.

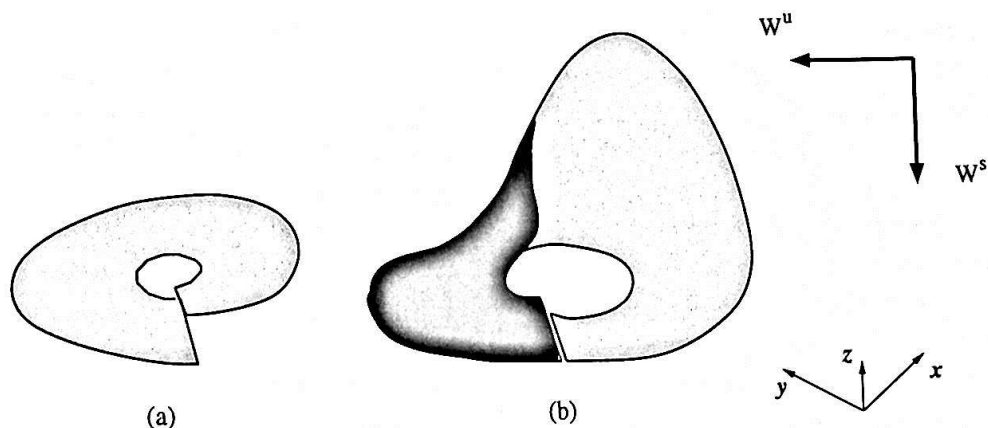


Figura 6.1: Máscara para o atrator espiral A_{espiral}^- . A máscara é um modelo geométrico para o fluxo no espaço de fases. A peça (a) corresponde à região em que o fluxo espirala ao redor do centro do atrator *sem nenhuma torção*. A essa peça, associamos o símbolo "0". A peça (b) corresponde a região de reinjeção do fluxo através de uma torção devido a uma dobra. Associamos o símbolo "1" a essa peça.

A observação do atrator "double-scroll" ($A_{\text{simétrico}}$), em projeção bidimensional na figura 1.6, revela uma estrutura geométrica para o fluxo muito mais complexa do que aquela encontrada para o atrator espiral. Na figura 1.6 podemos identificar quatro diferentes regiões topológicas. De fato, existem mais que quatro regiões. Entretanto, quatro regiões são relativamente fáceis de perceber sendo que as demais são de difícil observação. Portanto, como primeira aproximação, adotaremos quatro regiões para o atrator $A_{\text{simétrico}}$, em concordância com o seu mapa de primeiro retorno (seção 2.2.1), que é, em primeira aproximação, um mapa quártico. A máscara para o "double-scroll", descrevendo o modelo geométrico para o fluxo, pode ser vista na figura 6.2, com as quatro regiões topológicas consideradas.

Assim como para o mapa de primeiro retorno para o "double-scroll", um mapa aproximadamente quártico, com quatro ramos, as quatro regiões topológicas nesse atrator são identificadas pelos símbolos "0", "1", "2" e "3". Mantendo a correspondência com o mapa de primeiro retorno, a região "0" (ramo "0" no mapa) não possui dobras e sua torção local é zero. Logo, a região "0" espirala as trajetórias divergindo do centro, onde está localizado um dos pontos fixos. A região "1" (ramo "1" no mapa), possui uma dobra com uma torção local $+\pi$ rad. Esta região reinjeta as trajetórias do fluxo de volta ao centro do atrator. Em analogia ao mapa de primeiro retorno para o atrator espiral, esta região inverte a orientação de um intervalo em relação a sua pré-imagem. O ramo "1" no mapa de primeiro retorno, por ser decrescente, tem um número ímpar de torções locais [2, 6, 8, 23, 34], concordando com as torções observadas para essa região topológica. A região "2" (ramo "2" no mapa), tem duas dobras com torção local de $+2\pi$ rad. A região "2" também reinjeta as trajetórias de volta ao centro do atrator. Com um número par de torções locais, o ramo "2", e

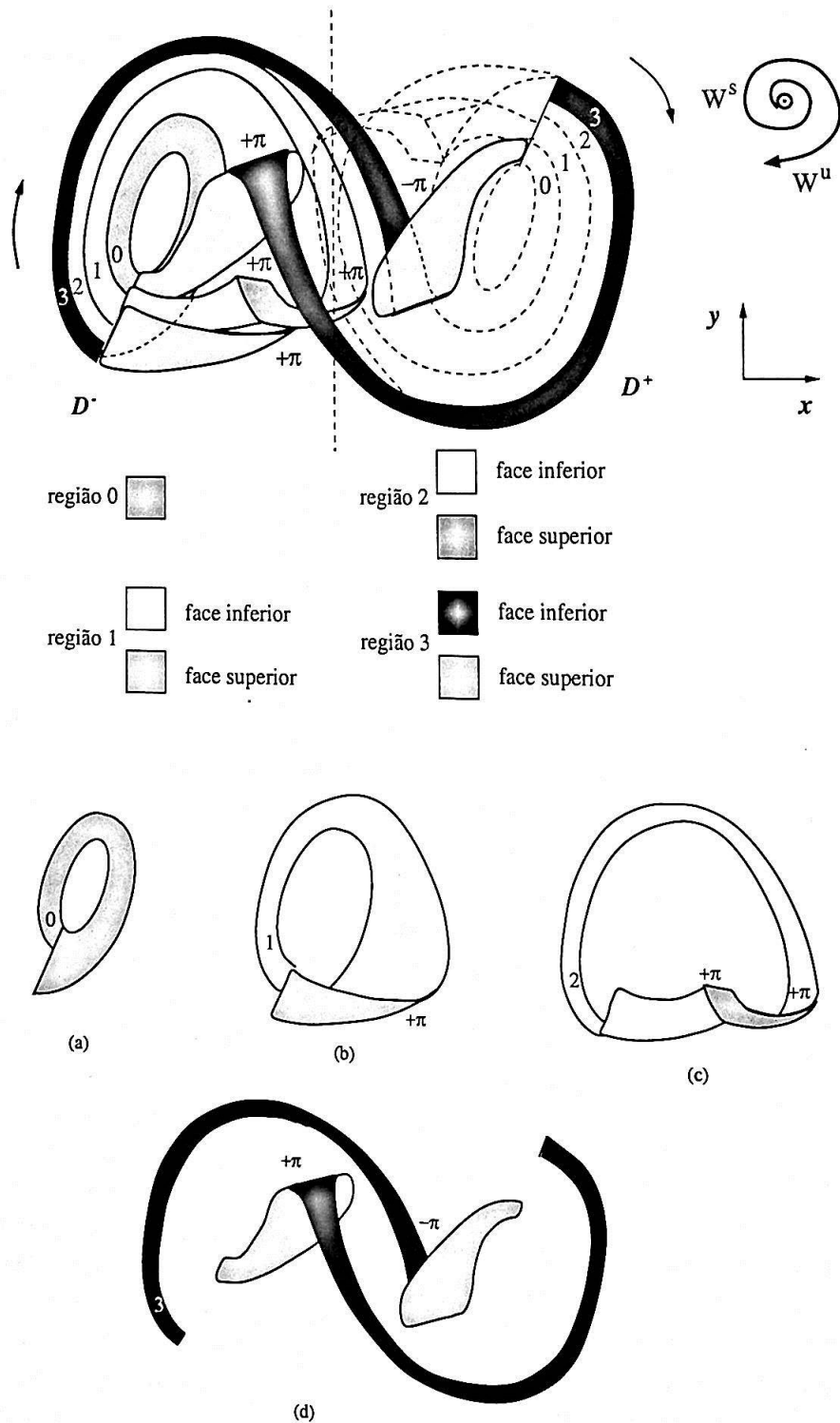


Figura 6.2: Máscara para o atrator "double-scroll" *Asimétrico* com as quatro regiões topológicas. A região "0" não apresenta nenhuma torção com as trajetórias divergindo do centro. As demais regiões de $+\pi$ rad; a região "2" torção de $+2\pi$ rad e a região "3", torção de $-\pi$ rad. Abaixo, as peças podem ser vistas separadamente.

portanto a região topológica "2", conservam a orientação de um intervalo em relação a sua pré-imagem, uma vez que o ramo "2" no mapa de primeiro retorno é crescente. Finalmente, a região "3" (ramo "3" no mapa) apresenta uma única dobra, com torção local de $-\pi$ rad. A região "3" também reinjeta as trajetórias de volta ao centro do atrator, mas com a faixa de reinjeção vinda do outro domínio do atrator, D^+ . Em nosso modelo, a região "3" comunica os dois domínios D^- e D^+ . Essa região, assim como o ramo "3" do mapa de primeiro retorno, inverte a orientação de um intervalo em relação a sua pré-imagem, pois é um ramo decrescente no mapa de primeiro retorno.

Para a máscara do modelo geométrico do fluxo para o "double scroll", a variedade instável W^u está aproximadamente no plano do atrator, emanando dos pontos fixos p_0 e p_{\pm} , enquanto que a variedade estável W^s tem direção perpendicular ao plano do atrator, passando pelos pontos fixos p_0 e p_{\pm} . Com a projeção da variedade instável ao longo da variedade estável, as regiões topológicas para o fluxo resultarão nos ramos que formarão nosso modelo topológico [41].

Uma observação importante a ser feita em relação as máscaras nas figuras 6.1 e 6.2 é referente a hierarquia das regiões topológicas nos atratores. Por exemplo, para o "double-scroll" (figura 6.2), a região "0" é a mais interna ao atrator, a região "1" posiciona-se logo depois, seguida da região "2" e "3" nessa ordem. Essa hierarquia é a mesma que a apresentada no mapa de primeiro retorno. O mesmo ocorre em relação ao atrator espiral, onde a região "0" é interna ao atrator e a região "1" externa. A seqüência em que as regiões se apresentam no atrator determina a ordem de precedência dos pontos periódicos, visitados por uma órbita periódica. É a ordem em que estes pontos são visitados pelas órbitas que estabelece a ordem de precedência entre elas (seção 5.4.2).

6.2 Molde Topológico do Atrator Espiral

Os modelos geométricos para o fluxo obtidos quando aplicamos uma máscara aos atratores em seu espaço de fases, nos dá condições de determinarmos o molde topológico para esses atratores. Além de corresponder ao modelo geométrico para o fluxo, o molde topológico também deve concordar com o mapa de primeiro retorno associado a esse fluxo.

