

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3951ex.1

SBI-IFUSP



305M810T3951

**Estudo da Dinâmica da Aplicação do Círculo  
como Função de Parâmetros**

Andreza Fedalto

Orientadora: Coraci Pereira Malta 

Dissertação apresentada ao  
IFUSP para a obtenção do  
grau de mestre em ciências.

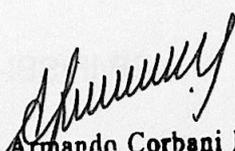
Banca Examinadora

Dra. Coraci Pereira Malta (IFUSP)

Dr. Iberê Luiz Caldas (IFUSP)

Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo (IMEUSP)

Dezembro de 2003

  
Prof. Armando Corbani Ferraz  
Presidente da Comissão de Pós Graduação

dez. 12/12/03

020.155552  
FZ9Ze

M

ex. 1

## FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Fedalto, Andreza

Estudo da Dinâmica da Aplicação do Círculo como  
Função de Parâmetros. São Paulo, 2003

Dissertação (Mestrado) Universidade de São Paulo  
Instituto de Física - Depto. de Física Matemática

Orientador: Profa. Dra. Coraci Pereira Malta  
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Caos;  
2. Aplicação do Círculo;  
3. Bolhas;  
4. Sistemas Dinâmicos.

USP/IF/SBI-075/2003

*Dedico ao meu sobrinho Victor*

# Agradecimentos

- Agradeço, primeiramente, à professora Coraci pela orientação durante a realização desse trabalho.
- Agradeço aos meus amigos que tiveram participação direta neste trabalho: Reyes, Viviane, Juliano, Thiago, Arnaldo, Pires, Karlúcio e Fábio.
- Agradeço aos amigos que tornaram minha estadia em São Paulo mais agradável: Simoninha, Maria Simone, Edson, Tia Luzia e família, Adriana, Alberto, Tiago, Sartoreli, Reynaldo, Renê, além dos já citados.
- Agradeço aos meus pais e familiares.
- Agradeço ao Rafael.
- Finalmente, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro que possibilitou a realização desse trabalho.

## Resumo

Estudamos a aplicação do círculo

$$x_{n+1} = Mx_n + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi x_n) + \Omega \pmod{1},$$

para  $M = 2$ , que é a aplicação do círculo de grau 2.

Para estudarmos a dinâmica da aplicação (1) com  $M = 2$  usamos métodos numéricos. Uma das análises feita foi para identificar qual comportamento a aplicação apresentava para determinadas combinações de parâmetros  $b$  e  $\Omega$ . Para estabelecer as mudanças estruturais do sistema, variando apenas um parâmetro, usamos o diagrama de bifurcação e a evolução do expoente de Lyapunov. Aqui pudemos observar como ocorreu a transição do caso conhecido de  $b = 0$  para  $b \neq 0$ . Também usamos os mapas de retorno para estudar regiões específicas com os parâmetros fixos, como as regiões próximas de bifurcação. Para ter uma visão geral do comportamento do sistema calculamos o expoente de Lyapunov no espaço de parâmetro, onde identificamos as regiões onde ocorrem o movimento caótico e movimento periódico. Ainda no espaço de parâmetros apresentamos os gráficos que mostram onde ocorrem as bifurcações. A aplicação não apresentou movimento quasiperiódico e mostrou a formação de bolhas no diagrama de bifurcação com a variação do parâmetro  $b$ .

## Abstract

We study the circle map

$$x_{n+1} = Mx_n + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi x_n) + \Omega \pmod{1},$$

for  $M = 2$ , which is the circle map degree 2.

To study this map we used methods numeric. An analysis was done to identify which behavior the map present for combination of  $b$  and  $\Omega$ . To stabilize structural changes in the system use bifurcation diagram and the evolution of Lyapunov exponent. Here we can see how occur the transition from  $b = 0$  to  $b \neq 0$ . Also use the return maps to study specific regions with fix parameters, like regions near of bifurcation. To get a overall view of behavior system we calculate the graph the Lyapunov exponent in the parameter space, where identify the regions which occur chaotic motion and period motion. Still in the parameter space we present the graph what show where occur the bifurcations. The map doesn't present quasiperiodic orbit and exhibit bubble formation in the bifurcation diagram with variation of parameter  $b$ .

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Aplicações Unidimensionais</b>	<b>3</b>
1.1 Crescimento Populacional . . . . .	3
1.2 Deslocamento de Bernoulli . . . . .	6
1.2.1 Teoria Ergódica para Sistemas Dinâmicos . . . . .	9
1.3 Aplicação do Círculo . . . . .	14
<b>2 Aplicação do Círculo de grau 2</b>	<b>33</b>
2.1 Diagrama de Bifurcação e a Evolução do Expoente de Lyapunov	36
2.1.1 Caos e Ergodicidade . . . . .	38
2.1.2 Bolhas Primárias . . . . .	45
2.1.3 Movimento Caótico-Periódico . . . . .	48
2.1.4 Duplicação de Período . . . . .	52
2.1.5 Biestabilidade . . . . .	56
2.2 Diagrama de Bifurcação no Espaço de Parâmetro . . . . .	59
2.2.1 Bolhas . . . . .	61
2.3 Expoente de Lyapunov no Espaço de Parâmetro . . . . .	72
<b>Conclusões e Comentários Finais</b>	<b>74</b>

# Introdução

Se pressionarmos repetidamente o botão função seno em nossas calculadoras, começando com um número qualquer,  $x_0$ , e no modo radiando, teremos sucessivas leituras:

$$x_1 = \sin x_0, x_2 = \sin x_1 \dots$$

Esse experimento, que muitas vezes é feito como um passatempo de forma despreocupada, exemplifica uma aplicação unidimensional. Dizemos que a aplicação é unidimensional porque os pontos  $x_n$  pertencem ao espaço unidimensional dos números reais. Uma aplicação é caracterizada por ser um sistema dinâmico em tempo discreto.

As aplicações são freqüentemente usadas como uma ferramenta para análise de equações diferenciais, onde a seção de Poincaré permite mostrar a existência de soluções periódicas, analisar a estabilidade das soluções e identificar atratores estranhos [7]. As aplicações também são usadas como modelo para fenômenos encontrados na natureza, como por exemplo em teoria de finanças, modelos para economia, sistemas mecânicos com pulsos periódicos, estudo de certas populações de animais, entre outras. Muitas vezes as aplicações são usadas apenas como simples exemplos de dinâmicas que apresentam caos, pois são fáceis e rápidas de serem simuladas em computadores.

Uma aplicação que possui sua dinâmica muito conhecida e que ainda desperta interesse é a aplicação do círculo. Inicialmente a aplicação do círculo foi estudada como um modelo geral de rota quasiperiódica para o caos [25, 24], também é usada como modelo para oscilador não-linear forçado [4, 32, 30], para junção de Josephson forçada [18, 31] e osciladores biológicos estimulados periodicamente [12, 7, 26]. São inúmeros os sistemas físicos e biológicos que podem ser descritos pela aplicação do círculo por apresentarem em sua dinâmica características como: quasiperiodicidade, biestabilidade, histerese, duplicação de período e intermitência. Em [14], Glass sugere o estudo da

aplicação:

$$x_{n+1} = Mx_n + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi x_n) + \Omega \pmod{1}, \quad (1)$$

para diferentes valores do parâmetro  $M$ . Estas aplicações apresentam características comuns para duplicação de período e que foram analisadas nesse trabalho através das órbitas superestáveis no espaço de parâmetro. Para  $M = 2$  na aplicação (1), dizemos que é uma aplicação do círculo de grau 2, e para  $M = 1$  dizemos apenas que é uma aplicação do círculo. O interesse em estudar a aplicação (1) com  $M = 2$  surgiu pelo fato de sua dinâmica, para  $b = 0$ , ser conhecida e constituir um exemplo de sistema ergódico.

O trabalho está dividido em dois capítulos. No Capítulo 1 introduzimos os conceitos teóricos necessários para o estudo da aplicação do círculo de grau 2. Primeiro apresentamos a aplicação deslocamento de Bernoulli, que é citada na literatura como um exemplo de aplicação ergódica, e posteriormente apresentamos a aplicação do círculo. No Capítulo 2 desenvolvemos o estudo da aplicação do círculo de grau 2 e fazemos uma analogia do seu comportamento com o comportamento da aplicação do círculo. Para finalizar apresentamos as conclusões e os comentários finais.

# Capítulo 1

## Aplicações Unidimensionais

Neste capítulo vamos discutir algumas propriedades das aplicações, e técnicas de análise. Com a ajuda de dois exemplos de aplicações unidimensionais vamos apresentar o conceito de caos e métodos que podem ser usados no estudo de aplicações que apresentam comportamento caótico.

### 1.1 Crescimento Populacional

Como primeiro exemplo, vamos mostrar uma aplicação que pode ser usada para estudar um crescimento populacional. Considere a função:

$$f(x) = 2x, \quad (1.1.1)$$

que é uma simples regra que dá a cada número  $x$  o dobro do seu valor. Esta função é um simples modelo matemático que pode ser usado para modelar um crescimento populacional com recursos ilimitados, como uma cultura de bactérias em laboratório. Se o interesse for o contínuo crescimento da população de bactérias em intervalos discretos de tempo, por exemplo a cada hora, então o número de bactérias pode ser escrito como:

$$x_{n+1} = f^n(x_0) = 2x_n, \quad (1.1.2)$$

onde  $n$  designa o tempo discreto e  $x_n$  a população em um tempo  $n$ .

A evolução do processo dinâmico na equação (1.1.2) é o resultado da composição da função (1.1.1)  $n$  vezes, para um dado estado inicial. O que estamos fazendo aqui é iterar a função (1.1.1) inúmeras vezes. Uma função

iterada de ordem  $n$  é dada por  $f^n(x_0)$  e definida como:

$$f^n(x_0) = \begin{cases} (f \circ f^{(n-1)})(x_0) & \text{se } n > 0 \\ x_0 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

onde  $(f \circ f)(x) = f(f(x))$  é composição de  $f$  com ela mesma.

Então uma aplicação é dada pela seguinte regra:

$$x_{n+1} = f^n(x_0), \quad (1.1.3)$$

onde chamamos  $x_0$  de condição inicial e de órbita a seqüência de valores obtidos quando iteramos a função.

Para apresentar o conceito de atrator, vamos supor que  $M$  seja o conjunto formado pelo domínio de uma função e, com a evolução temporal, caminha assintoticamente para um subconjunto de  $M$ , onde permanece. Esse subconjunto, que chamaremos de  $A$ , será um atrator. O conjunto de pontos iniciais, que levam a esse subconjunto  $A$ , é a bacia de atração. Se a bacia de atração de  $A$  for todo o conjunto  $M$ , dizemos que  $A$  é um atrator universal [35].

Um ponto  $x^*$  é ponto fixo de uma aplicação se satisfizer  $x^* = f(x^*)$ . Quando falamos em um ponto fixo de uma aplicação, é interessante sabermos como é o comportamento dos pontos nas vizinhanças desse ponto fixo, ou seja, como é a estabilidade característica desse ponto. Para um ponto fixo ser localmente estável, todos os pontos  $x_0$  na sua vizinhança tem que ser atraídos para ele. Para estudarmos a estabilidade desse ponto, pegamos um ponto  $x_0 = x^* + \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é uma distância muito pequena. Substituindo essa condição inicial na equação (1.1.3), com  $n = 1$ , e fazendo uma expansão de Taylor de primeira ordem em  $\varepsilon$ , obtemos:

$$f(x_0) = f(x^* + \varepsilon) \approx f(x^*) + \varepsilon f'(x^*) = x^* + \varepsilon f'(x^*)$$

onde

$$f'(x^*) \equiv \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*}. \quad (1.1.4)$$

Se  $|f'(x^*)| < 1$ , a órbita tende para o ponto fixo. Já se  $|f'(x^*)| > 1$ , o ponto fixo será instável, e a órbita irá divergir desse ponto.

Dizemos que pontos  $x_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , são pontos periódicos de período  $n$  se  $f^n(x_i^*) = x_i^*$  e  $f^j(x_i^*) \neq x_i^*$  para  $0 < j < n$ . Uma órbita que tem como condição inicial  $x_i^*$  de período  $n$ , será uma órbita periódica de período  $n$ .

