

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Captura de Partículas em Potenciais Singulares

Alberto Carlos Bertuola



Dissertação apresentada ao
Instituto de Física da
Universidade de São Paulo
para obtenção do título de
Mestre em Ciências

Orientador: Prof. Dr. Mauricio Porto Pato

Comissão examinadora:

Prof.Dr. Mauricio Porto Pato (IFUSP)
Prof.Dr. Emerson José Veloso de Passos (IFUSP)
Profa.Dra. Kioko Furuya (UNICAMP)

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Mauricio Porto Pato".

SÃO PAULO
2000

Prof. Armando Roberto Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Armando Roberto Ferraz".

SBI-IFUSP



305M810T3477

539.1

B552c

M

ex.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Bertuola, Alberto Carlos

Captura de Partículas em Potenciais Singulares. São Paulo, 2001.

Tese (Mestrado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física – Departamento de Física Nuclear

Orientador: Prof. Dr. Mauricio Porto Pato
Área de Concentração: Métodos Semi-clássicos.

Unitermos: 1. Física Atômica e Molecular; 2.
Mecânica Clássica e Espalhamento.

USP/IF/SBI-008/2001

Resumo

O problema da captura de partículas por potenciais singulares esfericamente simétricos é estudado com detalhes no contexto da Mecânica Clássica tanto relativística quanto não-relativística. Os resultados teóricos obtidos no caso não-relativístico são usados para analisar dados recentes obtidos para o caso de potencial inversamente proporcional ao quadrado da distância à origem, usando-se átomos "frios" em uma armadilha magnética. No caso relativístico, o problema de Kepler é estudado detalhadamente.

Abstract

The problem of the capture of a particle by a singular spherical symmetric potential is study in the context of the Classical Nonrelativistic and Relativistic Mechanics. The results obtained for the nonrelativistic case are used to discuss the recent experimental data regarding a singular potential inversely proportional to the square of the distance to origin using "cold" atoms in a magnetic trap. For the relativistic case, the capture in a Kepler potential is study in details.

Aos meus filhos.
À Sra. Rosana Mei Lun Wu.
Aos meus pais.
À minha irmã.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

- _ ao meu orientador, pela oportunidade de trabalharmos juntos e por me encaminhar, pacientemente, para o mundo das pesquisas científicas.
- _ aos meus colegas: Fabiano Machado, Robson Denke, Marcelo Leite e João Tertuliano, pelo apoio fraterno de suas amizades.
- _ ao CNPq pelo apoio financeiro durante o último ano de trabalho.

Índice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 2 |
| 2 | Captura na Mecânica Clássica Não-Relativística | 4 |
| 2.1 | Partícula num potencial central | 4 |
| 2.2 | Movimento unidimensional | 6 |
| 2.3 | Movimento em duas dimensões | 8 |
| 2.3.1 | Energia total negativa | 8 |
| 2.3.2 | Energia nula | 12 |
| 2.3.3 | Energia total positiva | 13 |
| 3 | Uma Experiência de Captura | 20 |
| 3.1 | Espalhamento em uma simetria cilíndrica | 20 |
| 3.2 | Análise da experiência | 21 |
| 4 | Captura na Mecânica Clássica Relativística | 24 |
| 4.1 | Hamiltoniana do sistema e equações de Hamilton | 24 |
| 4.2 | Movimento unidimensional | 25 |
| 4.2.1 | Potencial repulsivo | 27 |
| 4.2.2 | Potencial atrativo | 28 |
| 4.3 | Movimento em duas dimensões | 30 |
| 4.3.1 | Potencial repulsivo | 33 |
| 4.3.2 | Potencial atrativo | 40 |
| 5 | Conclusão | 53 |
| 6 | Apêndices | 54 |
| 6.1 | Integração | 54 |
| 6.2 | Cálculo do coeficiente de decaimento | 56 |

Capítulo 1

Introdução

Potenciais centrais singulares atrativos podem dar origem a um processo de captura, pelo centro de força, daquelas partículas que se encontram em órbitas que espiralam sem retorno, até o centro[1]. Para que isto aconteça, é necessário que o potencial centrífugo repulsivo seja superado ou pelo menos igualado, pela singularidade do potencial, quando a distância radial r se anula. Portanto este deve divergir, na região em torno da origem como $\frac{1}{r^n}$ com $n \geq 2$.

Aqui o caso $n = 2$ é particularmente importante porque a captura passa a depender do momento angular da partícula. Tanto no caso de órbitas abertas, ou seja, energia mecânica total positiva, quanto no caso de órbitas fechadas com energia negativa, existe um valor crítico do momento angular, acima do qual não há captura. Desse modo, no caso em que um feixe de partículas incide sobre um centro espalhador, parte das partículas do feixe é absorvida.

Recentemente o potencial da forma $V(r) = -\frac{K}{r^2}$, com $K > 0$, foi produzido pela primeira vez em laboratório. A técnica empregada consistiu em submeter átomos "frios" (baixa velocidade) em uma armadilha, "trap", ao campo elétrico central criado por um fio fino carregado. Nesta situação, os átomos polarizados adquirem um momento de dipolo induzido, e passam então a ser atraídos pelo fio, através de um campo central, cujo potencial é inversamente proporcional ao quadrado da distância ao eixo do fio. Um dos objetivos desta tese é analisar os resultados dessa experiência.

No próximo capítulo, um estudo detalhado dos possíveis movimentos em um potencial inversamente proporcional ao quadrado da distância é feito. É importante enfatizar que, fisicamente, não devemos esperar que um potencial desse tipo se estenda até o centro de força. Potenciais que divergem na

origem, com potências iguais ou superiores a dois, surgem usualmente em física, em expansões em séries de multipolos de campos de distribuição de carga, na eletrostática, ou de massa, na gravitação. Essas expansões, por construção, só fazem sentido para distâncias grandes. No entanto o problema persiste de como tratar de forma consistente, os potenciais singulares, dentro da mecânica, seja ela clássica, relativística ou quântica.

No Capítulo 3, usamos os resultados teóricos deduzidos no Capítulo 2, para estudar uma experiência feita recentemente na qual, pela primeira vez, foi observada a “queda” de átomos em uma singularidade $1/r^2$ [2]. No Capítulo 4, o processo de captura dentro da Mecânica Relativística é estudado. Aqui, como o momento aparece na energia mecânica dentro de uma raiz quadrada, a possibilidade de captura ocorre já no caso de um potencial central inversamente proporcional à distância, ou seja, $\frac{1}{r}$ [3].

Capítulo 2

Captura na Mecânica Clássica Não-Relativística

Iniciaremos o estudo teórico do problema da captura por potenciais singulares, considerando o problema no contexto da Mecânica Clássica. Aspectos gerais dos potenciais centrais serão lembrados e um estudo mais detalhado será feito para o potencial que varia com o inverso do quadrado da distância (potencial de dipolo).

2.1 Partícula num potencial central

Seja uma partícula de massa m , sujeita a um potencial central. A hamiltoniana do sistema H , em coordenadas esféricas, é escrita da seguinte maneira:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + V(r) , \quad (2.1)$$

onde $V(r)$ é uma energia potencial que depende apenas da distância da partícula a um ponto fixo no espaço escolhido como origem do sistema de coordenadas. Observa-se, imediatamente, que a hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, portanto esta coincide com a energia total do sistema e é uma constante do movimento, ou seja, $H = E$.

As equações de Hamilton nesse caso são:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta} , \quad (2.2)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} , \quad (2.3)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} = \frac{p_{\theta}}{mr^2}, \quad (2.4)$$

$$\dot{p}_{\phi} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \rightarrow p_{\phi} = \text{const.}, \quad (2.5)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \left(\frac{p_{\theta}^2}{2m} + \frac{p_{\phi}^2}{2m \sin^2 \theta} \right) \frac{2}{r^3} - \frac{dV}{dr}, \quad (2.6)$$

$$\dot{p}_{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_{\phi}^2 \cos \theta}{m \sin^3 \theta r^2}. \quad (2.7)$$

Multiplicando por p_{θ} , ambos os membros da equação (2.7), esta pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\theta}^2}{2} \right) = -p_{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p_{\phi}^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} \right). \quad (2.8)$$

Substituindo no segundo membro da equação acima o valor de p_{θ} obtido em (2.4) segue

$$\frac{d}{dt} \frac{p_{\theta}^2}{2} = -\dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{p_{\phi}^2}{2 \sin^2 \theta} \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{p_{\phi}^2}{\sin^2 \theta} \right), \quad (2.9)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\theta}^2}{2} + \frac{p_{\phi}^2}{2 \sin^2 \theta} \right) = 0, \quad (2.10)$$

o que implica na existência de uma nova constante de movimento

$$L = \sqrt{p_{\theta}^2 + \frac{p_{\phi}^2}{\sin^2 \theta}}. \quad (2.11)$$

Como sabemos da mecânica esta constante coincide com o momento angular total do sistema. A conservação da energia pode então ser escrita como

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + V(r). \quad (2.12)$$

Com a existência das três constantes do movimento (E , p_{ϕ} , L), o sistema é integrável. É possível provar que nesse caso o movimento da partícula está num plano perpendicular à direção do momento angular.

É interessante discutir as características gerais do movimento do movimento da partícula na vizinhança da origem para um potencial atrativo da forma $\frac{k}{r^n}$ com $k < 0$ e $n \geq 2$. Com r muito pequeno, a conservação da energia (2.12) prevê que

$$\dot{r} \simeq \frac{\text{const}}{r^{\frac{n}{2}}}.$$

Dividindo esta expressão da velocidade radial pela velocidade angular e usando a conservação do momento angular obtemos a equação da trajetória na região próxima ao centro de forças

$$\frac{dr}{d\phi} = Ar^{2-\frac{n}{2}}.$$

Integrando

$$\phi = \bar{A} r^{\frac{n}{2}-1}.$$

Conclui-se portanto que se $n > 2$, quando $r \rightarrow 0$, $\phi \rightarrow 0$, e a partícula executa desse modo um número finito de voltas em torno da origem antes de cair. No entanto, se $n = 2$, $\phi \rightarrow \infty$, quando $r \rightarrow 0$. Neste caso, a partícula dá infinitas voltas em torno do centro.

Passaremos em seguida para o estudo detalhado do potencial $V(r) = -\frac{|k|}{r^2}$. Faremos isso escolhendo um sistema de coordenadas com o eixo z apontando na direção do momento angular. Nesse caso, a coordenada angular θ assume um valor fixo igual a $\frac{\pi}{2}$ e, como consequência, a componente do momento angular conjugado p_θ é nula. A equação de Hamilton, para o momento angular radial adquire então o seguinte aspecto:

$$\dot{p}_r = \frac{p_\phi^2 + 2mk}{mr^3}. \quad (2.13)$$

Antes de considerar o caso mais geral em que a partícula tem momento angular e se move no plano, estudaremos, na próxima seção, a situação particular do momento angular nulo.

2.2 Movimento unidimensional

Começaremos estudando o caso unidimensional em que $p_\phi = 0$. Nesse caso, a partícula não cai no centro de força, no sentido do movimento terminar por localizá-la na origem. O movimento, nesse caso, continua para além da

origem e, dependendo de condições de energia, a partícula afasta-se para o infinito ou passa a oscilar em torno do centro.

Uma quantidade importante para caracterizar o movimento é o tempo que a partícula leva até chegar ao centro, que denominaremos como um tempo de queda. Da conservação de energia temos para uma partícula que se move na direção da origem a equação

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{|k|}{x^2} \right)}, \quad (2.14)$$

ou

$$\frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{|k|}{Ex^2}}} = -\sqrt{\frac{2E}{m}} dt. \quad (2.15)$$

Integrando ambos membros obtemos a equação de movimento

$$x(t) = \pm \sqrt{\left(\sqrt{x_0^2 + \frac{|k|}{E}} - \sqrt{\frac{2E}{m}} t \right)^2 - \frac{|k|}{E}}, \quad (2.16)$$

onde x_0 é a distância inicial. Invertendo (2.16) extraímos a seguinte expressão para o tempo de queda

$$t_q = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{m|k|}{2}} \left(\sqrt{\frac{Ex_0^2}{|k|} + 1} - 1 \right). \quad (2.17)$$

É interessante discutir esse resultado em alguns casos especiais. Assim para $E < 0$, consideremos o caso em que a partícula é solta sem velocidade inicial a uma distância x_0 do centro de tal forma que sua energia total é dada por $E = -\frac{|k|}{x_0^2}$. O tempo de queda será então dado por

$$t_q = -\frac{1}{E} \sqrt{\frac{m|k|}{2}} = x_0^2 \sqrt{\frac{m}{2|k|}}. \quad (2.18)$$

Consideremos em seguida o caso de uma partícula com energia total nula. A Eq. (2.17), com $E = 0$ apresenta uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ que é apropriadamente levantada aplicando-se a regra de L'Hospital. O resultado final obtido é então

$$t_q = \frac{x_0^2}{2} \sqrt{\frac{m}{2|k|}}. \quad (2.19)$$

Finalmente, consideremos o caso em que a partícula incide sobre o centro vinda de uma distância infinita, ou mais precisamente, de uma posição suficientemente afastada para que possamos desprezar o efeito do potencial. Portanto, a energia total do sistema é positiva dada por $E = \frac{mv_0^2}{2}$, onde v_0 é a velocidade inicial da partícula. Supondo x_0 , muito grande a raiz quadrada dentro do parêntesis em (2.17) pode ser expandido e desprezando termos de ordem superior obtemos para o tempo de queda o valor

$$t_q \cong \frac{x_0}{v_0}, \quad (2.20)$$

que é portanto igual ao tempo de uma partícula livre! Este resultado foi previsto na referência[4].

2.3 Movimento em duas dimensões

Consideremos agora o caso mais geral em que $p_\phi \neq 0$, estudando separadamente os casos de energia positiva e negativa, com a equação da energia escrita da seguinte forma

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2 - 2mk}{r^2}. \quad (2.21)$$

2.3.1 Energia total negativa

Se a partícula tem energia total negativa, seu momento angular satisfaz necessariamente a desigualdade $p_\phi^2 < 2m|k|$. Calculemos então as características gerais do movimento, começando por determinar a sua trajetória. Para isso dividindo, membro a membro, as equações (2.2) e (2.3) obtendo

$$\frac{dr}{d\phi} = r^2 \frac{p_r}{p_\phi}, \quad (2.22)$$

ou ainda, usando a equação da energia,

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = \pm \frac{\sqrt{2m}}{p_\phi} \sqrt{E - \frac{p_\phi^2 - 2m|k|}{2mr^2}}, \quad (2.23)$$

onde $+$ ($-$) corresponde a uma partícula que se afasta (aproxima) do centro de força.