Um mapa de primeiro retorno para um fluxo mostra como é a dinâmica das trajetórias no interior do atrator originado por esse fluxo. Esta dinâmica é caracterizada pelos estiramentos e dobras que o fluxo submete as trajetórias em seu interior. Dessa forma, podemos esperar que um mapa de primeiro retorno reflita, em sua estrutura, todas as regiões topológicas que a máscara de um atrator (modelo geométrico para o fluxo) pode apresentar para um molde topológico. Foi isso que procuramos mostrar na seção anterior, ao analisarmos a origem e natureza dos ramos de um mapa de primeiro retorno, comparativamente às regiões topológicas na máscara para o atrator.

Para o atrator espiral, as duas regiões topológicas 0 (figura 6.1(a)), onde as trajetórias topológico correspondente. A região topológica 0 (figura 6.1(a)), onde as trajetórias

espiralam divergindo a partir do centro do atrator e sem nenhuma torção local, resulta em um ramo interior e sem torções no molde. A região topológica 1 (figura 6.1(b)), onde as trajetórias sofrem uma dobra, com torção local $+\pi$ rad, são reinjetadas de volta ao centro do atrator. Essa região resultará em um ramo exterior no molde com uma torção de $+\pi$ rad. O molde pode ser visto na figura 6.3.

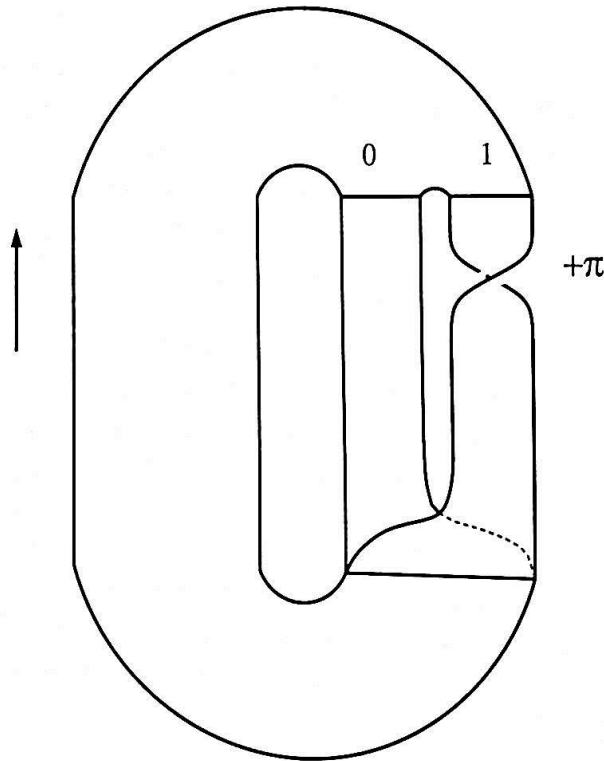


Figura 6.3: Molde topológico para o atrator espiral, formado por dois ramos correspondendo as duas regiões topológicas para o modelo geométrico para o atrator em seu espaço de fases. O ramo 0 corresponde a região em que as trajetórias espiralam sem dobras. O ramo 1 corresponde a região em que as trajetórias dobram uma vez, reinjetando o fluxo, com torção local $+1$.

Podemos ter uma descrição algébrica do molde topológico para o atrator espiral através da matriz de elos. Para o molde do atrator espiral (figura 6.3), a matriz de elos é

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

onde os elementos da diagonal principal são as torções locais dos ramos 0 e 1. Os elementos fora da diagonal são os cruzamentos entre os ramos, sempre seguindo a convenção de sinal na seção 4.2.

Este molde é o mesmo que o encontrado por Kokarev et al. para o circuito de Chua para o atrator espiral no regime bi-estável (onde coexistem dois atratores espirais antissimétricos) [45]; por Letellier et al. para o atrator de Lorenz [6]; para um

atrator gerado a partir de uma série temporal obtida para um modelo de uma estrela variável [34]; e por Braun no estudo do caos homoclínico em uma descarga elétrica luminosa [42]. Este molde também é similar ao molde encontrado por Letellier et al. para o atrator de Rossler [8].

Como maneira de verificar o molde topológico para o atrator espiral, precisamos mostrar a equivalência topológica entre as órbitas previstas no molde com aquelas extraídas diretamente do atrator. Uma boa maneira de se fazer isso é através da comparação de invariantes topológicos para as órbitas previstas no molde com os invariantes obtidos das órbitas extraídas diretamente do atrator. Na prática, basta calcularmos um único invariante, que no nosso caso será o número de elos. Nas figuras 6.4(a) e (b) temos os cruzamentos que dois pares de órbitas extraídas do atrator, representadas pelas sequências (1) e (100) (primeiro par) e (1) e (101) (segundo par), fazem no interior do atrator. Cada sinal “+” e “-” representa +1 ou -1 no número de cruzamentos. Os cruzamentos seguem a convenção definida na seção 4.2 e foram obtidos através da inspeção da terceira coordenada z não expressa nos gráficos. Na figura 6.4(a), o número de elos para o par de órbitas (1) e (100) é $E(1, 100) = +1$ (soma dos cruzamentos dividido por 2). Na figura 6.4(b), o número de elos para o par de órbitas (1) e (101) é $E(1, 101) = +1$. Vamos a seguir comparar estes valores com os previstos no molde.

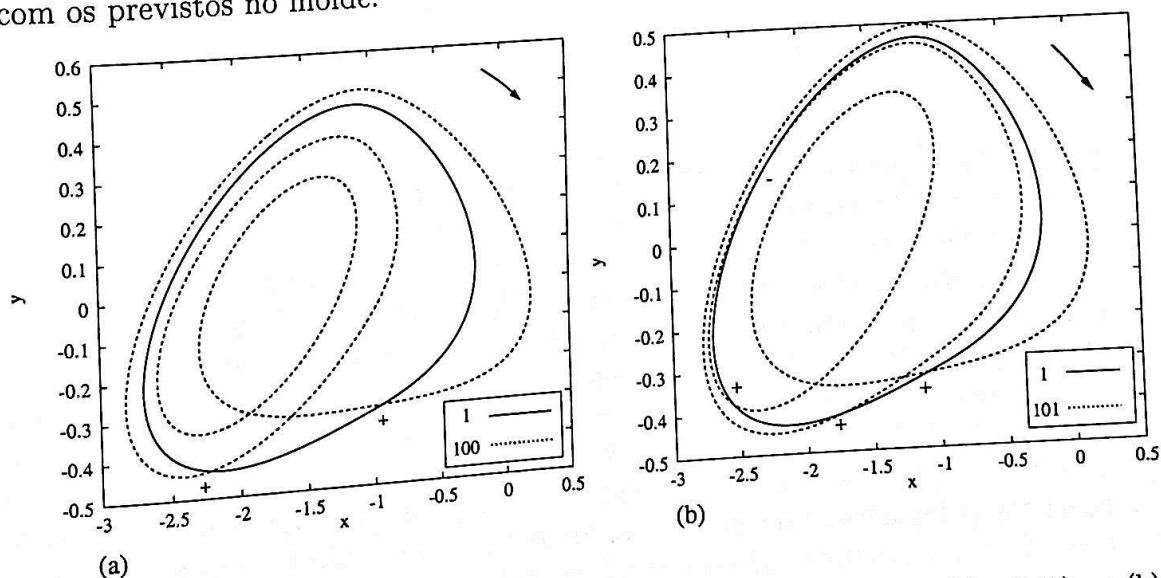


Figura 6.4: Os pares de órbitas, codificadas pelos símbolos (1) e (100) em (a), (1) e (101) em (b), extraídas diretamente do atrator. Em (a) o número de elos é $E(1, 100) = \frac{1}{2}(+1 + 1) = +1$. Em (b) o número de elos é $E(1, 101) = \frac{1}{2}(+1 + 1 + 1 - 1) = +1$.

O número de elos previsto no molde pode ser obtido de duas formas: geometricamente, através da representação do par de órbitas no molde, contando-se os cruzamentos que fazem entre si, e algebricamente, por meio do cálculo usando-se a matriz de elos e o gráfico de inserção (veja a seção 5.5). Aqui, para o atrator espiral, usaremos as duas formas como uma ilustração dos dois métodos. Ao tratarmos o

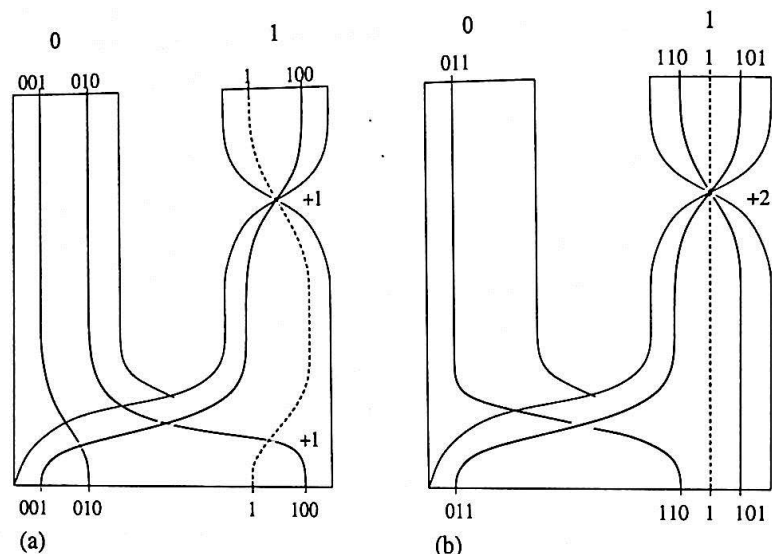


Figura 6.5: Em (a), o par de órbitas (1) e (100) e os cruzamentos que fazem entre si de acordo com o molde para o atrator espiral. O número de elos é dado pela metade da soma dos cruzamentos, ou seja, $E(1, 100) = +1$. Em (b) o mesmo que (a) para o par de órbitas (1) e (101), com número de elos $E(1, 101) = +1$.

atrator “double-scroll”, usaremos apenas o cálculo algébrico do número de elos devido a dificuldade em se obter a representação das órbitas no molde (as órbitas são bastante complexas). Na figura 6.5(a) e (b), temos os dois pares de órbitas, (1) com (100) e (1) com (101), representados no molde topológico, onde podemos observar os cruzamentos que uma órbita faz com seu par. O número de elos é, $E(1, 100) = +1$ (figura (a)) e $E = (1, 101) = +1$ (figura (b)). Estes valores, previstos pelo molde, para validar nosso modelo topológico para o atrator espiral. Isto é suficiente de órbitas extraídos do atrator (veja tabela 2.2) terão número de elos iguais àqueles elos. Usaremos a fórmula 5.2 e a matriz 6.1 para o molde do atrator espiral. Os gráficos de inserção para os pares de órbitas (1) com (100) e (1) com (101) podem ser visto nas figuras 6.6(a) e (b) respectivamente. Os gráficos foram obtidos com o uso das regras (1) e (2) expostas na seção 5.5 para construção dos pontos periódicos nos níveis inferior e superior.

