

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

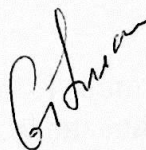
Quantização da partícula relativística espinorial em 2 + 1 dimensões

Rodrigo Fresneda



Dissertação de Mestrado apresentada
ao Instituto de Física da USP para a
obtenção do grau de mestre em ciências.

Orientador: Prof. Dr. Dmitri M. Gitman (IFUSP)

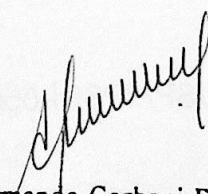


Banca examinadora:

Prof. Dr. Dmitri M. Gitman (IFUSP)

Prof. Dr. Josif Frenkel (IFUSP)

Prfo. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli (UNESP)



São Paulo, Agosto de 2003 **Prof. Armando Corbani Ferraz**
Presidente da Comissão de Pós Graduação

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3896 ex. 1

del. 18/08/03.

530.12

F8869

M

ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Fresneda, Rodrigo

Quantização da Partícula Relativística Espinorial em
2 + 1 Dimensões. São Paulo, SP - 2003

Dissertação (Mestrado) Universidade de São Paulo
Instituto de Física. Departamento de Física Nuclear

Orientador: Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Gitman
Área de Concentração: Física das Partículas
Elementares e Campos

Unitermos: 1. Mecânica Quântica Relativística;
2. Quantização;
3. Teoria de Campos.

USP/IF/SBI-050/2003

Resumo

Neste trabalho é considerado o problema da quantização de um modelo pseudoclássico para uma partícula relativística massiva de spin $1/2$ em $2+1$ dimensões em campos externos eletromagnéticos arbitrários. A quantização apresentada é uma combinação dos esquemas de quantização de Dirac e canônico, uma vez que o modelo contém um vínculo de primeira classe que não pode ser fixado por uma escolha de calibre. A presença deste vínculo no nível quântico leva a uma extensão do número de componentes dos vetores de estado em comparação com a teoria em $3+1$ dimensões. A mecânica construída descreve partículas e antipartículas de energia positiva, em acordo com a teoria quântica de campos.

Abstract

We consider the quantization problem for a pseudoclassical model of a massive spin-1/2 relativistic particle in $2 + 1$ dimensions on the background of an arbitrary electromagnetic field. The presented quantization is a combination of the canonical and Dirac schemes, since the model contains a first-class constraint which does not admit gauge-fixing. The presence of this constraint at the quantum level leads to an extension of the number of state-vector components in comparison with the $3 + 1$ case. The constructed quantum mechanics describes both particles and antiparticles with positive energy levels, in accordance with quantum field theory.

Dedico este trabalho aos meus pais

Glória Maria Merola da Costa Bastos

Paulo Sérgio Vilches Fresneda

Agradecimentos

Ao meu orientador professor Dr. Dmitri M. Gitman, ao professor Dr. Serguei P. Gavrilov e ao Dr. Pavel Iu. Moshin pela colaboração e ajuda.

Ao João Luís Meloni Assirati por todas as nossas motivantes e inspiradoras discussões em todos estes anos no IFUSP, mas principalmente por sua amizade.

Aos meus amigos Alexandre Learth Soares, Arnaldo G. de Oliveira Filho, Bruno Learth Soares, Luís Henrique Cassis Fagundes, Mário César Baldiotti, Masayuki Hase e Rodrigo Bernardo Pimentel.

À Suiane Inês da Costa Fernandes por seu amor incondicional.

À Fapesp pelo suporte financeiro.

Sumário

1	Introdução	1
2	Teorias clássicas na álgebra de Berezin	4
2.1	Hamiltonização	8
2.1.1	Teorias não-degeneradas	8
2.1.2	Teorias degeneradas	11
2.1.2.1	Caso singular	13
3	Descrição Clássica	15
3.1	Formulações Lagrangiana e Hamiltoniana	15
3.2	Reorganização de vínculos e fixação de calibres	17
3.3	Dinâmica no espaço de fase reduzido	23
3.4	Álgebra de variáveis no espaço de fase reduzido	25
4	Quantização canônica	27
4.1	Quantização das variáveis dinâmicas clássicas	27
4.2	Hamiltoniano, vínculo de primeira classe e variáveis de spin	28
4.3	Equação de Schrödinger	31
4.4	Setor físico	34
4.5	Limite semiclássico	36
5	Comparação com a Teoria de Campo	40
5.1	Formulação lagrangiana	40
5.2	Hamiltonização	43
5.3	Propriedades gerais do espectro da hamiltoniana de Dirac para o caso estacionário	45
5.4	Quantização	46
5.5	Setor de uma partícula e identificação com MQ	47

6	Operador de Spin	50
7	Conclusão	53
A	Matrizes de Dirac em $2 + 1$ dimensões	54
B	Identidade de Noether para o campo espinorial em $2 + 1$ dimensões com campo eletromagnético de fundo	56

Introdução

Capítulo 1

Introdução

O interesse renovado no estudo (construção e quantização) de modelos clássicos e pseudoclássicos de partículas relativísticas (PR) pode ser explicado por numerosas razões. Uma delas é o bem conhecido fato de que modelos de PR podem ser considerados como protótipos de cordas, exemplos teóricos simples que fornecem *insight* aos problemas típicos de quantização de cordas. Como os modelos de PR são normalmente concebidos numa forma invariante por reparametrização, apresentam todas as dificuldades características à quantização de sistemas com este tipo de invariância, em particular, o fenômeno de hamiltoniana nula e o problema da definição de evolução temporal, que são cruciais, e.g., à quantização de teorias invariantes por reparametrização tão importantes quanto a relatividade geral. Uma outra motivação ao estudo de PR é o desejo de atingir um melhor entendimento dos princípios básicos da quantização, e desenvolver uma descrição clássica e quântica consistentes de diferentes tipos de PR, possuindo diversos spins e massas, e se movendo em espaços-tempo e campos externos arbitrários.

Ao se quantizar um modelo clássico de PR, pretende-se construir uma mecânica quântica (MQ) que, em certo sentido, baseia-se na equação de ondas relativística correspondente. Neste sentido, há a opinião corrente de que a construção de qualquer MQ relativística encontra uma série de dificuldades (e.g., um conjunto infinito de níveis de energia negativos, normas negativas de vetores) que só podem ser resolvidos com a segunda quantização: veja, e.g., [1, 2]. Mas há diferentes modos de encarar o problema da quantização da PR. A mais simples, e também a mais difundida, é a visão segundo a qual se deve aplicar algum esquema conveniente de quantização ao modelo em análise que permita a obtenção das equações de onda relativísticas correspondentes, sem procurar demonstrar que uma MQ consistente foi construída (devido à opinião acima mencionada de que esta tarefa é impossível). Neste trabalho, contudo, propõe-se que no curso da primeira quantização do modelo de PR deve-se tentar construir uma MQ relativística com o mesmo grau de consistência que o setor de uma partícula da teoria quântica de campos (TQC) correspondente. Entre os esquemas

de quantização consistente desta natureza, pode-se mencionar a quantização canônica de teorias de calibre, nas quais o setor físico é selecionado já no nível clássico por meio da fixação dos calibres, e o espaço de estados construído é analisado em detalhe.

No artigo [3], os autores têm sucesso em demonstrar, utilizando o modelo pseudoclássico mais simples da partícula espinorial em $3+1$ dimensões [4], que a aplicação consistente da teoria quântica, combinada com a análise dos vínculos e do setor físico, torna possível a obtenção de uma MQ relativística consistente, equivalente ao setor de uma partícula da TQC. Deve-se notar que o esquema de quantização [3] leva em conta campos eletromagnéticos e gravitacionais de fundo arbitrários. Esta tarefa encontra uma série de problemas não-triviais incluindo a complicada análise dos vínculos, bem como os problemas relacionados à realização dos operadores e a seu ordenamento. A solução para estes problemas foi encontrada no contexto de uma modificação do esquema de quantização originariamente proposto em [5, 6]. Um dos principais pontos desta modificação está relacionada a uma nova realização do espaço de Hilbert. Esta realização permite não só que se leve em conta campos externos arbitrários, mas também que se resolva o problema completamente, isto é, que se obtenha como resultado da quantização uma MQ relativística consistente, que reproduza o comportamento exato do setor de uma partícula da TQC (em campos externos que não criem partículas do vácuo). Em particular, o setor físico do espaço de Hilbert reproduz o espectro positivo completo de energia de partículas e antipartículas, com somente normas positivas para os estados correspondentes .

É importante notar que o modelo [4] de uma partícula espinorial em $3+1$ dimensões é o mais simples. Boa parte dos outros modelos pseudoclássicos construídos são mais complicados. Por exemplo, em alguns modelos há o aparecimento de vínculos bifermiônicos que não podem ser fixados no nível clássico, e portanto está longe de ser óbvio como aplicar o esquema de quantização [3] a estes modelos. Com o intuito de estudar um modelo que apresente a peculiaridade acima, e de construir uma MQ relativística em conformidade com a TQC, escolheu-se o modelo pseudoclássico [7] de uma partícula massiva de spin- $1/2$ em $2+1$ dimensões, em campos de fundo eletromagnéticos arbitrários.

O modelo [7] possui uma estrutura mais complexa que a do modelo de Berezin-Marinov [4], devido a particularidades inerentes à teoria em $2+1$ dimensões. Em particular, pode-se mencionar a peculiaridade do comportamento de partículas espinoriais em $2+1$ dimensões. É fato bem conhecido que diferentes projeções de spin de uma partícula espinorial (massiva) em $2+1$ dimensões pertencem a diferentes representações irredutíveis e portanto descrevem diferentes partículas. Ao mesmo tempo, existe uma correspondência entre spin e carga, qual seja, todas as transformações discretas ou não alteram os sinais da projeção de spin e carga, ou alteram ambos sinais simultaneamente. À parte um interesse puramente teórico em completar a teoria de partículas relativísticas, há uma relação direta com a teoria de campos em $2+1$ dimensões [8, 9], que tem atraído bastante atenção por a vários motivos: devido à existência de propriedades topológicas não-triviais e, es-

pecialmente, devido à possibilidade de existência de partículas com spins fracionários e estatística exótica (anyons), que talvez tenham aplicação ao efeito Hall fracionário, supercondutividade a altas temperaturas, etc, [8]. Também é notável que em $2 + 1$ dimensões se possa construir a teoria de calibre topologicamente massiva para partículas de spin-1, em que a massa surge graças ao chamado termo de Chern-Simons [9].

Tendo em vista o que foi dito acima, espera-se a construção de uma MQ relativística para uma partícula espinorial em $2 + 1$ dimensões esteja justificada. Este problema é resolvido neste trabalho. Ao fazê-lo, dois objetivos foram atingidos. De um lado, mostra-se que o esquema de quantização [3] é aplicável a um modelo com uma estrutura clássica um pouco mais complexa. De outro lado, pode-se esperar que a estrutura obtida da MQ para uma partícula em $2 + 1$ dimensões possa eventualmente ser utilizada na solução de problemas da física planar.

Com respeito a escolha do modelo, deve-se notar que um certo número de modelos alternativos foram propostos para a descrição da partícula espinorial em $2 + 1$ dimensões (veja, e.g., [7, 10]). Em $2 + 1$ dimensões a redução dimensional da ação de Berezin-Marinov (ação padrão) não reproduz a teoria quântica mínima das partículas espinoriais, que deve fornecer somente um valor para a projeção de spin ($1/2$ ou $-1/2$). Nos artigos [10], duas modificações da ação padrão foram propostas para obter a teoria mínima. Entretanto, a primeira ação em [10] é, de fato, classicamente equivalente à ação padrão em $2 + 1$ dimensões, e não possui as propriedades quânticas requeridas durante a quantização canônica e por integral de trajetória. Ademais, é invariante por transformações de paridade e inversão temporal. O outro modelo em [10] não é supersimétrico, e portanto perde o traço mais importante desses modelos, i.e, aquele que permite que se os considerem protótipos de supercordas, ou alguns modelos em teoria de supercordas. No artigo [7], os autores propõem uma ação invariante por três tipos de simetrias de calibre: uma de reparametrização e duas outras de supertransformação. O modelo não é invariante por P e T , de acordo com as propriedades esperadas da teoria mínima em $2 + 1$ dimensões.

No presente trabalho, mostra-se que a quantização do modelo [7], seguindo as linhas gerais de [3], reproduz uma MQ relativística consistente em conformidade com o setor de uma partícula da TQC, que, neste caso, é a teoria quântica do campo espinorial em $2 + 1$ dimensões.

Capítulo 2

Teorias clássicas na álgebra de Berezin

A Mecânica Clássica fornece um excelente ponto de partida para a construção da MQ de um sistema físico particular. Em geral, é uma tarefa quase impossível obter a teoria quântica imediatamente, logo é extremamente útil considerar um análogo mais simples e bastante rico que é a teoria clássica [11]. Em geral, não se sabe qual é a Mecânica Clássica de um sistema físico particular. Um exemplo ilustrativo é a teoria de spin. Não existe análogo clássico para esta grandeza [12], cuja origem reside na teoria da representação do grupo de Poincaré. Logo, sua natureza é quântica e relativística. Assim, como se deve obter a MQ de um sistema com spin se não há um exemplo clássico para tanto? Uma resposta para esta pergunta foi formulada em termos de uma descrição clássica mais geral [4, 13], que incorpora ao mesmo tempo grandezas bosônicas e fermiônicas, numa estrutura matemática conhecida como álgebra de Berezin. Esses modelos 'clássicos' de partículas relativísticas com spin, que podem ser dados em termos de uma lagrangiana supersimétrica, foram apelidados pseudoclássicos [14].

Como o objetivo deste trabalho é empreender a quantização canônica de um modelo pseudoclássico, será necessário utilizar os métodos gerais de hamiltonização adaptados a teorias na álgebra de Berezin. O procedimento de hamiltonização convencional para teorias clássicas na álgebra de Berezin já é bem conhecido (ver [15]). No que segue, será feita uma breve exposição da generalização desse procedimento às teorias degeneradas [16], levando em conta a presença de variáveis grassmannianas.

De acordo com o procedimento convencional de hamiltonização de teorias lagrangianas $L(x, \dot{x})$, a condição de que todos os momentos p_x sejam exprimíveis em termos de x e \dot{x} é a não-singularidade

da matrix hessiana

$$M = \det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \neq 0. \quad (2.1)$$

Este procedimento é desenvolvido em [15]. Suponha que para alguma função de Lagrange consistente $L(x, \dot{x})$ exista uma coordenada x^* tal que a velocidade \dot{x}^* não esteja presente na lagrangiana. Então, tem-se imediatamente, segundo o método convencional, um vínculo primário p_{x^*} . A lagrangiana já estava na forma hamiltoniana em relação à coordenada x^* , uma vez que ela não incluía a velocidade \dot{x}^* . Parece então razoável não introduzir o momento conjugado p_{x^*} e modificar o procedimento. Este procedimento modificado é o procedimento generalizado de Hamiltonização, apresentado em [16]. O método generalizado trata a coordenada x^* como uma velocidade, e a condição generalizada de não-singularidade da teoria se torna

$$\tilde{M} = \det \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} \end{array} \right) \neq 0, \quad (2.2)$$

em que x^{i*} representam todas as coordenadas degeneradas, isto é, aquelas coordenadas para as quais a lagrangiana não contém as velocidades correspondentes. O hessiano generalizado \tilde{M} somente contém derivadas com respeito àquelas velocidades que estão presentes na lagrangiana. Em particular, na ausência de coordenadas degeneradas, o hessiano generalizado se reduz ao hessiano usual (2.1).

A principal questão com que se deve preocupar na extensão do método para teorias degeneradas (que contém variáveis degeneradas) na presença de variáveis de Grassmann, ou de maneira mais geral, para teorias degeneradas na álgebra de Berezin, é a de como escolher consistentemente as variações e derivações, i.e., se as derivadas e variações são tomadas à direita ou à esquerda, e como estas escolhas devem resolver o problema da ambiguidade no ordenamento de variáveis na hamiltoniana, como será visto adiante.

Primeiramente, seguem algumas definições.

Uma álgebra de Grassmann Λ_n é uma álgebra associativa sobre \mathbb{C} com unidade e n geradores ξ^i , i.e., um elemento qualquer $f \in \Lambda_n$ pode ser escrito como um polinômio em ξ^i :

$$f = \sum_{k=0}^n \sum_{i_1 \dots i_k} f_{i_1 \dots i_k} \xi^{i_1} \dots \xi^{i_k}, \quad (2.3)$$

onde $f_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{C}$ são supostos antisimétricos nos subíndices. Os geradores ξ^i satisfazem a propriedade

$$\xi^i \xi^j + \xi^j \xi^i = 0, \quad (\xi^i)^2 = 0.$$

Enquanto espaço vetorial, Λ_n é \mathbb{Z}_2 -graduado, i.e., é uma soma direta ${}^0\Lambda_n \oplus {}^1\Lambda_n$ que obedece ao homorfismo $\varepsilon : \Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ definido por $\varepsilon(fg) = \varepsilon(f) + \varepsilon(g) \pmod{2}$; $\varepsilon(f) = 0$ se e somente

se todos os termos da expansão (2.3) de f possuem um número par de geradores; e $\varepsilon(f) = 0$ se e só se a expansão de f só possui termos com número ímpar de geradores. Ademais, se $\varepsilon(f) = 0$, então $f \in {}^0\Lambda_n$ e diz-se que f é par; e se $\varepsilon(f) = 1$, então $f \in {}^1\Lambda_n$ e diz-se que f é ímpar.

Seja U um aberto do \mathbb{R}^m e seja Λ_n uma álgebra de Grassmann com geradores η^α , $\alpha = 1, \dots, n$. Defina-se $\Lambda_{m,n}(U)$ uma álgebra de funções definidas em U com valores em Λ_n da forma

$$f(x, \eta) = \sum_{k=0}^n \sum_{i_1 \dots i_k} f_{i_1 \dots i_k}(x) \eta^{i_1} \dots \eta^{i_k}, \quad (2.4)$$

onde $f_{i_1 \dots i_k} : U \rightarrow \mathbb{C}$ são funções infinitamente diferenciáveis.

O espectro de um conjunto de funções $\{f^1, \dots, f^m\} \subset \Lambda_{m,n}(U)$ é definido como o conjunto dos pontos da forma $(f_0^1(x), \dots, f_0^m(x)) \in \mathbb{C}^m$, obtidos à medida que as funções $\{f^1, \dots, f^m\}$ percorrem U , sendo denotado por $\text{Spec}(f^1, \dots, f^m)$.

Um sistema de geradores $\{\theta^i(x, \eta), \xi^j(x, \eta)\} \subset \Lambda_{m,n}(U)$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s$, é uma coleção de elementos homogêneos, $\varepsilon(\theta) = 0$, $\varepsilon(\xi) = 1$, satisfazendo as propriedades:

1. $\text{Spec}(\theta^1, \dots, \theta^r)$ é um aberto em \mathbb{R}^r ;
2. qualquer elemento $f \in \Lambda_{m,n}(U)$ pode ser escrito como

$$f(\theta, \xi) = \sum_{k=0}^s \sum_{i_1 \dots i_k} f_{i_1 \dots i_k}(\theta^1, \dots, \theta^r) \xi^{i_1} \dots \xi^{i_k}, \quad (2.5)$$

onde $f_{i_1 \dots i_k}(\theta)$ são funções infinitamente diferenciáveis definidas no aberto $\text{Spec}(\theta^1, \dots, \theta^r)$.

A álgebra de Berezin B é uma álgebra $\Lambda_{m,n}(U)$ com sistema de geradores $z^a = (\theta^i, \xi^\alpha)$, $z^a = \theta^i$ para $a = i = 1, \dots, m$, $\varepsilon(\theta^i) = 0$; e $z^a = \xi^\alpha$ para $a = m + \alpha$, $\alpha = 1, \dots, n$, $\varepsilon(\xi^\alpha) = 1$. Um elemento qualquer $b(z) \in B$ é escrito como em (2.5). O espaço vetorial B é um espaço \mathbb{Z}_2 -graduado, $B = {}^0B \oplus {}^1B$, onde elementos da subálgebra 0B são pares, e elementos no subespaço 1B são ímpares.

A paridade do índice a do gerador z^a é definida a partir da paridade de z^a , $\varepsilon(a) = \varepsilon(z^a)$. Assim, a relação de comutação geral entre elementos geradores é

$$z^a z^b - (-1)^{\varepsilon(a)\varepsilon(b)} z^b z^a = 0.$$

Numa teoria clássica na álgebra de Berezin, as variáveis dinâmicas são elementos da álgebra, e a evolução temporal dos geradores dão as trajetórias no espaço de fase $z^a(t) \in {}^{\varepsilon(a)}B(\mathbb{R})$.