A forma da equação (2.23) sugere a mudança de variável $\frac{1}{r} = u$ com a qual ela torna-se

$$\frac{du}{d\phi} = \mp \frac{\sqrt{2m}}{p_\phi} \sqrt{E - \left(\frac{p_\phi^2 - 2m|k|}{2m} \right) u^2}. \quad (2.24)$$

Como $p_\phi^2 < 2m|k|$, fazendo $p_\phi^2 - 2m|k| = -\beta^2$, com $\beta > 0$ e usando o fato de estarmos considerando energia total negativa, a integração se dará entre os pontos (u_0, ϕ_0) e (u, ϕ) da trajetória, ou seja

$$\int_{u_0}^u \frac{dv}{\left(\frac{\beta^2 v^2}{-2mE} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{-2mE}}{p_\phi} \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi'. \quad (2.25)$$

Esta integração pode ser efetuada através da substituição $\frac{\beta u}{\sqrt{-2mE}} = \cosh \psi$, obtendo-se a seguinte expressão para a equação da trajetória

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{-2mE}}{\beta} \cosh \left[\psi_0 + \frac{\beta}{p_\phi} (\phi - \phi_0) \right], \quad (2.26)$$

onde ψ_0 é dado por

$$\psi_0 = \operatorname{arccosh} \left(\frac{\beta}{r_0 \sqrt{-2mE}} \right). \quad (2.27)$$

Vemos destas equações que quando a coordenada angular ϕ cresce, a distância r que separa a partícula da origem decresce sem limite. A partícula move-se portanto em uma trajetória que espirala sem retorno, em volta do centro de força.

Passemos à determinação das equações de movimento, começando pela equação radial. Para isso integrando a equação da conservação da energia escrita como

$$\frac{r dr}{\sqrt{\frac{\beta^2}{-2mE} - r^2}} = -\sqrt{\frac{-2E}{m}} dt, \quad (2.28)$$

obtendo-se

$$r(t) = \sqrt{\frac{\beta^2}{-2mE} - \left(\sqrt{\frac{\beta^2}{-2mE} - r_0^2} + t \sqrt{\frac{-2E}{m}} \right)^2}. \quad (2.29)$$

Invertendo-se (2.29) obtemos para o tempo de queda

$$t_q = \frac{\beta}{-2E} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{-2mEr_0^2}{\beta^2}} \right). \quad (2.30)$$

No caso particular em que a partícula começa a cair a partir do ponto de retorno esta fórmula se reduz a

$$t_q = \frac{\beta}{-2E}. \quad (2.31)$$

É fácil verificar que se $p_\phi = 0$ obtemos o resultado anterior da equação (2.18).

A equação angular pode ser obtida invertendo a equação (2.26) da trajetória para expressar a variável angular ϕ em termos da distância radial r , o que dá

$$\phi(t) = \phi_0 + \frac{p_\phi}{\beta} \left[\operatorname{arccosh} \left(\frac{\beta}{r\sqrt{-2mE}} \right) - \psi_0 \right], \quad (2.32)$$

que usando-se a fórmula explícita para cosseno hiperbólico inverso

$$\operatorname{arccosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right),$$

pode também ser escrita como

$$\phi(t) = \phi_0 + \frac{p_\phi}{\beta} \left[\ln \left(\frac{\beta}{r\sqrt{-2mE}} + \sqrt{\frac{\beta^2}{-2r^2mE} - 1} \right) - \psi_0 \right]. \quad (2.33)$$

Usando-se a equação (2.29) do movimento radial obtemos, após alguma álgebra, a expressão final

$$\phi(t) = \phi_0 + \frac{p_\phi}{\beta} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\frac{\beta}{\sqrt{-2mE}} + \left(\sqrt{\frac{\beta^2}{-2mE} - r_0^2} + t\sqrt{\frac{-2E}{m}} \right)}{\frac{\beta}{\sqrt{-2mE}} - \left(\sqrt{\frac{\beta^2}{-2mE} - r_0^2} + t\sqrt{\frac{-2E}{m}} \right)} \right] - \psi_0 \right\}, \quad (2.34)$$

para a equação do movimento angular. Verifica-se que para $t = 0$, $\phi = \phi_0$ e, por outro lado, quando $t \rightarrow t_q$ obtem-se um valor infinito para o ângulo final.

Para as componentes da velocidade deduz-se das equações (2.29) e (2.34) acima as seguintes expressões

$$v_r = \frac{4E}{\sqrt{-2mE}} \frac{1 - \left(\frac{-2E}{\beta}\right) (t_q - t)}{\sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{-2E}{\beta}\right) (t_q - t)\right]^2}}, \quad (2.35)$$

e

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{2(t_q - t) \left[1 - \frac{E}{\beta} (t_q - t)\right]}. \quad (2.36)$$

Dessas equações deduzimos o resultado de que quando $t \rightarrow t_q$ a razão entre as componentes angular e radial da velocidade tende para um valor final finito dado por

$$\frac{v_\phi}{v_r} = \frac{p_\phi}{\beta}. \quad (2.37)$$

Esta relação implica em uma trajetória espiral que satisfaz

$$r\Delta\phi \simeq \frac{p_\phi}{\beta} \Delta r. \quad (2.38)$$

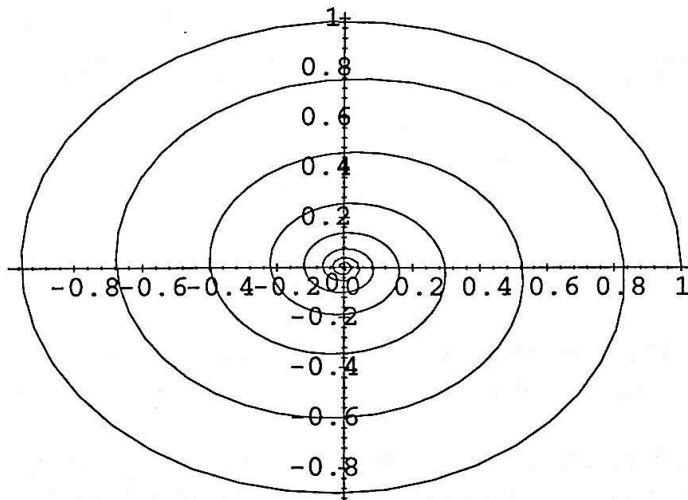


Fig.1-Trajétória de captura da partícula com energia total negativa e momento angular canônico satisfazendo $p_\phi^2 < 2m|k|$.

2.3.2 Energia nula

Neste caso a equação da trajetória pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\frac{du}{u} = \frac{\beta}{p_\phi} d\phi. \quad (2.39)$$

Integrando ambos membros, com os limites de integração análogo ao caso anterior, voltando com as variáveis do problema

$$r = r_0 \exp\left(-\frac{\beta\phi}{p_\phi}\right). \quad (2.40)$$

Com a partícula caindo exponencialmente como uma função do ângulo.

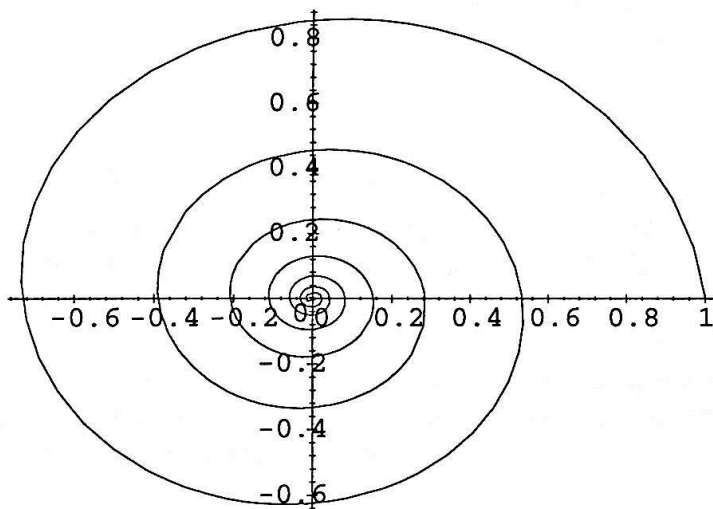


Fig.2- *Captura de partícula em uma órbita confinada com energia total nula e momento angular canônico satisfazendo $p_\phi^2 < 2m|k|$.*

A equação radial de movimento pode ser obtida fazendo $E = 0$ na equação de movimento, (2.29), do caso anterior, explicitamente segue-se

$$r(t) = \left(r_0^2 - \frac{2\beta}{m}t\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.41)$$

da qual deduzimos a expressão

$$t_q = \frac{mr_0^2}{2\beta}, \quad (2.42)$$

para o tempo de queda.

Finalmente, a equação angular de movimento é obtida combinando-se a equação da trajetória (2.40) com a equação radial de movimento (2.41) ou seja

$$\phi(r) = \frac{p_\phi}{\beta} [\ln r_0 - \ln r(t)]. \quad (2.43)$$

Usando a equação radial, obtida acima, a equação angular dependente explicitamente do tempo, é:

$$\phi(t) = \frac{p_\phi}{\beta} \left[\ln r_0 - \frac{1}{2} \ln \left(r_0^2 - \frac{2\beta}{m} t \right) \right]. \quad (2.44)$$

2.3.3 Energia total positiva

Estudemos agora o caso em que a partícula incide sobre o centro vinda de uma distância infinita com momento angular diferente de zero. Supondo que ela vem de uma direção paralela ao eixo x , com um parâmetro de impacto b e com uma velocidade inicial v_0 , as constantes do movimento serão dadas por, $p_\phi = mv_0 b$ e $E = \frac{mv_0^2}{2}$. Estudaremos, em seguida, separadamente, as três situações que podem ocorrer dependendo da relação entre o momento angular e a intensidade da interação.

Caso 1: $p_\phi^2 < 2m|k|$

Considerando primeiro que o momento angular satisfaz $p_\phi^2 < 2m|k|$, acharemos a equação da trajetória através da equação da conservação da energia fazendo a substituição $u = \frac{1}{r}$; explicitamente temos

$$\frac{du}{\left(E + \frac{\beta^2}{2m} u^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2m}}{p_\phi} d\phi. \quad (2.45)$$

Integrando desde um instante inicial no infinito para o qual supomos $(r, \phi) = (\infty, 0)$ e um instante arbitrário (r, ϕ) temos

$$\int_0^u \frac{d\mu}{\left(1 + \frac{\beta^2}{2mE}\mu^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2mE}}{p_\phi} \int_0^\phi d\phi. \quad (2.46)$$

Fazendo, no primeiro membro, a mudança de variável $\frac{\beta u}{\sqrt{2mE}} = \sinh \psi$ obtém-se

$$\psi = \frac{\beta}{p_\phi} \phi. \quad (2.47)$$

Voltando às variáveis físicas temos a equação da trajetória

$$\phi = \frac{p_\phi}{\beta} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\beta}{r\sqrt{2mE}} \right). \quad (2.48)$$

ou também

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{2mE}}{\beta} \sinh \left(\frac{\beta\phi}{p_\phi} \right). \quad (2.49)$$

Deduzimos de ambas as equações que $r \rightarrow 0$, quando $\phi \rightarrow \infty$, ou seja, que a partícula, vinda de uma distância onde o potencial é desprezível, executa infinitas voltas em torno da origem até a sua captura.

A determinação da equação de movimento $r(t)$ pode ser feita usando-se a equação da energia para obter a velocidade radial em função da distância, ou seja,

$$v_r = -\sqrt{\frac{2E}{m} \left(1 + \frac{\beta^2}{2mEr^2}\right)}. \quad (2.50)$$

Separando as variáveis e integrando, ambos membros, nos limites indicados, isto é,

$$\int_{r_0}^r \frac{\rho d\rho}{\left[\rho^2 + \frac{\beta^2}{2mE}\right]^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{\frac{2E}{m}} \int_0^t d\tau, \quad (2.51)$$

que resulta em

$$r(t) = \left[\left(\sqrt{r_0^2 + \frac{\beta^2}{2mE}} - \sqrt{\frac{2E}{m}} t \right)^2 - \frac{\beta^2}{2mE} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.52)$$

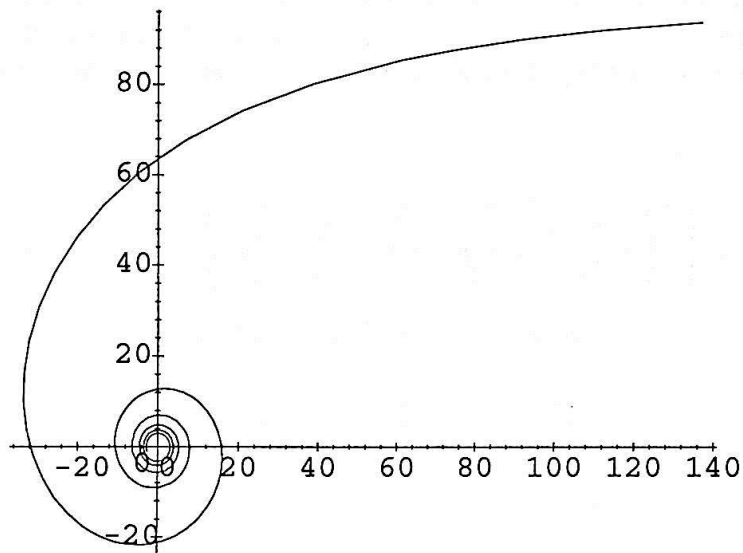


fig.3- Trajetória de captura de partícula com energia positiva e momento angular satisfazendo a seguinte condição: $p_{\phi}^2 < 2m|k|$.

O tempo de queda é obtido fazendo $r(t_q) = 0$, na equação (2.52),

$$t_q = \frac{\beta}{2E} \left(\sqrt{\frac{2mEr_0^2}{\beta^2} + 1} - 1 \right). \quad (2.53)$$

Supondo uma distância inicial r_0 muito grande podemos expandir a raiz e, como ocorreu no caso unidimensional, verificamos que o potencial afeta apenas os termos de ordem superior, que se anulam no limite $r_0 \rightarrow \infty$. Portanto, mantendo-se apenas o termo de ordem zero, o tempo de queda reduz-se a

$$t_q \simeq \frac{r_0}{v_0}, \quad (2.54)$$

que, como no caso unidimensional, é aproximadamente igual ao tempo da partícula livre. Este é um resultado surpreendente que significa que a partícula leva para cair no centro, após infinitas voltas, o mesmo tempo de uma partícula livre que se desloca de uma distância r_0 até a origem, em primeira aproximação.