Como para o caso do ponto fixo, teremos condições similares de estabilidade para órbitas de período  $n$  [3, 4]:

$$\left| \frac{df^n(x)}{dx} \Big|_{x=x_i^*} \right| < 1$$

ou usando a regra da cadeia, teremos para órbitas estáveis,

$$\left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i^*) \right| < 1 \quad (1.1.5)$$

e para órbitas instáveis,

$$\left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i^*) \right| > 1. \quad (1.1.6)$$

## 1.2 Deslocamento de Bernoulli

Vamos considerar a aplicação:

$$x_{n+1} = 2x_n \pmod{1}. \quad (1.7)$$

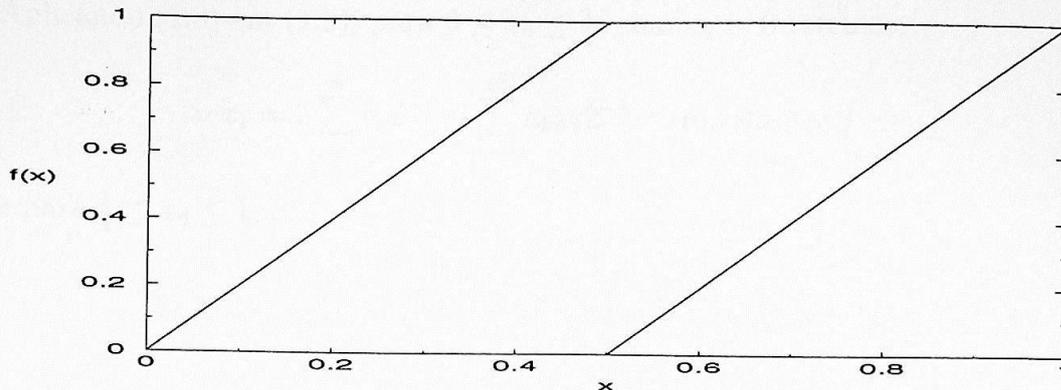


Figura 1.1: Representação da função (1.7), onde podemos ver a descontinuidade da função.

Tratamos anteriormente da aplicação (1.2) como sendo um modelo para uma população de bactérias. Agora acrescentamos  $(\text{mod } 1)$  à aplicação e veremos que esta simples aplicação possui sensibilidade às condições iniciais, e é caótica.

A figura 1.1 mostra o gráfico da função  $f(x) = 2x \pmod{1}$ . Quando colocamos  $(\text{mod } 1)$  a função fica limitada ao intervalo  $[0,1[$ , o que significa que, quando  $f(x) \geq 1$ , subtraímos desta a parte inteira. Por exemplo, se tivermos como condição inicial  $x_0 = 0.3$ , a órbita da aplicação  $x_{n+1} = 2x_n$  será

$$\{0.3, 0.6, 1.2, 2.4, 4.8 \dots\},$$

mas quando usamos  $(\text{mod } 1)$ , a órbita será

$$\{0.3, 0.6, 0.2, 0.4, 0.8 \dots\}.$$

Uma alternativa para visualizar a aplicação (1.7) é escreve-la em uma representação binária [3, 4, 5]:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i} \hat{=} (0, a_1 a_2 a_3 \dots), \quad (1.8)$$

onde  $a_i$  tem como valores zero ou um. Quando  $x_0 < 1/2$ , implica em  $a_1 = 0$ , e  $x_0 > 1/2$  implica em  $a_1 = 1$ . Podemos escrever [3]:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & \text{para } 0 \leq x_n \leq \frac{1}{2} \\ 2x_n - 1 & \text{para } \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1 \end{cases} \quad (1.9)$$

Aplicando (1.8) em (1.9), para  $0 \leq x_0 \leq \frac{1}{2}$ , com  $a_1 = 0$  teremos:

$$x_1 = 2 \sum_{i=2}^{\infty} a_i 2^{-i} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} 2^{-k} \hat{=} (0, a_2 a_3 a_4 \dots)$$

e para  $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$ , com  $a_1 = 1$ ,

$$x_1 = 2 \left[ \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} a_i 2^{-i} \right] - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} 2^{-k} \hat{=} (0, a_2 a_3 a_4 \dots)$$

Em ambos os casos obtemos o mesmo resultado, a ação de (1.9) na representação binária para o valor de  $x$  é excluir o primeiro dígito e mudar o restante da seqüência para a esquerda. Este é o chamado Deslocamento de Bernoulli, (*Bernoulli Shift*). Se a condição inicial dada à aplicação (1.9), for um número racional, a seqüência de números, ou a órbita, transforma-se em uma órbita periódica. Apresentamos um exemplo de órbita periódica de período 2, na representação binária [3]:

$$x_0 = \frac{1}{3} \hat{=} (0, 0101)$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \hat{=} (0, 1010)$$

$$x_2 = \frac{1}{3} \hat{=} (0, 0101)$$

$$x_3 = \frac{2}{3} \hat{=} (0, 1010)$$

⋮

A cada 2 iterações o valor de  $x_n$  repete-se. Neste exemplo, podemos dizer que não houve ganho de informação, depois de um certo número de iterações a informação contida no sistema mantêm-se. Porém, se o valor inicial for um número irracional, a aplicação (1.9) produzirá uma seqüência infinita de

dígitos 0 e 1, e a cada iteração será adicionado um novo dígito sobre o valor da posição inicial. Como exemplo temos [3]:

$$x_0 \hat{=} (0, 100110111\dots)$$

$$x_1 \hat{=} (0, 00110111? \dots)$$

$$x_2 \hat{=} (0, 0110111?? \dots)$$

Nesse exemplo, a aplicação (1.2.9) apresenta sensibilidade às condições iniciais. Se tivermos dois pontos muito próximos  $x$  e  $x'$ , para o caso de condição inicial irracional, que difiram somente depois do dígito  $a_n$ , essa diferença será amplificada depois da ação de (1.2.9), e na iteração de ordem  $n$ , será percebida no primeiro dígito.

A aplicação (1.2.9) possui todas suas órbitas periódicas instáveis, pois  $f'(x^*) = 2$ , e apresenta sensibilidade às condições iniciais, então, dizemos que a aplicação (1.2.9) é caótica. Para [2], caos é identificado com não periodicidade e com sensibilidade às condições iniciais.

O Deslocamento de Bernoulli é conhecido na literatura como sendo um exemplo de aplicação que apresenta movimento caótico e ergódico [1, 3, 4, 8, 9, 14]. Para falar da ergodicidade da aplicação (1.2.9) vamos ver como as órbitas periódicas estão distribuídas no intervalo  $[0, 1[$ .

A aplicação (1.2.9) possui  $2^p - 1$  condições iniciais que nos levam a uma órbita periódica instável de período  $p$  [5]. Podemos dizer que os pontos pertencentes a essas órbitas periódicas são densos no intervalo  $[0, 1]$ , e existe uma grande quantidade desses pontos no intervalo  $[0, 1]$ . Porém, o conjunto formado pelos pontos que fazem parte de órbitas periódicas instáveis é um conjunto contável e infinito, já o conjunto dos outros pontos possíveis no intervalo  $[0, 1[$  são infinitos e incontáveis. Isso significa que o conjunto dos pontos periódicos, ainda que denso, é muito menor que o conjunto de todos os outros pontos em  $[0, 1[$ . Se escolhermos uma condição inicial  $x_0$  de uma forma aleatória em  $[0, 1[$ , de acordo com uma distribuição de probabilidade uniforme em  $[0, 1[$ , a probabilidade de cairmos em um ponto periódico da aplicação é zero. Se fizermos um histograma da fração de vezes que cada ponto de uma órbita de comprimento finito, para uma escolha aleatória das condições iniciais, cai em pequenas divisões do intervalo de  $[0, 1[$ , veremos que cada divisão terá aproximadamente o mesmo número de visitas e irá se aproximar de  $\frac{1}{N}$ . Aqui  $N$  é o número de divisões do intervalo  $[0, 1]$ . Segundo [5], isso caracteriza a aplicação (1.2.9) como ergódica.

### 1.2.1 Teoria Ergódica para Sistemas Dinâmicos

A Teoria Ergódica trata da dinâmica de transformações que preservam medidas, ou seja, que tenham pelo menos uma medida invariante. Para uma medida  $\rho$  ser invariante ela deve satisfazer [35]:

$$\rho[f^{-t}(X)] = \rho(X), \quad t > 0$$

onde  $X$  é um conjunto de pontos de  $\mathfrak{R}^m$ . Em geral há várias medidas invariantes em um sistema dinâmico. Introduziremos o conceito de ergodicidade segundo [8].

Seja  $T : A \rightarrow A$  uma transformação que preserva medida. A órbita de um ponto  $x \in A$  é a seqüência  $x, T(x), T^2(x), \dots$ . Se  $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$  é uma função integrável, consideramos suas médias sobre segmentos de órbita  $x, T(x), \dots, T^n(x)$ , como sendo:

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(T^j(x)).$$

O Teorema de Birkhoff estabelece que a seqüência das médias das funções integráveis sobre os segmentos de órbitas convergem, para quase todo  $x \in A$ , a um número denominado média orbital de  $f$  no ponto  $x$ , e é definida por

$$\tilde{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(T^j(x)).$$

A média orbital é integrável e

$$\int_A \tilde{f} d\rho = \int_A f d\rho.$$

Dizemos que  $T$  é uma transformação ergódica se para toda função  $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$  integrável vale:

$$\tilde{f} = \int_A f d\rho$$

para quase todo ponto  $x \in A$ . Na equação acima, a primeira parte é a média temporal de  $f$  e a segunda parte é a média espacial. Resumindo, o Teorema Ergódico de Birkhoff nos diz que um sistema que tenha uma medida invariante, terá sua média temporal igual à média espacial [1, 8, 9].

Trataremos em nossos estudos a média espacial como sendo a medida de probabilidade invariante  $\rho$  no conjunto  $A$ , que descreve com que freqüência

várias partes de  $A$  são visitadas por uma órbita. Em uma aplicação unidimensional definimos  $\rho$  como a média temporal das deltas de Dirac do ponto  $x_{n+1}$ , e esta medida invariante sobre a evolução temporal determina a densidade de pontos por iteração sobre um intervalo unitário, e é definido por [4]:

$$\rho(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^t \delta[x - f^i(x_0)] \quad (1.10)$$

Para um sistema ergódico,  $\rho$  é o mesmo para quase todos os pontos  $x_0$  em (1.10).

Em geral,  $\rho(x)$  não pode ser calculado analiticamente e depende de  $x$ . O Deslocamento de Bernoulli é um caso particular, onde  $\rho(x)$  é constante para quase todos os valores de  $x$ .

Para um caso ergódico, podemos escrever a média temporal sobre uma função  $g(x)$  como sendo a média sobre a medida invariante.

$$\rho(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^t g(x_i) = \rho(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^t g[f^i(x_0)] = \int_0^1 dx \rho(x) g(x). \quad (1.11)$$

O análogo para uma aplicação  $x_{n+1} = f(x_n)$  pode ser feito da seguinte forma [4]: se um ponto  $x_0$  evolui para  $f(x_0)$  depois de uma iteração, a distribuição da função delta  $\delta[x - x_0]$  evolui, depois de uma iteração, para  $\delta[x - f(x_0)]$ , e pode ser escrita como:

$$\delta[x - f(x_0)] = \int_0^1 dy \delta[x - f(y)] \delta(y - x_0). \quad (1.12)$$

Generalizando esta evolução para uma densidade  $\rho_n(x)$  arbitrária em um tempo  $n$ , obtemos a equação de Frobenius-Perron [4]:

$$\rho_{n+1}(x) = \int_0^1 dy \delta[x - f(y)] \rho_n(y) \quad (1.13)$$

que governa a evolução temporal de  $\rho_n(x)$ . A medida invariante  $\rho(x)$  tem que ser estacionária porque a equação (1.11) faz sentido somente se  $\rho(x)$

for independente do tempo  $n$ , isto é,  $\rho(x)$  é uma auto-função do operador Frobeniuns-Perron com auto-valor 1:

$$\rho(x) = \int_0^1 dy \delta[x - f(y)] \rho(y) \quad (1.2.14)$$

Agora podemos mostrar que, para o caso do Deslocamento de Bernoulli,  $\rho(x)$  é constante para todo  $x$ . Para a aplicação (1.2.9), a equação (1.2.14) transforma-se em:

$$\rho(x) = \frac{1}{2} [\rho(\frac{x}{2}) + \rho(1 - \frac{x}{2})] \quad (1.2.15)$$

e quando normalizada, a solução torna-se  $\rho(x) = 1$ . Isto significa que, para o Deslocamento de Bernoulli, as órbitas caóticas cobrem uniformemente o intervalo  $[0, 1]$ , e o sistema é ergódico com  $\rho$  constante.

Quando nos referimos a quase todos os valores de  $x$ , estamos excluindo os pontos fixos instáveis, pois quando escolhemos uma condição inicial de forma aleatória a probabilidade de escolhermos um ponto fixo é de medida zero [35].

O resultado do Teorema Ergódico de Birkhoff nos permite trabalhar com a análise dos dados experimentais ou gerados no computador, usando as médias temporais, o que torna o transiente irrelevante. Podemos considerar apenas o comportamento do sistema transcorrido um longo tempo, e assim desprezar o transiente. Porém, algumas vezes, os transientes são muito longos e o tempo que leva para sair deles depende de cada sistema [2]. O estudo geométrico dos atratores, em sistemas caóticos, pode apresentar dificuldades, como é o caso dos atratores estranhos. Para esse estudo introduziremos o expoente de Lyapunov e a entropia de Kolmogorov, que servem para caracterizar um atrator estranho.

O expoente de Lyapunov da forma que é definido é uma medida invariante. O método para determinar o expoente de Lyapunov faz uso da divergência ou convergência exponencial do comportamento de trajetórias vizinhas em um espaço de fase, e vem da estabilidade das trajetórias [3]. Para apresentar o expoente de Lyapunov para aplicações unidimensionais, vamos falar sobre a evolução temporal de dois pontos iniciais muito próximos.