A ação para uma teoria lagrangiana na álgebra de Berezin com derivadas altas e $n + m$ graus

de liberdade é o seguinte funcional das trajetórias $z^a(t)$

$$S[z^a] = \int L dt, \quad L = L(t, z^{a(l)}), \quad a = 1, \dots, n+m,$$

$$z^{a(l)} = z^{a(l_a)} \equiv \frac{d^{l_a} z^a}{dt^{l_a}}, \quad l_a = 0, 1, \dots, N_a, \quad (2.6)$$

em que L é par, N_a é a ordem da derivada temporal mais alta da coordenada z^a presente na lagrangiana, e $z^{a(l_a)}$ são os geradores da álgebra B . Por conveniência, assume-se que as variáveis dinâmicas z^a estão ordenadas tal que as primeiras m variáveis z^a , z^i para $i = 1, \dots, m$, sejam elementos pares da álgebra de Berezin, $z^i \in {}^0B$; e que as últimas n variáveis z^a sejam elementos ímpares da álgebra de Berezin, $z^\alpha \in {}^1B$ para $\alpha = m+1, \dots, m+n$.

A paridade das variáveis $z^{a(l)}$ para $l > 0$ está associada a das variáveis $z^a (\equiv z^{a(0)})$

$$\varepsilon(z^{a(l)}) = \varepsilon(z^a),$$

e as paridades dos índices são

$$\varepsilon(z^a) = \varepsilon(a).$$

Variação à direita do funcional ação dá

$$\delta_r S = \int \sum_{a=1}^{m+n} \sum_{l=0}^{N_a} \frac{\partial_r L}{\partial z^{a(l)}} \delta z^{a(l)} = \int \sum_{a=1}^{m+n} \sum_{l=0}^{N_a} (-1)^l \frac{d^l}{dt^l} \frac{\partial_r L}{\partial z^{a(l)}} \delta z^a.$$

Logo, as equações de Euler-Lagrange se tornam

$$\frac{\delta_r S}{\delta z^a} = \sum_{l=0}^{N_a} (-1)^l \frac{d^l}{dt^l} \frac{\partial_r L}{\partial z^{a(l)}} = 0, \quad a = m+1, \dots, m+n,$$

$$\frac{\delta_r S}{\delta z^a} = \frac{\delta S}{\delta z^a} = \sum_{l=0}^{N_a} (-1)^l \frac{d^l}{dt^l} \frac{\partial L}{\partial z^{a(l)}} = 0, \quad a = 1, \dots, m. \quad (2.7)$$

A condição da matriz Hessiana (2.1) para teorias não-degeneradas com derivadas de ordens altas na álgebra de Berezin é expressa pela condição de não-degenerescência da supermatriz Hessiana

$$M_{ab} = \frac{\partial_r^2 L}{\partial z^{a(N_a)} \partial z^{b(N_b)}},$$

que já está na forma normal ([15])

$$M_{ab} = \begin{pmatrix} (M_1)_{ij} & (M_2)_{i\beta} \\ (M_3)_{\alpha j} & (M_4)_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon(i) = \varepsilon(j) = 0, \quad \varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\beta) = 1. \quad (2.8)$$

Logo, o Hessiano é o superdeterminante $M = \text{Sdet}M_{ab}$, que é não-nulo se e somente se os termos de ordem zero nas expansões dos blocos pares M_1 e M_4 nos geradores ímpares são não-degenerados:

$$\det M_1^0 \equiv \det M_1|_{\xi \rightarrow 0} \neq 0, \quad \det M_4^0 \equiv \det M_4|_{\xi \rightarrow 0} \neq 0.$$

Portanto,

$$M = \text{sdet} \frac{\partial_r^2 L}{\partial z^{a(N_a)} \partial z^{b(N_b)}} \begin{cases} \neq 0, & \text{teoria singular} \\ = 0, & \text{teoria não-singular} \end{cases}, \quad (2.9)$$

onde sdet significa superdeterminante. O posto da supermatriz M_{ab} é o par de números naturais (n_1, n_2) , $n_1 = \text{rank}M_1^0$ e $n_2 = \text{rank}M_4^0$.

2.1 Hamiltonização

A fim de definir um procedimento de hamiltonização consistente para teorias clássicas na álgebra de Berezin, deve-se resolver o problema da ambigüidade no ordenamento das variáveis na Hamiltoniana. Esta ambigüidade aparece quando se consideram as variáveis dinâmicas canonicamente conjugadas (q, p) como elementos da álgebra de Berezin. Uma vez que variáveis ímpares anticomutam, não é claro qual ordenamento escolher, por exemplo se $p\dot{q}$ ou $\dot{q}p$. Este problema pode ser resolvido por uma escolha consistente das derivadas e variações (se à direita ou à esquerda), i.e., o ordenamento é fixado por essa escolha.

2.1.1 Teorias não-degeneradas

Neste caso, tem-se $N_a \neq 0$ para todo a , isto é, a lagrangiana (2.11) depende das coordenadas z^a e suas derivadas até ordem N_a . São introduzidos novos conjuntos de variáveis

$$x_1^a = z^{a(0)}; \quad x_s^a, \quad s = 2, \dots, N_a; \quad v^a = z^{a(N_a)},$$

e relações

$$\dot{x}_s^a = x_{s+1}^a, \quad s = 1, \dots, N_a - 1; \quad \dot{x}_{N_a}^a = v^a, \quad (2.10)$$

preservando a paridade dos índices e das variáveis correspondentes,

$$\varepsilon(x_s^a) = \varepsilon(\dot{x}_s^a) = \varepsilon(v^a) = \varepsilon(a).$$

A ação S^v no formalismo de primeira ordem é definida por

$$S^v = \int \left\{ L^v + \sum_a \left[\sum_{s=1}^{N_a-1} p_a^s (\dot{x}_s^a - x_{s+1}^a) + p_a^{N_a} (\dot{x}_{N_a}^a - v^a) \right] \right\} dt ,$$

$$L^v = L|_{q^a(s-1) \rightarrow x_s^a, q^a(N_a) \rightarrow v^a} . \quad (2.11)$$

Variação com respeito às coordenadas (e velocidades) será feita à direita por definição,

$$\frac{\delta_r S^v}{\delta x_1^a} \equiv \frac{\delta S^v}{\delta x_1^a} = \frac{\partial_r L^v}{\partial x_1^a} - \dot{p}_a^1, \quad \frac{\delta_r S^v}{\delta x_s^a} \equiv \frac{\delta S^v}{\delta x_s^a} = \frac{\partial_r L^v}{\partial x_s^a} - p_a^{s-1} - \dot{p}_a^s, \quad s = 2, \dots, N_a,$$

$$\frac{\delta_r S^v}{\delta v^a} \equiv \frac{\delta S^v}{\delta v^a} = \frac{\partial_r L^v}{\partial v^a} - p_a^{N_a},$$

ao passo que variação com respeito aos momentos será feita à esquerda por definição,

$$\frac{\delta_l S^v}{\delta p_a^s} \equiv \frac{\delta S^v}{\delta p_a^s} = \dot{x}_s^a - x_{s+1}^a, \quad s = 1, \dots, N_a - 1, \quad \frac{\delta_l S^v}{\delta p_a^{N_a}} \equiv \frac{\delta S^v}{\delta p_a^{N_a}} = \dot{x}_{N_a}^a - v^a.$$

As equações de movimento que decorrem de $\delta S^v = 0$ são equivalentes a (2.7),

$$\begin{aligned} \delta S^v &= \int \sum_a \left[\sum_{s=1}^{N_a} \frac{\partial_r L^v}{\partial x_s^a} \delta x_s^a + \frac{\partial_r L^v}{\partial v^a} \delta v^a - \sum_{s=1}^{N_a-1} p_a^s \delta x_{s+1}^a - p_a^{N_a} \delta v^a + \sum_{s=1}^{N_a} p_a^s \delta \dot{x}_s^a \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^{N_a-1} \delta p_a^s (\dot{x}_s^a - x_{s+1}^a) + \delta p_a^{N_a} (\dot{x}_{N_a}^a - v^a) \right] dt \\ &= \int \sum_a \left[\left(\frac{\partial_r L^v}{\partial x_1^a} - \dot{p}_a^1 \right) \delta x_1^a + \sum_{s=2}^{N_a} \left(\frac{\partial_r L^v}{\partial x_s^a} - p_a^{s-1} - \dot{p}_a^s \right) \delta x_s^a + \left(\frac{\partial_r L^v}{\partial v^a} - p_a^{N_a} \right) \delta v^a \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^{N_a-1} \delta p_a^s (\dot{x}_s^a - x_{s+1}^a) + \delta p_a^{N_a} (\dot{x}_{N_a}^a - v^a) \right] dt. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Se os momentos conjugados estivessem à direita na definição (2.11), então variação a da ação para $r \leftrightarrow l$ levaria à versão “esquerda” de (2.7).

Agora, a fim de obter EM equivalentes com o uso da ação hamiltoniana, a própria função de Hamilton precisa ser definida apropriadamente de acordo com a escolha feita para as derivadas no formalismo de primeira ordem. Para obter EM na forma (2.7), deve-se escrever a ação hamiltoniana e a hamiltoniana na forma

$$S^v = \int \left\{ \sum_a \sum_{s=1}^{N_a} p_a^s \dot{x}_s^a - H^v \right\} dt, \quad \text{com } H^v = \sum_a \left(\sum_{s=1}^{N_a-1} p_a^s x_{s+1}^a + p_a^{N_a} v^a \right) - L^v. \quad (2.13)$$

É importante notar que se o ordenamento das variáveis nos produtos $p_a^s x_{s+1}^a$ e $p_a^{N_a} v^a$ fosse mudado na hamiltoniana, então seria forçoso alterar do mesmo modo a ordem em $p_a^s \dot{x}_s^a$ na ação, e considerar a versão $r \leftrightarrow l$ da variação da ação para obter a versão “esquerda” das EM (2.7).

O princípio variacional para a ação (2.13) é equivalente aquele envolvendo à ação $S = \int L dt$ (2.6). As variáveis v^a são chamadas velocidades e os momentos conjugados a x_s^a são os multiplicadores de Lagrange p_a^s . As equações de Euler-Lagrange que seguem da ação de primeira ordem S^v são equivalentes a (2.7): os momentos p aparecem como multiplicadores de Lagrange para as equações adicionais (2.10). Os pares (x, p) formam o espaço de fase e as variáveis $(x, p; v)$ formam o espaço de fase estendido. As equações de movimentos resultantes da ação (2.13) são

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta S^v}{\delta p_a^s} = 0, \quad s = 1, \dots, N_a - 1 \\ \frac{\delta S^v}{\delta p_a^{N_a}} = \dot{x}_{N_a}^a - v^a = 0 \end{aligned} \right\} \implies \left\{ \begin{aligned} \dot{x}_s^a &= \{x_s^a, H^v\} \\ s &= 1, \dots, N_a \end{aligned} \right. ;$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta S^v}{\delta x_1^a} = 0 \\ \frac{\delta S^v}{\delta x_s^a} = 0, \quad s = 2, \dots, N_a \end{aligned} \right\} \implies \left\{ \begin{aligned} \dot{p}_a^s &= \{p_a^s, H^v\} \\ s &= 1, \dots, N_a \end{aligned} \right. ;$$

$$\frac{\delta S^v}{\delta v^a} = 0 \implies \frac{\partial_r H^v}{\partial v^a} = 0. \quad (2.14)$$

O parêntese de Poisson $\{, \}$ de duas grandezas homogêneas F e G , funções das variáveis do espaço de fase, é dados por

$$\{F, G\} = \sum_a \sum_{s=1}^{N_a} \frac{\partial_r F}{\partial x_s^a} \frac{\partial_l G}{\partial p_a^s} - (-1)^{\varepsilon(F)\varepsilon(G)} \frac{\partial_r G}{\partial x_s^a} \frac{\partial_l F}{\partial p_a^s}, \quad (2.15)$$

notando que $\varepsilon(H^v) = 0$, i.e., $H^v \in B^0(\mathbb{R})$.

A definição acima para os parênteses de Poisson entre quantidades homogêneas depende das definições (2.13), e também leva em conta a definição da variação da ação. Ademais, a álgebra cujos elementos geradores são (x_s^a, p_a^s) e cuja lei de multiplicação é dada por (3.14) é uma superálgebra de Lie,

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= -(-1)^{\varepsilon(F)\varepsilon(G)} \{G, F\}, \\ \{F, GH\} &= \{F, G\}H + (-1)^{\varepsilon(F)\varepsilon(G)} \{F, H\}, \\ (-1)^{\varepsilon(F)\varepsilon(H)} \{F, \{G, H\}\} &+ (-1)^{\varepsilon(H)\varepsilon(G)} \{H, \{F, G\}\} + (-1)^{\varepsilon(G)\varepsilon(F)} \{G, \{H, F\}\} = 0, \end{aligned}$$

e finalmente, $\varepsilon(\{F, G\}) = \varepsilon(F) + \varepsilon(G)$, para F e G homogêneas.

Em teorias não-singulares, de acordo com a definição (2.9), as velocidades v^a podem ser expressas como $v^a = \bar{v}^a(x, p_a^{N_a})$ por meio da equação (2.14). A eliminação das velocidades v^a da ação de

primeira ordem (2.13) conduz à ação hamiltoniana

$$S_H = \int \left[\sum_a \sum_{s=1}^{N_a} p_a^s \dot{x}_s^a - H \right] dt, \quad H = H^v|_{v=\bar{v}}, \quad (2.16)$$

e às equações de movimento hamiltonianas

$$\dot{x}^a = \{x, H\}, \quad \dot{p}^a = \{p_a^s, H\}.$$

2.1.2 Teorias degeneradas

Na presença de coordenadas degeneradas, isto é, coordenadas x^a para as quais $N_a = 0$, é conveniente dividir o índice a em dois grupos

$$a = (\bar{a}, \underline{a}), \quad N_{\bar{a}} = 0, \quad N_{\underline{a}} \geq 1, \quad (2.17)$$

e definir as variáveis

$$\begin{aligned} x_1^{\underline{a}} &= z^{\underline{a}(0)}, \quad x_s^{\underline{a}}, \quad s = 2, \dots, N_{\underline{a}}; \quad v^{\underline{a}} = z^{\underline{a}(N_{\underline{a}})}, \\ v^{\bar{a}} &= z^{\bar{a}(N_{\bar{a}})} = z^{\bar{a}(0)} = z^{\bar{a}}; \quad v^a = (v^{\underline{a}}, v^{\bar{a}}), \end{aligned}$$

consoante às novas EM

$$\dot{x}_s^{\underline{a}} = x_{s+1}^{\underline{a}}, \quad s = 1, \dots, N_{\underline{a}} - 1; \quad \dot{x}_{N_{\underline{a}}}^{\underline{a}} = v^{\underline{a}}. \quad (2.18)$$

Nesta nova notação, a paridade das variáveis é

$$\varepsilon(\underline{a}) = \varepsilon(x_s^{\underline{a}}) = \varepsilon(v^{\underline{a}}); \quad \varepsilon(\bar{a}) = \varepsilon(v^{\bar{a}}).$$

Todas as variáveis degeneradas serão tratadas como velocidades, e, por conseguinte, no formalismo de primeira ordem, não serão introduzidos os momentos conjugados a $q^{\bar{a}}$:

$$\begin{aligned} S^v &= \int \left\{ L^v + \sum_{\underline{a}} \left[\sum_{s=1}^{N_{\underline{a}}-1} p_{\underline{a}}^s (\dot{x}_s^{\underline{a}} - x_{s+1}^{\underline{a}}) + p_{\underline{a}}^{N_{\underline{a}}} (\dot{x}_{N_{\underline{a}}}^{\underline{a}} - v^{\underline{a}}) \right] \right\} dt \\ L^v &= L|_{q^{\underline{a}(s-1)} \rightarrow x_s^{\underline{a}}, q^{\underline{a}(N_{\underline{a}})} \rightarrow v^{\underline{a}}}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

tal que a variação desta ação, segundo a definição dada em (2.12), dê equações equivalentes a (2.7).

Sendo fiel às definições feitas anteriormente para a ação hamiltoniana e a hamiltoniana propri-

amente dita, tem-se

$$S^\nu = \int \left\{ \sum_{\underline{a}} \sum_{s=1}^{N_{\underline{a}}} p_{\underline{a}}^s \dot{x}_s^{\underline{a}} - H^\nu \right\} dt, \text{ com } H^\nu = \sum_{\underline{a}} \left(\sum_{s=1}^{N_{\underline{a}}-1} p_{\underline{a}}^s x_{s+1}^{\underline{a}} + p_{\underline{a}}^{N_{\underline{a}}} v^{\underline{a}} \right) - L^\nu.$$

A variação de S^ν consistente com as escolhas acima resulta nas EM

$$\frac{\delta_r S^\nu}{\delta x_s^{\underline{a}}} = -\dot{p}_{\underline{a}}^s - \frac{\partial_r H^\nu}{\partial x_s^{\underline{a}}} = 0, \quad s = 1, \dots, N_{\underline{a}}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\delta_l S^\nu}{\delta p_{\underline{a}}^s} = \dot{x}_s^{\underline{a}} - \frac{\partial_l H^\nu}{\partial p_{\underline{a}}^s} = 0, \quad s = 1, \dots, N_{\underline{a}}, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta_r S^\nu}{\delta v^{\underline{a}}} &= -\frac{\partial_r H^\nu}{\partial v^{\underline{a}}} = 0, \\ \frac{\delta_r S^\nu}{\delta v^{\bar{a}}} &= -\frac{\partial_r H^\nu}{\partial v^{\bar{a}}} = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

As equações (2.20) e (2.21) podem ser reescritas como

$$\dot{p}_{\underline{a}}^s = \{p_{\underline{a}}^s, H^\nu\}; \quad \dot{x}_s^{\underline{a}} = \{x_s^{\underline{a}}, H^\nu\},$$

em que os parênteses de Poisson são dados pela fórmula (2.15) no espaço $(x^{\underline{a}}, p_{\underline{a}})$.

O objetivo do procedimento de hamiltonização é a eliminação de todas as velocidades $v^{\underline{a}}$ da ação S^ν . Isto só é possível quando

$$M = \text{sdet} \frac{\partial_r^2 L^\nu}{\partial v^{\underline{a}} \partial v^{\underline{b}}} = \text{sdet} \frac{\partial_r^2 H^\nu}{\partial v^{\underline{a}} \partial v^{\underline{b}}} \neq 0,$$

de onde segue que as equações (2.22) permitem escrever $v^{\underline{a}} = \bar{v}^{\underline{a}}(x, p^{N_{\underline{a}}})$. A consistência das equações (2.22) impõe, para as funções $\bar{v}^{\underline{a}}$, a paridade

$$\varepsilon(\bar{v}^{\underline{a}}) = \varepsilon(v^{\underline{a}}) = \varepsilon(\underline{a}).$$

Em outras palavras, a substituição $H = H^\nu|_{v=\bar{v}}$ irá preservar a paridade da função hamiltoniana. A ação $S^\nu|_{v=\bar{v}} = S_H$ na forma hamiltoniana tem a mesma expressão que (2.16), e as EM são

$$\dot{x}_s^{\underline{a}} = \{x_s^{\underline{a}}, H\}, \quad \dot{p}_{\underline{a}}^s = \{p_{\underline{a}}^s, H\}, \quad s = 1, \dots, N_{\underline{a}}.$$

2.1.2.1 Caso singular

Como é bem sabido, no caso em que o hessiano M (2.9) é nulo, não é possível eliminar todas as velocidades v^a . Suponha que

$$\text{rank} \frac{\partial_r^2 L^v}{\partial v^a \partial v^b} = (R_1, R_2), \quad R \equiv R_1 + R_2.$$

Dividindo o conjunto das coordenadas tal que todas as velocidades exprimíveis do conjunto total v^a sejam denotadas por $V^i = \bar{V}^i(x, p_{\underline{i}}^{N_i}; \lambda)$, tem-se

$$\underline{a} = (\underline{i}, \underline{x}), \quad \bar{a} = (\bar{i}, \bar{x}); \quad V^i = v^i, \quad i = 1, \dots, R, \quad v^{R+\kappa} = \lambda^\kappa, \quad \kappa = 1, \dots, n - R,$$

em que foi feito uso das equações (2.22). Substituição de $V^i = \bar{V}^i$ em $\frac{\partial H^v}{\partial \lambda^\kappa}$ dá os vínculos primários

$$\Phi_\kappa^{(1)}(x, p_{\underline{i}}^{N_i}) = \left. \frac{\partial H^v}{\partial \lambda^\kappa} \right|_{V=\bar{V}} = 0, \quad (2.23)$$

que não dependem das velocidades inexprimíveis λ^κ . Mais uma vez, $\varepsilon(\bar{V}^i) = \varepsilon(i)$, de tal forma que os vínculos primários $\Phi_\kappa^{(1)}$ respeitam $\varepsilon(\Phi_\kappa^{(1)}) = \varepsilon(\kappa)$. A hamiltoniana pode ser escrita como

$$\begin{aligned} H^v &= \sum_{\underline{a}} \left[\sum_{s=1}^{N_{\underline{a}}-1} p_{\underline{a}}^s x_{s+1}^{\underline{a}} + p_{\underline{a}}^{N_{\underline{a}}} v^{\underline{a}} \right] - L^v \equiv \frac{\partial L^v}{\partial v^{\underline{a}}} v^{\underline{a}} + \frac{\partial L^v}{\partial v^{\bar{a}}} v^{\bar{a}} \\ &+ \sum_{\underline{a}} \sum_{s=1}^{N_{\underline{a}}-1} p_{\underline{a}}^s x_{s+1}^{\underline{a}} - L^v + \left(p_{\underline{a}}^{N_{\underline{a}}} - \frac{\partial L^v}{\partial v^{\underline{a}}} \right) v^{\underline{a}} - \frac{\partial L^v}{\partial v^{\bar{a}}} v^{\bar{a}} \\ &\equiv \left(\frac{\partial L^v}{\partial v^{\underline{a}}} v^{\underline{a}} + \sum_{\underline{a}} \sum_{s=1}^{N_{\underline{a}}-1} p_{\underline{a}}^s x_{s+1}^{\underline{a}} - L^v \right) + \frac{\partial H^v}{\partial v^{\underline{a}}} v^{\underline{a}} \equiv \mathcal{E}^v + \frac{\partial H^v}{\partial v^{\underline{a}}} v^{\underline{a}}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\mathcal{E}^v = \left(\frac{\partial L^v}{\partial v^{\underline{a}}} v^{\underline{a}} + \sum_{\underline{a}} \sum_{s=1}^{N_{\underline{a}}-1} p_{\underline{a}}^s x_{s+1}^{\underline{a}} - L^v \right). \quad (2.25)$$