Uma maneira de obter a equação angular do movimento, $\phi(t)$, é substituir na equação inversa da trajetória, (2.48) que dá explicitamente ϕ em função de r , a equação radial de movimento (2.52) evitando assim, uma integração no tempo. Primeiro, seja a equação da trajetória escrita da seguinte forma:

$$\phi[r(t)] = \frac{p_\phi}{\beta} \left\{ \ln \left[\frac{\beta}{\sqrt{2mEr}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2mEr^2}{\beta^2}} \right) \right] \right\}, \quad (2.55)$$

onde usamos a expressão do seno hiperbólico inverso

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right), \quad (2.56)$$

Substituindo $r(t)$ dado por (2.52) obtemos, após alguma álgebra,

$$\phi(t) = \frac{p_\phi}{2\beta} \ln \left[\frac{\left(\sqrt{r_0^2 + \frac{\beta^2}{2mE}} - t\sqrt{\frac{2E}{m}} \right) + \frac{\beta}{\sqrt{2mE}}}{\left(\sqrt{r_0^2 + \frac{\beta^2}{2mE}} - t\sqrt{\frac{2E}{m}} \right) - \frac{\beta}{\sqrt{2mE}}} \right]. \quad (2.57)$$

Esta é a equação horária angular, com dependência explícita do tempo.

Caso 2: $p_\phi^2 = 2m|k|$

Neste caso ocorre captura de uma partícula vinda do infinito e nesse sentido existe um comportamento semelhante ao caso anterior em que $p_\phi^2 < 2m|k|$. No entanto, as equações que descrevem o movimento não são as mesmas. Essas equações, podem ser obtidas tomando o limite $\beta \rightarrow 0$ nas expressões da seção anterior. Assim, para a equação da trajetória temos, fazendo $\beta \rightarrow 0$ em (2.49)

$$r = \frac{p_\phi}{\phi\sqrt{2mE}}. \quad (2.58)$$

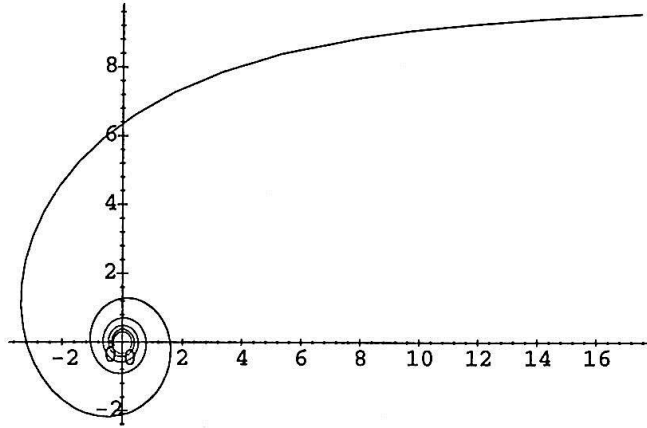


fig.4- Trajetória de captura da partícula com $p_{\phi}^2 = 2m|k|$, descrevendo uma espiral, para o centro de força.

A equação radial do movimento pode ser deduzida fazendo $\beta = 0$ na equação (2.52) o que dá

$$r(t) = r_0 - \sqrt{\frac{2E}{m}}t. \quad (2.59)$$

que mostra que neste caso o movimento na direção radial é uniforme. Combinando as equações (2.58) e (2.59) obtém-se a equação angular de movimento

$$\phi(t) = \frac{p_{\phi}}{\sqrt{2mE} \left(r_0 - \sqrt{\frac{2E}{m}}t \right)}. \quad (2.60)$$

Caso 3: $p_{\phi}^2 > 2m|k|$

No caso em que $p_{\phi}^2 > 2m|k|$, a grandeza β que foi introduzida como um momento angular efetivo, passa a ser um número imaginário puro e é então conveniente escrevê-la como $\beta = i\bar{\beta}$, em que $\bar{\beta} = \sqrt{p_{\phi}^2 - 2m|k|}$ é um número real. As equações do movimento neste caso podem ser obtidas substituindo nas equações anteriormente em β , em termos de $\bar{\beta}$.

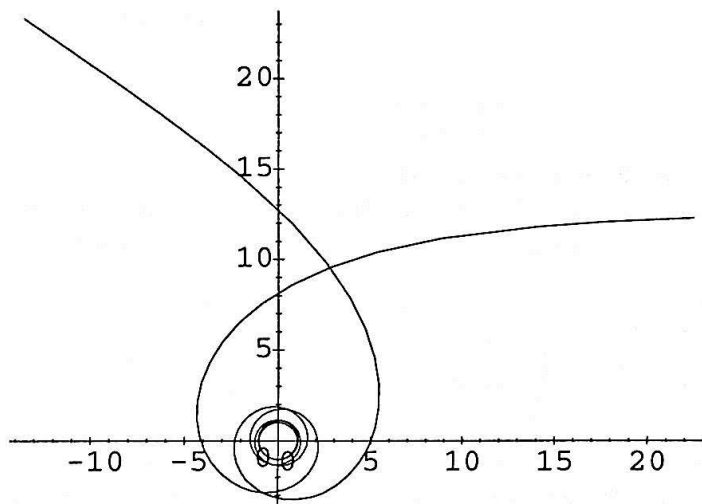


fig.5- Trajetória de espalhamento da partícula com energia total positiva e momento angular canônico satisfazendo $p_\phi^2 > 2m|k|$.

Assim, para a trajetória, obtemos através dessa substituição na equação (2.49) a nova equação

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{2mE}}{\bar{\beta}} \sin\left(\frac{\bar{\beta}\phi}{p_\phi}\right). \quad (2.61)$$

Como mostra a figura, a partícula executa voltas em torno do centro mas não é capturada. O movimento tem um ponto de retorno a partir do qual a partícula passa a espiralar para fora. A partícula portanto termina por afastar-se para o infinito. O ângulo final do movimento é dado pelo valor que anula o argumento do seno na equação,

$$\phi_f = \frac{p_\phi}{\bar{\beta}} \pi = \pi \frac{p_\phi}{\sqrt{p_\phi^2 - 2m|k|}}. \quad (2.62)$$

Vemos que a energia não aparece nesta expressão para o ângulo final. Isto significa que para um dado valor do momento angular, a direção final de movimento da partícula, após ser espalhada pelo centro de força, é independente da energia.

O ponto de retorno, ou seja, o ponto de distância mínima de aproximação do centro de força, ocorre quando o seno assume o valor unitário na equação da trajetória, com isso tem-se

$$r_{\min} = \frac{\bar{\beta}}{\sqrt{2mE}}. \quad (2.63)$$

As equações radial e angular do movimento podem ser obtidas do mesmo modo, ou seja, através da substituição $\beta = i \bar{\beta}$, nas equações do caso anterior. Começando pela equação radial obtemos

$$r(t) = \left[\left(\sqrt{r_0^2 - \frac{\bar{\beta}^2}{2mE}} - \sqrt{\frac{2E}{m}} t \right)^2 + \frac{\bar{\beta}^2}{2mE} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.64)$$

Aqui, o equivalente do tempo de queda é o tempo para a partícula atingir o ponto de retorno $r = r_{\min}$, com r_{\min} dado por (2.63). Imediatamente obtemos

$$t_q = \sqrt{\frac{mr_0^2}{2E} - \frac{\bar{\beta}^2}{4E^2}}. \quad (2.65)$$

É interessante introduzir neste ponto o conceito de tempo de trânsito, τ , definido como a diferença entre o tempo que a partícula espalhada e a partícula livre gastam dentro de um círculo de raio r_0 no limite em que $r_0 \rightarrow \infty$. Explicitamente, temos

$$\tau = 2 \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{mr_0^2}{2E} - \frac{\bar{\beta}^2}{4E^2}} - \frac{\sqrt{r_0^2 - b^2}}{v_0} \right) = 0, \quad (2.66)$$

onde b é um parâmetro de impacto da colisão.

Capítulo 3

Uma Experiência de Captura

Vamos discutir neste capítulo a experiência em que o potencial inversamente proporcional ao quadrado da distância foi produzido em laboratório. Primeiro desenvolveremos o formalismo teórico baseado nos resultados do capítulo anterior para analisar a experiência e em seguida a experiência em si será discutida.

3.1 Espalhamento em uma simetria cilíndrica

Consideremos um feixe de partículas que incide sobre um eixo que cria um campo com simetria cilíndrica que atua sobre as partículas. Como resultado dessa interação, as partículas são desviadas de suas trajetórias retilíneas iniciais. Numa experiência típica de espalhamento, as partículas são detectadas em uma região suficientemente distante do eixo, para que o movimento volte a ser retilíneo uniforme. A grandeza que é extraída da experiência é a seção de choque σ que mede a fração de partículas do feixe que é desviada em uma dada direção. Adotando um sistema de referência em que a coordenada z coincide com o eixo espalhador e a coordenada x aponta para a direção inicial de incidência do feixe. A fração de partículas que chega a um detector de largura h , pode ser escrita como

$$h d\sigma = \frac{I h db}{I}, \quad (3.1)$$

onde I é a intensidade do feixe definida como o número de partículas por unidade de área e de tempo e b é o parâmetro de impacto. A seção de choque assim definida tem dimensão de comprimento e é igual à diferencial db que corresponde a uma janela por onde passam as partículas do feixe que são

defletidas numa direção final entre θ e $\theta + d\theta$. A seção de choque diferencial é então dada por

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \left| \frac{db}{d\theta} \right|, \quad (3.2)$$

onde o segundo membro é obtido a partir da equação da trajetória.

Considerando o problema do espalhamento pelo potencial atrativo inversamente proporcional ao quadrado da distância, o ângulo de desvio, θ , é imediatamente obtido em termos do ângulo final do movimento (2.62) como

$$\theta(p_\varphi, E) = \pi - \varphi_f = \left(1 - \frac{p_\varphi}{\sqrt{p_\varphi^2 - 2m|k|}} \right) \pi \quad (3.3)$$

com $p_\varphi^2 > 2m|k|$. Expressando o momento angular em termos do parâmetro de impacto, $p_\varphi = mvb$, deduzimos a seção de choque

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{b}{2\pi mvb} \sqrt{p_\varphi^2 - 2m|k|} = \sqrt{\frac{|k|}{4E[(\pi - \theta)^2 - \pi^2]}}. \quad (3.4)$$

Para a seção de choque de absorção temos

$$\sigma_{abs} = 2b_{crit} = 2\sqrt{\frac{|k|}{E}}. \quad (3.5)$$

3.2 Análise da experiência

De posse desses resultados analisemos a experiência relatada na referência [2]. Nessa experiência, um fio fino carregado eletricamente, foi colocado na proximidade de átomos de baixa velocidade (átomos frios) presos em uma armadilha magneto-ótica (MOT). A interação dos átomos com o fio, leva à polarização desses, de tal forma que eles ficam sujeitos a um potencial de dipolo, ou seja, um potencial radial $\frac{1}{r^2}$. O fato que um potencial desse tipo não possui órbitas estáveis, leva ao decaimento do gás de átomos na armadilha. A presença do potencial singular é detetada pelas características desse decaimento. Mostremos agora como isso ocorre.

Consideremos que o gás de átomos na armadilha seja descrito pela função densidade de distribuição $f(\vec{r}, \vec{v})$ que dá a probabilidade de um átomo estar na posição \vec{r} com velocidade \vec{v} . Estamos supondo que essa distribuição permanece estacionária durante o processo de captura dos átomos pelo fio.

O número de átomos que o gás perde, com velocidade inicial v , em um intervalo de tempo dt é dado por

$$dN_v = -I_v dt dz \sigma_{abs}(v), \quad (3.6)$$

onde $I_v = v f(\vec{r}, \vec{v})$ e a seção de choque de absorção tem de ser recalculada levando em conta o raio finito do fio. Para isso consideremos a hamiltoniana para os átomos

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - \frac{2\bar{\alpha}q^2}{r^2}, \quad (3.7)$$

onde $\bar{\alpha}$ é a polarizabilidade do átomo. Os átomos capturados serão todos aqueles com ponto de retorno igual ou inferior ao raio, R_f , do fio. Dessa condição deduzimos a seção de choque de absorção

$$\sigma_{abs}(v) = 2\sqrt{R_f^2 + \frac{4\bar{\alpha}q^2}{mv^2}}. \quad (3.8)$$

Usando a função distribuição e integrando para todas as velocidades, obtemos para o decaimento do gás a equação

$$\frac{dN}{dt} = -N \int d^3v f(\vec{r}, \vec{v}) dz v \sigma_{abs}(v) = -ND. \quad (3.9)$$

Portanto o decaimento do gás é dado em função do tempo como $N = N_0 \exp(-Dt)$ com D sendo a taxa de decaimento cujo inverso define o tempo característico que o gás de átomos leva para decair. Para estimar esse tempo, vamos supor que os átomos têm uma distribuição gaussiana no espaço de velocidades e de posição dada por

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{d} \delta(v_z) G(v_x) G(v_y) G(x) G(y),$$

onde $G(s, \sigma_s) = \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right) / \sqrt{2\pi}\sigma_s$ e d é o comprimento da armadilha. Com essa distribuição a integral acima pode ser efetuada obtendo-se o valor aproximado, como pode ser visto no apêndice (§5.2)

$$D = \frac{\sigma_v}{2\sqrt{e\pi}\sigma_x\sigma_y} \sigma_{abs}(\bar{v}) = \frac{\sigma_v}{\sqrt{e\pi}\sigma_x\sigma_y} \sqrt{R_f^2 + \frac{8\bar{\alpha}q^2}{\pi m\sigma_v^2}}, \quad (3.10)$$

que mostra como o decaimento depende do raio, ou seja, da espessura do fio e da carga q . Esta fórmula difere da fórmula apresentada na Ref. [2]

devido ao cálculo mais apurado que fizemos. No entanto, essa diferença é irrelevante no que concerne a análise dos dados.

Na experiência relatada na referência [2], a expressão acima para taxa D de decaimento foi investigada medindo-se D para três valores do raio do fio R_f em função da carga q . Os resultados obtidos são mostrados na figura abaixo. Vemos que de fato, temos uma dependência linear para valores crescentes da carga e que o valor de D , quando a carga é nula, se comporta linearmente com o raio do fio como prevê a equação, dentro da precisão da experiência.