Supomos que a aplicação  $x_{n+1} = f(x_n)$  nos leve a um movimento caótico. Damos à aplicação duas diferentes condições iniciais:  $x_0$  e  $x_0 + \epsilon$ . Iterando  $n$  vezes a aplicação para cada condição inicial teremos:  $f^n(x_0)$  e  $f^n(x_0 + \epsilon)$ ; e a distância entre esses dois pontos será de  $\epsilon e^{n\lambda(x_0)}$ , ou seja:

$$\epsilon e^{n\lambda(x_0)} = |f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)|$$

Agora podemos definir o expoente de Lyapunov,  $\lambda(x_0)$ , como a taxa média da divergência exponencial das duas seqüências de pontos vizinhos iniciadas pelas condições iniciais  $x_0$  e  $x_0 + \epsilon$ . Para  $n \rightarrow \infty$  e  $|\epsilon x_0| \rightarrow 0$ , determinamos o expoente de Lyapunov para aplicações em uma dimensão:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{|\epsilon x_0| \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \frac{|f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)|}{|\epsilon|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{df^n(x_0)}{x_0}$$

ou

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (1.2.16)$$

O limite de  $n \rightarrow \infty$  elimina a influência do transiente.

Quando apresentamos o expoente de Lyapunov supusemos que a aplicação tinha uma medida invariante  $\rho$ , o que faz com que  $\lambda$  seja constante para qualquer condição inicial que faça parte da bacia de atração desse atrator. Mas vimos que a definição do expoente de Lyapunov, equação (1.2.16), depende da escolha da trajetória ou de  $x_0$ . Pelo teorema de Oseledec [3, 8], o limite de (1.2.16) existe para quase todo  $x_0$  com respeito à medida invariante  $\rho$ . Se o sistema possui uma medida invariante e é ergódico, o maior valor de  $\lambda$  é independente de  $x_0$ .

O expoente de Lyapunov não é apenas uma característica do comportamento da estabilidade de uma trajetória, mas do respectivo sistema dinâmico. Um atrator estranho, que é caracterizado por ter sensibilidade às condições iniciais, possui expoente de Lyapunov positivo. Se o atrator for periódico seu valor é negativo e para órbitas quasiperiódicas ou nos pontos de bifurcação o valor do expoente de Lyapunov é igual a zero.

Para o caso que vimos anteriormente do Deslocamento de Bernoulli, o expoente de Lyapunov é positivo,  $\lambda = \ln 2$ . Vimos que essa aplicação possui sensibilidade às condições iniciais e é caótica, o que está de acordo com o que apresentamos sobre o expoente de Lyapunov.

Outra importante medida usada para caracterizar o movimento caótico é a entropia de Kolmogorov,  $K$ . A entropia de Kolmogorov mede quão caótico o sistema dinâmico é [33], e pode ser definido como sendo proporcional à taxa de informação que é perdida com o passar do tempo sobre o estado do sistema dinâmico. Para uma aplicação unidimensional,  $K$  é exatamente o expoente de Lyapunov positivo [4, 33, 34]. Agora temos outra forma de ver o expoente de Lyapunov, a sua magnitude quantifica a taxa com que o sistema cria ou destrói informações em 'bits' por unidade de tempo.

Em termodinâmica, quando falamos na Hipótese Ergódica costumamos nos referir ao caso em que o postulado das probabilidades iguais a priori é válido [13]. Esse postulado diz que em um sistema estatístico fechado, com energia fixa, todos os microestado acessíveis a um sistema são igualmente prováveis. Ou seja, para este caso a densidade  $\rho$  é constante na região acessível ao sistema e nula fora dela. Essa suposição de probabilidades iguais apenas representa a ignorância que temos sobre o estado microscópico do sistema.

### 1.3 Aplicação do Círculo

Para apresentar a aplicação do círculo vamos considerar o exemplo de dois osciladores harmônicos simples desacoplados, com massas  $m_1$  e  $m_2$  e com frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$  respectivamente [17]. A hamiltoniana do sistema é definida por:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{1}{2}m_1\omega_1^2x_1^2 + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}m_2\omega_2^2x_2^2 \quad (1.17)$$

O sistema é integrável e o espaço de fase do sistema é definido pelas coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  e pelos momentos  $p_1$  e  $p_2$ , tendo dimensão igual a quatro. O fato do sistema ser integrável e da energia ser conservada, faz com que o movimento fique limitado a uma superfície de duas dimensões no espaço de fase.

A solução da hamiltoniana (1.17) é conhecida:

$$x_i = A_i \sin(\omega_i t + \phi_i),$$

onde  $A_i$  e  $\phi_i$  são respectivamente a amplitude e a fase das coordenadas  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Definindo  $\theta_i = \omega_i t$ , o estado do sistema será especificado pelos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , ou seja o movimento no espaço de fase está confinado em um 2-torus por uma energia dada. Se a razão das frequências  $\omega_1/\omega_2$  for um número racional  $p/q$ , as frequências são ditas comensuráveis e a trajetória no 2-torus é uma curva fechada com  $p$  voltas ao longo da direção  $\theta_1$  e  $q$  voltas ao longo da direção  $\theta_2$ , então temos um movimento periódico. Caso a razão entre as frequências não seja um número racional, as frequências são ditas incomensuráveis e a trajetória do sistema ficará rodando ao longo do 2-torus indefinidamente sem se cruzarem, e teremos um movimento quasiperiódico. Para simplificar a visualização do movimento do sistema podemos congelar o movimento em uma direção, por exemplo  $\theta_2$ , e observarmos a trajetória estroboscópicamente em intervalos de tempo iguais a  $\Delta t = 2\pi/\omega_2$ .

Isso corresponde a fazer um corte através do 2-torus com um plano em  $\theta_2$  constante, como vemos na figura 1.2. Assim a trajetória transforma-se em uma seqüência de pontos discretos que serão observados em intervalos de tempo constante. Essa técnica de discretização, baseada na idéia de Henri Poincaré, tem como vantagem a diminuição da dimensão do sistema em uma unidade [3, 2, 6]. As trajetórias na superfície do 2-torus são agora reduzidas a pontos em uma interseção de um círculo. Durante o intervalo de tempo

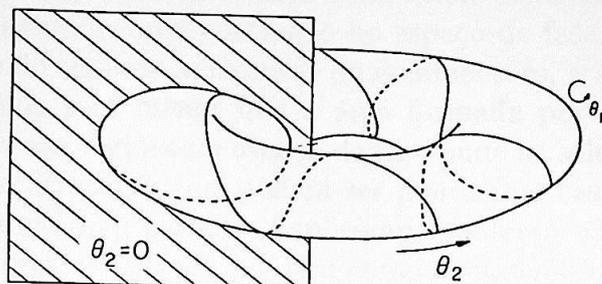


Figura 1.3.2: Espaço de fase com a superfície de um 2-torus mostrando as coordenadas angulares  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Uma possível órbita está indicada como uma linha contornando a superfície do torus. Um plano vertical intercepta o torus em  $\theta_2 = 0$ , dando uma seção de Poincaré ou a trajetória em intervalos de tempo iguais a  $2\pi/\omega_2$ . A figura foi retirada da referência [17].

$\Delta t$ ,  $\theta_1$  avança:

$$\Delta\theta_1 = \omega_1 \Delta t = 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2} = 2\pi\Omega,$$

onde  $\Omega = \omega_1/\omega_2$ . As sucessivas interseções da trajetória com o plano podem ser representadas por uma série de pontos e descritas em coordenadas polares por:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\Omega. \quad (1.3.18)$$

Esta é a aplicação do círculo sem acoplamento. Aqui,  $\Omega = \omega_1/\omega_2$  denota a diferença de fase depois de uma revolução no torus. A equação (1.3.18) pode ser interpretada como sendo a seção de Poincaré de um movimento em um torus de três dimensões, caracterizado por frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . A vantagem desse método é que, se fossemos resolver a equação diferencial, precisaríamos fazer uma integração numérica, o que consome tempo e acumularia erros numéricos, mas usando a seção de Poincaré, precisamos apenas fazer iterações, o que é feito em um tempo bem menor.

Através desse modelo espera-se obter um sistema hamiltoniano simples e conservativo. Para obtermos um sistema mais abrangente podemos perturbá-lo com um termo não linear senoidal, assim o sistema torna-se dissipativo e apresenta um comportamento mais complexo. Sistemas dissipativos são aqueles que apresentam uma contração no espaço de fase. Por exemplo, se o espaço de fase do sistema apresentar duas dimensões, a área ocupada pela solução do sistema será menor que a área formada por todo o espaço de fase. Essas pequenas regiões no espaço de fase onde as soluções são atraídas são chamadas de atratores, que podem ser pontos, no caso de uma solução periódica. Sistemas que possuem um comportamento não regular podem apresentar atratores estranhos, que tem como característica sensibilidade às condições iniciais e possuem dimensão fractal, ou seja, não inteira. Sistemas que apresentam comportamento caótico possuem atratores estranhos.

Vários sistemas dinâmicos, caracterizados por exibir duas diferentes frequências, exibem um comportamento quasiperiódico e podem ser modelados por uma aplicação do círculo [15, 19], a qual pode ser escrita como:

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi x_n) + \Omega \pmod{1} \quad (1.19)$$

A aplicação círculo foi estudada como um modelo geral de rota quasiperiódica para o caos [25, 24], também é usada como modelo para oscilador não-linear forçado [4, 32, 30], para junção de Josephson forçada [18, 31] e osciladores biológicos estimulados periodicamente [12, 7, 26]. Isto deve-se ao fato da aplicação do círculo mostrar-se um bom substituto para a equação de van der Pol [27, 28].

A equação de van der Pol foi usada como modelo para o sistema cardíaco e, acoplada a outras equações, como é o caso do sistema de Bonhoeffer van der Pol, pode ser usado como uma representação em duas dimensões do sistema Hodgkin-Huxley, que é conhecido como um modelo para a representação fisiológica do comportamento elétrico de uma membrana nervosa [41, 29].

Uma importante propriedade da aplicação (1.19) é

$$f(x + 1) = f(x) + 1,$$

e

$$f^n(x + 1) = f^n(x) + 1.$$

Há três distintos casos conhecidos na literatura para a aplicação (1.19) quando variamos o parâmetro  $b$  [17, 31].

(1) Quando  $0 \leq b < 1$ , o sistema é dito subcrítico. A aplicação  $f(x)$  é uma função monotônica crescente, tem inversa, e ambas, a função e sua inversa, são contínuas e diferenciáveis.

(2) Para  $b = 1$  a aplicação desenvolve um ponto de inflexão cúbica para  $x = 0$ .

(3)  $b > 1$ , a aplicação passa a ter máximos e mínimos e deixa de ser inversível, podendo apresentar trajetórias caóticas. Aqui o sistema é chamado de supercrítico.

Uma importante medida para estudar a aplicação do círculo é o *winding number*. Esta é a quantidade que mede a média da variação de  $x$  por iteração, ou [3] a média de revoluções por iterações, e é definido como:

$$W(b, \Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_0}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x_0) - x_0}{n} \quad (1.3.20)$$

No caso de aplicações monotônicas o limite existe,  $W$  é independente de  $x_0$  e  $W(\Omega)$  é contínua. Se a aplicação é não-inversível, um limite superior deve ser usado e  $W$  depende da condição inicial [20, 14]. Para o caso onde  $b = 0$ , temos  $W = \Omega$ . Para estudar a dinâmica de  $W(\Omega)$  podemos distinguir dois casos. O primeiro é o caso em que  $W(\Omega)$  assume valores racionais e apresenta órbitas periódicas estáveis. O segundo é o caso em que  $W(\Omega)$  assume valores irracionais e apresenta órbitas quasiperiódicas. Para esse caso a aplicação do círculo é ergódica e possui uma distribuição de probabilidade uniforme em  $[0, 1[$ , como no caso da aplicação do Deslocamento de Bernoulli [23]. Um atrator quasiperiódico possui apenas uma medida invariante, a medida de Haar [35, 9].

Em um estado geral de  $b < 1$ , podemos calcular para quais valores de  $b$  e  $\Omega$  temos  $W = p/q$  racional, através das equações:

$$f_{\Omega, b}^q(x_i) = p + x_i$$

e

$$|f_{\Omega, b}^{q'}(x_i^*)| = \left| \prod_{i=1}^q f'_{\Omega, b}(x_i^*) \right| < 1.$$

Quando fazemos o gráfico no espaço de parâmetros,  $b$  vs  $\Omega$ , para diferentes valores de  $W$  racionais, encontramos as línguas de Arnold, figura 1.3.3. As línguas de Arnold são formadas pelo conjunto de pontos de  $(\Omega, b)$ , onde a aplicação (1.3.19) possui órbitas periódicas estáveis. Este gráfico é característico de sistemas de dois osciladores acoplados ou um oscilador forçado

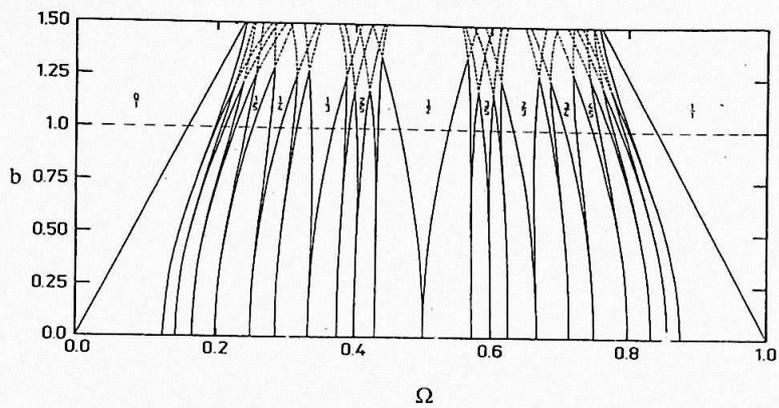


Figura 1.3.3: Espaço de parâmetros, para a aplicação do círculo mostrando as línguas de Arnold. Eixo vertical refere-se ao parâmetro  $b$  e o eixo horizontal ao parâmetro  $\Omega$ . A linha pontilhada indica a sobreposição das ressonâncias. Figura retirada de [17].