O gráfico de inserção para o par de órbitas (1) e (100) (figura 6.6(a)) mostra que, antes de serem inseridas, as órbitas se cruzam com $E_{inser}(1, 100) = +1$. O par de órbitas (1) e (101) (figura 6.6(b)) não se cruzam antes de serem inseridas, portanto

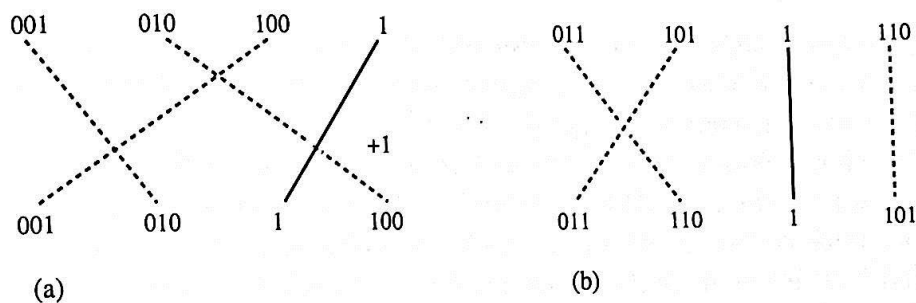


Figura 6.6: Gráficos de inserção para os pares de órbitas (1) e (100) em (a), e para o par (1) e (101) em (b). O nível inferior é dado pela ordem de precedência dos pontos periódicos, obtidos pela permutação cíclica da sequência representando o par de órbitas. O nível superior é dado utilizando-se as regras (1) e (2) na seção 5.5 no capítulo anterior. Os pontos no nível superior são unidos com sua correspondente permutação cíclica no nível inferior, a partir da esquerda para a direita. Assim, $E_{inser}(1, 100) = +1$ e $E_{inser}(1, 101) = 0$.

$E_{inser}(1, 101) = 0$. O número de elos para o par (1) e (100) é (equação 5.2)

$$\begin{aligned} E(1, 100) &= \frac{1}{2} [M(1, 1) + 2M(1, 0) + E_{inser}(1, 100)] \\ &= \frac{1}{2} (+1 + 1) \\ &= +1, \end{aligned}$$

e para o par (1) e (101), o número de elos é

$$\begin{aligned} E(1, 101) &= \frac{1}{2} [2M(1, 1) + M(1, 0) + E_{inser}(1, 101)] \\ &= \frac{1}{2} (+2 + 0) \\ &= +1. \end{aligned}$$

Estes resultados são os mesmos que os obtidos na figura 6.4 para as órbitas extraídas diretamente do atrator.

6.2.1 O Molde Topológico e o Regime Hiperbólico

Vamos nesta seção discutir os limites de validade do molde topológico para o atrator espiral. Esta discussão é importante pois o regime dinâmico em que se encontra o atrator espiral $A_{espiral}$ (e também o "double-scroll") é, na prática, não-hiperbólico, ou seja, algumas órbitas encontradas no atrator sofrem podas (capítulo 3). Entretanto, o molde obtido para o atrator espiral, contido na figura 6.3, representa a dinâmica desse atrator em regime hiperbólico. Um sistema dinâmico, descrito por uma árvore binária como o mapa quadrático ou como o atrator espiral $A_{espiral}^-$, está em regime hiperbólico quando todas as órbitas periódicas previstas na árvore binária são possíveis. Para

um atrator, esta situação se estabelece após a ocorrência da última tangência entre as variáveis estável e instável [42], ao variarmos o parâmetro de controle do sistema. Assim, durante a ocorrência das tangências, o processo que predomina é o de formação da órbita homoclínica. Este processo é chamado de tangência homoclínica, com as variedades estável e instável tangenciando-se e formando o emaranhado homoclínico. Somente após o surgimento da órbita homoclínica, depois da última tangência, as variedades estável e instável interseccionam-se e o regime se torna hiperbólico. Sendo assim, antes de atingir a hiperbolicidade, o sistema não apresenta todas as possíveis órbitas previstas no modelo da árvore binária completa. Esta é a situação para qual algumas órbitas do sistema sofrem podas, como descrito no capítulo 3.

Mas a maioria, se não todos, os atratores caóticos de interesse para a Física, são não hiperbólicos. A análise topológica nos fornece a caracterização no limite hiperbólico [42] para o sistema dinâmico, partindo do conhecimento de seu comportamento para um valor de seu parâmetro de controle onde ele é não hiperbólico. A dinâmica simbólica e o molde topológico descrevem sistemas dinâmicos em regime hiperbólico. Mas, se conhecemos o comportamento topológico do sistema em seu regime hiperbólico, podemos estender este conhecimento para o mesmo sistema fora do regime hiperbólico. Isso é possível porque os invariantes topológicos, associados aos nós e elos formados pelas órbitas, são invariantes, isto é robustos, a pequenas variações do parâmetro de controle. As órbitas existentes no regime hiperbólico, com exceção das que sofrem podas, também existem no sistema fora do regime hiperbólico e apresentam as mesmas propriedades topológicas, descritas pelos invariantes topológicos, que as observadas para as órbitas do sistema em regime hiperbólico.

Assim, para caracterizar completamente um sistema dinâmico em regime não hiperbólico, necessitamos "acrescentar" à sua caracterização hiperbólica as informações referentes às podas.

As informações referentes às podas estão representadas no plano simbólico construído para as órbitas periódicas instáveis no atrator. A seqüência simbólica máxima, obtida da frente de poda no plano simbólico, somada a caracterização hiperbólica para o atrator A_{espiral}^- caracteriza completamente esse atrator no regime não-hiperbólico.

Com isso finalizamos a caracterização topológica do atrator espiral A_{espiral}^- . Na próxima seção vamos obter o molde topológico para o atrator $A_{\text{simétrico}}$ "double-scroll".

6.3 Molde Topológico do Atrator "Double-scroll"

De acordo com sua máscara (seção 6.1) e seu mapa de primeiro retorno (um mapa aproximadamente quártico), o atrator "double-scroll" é formado, em uma primeira aproximação, por quatro regiões topológicas. Seguindo o mesmo procedimento adotado para o atrator espiral A_{espiral}^- , vemos que estas quatro regiões originam um molde topológico com quatro ramos. A máscara para este atrator possui, na realidade, oito regiões topológicas, quatro regiões em cada domínio D^+ e D^- do espaço de fases. Entretanto, devido a equivariância do fluxo gerador do atrator, as quatro regiões

posicionadas no domínio D^+ (figura 6.2) são antissimétricas em relação as regiões posicionadas em D^- . Foi devido a equivariância do fluxo que construímos o mapa de primeiro retorno para o "double-scroll" (figura 2.4) com os ramos dos dois domínios sobrepostos. E o molde topológico, ao invés de formado por todas as oito regiões topológicas, é construído com apenas quatro regiões de um dos domínios do espaço de fases. Essa maneira de se construir o molde topológico para um sistema exibindo propriedade de simetria equivariante já foi aplicada na obtenção do molde topológico do atrator de Lorenz [6] e também de um atrator gerado experimentalmente por um circuito eletrônico equivariante [23].

Intuitivamente podemos perceber que as quatro regiões de cada domínio do atrator originarão o mesmo molde topológico. Para ver isto, basta inserir uma das regiões 3 (que comunica os dois domínios) de volta ao seu domínio de origem. Por exemplo, a região 3 que se origina em D^+ , sofre torção de $+\pi$ rad antes de ser inserida em D^- . Ao inserir a região 3 de origem em D^+ de volta a esse domínio, a torção da região 3 será de $+\pi$ rad. Seguindo o mesmo raciocínio, a região 3 de origem em D^- apresentará torção de $-\pi$ rad ao ser reintroduzida em D^- . Estas operações, que podem ser vistas nas figuras 6.7 (a) e (b), separam os dois domínios, resultando em dois moldes topológicos equivalentes.

Com estas considerações, construímos um molde correspondente a um único domínio no espaço de fases (D^- na figura 6.2). O molde para o "double-scroll", com suas quatro regiões, pode ser visto na figura 6.8. A região 0, formada por trajetórias que divergem a partir do centro, não possui dobras resultando em um ramo sem torções; na região 1 as trajetórias sofrem uma dobra com torção local de $+\pi$ rad, resultando em um ramo com torção de $+\pi$ rad; na região 2 as trajetórias dobram duas vezes, resultando em um ramo com torção local de $+2\pi$ rad; por fim a região 3 é dobrada uma vez antes de introduzir as trajetórias no outro domínio. Esta dobra provoca uma torção de $-\pi$ rad na região 3 do domínio D^+ e de $+\pi$ rad em D^- (figura 6.7 (a) e (b)).

A descrição algébrica para esse molde, ou seja, sua matriz de elos, é dada por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

onde os elementos na diagonal principal são as torções locais dos ramos 0, 1, 2 e 3, e os elementos fora da diagonal principal são os cruzamentos entre os ramos, obedecendo a convenção de sinais na seção 4.2.