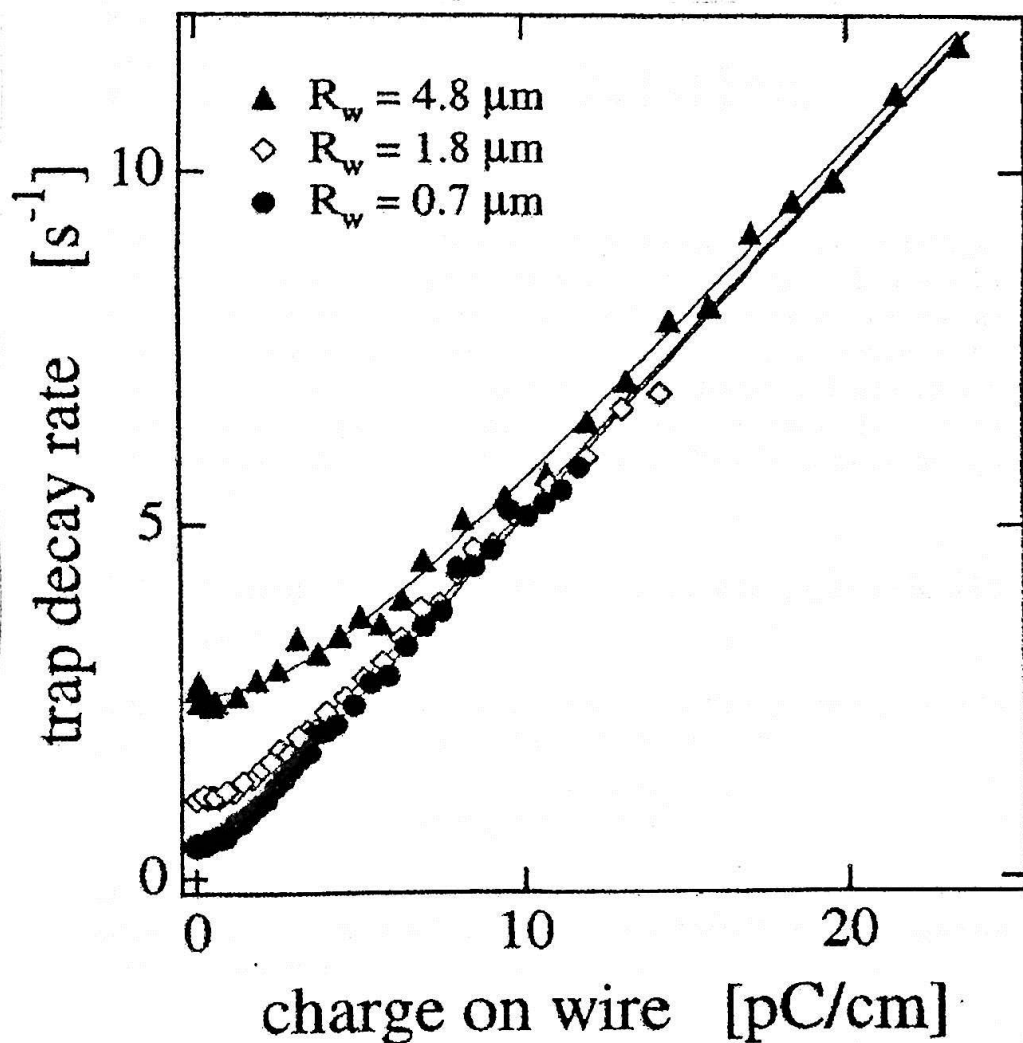


Fig.6- Taxa de decaimento em função da carga no fio para três valores do raio.

Capítulo 4

Captura na Mecânica Clássica Relativística

Considerando agora o problema da captura na Relatividade, esta já ocorre para o potencial inversamente proporcional à distância. Isto se dá porque o potencial centrífugo aparece na hamiltoniana relativística em uma raiz quadrada. Para pequenas distâncias, o termo centrífugo é dominante e contribui para a hamiltoniana com o inverso da distância. Portanto a barreira centrífuga, que impede a queda da partícula no centro de força, é superada por potenciais singulares r^{-n} , para $n \geq 1$. Estudaremos neste capítulo o caso $n = 1$.

4.1 Hamiltoniana do sistema e equações de Hamilton

A hamiltoniana de uma partícula, com massa de repouso m_0 , sujeita a um potencial central r^{-1} , é escrita na relatividade como

$$h = \sqrt{P^2 c^2 + m_0^2 c^4} + \frac{K}{r}.$$

Dividindo esta equação pela energia de repouso e introduzindo variáveis adimensionais, esta hamiltoniana pode ser reescrita de uma maneira mais conveniente como

$$H = \sqrt{p^2 + 1} + \frac{k}{r}. \quad (4.1)$$

Isto é equivalente a adotar um sistema de unidades em que a unidade de massa é a massa de repouso da partícula e a unidade de velocidade, é a velocidade da luz.

Como esta hamiltoniana não depende explicitamente do tempo ela é uma constante do movimento e coincide com a energia total do sistema. Análogo ao caso não relativístico, o momento angular total se conserva, vinculando o movimento a um plano. A hamiltoniana pode então ser escrita em coordenadas polares no plano

$$H = \sqrt{p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + 1} + \frac{k}{r}, \quad (4.2)$$

e as equações de Hamilton são

$$\dot{r} = \frac{p_r}{\sqrt{p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + 1}}, \quad (4.3)$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{r^2 \sqrt{p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + 1}}, \quad (4.4)$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{r^3 \sqrt{p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + 1}} + \frac{k}{r^2}, \quad (4.5)$$

$$\dot{p}_\theta = 0. \quad (4.6)$$

Da equação(4.6), imediatamente conclui-se que p_θ é uma constante do movimento

$$p_\theta = \text{const.} \quad (4.7)$$

Essa descrição, em termos de coordenadas cilíndricas se aplica ao movimento de uma partícula com momento angular não-nulo. Por isso, antes de usarmos as equações acima, consideremos, como fizemos na mecânica não-relativística, o movimento unidimensional.

4.2 Movimento unidimensional

Com $p_\theta = 0$, o movimento é, mais convenientemente, descrito por uma coordenada $x \in]-\infty, +\infty[$ e a hamiltoniana é então

$$E = H = \sqrt{p_x^2 + 1} + \frac{k}{|x|}. \quad (4.8)$$

As equações de Hamilton se reduzem às duas equações

$$\dot{x} = \frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + 1}}, \quad (4.9)$$

$$\dot{p}_x = \frac{kx}{|x|^3}. \quad (4.10)$$

Isolando p_x em (4.8) e substituindo em (4.9), tem-se

$$\dot{x}(t) = \pm \frac{\sqrt{(E|x| - k)^2 - x^2}}{E|x| - k}, \quad (4.11)$$

onde (\pm) indica o sentido do movimento. Desta equação vemos que o movimento da partícula se dá em um domínio definido pela desigualdade

$$(E|x| - k)^2 \geq x^2,$$

que define a região classicamente permitida.

Esse domínio é melhor visualizado construindo o gráfico do potencial $V(x) = \frac{k}{|x|}$ e da energia $(E - 1)$ como mostrado na figura abaixo.

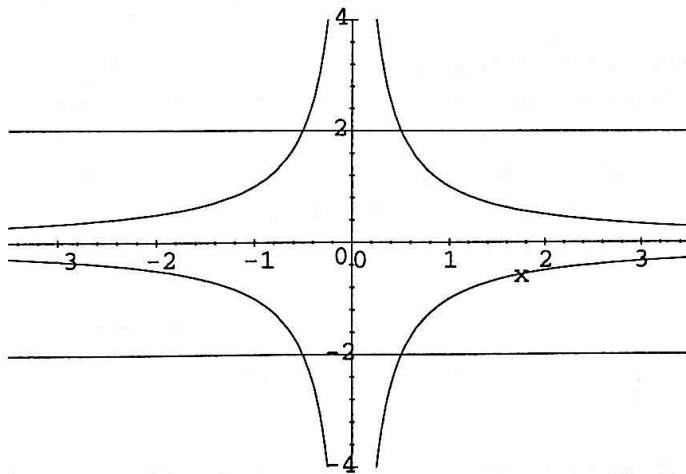


Fig.7-gráfico do potencial, no caso unidimensional, para $k = \pm 1$.

Vemos que a região em que se dá o movimento, vai depender dos valores de k e E . Assim no caso do potencial repulsivo em que $k > 0$, E é também necessariamente positivo, maior que 1, e a partícula move-se em um dos

domínios abertos $-\infty < x \leq -x_0$ ou $x_0 \leq x < \infty$ com $x_0 = \frac{k}{E-1}$ indicando o ponto de retorno do movimento. Se $k < 0$, ou seja, potencial atrativo, se $E - 1 > 0$, não existe ponto de retorno e a partícula passa pelo centro indo para o infinito. Finalmente, se a energia é menor que um, isto é, $E - 1 < 0$, a partícula oscila entre os pontos de retorno e $-x_0 < x \leq x_0 = \frac{k}{E-1}$.

Observemos que em qualquer desses casos se a partícula passa pelo centro de força, ela atinge a velocidade da luz. De fato, fazendo $x = 0$ na Eq. (4.11), obtemos o valor ± 1 que corresponde, no sistema de unidade que adotamos, à velocidade da luz.

Resolvendo a equação (4.11), completando o quadrado perfeito dentro da raiz e usando a seguinte mudança de variável

$$y = \pm \left[\frac{(E^2 - 1)|x|}{k} - E \right] \text{ se } \frac{(E^2 - 1)|x|}{k} \geq E. \quad (4.12)$$

Utilizando as primitivas das integrais do apêndice (§5.1), tem-se

$$E \left[\sqrt{y^2 - 1} \right]_{y_1}^{y_2} \pm [\operatorname{arccosh} y]_{y_1}^{y_2} = \pm \operatorname{sgn}(x) \frac{(E^2 - 1)\sqrt{E^2 - 1}}{k} t. \quad (4.13)$$

4.2.1 Potencial repulsivo

Neste caso $k > 0$; a energia total do sistema só pode assumir valores maiores do que a unidade, ou seja $E - 1 > 0$. Supondo que a partícula tenha seu movimento na parte positiva do eixo, adotando para limites de integração o ponto de retorno e uma posição arbitrária ($\dot{x}(t) > 0$). Usando a mudança de variável (4.12), a equação implícita do movimento é dada pela expressão analítica

$$E \sqrt{\left[\frac{(E^2 - 1)x}{k} - E \right]^2 - 1} + \operatorname{arccosh} \left(\frac{(E^2 - 1)x}{k} - E \right) = \frac{(E^2 - 1)\sqrt{E^2 - 1}}{k} t. \quad (4.14)$$

O gráfico a seguir mostra a equação horária do movimento a partir do momento em que a partícula passa pelo ponto de retorno

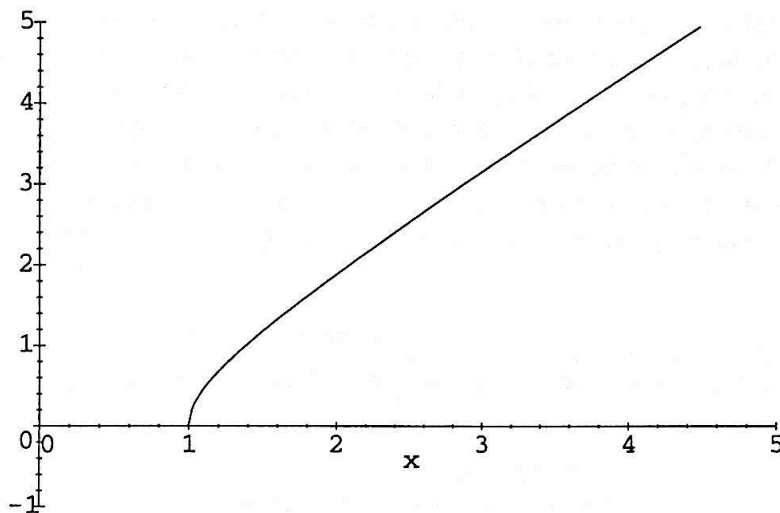


Fig.8-Gráfico do tempo em função da posição, para o valor da energia $E = 2$.

4.2.2 Potencial atrativo

Como $k < 0$, o estudo será dividido em duas partes conforme a energia total do sistema, citado acima.

Para as energias que satisfazem a condição $E - 1 > 0$, a integração da equação (4.14) é efetuada a partir de uma posição arbitraria até a origem, supondo que a partícula inicie seu movimento na parte positiva do eixo; desta maneira adota-se $\dot{x}(t) < 0$. Adotando a mudança de variável definida em (4.12), a expressão analítica implícita para equação do movimento é dada por

$$E \left\{ \sqrt{\left[E - \frac{(E^2 - 1)|x|}{k} \right]^2 - 1} - \sqrt{E^2 - 1} \right\} - \operatorname{arccosh} \left[E - \frac{(E^2 - 1)|x|}{k} \right] + \operatorname{arccosh}(E) = \operatorname{sgn}(x) \frac{(E^2 - 1)\sqrt{E^2 - 1}}{k} t. \quad (4.15)$$

Para energias que satisfazem a condição $E - 1 < 0$, é necessário dividir o estudo em dois subintervalos para energia, como consequência da existência da raiz na hamiltoniana do sistema.

A energia total do sistema está compreendida no intervalo $-1 < E < 1$ e as posições da partícula, são em módulo, menores que o valor na posição do ponto de retorno, demonstra-se que $y < 1$. Observa-se que os radicandos das raízes que aparecem na equação (4.15), são negativos, surgindo números imaginários puros. A função hiperbólica desta equação, torna-se uma função trigonométrica multiplicado pela unidade imaginária. Desta maneira esta unidade é comum a todos os termos desta equação, cancelando-se naturalmente. Resulta que a expressão analítica implícita da equação do movimento é dado por

$$E \sqrt{1 - \left[\frac{(1 - E^2)x}{k} - E \right]^2} + \arccos \left[\frac{(1 - E^2)x}{k} - E \right] = \\ = \operatorname{sgn}(x) \frac{(1 - E^2) \sqrt{1 - E^2}}{k} t, \quad (4.16)$$

onde a integração foi efetuada a partir do ponto de retorno até uma posição arbitrária, com $\dot{x}(t) < 0$.

Se a energia total do sistema for nula, a posição da partícula pode ser obtida, em função do tempo, de forma explícita. A representação gráfica da equação do movimento é mostrada na próxima abaixo.

O período do movimento é o quádruplo do tempo gasto para a partícula percorrer a distância que vai do ponto de retorno até a origem do espaço; neste caso assume o seguinte valor

$$T = \frac{4k}{(1 - E^2) \sqrt{1 - E^2}} \left[\arccos(-E) + E \sqrt{1 - E^2} \right]. \quad (4.17)$$

Fazendo a energia assumir o valor nulo ($E \rightarrow 0$) em (4.16), a expressão analítica da equação do movimento é simplificada para

$$x(t) = |k| \cos \left(\frac{t}{|k|} \right). \quad (4.18)$$

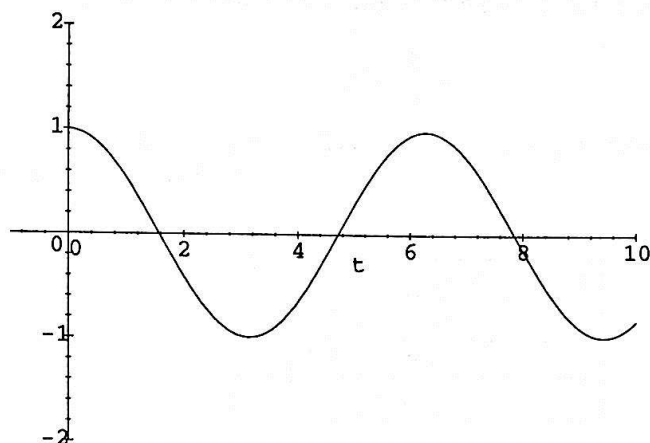


fig.9-Gráfico de $x(t)$ para o potencial atrativo, onde os valores usados são: $E = 0$ e $k = -1$.