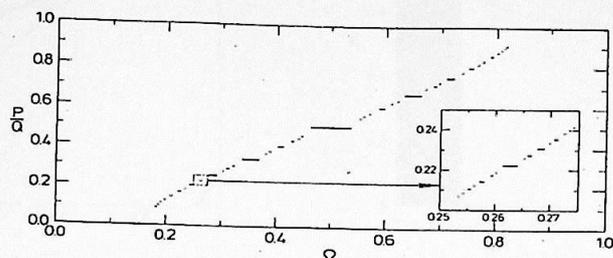


Figura 1.3.4: Gráfico da Escada do Diabo para  $b = 1$ . O quadrado ao lado mostra uma ampliação e podemos ver que há auto similaridade no gráfico. Figura retirada de [31].

por uma força periódica. Na figura 1.3.3, vemos que as línguas de Arnold não se cruzam para  $b < 1$ , onde a função  $f(x)$  em (1.3.19) é inversível, e existe um único valor de  $W$  para cada par de  $(b, \Omega)$ . Já, para  $b > 1$ , encontramos diferentes valores de  $W$  para um mesmo par de  $(b, \Omega)$ .

Na figura 1.3.3, vemos que para um valor de  $b$  próximo de zero as línguas de Arnold são muito estreitas e a probabilidade de um  $W$  aleatório ser um valor racional para um dado valor  $\Omega$  é aproximadamente zero. Ou ainda, a probabilidade de cairmos em um  $W$  irracional é quase um nesta região. Com o valor de  $b$  crescendo as regiões preenchidas pelas línguas de Arnold ficam maiores e para  $b = \frac{1}{2}$  a probabilidade de  $W$  ser racional ou irracional é a mesma. O gráfico  $W$  vs  $\Omega$  onde há as línguas de Arnold é conhecido como Escada do Diabo, e para  $b = 1$  é uma escada completa, onde a soma de todos os intervalos é igual a um, figura 1.3.4 [18]. Já as regiões onde o movimento é quasiperiódico formam um conjunto de Cantor de medida zero e dimensão fractal  $D \sim 0.87$ . Este número é uma característica universal para a transição de um movimento quasiperiódico para um sistema caótico [31].

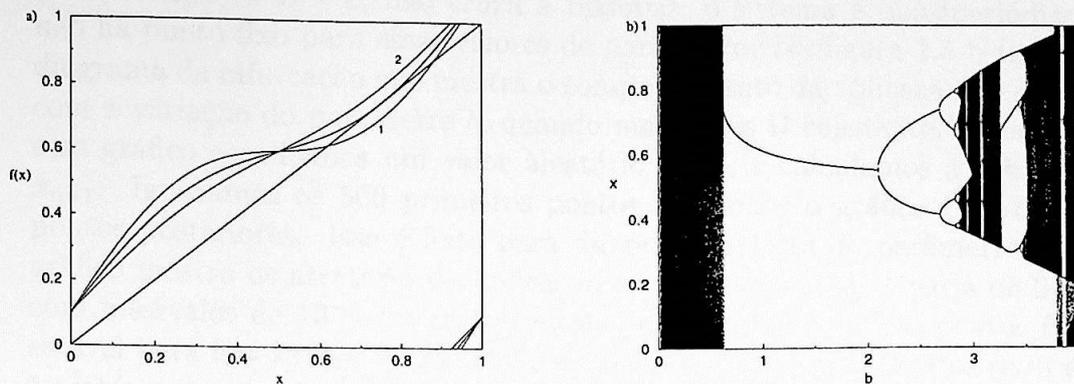


Figura 1.3.5: a) Representação da função (1.3.19), para  $\Omega = 0.1$ . Em preto temos a função para  $b = 2\pi\Omega$ , que passa por uma bifurcação tangente. b) Diagrama de bifurcação para  $\Omega = 0.1$ , onde podemos ver o surgimento do ponto fixo para  $b = 2\pi\Omega$

No contorno das línguas de Arnold ocorrem bifurcações, ou seja, uma pequena mudança nos parâmetros nos leva a uma modificação qualitativa nas trajetórias [2]. Como as regiões delimitadas pelas línguas de Arnold são regiões onde há órbitas periódicas estáveis, podemos dizer que nas fronteiras das línguas surgem as órbitas periódicas estáveis. O tipo de bifurcação que ocorre nesse caso é chamada de bifurcação tangente, com uma pequena mudança no parâmetro de controle, um par de órbitas periódicas, uma estável e outra instável, surgem. Na figura 1.3.5-b, para  $b \approx 0.624$  podemos ver o surgimento de uma órbita de período um por bifurcação tangente.

Uma bifurcação tangente é caracterizada por apresentar [3, 4, 2, 10]:

$$\left. \frac{df^n(x)}{dx} \right|_{x=x_i^*} = 1$$

onde  $x^*$  é um ponto fixo.

Na figura 1.3.5-a mostramos o que acontece com a função (1.3.19) quando ocorre uma bifurcação tangente, para  $\Omega = 0.1$ . A curva em preto mostra o momento da bifurcação, onde a curva tangencia a bissetriz. Aqui  $b = b_c = 2\pi\Omega$ , que é a condição para o contorno da língua de Arnold com  $W = 0/1$  [3]. As outras curvas tracejadas são para valores de  $b$  próximos à bifurcação. Na curva 1 temos dois pontos fixos, a curva cruza duas vezes a bissetriz. A estabilidade dos pontos fixos é dada pelo gradiente da função, e temos um ponto estável e outro instável. Para a curva 1,  $b = b_c + \varepsilon$ , com  $\varepsilon = 0.3$ . A

A curva 2,  $b = b_c - \varepsilon$ , não cruza a bissetriz, o sistema é quasiperiódico e não há ponto fixo para esses valores de parâmetro. Na figura 1.5-b temos o diagrama de bifurcação que mostra o comportamento da aplicação do círculo com a variação do parâmetro  $b$ , quando mantemos  $\Omega$  constante. Para fazer esse gráfico escolhemos um valor aleatório de  $x_0$  e calculamos a órbita de  $x_{n+1}$ . Ignoramos os 500 primeiros pontos e fazemos o gráfico com os 500 pontos posteriores. Isso é feito para diferentes valores do parâmetro  $b$ . O gráfico mostra os atratores da aplicação como função de  $b$ .  $b$  varia de 0 a 4 com intervalos de  $10^{-3}$ . O gráfico mostra o surgimento de um pontos fixos estável para  $b = 2\pi\Omega \approx 0.628$ . Para  $b < 0.624$  não tínhamos pontos fixos e a trajetória era quasiperiódica.

Acompanhando o que ocorre na figura 1.5-b, quando aumentamos o valor de  $b$ , percebemos que o ponto fixo, representado por uma única linha em  $b = [0.624, 2.1]$ , desaparece e essa linha passa por uma bifurcação surgindo duas novas linhas. O mesmo ocorre para cada nova linha que surge até não conseguirmos mais identificá-las. Dizemos que a aplicação passou por uma cascata de duplicação de período levando o sistema para um movimento caótico.

Uma bifurcação do tipo duplicação de período ocorre quando uma órbita estável torna-se instável e surge outra órbita estável com o período sendo o dobro do primeiro. A condição para que haja uma bifurcação de duplicação de período é:

$$\left. \frac{df^n(x)}{dx} \right|_{x=x_i^*} = -1.$$

Para visualizarmos o que ocorre com a função quando ela passa por uma bifurcação, vamos introduzir um método gráfico que nos permite encontrar órbitas periódicas. Para localizarmos os pontos fixos de uma função  $f^n(x)$ , identificamos quais pontos interceptam a linha  $f^n(x) = x$ , esta foi a equação que usamos para definir um ponto periódico de período  $n$ . Para sabermos sobre a estabilidade desses pontos, vemos qual é a inclinação da curva  $f^n(x)$ , no ponto em que a curva cruza a diagonal. Se a inclinação estiver entre  $[-45^\circ, 45^\circ]$ , o ponto será estável. Isto equivale dizer que  $|\sigma| < 1$ , sendo  $\sigma = \left. \frac{df^n(x)}{dx} \right|_{x=x_i^*}$ , [11]. Para uma inclinação igual a  $45^\circ$ , teremos uma bifurcação tangente ( $\sigma = 1$ ) e para uma inclinação igual a  $-45^\circ$ , uma bifurcação de duplicação de período ( $\sigma = -1$ ), [11].

Na figura 1.6-a, temos a representação da função (1.19) para  $\Omega = 0.1$  e  $b = 2.1$ . Para esses parâmetros a aplicação passa por uma bifurcação de duplicação de período, e a inclinação da função  $f(x)$ , no ponto onde cruza

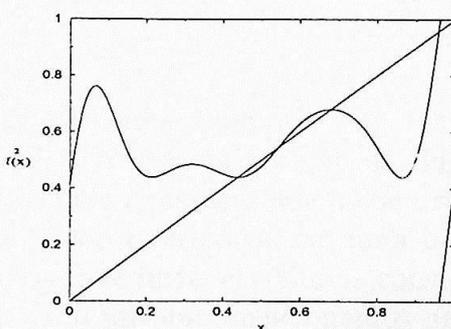
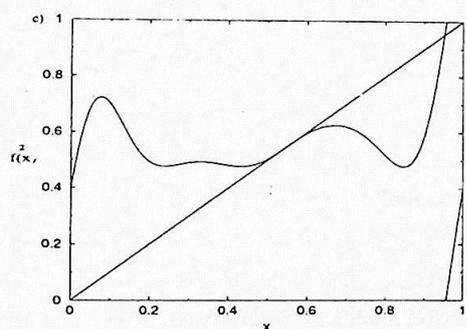
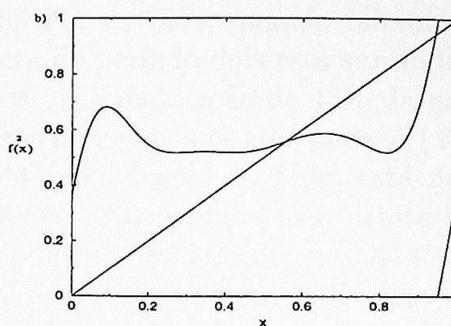
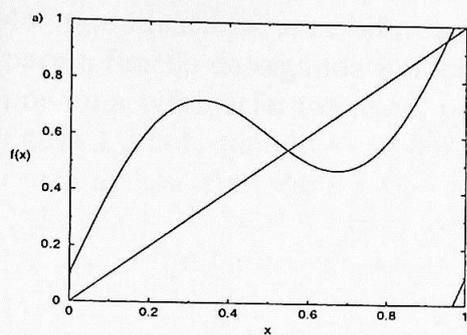


Figura 1.3.6: a) Representação da função (1.3.19), para  $\Omega = 0.1$  e  $b = 2.1$ . Temos a representação da função (1.3.19) de segunda iteração para: b)  $b = 1.8$ , c)  $b = 2.1$  e d)  $b = 2.368$ .

com a linha  $f(x) = x$ , é  $-45^\circ$ . Nas outras figuras 1.3.6 temos a função de segunda iteração para  $\Omega = 0.1$  e para diferentes valores de  $b$ . Na figura 1.3.6-b, vemos  $f^2(x)$  para  $b = 1.8$ . Para  $x \approx 0.556$ ,  $f^2(x)$  cruza a bissetriz e há um ponto periódico instável, este é o ponto fixo de  $f(x)$  que aparecerá como ponto periódico para  $f^n(x)$ . Aumentando o valor de  $b$  chegamos em  $b = 2.1$  onde há a bifurcação de duplicação de período. No entanto, o que vemos na figura 1.3.6-c, para  $x \approx 0.55$ , é que  $f^2(x)$  tem inclinação igual a  $45^\circ$  que identifica uma bifurcação tangente. Na verdade, quando olhamos para a função de segunda iteração, essa órbita de período dois está surgindo por uma bifurcação tangente, por isso vemos uma inclinação de  $45^\circ$ . Já na figura 1.3.6-d, quando  $b = 2.368$ , identificamos dois novos pontos onde  $f^2(x)$  cruza a bissetriz. Para  $x \approx 0.68$  e  $x \approx 0.44$  a inclinação de  $f^2(x)$  está no intervalo  $[-45^\circ, 45^\circ]$  e estes pontos são estáveis. Na verdade esta órbita é um caso especial de órbita estável, pois os pontos  $x \approx 0.68$  e  $x \approx 0.44$  são extremos de  $f^2(x)$ . Dizemos que a aplicação possui uma órbita superestável para  $b = 2.368$  e  $\Omega = 0.1$ . Chamamos de órbita superestável, a seqüência de pontos que satisfizer:

$$\frac{df^n(x)}{dx} \Big|_{x=x_i^*} = \prod_i f'(x_i^*) = 0, \quad (1.3.21)$$

o que nos leva a um expoente de Lyapunov igual a menos infinito.