Substituição de $V = \bar{V}$ em (2.24) dá o hamiltoniano total $H^{(1)}$

$$H^v|_{V=\bar{V}} = H^{(1)} = H(x, p) + \lambda^\kappa \Phi_\kappa^{(1)}, \quad \left. \frac{\partial H^v}{\partial V^i} \right|_{V=\bar{V}} \equiv 0,$$

onde

$$H(x, p) = \mathcal{E}^v|_{V=\bar{V}} \quad \text{e} \quad \Phi_\kappa^{(1)}(x, p_{\underline{a}}^{N_{\underline{a}}}) = \left. \frac{\partial H^v}{\partial \lambda^\kappa} \right|_{V=\bar{V}}.$$

Assim, no caso singular, após o procedimento de hamiltonização generalizada, chega-se à teoria hamiltoniana com vínculos primários cuja ação é

$$S^{(1)} = \int \left[\sum_{\underline{a}} \sum_{s=1}^{N_{\underline{a}}} p_{\underline{a}}^s \dot{x}_s^{\underline{a}} - H^{(1)} \right] dt, \quad H^{(1)} = H + \lambda^{\alpha} \Phi_{\alpha}^{(1)}.$$

Capítulo 3

Descrição Clássica

3.1. Introdução

3.2. Descrição Clássica

3.3. Descrição Clássica

3.4. Descrição Clássica

3.5. Descrição Clássica

3.6. Descrição Clássica

3.7. Descrição Clássica

3.8. Descrição Clássica

3.9. Descrição Clássica

3.10. Descrição Clássica

3.11. Descrição Clássica

3.12. Descrição Clássica

3.13. Descrição Clássica

3.14. Descrição Clássica

3.15. Descrição Clássica

3.16. Descrição Clássica

3.17. Descrição Clássica

3.18. Descrição Clássica

3.19. Descrição Clássica

3.20. Descrição Clássica

Capítulo 3

Descrição Clássica

3.1 Formulações Lagrangiana e Hamiltoniana

O modelo pseudoclássico para a partícula espinorial em $2 + 1$ dimensões descrito em [7] tem por ação

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left[-\frac{z^2}{2e} - e\frac{m^2}{2} - q\dot{x}^\mu A_\mu + iqeF_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu - im\xi^3\chi - \frac{1}{2}sm\kappa - i\xi_n\dot{\xi}^n \right] d\tau \\ &\equiv \int_0^1 L d\tau, \quad z^\mu = \dot{x}^\mu - i\xi^\mu\chi + i\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\xi_\nu\xi_\lambda\kappa, \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que a soma sobre índices repetidos $\mu = 0, 1, 2$, $n = 0, 1, 2, 3$ está subentendida, com $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$, $\eta_{mn} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$; x^μ , e , κ são variáveis pares, enquanto ξ^n , χ são variáveis ímpares; $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor de força do campo eletromagnético externo; $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}$ é o tensor completamente anti-simétrico de Levi-Civita em $(2 + 1)$ dimensões. Subentende-se que x^μ e ξ^μ são vetores de Lorentz $(2 + 1)$ -dimensionais, e , κ , χ são escalares de Lorentz, e s é uma constante par na álgebra de Berezin, sujeita à condição $s^2 = 1$.

A ação acima é invariante por reparametrização [7]

$$\delta x^\mu = \dot{x}^\mu \xi, \quad \delta e = \frac{d}{d\tau}(e\xi), \quad \delta \psi^a = \dot{\psi}^a \xi, \quad \delta \chi = \frac{d}{d\tau}(\chi\xi), \quad \delta \kappa = \frac{d}{d\tau}(\kappa\xi),$$

com um parâmetro par de calibre $\xi(\tau)$, e portanto esperamos que a hamiltoniana seja nula nas equações de movimento [17].

A ação também é invariante sob dois tipos de supertransformações [7] :

$$\begin{aligned}\delta x^\mu &= i\psi^\mu \varepsilon, \quad \delta e = i\chi \varepsilon, \quad \delta \psi^\mu = \frac{z^\mu}{2e} \varepsilon, \quad \delta \psi^3 = \frac{m}{2} \varepsilon, \quad \delta \chi = \dot{\varepsilon}, \quad \delta \kappa = 0, \\ \delta x^\mu &= -i\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \psi_\nu \psi_\lambda \theta, \quad \delta \psi^\mu = \frac{1}{e} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} z_\nu \psi_\lambda \theta, \quad \delta \kappa = \dot{\theta}, \quad \delta e = \delta \psi^3 = \delta \chi = 0,\end{aligned}$$

em que $\varepsilon(\tau)$ é um parâmetro par e $\theta(\tau)$ é um parâmetro ímpar.

Realizar-se-á o procedimento de hamiltonização generalizada [16] fixando $N_x = N_\xi = 1$ e $N_e = N_\chi = N_\kappa = 0$, portanto resultando nas variáveis degeneradas e, χ, κ . Primeiramente, introduzimos novas variáveis $\xi^\mu = \vartheta^\mu, \dot{x}^\mu = v^\mu$ e então a ação (3.1) é escrita no formalismo de primeira ordem como

$$S^v = \int_0^1 \left[L^v + p_\mu (\dot{x}^\mu - v^\mu) + \pi_n (\xi^n - \vartheta^n) \right] d\tau = \int_0^1 \left[p_\mu \dot{x}^\mu + \pi_n \xi^n - H^v \right] d\tau,$$

em que

$$\begin{aligned}L^v &= -\frac{\bar{z}^2}{2e} - e \frac{m^2}{2} - qv^\mu A_\mu + iqeF_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu - im\psi^3 \xi - \frac{1}{2} sm\kappa - i\xi_n \vartheta^n, \\ \bar{z}^\mu &= v^\mu - i\xi^\mu \chi + i\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \xi_\nu \xi_\lambda \kappa, \quad H^v = p_\mu v^\mu + \pi_n \vartheta^n - L^v.\end{aligned}$$

O ordenamento das variáveis na hamiltoniana de primeira ordem segue a convenção usual, ou seja, derivadas com respeito às coordenadas atuam à direita e derivadas com respeito aos momentos atuam à esquerda.

As equações variacionais com respeito às velocidades e coordenadas degeneradas são:

$$\begin{aligned}\frac{\delta S^v}{\delta v^\mu} &= -p_\mu - \frac{1}{e} \bar{z}_\mu - qA_\mu = 0, \quad \frac{\delta S^v}{\delta e} = \frac{\bar{z}^2}{2e^2} - \frac{m^2}{2} + iqF_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu = 0, \\ \frac{\delta S^v}{\delta \kappa} &= -\frac{i}{e} \bar{z}^\mu \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \xi^\nu \xi^\lambda - \frac{1}{2} sm = 0, \quad \frac{\delta S^v}{\delta \vartheta^a} = \pi_n + i\xi_n = 0, \\ \frac{\delta S^v}{\delta \chi} &= \frac{1}{e} (v^\mu \xi_\mu + i\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \xi_\mu \xi_\nu \xi_\lambda \kappa) - im\xi^3 = 0.\end{aligned}$$

As equações $\delta S^v / \delta \vartheta^n = 0$ resultam nos vínculos

$$\varphi_n = \pi_n + i\xi_n, \quad (3.2)$$

e as equações $\delta S^v / \delta v^\mu = 0$ podem ser usadas para expressar as velocidades v^μ ,

$$v^\mu = -e(p^\mu + qA^\mu) + i\xi^\mu \chi - i\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \xi_\nu \xi_\lambda \kappa. \quad (3.3)$$

Substituindo esta relação nas outras equações, obtêm-se novos vínculos,

$$\phi_1 = P^\mu \xi_\mu + m\xi^3, \quad \phi_2 = P^2 - m^2 + 2iqF_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu, \quad \phi_3 = \varepsilon_{\mu\nu\lambda}P^\mu\xi^\nu\xi^\lambda + \frac{i}{2}sm,$$

em que $P_\mu = p_\mu + qA_\mu$.

Ao substituir (3.3) na hamiltoniana, fica-se com

$$H^{(1)} = -\frac{e}{2}(P^2 - m^2 + 2iqF_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu) - i\kappa\left(\varepsilon^{\mu\nu\lambda}P_\mu\xi_\nu\xi_\lambda + \frac{i}{2}sm\right) - i\chi(P_\mu\xi^\mu + m\xi^3) - \vartheta^n(\pi_n + i\xi_n) = (-i\chi)\phi_1 + \left(-\frac{e}{2}\right)\phi_2 + (-i\kappa)\phi_3 + (-\vartheta^n)\varphi_n. \quad (3.4)$$

Como esperado, a hamiltoniana é proporcional aos vínculos. A ação se torna

$$S^{(1)} = \int_0^1 \left(p_\mu \dot{x}^\mu + \pi_n \dot{\xi}^n - H^{(1)} \right) d\tau.$$

No que segue, utilizar-se-á o parêntese de Dirac, construído a partir do conjunto completo de vínculos de segunda classe. O parêntese de Dirac de duas variáveis dinâmicas (de paridade definida) é definido por

$$\{A, B\}_{D(\varphi)} = \{A, B\} - \{A, \varphi_a\} C^{ab} \{\varphi_b, B\},$$

em que C^{ab} é ε matriz inversa dos parênteses de Poisson entre vínculos de segunda classe φ : $C^{ab} \{\varphi_b, \varphi_c\} = \delta_c^a$. O parêntese de Poisson entre duas funções do espaço de fase F e G de paridade definida é dado por

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \frac{\partial G}{\partial p_\mu} + \frac{\partial F}{\partial \xi^n} \frac{\partial G}{\partial \pi_n} - (-1)^{\varepsilon(F)\varepsilon(G)} (F \leftrightarrow G), \quad (3.5)$$

onde $\varepsilon(F)$ é a paridade de F .

3.2 Reorganização de vínculos e fixação de calibres

No esquema de quantização que a ser apresentado [7, 18], serão fixados quantos vínculos de primeira classe for possível utilizando as condições de calibre. Com esse fim, a análise clássica efetuada na seção anterior será estendida e vínculos de primeira classe $\tilde{\phi}$ serão construídos explicitamente, obtidos a partir dos vínculos iniciais ϕ por meio do deslocamento $\xi^n \rightarrow \xi^n + \frac{i}{2}\varphi^n$,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_1 &= P_\mu(\pi^\mu - i\xi^\mu) + m(\pi^3 - i\xi^3), \quad \tilde{\phi}_2 = P^2 - m^2 - 2qF_{\mu\nu}\xi^\mu\pi^\nu, \\ \tilde{\phi}_3 &= \varepsilon_{\mu\nu\lambda}P^\mu\xi^\nu\pi^\lambda + \frac{1}{2}sm, \end{aligned} \quad (3.6)$$

com omissão de termos triviais, quadráticos nos vínculos de segunda classe φ^n . Seguindo [3], o conjunto (3.6) é reescrito na forma

$$\begin{aligned}\tilde{T}_1 &= P_\mu (\pi^\mu - i\xi^\mu) + m (\pi^3 - i\xi^3), \quad \tilde{T}_2 = P_0 + \zeta r, \\ \tilde{T}_3 &= \varepsilon_{\mu\nu\lambda} P^\mu \xi^\nu \pi^\lambda + \frac{1}{2} sm, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $\zeta = -\text{sign}(P_0)$ e $r = \sqrt{m^2 - P_k P^k + 2q F_{\mu\nu} \xi^\mu \pi^\nu}$. Note-se que ζ é uma função definida no espaço de fase com valores no conjunto $\{1, -1\}$.

Os vínculos \tilde{T}_1 e \tilde{T}_3 são idênticos a $\tilde{\phi}_1$, $\tilde{\phi}_3$, enquanto os vínculos \tilde{T}_2 e $\tilde{\phi}_2$ são relacionadas por $\tilde{\phi}_2 = -2\zeta r \tilde{T}_2 + (\tilde{T}_2)^2$. Por construção, os vínculos \tilde{T} são de primeira classe,

$$\left\{ \tilde{T}, \tilde{T} \right\} \Big|_{\tilde{T}, \varphi=0} = \left\{ \tilde{T}, \varphi \right\} \Big|_{\tilde{T}, \varphi=0} = 0,$$

que resulta da coincidência de \tilde{T}_1 , \tilde{T}_3 com os vínculos antigos $\tilde{\phi}_1$, $\tilde{\phi}_3$, e do fato de que

$$\left\{ \tilde{T}_2, F \right\} = -\frac{1}{2\zeta r} \left\{ \tilde{\phi}_2, F \right\} + \left\{ \tilde{T}_2 \right\},$$

onde $\left\{ \tilde{T}_2 \right\}$ denota um termo proporcional ao vínculo \tilde{T}_2 . Em termos dos vínculos \tilde{T} , a hamiltoniana (3.4) se torna

$$H_{\tilde{T}} = \Lambda_1 \tilde{T}_1 + \Lambda_2 \tilde{T}_2 + \Lambda_3 \tilde{T}_3, \quad (3.8)$$

com multiplicadores redefinidos.

No que concerne à fixação de calibre para os vínculos de primeira classe $\tilde{T} = (\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3)$ dados por (3.7), utilizando os calibres correspondentes $\phi^G = (\phi_1^G, \phi_2^G, \phi_3^G)$, foi observado em [7] que é impossível escolher uma condição de calibre ϕ_3^G para fixar o vínculo \tilde{T}_3 , que foi conseqüentemente mantido durante a quantização canônica. A diferença entre o artigo [7] e a presente abordagem deve-se ao fato de que lá os autores não introduziram a reparametrização do vínculo $\tilde{\phi}_2$ em termos de \tilde{T}_2 . Entretanto, pode-se provar que o vínculo \tilde{T}_3 não pode ser fixado por nenhuma condição de calibre também com a presente reparametrização dos vínculos.

Com o intuito de demonstrar este fato, introduz-se a matriz M dos parênteses de Poisson entre todos os vínculos de segunda classe $\Psi = (\tilde{T}, \phi^G, \varphi)$, incluindo o calibre ϕ_3^G , correspondendo a \tilde{T}_3 ,

$$M = \|\{\Psi, \Psi\}\|_{\Psi=0} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon(M_1) = \varepsilon(M_4) = 0, \quad (3.9)$$

em que a matriz M é construída de tal modo que o bloco M_1 consista dos parênteses entre vínculos e calibres *pares*, isto é, possui linhas e colunas representadas por \tilde{T}_2 , \tilde{T}_3 , ϕ_2^G , ϕ_3^G ; enquanto o

bloco M_4 consista dos parênteses entre vínculos e calibres *ímpares*, isto é, possui linhas e colunas representadas por $\tilde{T}_1, \phi_1^G, \varphi$.

Devido à estrutura quadrática de \tilde{T}_3 nas variáveis de Grassmann (3.7), seu parêntese de Poisson com qualquer grandeza,

$$\{\tilde{T}_3, F\} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \xi^\nu \pi^\lambda \{P^\mu, F\} + \varepsilon_{\mu\nu\lambda} P^\mu (\xi^\nu \{\pi^\lambda, F\} - \pi^\lambda \{\xi^\nu, F\}),$$

é nulo na superfície $\xi, \pi \rightarrow 0$. Isto significa que nesta superfície M_1 é degenerada ($\det M_1|_{\xi, \pi \rightarrow 0} = 0$), porque o bloco $M_1|_{\xi, \pi \rightarrow 0}$ contém um linha (coluna) nula.

Contudo, para a matriz M inteira ser não-degenerada, é necessário (e suficiente) que os blocos pares M_1 e M_4 sejam não-degenerados na superfície em que as variáveis de Grassmann são nulas (veja, e.g., [15]). Assim, devido à estrutura particular de \tilde{T}_3 (independentemente da escolha dos calibres ϕ^G), é impossível fixar a liberdade de calibre relacionada a \tilde{T}_3 .

Logo, seguindo a abordagem de [7], impõem-se condições de calibre em todos os vínculos de primeira classe, exceto \tilde{T}_3 , tal que o conjunto de vínculos e calibres resultante consista dos vínculos de segunda classe e de um vínculo de primeira classe. Esta é uma modificação do procedimento de quantização canônica, em que se retém um dos vínculos de primeira classe e se o realiza como uma condição sobre os estados no espaço de Hilbert, por analogia ao método de quantização de Dirac. As condições de calibre impostas são:

$$\phi_1^G = \pi^0 - i\xi^0 + \zeta (\pi^3 - i\xi^3), \quad (3.10)$$

$$\phi_2^G = x_0 - \zeta\tau. \quad (3.11)$$

O calibre (3.10), escolhido para fixar a liberdade de calibre devido a \tilde{T}_1 , é análogo ao calibre utilizado no caso da partícula de Dirac em (3 + 1) dimensões [3]. Este calibre permite simplificar a análise, reduzindo, em particular, o conjunto de variáveis de spin independentes. O calibre (3.11), escolhido para fixar a liberdade de calibre devido a \tilde{T}_2 , é o calibre cronológico [3, 15], que relaciona o tempo físico x_0 com τ ou $-\tau$, de acordo com a interpretação clássica de partículas com carga q ou $-q$, respectivamente.

Levando em consideração a dependência explícita do calibre (3.11) no tempo, é conveniente, seguindo a abordagem de [15], estender o espaço de fase introduzindo o momento ϵ conjugado ao parâmetro de tempo τ , permitindo que se retenha a estrutura geral dos parênteses de Poisson no formalismo. Assim, os parênteses de Poisson (3.5) serão, a partir deste ponto, calculados no espaço de fase estendido, que inclui o par canônico (τ, ϵ) .