Se a energia total do sistema assumir valores tal que $E < -1$, então $y > 1$. Integrando a equação (4.13) com a mudança de variável explicitada em (4.12), a partir do ponto de retorno até uma posição arbitrária, obtém-se a equação implícita do movimento

$$E \sqrt{\left[\frac{(E^2 - 1)|x|}{k} - E \right]^2 - 1} + \operatorname{arccosh} \left(\frac{(E^2 - 1)|x|}{k} - E \right) = -\operatorname{sgn}(x) \frac{(E^2 - 1) \sqrt{E^2 - 1}}{k} t. \quad (4.19)$$

O período do movimento é o quádruplo do tempo gasto pela partícula, para percorrer a distância do ponto de retorno até a origem

$$T = \frac{4k}{\sqrt{E^2 - 1}} \left[\operatorname{arccosh}(-E) + E \sqrt{E^2 - 1} \right]. \quad (4.20)$$

4.3 Movimento em duas dimensões

Neste caso observa-se que o momento canônico angular é não nulo, permitindo assim estudar os movimentos da partícula, evitando os problemas de divergências que podem aparecer quando se obtém a equação da trajetória, a partir das equações de Hamilton.

Tendo em vista a equação (4.2), escreve-se a seguinte desigualdade

$$E - \frac{k}{r} > 1. \quad (4.21)$$

Analisando a equação (4.21), para valores positivo e negativo de k , tem-se a seguinte tabela.

| k | E | região permitida |
|---|----|-----------------------|
| + | >1 | $r > \frac{ k }{E-1}$ |
| - | >1 | $r > 0$ |
| - | <1 | $r < \frac{ k }{1-E}$ |

(4.22)

Eliminando a raiz na equação da energia (4.2), tem-se

$$E^2 - 1 = p_r^2 + \frac{p_\theta^2 - k^2}{r^2} + \frac{2Ek}{r}, \quad (4.23)$$

Identifica-se o potencial efetivo em(4.23), escrevendo

$$V^{ef} = \frac{p_\theta^2 - k^2}{r^2} + \frac{2Ek}{r}. \quad (4.24)$$

Neste situação, a abordagem é determinar a equação da trajetória e a partir dela estabelecer os casos onde ocorrem captura ou espalhamento. Dividindo membro a membro as equações (4.3) e (4.4)

$$\frac{dr}{d\theta} = r^2 \frac{p_r}{p_\theta}. \quad (4.25)$$

Por outro lado, isolando p_r na equação da energia (4.2)

$$p_r = \pm \sqrt{h + \frac{k^2 - p_\theta^2}{r^2} - \frac{2Ek}{r}}, \quad (4.26)$$

onde $h = E^2 - 1$. Observa-se que a função $h(E)$ não é biunívoca, pois trata-se de uma parábola, como mostra a figura

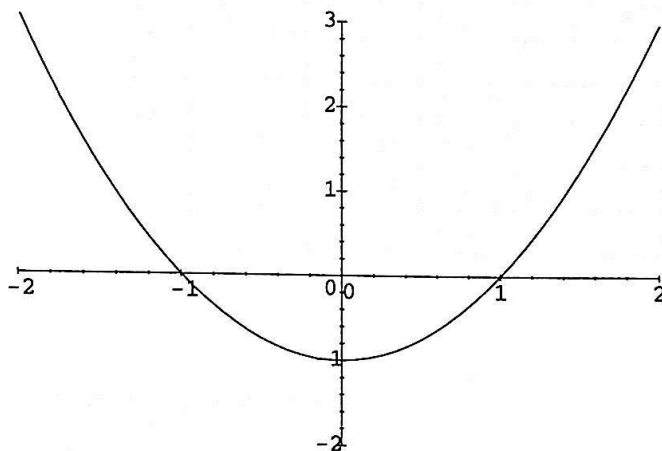


fig.10-gráfico de $h(E)$

Para que se possa usar a variável h , para discutir o movimento e depois voltar para a variável E , é necessário sempre utilizar os intervalos $(-\infty, 0)$ ou $(0, +\infty)$, para a energia total do sistema, de maneira que se possa sempre ter um valor único para a energia total do sistema.

Substituindo (4.26) em (4.25), tem-se

$$\frac{dr}{r^2 d\theta} = \pm \frac{1}{p_\theta} \sqrt{h + \frac{k^2 - p_\theta^2}{r^2} - \frac{2Ek}{r}}, \quad (4.27)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{1}{r}, \quad (4.28)$$

a equação (4.27) é evoluída para

$$-\frac{du}{d\theta} = \pm \frac{1}{p_\theta} \sqrt{h + (k^2 - p_\theta^2) u^2 - 2kEu} \quad (4.29)$$

O potencial efetivo, muda de forma de acordo com a energia total do sistema e o valor do momento canônico angular. Desta maneira para simplificar a análise do problema define-se uma variável $\alpha = 2kE$, que será usada para obter todas as trajetórias, simplificando a álgebra do problema.

A tabela abaixo pode ser considerada, levando em conta as variáveis α e h , em relação a energia total, o momento canônico e a constante k .

| k | E | h | região permitida | α |
|---|-----------|-----------|-----------------------|----------|
| + | > 1 | > 0 | $r > \frac{ k }{E-1}$ | + |
| - | > 1 | > 0 | $r > 0$ | - |
| - | $[0, 1]$ | $[-1, 0]$ | $r < \frac{ k }{1-E}$ | - |
| - | $[-1, 0]$ | $[-1, 0]$ | $r < \frac{ k }{1-E}$ | + |
| - | < -1 | > 0 | $r < \frac{ k }{1-E}$ | + |

(4.30)

4.3.1 Potencial repulsivo

O potencial será repulsivo quando k assumir valores positivos, sendo assim, a energia total do sistema será maior que a unidade, portanto positiva, em consequência, $h > 0$. Desta maneira o potencial efetivo seria modificado apenas pelo valor do momento canônico angular, como será visto no estudo feito nos casos abaixo.

Primeiro caso: $|p_\theta| = |k|$

Iniciaremos o estudo do movimento da partícula relativística, com este valor particular para o momento canônico angular, pois observa-se que a equação (4.29) simplifica-se apreciavelmente, além de evitar problemas de divergências no cálculo das trajetórias em outros casos.

O potencial efetivo (4.24) é simplesmente dado por

$$V^{ef} = \frac{2kE}{r}, \quad (4.31)$$

O gráfico do potencial efetivo é esboçado na figura a seguir, levando em consideração que a energia assume somente valores positivos.

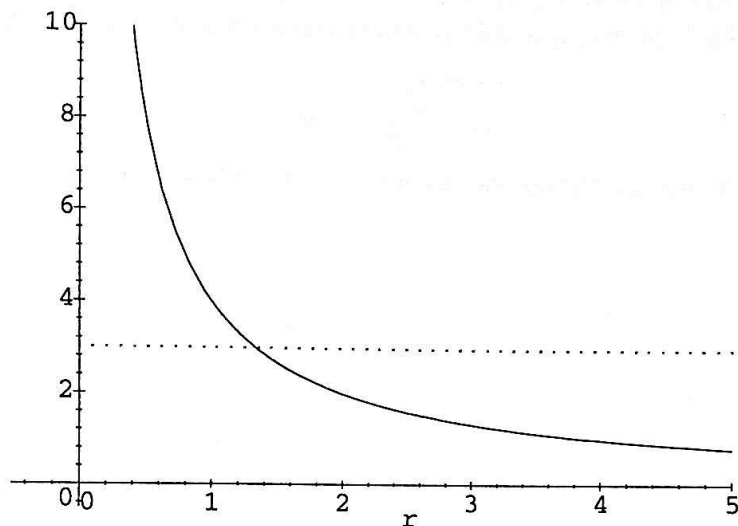


Fig.11-Gráfico do potencial efetivo $V^{ef}(r)$ no caso $|p_\theta| = |k|$, para $k = 1$ e $E = 2$.

Como $h > 0$, pela tabela (4.30) conclui-se que o potencial é repulsivo e a partícula é espalhada, sendo que o movimento possui uma posição de aproximação máxima, que deverá ser observada na representação gráfica da trajetória.

Separando as variáveis na equação (4.29) e integrando ambos os membros, supondo que a partícula esteja inicialmente a uma distância muito grande do centro de força, até um ponto qualquer da trajetória, como mostra os limites de integração na equação

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{h - |\alpha|u}} = -\frac{1}{p_\theta} \int_0^\theta d\theta. \quad (4.32)$$

Usando a mudança de variável

$$h - |\alpha|u = \xi, \quad (4.33)$$

obtem-se como resultado, a seguinte equação da trajetória, em função da energia total do sistema e da constante k .

$$r = \frac{2Ek}{E^2 - 1 - (\sqrt{E^2 - 1} - \theta E)^2}. \quad (4.34)$$

Convém notar que o ângulo final de espalhamento, só depende da energia total do sistema e tem o seguinte valor obtido a partir de (4.34)

$$\theta_f = 2\sqrt{1 - \frac{1}{E^2}}. \quad (4.35)$$

A trajetória e as duas retas, que são as assíntotas, são mostradas na figura seguinte

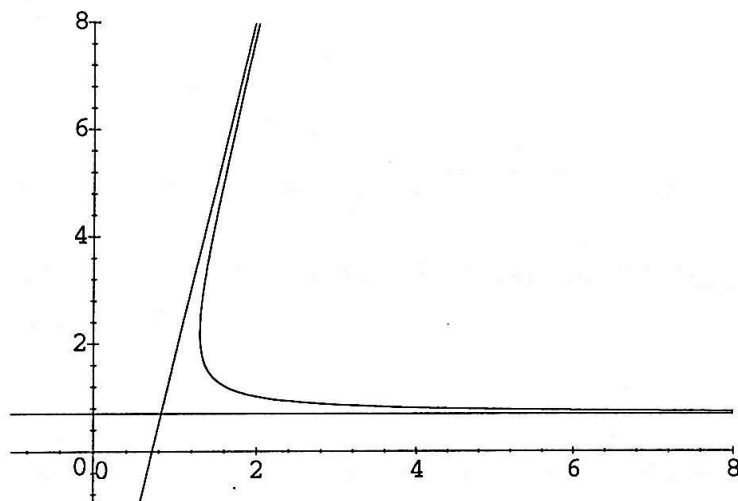


Fig.12-Trajétória da partícula no plano (x,y) no caso $|p_\theta| = |k|$, para $k = 1$ e $E = 2$.

Segundo caso: $|k| < |p_\theta|$

Fazendo $k^2 - p_\theta^2 = -\beta^2$, o potencial efetivo é escrito da seguinte forma

$$V^{ef} = \frac{\beta^2}{r^2} + \frac{2Ek}{r}. \quad (4.36)$$

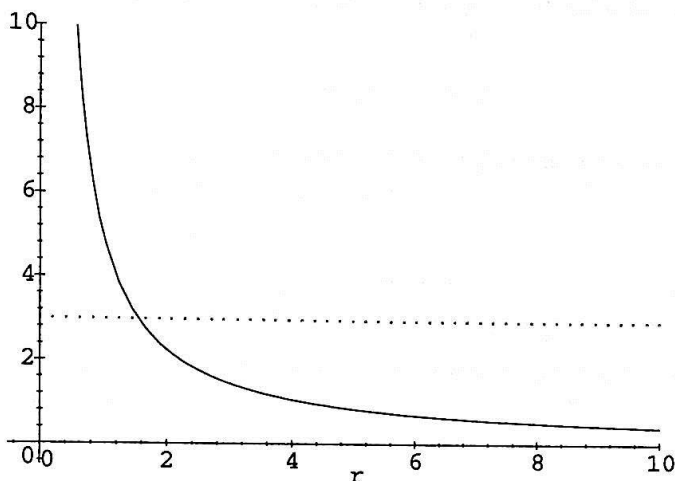


Fig.13-Gráfico do potencial efetivo $V^{ef}(r)$ no caso $|k| < |p_\theta|$, para $k = 1$, $E = 2$ e $|p_\theta| = \sqrt{2}$.

Observa-se na figura 13, que neste caso, uma partícula se movimentando a partir do infinito, é espalhada, depois de passar por uma posição de máxima aproximação. Espera-se observar este efeito na simulação gráfica da trajetória da partícula.

A equação da trajetória é escrita da seguinte maneira

$$\frac{du}{d\theta} = \pm \frac{1}{p_\theta} \sqrt{h - \beta^2 u^2 - \alpha u}, \quad (4.37)$$

com $\alpha = 2Ek$. Completando o quadrado perfeito dentro da raiz, sem a preocupação de introduzir divergências nos denominadores, obtemos

$$\frac{du}{d\theta} = \pm \frac{1}{p_\theta} \sqrt{h + \frac{\alpha^2}{4\beta^2} - \left(\beta u + \frac{\alpha}{2\beta}\right)^2}. \quad (4.38)$$

Fazendo $h + \frac{\alpha^2}{4\beta^2} = \eta^2$ e separando as variáveis e integrando a equação (4.38), supondo que a partícula inicialmente esteja a uma distância muito grande do centro espalhador, temos que

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \left(\frac{|\beta|u + \frac{\alpha}{2|\beta|}}{|\eta|}\right)^2}} = \frac{|\eta|}{p_\theta} \int_0^\theta d\theta. \quad (4.39)$$

Para resolver esta integral usa-se a seguinte mudança de variável

$$\frac{|\beta| u + \frac{\alpha}{2|\beta|}}{|\eta|} = \sin \psi . \quad (4.40)$$

A equação da trajetória obtida, em função da energia total do sistema e do momento canônico angular é dada por

$$r = \frac{-\frac{\alpha}{2\beta^2}}{1 - \frac{2|\beta||\eta|}{\alpha} \sin \left[\arcsin \left(\frac{\alpha}{2|\beta||\eta|} \right) + \frac{|\beta|}{p_\theta} \theta \right]} . \quad (4.41)$$

A representação gráfica da equação da trajetória é dada pela figura a seguir, observando que as duas retas são as assíntotas da trajetória do movimento da partícula

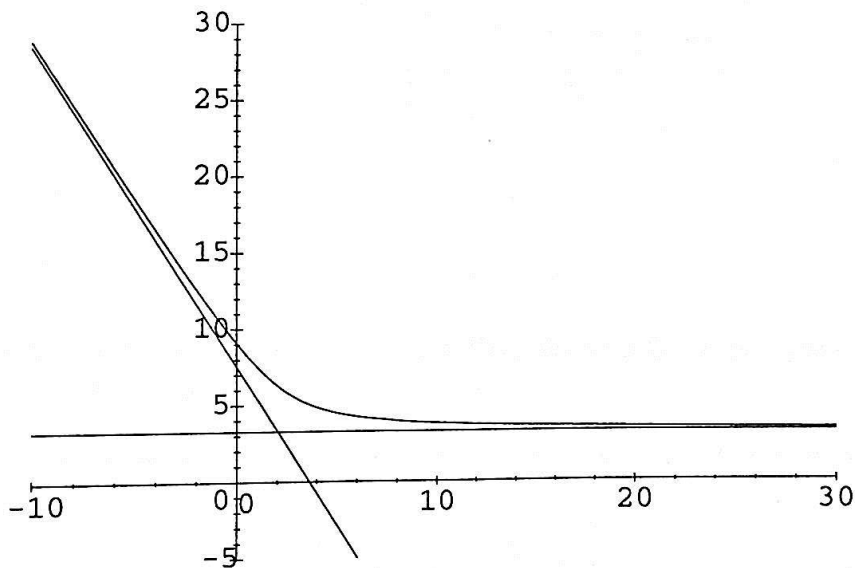


fig.14- Trajetória da partícula no plano (x,y) no caso $|k| < |p_\theta|$, para $k = 1$, $|p_\theta| = \sqrt{2}$ e $E = 2$.