Órbitas superestáveis aparecem sempre que há uma bifurcação de duplicação de período. Isso pode ser explicado quando pensamos no que ocorre com o valor de  $\sigma$  desde o surgimento de uma órbita periódica, em uma bifurcação de duplicação de período, até ela tornar-se instável. Vamos considerar como exemplo o caso da órbita de período um que mencionamos na figura 1.3.5-b. A órbita periódica estável surge por uma bifurcação tangente,  $\sigma = 1$ , e perde sua estabilidade por uma bifurcação de duplicação de período,  $\sigma = -1$ . No intervalo  $b = [0.624, 2.1]$ , onde a órbita em questão é estável,  $\sigma$  varia de 1 para  $-1$ , tendo que passar por zero. Essa variação do  $\sigma$  sempre ocorre para uma bifurcação de duplicação de período.

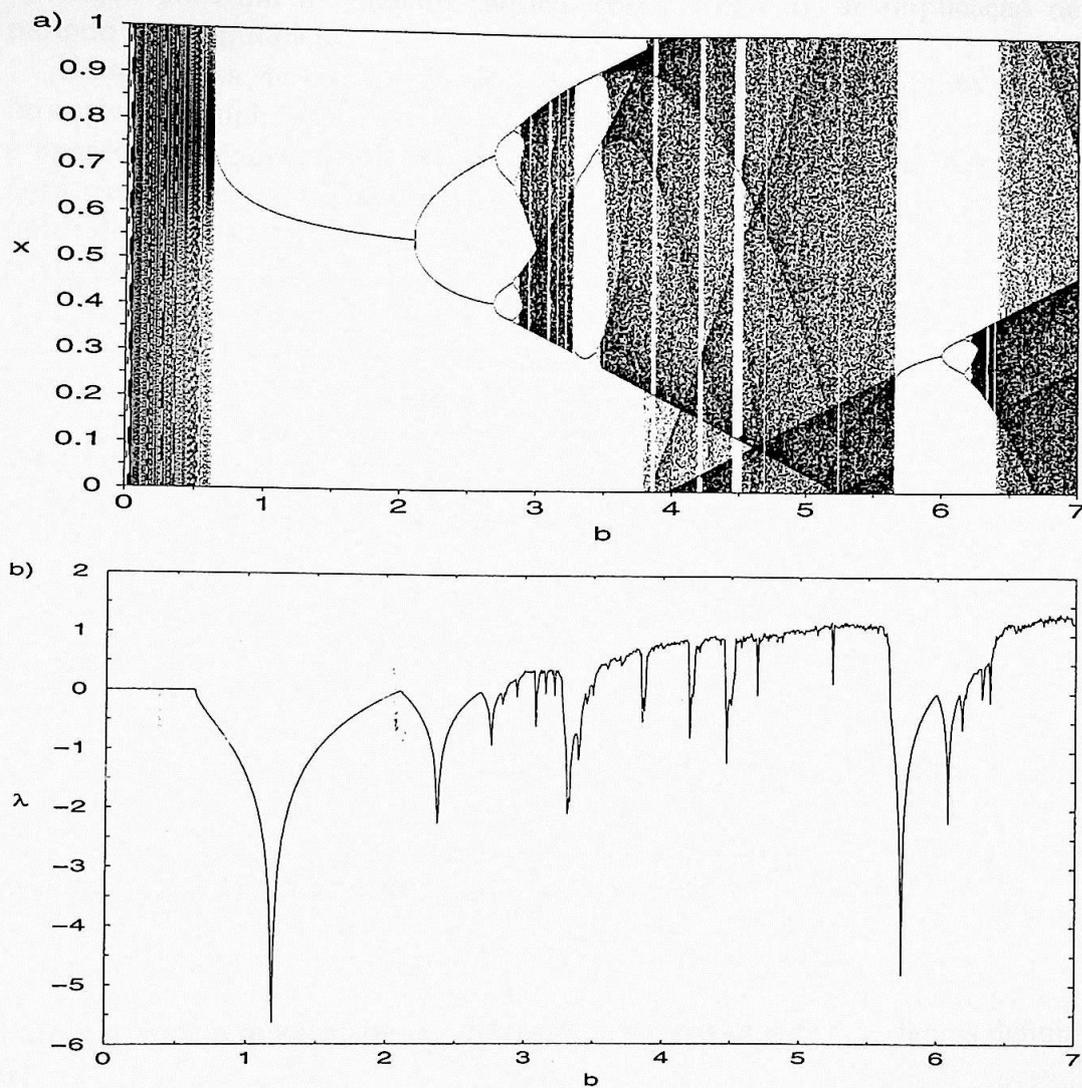


Figura 1.3.7:  $\Omega = 0.1$ ,  $b = [0, 7]$ : a) diagrama de bifurcação; b) evolução do Expoente de Lyapunov.

A figura 1.3.7-a mostra o diagrama de bifurcação para  $\Omega = 0.1$ , onde vemos como evolui a dinâmica da aplicação (1.3.19) quando variamos o parâmetro  $b$ . Na figura 1.3.7-a identificamos algumas rotas que levam a aplicação para um movimento caótico, como a cascata de duplicação de período e intermitência.

Uma cascata de duplicação de período é uma seqüência infinita de bifurcações de duplicação de período. Uma órbita transforma-se em instável e aparece uma nova órbita estável de período que é o dobro do anterior, e para cada nova órbita isso ocorre novamente até que haja um número infinito de bifurcações. Esse exemplo de seqüência de bifurcações pode fazer com que a aplicação vá de um comportamento, inicialmente estável, para um comportamento onde há sensibilidade às condições iniciais, ou seja, caos.

A transição para o caos através de uma cascata de duplicação de período possui constantes universais que a caracterizam, as constantes de Feigenbaum. Uma delas, vamos chamar de  $\delta$ . Vimos que as bifurcações de duplicação de período ocorrem para o parâmetro  $b$  crescente. Definindo como  $b_n$  o valor de  $b$  onde surge uma órbita de período  $n$ ,  $\delta$  é definido como sendo [5]:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{b_{n+1} - b_n}, \quad (1.3.22)$$

e vale:

$$\delta = 4.669\dots$$

Outra constante que caracteriza uma cascata de duplicação de período relaciona-se às órbitas superestáveis. Definimos  $\bar{b}_n$  como sendo o valor de  $b$  para o qual temos uma órbita superestável de período  $2^n$ ,  $\bar{x}$  como sendo o ponto crítico da função (1.3.19) e  $\Delta_n$  como sendo [5]:

$$\Delta_n = f^{2^n-1}(\bar{x}, \bar{b}_n) - \bar{x}.$$

Para  $n$  grande a quantidade  $\Delta_n$  decresce geometricamente e podemos definir  $\alpha$ ,

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}, \quad (1.3.23)$$

e vale:

$$\alpha = -2.502\dots$$

A rota de duplicação de período também é caracterizada por apresentar várias janelas periódicas no regime caótico que encontra-se após a cascata

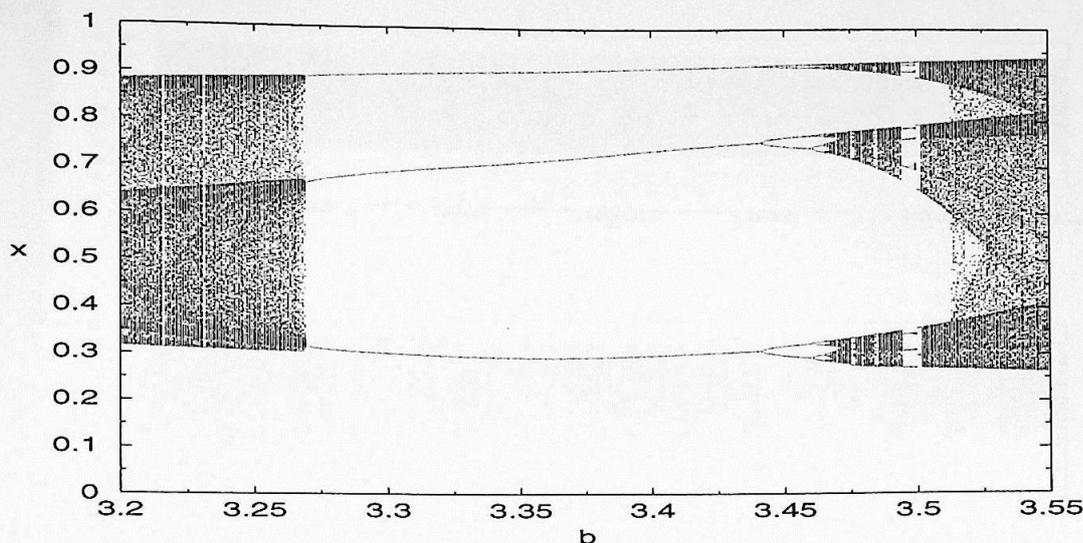


Figura 1.3.8: Diagrama de Bifurcação para  $\Omega = 0.1$ ,  $b = [3.2, 3.55]$ . Nessa figura vemos uma janela de período 3 que também passa por uma cascata de duplicação de período levando a aplicação ao comportamento caótico.

de duplicação de período. Essas janelas periódicas são formadas por órbitas periódicas, como para  $b \approx 3.269$ , onde temos uma janela de período três. Na figura 1.3.8, podemos ver com mais detalhe como a órbita periódica surge e como ela volta ao movimento caótico. Cada janela periódica que encontra-se imersa no movimento caótico é iniciada por uma bifurcação tangente. Se acompanharmos a evolução da aplicação (1.3.19) no diagrama de bifurcação a partir da órbita periódica de período 3, que vemos na figura 1.3.8, e diminuirmos o parâmetro  $b$ , teremos uma transição por intermitência de um atrator periódico para um atrator caótico [22]. Na transição por intermitência, uma simples órbita periódica é substituída por uma órbita caótica quando o parâmetro de controle passa por um valor crítico. O que implica necessariamente que o atrator periódico estável transformou-se em instável ou foi destruído. Aqui, a órbita periódica não é mais substituída por outra órbita periódica, como acontecia numa bifurcação de duplicação de período, mas a nova órbita caótica tende a comportar-se como a antiga órbita periódica em um comportamento intermitente. Um sinal é geralmente designado como intermitente se sua evolução temporal aparece regular por um longo período de tempo e é interrompido por um certo intervalo irregular. Com a variação de um parâmetro externo, quando esse se aproxima do valor crítico, cresce a

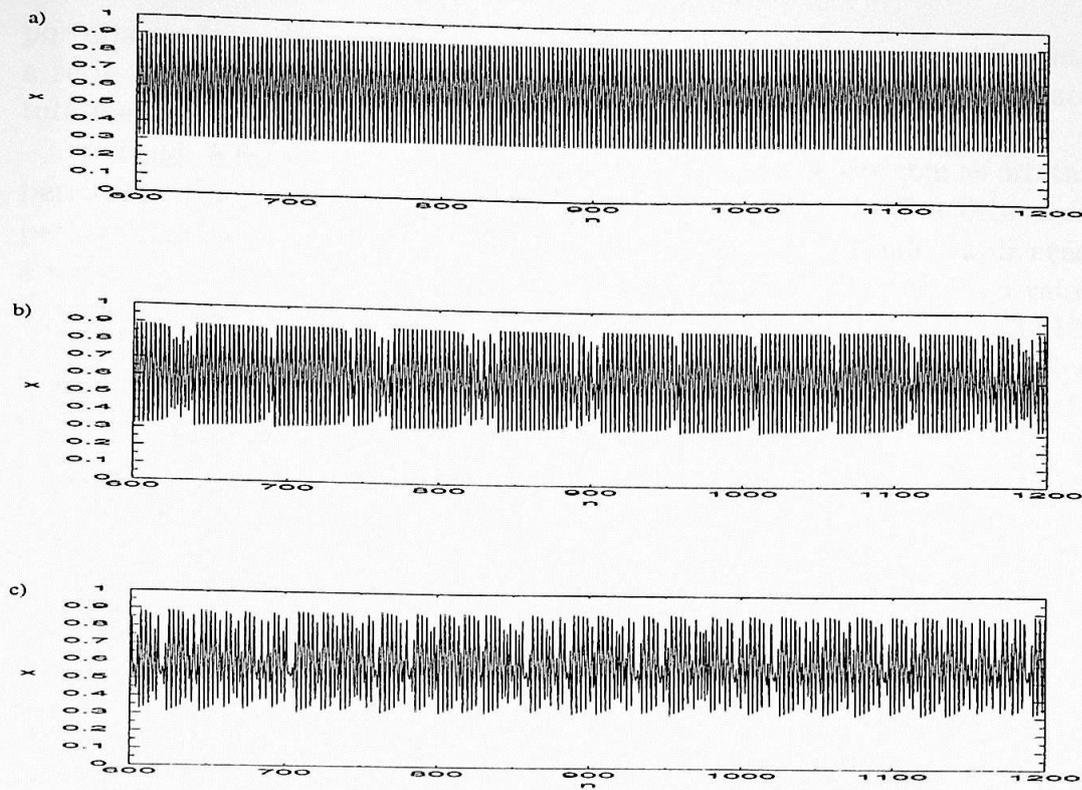


Figura 1.3.9: Séries temporais para a aplicação (1.3.19) com  $\Omega = 0.1$ : a)  $b = 3.27$ , a aplicação é periódica; b)  $b = 3.267$ , a aplicação apresenta um comportamento intermitente permanecendo a maior parte do tempo como se fosse periódico; e c)  $b = 3.25$ , a aplicação apresenta comportamento irregular.

freqüência com que a aplicação fica no comportamento regular, até surgir a órbita periódica. A intermitência é considerada uma rota para o caos.