Ao se imporem as condições de calibre (3.10) e (3.11), chega-se a uma matriz não-degenerada de parênteses de Poisson entre os vínculos $\Psi = (\tilde{T}_2, \phi_2^G, \tilde{T}_1, \phi_1^G, \varphi^n)$ calculada na superfície de vínculos,

com linhas representadas por $\tilde{T}_2, \phi_2^G, \tilde{T}_1, \phi_1^G, \varphi^n$, respectivamente,

$$\|\{\Psi, \Psi\}\|_{\Psi=0} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & 0 \\ M_3 & M_4 & 0 \\ 0 & 0 & 2i\eta \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

em que os blocos diagonais são

$$M_1 = \|\{\tilde{T}_2, \phi_2^G\}\|_{\Psi=0} = -i\sigma_2, \quad M_4 = \|\{\tilde{T}_1, \phi_1^G\}\|_{\Psi=0} = \text{antidiag}(2i\zeta(r+m)),$$

e $2i\eta$ corresponde à matriz $\|2i\eta^{nm}\|$, cujas linhas são representadas por φ^n . Os termos não-diagonais são

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \zeta q r^{-1} F_{k0} (\pi^k - i\xi^k) \\ \pi^0 - i\xi^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = -M_2^T.$$

Ademais, utilizando os vínculos \tilde{T}_1, \tilde{T}_2 e ϕ_1^G , é possível escrever $\pi^0 - i\xi^0$ como uma função de π_k e ξ^k :

$$\pi^0 - i\xi^0 = \frac{\zeta}{\tilde{\omega}_0 + m} P_k (\pi^k - i\xi^k), \quad \tilde{\omega}_0 = \sqrt{m^2 - P_k P^k + 2q F_{ik} \xi^i \pi^k}.$$

A não-degenerescência da matriz $\|\{\Psi, \Psi\}\|_{\Psi=0}$ segue da não-degenerescência de seus blocos pares, que implica que os vínculos Ψ sejam de segunda classe. As condições de consistência $\dot{\phi}_1^G = 0$ e $\dot{\phi}_2^G = 0$ são

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1^G &= -\Lambda_1 \{\phi_1^G, \tilde{T}_1\} + \Lambda_2 \{\phi_1^G, \tilde{T}_2\} + \Lambda_3 \{\phi_1^G, \tilde{T}_3\} = 0, \\ \dot{\phi}_2^G &= -\zeta + \Lambda_1 \{\phi_2^G, \tilde{T}_1\} + \Lambda_2 \{\phi_2^G, \tilde{T}_2\} + \Lambda_3 \{\phi_2^G, \tilde{T}_3\} = 0, \end{aligned}$$

e podem ser escritas em forma matricial:

$$M \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_3 f_1 \\ \zeta + \Lambda_3 f_2 \end{pmatrix}, \quad f_1 \equiv \{\phi_1^G, \tilde{T}_3\}, \quad f_2 \equiv -\{\phi_2^G, \tilde{T}_3\},$$

onde a matriz M , dada por

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\phi_1^G, \tilde{T}_1\} & -\{\phi_1^G, \tilde{T}_2\} \\ -\{\phi_2^G, \tilde{T}_1\} & \{\phi_2^G, \tilde{T}_2\} \end{pmatrix},$$

é inversível devido à não-degenerescência de seus blocos pares M_1, M_4 . Como consequência, há uma matriz N tal que

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix}, \quad NM = I,$$

com $\varepsilon(N_1) = \varepsilon(N_4) = 0$ e $\varepsilon(N_2) = \varepsilon(N_3) = 1$, isto é,

$$\begin{aligned} M_1N_1 + M_2N_3 &= 1, \quad M_1N_2 + M_2N_4 = 0, \\ M_3N_1 + M_4N_3 &= 0, \quad M_3N_2 + M_4N_4 = 1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por meio da matriz N , pode-se escrever Λ_1 e Λ_2 em termos de Λ_3 ,

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \Lambda_3 f_1 \\ \zeta + \Lambda_3 f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta N_2 + \Lambda_3(N_1 f_1 + N_2 f_2) \\ \zeta N_4 + \Lambda_3(N_3 f_1 + N_4 f_2) \end{pmatrix}.$$

Então, inserindo as expressões dos multiplicadores de Lagrange determinados (Λ_1, Λ_2) na hamiltoniana (3.8), chega-se a

$$\bar{H}_T = \zeta N_2 \bar{T}_1 + \zeta N_4 \bar{T}_2 + \Lambda_3 \bar{T}_3,$$

em que \bar{T}_3 é um vínculo de primeira classe, sendo uma combinação linear dos vínculos antigos,

$$\bar{T}_3 = \bar{\lambda}_1 \bar{T}_1 + \bar{\lambda}_2 \bar{T}_2 + \bar{T}_3, \quad \bar{\lambda}_1 = N_1 f_1 + N_2 f_2, \quad \bar{\lambda}_2 = N_3 f_1 + N_4 f_2.$$

O fato de que o vínculo acima é de primeira classe pode ser demonstrado, de um lado, notando que é um combinação linear de vínculos T , que comutam com eles mesmos e com os vínculos φ^n na superfície de vínculos. Por outro lado, a forma explícita do vínculo \bar{T}_3 assegura que seus parênteses de Poisson com as condições de calibre são identicamente nulos na superfície de vínculos,

$$\begin{aligned} \{\phi_1^G, \bar{T}_3\} &= -\bar{\lambda}_1 M_1 - \bar{\lambda}_2 M_2 + f_1 \\ &= -(M_1 N_1 + M_2 N_3) f_1 - (M_1 N_2 + M_2 N_4) f_2 + f_1 \equiv 0, \\ \{\phi_2^G, \bar{T}_3\} &= -\bar{\lambda}_1 M_3 + \bar{\lambda}_2 M_4 - f_2 \\ &= (M_3 N_1 + M_4 N_3) f_1 + (M_3 N_2 + M_4 N_4) f_2 - f_2 \equiv 0, \end{aligned}$$

devido a (3.13). Logo, o conjunto total de vínculos está dividido entre os de segunda classe $\Psi = (\bar{T}_2, \phi_2^G, \bar{T}_1, \phi_1^G, \varphi^n)$, e o de primeira classe \bar{T}_3 . É fácil verificar que o novo conjunto de vínculos $\Theta' = (\Psi, \bar{T}_3)$ é equivalente ao anterior $\Theta = (\Psi, \bar{T}_3)$, uma vez que a matriz de transformação M , $\Theta \rightarrow \Theta' = M\Theta$, possui blocos pares não-degenerados M_1 e M_4 , de acordo com a notação (3.9).

Seguindo [3], o vínculo \bar{T}_2 é substituído por

$$\Phi_1 = P_0 + \zeta \bar{\omega}, \quad \bar{\omega} = \sqrt{\bar{\omega}_0^2 + \frac{2\zeta q F_{k0} P_l}{\bar{\omega}_0 + m} (\xi^k \pi^l + \pi^k \xi^l)}.$$

O novo conjunto de vínculos $\Psi' = (\Phi_1, \phi_2^G, \bar{T}_1, \phi_1^G, \varphi^n)$ é equivalente ao anterior Ψ , i.e., existe uma matriz $M = M(\eta)$, satisfazendo $\det M|_{\Psi=0} \neq 0$, tal que $\Psi = M\Psi'$, porque a superfície de vínculos

especificada por $\Psi(\eta) = 0$ é um zero de primeira ordem do sistema de equações independentes $\Psi'(\eta) = 0$ (veja [15]). A fim de provar esta afirmação, note-se que as equações $\Psi'(\eta) = 0$ são identicamente satisfeitas na superfície de vínculos $\Psi(\eta) = 0$, e além disso

$$\text{rank} \left. \frac{\partial \Psi'}{\partial \eta} \right|_{\Psi=0} = (n_1, n_2), \quad [\Psi] = [\Psi'] = n_1 + n_2,$$

onde $n_1 = 2$ e $n_2 = 6$, i.e., o posto é maximal na superfície $\Psi(\eta) = 0$. A última propriedade decorre do fato de que se podem utilizar as condições $\Psi'(\eta) = 0$ para escrever $n_1 + n_2$ variáveis em termos das restantes, isto é, as variáveis dependentes $\underline{\eta} = (x^0, p_0; \xi^0, \pi_0; \xi^3, \pi_3; \pi_k)$ em termos das independentes $\bar{\eta} = (x^k, p_k; \xi^k)$.

Seja $\Phi = (U, V)$ um conjunto de vínculos de segunda classe, obtido por combinações lineares do conjunto de vínculos de segunda classe Ψ' tal que o parêntese de Dirac construído com este novo conjunto tenha uma forma simples, o subconjunto U sendo dado por

$$\Phi_1 = P_0 + \zeta \tilde{\omega}, \quad \Phi_2 = \phi_2^G, \quad \Phi_3 = \varphi_1, \quad \Phi_4 = \varphi_2,$$

e o subconjunto V por

$$\begin{aligned} \Phi_5 &= -\frac{i}{2} \tilde{T}_1 + b \tilde{T}_2 + c \phi_2^G, \quad \Phi_6 = \phi_1^G, \quad \Phi_7 = \varphi_0, \quad \Phi_8 = \varphi_3, \\ b &= \frac{i}{2} \frac{\{\phi_2^G, \tilde{T}_1\}}{\{\phi_2^G, \tilde{T}_2\}} = \xi^0, \quad c = -\frac{\{-\frac{i}{2} \tilde{T}_1 + b \phi_2^G, \Phi_1\}}{\{\phi_2^G, \Phi_1\}}, \end{aligned}$$

onde os parênteses são considerados na superfícies dos vínculos. É fácil verificar que os conjuntos Φ e Ψ' são equivalentes (e, portanto, também o são Φ e Ψ por transitividade).

A matriz constante $\|\{\Phi_a, \Phi_b\}\|_{\Phi=0}$ é semi-diagonal, com as componentes não-nulas

$$\begin{aligned} \{\Phi_2, \Phi_1\} &= -\{\Phi_1, \Phi_2\} = 1, \quad \{\Phi_3, \Phi_3\} = \{\Phi_4, \Phi_4\} = -2i, \\ \{\Phi_5, \Phi_6\} &= \{\Phi_6, \Phi_5\} = \zeta(\tilde{\omega}_0 + m), \quad \{\Phi_7, \Phi_7\} = -\{\Phi_8, \Phi_8\} = 2i. \end{aligned}$$

A álgebra de vínculos acima implica que os subconjuntos U e V são ortogonais no sentido dos parênteses de Poisson, calculado na superfície de vínculos:

$$\{U, V\} = 0, \quad \Phi = 0. \quad (3.14)$$

3.3 Dinâmica no espaço de fase reduzido

A seguir, considerar-se-á o seguinte conjunto de variáveis independentes

$$\eta = (x^k, p_k; \xi^k, \pi_k; \zeta), \quad k = 1, 2, \quad (3.15)$$

que consiste do conjunto canônico $(x^k, p_k; \xi^k, \pi_k)$, e da função ζ .

A evolução temporal das variáveis η é dada por

$$\dot{\eta} = \{\eta, \bar{H}_T + \epsilon\}_{D(\Phi)} = \{\eta, \Lambda_3 \bar{T}_3 + \epsilon\}_{D(\Phi)}, \quad \Phi = 0, \quad \bar{T}_3 = 0, \quad (3.16)$$

em que o parêntese de Dirac $\{, \}_{D(\Phi)}$ é construído de acordo com os vínculos de segunda classe Φ . Nas equações de movimento acima, usou-se o fato bem conhecido de que quaisquer termos proporcionais a vínculos de segunda classe podem ser eliminado antes de se calcular os parênteses de Dirac. Neste caso específico, da equivalência entre os conjuntos de vínculos Ψ e Φ , deduz-se que \bar{T}_1 e \bar{T}_2 em \bar{H}_T podem ser expressados em termos dos vínculos Φ . Ademais, da afirmação da equivalência de Ψ e Φ segue que \bar{T}_3 é um vínculo de primeira classe com relação ao conjunto Φ .

Devido ao fato de que os conjuntos de vínculos U e V são mutuamente ortogonais no sentido de parênteses de Poisson, resultando numa matriz bloco-diagonal $\|\{\Phi, \Phi\}\|$, torna-se possível aplicar a regra de cálculos sucessivos de parênteses de Dirac (veja, e.g., [15]). Esta regra permite calcular o parêntese de Dirac de duas grandezas dinâmicas A e B de paridade definida com respeito ao subconjunto V do conjunto total de vínculos de segunda classe $\Phi = (U, V)$, com o subconjunto V por sua vez sendo um de segunda-classe,

$$\begin{aligned} \{A, B\}_{D(\Phi)} &= \{A, B\}_{D(U)} - \{A, V_a\}_{D(U)} C^{ab} \{V_b, B\}_{D(U)}, \\ C^{ac} \{V_c, V_b\}_{D(U)} &= \delta_b^a. \end{aligned} \quad (3.17)$$

A equação de evolução (3.16) para as variáveis independentes η (3.15) é dada por

$$\dot{\eta} = \{\eta, \Lambda_3 \bar{T}_3 + \epsilon\}_{D(\Phi)} = \{\eta, \Lambda_3 \bar{T}_3\}_{D(\Phi)} + \{\eta, \epsilon\}_{D(\Phi)}, \quad (3.18)$$

O segundo termo do lado direito da equação acima pode ser explicitamente calculado pela regra (3.17),

$$\{\eta, \epsilon\}_{D(\Phi)} = \{\eta, \epsilon\}_{D(U)} - \{\eta, V_a\}_{D(U)} C^{ab} \{V_b, \epsilon\}_{D(U)}, \quad C^{ac} \{V_c, V_b\}_{D(U)} = \delta_b^a.$$

Pode-se facilmente ver que o parêntese $\{V_b, \epsilon\}_{D(U)}$ do lado direito da expressão acima anula-se na superfície de vínculos graças à relação de ortogonalidade (3.14). Assim, o parêntese $\{\eta, \epsilon\}_{D(\Phi)}$ reduz-se a $\{\eta, \epsilon\}_{D(U)}$. Sejam $u = (\Phi_3, \Phi_4)$ e $v = (\Phi_1, \Phi_2)$ uma divisão de U em dois subconjuntos.

Por aplicação da regra (3.17) aos conjuntos de segunda classe u e v , obtém-se

$$\{\eta, \epsilon\}_{D(U)} = \{\eta, \epsilon\}_{D(u)} - \{\eta, v_a\}_{D(u)} c^{ab} \{v_b, \epsilon\}_{D(u)}, \quad c^{ab} \{v_b, v_c\}_{D(u)} = \delta_c^a.$$

Uma nova simplificação tem lugar devido ao anulamento do termo $\{\eta, \epsilon\}_{D(u)}$, e finalmente fica-se com

$$\{\eta, \epsilon\}_{D(\Phi)} = -\{\eta, v_a\}_{D(u)} c^{ab} \{v_b, \epsilon\}_{D(u)} = \zeta \{\eta, \Phi_1\}_{D(u)},$$

em que foi usado o conhecimento explícito de c^{ab} , isto é, $c^{ab} = \{v_b, v_a\} = i\sigma_2$. Uma vez que nem as variáveis independentes nem os vínculos u envolvem a coordenada x^0 , pode-se eliminar o momento p_0 de Φ_1 e escrever o parêntese $\{\eta, \epsilon\}_{D(\Phi)}$ como

$$\{\eta, \zeta q A_0 + \bar{\omega}\}_{D(u)}.$$

Ademais, devido à ausência do momento p_0 do parêntese acima, e da forma particular do vínculo $\Phi_2 = x^0 - \zeta\tau$, pode-se substituir $x^0 = \zeta\tau$ dentro do mesmo parêntese, obtendo-se

$$\{\eta, \epsilon\}_{D(\Phi)} = \left\{ \eta, [\zeta q A_0 + \bar{\omega}]_{x^0 = \zeta\tau} \right\}_{D(u)}. \quad (3.19)$$

O primeiro termo do lado direito de (3.18) pode ser reescrito numa forma similar, primeiro notando que

$$\{\eta, \Lambda_3 \bar{T}_3\}_{D(\Phi)} = \{\eta, \Lambda_3 T_3\}_{D(\Phi)},$$

em que

$$T_3 = \bar{T}_3|_{\Phi=0} = -m\zeta (\xi^1 \pi^2 - \xi^2 \pi^1) + \frac{1}{2} sm, \quad (3.20)$$

isto é, o vínculo de primeira classe \bar{T}_3 difere de T_3 por uma combinação linear de vínculos, $\bar{T}_3 = T_3 + \{\Phi\}$. Em segundo lugar, tendo em conta que T_3 possui parêntese de Poisson não-nulo com Φ_5 apenas, tem-se

$$\begin{aligned} \{\eta, \Lambda_3 T_3\}_{D(\Phi)} &= \{\eta, \Lambda_3 T_3\}_{D(U)} - \{\eta, V_a\}_{D(U)} C^{ab} \{V_b, \Lambda_3 T_3\} \\ &= \{\eta, \Lambda_3 T_3\}_{D(U)} - \{\eta, \Phi_6\} \{\Phi_5, \Phi_6\}^{-1} \{\Phi_5, \Lambda_3 T_3\} \\ &= \{\eta, \Lambda_3 T_3\}_{D(U)}, \end{aligned}$$

em que na última igualdade foi usado o fato de que $\{\eta, \Phi_6\} = 0$. Graças às relações de ortogonalidade $\{v, T_3\} = 0$, é possível escrever

$$\{\eta, \Lambda_3 T_3\}_{D(\Phi)} = \{\eta, \Lambda_3 T_3\}_{D(u)}. \quad (3.21)$$

As equações (3.19) e (3.21) combinadas dão

$$\dot{\eta} = \left\{ \eta, [\zeta q A_0 + \tilde{\omega}]_{x^0 = \zeta \tau} + \Lambda_3 T_3 \right\}_{D(u)} .$$

Finalmente, π_k são expressos em termos de ξ^k em $\tilde{\omega}$ utilizando os vínculos u , tal que as equações de movimento se tornem

$$\dot{\eta} = \{ \eta, \mathcal{H}_{eff} + \Lambda_3 T_3 \}_{D(u)}, \quad u_k = \pi_k + i \xi_k = 0, \quad T_3 = 0; \quad (3.22)$$

com a hamiltoniana efetiva \mathcal{H}_{eff} e o vínculo de primeira classe efetivo T_3 dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff} &= [\zeta q A_0 + \omega]_{x^0 = \zeta \tau}, \quad \omega = \tilde{\omega}|_{\pi_k = -i \xi^k} = \sqrt{\omega_0^2 + \rho}, \\ \omega_0 &= \sqrt{m^2 + (p_k + q A_k)^2 - 2i q F_{kl} \xi^k \xi^l}, \quad \rho = \frac{-4i \zeta q F_{k0}}{\omega_0 + m} (p_l + q A_l) \xi^k \xi^l, \\ T_3 &= -m \zeta (\xi^1 \pi^2 - \xi^2 \pi^1) + \frac{1}{2} s m. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Aqui é apropriado fazer alguns comentários sobre a equação de evolução (3.22). Esta equação desenvolve-se na superfície de vínculos de todos os vínculos de segunda classe Φ exceto u , i.e., na superfície dos vínculos (v, V) . Os vínculos (v, V) são identicamente satisfeitos uma vez que as variáveis dependentes foram expressas via as independentes η . O fato de que o vínculo T_3 , considerado com respeito ao conjunto restante (u, T_3) seja de primeira classe pode ser observado pela relação

$$\{T_3, \varphi^k\} = -m \zeta (\eta^{k2} \varphi^1 - \eta^{k1} \varphi^2) .$$

Já que T_3 é um vínculo de primeira classe no conjunto reduzido (u, T_3) , a equação de vínculos correspondente $T_3 = 0$ é entendida como sendo aplicada somente após o cálculo do parêntese de Dirac em (3.22).

3.4 Álgebra de variáveis no espaço de fase reduzido

Nesta seção serão apresentados os parênteses de Dirac entre as variáveis independentes η . A título de exemplo, será feito o cálculo explícito do comutador $\{x^k, p_r\}_{D(\Phi)}$,

$$\{x^k, p_r\}_{D(\Phi)} = \{x^k, p_r\}_{D(U)} - \{x^k, V_a\}_{D(U)} C^{ab} \{V_b, p^k\}_{D(U)}, \quad C^{ac} \{V_c, V_b\}_{D(U)} = \delta_b^a,$$

em que foi aplicada a regra (3.17). Devido à relação de ortogonalidade (3.14), o termo $\{x^k, V_a\}_{D(U)} C^{ab} \{V_b, p^k\}_{D(U)}$ reduz-se a $\{x^k, V_a\} C^{ab} \{V_b, p^k\} = \{x^k, V_1\} C^{11} \{V_1, p^k\} = 0$, pois

$C^{11} = 0$. Assim, fica-se com

$$\{x^k, p_r\}_{D(U)} = \{x^k, p_r\}_{D(u)} - \{x^k, v_a\}_{D(u)} c^{ab} \{v_b, p_r\}_{D(u)}, c^{ac} \{v_c, v_b\}_{D(u)} = \delta_b^a.$$

O segundo termo do lado direito da expressão acima é nulo, uma vez que somente Φ_1 possui parênteses não-nulos com as coordenadas x^k e momentos p_r , enquanto c^{ab} é anti-diagonal. Logo, tem-se

$$\{x^k, p_r\}_{D(\Phi)} = \{x^k, p_r\}_{D(u)} = \{x^k, p_r\} - \{x^k, u_a\} d^{ab} \{u_b, p_r\} = \delta_r^k, d^{ab} \{u_b, u_c\} = \delta_c^a,$$

Os parênteses não-nulos entre as variáveis independentes η são dados por

$$\{x^k, p_r\}_{D(u)} = \{x^k, p_r\} = \delta_r^k, \{\xi_k, \xi_r\}_{D(u)} = -\{\pi_k, \pi_r\}_{D(u)} = i \{\xi_k, \pi_r\}_{D(u)} = \frac{i}{2} \eta_{kr}, \quad (3.24)$$

ao passo que a função ζ satisfaz

$$\{\zeta, x^k\}_{D(u)} = \{\zeta, p_k\}_{D(u)} = \{\zeta, \xi^k\}_{D(u)} = 0. \quad (3.25)$$

Capítulo 4

Quantização canônica

4.1 Quantização das variáveis dinâmicas clássicas

Os comutadores e anti-comutadores, num dado instante de tempo, dos operadores $\hat{X}^k, \hat{P}_k, \hat{\xi}^k, \hat{\zeta}$, que correspondem às variáveis clássicas x^k, p_k, ξ^k, ζ , respectivamente, são definidos de acordo com os parênteses de Dirac das grandezas clássicas (3.24,3.25), utilizando a correspondência $[\hat{A}, \hat{B}]_{\pm} = i\hbar \{A, B\}_{D(u)}$ e a condição $\hat{\zeta}^2 = \mathbf{I}$, relacionada a $\zeta^2 = 1$. Adicionalmente, assume-se que $\hat{\zeta}$ tenha autovalores $\zeta = \pm 1$ em correspondência com a teoria clássica. As relações de comutação e anti-comutação quânticas são

$$[\hat{X}^k, \hat{P}_r] = i\hbar\delta_r^k, [\hat{\xi}^k, \hat{\xi}^l]_{+} = -\frac{\hbar}{2}\eta^{kl}, \hat{\zeta}^2 = \mathbf{I}. \quad (4.1)$$

Seja \mathcal{R} um espaço de Hilbert de vetores-coluna $\Psi(\mathbf{x})$ de 16 componentes dependentes de \mathbf{x} ,

$$\Psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Psi_{+1}(\mathbf{x}) \\ \Psi_{-1}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

em que $\Psi_{\zeta}(\mathbf{x})$, $\zeta = \pm 1$, são vetores-coluna de 8 componentes.