Este molde é similar ao obtido por Kocarev et al. em [45]. Entretanto Kocarev não levou em conta a simetria equivariante apresentada pelo circuito de Chua, o que resultou em um molde com 8 ramos, antissimétricos para os dois domínios do espaço de fases. Outra diferença encontrada entre o molde aqui proposto e o obtido por Kocarev está na região de inserção dos ramos. Aqui, da esquerda para a direita, o

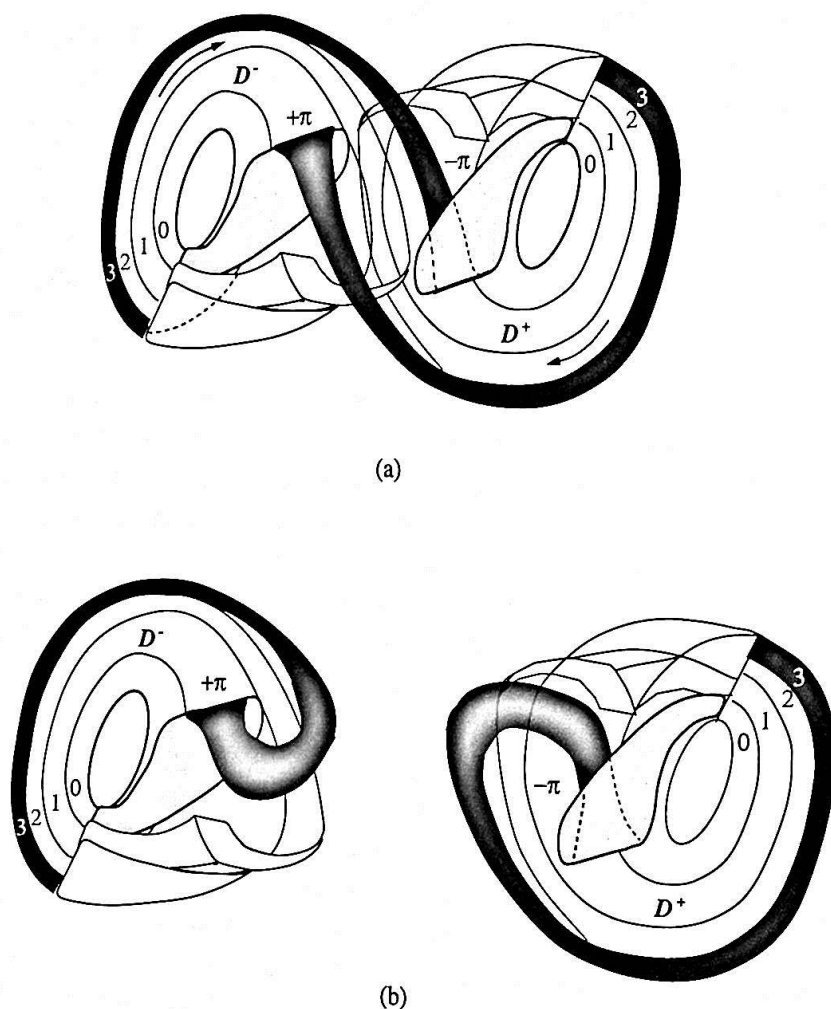


Figura 6.7: Em (a) a máscara para o atrator equivariante "double-scroll" e seus dois domínios do espaço de fases. (b) Máscaras associadas aos domínios D^+ e D^- do espaço de fases, após as operações de reintrodução das regiões 3 de volta ao domínio de origem. Das reintroduções resultam duas máscaras com regiões antissimétricas que originam dois moldes topológicos equivalentes.

ramo 1 é o último a ser inserido, enquanto que no molde proposto por Kocarev o ramo 1 é o segundo a ser inserido. Entretanto Kocarev utilizou, nas equações que definem o circuito de Chua, um outro conjunto de constantes com um outro parâmetro de controle, levando, provavelmente, a um atrator diferente daquele por nós estudado. A comparação mais cuidadosa destes dois resultados é ainda uma questão em aberto.

Vamos agora verificar o molde topológico para o atrator "double-scroll", da mesma forma que fizemos com o atrator espiral: mostrando a equivalência topológica entre as órbitas extraídas diretamente do fluxo e as órbitas previstas no molde. Para mostrar essa equivalência, vamos comparar o número de elos entre os pares de órbitas previstos no molde, e o número de elos referente aos mesmos pares extraídos do fluxo. Mas antes, vamos ver qual a influência que a propriedade de simetria equivariante exerce

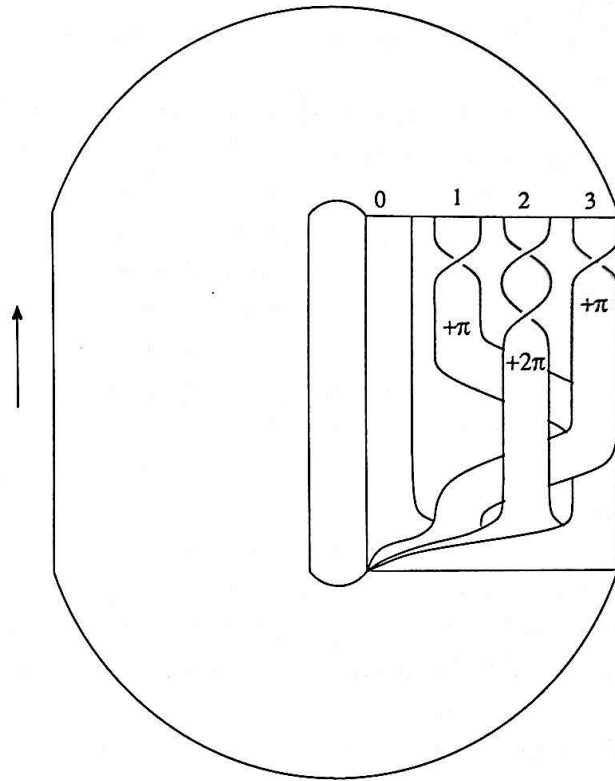


Figura 6.8: Molde topológico para o atrator "double-scroll", formado por quatro ramos, correspondentes as quatro regiões topológicas do domínio D^- do espaço de fases do atrator (figura 6.7). O ramo 0 corresponde à região em que as trajetórias espiralam sem dobras. O ramo 1 corresponde a região em que as trajetórias dobram uma vez, reinjetando o fluxo, com torção local de $+\pi$ rad. O ramo 2 dobra as trajetórias duas vezes, reinjetando o fluxo através de uma torção de $+2\pi$ rad. O ramo 3 corresponde a região da máscara (figura 6.2) que comunica os dois domínios D^+ e D^- do atrator. Essa região é dobrada uma vez antes de ser reintroduzida com torção de $+\pi$ rad.

sobre a natureza das órbitas existentes no "double-scroll". A simetria equivariante traz algumas conseqüências para o cálculo do número de elos para certos pares de órbitas, como veremos mais adiante.

Conforme discussão iniciada na seção 1.4, a propriedade de simetria equivariante determina em que configuração as órbitas no "double-scroll" se apresentam no espaço de fases. As órbitas no atrator sempre se apresentam aos pares, que podem ser de dois tipos: órbitas simétricas \mathcal{O}_s e assimétricas \mathcal{O}_a . Cada órbita do par de órbitas simétricas \mathcal{O}_s^+ e \mathcal{O}_s^- está situado em ambos os domínios D^+ e D^- simultaneamente. Cada uma delas percorre as regiões 0, 1, 2 ou 3 identicamente em ambos os domínios: a seqüência de regiões percorridas por \mathcal{O}_s^- (ou \mathcal{O}_s^+) em D^- será a mesma que a percorrida em D^+ . Desse modo, as órbitas do par de órbitas simétricas são idênticas. Essa propriedade se deve à simetria equivariante do fluxo gerador do atrator ¹. No

¹Aplicando a matriz equivariante γ (seção 1.4) a uma das órbitas simétricas obtemos seu par, ou

molde, as órbitas simétricas são idênticas: \mathcal{O}_s^- percorre os mesmos ramos na mesma ordem de visitação que \mathcal{O}_s^+ .

Já as órbitas do par assimétrico podem ser divididas em dois tipos. Nas órbitas do primeiro tipo, cada órbita do par \mathcal{O}_a^- e \mathcal{O}_a^+ se situa em um único domínio D^- e D^+ , respectivamente, podendo percorrer as regiões 0, 1, e 2. Nas do segundo tipo, aquelas em que cada órbita do par se situa em ambos os domínios simultaneamente, podendo percorrer as regiões 0, 1, 2 e 3. Em ambos os tipos de órbitas assimétricas, a aplicação de γ à órbita \mathcal{O}_a^- resulta em um segunda órbita \mathcal{O}_a^+ : o par \mathcal{O}_a^- e \mathcal{O}_a^+ está portanto simetricamente posicionado no espaço de fases.

Vejam agora como essa configuração de órbitas no "double-scroll" se reflete no número de elos para as órbitas previstas pelo molde. O molde aqui proposto é definido para o domínio D^- . Logo, para as órbitas extraídas do atrator, consideraremos apenas os cruzamentos que ocorrem nesse domínio.

As situações possíveis de cruzamentos são: (1) cruzamento de duas órbitas simétricas; (2) cruzamento de duas órbitas assimétricas e (3) cruzamento de uma órbita simétrica com outra assimétrica. Seja então os pares de órbitas simétrica $\mathcal{O}_s^\pm = \mathcal{O}_s$ (órbitas de um par de simétricas são idênticas) e os possíveis pares de órbitas assimétricas \mathcal{O}_a^\pm .

Na situação (1) os cruzamentos de duas órbitas simétricas \mathcal{O}_s^1 e \mathcal{O}_s^2 são idênticos nos dois domínios. Para estas órbitas computamos apenas a metade deles correspondente à D^- . Os cruzamentos em D^+ são exatamente os mesmos que aqueles em D^- . Em (2), no cruzamento de duas órbitas assimétricas \mathcal{O}_a^1 e \mathcal{O}_a^2 , escolhemos uma delas no domínio D^- , digamos \mathcal{O}_a^{1-} , e a segunda órbita em sua configuração simétrica através do par \mathcal{O}_a^{2-} e \mathcal{O}_a^{2+} nos domínios D^- e D^+ , respectivamente. Novamente, levamos em conta apenas os cruzamentos efetuados em D^- . Em (3), para os cruzamentos de uma órbita simétrica com outra assimétrica, escolhemos a assimétrica \mathcal{O}_a^- no domínio D^- e computamos os cruzamentos efetuados com \mathcal{O}_s . Vamos então calcular o número de elos para alguns pares de órbitas extraídas do "double-scroll" de acordo com as configurações acima discutidas.