Com a ajuda da figura 1.3.9, vamos ver como ocorre a mudança no comportamento da aplicação quando surge a órbita periódica para  $b \approx 3,269$ . Na figura 1.3.9 temos três séries temporais para a aplicação (1.3.19) com  $\Omega = 0.1$ . Vamos chamar de  $b_t$  o valor crítico, onde a órbita passa de caótica para periódica. A figura 1.3.9-a, para  $b > b_t$ , mostra uma órbita periódica de período 3. Já na figura 1.3.9-b, onde  $b < b_t$ , a órbita é caótica e mostra um comportamento intermitente. Há um longo intervalo de tempo, durante o qual a órbita parece ser periódica, mas esse comportamento, aparentemente regular é interrompido por curtos intervalos de tempo onde a órbita apresenta um comportamento irregular. Quando  $b$  se afasta de  $b_t$ , os intervalos de com-

portamento irregular passam a ser mais frequentes, até dominar totalmente a série temporal. Na figura 1.3.9-c a órbita apresenta um comportamento totalmente irregular, sem os intervalos regulares.

Voltando à figura 1.3.8, podemos acompanhar o que ocorre com as órbitas periódicas que formam as janelas periódicas. Na figura 1.3.8 a órbita de período 3 passa por uma cascata de duplicação de período levando a aplicação a um atrator caótico que é dividido em três partes. Se aumentarmos o valor de  $b$ , o atrator caótico mudará abruptamente sua forma. Para  $b \approx 3.513$ , o atrator que era formado por três partes distintas, passa a ter uma única parte com o tamanho similar ao que tinha antes de surgir a órbita de período três.

Mudanças bruscas em um atrator caótico, quando há variação do parâmetro de controle, são chamadas de crise. Essas mudanças são causadas por colisões do atrator caótico com uma órbita instável [5]. Há três tipos de crise que podem ser classificados segundo a natureza da mudança do atrator caótico [36]. A primeira é chamada de crise de fronteira, é o caso em que o atrator caótico é destruído com uma pequena mudança do parâmetro  $b$ . Podemos ver um exemplo de crise de fronteira na figura 1.3.7-a quando surgem as janelas periódicas. O atrator passa de caótico para periódico estável com uma pequena mudança em  $b$ . A intermitência é resultado de uma crise de fronteira. O segundo caso é chamado de crise interior, o tamanho do atrator caótico aumenta (ou diminui) de repente. Aqui também podemos ver um comportamento intermitente na órbita caótica. Vamos usar como exemplo o caso de  $b \approx 3.513$  onde o atrator caótico passou por uma crise interior. Chamaremos de  $b_c$  o valor do parâmetro  $b$  onde ocorre a crise. O que vemos na figura 1.3.8 é que para valores de  $b$  um pouco maiores que  $b_c$ , a órbita passa um longo tempo na região onde o atrator estava confinado antes da crise, e visita esporadicamente a nova região, permanecendo um tempo menor. No diagrama de bifurcação, para  $b > b_c$ , podemos identificar regiões com maior número de pontos onde seria o prolongamento do atrator que tínhamos antes da crise. Assim, podemos pensar na intermitência como sendo um episódio que liga diferentes tipos de comportamentos.

O terceiro tipo de crise, refere-se ao caso em que uma aplicação possui dois ou mais atratores simultaneamente e estes juntam-se formando um único atrator caótico.

Uma condição necessária para que ocorra uma cascata de duplicação de

período é que a de Schwarziana de  $S(f)$  seja negativa [3, 4],

$$S(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2 < 0, \quad (1.3.24)$$

$f'$  é a primeira derivada da função  $f(x)$ ,  $f''$  é a segunda derivada e  $f'''$  é a terceira derivada. Para os casos em que as aplicações possuem  $Sf(x) > 0$  em um subintervalo qualquer, atratores de diferentes períodos podem coexistir e a transição para o caos pode ser através de intermitência. Para que haja uma cascata de duplicação de período temos que ter  $Sf(x) < 0$  para todo o intervalo, com exceção dos pontos críticos onde a  $f'(x) = 0$ .

Para complementarmos a apresentação da aplicação do círculo, apresentamos a figura 1.3.10 que refere-se ao expoente de Lyapunov no espaço de parâmetro. Esse método nos fornece informações sobre os diferentes tipos de comportamento que a aplicação apresenta: quasiperiódico, periódico e caótico. Também podemos ver as línguas de Arnold e sua estrutura de auto-similaridade. A figura 1.3.10 foi retirada de [20], a qual foi calculada numericamente.

Na figura 1.3.10, vemos as estruturas das línguas de Arnold, que encontram-se em tons de cinza, e referem-se a regiões onde o movimento é periódico. As línguas de Arnold possuem a propriedade de auto-similaridade, cada estrutura de língua repete-se infinitamente, figura 1.3.10-a. As regiões em branco, para  $0 < b < 1$ , correspondem as órbitas quasiperiódicas, onde  $\lambda = 0$ , e as regiões em preto, que encontram-se fora das línguas de Arnold, correspondem ao comportamento caótico,  $\lambda > 0$ . Para o intervalo de  $0 < b < 1$  a cor branca é predominante e as línguas de Arnold não se sobrepõem e são separadas pela região em branco.

Para  $b = 1$  há uma grande mudança no gráfico, principalmente no que se refere à cor predominante, ou seja ao comportamento predominante. A cor branca, para  $b > 1$  aparece apenas como finas linhas imersas nas línguas, e neste caso referem-se à pontos de bifurcação,  $\lambda = 0$ . Para  $b > 1$  a aplicação do círculo não é inversível e as línguas de Arnold passam à se sobrepor, o que pode ocasionar movimento caótico. Também podemos observar regiões onde ocorrem biestabilidade, que são as regiões onde as línguas se sobrepõem. Quando dois braços de línguas diferentes se cruzam, há biestabilidade não-local, [20]. A biestabilidade é caracterizada por apresentar coexistência de órbitas estáveis para uma mesma combinação de valores dos parâmetros  $b$  e  $\Omega$ . Para casos onde há biestabilidade, o que define a órbita estável que a

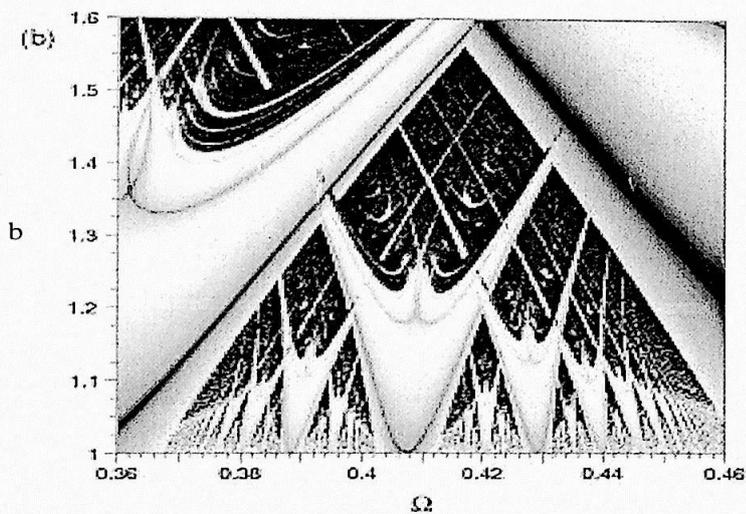
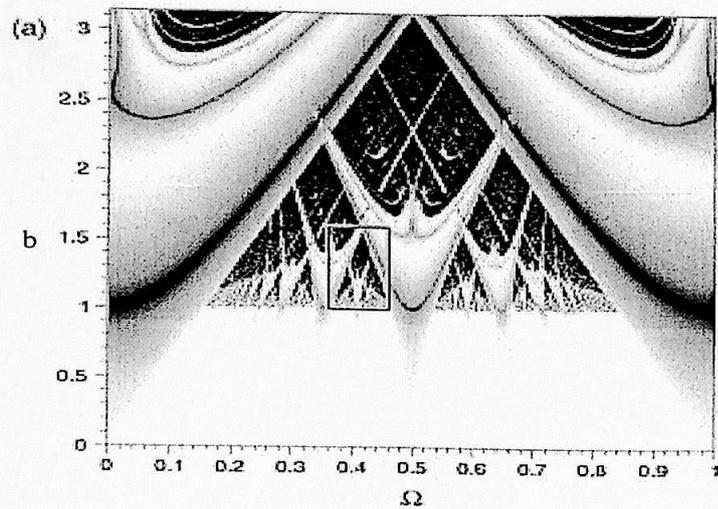


Figura 1.3.10: Espaço de parâmetros, para a aplicação do círculo mostrando o expoente de Lyapunov. Em branco temos as regiões onde  $\lambda = 0$ , regiões quasi-periódicas. As cores mais claras são para  $\lambda$  menos negativo Eixo vertical refere-se ao parâmetro  $b$  e o eixo horizontal ao parâmetro  $\Omega$ . Em b) ampliamos a região compreendida pelo retângulo em a), mostrando a propriedade de autosimilaridade que a figura apresenta. Figura retirada de [20]

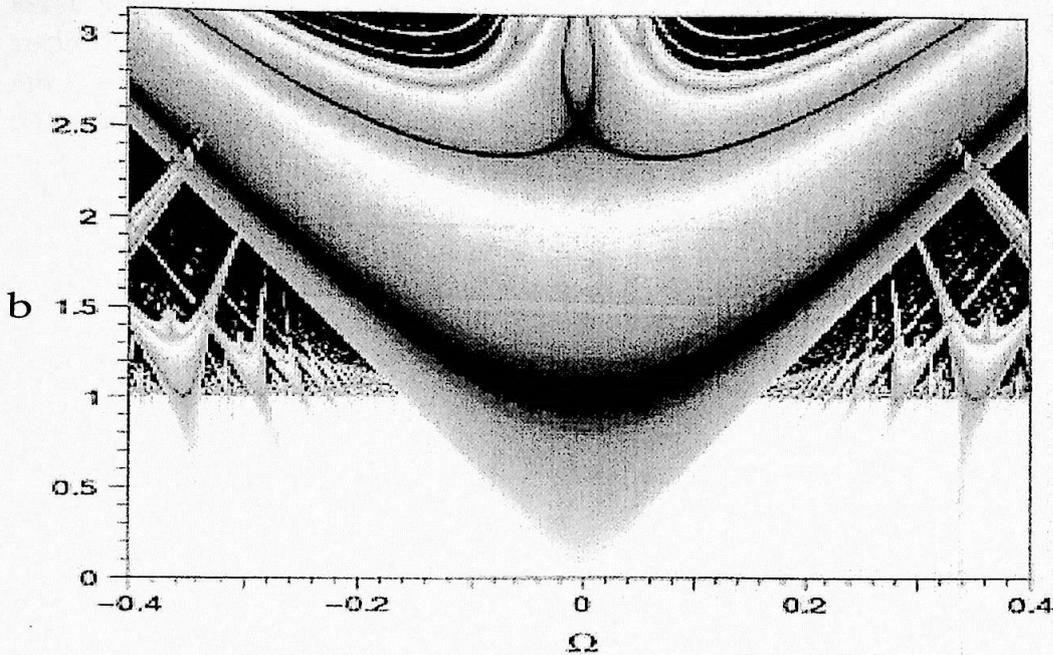


Figura 1.3.11: *Expoente de Lyapunov no espaço de parâmetros, para a aplicação do círculo. Ênfase na língua de Arnold com  $W = 0/1$ . Figura retirada de [20]*

aplicação terá, é a condição inicial escolhida. Para saber quais as condições iniciais que levam a aplicação para uma determinada órbita estável, temos que calcular a bacia de atração dessa órbita estável. As curvas em preto que vemos dentro das estruturas das línguas de Arnold, que podem ser melhor observadas nas figura 1.3.11, são os pontos correspondentes as órbitas superestáveis que surgem após uma bifurcação de duplicação de período. Há uma seqüência de curvas superestáveis dentro de cada língua, o que caracteriza uma cascata de duplicação de período. Se seguirmos o gráfico variando  $b$  para um valor fixo de  $\Omega$ , veremos que o sistema começa com um movimento quasi-periódico, encontra uma língua de Arnold e ocorre uma bifurcação tangente, o que faz com que surja uma órbita periódica estável. Dentro de cada língua há uma cascata de duplicações de período, que como vimos é caracterizada

pelas curvas superestáveis, o que leva o sistema para um atrator caótico. O contorno interno de cada língua refere-se aos pontos onde o atrator perde a estabilidade via crise de fronteira [20, 36] e torna-se um atrator caótico. As regiões referentes ao movimento caótico, em preto, estão repletas de curvas em cinza, que são as janelas periódicas que encontram-se após uma cascata de duplicação de período.