Terceiro caso: $|k| > |p_\theta|$

Analogamente ao caso anterior, fazendo $k^2 - p_\theta^2 = \beta^2$, o potencial efetivo é escrito da seguinte maneira

$$V^{ef} = \frac{-\beta^2}{r^2} + \frac{2Ek}{r} \quad (4.42)$$

O gráfico do potencial efetivo está representado a seguir, podendo ser utilizado para ajudar na visualização qualitativa do movimento, ou mesmo facilitando na escolha dos limites de integração da equação. Nota-se também que o produto Ek é sempre positivo.

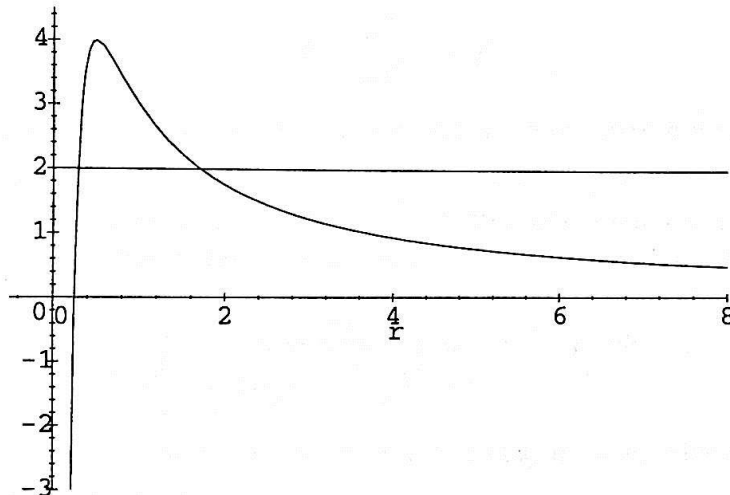


Fig.15-Gráfico do potencial efetivo $V^{ef}(r)$ no caso $|k| > |p_\theta|$, para $k = \sqrt{2}$, $p_\theta = 1$ e $E = \sqrt{2}$.

O ponto de máximo e o valor do potencial efetivo associado a este ponto é dado por

$$V^{ef} \left(\frac{2\beta^2}{\alpha} \right) = \frac{\alpha^2}{4\beta^2}. \quad (4.43)$$

Neste caso demonstra-se que o valor do potencial efetivo no ponto máximo, é sempre maior do que h , ou seja

$$\frac{\alpha^2}{4\beta^2} > h = E^2 - 1. \quad (4.44)$$

A equação da trajetória adquire o seguinte aspecto

$$\frac{du}{d\theta} = \pm \frac{1}{p_\theta} \sqrt{h + \beta^2 u^2 - \alpha u}, \quad (4.45)$$

novamente definindo $\alpha = 2Ek$. Completando o quadrado perfeito dentro da raiz quadrada, obtemos

$$\frac{du}{d\theta} = \pm \frac{1}{p_\theta} \sqrt{h - \frac{\alpha^2}{4\beta^2} + (|\beta|u - \frac{\alpha}{2|\beta|})^2}. \quad (4.46)$$

Para simplificar as fatorações algébricas que terão que ser executadas, considera-se a seguinte mudança

$$h - \frac{\alpha^2}{4\beta^2} = -\eta^2. \quad (4.47)$$

Note que $h < \frac{\alpha^2}{4\beta^2}$, como já foi observado anteriormente em (4.44). Separando as variáveis, notando que $u < \frac{|\alpha|}{2|\beta|}$ para que a partícula não adentre a região proibida, como mostra a tabela (4.22) e que a partícula inicialmente se encontre a uma distância muito grande do centro espalhador, tem-se

$$\int_0^u \frac{du'}{\sqrt{\left(\frac{|\beta|u'}{|\eta|} - \frac{|\alpha|}{2|\beta|\eta}\right)^2 - 1}} = \frac{|\eta|}{p_\theta} \int_0^\theta d\theta'. \quad (4.48)$$

O integrando, na primeira integral da equação (4.48), sugere a seguinte mudança de variável

$$\frac{|\alpha|}{2|\beta|\eta} - \frac{|\beta|u'}{|\eta|} = \cosh \psi. \quad (4.49)$$

A equação da trajetória é uma curva, cuja equação polar é

$$r = \frac{\frac{2\beta^2}{|\alpha|}}{1 - \frac{2|\beta|\eta}{|\alpha|} \cosh \left[\left(\psi_0 - \frac{|\beta|}{p_\theta} \theta \right) \right]}, \quad (4.50)$$

onde o valor de ψ_0 é obtido a partir da equação (4.49) e explicitamente dado por

$$\psi_0 = \operatorname{arccosh} \left(\frac{|\alpha|}{2|\beta|\eta} \right). \quad (4.51)$$

O gráfico da figura abaixo, mostra a máxima aproximação da partícula ($r \geq \frac{2\beta^2}{|\alpha|}$), antes de ser espalhada para posições distantes do centro de forças; visualiza-se também as duas assíntotas da trajetória da partícula.

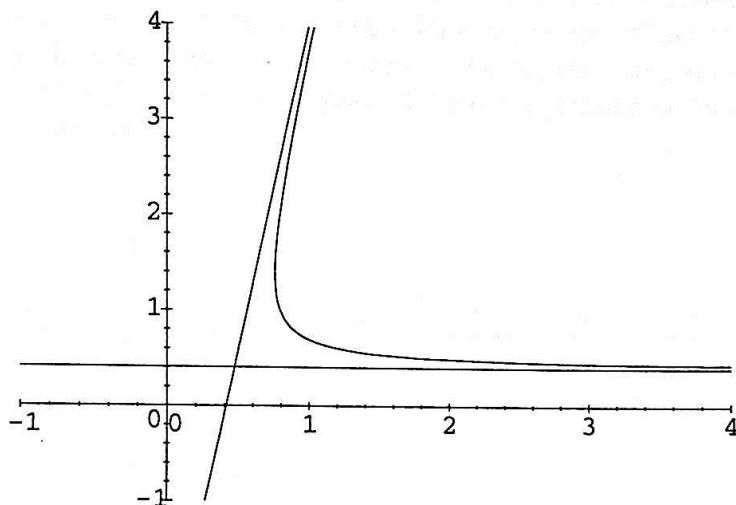


Fig.16- Trajetória da partícula no plano (x,y) no caso $|k| > |p_\theta|$, para $k = \sqrt{2}$, $|p_\theta| = 1$ e $E = 2$.

4.3.2 Potencial atrativo

Nesta parte da teoria, o valor de k é sempre negativo. O potencial efetivo modificará sua forma de acordo com o valor do momento canônico angular e também do valor da energia, que pode ser positiva, negativa ou nula, como pode ser verificado na tabela (4.22). Agora, o estudo das trajetórias dos movimentos possíveis da partícula, será dividido de acordo com os valores do momento canônico angular da partícula e o sinal da energia total do sistema, como será visto adiante.

Primeiro caso: $|p_\theta| = |k|$

Para este valor do momento canônico angular, o potencial efetivo assumirá a seguinte forma

$$V^{ef} = \frac{2Ek}{r} . \quad (4.52)$$

Pode-se notar, imediatamente que este potencial só depende do sinal da energia. Será feito um estudo detalhado em dois casos, onde a energia é positiva ou negativa, para explorar minuciosamente todos efeitos no movimento da partícula.

1a) **Energia positiva** Para a energia total do sistema assumindo valores negativos, o potencial efetivo terá valores negativos. Convém notar que o valor de h , tendo em vista o gráfico da fig.10, está no intervalo $(-1, \infty)$. A representação gráfica deste potencial mostra claramente as características acima descritas

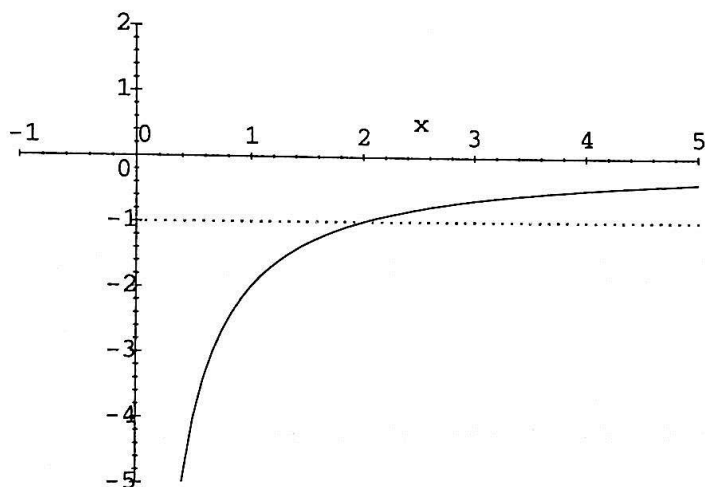


Fig.17-Gráfico do potencial efetivo $V^{ef}(r)$ no caso $|k| = |p_\theta|$ e energia positiva, para $k = -1$, $|p_\theta| = 1$ e $E = 1$.

A equação da trajetória (4.29), para este particular valor do momento canônico angular, simplifica-se razoavelmente, pois desaparece o termo u^2 na equação (4.29). Após a separação das variáveis, fazendo $2Ek = -\alpha$ ($\alpha > 0$) e adotando $h > 0$, tendo em vista o gráfico acima, podemos supor que a partícula tenha uma posição inicial muito distante do centro de forças

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{h + \alpha u}} = \frac{1}{p_\theta} \int_0^\theta d\theta. \quad (4.53)$$

Efetuando as duas integrações da equação (4.53), o resultado em termos dos parâmetros e constantes do problema é

$$r = \frac{-2Ek}{\left(\sqrt{E^2 - 1} + \theta E\right)^2 - E^2 + 1}. \quad (4.54)$$

O gráfico a seguir exhibe a trajetória da partícula, inicialmente em uma posição muito distante do centro espalhador, colapsando na origem.

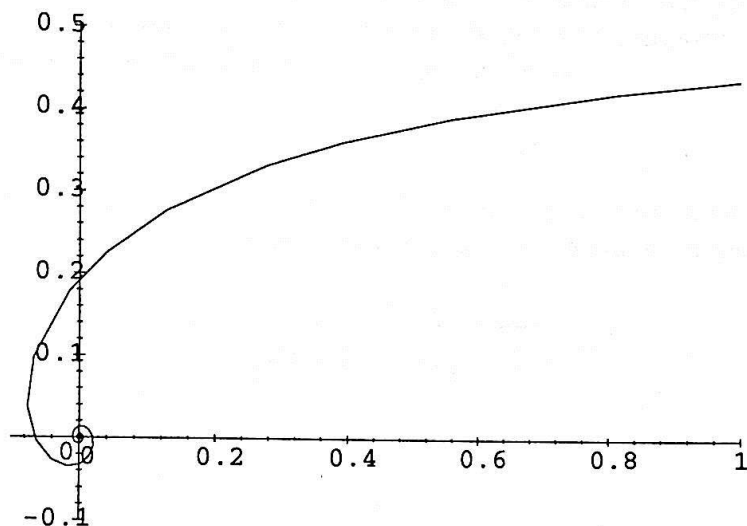


Fig.18- Trajetória da partícula no plano (x,y) no caso $|k| = |p_\theta|$, para $k = -1$ e $E = 2$.

1b) Energia negativa O comportamento de captura da partícula, na vizinhança da origem é melhor visualizado na figura a seguir, onde a escala foi considerada para valores próximos da origem

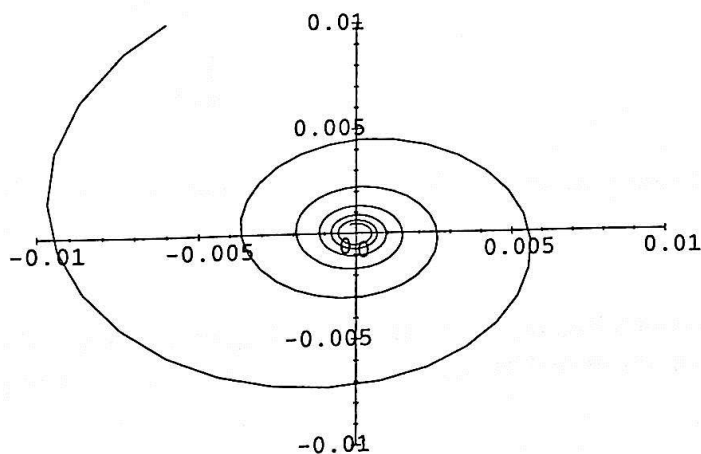


Fig.19- Ampliação da figura 18, mostrando o comportamento da trajetória em torno da origem.

Para valores da energia no intervalo $[0, 1]$, os valores de h pertencem ao intervalo $[-1, 0]$; tendo em vista a equação (4.29), a raiz impõem aos valores da posição valores restritos que satisfaçam a seguinte desigualdade

$$0 < r \leq \frac{2Ek}{h} . \quad (4.55)$$

Neste caso a equação da trajetória adquire um aspecto um pouco diferente da equação (4.54), levando em consideração que h assume valores negativos

$$r = \frac{-2Ek}{(\sqrt{1-E^2} + \theta E)^2 + 1 - E^2} .$$

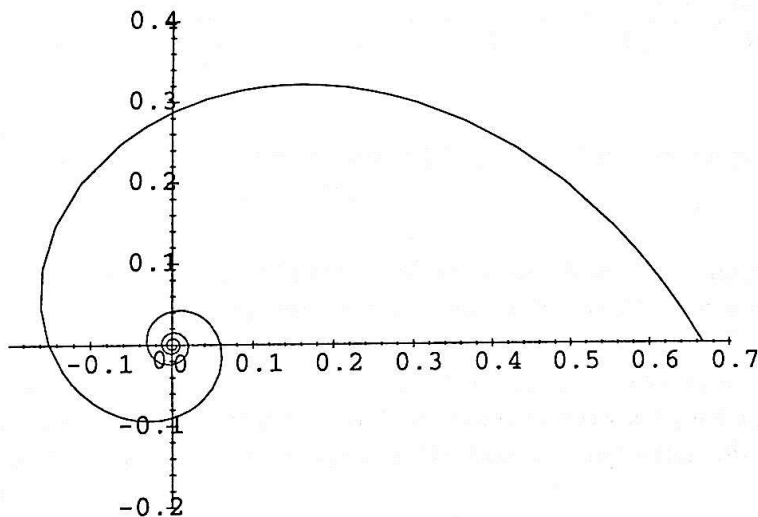


Fig.20- Trajetória da partícula relativística no plano (x,y) , para valores de $E \leq 1$ e $h < 0$ com $k = -1$, $E = 0.5$.