Na figura 6.9 (a), uma órbita assimétrica (10) e uma órbita simétrica (30) se cruzam na situação (3) acima definida. O número de elos é $E(30, 10) = +2$ (soma dos cruzamentos dividido por 2). Na figura 6.9 (b), temos duas órbitas assimétricas (101) e (200) e um cruzamento na situação (2) acima definido. Nesse caso, o número de elos é $E(101, 200) = +3$. Na figura 6.9 (c) temos duas órbitas assimétricas (10) e (200), definindo um cruzamento na situação (2) novamente. Nesse caso, o número de elos é $E(10, 200) = +2$.

Na figura 6.11 observamos as órbitas assimétricas (3020), percorrendo os dois domínios D^+ e D^- , e (101) situada no domínio D^- . Estas órbitas definem um cruzamento na situação (2). A figura (a) mostra os cruzamentos da órbita (101) com uma das órbitas do par (3020). A figura (b), os cruzamentos de (101) com a outra órbita do par (3020). O número de elos é $E(101, 3020) = +6$. Agora vamos comparar seja, $\gamma\mathcal{O}_s^- = \mathcal{O}_s^+$. Para as órbitas simétricas, \mathcal{O}_s^- e \mathcal{O}_s^+ são iguais.

estes valores para o número de elos com os previstos pelo molde para estas mesmas órbitas.

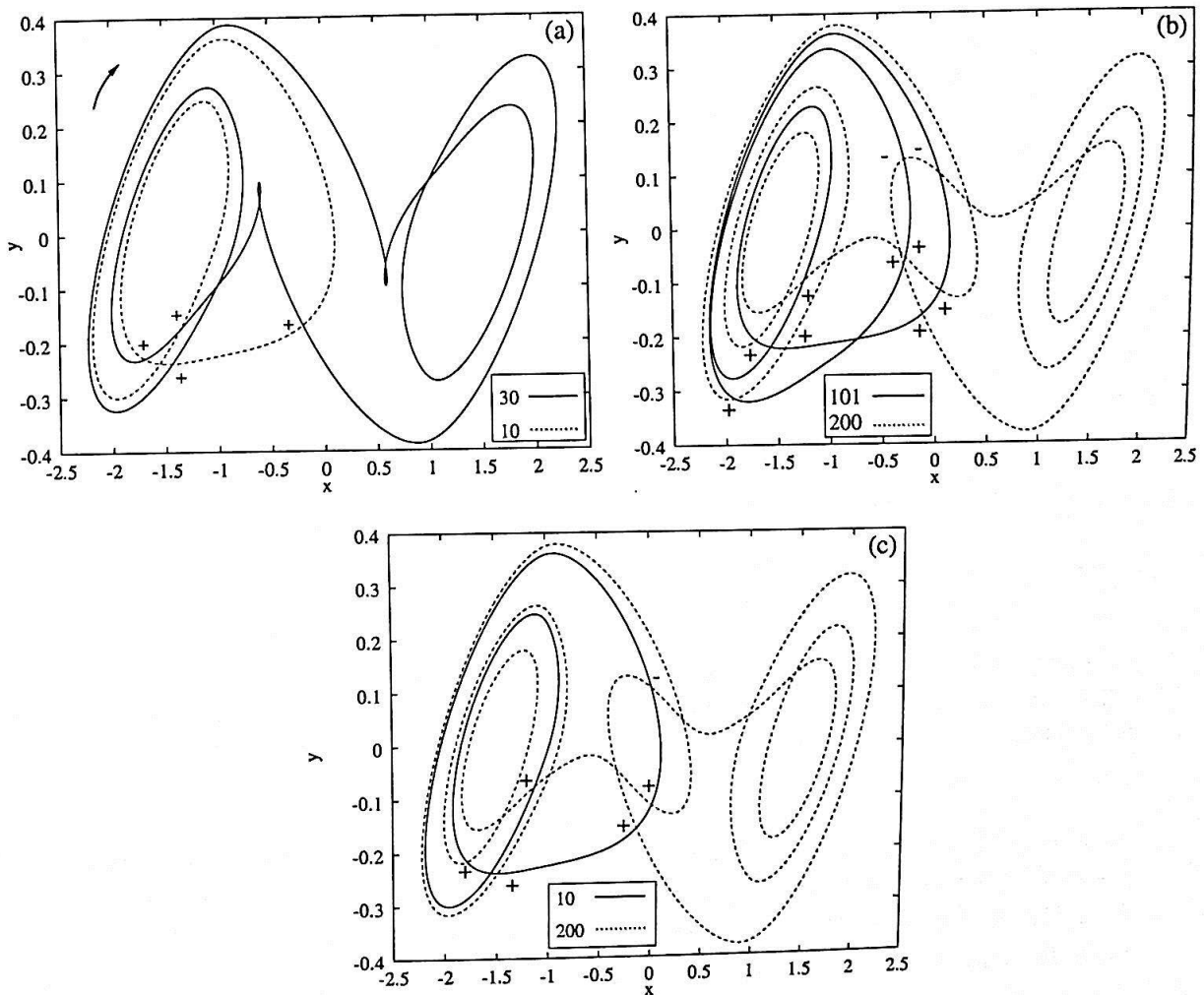


Figura 6.9: Órbitas periódicas instáveis extraídas diretamente do atrator "double-scroll". Em (a), cruzamentos das órbita assimétrica (10) com a órbita simétrica (30), resultando em um número de elos $E(10, 30) = +2$. Em (b), cruzamentos de duas órbitas assimétricas (101) e (200), com número de elos $E(101, 200) = +3$. Em (c), cruzamentos das órbitas assimétricas (10) e (200) com número de elos $E(10, 200) = +2$.

Da mesma maneira que para o atrator espiral, o número de elos no molde para o "double-scroll" pode ser obtido de duas formas: geometricamente, através da representação das órbitas no molde e algebricamente, usando-se a matriz de elos para o molde e o gráfico de inserção. Escolhemos a algébrica, pois a geométrica implica em representar algumas órbitas muito complexas no molde, dificultando bastante a identificação dos cruzamentos. Usaremos a fórmula 5.2 e a matriz 6.2. Os gráficos de inserção (veja seção 5.5) para as órbitas da figuras 6.9 (a), (b) e (c) podem ser vistos na figuras 6.10 (a), (b) e (c) respectivamente.

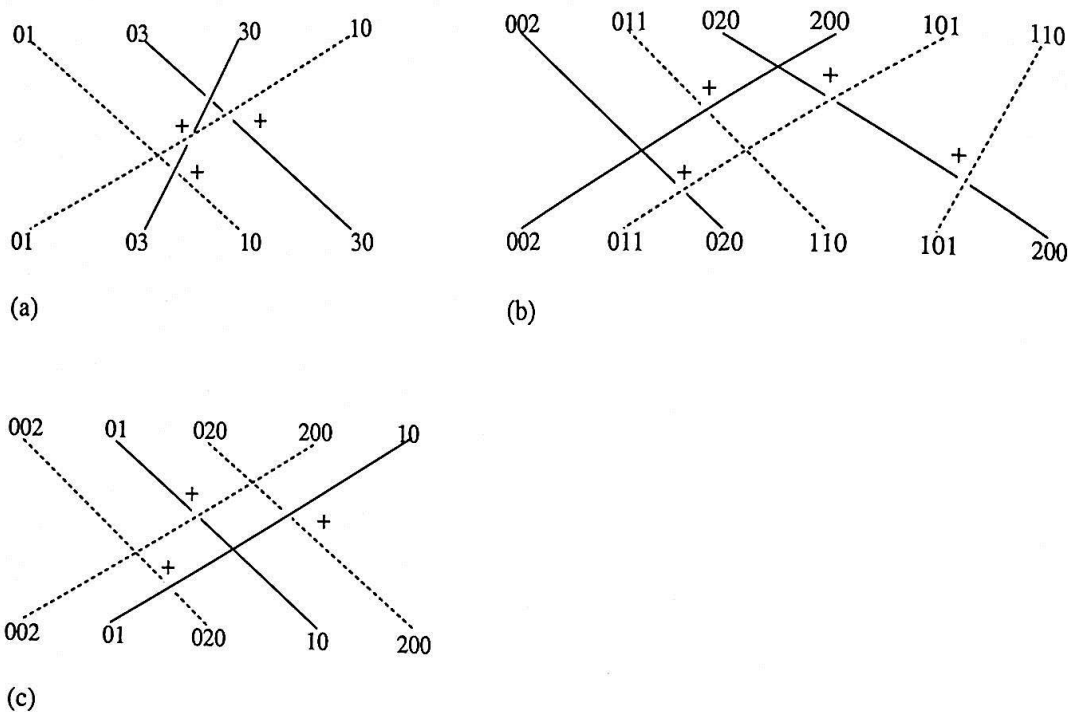


Figura 6.10: Gráficos de inserção para os pares de órbitas: (a) (10) e (30); (b) (101) e (200); e (c) (10) e (200). A construção dos gráficos seguem as regras expostas na seção 5.5. O número de cruzamentos nos gráficos é: (a) $E_{\text{inser}}(10, 30) = +3$; (b) $E_{\text{inser}}(101, 200) = +4$; e (c) $E_{\text{inser}}(10, 200) = +3$.

Dos gráficos da figura 6.10, podemos obter os números dos cruzamentos na região de inserção dos ramos para as órbitas acima estudadas. Na figura 6.9 (a) $E_{\text{inser}}(10, 30) = +3$. Para as órbitas da figura 6.9 (b) $E_{\text{inser}}(101, 200) = +4$. E para as órbitas da figura 6.9 (c) $E_{\text{inser}}(10, 200) = +3$.

O gráfico de inserção para as órbitas da figura 6.11 pode ser visto na figura 6.12. O número de cruzamentos neste gráfico é $E_{\text{inser}}(101, 3020) = +8$. Investigamos os cruzamentos das órbitas (101) e (3020) para nos certificarmos de que os ramos na região de inserção no molde, estão na seqüência correta, uma vez que estas duas órbitas percorrem todos os ramos do molde.