Para  $b > 1$  as línguas desenvolvem-se em pares de braços estáveis: um subindo para a esquerda e o outro para a direita. Aumentando o valor de  $b$ , a largura dos braços diminuem e os braços das diferentes línguas tendem à alinhar-se paralelamente um com os outros com uma inclinação igual a  $\pm 2\pi$ , [20].

## Capítulo 2

# Aplicação do Círculo de grau 2

No Capítulo 2, apresentamos a aplicação descrita pelo Deslocamento de Bernoulli, que frequentemente é usado como exemplo para uma dinâmica caótica e ergódica. O Deslocamento de Bernoulli possui a densidade de probabilidade constante e pode ser calculado analiticamente, [4]. Também apresentamos a aplicação do círculo, que pode ser interpretada como sendo a seção de Poincaré de um movimento em um torus de três dimensões, figura 1.2, com uma perturbação não linear senoidal. Vimos que a aplicação do círculo é um exemplo de transição de movimento quasiperiódico para caótico, [4, 3].

Neste trabalho vamos estudar a aplicação:

$$x_{n+1} = f^n(x_0) = 2x_n + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi x_n) + \Omega \pmod{1}. \quad (2.1)$$

A aplicação (2.1) apresenta dois parâmetros de controle:  $\Omega$ , que varia no intervalo  $[0, 1[$  e  $b$ . Neste trabalho usamos apenas valores positivos para o parâmetro  $b$ .

A função que descreve a aplicação (2.1),

$$f(x) = 2x + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi x) + \Omega \pmod{1}, \quad (2.2)$$

é descontínua para todos os valores de  $\Omega$  e  $b$ , o que torna possível o surgimento de uma dinâmica caótica. Na figura 2.1, temos a representação da função (2.2) com  $x$  variando no intervalo  $[0, 1[$ , (resultado de mod 1); para  $\Omega = 0.2$  e três diferentes valores de  $b$ .

Na figura 2.1-a,  $b = 0.8$ , a função não apresenta extremos. Testando a

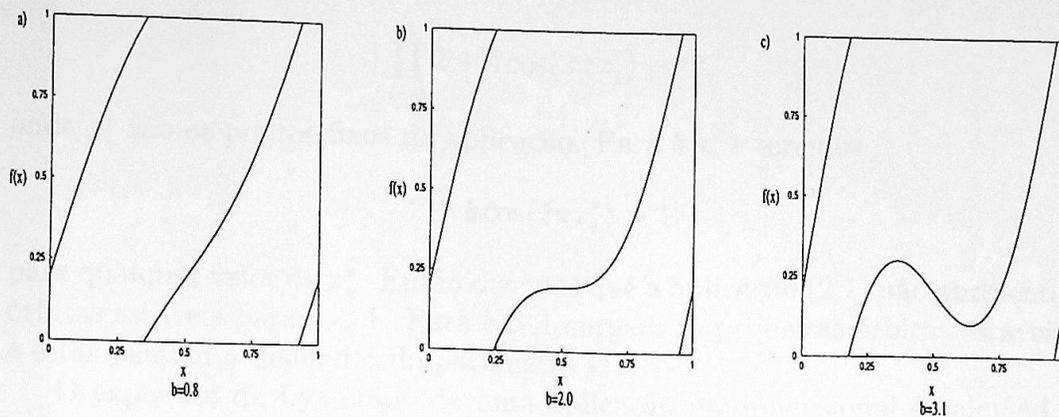


Figura 2.1: Gráfico da função (2.2) para  $\Omega = 0.2$ : a)  $b = 0.8$ ; b)  $b = 2.0$ , a função apresenta um ponto de inflexão para  $x = 0.5$ ; c)  $b = 3.1$ , a função apresenta um ponto de mínimo e um ponto de máximo.

condição para que uma função apresente extremos,

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0,$$

teremos, para a função (2.2),

$$2 + b \cos(2\pi x) = 0.$$

Os extremos surgirão apenas para  $b \geq 2$ , independente do valor do parâmetro  $\Omega$ . Para  $b = 2$  a função tem seu primeiro extremo, um ponto de inflexão, que aparece na figura 2.1-b, para  $x = 0.5$ . Na figura 2.1-c, a função (2.2) tem três extremos: um ponto de máximo, um ponto de mínimo e um ponto de inflexão. A função (2.2) faz parte de uma classe de funções que possuem múltiplos extremos [21].

Quando  $b = 0$ , a aplicação (2.1) tem  $\lambda = \ln 2$ , é caótica para qualquer valor de  $x_n$  e  $\Omega$  e possui apenas órbitas instáveis. Para valores de  $b > 0$ , o cálculo do expoente de Lyapunov é feito numericamente, mas podemos testar a condição de estabilidade das órbitas da aplicação (2.1) e assim saberemos em quais regiões surgirão as primeiras órbitas periódicas estáveis. No capítulo anterior as equações (1.5) nos davam as condições para uma aplicação unidimensional ter órbitas estáveis. Vamos testá-las para a aplicação (2.1):

$$\left| \prod_{i=0}^n f'(x_i^*) \right| < 1,$$

$$\left| \prod_{i=0}^n 2 + b \cos(2\pi x_i^*) \right| < 1,$$

onde  $x_i^*$  são os pontos fixos da aplicação. Para  $b < 1$  teremos

$$2 + b \cos(2\pi x_i^*) > 1$$

para qualquer valor de  $x_i^*$ . Então dizemos que a aplicação (2.1) não apresenta órbitas estáveis para  $b < 1$ . Para  $b > 1$  surgem as primeiras órbitas estáveis e estas passam a depender do parâmetro  $\Omega$ .

O expoente de Lyapunov de uma aplicação unidimensional é calculado pela equação (1.16):

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.$$

Se  $f'(x) > 1$  para todos os valores de  $x_i$ , teremos  $\lambda > 0$  para todos os valores de  $x_i$  e  $\Omega$ . Esta condição é satisfeita para o caso em que a aplicação (2.1) possui  $b < 1$ . Com essas informações podemos afirmar que a aplicação (2.1) é caótica para  $b < 1$ , e só possui órbitas periódicas instáveis.

Para estudarmos o comportamento estrutural da aplicação (2.1) com  $b \geq 1$  usamos o método numérico. A principal análise que fizemos foi para identificar qual comportamento a aplicação (2.1) apresentava para determinadas combinações de parâmetros. Para estabelecer as mudanças estruturais do sistema, variando apenas um parâmetro, usamos o diagrama de bifurcação e a evolução do expoente de Lyapunov. Também usamos os mapas de retorno para estudar regiões específicas com os parâmetros fixos, como as regiões próximas de bifurcação. Para ter uma visão geral do comportamento do sistema calculamos o expoente de Lyapunov no espaço de parâmetro, onde identificamos as regiões onde ocorrem o movimento caótico e movimento periódico. Ainda no espaço de parâmetros apresentamos os gráficos que mostram onde ocorrem as bifurcações.

## 2.1 Diagrama de Bifurcação e a Evolução do Expoente de Lyapunov

Na figura 2.1.2 apresentamos o diagrama de bifurcação e a evolução do expoente de Lyapunov para  $\Omega = 0.3$  e  $b = [0, 6]$ . Para construirmos os gráficos escolhemos aleatoriamente o valor da condição inicial. Em 2.1.2-a desprezamos os primeiros 700 pontos e trabalhamos com os 700 pontos restantes e em 2.1.2-b desprezamos os primeiros 1000 pontos e trabalhamos com os 4000 pontos restantes. Para calcular o expoente de Lyapunov numericamente, usamos a equação (1.2.16). No diagrama de bifurcação, seguindo o parâmetro  $b$  em valores crescentes, identificamos uma região caótica que vai de  $b = 0$  até  $b \approx 2$ , onde o expoente de Lyapunov, é positivo. Então surgem as primeiras órbitas periódicas que apresentam o fenômeno de bolhas primárias. O sistema volta a apresentar caos, pela rota de intermitência, com várias janelas periódicas; um ponto fixo surge para  $b \approx 2.635$  e passa por uma cascata de duplicação de período levando o sistema para um atrator caótico, que logo passa por uma crise.

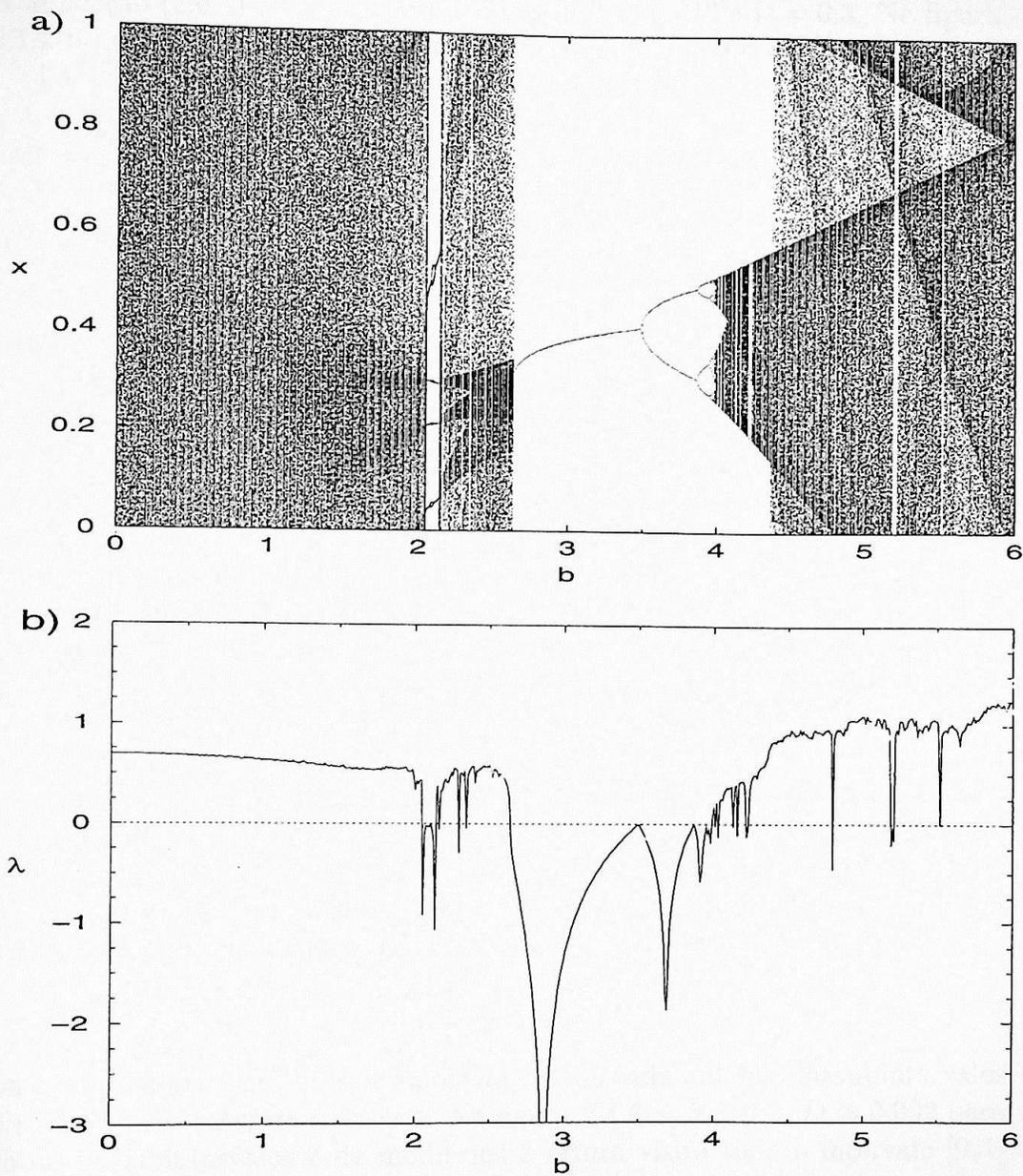


Figura 2.1.2:  $\Omega = 0.3$ ,  $b = [0, 6]$ : a) diagrama de bifurcação; b) evolução do Expoente de Lyapunov.

### 2.1.1 Caos e Ergodicidade

A aplicação (2.0.1) é caótica para valores de  $b < 2.046$  e  $\Omega = 0.3$ . Na figura 2.1.2-b podemos ver que o expoente de Lyapunov é positivo para  $b < 2$ .

Para  $b < 1$ , a aplicação (2.0.1) só apresenta órbitas periódicas instáveis e  $\lambda > 0$ . A aplicação não é dissipativa para  $b < 1$ , o que faz com que não haja um subconjunto de  $x \in [0, 1[$  para o qual as órbitas são atraídas. As órbitas visitam todo o intervalo  $[0, 1[$ , e a aplicação (2.0.1) possui um atrator universal.