1b) Energia negativa Neste caso o potencial efetivo (equação 4.52), é negativo como pode ser visualizado geometricamente na figura a seguir

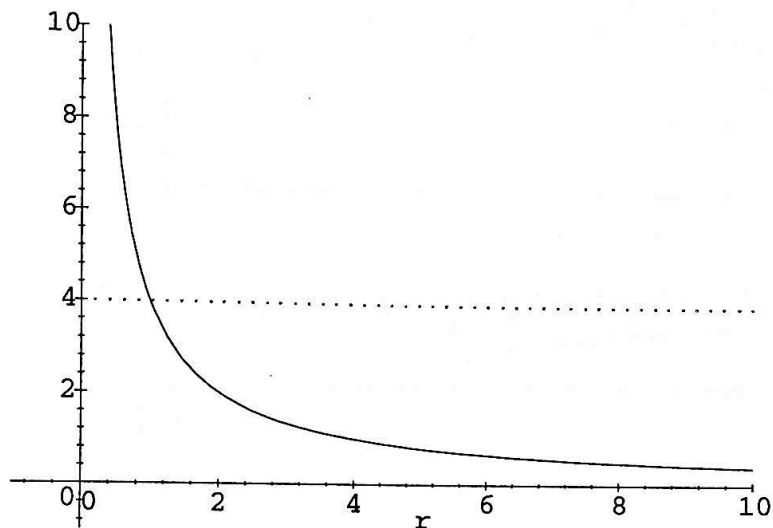


Fig.21-Gráfico do potencial efetivo $V^{ef}(r)$ para $E < 0$, onde os valores utilizados são $k = -1$ e $E = -2$.

O gráfico deste potencial permite observar que $h > 0$, e ao mesmo tempo a energia total do sistema tem que assumir valores negativos; sendo assim, tendo em vista o gráfico da figura 10, a energia total do sistema assume valores no intervalo $(-\infty, -1)$. O comportamento da partícula é semelhante ao primeiro caso, do potencial repulsivo, como mostra a figura 11. Portanto, mantém-se a mesma trajetória (4.34), pois o comportamento físico é o mesmo.

Segundo caso: $|k| < |p_\theta|$

Fazendo $k^2 - p_\theta^2 = -\beta^2$, o potencial efetivo (4.24) é escrito da seguinte forma

$$V^{ef} = \frac{\beta^2}{r^2} + \frac{2Ek}{r}. \quad (4.56)$$

A forma do potencial efetivo definido em (4.56), depende do sinal da energia total do sistema. Isto sugere uma divisão no estudo das trajetórias, considerando energias positivas e negativas

2a) Energia positiva O gráfico do potencial efetivo é mostrado na figura seguinte

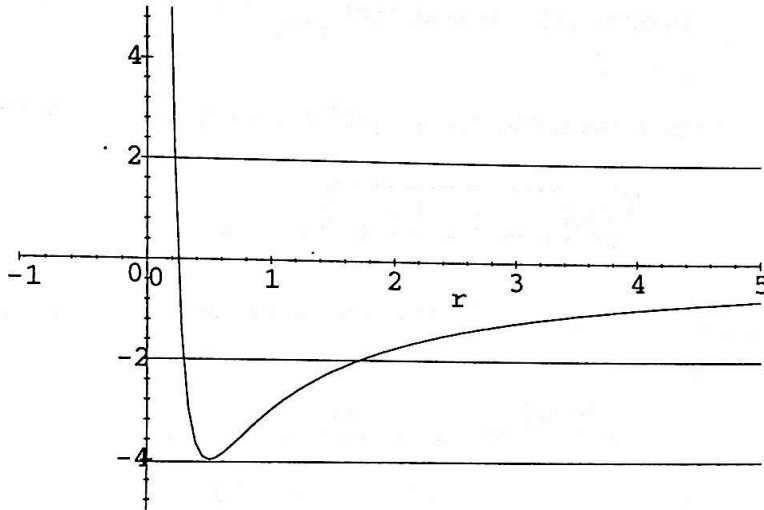


Fig.22-Gráfico do potencial efetivo $V^{ef}(r)$ para $|k| < |p_\theta|$, onde os valores utilizados são $k = -1$, $p_\theta = \sqrt{2}$ e $E = 2$.

Os pontos de retorno para este potencial efetivo, é obtido igualando $V^{ef}(r) = h$ na equação (4.56), sendo que h é a nova energia já definida anteriormente

$$r = \frac{-|\alpha| \pm \sqrt{\alpha^2 + 4h\beta^2}}{2h} \quad (4.57)$$

Tendo em vista a equação (4.57) e o gráfico do potencial efetivo na figura (22), obtêm-se os valores para os pontos de retorno, de acordo com os valores assumidos por h :

$$h \geq 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4h\beta^2} - |\alpha|}{2h} \quad (\text{um ponto de retorno}), \quad (4.58)$$

$$h < 0 \Rightarrow r = \frac{|\alpha| \pm \sqrt{\alpha^2 - 4|h|\beta^2}}{2|h|} \quad (\text{dois pontos de retorno}), \quad (4.59)$$

$$h = -\frac{\alpha^2}{4\beta^2} \Rightarrow r = \frac{|\alpha|}{2|h|} \text{ (distância radial constante)}. \quad (4.60)$$

A equação da trajetória (4.29) pode ser escrita como segue

$$\frac{du}{d\theta} = \pm \frac{1}{p_\theta} \sqrt{h + \frac{\alpha^2}{4\beta^2} - \left(\beta u - \frac{|\alpha|}{2\beta}\right)^2}. \quad (4.61)$$

Separando as variáveis na equação (4.61), fazendo $\eta^2 = h + \frac{\alpha^2}{4\beta^2}$, tem-se

$$\int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{1 - \left(\frac{|\beta|u'}{|\eta|} - \frac{|\alpha|}{2|\beta\eta|}\right)^2}} = \frac{|\eta|}{p_\theta} \int_0^\theta d\theta'. \quad (4.62)$$

Fazendo a seguinte mudança na primeira integral

$$\frac{|\beta|u'}{|\eta|} - \frac{|\alpha|}{2|\beta\eta|} = \sin \psi. \quad (4.63)$$

A equação da trajetória é dado por

$$r = \frac{\frac{2\beta^2}{|\alpha|}}{1 + \frac{2|\beta\eta|}{|\alpha|} \sin\left(\psi_0 + \frac{|\beta|}{p_\theta}\theta\right)}. \quad (4.64)$$

Neste caso, tendo em vista (4.64), demonstra-se e classifica-se a trajetória como segue

$$h > 0 \Rightarrow \frac{2|\beta\eta|}{|\alpha|} > 1 \text{ hipérbole relativística}. \quad (4.65)$$

Esta hipérbole é mostrada na figura a seguir.

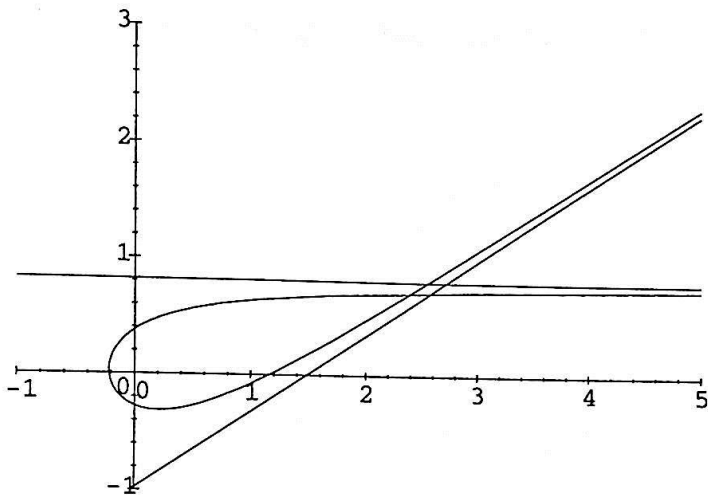


Fig.23-Trajétória da partícula relativística no plano (x,y) , no caso $|k| < |p_\theta|$, para $h > 0$ com valores de $k = -1$, $|p_\theta| = \sqrt{2}$ e $E = 2$.

O número de voltas vai depender do valor do momento canônico angular, como é observado na figura a seguir

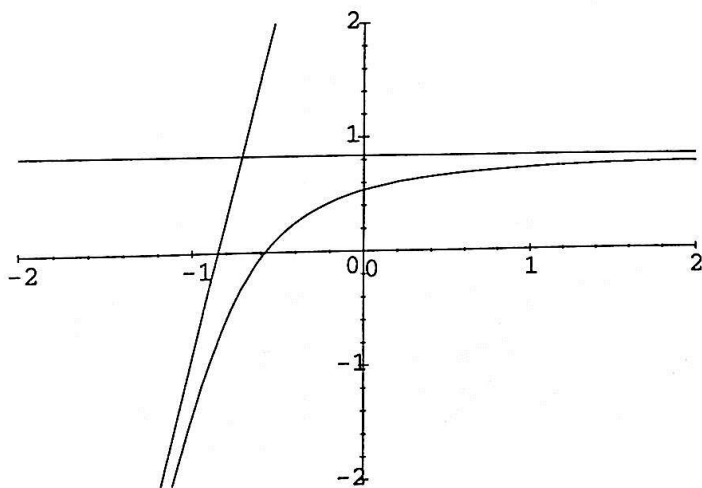


Fig.24-Trajétória da partícula relativística no caso similar à figura 23, porém com momento canônico angular maior. Os valores utilizados são, $E = 2$, $k = -1$ e $|p_\theta| = \sqrt{5}$.

$$h = 0 \text{ parábola relativística} \quad (4.66)$$

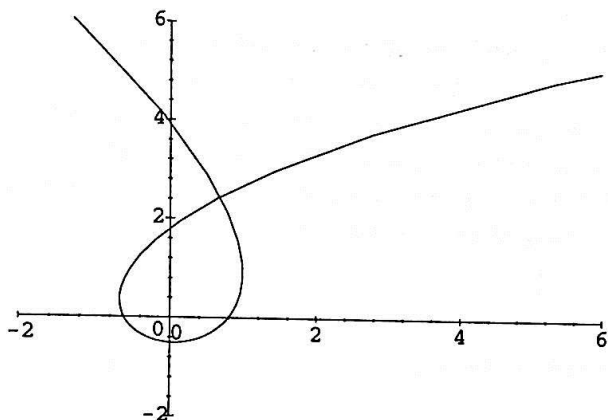


Fig.25-Trajatória da partícula relativística no plano (x,y) , no caso $|k| < |p_\theta|$, para $h = 0$ com valores de $k = -1$, $|p_\theta| = \sqrt{2}$ e $E = 1$.

$$h < 0 \Rightarrow \frac{2|\beta\eta|}{|\alpha|} < 1 \text{ elipse} \quad (4.67)$$

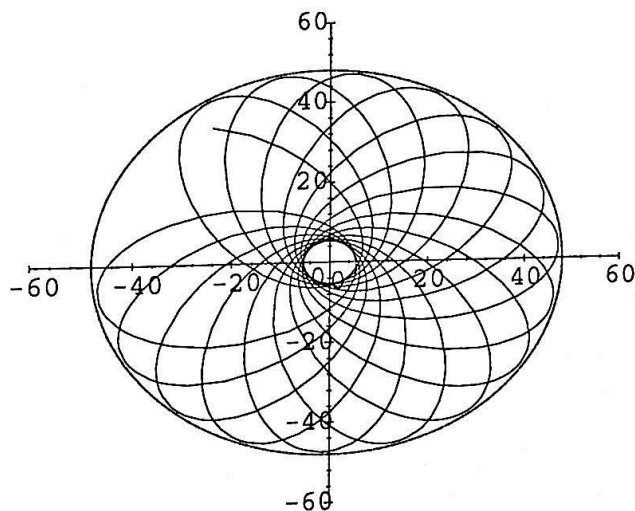


Fig.26-Trajatória da partícula relativística no plano (x,y) , no caso $|k| < |p_\theta|$ e $h < 0$, com valores: $E = 0.95$, $k = -1$ e $|p_\theta| = \sqrt{10}$.

$$h = -\frac{\alpha^2}{4\beta^2} \text{ circunferência} \quad (4.68)$$

2b) Energia negativa O potencial efetivo, neste caso, coincide com a equação (4.36) no caso repulsivo e o gráfico é semelhante ao da figura 13. Apesar da energia agora assumir valores negativos e potencial kepleriano ser do tipo atrativo, valem as mesmas análises feita no caso repulsivo, sendo que a trajetória do movimento da partícula em questão, é o mesmo representado na figura 14, ou seja a partícula é espalhada pelo centro de força.

Terceiro caso: $|k| > |p_\theta|$

A expressão matemática do potencial efetivo, nestas condições, é

$$V^{ef} = \frac{-\beta^2}{r^2} + \frac{2Ek}{r} \quad (4.69)$$

onde k assume valores negativos; novamente deve-se considerar os valores da energia para se saber qual é a forma do potencial.

3a) Energia negativa Neste caso, a forma do potencial efetivo (4.69) é exibida no gráfico a seguir:

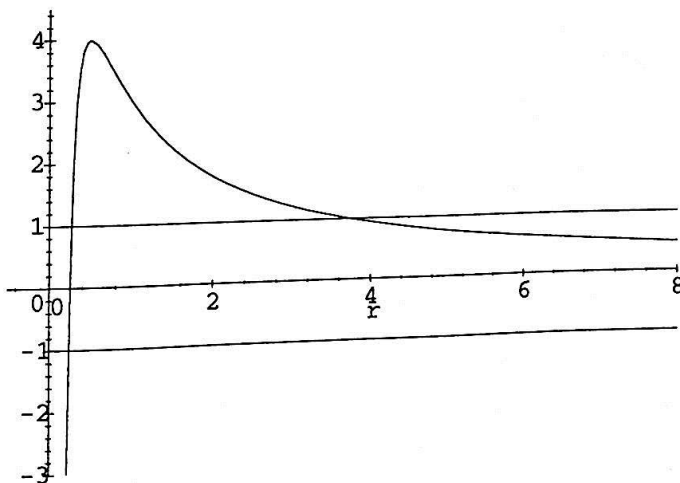


Fig.27-Gráfico do potencial efetivo $V^{ef}(r)$ para $|k| > |p_\theta|$, onde os valores utilizados são: $k = -\sqrt{2}$, $p_\theta = 1$ e $E = -\sqrt{2}$.