O produto interno em \mathcal{R} é definido por

$$\begin{aligned} (\Psi, \Psi') &= (\Psi_{+1}, \Psi'_{+1})_D + (\Psi'_{-1}, \Psi_{-1})_D, \\ (\Psi, \Psi')_D &= \int \Psi^{\dagger}(\mathbf{x})\Psi'(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

De modo geral, sempre se buscará uma realização bloco-diagonal para todos os operadores.

Neste sentido, seja a realização

$$\begin{aligned}\hat{\zeta} &= \text{bdiag}(I, -I), \quad \hat{X}^k = x^k \mathbf{I}, \quad \hat{P}_k = \hat{p}_k \mathbf{I}, \quad \hat{p}_k = -i\hbar \partial_k, \\ \hat{\Xi}^k &= \text{bdiag}(\hat{\xi}^k, \hat{\xi}^k), \quad \hat{S} = \text{bdiag}(\hat{s}, \hat{s}),\end{aligned}\tag{4.4}$$

em que I e I são as matrizes identidade de ordem 16 e 8 respectivamente, e $\hat{\xi}^k$ são matrizes de ordem 8 que satisfazem a relação de comutação $[\hat{\xi}^k, \hat{\xi}^l]_+ = -\frac{\hbar}{2} \eta^{kl}$.

4.2 Hamiltoniano, vínculo de primeira classe e variáveis de spin

A evolução dos estados com parâmetro de tempo τ é controlada pela hamiltoniana quântica \hat{H} . Esse operador age no espaço \mathcal{R} e pode ser construído a partir do seu análogo clássico \mathcal{H}_{eff} . No entanto, existem infinitos operadores \hat{H} com a mesma imagem clássica. E é justamente esta ambigüidade que permitirá a construção de um operador hamiltoniano que possa resolver o problema de ordenamento presente na quantização da raiz clássica ω (3.23). Evidentemente, o operador que se obteria por quantização direta de ω , pela simples substituição $\eta \rightarrow \hat{\eta}$, apesar de possuir uma imagem clássica clara, não ficaria bem definido, devido à raiz quadrada. Assim, aqui foi seguida a abordagem de [3] para o caso em $3 + 1$ dimensões, onde foi escolhido um operador hamiltoniano mais conveniente, mas cuja imagem clássica não é tão direta. O problema do limite semiclássico desse operador será abordado na seção correspondente. Basicamente, deve-se mostrar que neste limite, no que tange à evolução do pacote de ondas, o operador proposto e aquele obtido por quantização direta não se distinguem. A forma escolhida para o operador hamiltoniano quântico $\hat{H}_\tau + \hat{\Lambda}_3 \hat{T}_3$ (aqui $\hat{\Lambda}_3$ é um operador arbitrário correspondendo ao multiplicador de Lagrange indeterminado Λ_3) é a seguinte,

$$\hat{H}_\tau = \hat{\zeta} q \hat{A}_0 + \hat{\Omega} = \text{bdiag}(\hat{H}_{+1}, \hat{H}_{-1}),\tag{4.5}$$

em que $\hat{A}_0 = \text{bdiag}(A_0|_{x^0=\tau} I, A_0|_{x^0=-\tau} I)$ e $\hat{\Omega} = \text{bdiag}(\hat{\Omega}_{+1}, \hat{\Omega}_{-1})$, tal que

$$\hat{H}_\zeta = \zeta q A_0|_{x^0=\zeta\tau} I + \hat{\Omega}_\zeta,$$

onde

$$\hat{\Omega}_\zeta = \hat{\omega}_0|_{x^0=\zeta\tau}.$$

Então os blocos \hat{H}_ζ de ordem 8 se tornam

$$\hat{H}_\zeta = (\zeta q A_0 I + \hat{\omega}_0)|_{x^0=\zeta\tau}.\tag{4.6}$$

O primeiro termo de \hat{H}_τ está diretamente relacionado à grandeza clássica correspondente, $\zeta q A_0|_{x^0=\zeta\tau}$. O segundo termo será realizado de forma que seu quadrado esteja em correspondência com a grandeza clássica ω^2 , que seja covariante e hermitiano segundo o produto escalar (4.3).

Como já foi mencionado em relação ao esquema modificado de quantização canônica proposto, os o vínculo de primeira classe (3.20) será realizado como uma restrição aos estados $\Psi \in \mathcal{R}$, $\hat{T}_3\Psi = 0$. A realização da função clássica $T_3(q, p)$ será por meio da prescrição geral $\hat{T}_3 = T_3|_{q=\hat{q}, p=\hat{p}}$ (q e p simbolizam todas as coordenadas e momentos, respectivamente) e também será mantida uma estrutura bloco-diagonal,

$$\hat{T}_3 = m \left(2i\hat{\zeta}\hat{\xi}^1\hat{\xi}^2 + \frac{1}{2}\hat{S} \right) = \text{bdiag}(\hat{t}_1, \hat{t}_{-1}), \quad \hat{t}_\zeta = m \left(2i\hat{\zeta}\hat{\xi}^1\hat{\xi}^2 + \frac{1}{2}\hat{s} \right). \quad (4.7)$$

Portanto, a condição $\hat{T}_3\Psi = 0$ implica

$$\hat{t}_\zeta\Psi_\zeta = 0. \quad (4.8)$$

A conservação desta condição no tempo é garantida por $[\hat{T}_3, \hat{H}_\tau] = 0$, que segue da relação correspondente na teoria clássica $\{T_3, \mathcal{H}_{eff}\}_{D(u)} = 0$. Assim, a condição quântica de conservação do vínculo \hat{T}_3 é

$$[\hat{t}_\zeta, \hat{\Omega}_\zeta] = 0. \quad (4.9)$$

Para completar a realização quântica das grandezas clássicas, em particular o vínculo T_3 e o hamiltoniano \mathcal{H}_{eff} , deve-se levar em conta a restrição (4.9), bem como hermiticidade dos operadores correspondentes. Seguindo [3], postula-se uma forma explícita para $\hat{\omega}_0$ em termos de uma matriz de ordem 8 que tenha todas as propriedades desejadas. Não é possível realizar esse operador em termos de uma matriz de ordem 4 ou menor, e as variáveis de spin $\hat{\xi}^k$ em termos de matrizes gamma por analogia a [3], devido à presença do termo $\hat{\xi}^1\hat{\xi}^2$ em \hat{t}_ζ , que não comuta com $\hat{\omega}_0$ em tais realizações. É este o motivo por que se adotou um espaço de Hilbert de dimensão 16. Finalmente, a realização do operador $\hat{\omega}_0$ deve ser tal que a correspondência de $\hat{\omega}^2$ com a grandeza clássica ω^2 seja respeitada de acordo com o limite semiclássico, tratado na seção 4.5. A escolha feita para $\hat{\omega}_0$ é:

$$\hat{\omega}_0 = \begin{pmatrix} 0 & m - \gamma^k(\hat{p}_k + qA_k) \\ m + \gamma^k(\hat{p}_k + qA_k) & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \quad (4.10)$$

cujo quadrado é

$$\hat{\omega}_0^2 = \begin{pmatrix} m^2 + (\hat{p}_k + qA_k)^2 + \frac{i\hbar}{2}qF_{kl}\gamma^k\gamma^l & 0 \\ 0 & m^2 + (\hat{p}_k + qA_k)^2 + \frac{i\hbar}{2}qF_{kl}\gamma^k\gamma^l \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

onde γ^k são matrizes de Dirac em quatro dimensões.

Ainda resta realizar os operadores de spin $\hat{\xi}$ e o operador correspondente à grandeza s . Isto será

mais facilmente alcançado se se considerar a condição (4.9) sobre \hat{t}_ζ , que por sua vez determina condições sobre $\hat{\xi}^1 \hat{\xi}^2$ e \hat{s} . Estes operadores devem comutar entre si e com $\hat{\omega}_0$. A forma geral de uma matriz M de ordem 8 que comuta com $\hat{\omega}_0$ é

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad [a, \gamma^k]_- = [b, \gamma^k]_+ = 0, \quad (4.12)$$

onde a e b são matrizes de ordem 4. É conveniente dividir a matriz M em duas partes linearmente independentes

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

em que as expressões para a e b são dadas por (4.14).

Seja Γ_i , $i = 1, \dots, 16$ uma base no espaço de matrizes de ordem 4, onde Γ_i consistem da matriz unidade e de produtos das matrizes de Dirac em quatro dimensões, γ^0 , γ^1 , γ^2 e γ^3 . Em termos dessa base, matrizes a e b satisfazendo (4.12) são expressas por

$$a = a^i \Gamma_i, \quad \Gamma_i = \{1, \gamma^0 \gamma^3, \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2, \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3\}, \quad b = b^j \Gamma_j, \quad \Gamma_j = \{\gamma^0, \gamma^3, \gamma^1 \gamma^2, \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3\}, \quad (4.14)$$

com a^i e b^i arbitrários.

Tanto o produto $\hat{\xi}^1 \hat{\xi}^2$ quanto \hat{s} serão realizados utilizando as matrizes M_1 e M_2 definidas em (4.13). Está claro que não nenhum deles pode ser a matriz identidade, o primeiro por que a álgebra dos operadores $\hat{\xi}^k$ o proíbe, e o segundo por possuir autovalores proporcionais a ± 1 , em correspondência com a grandeza clássica $s^2 = 1$. A fim de que a realização dos operadores $\hat{\xi}^k$ preserve uma estrutura bloco-diagonal (ou anti-diagonal) cujos blocos conttenham uma matriz γ , é necessário que a realização de $\hat{\xi}^1 \hat{\xi}^2$ só consista de blocos que conttenham o produto de duas matrizes γ . Como consequência, as expansões de M_1 e M_2 se reduzem aos termos envolvendo $\gamma^0 \gamma^3$ e $\gamma^1 \gamma^2$, respectivamente. Quanto ao operador \hat{s} , impõe-se a condição adicional de que tenha uma estrutura bloco-diagonal, e, portanto, só contenha termos da expansão de M_1 (a menos da matriz identidade).

O produto $\hat{\xi}^1 \hat{\xi}^2$ fica completamente determinado com a condição de que comute com \hat{s} , pois neste caso somente o termo envolvendo $\gamma^1 \gamma^2$ da expansão de M_2 sobrevive,

$$\hat{\xi}^1 \hat{\xi}^2 = -\frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} 0 & \gamma^1 \gamma^2 \\ \gamma^1 \gamma^2 & 0 \end{pmatrix},$$

e as matrizes de spin $\hat{\xi}^k$ são realizadas como

$$\hat{\xi}^1 = \frac{i}{2}\hbar^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & \gamma^1 \\ \gamma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\xi}^2 = \frac{i}{2}\hbar^{1/2} \begin{pmatrix} \gamma^2 & 0 \\ 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}, \quad [\hat{\xi}^k, \hat{\xi}^l]_+ = -\frac{\hbar}{2}\eta^{kl}. \quad (4.15)$$

Há ainda certa liberdade na realização do operador \hat{s} , uma vez que qualquer dos termos que envolvem $\gamma^0\gamma^3$, $\gamma^0\gamma^1\gamma^2$ e $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ comuta com os operadores de spin (4.15). No entanto, na representação (4.17) somente $\gamma^0\gamma^1\gamma^2$ é diagonal,

$$\hat{s} = \hbar \begin{pmatrix} i\gamma^0\gamma^1\gamma^2 & 0 \\ 0 & i\gamma^0\gamma^1\gamma^2 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

em que o fator \hbar está incluído para assegurar uma dimensão bem definida a \hat{T}_3 , de acordo com (4.7).

No que segue, será conveniente escolher a realização encontrada em [19] para as matrizes γ ,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

onde σ^k são as matrizes de Pauli. De acordo com a representação acima, os operadores $\hat{\xi}^1\hat{\xi}^2$ e \hat{s} ficam

$$\hat{\xi}^1\hat{\xi}^2 = i\frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} 0 & \Sigma^3 \\ \Sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s} = \hbar \begin{pmatrix} \gamma^0\Sigma^3 & 0 \\ 0 & \gamma^0\Sigma^3 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^3 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}.$$

Agora que o operador \hat{t}_ζ já foi realizado convenientemente, a estrutura dos estados físicos Ψ_ζ , aqueles que satisfazem a condição (4.8), é dada por

$$\Psi_\zeta(\tau, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_\zeta(\tau, \mathbf{x}) \\ \zeta\gamma^0\psi_\zeta(\tau, \mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Logo, no espaço de estados (4.18), a condição (4.8) é identicamente satisfeita, e os operadores $\frac{1}{2}\hat{S}$ e $-2i\hat{\zeta}\hat{\Xi}^1\hat{\Xi}^2$ são equivalentes.

4.3 Equação de Schrödinger

A equação de Schrödinger

$$i\hbar\partial_\tau\Psi = \left(\hat{H}_\tau + \hat{\Lambda}_3\hat{T}_3\right)\Psi, \quad (4.19)$$

com \hat{H}_τ dado por (4.5), para vetores Ψ sujeitos a $\hat{T}_3\Psi = 0$, tem a forma

$$i\hbar\partial_\tau\Psi = \hat{H}_\tau\Psi. \quad (4.20)$$

Soluções da equação acima também podem ser autoestados do operador \hat{S} , pois $[\hat{s}, \hat{\omega}_0] = 0$ por construção. Sejam Ψ_s autoestados do operador \hat{S} , i.e., $\hat{S}\Psi_s = \hbar s\Psi_s$, $s = \pm 1$. Esses estados têm a forma

$$\Psi_{\zeta,s}(\tau, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_{\zeta,s}(\tau, \mathbf{x}) \\ \zeta\gamma^0\psi_{\zeta,s}(\tau, \mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \psi_{\zeta,1}(\tau, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_\zeta^{(+1)}(\tau, \mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{\zeta,-1}(\tau, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^1\psi_\zeta^{(-1)}(\tau, \mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

onde $\psi_\zeta^{(s)}$ são vetores de duas componentes.

Como será visto adiante, a equação de Schrödinger (4.20) conduz à equação de Dirac em 2 + 1 dimensões. Assim, soluções da equação de Schrödinger original (4.19) no subespaço físico $\hat{T}_3\Psi = 0$ satisfazem a equação de Dirac em 2 + 1 dimensões. E de outro lado, soluções de (4.19) e (4.20) obedecem a $\hat{T}_3\Psi = 0$, pois $\hat{\Lambda}_3$ é um operador arbitrário. Conseqüentemente, a equação de Dirac é equivalente à condição $\hat{T}_3\Psi = 0$ no espaço de estados $\Psi = \Psi(\tau, \mathbf{x})$ sujeitos à equação de Schrödinger (4.19).

Em componentes, a equação de Schrödinger (4.20) implica

$$i\hbar\partial_\tau\Psi_{\zeta,s}(\tau) = (\zeta q A_0 I + \hat{\omega}_0)|_{x^0=\zeta\tau}\Psi_{\zeta,s}(\tau),$$

e, em termos do tempo físico $x^0 = \zeta\tau$ [3], a equação acima se torna

$$i\hbar\zeta\partial_0\Psi_{\zeta,s}(\zeta x^0) = (\zeta q A_0 I + \hat{\omega}_0)\Psi_{\zeta,s}(\zeta x^0).$$

Tendo em vista a forma explícita de $\hat{\omega}_0$ (4.10) e $\Psi_{\zeta,s}$ (4.21), a última equação pode ser reescrita como

$$[\gamma^\mu (i\hbar\partial_\mu - qA_\mu) - m]\psi_{\zeta,s}(\zeta x^0, \mathbf{x}) = 0. \quad (4.22)$$

O operador $\hat{\zeta}$ é interpretado como o operador de sinal de carga, conforme a interpretação da grandeza clássica ζ , que distingue as trajetórias de partículas de carga q das de carga $-q$. Assim, soluções de (4.22) com $\zeta = +1$ correspondem a partículas de carga q , e soluções com $\zeta = -1$ correspondem a partículas de carga $-q$.

A fim de chegar às equações de Dirac em (2 + 1) dimensões para partículas com carga $\pm q$, será utilizada a decomposição (4.21) do vetor de quatro componentes em vetores de dois componentes $\psi_\zeta^{(s)}$. Para $\zeta = +1$, a equação (4.22) se decompõe em

$$[\Gamma_s^\mu (i\hbar\partial_\mu - qA_\mu) - m]\psi^{(s)}(x) = 0, \quad \psi^{(s)}(x) \equiv \psi_{+1}^{(s)}(x^0, \mathbf{x}), \quad (4.23)$$

em que Γ_s^μ são dois conjuntos inequivalentes de matrizes gamma em $(2 + 1)$ dimensões dados por (A.1). A equação análoga para $\zeta = -1$ tem a forma

$$[\Gamma_s^\mu (i\hbar\partial_\mu + qA_\mu) - m] \psi^{(s)c}(x) = 0, \quad \psi^{(s)c}(x) \equiv \Gamma_{u/d}^2 \psi_{-1}^{(s)*}(-x^0, \mathbf{x}), \quad (4.24)$$

que é a equação de Dirac em $(2 + 1)$ dimensões para uma partícula de carga $-q$.

Logo, em analogia à teoria em $3 + 1$ dimensões, a evolução pode ser reformulada em termos do tempo físico x^0 . Ademais, por que as os dois conjuntos de matrizes gamma não são equivalentes, não pode haver mistura de estados com valores diferentes de s . Assim, os estados físicos serão denotados pela grandeza s na representação com tempo físico x^0 ,

$$\Psi_s(x) = \begin{pmatrix} \Psi_s(x) \\ \Psi_s^c(x) \end{pmatrix}, \quad \Psi_s(x) = \begin{pmatrix} \psi_s(x) \\ \gamma^0 \psi_s(x) \end{pmatrix}, \quad \Psi_s^c(x) = \begin{pmatrix} \psi_s^c(x) \\ \gamma^0 \psi_s^c(x) \end{pmatrix},$$

$$\psi_{+1}(x) = \begin{pmatrix} \psi^{(+1)}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{-1}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^1 \psi^{(-1)}(x) \end{pmatrix},$$

$$\psi_{+1}^c(x) = \begin{pmatrix} \psi^{(+1)c}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{-1}^c(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^1 \psi^{(-1)c}(x) \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

A operação de conjugação de carga (4.24) para as componentes $\Psi_s^c(x)$ é

$$\Psi_s^c(x) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^0 \gamma^2 \\ \gamma^0 \gamma^2 & 0 \end{pmatrix} \Psi_{\zeta=-1,s}^*(-x^0, \mathbf{x}),$$

e o produto interno (4.3) nesta representação fica

$$(\Psi_s, \Psi'_s) = (\Psi_s, \Psi'_s)_D + (\Psi_s, \Psi'_s)_D. \quad (4.26)$$

Os estados $\Psi_s(x)$ satisfazem a equação de evolução

$$i\hbar\partial_0 \Psi_s(x^0, \mathbf{x}) = \hat{H}_{x^0} \Psi_s(x^0, \mathbf{x}), \quad \hat{H}_{x^0} = \text{bdiag}(\hat{H}(x^0), \hat{H}^c(x^0)), \quad (4.27)$$

em que

$$\hat{H}(x^0) = qA_0 I + \hat{\omega}_0, \quad \hat{H}^c(x^0) = \hat{H}(x^0) \Big|_{q \rightarrow -q} = -qA_0 I + \hat{\omega}_0^c,$$

$$\hat{\omega}_0^c = \hat{\omega}_0 \Big|_{q \rightarrow -q} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^0 \gamma^2 \\ \gamma^0 \gamma^2 & 0 \end{pmatrix} \hat{\omega}_0^* \begin{pmatrix} 0 & \gamma^0 \gamma^2 \\ \gamma^0 \gamma^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Na representação do tempo físico x^0 acima, o operador $\hat{\Omega}$ de (4.5), que constitui uma realização quântica consistente da raiz clássica ω , torna-se $\hat{\Omega}_{x^0} = (\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_0^c)$, ao passo que o operador $\frac{1}{2}\hat{S} \equiv -2i\hat{\zeta}\hat{\xi}^1\hat{\xi}^2$ se simplifica para $\frac{1}{2}\hat{S}_{x^0} = -2i\hat{\xi}^1\hat{\xi}^2$,

$$\frac{1}{2}\hat{S}_{x^0}\Psi_s = \frac{\hbar}{2}s\Psi_s, \quad [\hat{S}_{x^0}, \hat{\Omega}_{x^0}] = 0. \quad (4.29)$$

Tendo em conta a estrutura dos estados (4.25), pode-se ver que o produto escalar (4.26) se reduz ao produto escalar usual entre espinores em $2+1$ dimensões (4.3),

$$(\Psi_s, \Psi'_s) = 2 \left(\psi^{(s)}, \psi^{(s)'} \right)_D + 2 \left(\psi^{(s)c}, \psi^{(s)c'} \right)_D.$$

4.4 Setor físico

Define-se o subespaço físico \mathcal{R}_{ph} de \mathcal{R} , relacionado com o setor de uma partícula da TQC (sempre que esse setor puder ser consistentemente definido), como o espaço gerado pelos autovetores do operador de carga $q\hat{\zeta}$ e do operador hamiltoniano \hat{H}_{x^0} (4.27) (num dado instante de tempo),

$$\begin{aligned} \Psi_{s,+1,n} &= \begin{pmatrix} \Psi_{s,+1,n} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{s,+1,\alpha}^c = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_{s,+1,\alpha}^c \end{pmatrix}, \\ q\hat{\zeta}\Psi_{s,+1,n} &= q\Psi_{s,+1,n}, \quad q\hat{\zeta}\Psi_{s,+1,\alpha}^c = -q\Psi_{s,+1,\alpha}^c, \\ \hat{H}_{x^0}\Psi_{s,+1,n} &= \varepsilon_{+1,n}^{(s)}\Psi_{s,+1,n}, \quad \hat{H}_{x^0}\Psi_{s,+1,\alpha}^c = \varepsilon_{+1,\alpha}^{(s)c}\Psi_{s,+1,\alpha}^c, \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde os autovalores $E = (\varepsilon_{+1,n}^{(s)}; \varepsilon_{+1,\alpha}^{(s)c})$ são os mesmos que aparecem no problema de autovalor (5.13,5.19). A estrutura das componentes $\Psi_{s,+1,n}$ e $\Psi_{s,+1,\alpha}^c$ é semelhante àquela dada em (4.25),

$$\begin{aligned} \Psi_{s,+1,n} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_{s,+1,n} \\ \gamma^0 \psi_{s,+1,n} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{s,+1,\alpha}^c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_{s,+1,\alpha}^c \\ \gamma^0 \psi_{s,+1,\alpha}^c \end{pmatrix}, \\ \psi_{+1,+1,n} &= \begin{pmatrix} \psi_{+1,n}^{(+1)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{-1,+1,n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^1 \psi_{+1,n}^{(-1)} \end{pmatrix}, \\ \psi_{+1,+1,\alpha}^c &= \begin{pmatrix} \psi_{+1,\alpha}^{(+1)c} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{-1,+1,\alpha}^c = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^1 \psi_{+1,\alpha}^{(-1)c} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde os espinores de duas componentes $\psi_{+1,n}^{(s)}$ e $\psi_{+1,\alpha}^{(s)c}$ são solução para o problema de autovalor (5.13,5.19) com autovalores $\varepsilon_{+1,n}^{(s)}$ e $\varepsilon_{+1,\alpha}^{(s)c}$.