Os números de elos previstos pelo molde da figura 6.8, para os pares de órbitas (10)/(30), (101)/(200) e (10)/(200) (figuras 6.9 (a), (b) e (c) respectivamente) podem ser calculados utilizando-se a equação 5.2. Para as órbitas (10) e (30) o número de elos é

$$\begin{aligned}
 E(10, 30) &= \frac{1}{2} [M(1, 3) + M(0, 3) + M(0, 0) + E_{\text{inser}}(10, 30)] \\
 &= \frac{1}{2} (1.1 + 1.0 + 1.0 + 3) \\
 &= +2,
 \end{aligned}$$

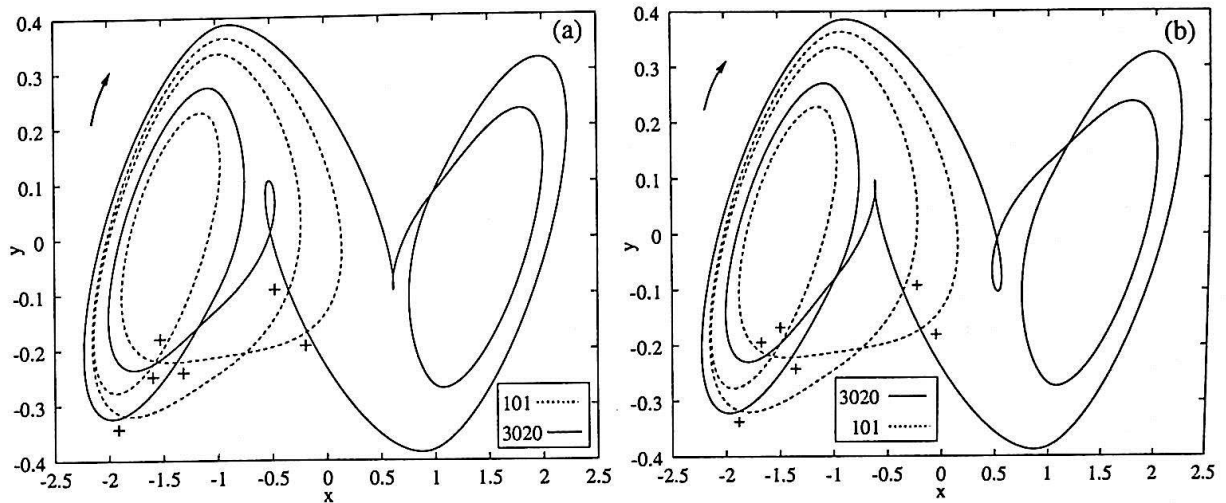


Figura 6.11: Órbitas periódicas instáveis assimétricas (101) e (3020) extraídas do "double-scroll". Em (a) uma órbita do par (101) no domínio D^- e uma das órbitas do par (3020). Em (b) a mesma órbita (101) em D^- e a outra órbita do par (3020). O número de elos é $E(101, 3020) = +6$ (soma dos cruzamentos em (a) e (b) dividido por 2).

para as órbitas (101) e (200) o número de elos é

$$\begin{aligned} E(101, 200) &= \frac{1}{2} [2.M(1, 2) + 4.M(1, 0) + M(0, 2) + 2.M(0, 0) + E_{\text{inser}}(101, 200)] \\ &= \frac{1}{2} (2 + 4.0 + 0 + 2.0 + 4) \\ &= +3, \end{aligned}$$

e para as órbitas (10) e (200) temos

$$\begin{aligned} E(10, 200) &= \frac{1}{2} [M(1, 2) + 2.M(1, 0) + M(0, 2) + 2.M(0, 0) + E_{\text{inser}}(10, 200)] \\ &= \frac{1}{2} (1 + 2.0 + 0 + 2.0 + 3) \\ &= +2. \end{aligned}$$

Já para as órbitas (101) e (3020) (figura 6.11), o número de elos, utilizando a equação (5.2) é

$$\begin{aligned} E(101, 3020) &= \frac{1}{2} [2.M(3, 1) + 2.M(2, 1) + 4.M(0, 1) + 2.M(0, 0) + M(3, 0) + \\ &\quad + M(2, 0) + E_{\text{inser}}(101, 3020)] \\ &= \frac{1}{2} (2.1 + 2.1 + 4.0 + 2.0 + 0 + 0 + 8) \\ &= +6. \end{aligned}$$

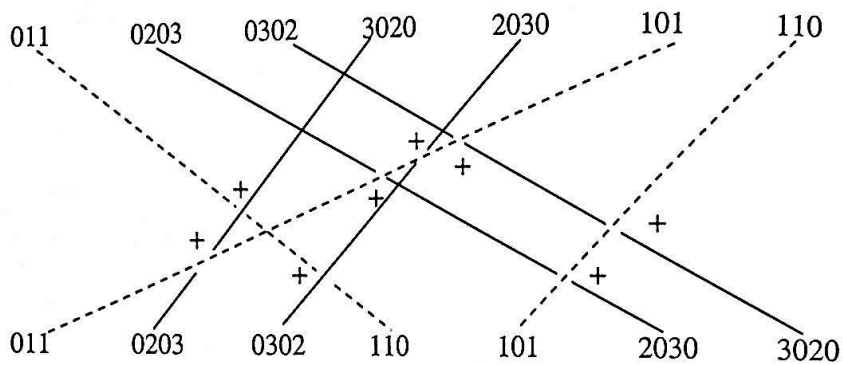


Figura 6.12: Gráfico de inserção para as órbitas (101) e (3020). A construção do gráfico segue as regras expostas na seção 5.5. O número de cruzamentos no gráfico é $E_{\text{inser}}(101, 3020) = +8$.

Estes valores acima calculados, previstos pelo molde, concordam com os valores obtidos para as órbitas extraídas diretamente do atrator (figura 6.9 (a), (b) e (c) e figura 6.11 (a) e (b)). E isso é suficiente para confirmar a validade do molde topológico (figura 6.8) proposto para o "double-scroll". Quaisquer outros pares de órbitas extraídos do atrator terão número de elos iguais àqueles previstos no molde da figura 6.8.

Devemos observar que o molde para o "double-scroll", contido na figura 6.8, representa o circuito de Chua, dado pelas equações 1.7, no regime hiperbólico. Entretanto, o atrator $A_{\text{simétrico}}$ "double-scroll" está fora do regime hiperbólico. Isso é facilmente percebido se levarmos em conta que o plano simbólico para esse atrator (figura 3.10) mostra poucas regiões permitidas (preenchidas pelos pontos), e o predomínio de regiões proibidas.

Conclusão

O objetivo principal deste trabalho foi o de aplicar algumas técnicas de caracterização topológica em atratores gerados por um fluxo tri-dimensional. Aplicamos tais técnicas a dois conhecidos atratores gerados pelo circuito de Chua: o atrator do tipo espiral e o "double-scroll". Para a caracterização topológica utilizamos os métodos da dinâmica simbólica, métodos estes úteis para classificar e ordenar a população de órbitas periódicas instáveis imersas em cada um dos atratores estudados. Assim procedendo, obtivemos êxito na caracterização dos dois atratores, com a construção de um molde topológico para cada um deles.

A análise topológica dos atratores espiral e "double-scroll" foi efetuada da seguinte forma:

1. Construimos mapas de primeiro retorno para determinadas seções transversais aos fluxos para os dois atratores. Estes mapas se revelaram unidimensionais. Desse modo os resultados da dinâmica simbólica aplicada a mapas unidimensionais, como o mapa logístico que usamos como exemplo, podem ser estendidos aos mapas de primeiro retorno obtido para os atratores.

Em mapas unidimensionais é muito fácil encontrar uma partição em seus ramos, conseguida através de seus pontos de extremos. Em um mapa unimodal, como o mapa de primeiro retorno para o atrator espiral, seu ponto de máximo o divide em dois ramos, levando a uma dinâmica simbólica composta por dois símbolos. Em um mapa quártico, como o mapa obtido para o atrator "double-scroll", seus três pontos de extremos o dividem em quatro ramos, o que induz a uma dinâmica simbólica descrita por quatro símbolos. Com as partições dos mapas de primeiro retorno adequadamente efetuadas, codificamos e ordenamos cada uma das órbitas periódicas instáveis, de baixo período, extraídas dos atratores em seu espaço de fases.

2. A extração das órbitas periódicas foi realizada através da combinação de duas técnicas: a técnica do retorno aproximado e a técnica de Newton-Raphson aplicadas a equações diferenciais. O conhecimento do conjunto de equações do sistema nos permitiu obter séries de dados suficientemente longas para que as populações de órbitas de baixo período (período 8 para o espiral e período 6 para o "double-scroll") fossem conhecidas.

O estudo da população de órbitas no atrator espiral revelou uma característica importante na dinâmica do circuito de Chua: a presença da órbita homoclínica. É sua ocorrência que determina o comportamento complexo identificado no atrator espiral. Através da construção dos planos simbólicos para a população de órbitas e também para as trajetórias nos atratores, fizemos uma importante observação a respeito da dinâmica do circuito de Chua quando este apresenta uma órbita homoclínica em seu espaço de fases: a medida que se aproxima da homoclinicidade, o circuito de Chua apresenta um espectro cada vez mais completo de órbitas periódicas. O espectro é completo até determinado período n e a seqüência simbólica máxima desse espectro se aproxima, para esse período n , da seqüência simbólica característica para a órbita homoclínica.

Para o atrator "double-scroll" a análise da população de órbitas até o período 6 mostrou diversas podas de órbitas no atrator e em seu plano simbólico identificamos três frentes de podas. Duas das frentes de podas são para a ordem ascendentes das seqüências simbólicas e a outra para a ordem descendente. Por apresentar várias frentes de poda a questão da poda de órbitas no "double-scroll" não é facilmente resolvida como no atrator espiral onde existe apenas uma frente de poda.

3. A construção dos moldes topológicos para os atratores partiu da construção do modelo geométrico para o fluxo, ou seja, a máscara para o atrator em seu espaço de fases. Essa máscara, em concordância com o mapa de primeiro retorno, revelou quais as regiões topológicas de importância na dinâmica do fluxo gerador do atrator.