Tendo em vista a tabela (4.30), observa-se que $\alpha > 0$ e a partícula está confinada numa região em que $r < \frac{|k|}{1-E}$. O ponto de retorno é calculado quando o potencial se iguala a energia h na equação (4.69), obtendo-se o seguinte resultado

$$r = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4h\beta^2}}{2h} . \quad (4.70)$$

Neste caso adota-se $u > \frac{|\alpha|}{2\beta^2}$, ou seja, a partícula esta confinada na região $0 < r < \frac{2\beta^2}{|\alpha|}$, satisfazendo as condições da tabela citada. A equação da trajetória é obtida pela equação (4.48), adotando os limites de integração como mostra a equação

$$\int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{\left(\frac{|\alpha|}{2|\beta\eta|} - \frac{|\beta|u'}{|\eta|}\right)^2 - 1}} = \frac{|\eta|}{p_\theta} \int_0^\theta d\theta' . \quad (4.71)$$

A mudança de variável, neste caso é feita da seguinte maneira

$$\frac{|\beta|u'}{|\eta|} - \frac{|\alpha|}{2|\beta\eta|} = \cosh \psi . \quad (4.72)$$

Supondo que o movimento tem início no ponto dentro do intervalo permitido, a equação da trajetória é dado por

$$r = \frac{\frac{2\beta^2}{|\alpha|}}{1 + \frac{2|\beta\eta|}{|\alpha|} \cosh \left[\operatorname{arccosh} \left(\frac{|\beta|u_0}{|\eta|} - \frac{|\alpha|}{2|\beta\eta|} \right) - \frac{|\beta|}{p_\theta} \theta \right]} . \quad (4.73)$$

A figura da trajetória é dada a seguir.



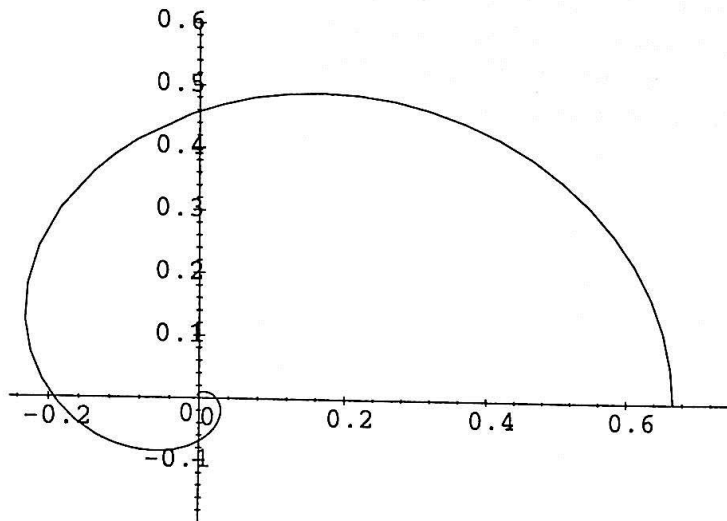


Fig.28- Trajetória da partícula relativística no plano (x,y) , no caso $|k| > |p_\theta|$, com valores: $k = -1$, $p_\theta = \sqrt{2}$ e $E = -\frac{1}{2}$.

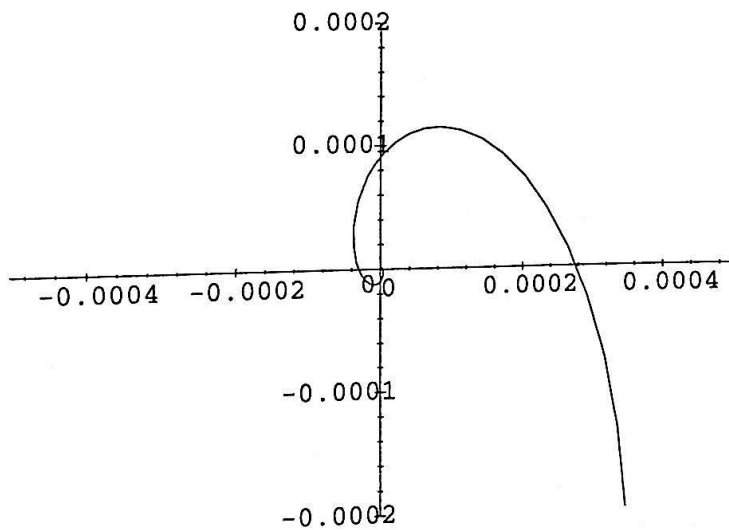


Fig.29- Ampliação da figura (28) para observar o comportamento da partícula, próximo à origem.

3b) Energia positiva Quando a energia total do sistema assume valores positivos, os dois termos do potencial efetivo (4.69) tornam-se ambos negativos, de maneira que o gráfico deste é semelhante, na sua forma, ao gráfico da figura 17. A análise aqui, procede-se da mesma maneira como foi feito no primeiro caso, com energia negativa.

Capítulo 5

Conclusão

O tratamento teórico dado à captura de uma partícula não relativística por um potencial do tipo dipolo, é usado para analisar dados experimentais recentes obtidos com um gás de átomos frios em uma armadilha magneto-óptica. A análise confirma que o colapso do gás quando um fio carregado é aproximado da armadilha é explicado pela captura dos átomos. Este tipo de potencial que só era explorado em livros textos, como exemplos ou exercícios propostos, agora está comprovado no âmbito da física experimental. Confirmou-se também os três aspectos do potencial centrífugo efetivo, que pode assumir o caráter repulsivo, atrativo ou nulo.

Um estudo teórico detalhado do movimento de uma partícula relativística sujeita a um potencial de Kepler foi feito, mostrando-se vários casos de captura e de espalhamento, de acordo com o aspecto atrativo ou repulsivo do potencial e dos valores do momento angular canônico e da energia total do sistema. O efeito relativístico sobre trajetórias ligadas estáveis foi também estudado, demonstrando-se analiticamente e ilustrando-se com figuras a precessão da trajetória plana (avanço do periélio da elipse relativística).

Capítulo 6

Apêndices

6.1 Integração

Equação a integrar

$$\dot{x} = -\frac{\sqrt{\left(A + \frac{k}{x}\right)^2 - 1}}{\frac{k}{x} + A} \quad (6.1)$$

obs: A energia total do sistema (E) pode ser negativa, positiva ou nula.

$$(Ax + k) \dot{x} = -\sqrt{(Ax + k)^2 - x^2}$$

$$(Ax + k) \dot{x} = -\sqrt{k^2 - [(1 - A^2)x^2 - 2kAx]}$$

Completando o quadrado perfeito, no colchete, dentro da raiz no segundo membro, fazendo $1 - E^2 = a^2$

$$(Ax + k) \dot{x} = -\sqrt{k^2 - \left[a^2 x^2 - \frac{2aAxk}{a} + \frac{k^2 A^2}{a^2} - \frac{k^2 A^2}{a^2} \right]}$$

segue

$$(Ax + k) \dot{x} = -\sqrt{k^2 + \frac{k^2 A^2}{a^2} - \left(|a|x - \frac{kA}{|a|} \right)^2}$$

Voltando com o valor de a^2 na raiz, a igualdade se simplifica da seguinte maneira

$$(Ax + k) \dot{x} = -\sqrt{\frac{k^2}{a^2} - \left(|a|x - \frac{kA}{|a|}\right)^2} = -\left|\frac{k}{a}\right| \sqrt{1 - \left(\frac{a^2x}{k} - A\right)^2}$$

Separando as variáveis e integrando nos limites de integração explicitados a seguir

$$\int_{r_0}^r \frac{(Ax' + k) dx'}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^2x'}{k} - A\right)^2}} = -\left|\frac{k}{a}\right| \int_0^t dt' \quad (6.2)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável na primeira integral

$$\frac{a^2x'}{k} - A = y \quad (6.3)$$

$$dx' = \frac{k}{a^2} dy \quad (6.4)$$

Por outro lado, isolando x' em 6.3, tem-se

$$x' = \frac{k(y + A)}{a^2} \quad (6.5)$$

Sendo assim

$$Ax' + k = \frac{Ak}{a^2}(y + A) + k$$

Que pode ser simplificado para

$$Ax' + k = \frac{k}{a^2}(Ay + 1) \quad (6.6)$$

Substituindo 6.3 e 6.6 em 6.2, tem-se a seguinte equação

$$\frac{k^2}{a^4} \int_1^y \frac{(Ay' + 1) dy'}{\sqrt{1 - y'^2}} = -\left|\frac{k}{a}\right| t \quad (6.7)$$

Segue que

$$A \int_1^y \frac{y' dy'}{\sqrt{1 - y'^2}} + \int_1^y \frac{dy'}{\sqrt{1 - y'^2}} = -\frac{|a|^3}{k} t$$

Simplificando

$$-A \int_1^y \frac{d}{dy'} \sqrt{1-y'^2} + \int_1^y \frac{dy'}{\sqrt{1-y'^2}} = -\frac{|a|^3}{k} t$$

Integrando e levando em consideração o valor de a , anteriormente definido

$$-A\sqrt{1-y^2} + \arcsin y - \frac{\pi}{2} = -\frac{|1-A^2|^3}{|k|} t \quad (6.8)$$

Substituindo (6.3) em (6.8), tem-se

$$-A\sqrt{1 - \left[\frac{(1-A^2)}{k} x - A \right]^2} + \arcsin \left[\frac{(1-A^2)}{k} x - A \right] - \frac{\pi}{2} = -\frac{|1-A^2|^3}{k} t \quad (6.9)$$

que é a equação radial do movimento, dada implicitamente em função do tempo.

6.2 Cálculo do coeficiente de decaimento

Neste apêndice o cálculo do coeficiente de decaimento, D , definido pela integral

$$D = \int d^3v f(\vec{r}, \vec{v}) dz \sigma_{abs} v$$

é discutido[5]. Substituindo a função distribuição definida na segunda seção do terceiro capítulo e adotando coordenadas cilíndricas no espaço das velocidades, temos

$$D = \frac{1}{\pi \sigma_x \sigma_y \sigma_v^2} \int dv v^2 e^{-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}} \sqrt{R_f^2 + \frac{2|k|}{mv^2}}$$

Para estimar o valor de D , calcula-se a integral

$$I = \int_0^\infty dv v^2 e^{-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}} \sqrt{R_f^2 + \frac{2|k|}{mv^2}}$$

É conveniente, neste caso, arranjar a integral da seguinte maneira

$$I = \int_0^\infty dv e^{-\left(\frac{v^2}{2\sigma_v^2} - \ln v\right)} \sqrt{R_f^2 v^2 + \frac{2|k|}{m}}$$

Define-se o expoente da função exponencial na integral acima da seguinte maneira

$$f(v) = \frac{v^2}{2\sigma_v^2} - \ln v$$

demonstra-se que esta função tem um valor mínimo para $v = \sigma_v$. Isto também é observado no gráfico a seguir

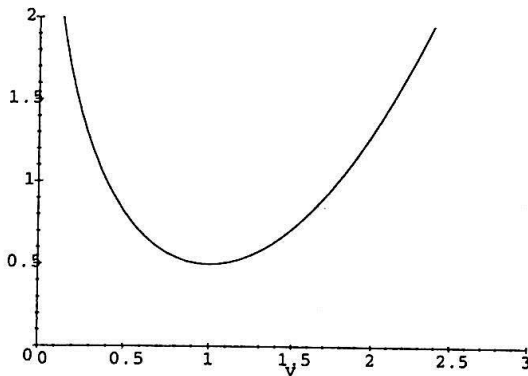


fig.30-Representação gráfica de $f(v)$, no espaço $(v, f(v))$, adotando $\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

O método utilizado faz uso de um mapeamento definido por uma função, cuja a expressão analítica é dada como

$$f[v(t)] = \frac{1}{2} - \ln \sigma_v + t^2$$

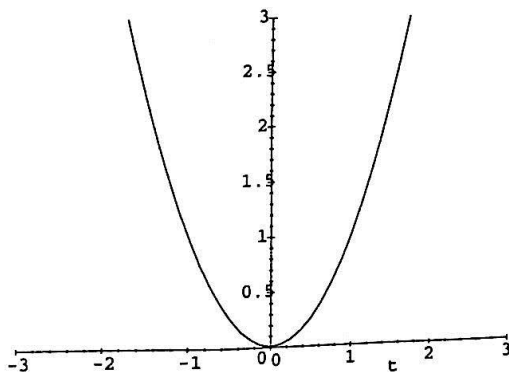


fig.31-parábola de mapeamento no espaço $(t, f[v(t)])$.

A integral é modificada da seguinte forma

$$I = \int_0^{\infty} dt F(t) \sqrt{R_f^2 v^2 + \frac{2|k|}{m}}$$

onde a nova função no integrando, foi definido da seguinte maneira

$$F(t) = \frac{dv}{dt} e^{-\left(\frac{v^2}{2\sigma_v^2} - \ln v\right)}$$

O valor de $\frac{dv}{dt}$ é calculado, tendo em vista a expressão analítica de $f(v)$, da seguinte forma

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{2}{f''(v)}} = \frac{\sqrt{2}v\sigma_v}{\sqrt{v^2 + \sigma_v^2}}$$

A aproximação utilizada para o cálculo da integral I , se faz expandindo $F(t)$ em torno de $t = 0$, adotando-se aqui, para dar uma idéia deste método, somente a contribuição do primeiro termo $F(0)$. A integral, agora assume o seguinte resultado

$$I = \frac{\pi}{2\sqrt{\pi}e} \sigma_v^3 \sigma_{abs}$$

Finalmente, encontra-se o seguinte resultado para o valor de D , de acordo com a aproximação adotada acima

$$D = \frac{\sigma_v^2}{2\sqrt{\pi}e\sigma_x\sigma_y} \sigma_{abs}$$

Bibliografia

- [1] L. Landau and Lifchitz, *Mécanique*, Éditions MIR (1966).
- [2] J. Denschlag, G. Umshaus, and J. Schmiedmayer, Phys. Rev. Lett 81, 737 (1998).
- [3] L. Landau and Lifchitz, *Théorie du Champ*, Éditions MIR (1966).
- [4] M. P. Pato and M. S. Hussein, Mod. Phys. Lett. A, 2509 (1995).
- [5] R. B. Dingle, *Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation*, (Academic Press, 1973)