O produto escalar (4.3) entre estados de mesma carga é

$$(\Psi_{s,+1,n}, \Psi_{s,+1,m}) = \left(\psi_{+1,n}^{(s)}, \psi_{+1,m}^{(s)} \right)_D = \delta_{nm}, \quad (\Psi_{s,+1,\alpha}^c, \Psi_{s,+1,\beta}^c) = \left(\psi_{s,+1,\alpha}^{(s)c}, \psi_{s,+1,\beta}^{(s)c} \right)_D = \delta_{\alpha\beta},$$

e para estados de cargas distintas é nulo.

No subespaço físico \mathcal{R}_{ph} faz sentido definir uma constante de movimento, produto das constantes $\hat{\zeta}$ e \hat{S}_{x^0} ,

$$\hat{S}^{QM} = \hat{\zeta} \hat{S}_{x^0} = -2i \hat{\zeta} \hat{\Xi}^1 \hat{\Xi}^2, \quad [\hat{S}^{QM}, \hat{H}_{x^0}] = 0, \quad (4.31)$$

cuja ação sobre os estados de antipartícula (4.30) é oposto ao do operador \hat{S}_{x^0} ,

$$\hat{S}^{QM} \Psi_{s,+1,n} = \frac{1}{2} \hbar s \Psi_{s,+1,n}, \quad \hat{S}^{QM} \Psi_{s,+1,\alpha}^c = -\frac{1}{2} \hbar s \Psi_{s,+1,\alpha}^c. \quad (4.32)$$

A exclusão dos estados $\psi_{-1,\alpha}^{(s)}$ e $\psi_{-1,n}^{(s)c}$ do conjunto gerador do subespaço físico \mathcal{R}_{ph} é necessária para obtenção de uma completa identificação com o setor de uma partícula da TQC. Ademais, no subespaço físico \mathcal{R}_{ph} assim definido, o operador $\hat{\Omega}_{x^0}$ é positivo,

$$\left(\Psi_{s,+1,n}, \hat{\Omega}_{x^0} \Psi_{s,+1,n} \right) > 0, \quad \left(\Psi_{s,+1,\alpha}^c, \hat{\Omega}_{x^0} \Psi_{s,+1,\alpha}^c \right) > 0. \quad (4.33)$$

Em termos dos espinores $\psi_{+1,n}^{(s)}$ e $\psi_{+1,\alpha}^{(s)c}$, os valores esperados acima se reduzem a

$$\begin{aligned} \left(\Psi_{s,+1,n}, \hat{\Omega}_{x^0} \Psi_{s,+1,n} \right) &= \int d^2x \psi_{+1,n}^{(s)\dagger} \Gamma_s^0 [m + \Gamma_s^k (\hat{p}_k + qA_k)] \psi_{+1,n}^{(s)}, \\ \left(\Psi_{s,+1,\alpha}^c, \hat{\Omega}_{x^0} \Psi_{s,+1,\alpha}^c \right) &= \int d^2x \psi_{+1,\alpha}^{(s)c\dagger} \Gamma_s^0 [m + \Gamma_s^k (\hat{p}_k - qA_k)] \psi_{+1,\alpha}^{(s)c}. \end{aligned}$$

Utilizando as equações de autovalor (5.13) e (5.19), tem-se

$$\begin{aligned} \left(\Psi_{s,+1,n}, \hat{\Omega}_{x^0} \Psi_{s,+1,n} \right) &= \int d^2x \psi_{+1,n}^{(s)\dagger}(x) \left(\varepsilon_{+1,n}^{(s)} - qA_0 \right) \psi_{+1,n}^{(s)}(x), \\ \left(\Psi_{s,+1,\alpha}^c, \hat{\Omega}_{x^0} \Psi_{s,+1,\alpha}^c \right) &= 2 \int d^2x \psi_{+1,\alpha}^{(s)c\dagger}(x) \left(\varepsilon_{+1,\alpha}^{(s)c} + qA_0 \right) \psi_{+1,\alpha}^{(s)c}(x). \end{aligned}$$

Levando em conta a forma de $\varepsilon^{(s)}$ no caso geral (5.14,5.15), têm-se $\varepsilon_{+1,n}^{(s)} - qA_0 > 0$ e $\varepsilon_{+1,\alpha}^{(s)c} + qA_0 > 0$, e daí resulta (4.33).

Este trabalho não excede o limite do setor de uma partícula, e, portanto, somente elementos de matriz entre estados de uma partícula de funções bem-ordenadas das observáveis físicas,

$$\mathcal{F} \left(\hat{X}^k, \hat{P}_k, \hat{\Xi}^k, \hat{H}_{x^0} \right) = \text{bdiag} \left(f \left(x^k, \hat{p}_k, \hat{\xi}^k, \hat{H} \left(x^0 \right) \right), f^c \left(x^k, \hat{p}_k, \hat{\xi}^k, \hat{H}^c \left(x^0 \right) \right) \right)$$

são de interesse,

$$\left(\Psi_{s,+1,n}, \mathcal{F} \Psi_{s,+1,m} \right) = \left(\Psi_{s,+1,n}, f \Psi_{s,+1,m} \right)_D, \quad \left(\Psi_{s,+1,\alpha}^c, \mathcal{F} \Psi_{s,+1,\beta}^c \right) = \left(\Psi_{s,+1,\alpha}^c, f^c \Psi_{s,+1,\beta}^c \right)_D.$$

É fácil ver que valores esperados de $\hat{\Xi}^k$ para os estados (3.19) são nulos. Ademais, os estados no subespaço físico são autoestados do operador conservado \hat{S}_{x^0} (4.29),

$$\hat{S}_{x^0} \Psi_{s,+1,n} = \frac{\hbar}{2} s \Psi_{s,+1,n}, \quad \hat{S}_{x^0} \Psi_{s,+1,\alpha}^c = \frac{\hbar}{2} s \Psi_{s,+1,\alpha}^c.$$

Logo a dinâmica do produto de operadores $\hat{\Xi}^k$ é trivial, o que torna possível subtrair estes observáveis das funções \mathcal{F} , e reduzir o subespaço físico \mathcal{R}_{ph} da MQ a um subespaço físico efetivo necessário ao cálculo de elementos de matriz de funções $\mathcal{F}(\hat{X}^k, \hat{P}_k, \hat{H}_{x^0})$. Seguindo a decomposição dos vetores de 16 componentes $\Psi_{s,+1,n}$ e $\Psi_{s,+1,\alpha}^c$ em termos de espinores de duas componentes $\psi_{+1,n}^{(s)}$ e $\psi_{+1,\alpha}^{(s)c}$, define-se o setor físico efetivo $\mathcal{R}_{\text{ph}}^{\text{eff}}$ como o espaço de estados

$$\psi_{+1,n}^{(s)} = \begin{pmatrix} \psi_{+1,n}^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{+1,\alpha}^{(s)c} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{+1,\alpha}^{(s)c} \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

A dinâmica nesta representação é ditada pela hamiltoniana

$$\hat{H}_s = \text{bdiag}(\hat{h}_s, \hat{h}_s^c), \quad \hat{h}_s = qA_0 + \Gamma_s^0 [m + \Gamma_s^k (\hat{p}_k + qA_k)], \quad \hat{h}_s^c = \hat{h}_s \Big|_{q \rightarrow -q}, \quad (4.35)$$

e o cálculo dos elementos de matriz de \mathcal{F} se simplifica para

$$\begin{aligned} (\Psi_{s,+1,n}, \mathcal{F} \Psi_{s,+1,m}) &= (\psi_{+1,n}^{(s)}, f(x^k, \hat{p}_k, \hat{h}_s) \psi_{+1,m}^{(s)}), \\ (\Psi_{s,+1,\alpha}^c, \mathcal{F} \Psi_{s,+1,\beta}^c) &= (\psi_{+1,\alpha}^{(s)c}, f^c(x^k, \hat{p}_k, \hat{h}_s) \psi_{+1,\beta}^{(s)c}). \end{aligned}$$

No subespaço físico efetivo $\mathcal{R}_{\text{ph}}^{\text{eff}}$, os operadores $\hat{\zeta}$, \hat{S}_{x^0} e \hat{S}^{QM} se tornam, respectivamente,

$$\hat{\zeta} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\text{eff}} = \frac{s}{2} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\text{eff}}^{QM} = \hat{\zeta} \hat{S}_{\text{eff}}. \quad (4.36)$$

Comparando (4.34) e (4.35) com os resultados do capítulo 5, será possível concluir que o subespaço físico efetivo $\mathcal{R}_{\text{ph}}^{\text{eff}}$ coincide com o setor de uma partícula da teoria quântica do campo espinorial em 2 + 1 dimensões.

4.5 Limite semiclássico

Nesta seção será provado que o hamiltoniano quântico \hat{H}_τ (4.5) constitui uma realização consistente de seu análogo clássico \mathcal{H}_{eff} . A análise será restrita ao caso do campo eletromagnético independente do tempo. A contribuição do campo elétrico não é essencial e pode ser compreendida em perfeita analogia com o mesmo problema em 3 + 1 dimensões [3].

No limite semiclássico, os valores esperados das observáveis quânticas em certos estados especiais, pacotes de onda suficientemente localizados no espaço, satisfazem equações clássicas de movimento, em termos de parênteses de Poisson. Esses estados são caracterizados pelos valores médios das coordenadas e momentos, e se mantêm coesos por um período de tempo em que os desvios quadráticos médios das coordenadas e momentos é muito menor que certas escalas características do sistema. De acordo com estas restrições ao pacote de ondas semiclássico, é natural considerar apenas campos de fundo independentes do tempo.

A correspondência com a teoria clássica requer, em primeiro lugar, que o operador $\hat{\Omega}$ seja positivo no setor físico, pois a grandeza clássica ω_0 é positiva. Isto foi feito na seção anterior para estados físicos exatos. Para provar que $\hat{\Omega}$ é uma realização quântica consistente de ω_0 , é suficiente mostrar que o operador $\hat{\Omega}^2$ (4.11) tem o limite semiclássico certo, i.e., ele deve possuir o mesmo valor esperado no pacote de ondas semiclássico Ψ_s^{cl} que o operador $\tilde{\Omega}^2$ obtido diretamente por quantização da expressão clássica correspondente

$$\tilde{\Omega}^2 = \omega_0^2 \Big|_{\eta \rightarrow \hat{\eta}}, \quad \omega_0 = \sqrt{m^2 + (p_k + qA_k)^2 - 2iqF_{kl}\xi^k\xi^l}.$$

Logo,

$$\tilde{\Omega}^2 = \text{bdiag}(\hat{\omega}^2, \hat{\omega}^2), \quad \hat{\omega}^2 = m^2 + (\hat{p}_k + qA_k)^2 - 2iqF_{kl}\hat{\xi}^k\hat{\xi}^l.$$

Deve-se mostrar, pois, que

$$\left(\Psi_s^{cl}, \hat{\Omega}^2 \Psi_s^{cl} \right) = \left(\Psi_s^{cl}, \tilde{\Omega}^2 \Psi_s^{cl} \right), \quad (4.37)$$

com produto escalar definido por (4.3). O pacote de ondas semiclássico Ψ_s^{cl} é uma superposição de estados do espaço físico \mathcal{R}_{ph} e, portanto, corresponde a uma superposição de estados de partícula ou de antipartícula. No primeiro caso, tem-se

$$\Psi_s^{cl}(x) = \sum_n c_{+1,n}^{(s)} \Psi_{s,+1,n}(x).$$

A análise do segundo caso é completamente análoga, e será omitida.

A forma geral dos estados semiclássicos Ψ_s^{cl} é o mesmo de qualquer estado Ψ_s do subespaço físico (4.30),

$$\Psi_s^{cl} = \begin{pmatrix} \Psi_s^{cl} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_s^{cl} = \begin{pmatrix} \psi_s^{cl} \\ \gamma^0 \psi_s^{cl} \end{pmatrix}, \quad \psi_{+1}^{cl} = \begin{pmatrix} \psi^{cl(s)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{-1}^{cl} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^1 \psi^{cl(s)} \end{pmatrix}.$$

Conseqüentemente, o estado Ψ_s^{cl} satisfaz, por construção, o vínculo $\hat{T}_3 \Psi_s^{cl} = 0$. Em termos dos

espinores de duas componentes $\psi^{cl(s)}$, a equação (4.37) se torna

$$\left(\psi^{cl(s)}, \hat{h}_s^2 \psi^{cl(s)} \right) = \left(\psi^{cl(s)}, \hat{\epsilon}_{+,s}^2 \psi^{cl(s)} \right), \quad (4.38)$$

em que

$$\hat{\epsilon}_s^2 = m^2 + (\hat{p}_k + qA_k)^2 + s\hbar qF_{12}, \quad (4.39)$$

e \hat{h}_s dado por (4.35).

Por definição, o estado Ψ_s^{cl} é tal que os valores médios

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \left(\Psi_s^{cl}(x^0), \hat{X} \Psi_s^{cl}(x^0) \right) = \left(\psi^{cl(s)}(x^0), \mathbf{x} \psi^{cl(s)}(x^0) \right)_D, \\ \bar{\mathbf{p}} &= \left(\Psi_s^{cl}(x^0), \hat{\mathbf{P}} \Psi_s^{cl}(x^0) \right) = \left(\psi^{cl(s)}(x^0), \hat{\mathbf{p}} \psi^{cl(s)}(x^0) \right)_D, \end{aligned}$$

evoluem segundo as equações de movimento clássicas

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}^k}{dx^0} &= \{ \bar{x}^k, \bar{\epsilon}_s(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}) \}, \\ \frac{d(\bar{p}_k + qA_k(\bar{\mathbf{x}}))}{dx^0} &= \{ \bar{p}_k + qA_k(\bar{\mathbf{x}}), \bar{\epsilon}_s(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}) \}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_s(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}) &= \left(\Psi_s^{cl}, \tilde{\Omega} \Psi_s^{cl} \right) = \left(\psi^{cl(s)}, \hat{\epsilon}_s \psi^{cl(s)} \right)_D, \\ i\hbar \partial_0 \psi^{cl(s)}(x^0) &= \hat{\epsilon}_s \psi^{cl(s)}(x^0), \end{aligned}$$

onde a hamiltoniana obtida por quantização direta $\hat{\epsilon}$ pode ser aproximada, de acordo com o limite semiclássico, por

$$\hat{\epsilon}_s = \bar{\epsilon}_s + \frac{\partial \bar{\epsilon}_s}{\partial \bar{x}^k} (x^k - \bar{x}^k) + \frac{\partial \bar{\epsilon}_s}{\partial \bar{p}_k} (\hat{p}_k - \bar{p}_k), \quad \bar{\epsilon}_s(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}) = \sqrt{m^2 + (\bar{p}_k + qA_k(\bar{\mathbf{x}}))^2 + s\hbar qF_{12}}. \quad (4.40)$$

De fato, o hamiltoniano clássico \mathcal{H}_{eff} (3.23), no subespaço físico ($T_3 \equiv 0$), como função dos valores médios $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{p}}$, identifica-se com $\bar{\epsilon}$ (4.40), para s em $\bar{\epsilon}$ medido em unidades de \hbar .

Por analogia às soluções da equação de Dirac para um campo magnético estático, a forma da função de onda quasiclássica pode ser expressa por

$$\psi^{cl(s)} = [\Gamma_s^0 \hat{\epsilon}_s - \Gamma_s^k (\hat{p}_k + qA_k) + m] \varphi^{cl(s)}, \quad (4.41)$$

com $\varphi^{cl(s)}$ satisfazendo a equação quadrática

$$(\hat{\epsilon}^2 - D) \varphi^{cl(s)} = 0, \quad D = m^2 - P_k P^k + s \hbar F_{12} \sigma^3.$$

Para haver consistência entre a expressão de $\hat{\epsilon}$ dada por (4.39), e a equação acima, é necessário escolher $\varphi^{cl(s)}$ como

$$\sigma^3 \varphi^{cl(s)} = \varphi^{cl(s)} \Leftrightarrow \varphi^{cl(s)}(x) = \begin{pmatrix} f^{cl(s)}(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para o pacote de ondas especificado acima, verifica-se que

$$\hat{h}_s \psi^{cl(s)} = \hat{\epsilon}_s \psi^{cl(s)}.$$

Logo, no limite semiclássico, a evolução do pacote de ondas é especificada igualmente pelo hamiltoniano da MQ \hat{h}_s e aquele obtido por quantização direta, $\hat{\epsilon}$, e, em particular,

$$\left(\psi^{cl(s)}, \hat{h}_s^2 \psi^{cl(s)} \right)_D = \left(\psi^{cl(s)}, \hat{\epsilon}_s^2 \psi^{cl(s)} \right) = \bar{\epsilon}^2(\mathbf{x}, \mathbf{p}).$$

Capítulo 5

Comparação com a Teoria de Campo¹

Neste capítulo será dada uma interpretação da MQ construída no capítulo anterior, comparando-a à dinâmica do setor de uma partícula da TQC do campo espinorial. Primeiro, mostrar-se-á que esse setor da TQC pode ser formulado em termos de uma MQ relativística, sempre que esse setor estiver bem definido. Em seguida, será mostrado que esse setor da TQC pode ser identificado com a MQ do capítulo precedente.

O setor de uma partícula da TQC só pode ser bem definido em campos de fundo que não criem partículas do vácuo, como campos não-singulares e independentes do tempo [20]. A quantização do campo espinorial aqui apresentada será restrita a campos desta classe, para simplificar a apresentação. Uma generalização para campos que não violem a estabilidade do vácuo pode ser feita de modo similar [20]. Como exemplos de campos singulares, há os campos de Coulomb supercríticos, e campos elétricos em calibres independentes do tempo com potenciais crescentes no infinito espacial.

5.1 Formulação lagrangiana

O campo de Dirac clássico em $2 + 1$ dimensões descreve campos fermiônicos $\psi_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, que são entendidos como elementos geradores de uma álgebra de Grassmann de dimensão infinita,

$$\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y) + \psi_\beta(y) \psi_\alpha(x) = 0.$$

¹Nesta capítulo, $\hbar = 1$, a massa de repouso será denotada por M , e não haverá menção explícita da representação específica das matrizes de Dirac, i.e., $\Gamma_s \equiv \Gamma$, $\psi^{(s)} \equiv \psi$, $\bar{\psi}^{(s)} \equiv \bar{\psi}$, e assim por diante.

O funcional ação para o campo espinorial num campo eletromagnético de fundo é dado por

$$I[\psi, \bar{\psi}] = \int d^3x \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \bar{\psi} (\Gamma^\mu P_\mu - M) \psi, \quad P_\mu = (i\partial_\mu - qA_\mu), \quad (5.1)$$

em que soma sobre índices repetidos $\mu = 0, 1, 2$ está subentendida, q é uma carga algébrica (para elétrons $q = -e < 0$), Γ^μ são as matrizes gamma em $2 + 1$ dimensões (A.1), e $\bar{\psi} = \psi^\dagger \Gamma^0$.