A validade dos moldes para os dois atratores foi obtida através da comparação do número de elos entre as órbitas extraídas dos atratores com as mesmas órbitas previstas nos moldes topológicos. Na prática, bastou a análise de alguns poucos pares de órbitas para se decidir pela validade do molde construído.

A propriedade de simetria equivariante encontrada no circuito de Chua permitiu uma simplificação considerável no molde topológico do atrator "double-scroll" em relação ao molde obtido por Kokarev em [45]. Kokarev obteve um molde de 8 ramos enquanto que o molde por nós obtido é formado por 4 ramos. Para o atrator espiral o molde por nós obtido concorda com o encontrado por Kokarev.

Finalizando, apresentamos algumas possibilidades de extensões deste trabalho:

- A análise topológica que realizamos no circuito de Chua pode ser feita também para um arranjo experimental [12]. É importante comparar os resultados aqui obtidos através do conjunto de equações definindo o sistema com os resultados gerados a partir de um experimento. A investigação da existência da órbita homoclínica também pode ser feita em uma situação experimental.

- Não investigamos completamente a ocorrência do caos homoclínico no circuito de Chua. O caos homoclínico é caracterizado na literatura de duas maneiras [42]: na primeira, através da observação de uma seqüência de bifurcações sela-nó alternadas com a duplicação de período, cenário conhecido como bifurcação homoclínica; na segunda, através do estudo de mapas de retorno construídos de maneira a capturar o tempo de reinjeção das trajetórias e o número de evoluções ao redor do ponto de sela antes da trajetória reinjetar em direção ao ponto de sela. Estes mapas, bidimensionais, se apresentam com uma estrutura de muitos ramos com o número de ramos proporcional ao número de evoluções que as trajetórias podem executar ao redor do ponto de sela. Logo, se o circuito de Chua de fato apresenta caos homoclínico, é necessário estabelecer qual a relação entre a presença do espectro completo de órbitas (de um dado período n) e a estrutura ramificada dos mapas de retorno para o tempo de reinjeção e para o número de voltas em torno do ponto de sela antes da reinjeção.
- Da observação do atrator espiral em seu espaço de fases e dos mapas de retorno para valores dos parâmetros enquanto o circuito de Chua apresenta atratores espirais, nota-se a existência de um "buraco" no centro do atrator nas proximidades de seu ponto fixo. Isso leva a suspeita da existência de um ciclo limite instável nessa região. Caso o ciclo limite esteja realmente presente, os resultados deste trabalho ainda são válidos [42].
- Após o surgimento da órbita homoclínica e o estabelecimento do regime hiperbólico, o circuito de Chua sofre uma mudança e sua dinâmica passa a ser descrita por uma dinâmica simbólica de três símbolos. A caracterização topológica desse novo comportamento, não estudada no presente trabalho, pode revelar alguma nova característica do comportamento dinâmico anterior, que foi aqui descrito por uma dinâmica simbólica de dois símbolos.

Apêndice A

Cálculo Numérico do Mapa de Poincaré: O Truque de Hénon

Um método para se determinar a intersecção de uma trajetória de um sistema dinâmico com um plano transversal (uma seção de Poincaré) foi proposto por Hénon [7]. Este método é conveniente pois dispensa intrincados métodos de interpolação.

Seja um sistema tri-dimensional autônomo dado pelo conjunto de equações

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f_1(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= f_3(x, y, z),\end{aligned}\tag{A.1}$$

com $z = 0$ definindo a seção de Poincaré. Na n -ésima etapa da integração¹ do sistema de equações encontramos

$$t_n, x_n, y_n, z_n < 0$$

e na etapa seguinte,

$$t_n + \Delta t, x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1} > 0.$$

Vemos então que a intersecção por $z = 0$ se dá entre estas duas etapas. Mudando então a variável independente de t para z , dividindo as duas primeiras equações na equação (A.1) pela terceira e invertendo a terceira temos:

¹Em todo este trabalho o método de integração numérica utilizado foi o de Runge-Kutta de quarta ordem [30]

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dz} &= \frac{f_1(x, y, z)}{f_3(x, y, z)} \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{f_2(x, y, z)}{f_3(x, y, z)} \\ \frac{dt}{dz} &= \frac{1}{f_3(x, y, z)}.\end{aligned}\tag{A.2}$$

Integrando as equações (A.2) na nova variável independente z para frente por uma etapa $\Delta z = -z_n$ a partir do ponto $z_n < 0$ encontraremos exatamente o plano $z = 0$.

Este método pode também ser aplicado a uma superfície genérica qualquer da forma

$$S(x, y, z) = \text{constante},$$

definindo a seção de Poincaré. Introduzimos então

$$u = S(x, y, z) - \text{constante},$$

juntamente com uma nova equação diferencial para u ,

$$\frac{du}{dt} = f_1 \frac{\partial S}{\partial x} + f_2 \frac{\partial S}{\partial y} + f_3 \frac{\partial S}{\partial z}.$$

Desse modo retorna-se ao problema da intersecção anterior, agora com o plano $u = 0$ como seção de intersecção e mais uma equação diferencial $\frac{\partial u}{\partial t}$ adicionada ao sistema (A.1).

Apêndice B

Técnicas de Localização de Órbitas Periódicas

Descreveremos a seguir apenas duas técnicas de localização de órbitas periódicas¹: retorno aproximado (“close returns”) [9] aplicável a séries temporais obtidas experimentalmente e Newton-Raphson [7] método aplicável a sistemas dinâmicos *autônomos* quando conhecemos o conjunto de equações do sistema.

B.1 Retorno Aproximado (“Close Returns”)

Seja um vetor \mathbf{x}_i da trajetória de um atrator caótico em seu espaço de fases tridimensional, com componentes medidas diretamente, ou obtidas da reconstrução do atrator a partir de uma série temporal. Uma trajetória caótica irá seguir aproximadamente uma órbita periódica instável tipo *sela* por um intervalo de tempo. Para um curto segmento de uma trajetória do atrator, $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_{i+2}, \dots$ próximo à órbita periódica, podemos encontrar um n tal que

$$\|\mathbf{x}_{i+n} - \mathbf{x}_i\| < \varepsilon \quad (\text{B.1})$$

com $\varepsilon > 0$.

O que de fato procuramos na série são os *retornos aproximados* (“close returns”) tal que $\|\mathbf{x}_{i+n} - \mathbf{x}_i\| < \varepsilon$, com ε da ordem de poucos por cento das dimensões do atrator em seu espaço de fases. Como proposto por Lathrop e Kostelich [3] podemos construir histogramas do tempo de recorrência (retorno dos pontos às vizinhanças de \mathbf{x}_i) para encontrar um n_0 tal que $n = kn_0$ com $k = 1, 2, 3, \dots$. Tal n_0 é uma evidência de propriedades de recorrência encontradas em sistemas caóticos. Portanto, para $k = 1$ teremos órbitas de período 1, $k = 2$ órbitas de período 2 e assim por diante.

¹Órbita periódica aqui é definida como uma solução periódica de um fluxo cuja trajetória retorna precisamente a ela mesma após um período T . As órbitas podem ser estáveis ou instáveis.

B.2 Método de Newton-Raphson

Seja \vec{x}_0 um ponto na seção de Poincaré e \vec{x}_1 o ponto de retorno à seção nas vizinhanças de \vec{x}_0 , após integrar o sistema por um tempo T . Suspeita-se de uma órbita periódica localizada exatamente em alguma vizinhança de \vec{x}_0 e \vec{x}_1 . Podemos determinar sua localização exata pelo método de Newton-Raphson [7, 30] para sistemas dinâmicos autônomos descrito por equações diferenciais ordinárias.

Tomemos o sistema de equações diferenciais *autônomo* como $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$. Uma solução para uma órbita periódica exatamente localizada, em termos do fluxo $\phi_T(\vec{x})$, é dada por

$$\vec{x}^* = \phi_{T^*}(\vec{x}^*).$$

Em geral \vec{x}^* e T^* são desconhecidos. Conhecemos apenas uma trajetória próxima

$$\vec{x}_1 = \phi_T(\vec{x}_0)$$

onde T é obtido através da integração numérica. Como esperamos estar próximo da solução real, podemos escrever

$$\vec{x}^* = \vec{x}_0 + d\vec{x}$$

$$T^* = T + dT.$$

Substituindo-se na equação do fluxo acima obtemos

$$\vec{x}_0 + d\vec{x} = \phi_{T+dT}(\vec{x}_0 + d\vec{x})$$

e, expandindo o lado direito da equação acima, temos

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 + d\vec{x} &= \phi_T(\vec{x}_0) + \frac{d\phi_T(\vec{x}_0)}{dt}dT + D_{\vec{x}}\phi_T(\vec{x}_0)d\vec{x} \\ &= \vec{x}_1 + \frac{d\vec{x}_1}{dT}dT + D_{\vec{x}}\phi_T(\vec{x}_0)d\vec{x} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\vec{x}_0 - \vec{x}_1 = \vec{F}(\vec{x}_1)dT + (D_{\vec{x}}\phi_T(\vec{x}_0) - I)d\vec{x},$$

onde $\vec{F}(\vec{x}_1)$ são definidas pelas equações diferenciais do sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$.

No caso de um sistema tri-dimensional,

$$\vec{x} = (x, y, z), \quad \vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$$

e então

$$\begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} - 1 & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} & f_1(\vec{x}_1) \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} - 1 & \frac{\partial y}{\partial z_0} & f_2(\vec{x}_1) \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} - 1 & f_3(\vec{x}_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dT \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

com dx , dy e dz confinados a uma superfície de seção $S = S(x, y, z)$, sujeita à condição

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz .$$

No caso $S = z$ teremos $dz = 0$ e

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} - 1 & \frac{\partial x}{\partial y_0} & f_1(\vec{x}_1) \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} - 1 & f_2(\vec{x}_1) \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & f_3(\vec{x}_1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{pmatrix},$$

que nos permite determinar a exata localização de \vec{x}^* e do período T^* da órbita periódica. Na prática, vemos que com poucas iterações já encontramos \vec{x}^* e T^* com precisão suficiente pois a convergência do método é quadrática.

Abaixo segue um detalhamento do algoritmo usado para a localização de \vec{x}^* e T^* :

1. Tome estimativas iniciais de \vec{x}_0 e T .
2. Integre o sistema de equações não lineares para encontrar o próximo ponto de retorno $\vec{x}_1 = \phi_T(\vec{x}_0)$, obtendo T e $\vec{F}(\vec{x}_1)$.
3. Integre o sistema de equações linearizado com condição inicial I para calcular $(n-1) \times n$ (no caso de $z=\text{constante}$) ou $n \times n$ (no caso de uma superfície S geral) componentes de $\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}$.
4. Use os valores de \vec{x}_0 , \vec{x}_1 , $\vec{F}(\vec{x}_1)$ e $\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}$ para calcular $d\vec{x}$ e dT , e finalmente \vec{x}^* e T^* .
5. Caso necessário, use estes valores para novas estimativas de \vec{x}_0 e T reiniciando o procedimento.

Este método se aplica igualmente bem tanto na localização de órbitas periódicas estáveis quanto instáveis.

Apêndice C

Condição de Admissibilidade para uma Seqüência Simbólica

Para um mapa unimodal f , uma seqüência é chamada *admissível* (permitida), se existe $x \in I$ tal que $S(x) = s$, ou seja, x pode ser codificado por uma seqüência $s_0 s_1 \dots s_i \dots$. Desde que $f(c)$ é o máximo de f , qualquer iterada n de f tem que ser menor que $f(c)$, ou seja $f^n(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I$ e $n \geq 1$. Desse modo, se s é admissível, então $\sigma^n(s) \preceq K(f)$ para todo $n \geq 1$. Assim, qualquer permutação cíclica σ de ordem n de uma seqüência permitida s precede a 'seqüência simbólica máxima' $K(f)$, isto é, s é anterior a 'seqüência simbólica máxima' ('kneading sequence'). A importância disso é que basta conhecermos a 'seqüência simbólica máxima' para um dado sistema dinâmico para decidirmos se uma seqüência qualquer é permitida ou não. Para uma demonstração disso como condição suficiente para que uma seqüência s seja admissível veja [16].

Bibliografia

- [1] H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Vol. 1-3 (Gauthier-Villars:Paris,1899); reprint by Dover, 1957. English translation: *New Methods of Celestial Mechanics* (NASA Technical Translation, 1967).
- [2] G. B. Mindlin, H. G. Solari, M. A. Natiello, R. Gilmore e X. -J. Hou, "Topological analysis of chaotic time series data from the Belousov-Zhabotinskii reaction", *J. Nonlinear Sci.* **1** (2), 147-173 (1991).
- [3] D. P. Lathrop e E. J. Kostelich, "Characterization of an experimental strange attractor by periodic orbits", *Phys. Rev. A* **40** (7), 4028-4031 (1989).
- [4] G. B. Mindlin e R. Gilmore, "Topological analysis and synthesis of chaotic time series", *Physica D* **58**, 229-242 (1992).
- [5] T. Matsumoto e L. O. Chua, *IEEE Trans. Circuits Syst.* **CAS-32**, 797 (1985).
- [6] C. Letellier, P. Dutertre e G. Gouesbet, "Characterization of the Lorenz system, taking into account the equivariance of the vector field", *Phys. Rev. E* **49** (4), 3492-3495 (1994).
- [7] H. Bai-lin, "Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems", World Scientific, Singapore, 1984.
- [8] C. Letellier, P. Dutertre e B. Maheu, "Unstable periodic orbits and templates of the Rossler systems: Toward a systematic topological characterization", *Chaos* **5** (1), 271-282 (1995).
- [9] N. B. Tufillaro, T. Abbott, J. Reilly, "An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos", Addison-Wesley, New York, segunda impressão, 1992.
- [10] J. S. Birman e R. F. Williams, "Knotted periodic orbits in dynamical systems I: Lorenz's equation", *Topology* **22**, 47-82 (1983).
- [11] P. Melvin e N. B. Tufillaro, "Template and framed braids", *Phys. Rev. A* **44** (6), R3419-3422 (1991).

BIBLIOGRAFIA

- [12] M. S. Baptista, Perturbando sistemas não-lineares, uma abordagem ao controle do Caos. Tese de Doutorado apresentada no Instituto de Física da Universidade de São Paulo, (1996).
- [13] M. Komuro, R. Tokunaga, T. Matsumoto, L. O. Chua e A. Hotta, "Global bifurcation analysis of the double-scroll circuit", *Int. J. Bifur. Chaos* **1**, 139-182, (1991).
- [14] P. Deregél, "Chua's oscillator: A zoo of attractors", "Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos", World Scientific, Singapore, 1993.
- [15] J. -P. Eckmann, "Roads to turbulence in dissipative dynamical systems", *Rev. Mod. Phys.*, **53** (4), 643-654, (1981).
- [16] R. L. Devaney, "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems", segunda edição, Addison-Wesley, Boston, 1988.
- [17] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press: New York, 1993).
- [18] J. L. MacCauley, *Physica Scripta* **T20** (1988).
- [19] M. S. Baptista e I. L. Caldas, "Easy-to-implement method to target nonlinear systems", *Chaos* **8** (1), 290-299 (1998).
- [20] C. Grebogi, E. Ott, J. A. York, "Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos", *Physica* **7D**, 181-200, (1983).
- [21] C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras, J. A. York, "Critical exponents for crisis-induced intermittency", *Phys. Rev. A* **36** (11), 5365-5380, (1987).
- [22] Lj. Kocarev e T. Roska, "Dynamics of the Lorenz equation and Chua's equations: A tutorial", "Chua's circuit: A Paradigm for Chaos", World Scientific, Singapore, 1993.
- [23] C. Letellier, G. Gouesbet e N. F. Rulkov, "Topological analysis of chaos in equivariant electronic circuits", *Int. J. Bifurc. Chaos* **6** (12B), 2531-2555 (1996).
- [24] N. F.-Ferrara e C. C. do Prado, "Caos: uma Introdução". São Paulo: Edgard Blücher, 1994.
- [25] T. Lofaro, "A model of the dynamics of the Newton-Leipnik attractor", *Int. J. Bifurcation and Chaos* **7** (12), 2723-2733 (1997).
- [26] R. Lozi e S. Ushiki, "Coexisting chaotic attractor in Chua's circuit", *Int. J. Bifurc. Chaos* **1**, 923-926 (1991).

- [27] R. Lozi e S. Ushiki, "The theory of confinors in Chua's circuit: Accurate analysis of bifurcations and attractors", *Int. J. Bifurc. Chaos* **3**, 333-361 (1993).
- [28] Lj. Pvika a V. Spany, "Boundary surfaces and basin bifurcation in Chua's circuit", *J. Circuits Syst. Compt.* **3**, 441-470 (1993).
- [29] S. W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott e J. A. York, "Fractal basin boundaries", *Physica D* **17**, 125-153 (1985).
- [30] K. L. Nielsen, "Methods in Numerical Analysis", segunda edição, Macmillan Company, New York, 1964.
- [31] P. Cvitanović, G. H. Gunaratne e I. Procaccia, "Topological and metric properties of Hénon-type strange attractors", *Phys. Rev. A* **38** (3), 1503-1520 (1988).
- [32] H. P. Fang, "Dynamics of strongly dissipative systems", *Phys. Rev. E* **49** (6), 5025-5031 (1994).
- [33] H. P. Fang, "Universal bifurcation property of two- or higher-dimensional dissipative systems in parameter space: why does 1D symbolic dynamics work so well?", *J. Phys. A: Math. Gen.* **28**, 3901-3910 (1995).
- [34] C. Letellier, G. Gouesbet, F. Saufi, J. R. Buchler e Z. Kolláth, "Chaos in variable stars: Topological analysis of W Vir model pulsation", *Chaos* **6** (3), 466-476 (1996).
- [35] W. M. Gonçalves, A experiência da Torneira Gotejante. Tese de Doutorado apresentada no Instituto de Física da Universidade de São Paulo, (1996). W. M. Gonçalves, R. D. Pinto, J. C. Sartorelli, "Symbolic dynamics analysis in the dripping faucet experiment". *Physica D*, **134**, 267-274 (1999).
- [36] S. M. Ulan e J. von Neumann, "On combinations of stochastic and deterministic processes". *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53**, 1120, 1947.
- [37] A. Tufaile, J. C. Sartorelli, "Hénon-like attractor in air bubble formation", *Phys. Let. A* **275**, 211-217 (2000).
- [38] Fa-Geng XIE, "Symbolic dynamics for the general quartic map", *Commun. Theor. Phys.* **22** (1), 43-52 (1994).
- [39] V. F. R. Jones, Knot theory and statistical mechanics, *Sci. Am.* (November 1990), 98-103.
- [40] V. F. R. Jones, "A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **12**, 103-111 (1985).

BIBLIOGRAFIA

- [41] P. Holmes, Knots and orbit genealogies in nonlinear oscillators, em "New Directions in Dynamical Systems" editado por T. Bedford e J. Swift, London Mathematical Society Lecture Note Series 127 (Cambridge University Press: Cambridge, 1988).
- [42] T. Braun, Caracterização de caos homoclínico numa descarga elétrica luminosa. Tese de Doutorado apresentada no Instituto de Física da Universidade Federal Do Rio Grande do Sul, (1996).
- [43] G. B. Mindlin, X. -J. Hou, H. G. Solari, R. Gilmore e N. B. Tufillaro, "Classification of strange attractor by integers", Phys. Rev. Lett. **64** (20), 2350-2353 (1990).
- [44] L. Le Sceller, C. Letellier e G. Gouesbet, "Algebraic evaluation of linking numbers of unstable periodic orbits in chaotic attractors", Phys. Rev. E **49**, 4693-4695 (1994).
- [45] Lj. Kokarev, Z. Tasev, D. Dimovski e L. O. Chua, "Knotted periodic orbits in Chua's circuit", Int. J. Bifurcation and Chaos **4** (3), 609-621 (1994).
- [46] Foi de grande ajuda na redação deste trabalho o guia escrito por L. Lamport, "L^AT_EX: A Document Preparation System", Addison-Wesley, Reading, 1986.