As equações de Euler-Lagrange que seguem de (5.1) são

$$\begin{aligned} \frac{\delta I}{\delta \psi} = 0 &\Leftrightarrow \bar{\psi} \left[(i\overleftarrow{\partial}_\mu + qA_\mu) \Gamma^\mu + M \right] = 0, \\ \frac{\delta I}{\delta \bar{\psi}} = 0 &\Leftrightarrow [(i\partial_\mu - qA_\mu) \Gamma^\mu - M] \psi = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Invariância da ação (5.1) por translações do espaço-tempo, $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta a^\mu$, $\partial_\nu \delta a^\mu = 0$, para campos que se transformam de acordo com

$$\delta \psi(x) = \delta A_\mu(x) = 0,$$

dá a equação de continuidade (veja apêndice B)

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \partial^\nu A_\mu, \quad (5.3)$$

em que $T^{\mu\nu}$ é o tensor de energia e momento para o campo espinorial livre,

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} \partial^\nu \psi - \mathcal{L}(x) \eta^{\mu\nu}. \quad (5.4)$$

No caso geral, não há nenhuma grandeza conservada devido à inhomogeneidade no lado direito de (5.3).

É útil considerar as identidades de Noether associadas a invariância de Lorentz da ação (5.1). Por transformações de Lorentz infinitesimais

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \quad (5.5)$$

as coordenadas x^μ , os campos ψ^α e o potencial A_μ se transformam como

$$\begin{aligned} \delta x^\rho &= i\omega^{\mu\nu} (X_{\mu\nu})^\rho{}_\sigma x^\sigma, \quad (X_{\mu\nu})^\sigma{}_\lambda = -i\delta^\sigma_\mu \eta_{\nu\lambda} + i\delta^\sigma_\nu \eta_{\mu\lambda}, \\ \delta \psi^l &= i\omega^{\mu\nu} (X_{\mu\nu})^l{}_m \psi^m, \quad (X_{\mu\nu})^l{}_m = -\frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \\ \delta A_\rho &= i\omega^{\mu\nu} (X_{\mu\nu})^\sigma{}_\rho A_\sigma, \quad X_\rho{}^\sigma = \eta_{\rho\alpha} X^\alpha{}_\beta \eta^{\beta\sigma}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde $(X_{\mu\nu})^l_m$ e $(X_{\mu\nu})^\rho_\sigma$ fornecem uma representação matricial da álgebra de Lie do grupo de Lorentz próprio,

$$i[X_{\mu\nu}, X_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\sigma}X_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}X_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\rho}X_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}X_{\mu\rho},$$

tanto para a representação do campo quanto para a vetorial, respectivamente. Substituição das expressões (5.6) em (B.4) conduz a

$$\partial_\rho J_{\mu\nu}^\rho = K_{\mu\nu},$$

em que

$$J_{\mu\nu}^\rho = L_{\mu\nu}^\rho + S_{\mu\nu}^\rho, \quad K_{\mu\nu} = q\bar{\psi}(\gamma_\mu A_\nu - \gamma_\nu A_\mu)\psi + q\bar{\psi}\gamma^\sigma\psi(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)A_\sigma.$$

A componente de momento angular $L_{\mu\nu}^\rho$ da corrente $J_{\mu\nu}^\rho$ é

$$L_{\mu\nu}^\rho = i\bar{\psi}\gamma^\rho(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\psi,$$

enquanto a contribuição devida a spin é

$$S_{\mu\nu}^\rho = \bar{\psi}\gamma^\rho\left(\frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\right)\psi. \quad (5.7)$$

Pode-se verificar que num campo magnético constante e uniforme, o termo K_{12} é nulo, portanto há uma corrente conservada, $\partial_\rho J_{12}^\rho = 0$, que dá a conservação do momento angular total ao longo do eixo x^0 ,

$$\frac{d}{dt} \int d^2x J_{12}^0 = \frac{d}{dt} \int d^2x \psi^\dagger \left(-i(x^1\partial_2 - x^2\partial_1) + \frac{1}{2}\sigma^3 \right) \psi = 0. \quad (5.8)$$

Finalmente, invariância por transformações de calibre globais $U(1)$

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-iq\alpha}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{iq\alpha}\bar{\psi}(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) \end{aligned} \quad (5.9)$$

leva à corrente de Noether relacionada a esta simetria interna, isto é, $j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. Isto segue da equação (B.3) ao se considerar a versão infinitesimal de (5.9) para campos satisfazendo as equações de movimento, e lembrando que para um transformação de simetria interna $\delta x^\mu = 0$,

$$\begin{aligned} \delta_r I \Big|_{\frac{\delta r I}{\delta \psi} = \frac{\delta r I}{\delta \psi^\dagger} = 0} &= \int d^3x \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} \delta_r \psi \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta_r A_\mu \right] = \int d^3x [\partial_\mu (q\alpha \bar{\psi}\gamma^\mu\psi)] \\ &= \int d^3x \partial_\mu (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \alpha = 0. \end{aligned}$$

Como α é arbitrário, tem-se $\partial_\mu j^\mu = 0$, $j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. A integral de $\partial_\mu j^\mu$ em todo o espaço dá

$$\int_V d^3x \partial_\mu j^\mu = \int_{\partial V} d\sigma_\mu j^\mu = 0,$$

em que $d\sigma_\mu$ é o elemento de hipersuperfície ortogonal ao eixo x^μ . Se os campos se anulam no infinito espacial, i.e., $\psi(x) \rightarrow 0$ para $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} d\sigma_0 j^0 &= \int_{t=t_1} d^3x j^0 - \int_{t=t_2} d^3x j^0 = - \int_{\partial V} d\sigma_k j^k = 0, \\ \int_{t=t_1} d^3x j^0 &= \int_{t=t_2} d^3x j^0, \end{aligned}$$

e portanto há uma carga conservada

$$Q = q \int d^2x \psi^\dagger \psi. \quad (5.10)$$

5.2 Hamiltonização

A hamiltonização da densidade lagrangiana, (5.1) seguirá o método geral para teorias com variáveis degeneradas (veja [16]). Sejam $N_\psi = 1$ e $N_{\bar{\psi}} = 0$, então a matriz hessiana generalizada é dada por

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\psi\bar{\psi}}(x, y) &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{\delta^2 L}{\delta\psi(x)\delta\bar{\psi}(y)} & \frac{\delta^2 L}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)} \\ \frac{\delta^2 L}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)} & \frac{\delta^2 L}{\delta\psi(x)\delta\bar{\psi}(y)} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\psi\partial\bar{\psi}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}\partial\psi} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}\partial\psi} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\psi\partial\bar{\psi}} \end{array} \right\| \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= \left\| \begin{array}{cc} 0 & -i\gamma^0 \\ i\gamma^0 & 0 \end{array} \right\| \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \equiv \bar{M}_{\psi\bar{\psi}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Logo, a teoria não é singular, pois o hessiano é

$$M = \det \bar{M}_{\psi\bar{\psi}} = -1.$$

Sejam $v = \dot{\psi}$ e $\bar{v} = \dot{\bar{\psi}}$ velocidades indeterminadas. A ação no formalismo de primeira ordem é

$$\begin{aligned} S^v &= \int d^3x [\mathcal{L}^v + \pi(\dot{\psi} - v)] = \int d^3x [\pi\dot{\psi} - \mathcal{H}^v], \\ \mathcal{L}^v &= \mathcal{L}|_{\dot{\psi}=v}, \quad \mathcal{H}^v = \pi v - \mathcal{L}^v. \end{aligned}$$

Devido à não-singularidade da teoria, todas as velocidades são variáveis auxiliares, cujas expressões podem ser obtidas das equações variacionais

$$\begin{aligned}\frac{\delta_r S^v}{\delta v} &= \frac{\partial_r \mathcal{L}^v}{\partial v} - \pi = i\bar{\psi}\Gamma^0 - \pi = 0 \Rightarrow \bar{\psi} = -i\pi\Gamma^0, \\ \frac{\delta_r S^v}{\delta \bar{\psi}} &= \frac{\partial_r \mathcal{L}^v}{\partial \bar{\psi}} = -i\Gamma^0 v + (q\Gamma^0 A_0 - \Gamma^k P_k + M) \psi = 0 \Rightarrow v = -i\Gamma^0 (q\Gamma^0 A_0 - \Gamma^k P_k + M) \psi.\end{aligned}$$

Logo, todas as velocidades foram expressas em termos das coordenadas e dos momentos, $\bar{\psi} = \bar{\psi}(\pi)$, $v = v(\psi)$. Substituindo essas funções em \mathcal{H}^v , tem-se

$$\mathcal{H}_{\text{ph}} = -i\pi\Gamma^0 (q\Gamma^0 A_0 - \Gamma^k P_k + M) \psi = -i\pi\hat{h}\psi,$$

em que

$$\hat{h} = qA_0 + \Gamma^0 (M - \Gamma^k P_k). \quad (5.11)$$

A ação hamiltoniana no formalismo de primeira ordem se torna

$$S^H = \int d^3x [\pi\dot{\psi} - \mathcal{H}_{\text{ph}}],$$

com

$$\frac{\delta_r S^H}{\delta \pi} = 0 \Rightarrow \dot{\psi} = \{\psi, H_{\text{ph}}\}, \quad \frac{\delta_r S^H}{\delta \psi} = 0 \Rightarrow \dot{\pi} = \{\pi, H_{\text{ph}}\},$$

$$H_{\text{ph}} = \int d^3x \mathcal{H}_{\text{ph}},$$

onde os parênteses de Poisson entre dois funcionais de paridade definida $F[\psi, \pi]$ e $G[\psi, \pi]$ é dado por

$$\{F, G\} = \int d^2x \left(\frac{\delta_r F}{\delta \psi^\alpha} \frac{\delta_l G}{\delta \pi_\alpha} - (-1)^{\epsilon(F)\epsilon(G)} \frac{\delta_r G}{\delta \psi^\alpha} \frac{\delta_l F}{\delta \pi_\alpha} \right).$$

No decurso da quantização do modelo (5.1) os campos ψ e π se tornam operadores de Heisenberg $\hat{\Psi}$, $\hat{\pi}$ com relações de comutação para tempo fixo dadas pela correspondência $[\hat{F}, \hat{G}]_+ = i\{F, G\}$, para grandezas ímpares F, G ,

$$\begin{aligned}[\hat{\Psi}_\alpha(x), \hat{\pi}_\beta(y)]_+ \Big|_{x_0=y_0} &= i [\hat{\Psi}_\alpha(x), \hat{\Psi}_\beta^+(y)]_+ \Big|_{x_0=y_0} \\ &= i \{\Psi_\alpha(x), \pi_\beta(y)\} = i\delta_{\alpha\beta} \delta(x-y).\end{aligned} \quad (5.12)$$

5.3 Propriedades gerais do espectro da hamiltoniana de Dirac para o caso estacionário

Para o caso em que o campo de fundo eletromagnético é estático, a hamiltoniana (5.11) não depende de x^0 , dando lugar à equação de autovalor

$$\hat{h}\psi(\mathbf{x}) = \varepsilon\psi(\mathbf{x}), \quad (5.13)$$

onde $\psi(\mathbf{x})$ são soluções da equação de Schrödinger (estacionárias) (5.13). Seja

$$\psi(\mathbf{x}) = [\Gamma^0(\varepsilon - qA_0) + \Gamma^k(i\partial_k - qA_k) + m]\varphi(\mathbf{x}).$$

Então $\varphi(\mathbf{x})$ satisfaz a equação

$$[(\varepsilon - qA_0)^2 - D]\varphi(\mathbf{x}) = 0,$$

em que $D = m^2 - P_k P^k + \frac{i}{4}qF_{\mu\nu}[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]$. O par (ε, φ) é uma solução da equação acima caso satisfaça

$$\varepsilon = qA_0 + \sqrt{\varphi^{-1}D\varphi} \Rightarrow \varepsilon - qA_0 > 0 \quad (5.14)$$

ou

$$\varepsilon = qA_0 - \sqrt{\varphi^{-1}D\varphi} \Rightarrow \varepsilon - qA_0 < 0. \quad (5.15)$$

Seja $\varphi_{+1,n}$ solução da equação (5.14) com energia $\varepsilon_{+1,n}$, i.e., correspondendo ao ramo superior do espectro de energia; e seja $\varphi_{-1,\alpha}$ solução da equação (5.15) com energia $\varepsilon_{-1,\alpha}$, correspondendo ao ramo inferior do espectro de energia. Aqui n e α são números quânticos que descrevem a possível assimetria existente no espectro de energia entre os dois ramos para um potencial A_0 arbitrário.

As soluções $\psi_{+,n}$ e $\psi_{-,\alpha}$ de (5.13), construídas de $\varphi_{+,n}$ e $\varphi_{-,\alpha}$, satisfazem às relações de completeza e ortogonalidade

$$(\psi_{+1,n}, \psi_{+1,m})_D = \delta_{nm}, \quad (\psi_{-1,\alpha}, \psi_{-1,\beta})_D = \delta_{\alpha\beta}, \quad (\psi_{+1,n}, \psi_{-1,\alpha})_D = 0, \quad (5.16)$$

$$\sum_{n,\alpha} [\psi_{+1,n}(x)\psi_{+1,n}^\dagger(y) + \psi_{-1,\alpha}(x)\psi_{-1,\alpha}^\dagger(y)] = \delta(x-y) \quad x_0 = y_0, \quad (5.17)$$

onde

$$\psi_{+1,n}(x) = e^{-i\varepsilon_{+1,n}x^0}\psi_{+1,n}(x), \quad \psi_{-1,\alpha}(x) = e^{-i\varepsilon_{-1,\alpha}x^0}\psi_{-1,\alpha}(x). \quad (5.18)$$

Conjugação de carga é dada pela regra,

$$\psi_{+1,\alpha}^c = \Gamma^2\psi_{-1,\alpha}^*, \quad \psi_{-1,n}^c = \Gamma^2\psi_{+1,n}^*.$$

Os estados de carga conjugada definidos acima satisfazem a seguinte equação de autovalor

$$\hat{h}^c \psi_{+1,\alpha}^c = \varepsilon_{+1,\alpha}^c \psi_{+1,\alpha}^c, \quad \hat{h}^c \psi_{-1,n}^c = \varepsilon_{-1,n}^c \psi_{-1,n}^c, \quad \hat{h}^c = \Gamma^2 \hat{h}^* \Gamma^2, \quad \varepsilon_{+,\alpha}^c = -\varepsilon_{-,\alpha}, \quad \varepsilon_{-1,n}^c = -\varepsilon_{+1,n}. \quad (5.19)$$

5.4 Quantização

Utilizando o conjunto completo (5.18), pode-se decompor o operador de campo $\hat{\Psi}(x)$ como

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_n a_n \psi_{+1,n} + \sum_\alpha b_\alpha^+ \psi_{-1,\alpha}. \quad (5.20)$$

Das relações de comutação (5.12) e das condições de ortogonalidade (5.16), temos

$$[a_n, a_m^+]_+ = [b_\alpha, b_\beta^+]_+ = \delta_{\alpha\beta}, \quad [a_n, a_m]_+ = [b_\alpha, b_\beta]_+ = 0,$$

que define dois conjuntos de operadores de criação e aniquilação, a_n, a_n^+ e b_α, b_α^+ .

O operador hamiltoniano da teoria quântica de campos é

$$\hat{H}^{QFT} = \int : \hat{\Psi}^\dagger \hat{h} \hat{\Psi} : dx,$$

obtido de (5.11), onde o símbolo repetido $:$ se refere ao ordenamento de Wick dos operadores de criação e aniquilação. Inserindo a expansão (5.20), e levando em conta as condições de ortogonalidade (5.16) e a álgebra dos operadores de criação e aniquilação, o operador hamiltoniano na TQC fica

$$\hat{H}^{QFT} = \sum_n \varepsilon_{+1,n} a_n^+ a_n - \sum_\alpha \varepsilon_{-1,\alpha} b_\alpha^+ b_\alpha = \sum_n \varepsilon_{+1,n} a_n^+ a_n + \sum_\alpha \varepsilon_{+1,\alpha}^c b_\alpha^+ b_\alpha.$$

A partir da carga conservada (5.10), são definidos o operador de carga e o operador de número

$$\hat{Q}^{QFT} = q \int d^2x : \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} := q \left(\sum_n a_n^+ a_n - \sum_\alpha b_\alpha^+ b_\alpha \right), \quad (5.21)$$

$$\hat{N} = \sum_n a_n^+ a_n + b_\alpha^+ b_\alpha. \quad (5.22)$$

O estado de vácuo $|0\rangle$ é definido como o vetor nulo dos operadores de aniquilação: $a_n |0\rangle = b_\alpha |0\rangle = 0$ para todo n e α .

5.5 Setor de uma partícula e identificação com MQ

Seja \mathcal{R} o espaço de Hilbert dos estados de uma partícula, i.e, \mathcal{R} é a reunião disjunta $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{10} \cup \mathcal{R}_{01}$, $\mathcal{R}_{10} \cap \mathcal{R}_{01} = \{0\}$, do subespaço de partícula \mathcal{R}_{10} com o subespaço de antipartícula \mathcal{R}_{01} ,

$$|\Psi\rangle = \left(\sum_n f_n a_n^+ |0\rangle, \sum_\alpha h_\alpha b_\alpha^+ |0\rangle \right) \in \mathcal{R}, \quad \sum_n f_n a_n^+ |0\rangle \in \mathcal{R}_{10}, \quad \sum_\alpha h_\alpha b_\alpha^+ |0\rangle \in \mathcal{R}_{01},$$

assumindo $\sum_n |f_n|^2 < \infty$ e $\sum_\alpha |h_\alpha|^2 < \infty$. Assim, estados físicos $|\Psi\rangle$ pertencem ou ao subespaço de partícula \mathcal{R}_{10} ou ao subespaço de antipartícula \mathcal{R}_{01} , em acordo com a regra de superseleção [2]. Em outras palavras, os estados físicos $|\Psi\rangle$ são autoestados do operador de carga (5.21),

$$\hat{Q}^{QFT} |\Psi\rangle = \zeta q |\Psi\rangle, \quad \zeta = \pm 1. \quad (5.23)$$

O espectro de \hat{H}^{QFT} no setor de uma partícula reproduz exatamente o espectro de energia de partículas e antipartículas sem os níveis negativos. Os estados $|\Psi\rangle$ evoluem no tempo de acordo com a equação de Schrödinger

$$i\partial_0 |\Psi(x_0)\rangle = \hat{H}^{QFT} |\Psi(x_0)\rangle,$$

e permanecem no setor de uma partícula devido ao fato de que a hamiltoniana \hat{H}^{QFT} comuta com o operador de número (5.22). Os operadores $\hat{\Psi}$ e $\hat{\Psi}^c$ podem ser decompostos como

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} &= \hat{\Psi}_{(-)} + \hat{\Psi}_{(+)}, \\ \hat{\Psi}^c &= \hat{\Psi}_{(-)}^c + \hat{\Psi}_{(+)}^c, \end{aligned}$$

em que $\hat{\Psi}^c$ é o operador de Heisenberg conjugado ao campo $\hat{\Psi}$, definido por $\hat{\Psi}_{(\pm)}^c = \left(\hat{\Psi}_{(\mp)}^+ \gamma^2 \right)^T$, e os termos com sinais mais e menos são dados por

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{(-)} &= \sum_n a_n \psi_{+1,n}, \quad \hat{\Psi}_{(+)} = \sum_\alpha b_\alpha^+ \psi_{-1,\alpha}, \\ \hat{\Psi}_{(-)}^c &= \sum_\alpha b_\alpha \psi_{+1,\alpha}^c, \quad \hat{\Psi}_{(+)}^c = \sum_n a_n^+ \psi_{-1,n}^c. \end{aligned}$$

A seguir será definida a representação de coordenadas do espaço de Fock de estados de uma partícula dependentes do tempo $|\Psi(x_0)\rangle$ em termos das funções de onda

$$\psi_{+1}(x) = \langle 0 | \hat{\Psi}_{(-)} | \Psi(x_0) \rangle, \quad \psi_{+1}^c(x) = \langle 0 | \hat{\Psi}_{(-)}^c | \Psi(x_0) \rangle.$$

Como $|\Psi(x_0)\rangle$ pertence ou ao subespaço de partícula \mathcal{R}_{10} ou ao subespaço de antipartícula \mathcal{R}_{01} ,

define-se a representação de coordenadas de quatro componentes para cada representação das matrizes Γ como

$$\psi_{+1}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{+1}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{+1}^c(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{+1}^c(x) \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

onde $\psi_{+1} \equiv \psi_{+1}^{(s)}$ e $\psi_{+1}^c \equiv \psi_{+1}^{(s)c}$ para Γ_s . Por meio do operador de projeção para o setor de uma partícula,

$$\int (\hat{\Psi}^+ |0\rangle \langle 0| \hat{\Psi} + \hat{\Psi}^{c+} |0\rangle \langle 0| \hat{\Psi}^c) dx = 1,$$

é possível escrever o produto interno (Ψ, Ψ') em termos das funções de onda

$$(\psi_{+1}, \psi'_{+1}) = (\psi_{+1}, \psi'_{+1})_D, \quad (\psi_{+1}^c, \psi'_{+1}^c) = (\psi_{+1}^c, \psi'_{+1}^c)_D.$$

Não é difícil ver que as equações

$$\begin{aligned} \hat{H}^{QFT} |\Psi_n\rangle &= \varepsilon_{+,n} |\Psi_n\rangle, \\ \hat{H}^{QFT} |\Psi_\alpha^c\rangle &= \varepsilon_{+,\alpha}^c |\Psi_\alpha^c\rangle, \end{aligned}$$

em que $|\Psi_n\rangle = a_n^+ |0\rangle$ e $|\Psi_\alpha^c\rangle = b_\alpha^+ |0\rangle$, na representação de coordenadas têm a forma

$$\hat{H}\psi_{+,n} = \varepsilon_{+,n}\psi_{+,n}, \quad \hat{H}\psi_{+,\alpha}^c = \varepsilon_{+,\alpha}^c\psi_{+,\alpha}^c,$$

e, por conseguinte, para cada representação das matrizes Γ , o hamiltoniano \hat{H} pode ser identificado com

$$\hat{H} = \text{bdiag}(\hat{h}, \hat{h}^c), \quad (5.25)$$

onde

$$\psi_{+1,n} = \begin{pmatrix} \psi_{+1,n} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{+1,\alpha}^c = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{+1,\alpha}^c \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Está claro que na representação coordenadas o operador de carga \hat{Q} age de acordo com

$$q\hat{\zeta}\psi_{+1,n}(x) = q\psi_{+1,n}(x), \quad q\hat{\zeta}\psi_{+1,\alpha}^c(x) = -q\psi_{+1,\alpha}^c(x), \quad (5.27)$$

em que $\hat{\zeta} = \text{bdiag}(I, -I)$, em acordo com a regra de superseleção (5.23).

Assim, os estados (5.26) formam uma base na representação de coordenadas de \mathcal{R} . São autoestados do operador de carga da TQC e obedecem ao produto escalar

$$(\psi_{+1,n}, \psi_{+1,m}) = (\psi_{+1,n}, \psi_{+1,m})_D, \quad (\psi_{+1,\alpha}^c, \psi_{+1,\beta}^c) = (\psi_{+1,\alpha}^c, \psi_{+1,\beta}^c)_D, \quad (\psi_{+1,n}, \psi_{+1,\alpha}^c) = 0. \quad (5.28)$$

Nesse ponto, é possível comparar os resultados acima com a estrutura da MQ, (4.34) e (4.35), realizada para o modelo pseudoclássico estudado nos capítulos anteriores. O hamiltoniano na representação de coordenadas do setor de uma partícula da TQC em $2 + 1$ do campo espinorial, (ψ) , é precisamente o hamiltoniano (4.35) para uma representação das matrizes Γ fixa ($s = +1$ ou $s = -1$). Ademais, o espaço (5.26) da TQC no setor de uma partícula coincide com (4.34). Para os campos de fundo independentes do tempo considerados (e para quaisquer campos não singulares num dado instante de tempo), pode-se ver que, para uma definição apropriada do espaço de Hilbert, a MQ coincide com a TQC no setor de uma partícula.

Capítulo 6

Operador de Spin

O operador de spin pode ser entendido como a parte de spin da carga de Noether, conservada na ausência de campos externos,

$$J_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \int d^2x \psi^\dagger(x) J^{\nu\lambda} \psi(x),$$

onde

$$J^{\mu\nu} = L^{\nu\lambda} + S^{\nu\lambda}, \quad L^{\mu\nu} = x^\mu \hat{p}^\nu - x^\nu \hat{p}^\mu, \quad S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\Gamma^\mu, \Gamma^\nu], \quad \hat{p}^\mu = i\partial^\mu. \quad (6.1)$$

Em 3+1, a interpretação de spin é feita por meio dos estados de helicidade bem definida, construídos a partir de estados com $p^1 = p^2 = 0$. A escolha deste referencial particular em 3 + 1 dimensões faz com que os termos não-diagonais e dependentes do tempo na expressão do operador de spin na TQC sejam nulos, e assim o operador fica bem definido. Em 2+1, a escolha análoga seria considerar partículas com momento espacial nulo (estados de repouso). Assim, a partir da componente de spin correspondente da carga conservada J_0 em 2 + 1 dimensões

$$S_s = \int d^2x \psi^{(s)\dagger} \left(\frac{i}{4} [\Gamma_s^1, \Gamma_s^2] \right) \psi^{(s)},$$

escreve-se o operador de spin \hat{S}_s^{QFT} em TQC segundo a prescrição usual $\psi \rightarrow \hat{\psi}$,

$$\hat{S}_s^{QFT} = \int d^2x : \hat{\psi}^{(s)\dagger} \frac{1}{2} s \sigma^3 \hat{\psi}^{(s)} : . \quad (6.2)$$

No entanto, o operador de spin acima só está bem definido no referencial de repouso, onde é diagonal.

A interpretação de spin na teoria do campo espinorial pode ser feita alternativamente com o tensor de polarização de spin [21]. Assim, em 3 + 1 dimensões, em vez de se considerar a projeção

do operador de spin na direção do momento, pode-se utilizar o tensor conservado

$$M_{\mu\nu} = \int d^3x \psi^\dagger \hat{m}_{\mu\nu} \psi, \quad \hat{m}_{\mu\nu} = \frac{1}{2m} [\hat{h}, \sigma_{\mu\nu}]_+, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (6.3)$$

onde \hat{h} e γ^μ são o hamiltoniano e as matrizes de Dirac em 3 + 1 dimensões, respectivamente. No caso de um campo magnético uniforme e constante, a componente M_{12} deste tensor é conservada, e os potenciais eletromagnéticos podem ser escolhidos de tal forma que o momento p_3 seja constante de movimento. Para estados com $p_3 = 0$, o operador \hat{m}_{12} , na representação (4.17) das matrizes γ^μ , reduz-se a $\hat{m}_{12} = \frac{1}{2} \gamma^0 \Sigma^3$, e M_{12} fica

$$M_{12} = \frac{1}{2} \int d^2x \psi^\dagger \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \psi.$$

A integral sobre a coordenada x^3 pôde ser eliminada graças à dependência trivial em x^3 dos estados ψ com $p_3 = 0$. Escolhendo os estados ψ como autovetores de \hat{m}_{12} ,

$$\psi_{+1} = \begin{pmatrix} \psi^{(+1)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^{(-1)} \end{pmatrix},$$

tem-se

$$M_{12} = \frac{s}{2} \int d^2x \psi_s^\dagger \psi_s. \quad (6.4)$$

Logo, o operador correspondente em TQC \hat{M}_{12}^{QFT} é proporcional ao operador de carga (5.21) na representação s das matrizes Γ ,

$$\hat{M}_{12}^{QFT} = \frac{s}{2q} \hat{Q}^{QFT}. \quad (6.5)$$

Em 2 + 1 dimensões, a componente conservada do tensor de polarização de spin (6.3) num campo magnético uniforme e constante é simplesmente

$$M_{12} = \frac{s}{2} \int d^2x \psi^{(s)\dagger} \psi^{(s)}. \quad (6.6)$$

Logo, na representação de espinores de duas componentes, o operador de polarização de spin na TQC em 2 + 1 é trivial, e proporcional ao operador de carga (6.5).

Evidentemente, a expressão do operador (6.6) na representação de coordenadas da TQC do campo espinorial, (5.24), é simplesmente

$$\hat{M}_{12} = \frac{s}{2q} \hat{Q} \equiv \frac{s}{2} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

onde \hat{Q} é o operador de carga (5.27) na representação de coordenadas. Nesse ponto é possível atribuir uma interpretação física aos operadores \hat{S}_{x^0} e \hat{S}^{QM} da MQ. No subespaço físico efetivo \mathcal{R}_{ph}^{eff} da MQ, a expressão do operador \hat{S}^{QM} , (4.36), coincide com (6.7). Logo, \hat{S}^{QM} adquire a interpretação de operador de polarização de spin da MQ, segundo o qual, como na TQC, para s fixo, partículas tem polarização de spin oposta à das antipartículas (4.32). O operador \hat{S}_{x^0} no subespaço físico efetivo \mathcal{R}_{ph}^{eff} da MQ coincide com o produto dos operadores de sinal e de polarização de spin do setor de uma partícula da TQC, $\frac{1}{q}\hat{Q}$ e \hat{M}_{12} .

Capítulo 7

Conclusão

Neste trabalho, foi apresentada uma quantização consistente da partícula relativística espinorial em $2 + 1$ dimensões em campos eletromagnéticos arbitrários. No nível clássico, a teoria contém um vínculo de primeira classe que não pode ser fixado. No nível quântico, a presença deste vínculo leva a uma extensão do espaço de Hilbert a estados com 16 componentes. A MQ construída conduz à equação de Dirac em $2 + 1$ dimensões para funções de onda em campos eletromagnéticos. Em campos eletromagnéticos arbitrários que respeitem a estabilidade do vácuo, o setor físico da teoria quântica contém tanto partículas quanto antipartículas de níveis de energia positivos, e reproduz exatamente o setor de uma partícula da teoria quântica do campo espinorial em $2 + 1$ dimensões. Ademais, na MQ construída, alcança-se a teoria mínima para o elétron, i.e., em $2 + 1$ dimensões a partícula com spin só pode possuir um valor de polarização de spin.

Como foi o caso em $3 + 1$ dimensões [3], graças ao modo muito especial com que se construiu o espaço de Hilbert da MQ foi possível resolver o problema da realização da raiz clássica ω (3.23) e o problema de ordenamento relacionado. A solução para esse problema passou pela construção de um operador hamiltoniano cujo quadrado está em correspondência com o quadrado da grandeza clássica relacionada, e que possui o mesmo limite semiclássico que o quadrado do operador obtido por quantização direta. Uma segunda característica importante do espaço de Hilbert proposto diz respeito à duplicação do espaço de estados feita com a finalidade de tratar igualmente partículas e antipartículas. Graças à cuidadosa análise clássica do modelo, foi possível entender, exatamente como em $3 + 1$ dimensões, o papel crucial da variável ζ , e a conseqüente necessidade de duplicar o espaço de Hilbert da MQ. Assim, uma nova compreensão da mecânica quântica relativística foi apresentada, em que o espaço físico de estados já constitui um multipletto partícula-antipartícula sobre que agem as observáveis da MQ, não havendo necessidade de utilizar as soluções de energia negativa para obter os estados de antipartícula, como é usualmente feito.

Apêndice A

Matrizes de Dirac em 2 + 1 dimensões

Em 2 + 1 dimensões, existem duas representações, u e d , não equivalentes, das matrizes de Dirac:

$$\Gamma_s^0 = \sigma^3, \Gamma_s^1 = i\sigma^2, \Gamma_s^2 = -i\sigma^1, \quad (\text{A.1})$$

onde $\sigma = (\sigma^i)$ são as matrizes de Pauli,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

As matrizes γ_s satisfazem a relação de anticomutação que as define,

$$[\Gamma_s^\mu, \Gamma_s^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu},$$

e as propriedades

$$\Gamma_s^{0\dagger} = \Gamma_s^0, \Gamma_s^{i\dagger} = \Gamma_s^0 \Gamma_s^i \Gamma_s^0 = -\Gamma_s^i, \quad i = 1, 2.$$

Vamos demonstrar que as duas representações não são equivalentes. Se elas fossem, existiria uma matriz M tal que

$$\Gamma_{-1}^\mu M = M \Gamma_{+1}^\mu$$

para todo $\mu = 0, 1, 2$, que deveria satisfazer

$$[M, \sigma^1]_+ = [M, \sigma^2] = [M, \sigma^3] = 0,$$

o que é impossível.

Apêndice B

Identidade de Noether para o

campo espinorial em $3+1$

dimensões com campo

de Dirac

Apêndice B

Identidade de Noether para o campo espinorial em $2 + 1$ dimensões com campo eletromagnético de fundo

É interessante analisar a invariância do funcional ação (5.1) por um grupo de simetria contínuo G . As coordenadas de espaço-tempo x^μ , os campos canônicos ψ^a , $\psi^{\dagger a}$, e os campos externos A_μ se transformam de acordo com (diferentes) representações da álgebra de Lie de G como

$$\begin{aligned}x^\mu &\rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu = (X_i)^\mu{}_\nu x^\nu \delta a^i, \\ \psi^a &\rightarrow \psi'^a = \psi^a + \delta \psi^a, \quad \delta \psi^a = (X_i)^a{}_b \psi^b \delta a^i, \\ \psi^{\dagger a} &\rightarrow \psi'^{\dagger a} = \psi^{\dagger a} + \delta \psi^{\dagger a}, \quad \delta \psi^{\dagger a} = (X_i)_b{}^a \psi^{\dagger b} \delta a^i, \\ A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu + \delta A_\mu, \quad \delta A_\mu = (X_i)_\mu{}^\nu A_\nu \delta a^i\end{aligned}\tag{B.1}$$

Invariância da ação (5.1) por G significa

$$\delta_r I = \int d^3 x' \mathcal{L}'(x') - \int d^3 x \mathcal{L}(x) = 0,\tag{B.2}$$

onde

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}'(x', \psi'^a(x'), \psi'^{\dagger a}(x'), \partial'_\mu \psi'^a(x'), \partial'_\mu \psi'^{\dagger a}(x'), A'_\mu(x')).$$

A densidade lagrangiana $\mathcal{L}'(x')$ pode ser escrita, em primeira ordem em δx , como

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}'(x) + \partial_\mu \mathcal{L}(x) \delta x^\mu.$$

O jacobiano da transformação $x \rightarrow x'$ pode ser simplificado para

$$\det \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \det (\delta_\nu^\mu + \partial_\nu \delta x^\mu) = \exp \{ \text{tr} \ln (\delta_\nu^\mu + \partial_\nu \delta x^\mu) \} = \exp \{ \text{tr} \partial_\nu \delta x^\mu \} = \exp \{ \partial_\mu \delta x^\mu \} = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu.$$

Assim,

$$\delta_r I = \int d^3 x [(1 + \partial_\mu \delta x^\mu) (\mathcal{L}'(x) + \partial_\mu \mathcal{L}(x) \delta x^\mu) - \mathcal{L}(x)] = \int d^3 x [\bar{\delta} \mathcal{L}(x) + \partial_\mu (\mathcal{L}(x) \delta x^\mu)],$$

em que $\bar{\delta} \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x)$ contabiliza a diferença da forma de \mathcal{L} num mesmo ponto do espaço-tempo, i.e.,

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_r \mathcal{L}(x) &= \frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \psi^a} \bar{\delta}_r \psi^a + \frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \psi^{\dagger a}} \bar{\delta}_r \psi^{\dagger a} + \frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi^a} \bar{\delta}_r \partial_\mu \psi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \bar{\delta} A_\mu \\ &= \left(\frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \psi^a} - \partial_\mu \frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi^a} \right) \bar{\delta}_r \psi^a + \partial_\mu \left(\frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi^a} \bar{\delta}_r \psi^a \right) + \frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \psi^{\dagger a}} \bar{\delta}_r \psi^{\dagger a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \bar{\delta} A_\mu. \end{aligned}$$

Na última igualdade utilizou-se o fato de que $\bar{\delta}_r \partial_\mu \psi^a = \partial_\mu \bar{\delta}_r \psi^a$. Inserindo a expressão acima para $\bar{\delta}_r \mathcal{L}(x)$ em $\delta_r I$, tem-se

$$\begin{aligned} \delta_r I &= \int d^3 x \left[\frac{\delta_r I}{\bar{\delta} \psi^a} \bar{\delta}_r \psi^a + \frac{\delta_r I}{\bar{\delta} \psi^{\dagger a}} \bar{\delta}_r \psi^{\dagger a} + \partial_\mu \left(\frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi^a} \bar{\delta}_r \psi^a + \mathcal{L}(x) \delta x^\mu \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \bar{\delta} A_\mu \right], \quad (\text{B.3}) \\ \frac{\delta_r I}{\bar{\delta} \psi^a} &= \frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \psi^a} - \partial_\mu \frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi^a}, \quad \frac{\delta_r I}{\bar{\delta} \psi^{\dagger a}} = \frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \psi^{\dagger a}}. \end{aligned}$$

Levando em conta (B.1), as identidades $\delta_r \psi^a = \bar{\delta}_r \psi^a + \partial_\mu \psi^a \delta x^\mu$, $\delta_r \psi^{\dagger a} = \bar{\delta}_r \psi^{\dagger a} + \partial_\mu \psi^{\dagger a} \delta x^\mu$, e $\delta A_\mu = \bar{\delta} A_\mu + \partial_\nu A_\mu \delta x^\nu$, tem-se, para campos ψ^a satisfazendo as equações de movimento,

$$\begin{aligned} \delta_r I &= \int d^3 x \left\{ \partial_\mu \left[\frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi^a} \left((X_i)_b^a \psi^b - \partial_\nu \psi^a (X_i)_\sigma^\nu x^\sigma \right) \delta a^i + \mathcal{L}(x) (X_i)_\nu^\mu x^\nu \delta a^i \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \left((X_i)_\mu^\nu A_\nu - \partial_\nu A_\mu (X_i)_\sigma^\nu x^\sigma \right) \delta a^i \right\} \\ &= \int d^3 x \left[(\partial_\mu J_i^\mu - K_i) \delta a^i + J_i^\mu \partial_\mu \delta a^i \right], \end{aligned}$$

em que

$$J_i^\mu = \frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi^a} \left((X_i)_b^a \psi^b - \partial_\nu \psi^a (X_i)_\sigma^\nu x^\sigma \right) + \mathcal{L}(x) (X_i)_\nu^\mu x^\nu, \quad K_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \left(\partial_\nu A_\mu (X_i)_\sigma^\nu x^\sigma - (X_i)_\mu^\nu A_\nu \right). \quad (\text{B.4})$$

Para o caso em que os parâmetros do grupo são constantes, i.e., $\partial_\mu \delta a^i = 0$, devido à arbitrariedade de δa^i , tem-se

$$\partial_\mu J_i^{\mu\sigma} = K_i.$$

Referências Bibliográficas

- [1] L. Foldy and S. Wouthuysen, *Phys. Rep.* **78** (1950) 29; H. Feshbach and F. Villars, *Rev. Mod. Phys.* **30** (1958) 24; S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory* (Harper & Row, New York, 1961); S.R. de Groot and L.G. Suttrop, *Foundation of Electrodynamics* (North-Holland, Amsterdam, 1972); W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1997).
- [2] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. 1 (Cambridge University Press, New York, 1995).
- [3] S.P. Gavrilov and D.M. Gitman, *Quantization of point-like particles and consistent relativistic quantum mechanics*, *Int. J. Mod. Phys. A* **15** (2000) 4499.
- [4] F.A. Berezin and M.S. Marinov, *JETP Lett.* **21** (1975) 320; *Ann. Phys.* **104** (1977) 336.
- [5] D. Gitman and I. Tyutin, *JETP Lett.* **51** (1990) 214.
- [6] D. Gitman and I. Tyutin, *Class. Quant. Grav.* **7** (1990) 2131.
- [7] D.M. Gitman, A.E. Gonçalves and I.V. Tyutin, *Phys. Atom. Nuc.* **60** (1997) 665.
- [8] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, (World Scientific, Singapore, 1990).
- [9] W. Siegel, *Nucl. Phys.* **B156** (1979) 135; R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev.* **D23** (1981) 2291; J.F. Schonfeld, *Nucl. Phys.* **B185** (1981) 157; S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, *Ann. Phys. (N. Y.)* **140** (1982) 372; **185** (1988) 406(E).
- [10] M.S. Plyushchay, *Mod. Phys. Lett.* **A8** (1993), 937; J.L. Cortés, M.S. Plyushchay and L. Velázquez, *Phys. Lett.* **B306** (1993), 34.
- [11] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University (1964).

- [12] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, vol.3 of Course of Theoretical Physics, Pergamon Press London-Paris (1959).
- [13] L. Brink, P. Di Vecchia, and P. Howe, Nucl. Phys. **B118** (1977) 76; J. L. Martin, *Generalized classical dynamics*,
- [14] R. Casalbuoni, *The Classical Mechanics for Bose-Fermi Systems*, Il Nuovo Cimento, v.**33A**, N.3, p.389 (1976).
- [15] D.M. Gitman and I.V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, Springer-Verlag.
- [16] D.M. Gitman and I.V. Tyutin, *Hamiltonization of theories with degenerate degrees of freedom*, Nucl. Phys. **B630** (2002) 509; hep-th/0201143.
- [17] G. Fulop, D.M. Gitman, and I.V. Tyutin, *Reparametrization Invariance and Zero Hamiltonian Phenomenon*, in *Topics in Theoretical Physics II*, Festschrift for Abraham H. Zimerman Ed. H. Aratyn, L.Ferreira, J. Gomes, (IFT/UNESP-São Paulo-SP-Brazil-1998) pp. 286-295.
- [18] D.M. Gitman and I.V. Tyutin, *Pseudoclassical Description of Higher Spins in 2+1 Dimensions*, Int. Journ. Mod. Phys. **A12** (1997) 535.
- [19] M.G. Alford, J. March-Russel and F. Wilczek, *Enhanced baryon number violation due to cosmic strings*, Nucl. Phys., **B 328** (1989) 140-158.
- [20] E. Fradkin, D. Gitman, and S. Shvartsman, *Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum* (Springer-Verlag, Berlin, 1991).
- [21] A.A. Sokolov and I.M. Ternov, *Synchrotron Radiation* (Akademie-Verlag, Berlin, 1968).