No Capítulo 1, introduzimos uma importante medida para caracterizar uma aplicação, a entropia de Komolgorov,  $K$ . Para uma aplicação unidimensional,  $K$  possui o mesmo valor de  $\lambda$  [4].  $K$  pode ser definida como a taxa com que a informação sobre um estado de um sistema é perdida com o passar do tempo. Para uma aplicação, isto significa o quão rápido perde-se informação sobre a condição inicial da órbita. Quanto maior for  $K$ , precisaremos de menos iterações para perdemos totalmente a informação sobre a condição inicial que gerou a órbita. Uma aplicação que apresenta  $K > 0$  é caótica, ergódica e apresenta a propriedade de mixing [4]. Quando dizemos que a aplicação é ergódica, ela possui pelo menos uma medida invariante e, no caso em que a órbita é caótica, uma dessas medidas invariantes é a densidade de probabilidade de cada órbita, ou seja, a forma com que a órbita está distribuída no intervalo de  $x$ . A densidade de probabilidade é calculada numericamente para aplicações caóticas.

Nas figuras 2.1.3 calculamos as densidades de probabilidade de duas órbitas caóticas para a aplicação (2.0.1). Para fazer as figuras, escolhemos uma condição inicial aleatória, e iteramos a aplicação  $10^5$  vezes. Dividimos o intervalo  $[0, 1[$  em  $I = 500$  subintervalos iguais e contamos quantas vezes a órbita visitou cada subintervalo. Definimos como sendo  $D$ :

$$D = d/m$$

onde  $d$  é o número de vezes que a órbita visitou cada um dos 500 subintervalos e  $m$  o número total de iterações. Na figura 2.1.3-a,  $b = 0.5$ ,  $D \approx 0.002$  para todos os subintervalos  $I$  de modo que a órbita visita todo o intervalo  $[0, 1[$  de uma forma homogênea. Já na figura 2.1.3-b,  $b = 1.8$ ,  $D$  apresenta picos mostrando que existem subintervalos onde a órbita visita mais vezes. Para  $b = 1.8$  a aplicação (2.0.1) está próxima de uma bifurcação tangente que irá gerar uma órbita estável de período 4. O que gera esses picos é o fenômeno de intermitência.

A aplicação (2.0.1) é ergódica para  $b = 0.5$  e  $b = 1.8$ , possui  $K > 0$ , e terá a mesma densidade de probabilidade para toda condição inicial que seja diferente de um ponto fixo instável.

O caso em que  $b = 0$  é uma caso particular de ergodicidade, pois a aplicação possui a densidade de probabilidade constante em  $x$ . A aplicação Deslocamento de Bernoulli, possui a densidade de probabilidade constante [5], e se fizermos um histograma da densidade de probabilidade de uma órbita, com condição inicial diferente de um ponto periódico instável, ela será constante ao longo de  $x$ . O número de passagem em cada subintervalo de  $[0, 1[$  aproxima-se de  $1/I$ , onde  $I$  é o número de subintervalos. Vimos no Capítulo anterior que a aplicação Deslocamento de Bernoulli possui  $\rho(x) = 1$ .

Quando uma aplicação é ergódica, a média temporal pode ser substituída pela média espacial. Para o caso unidimensional, a órbita que possui a densidade de probabilidade constante preenche todo o intervalo  $x = [0, 1[$  de forma uniforme e a média temporal é igual a média geométrica do intervalo,  $E = 0.5$ . Vimos que na figura 2.1.3-a, a distribuição dos pontos é aproximadamente uniforme no intervalo  $x = [0, 1[$ , o que sugere que a aplicação (2.0.1) também tenha uma densidade de probabilidade constante. Para testar se a densidade de probabilidade da aplicação (2.0.1) mantém-se constante quando variamos  $b$ , calculamos a média temporal das órbitas da aplicação, para diferentes valores de  $b$ , e comparamos com a média espacial. A média espacial,  $E$ , vale  $E = 0.5$ , pois, admitimos que há uma distribuição homogênea no intervalo  $[0, 1[$ , o que faz com que a média espacial seja igual a média geométrica do intervalo.

Vamos analisar a aplicação (2.0.1), e ver como ocorre a transição do caso já conhecido de  $b = 0$  para o caso de  $b \neq 0$ . Usando métodos numéricos, calculamos a média temporal das órbitas para  $b = [0, 2.046]$ .

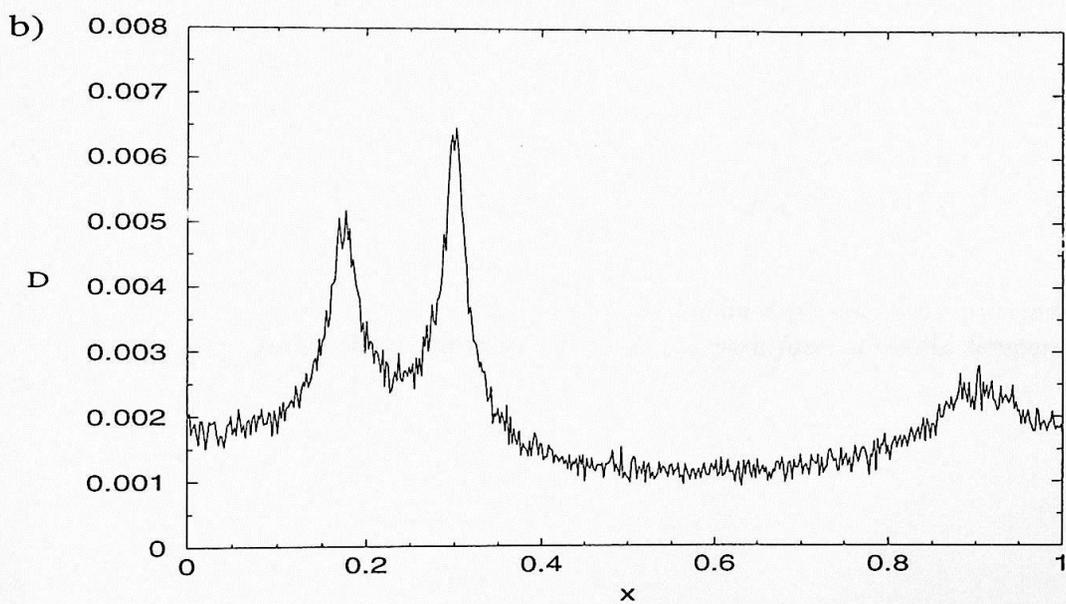
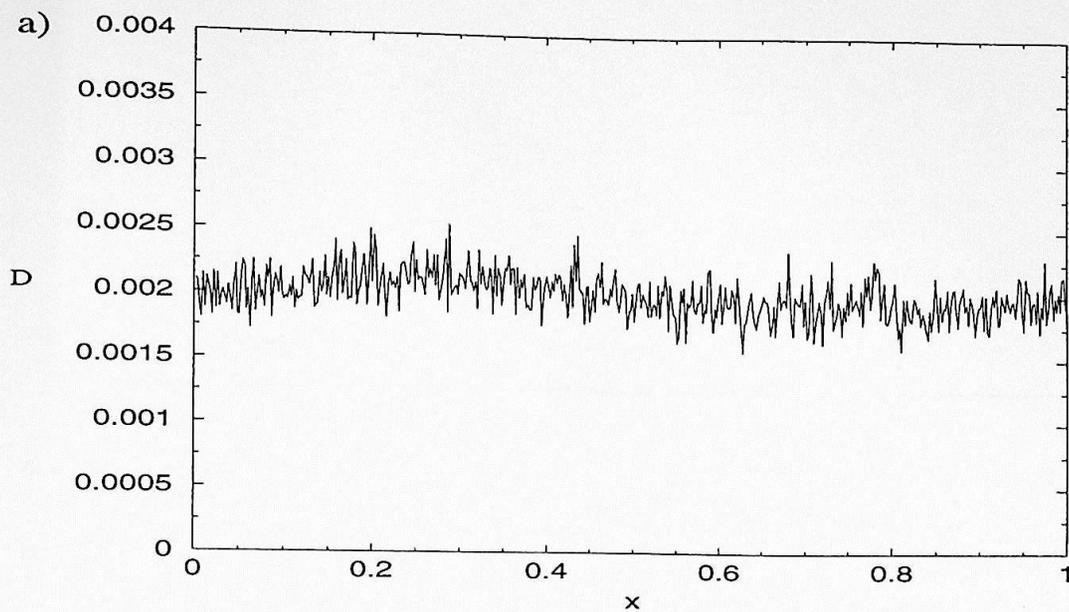


Figura 2.1.3: para diferentes valores de  $b$ . a)  $b = 0.5$ , onde a distribuição de  $D$  permanece aproximadamente constante ( $D \approx 0.002$ ) para todos os subintervalos  $I$ ; b)  $b = 1.8$ ,  $D$  apresenta dois picos bem definidos, devido à intermitência.

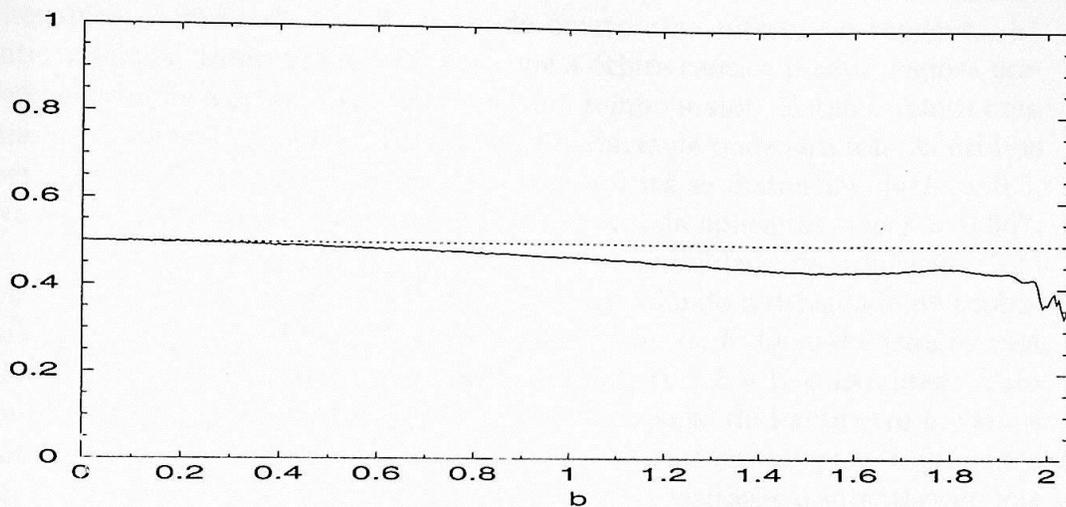


Figura 2.1.4:  $b = [0, 2.046]$ ,  $\Omega = 0.3$ . Gráfico da média espacial, linha tracejada e média temporal, linha cheia. Usamos  $10^5$  iterações para fazer a média temporal das órbitas.

Na figura 2.2.4 , calculamos a média temporal das órbitas, linha cheia, e comparamos  $E = 0.5$  linha tracejada. Para o cálculo da média temporal usamos:

$$T = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} x_n,$$

com  $N = 10^5$ . Podemos acompanhar o que ocorre com a aplicação quando aumentamos o parâmetro de controle do termo não-linear,  $b$ . Para  $b = 0$  as linhas se sobrepõem, e o sistema tem  $\rho(x) = 1$ . As linhas continuam sobrepostas até  $b \approx 0.5$  onde temos  $T = 0.491$ . Se continuarmos aumentando  $b$  a média temporal vai se afastando de  $E = 0.5$ , mas isso ocorre de uma forma suave, e para  $b = 1$  a média temporal é  $T = 0.468$ . Quando chegamos próximo de  $b \approx 2.046$ , onde ocorre uma bifurcação tangente, há intermitência. Intermitência faz com que a órbita caótica possua regiões preferenciais onde a órbita permanece por um tempo maior. Então teremos uma maior incidência de pontos em regiões próximas de onde surgirão as órbitas periódicas, figura 2.2.3-b e a média temporal irá se distanciar de  $E = 0.5$ . Na figura 2.2.4 , para  $b \approx 2.0$  a média temporal da aplicação vale  $T = 0.367$ .

Outra forma de testar se a densidade probabilidade da aplicação (2.1) mantém-se constante quando variamos  $b$  é calculando a densidade de probabilidade para cada órbita, com diferentes valores de  $b$ . Quando usamos essa técnica analisamos a aplicação com os parâmetros  $b$  e  $\Omega$  constantes. Para saber como a aplicação comporta-se com a variação do parâmetro  $b$ , vamos introduzir um novo método. Estamos interessados em saber se a diferença entre o subintervalo que teve o menor número de visitas, e o subintervalo que teve o maior número de visitas é nula ou próxima de zero, já que estamos tratando de resultados numéricos.

Para fazer a figura 2.2.5, dividimos o intervalo  $[0,1[$  em  $I$  subintervalos iguais,  $I = 500$ , e contamos quantas vezes a órbita visitou cada um. Definimos  $S_{maior}$  como sendo o maior número de visitas em um único intervalo,  $S_{menor}$  como sendo o menor número de visitas em um único intervalo e  $m$  como o número total de iterações. Agora podemos calcular  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{S_{maior} - S_{menor}}{m}$$

Calculamos  $\Delta$  para diferentes valores de  $b$  constante e construímos a figura 2.2.5-a.

Quando a aplicação tem um ponto fixo,  $\Delta = 1$ , e na figura 2.5-a, encontramos ponto fixo para o intervalo  $2.64 < b < 3.50$ . Isso ocorre por que

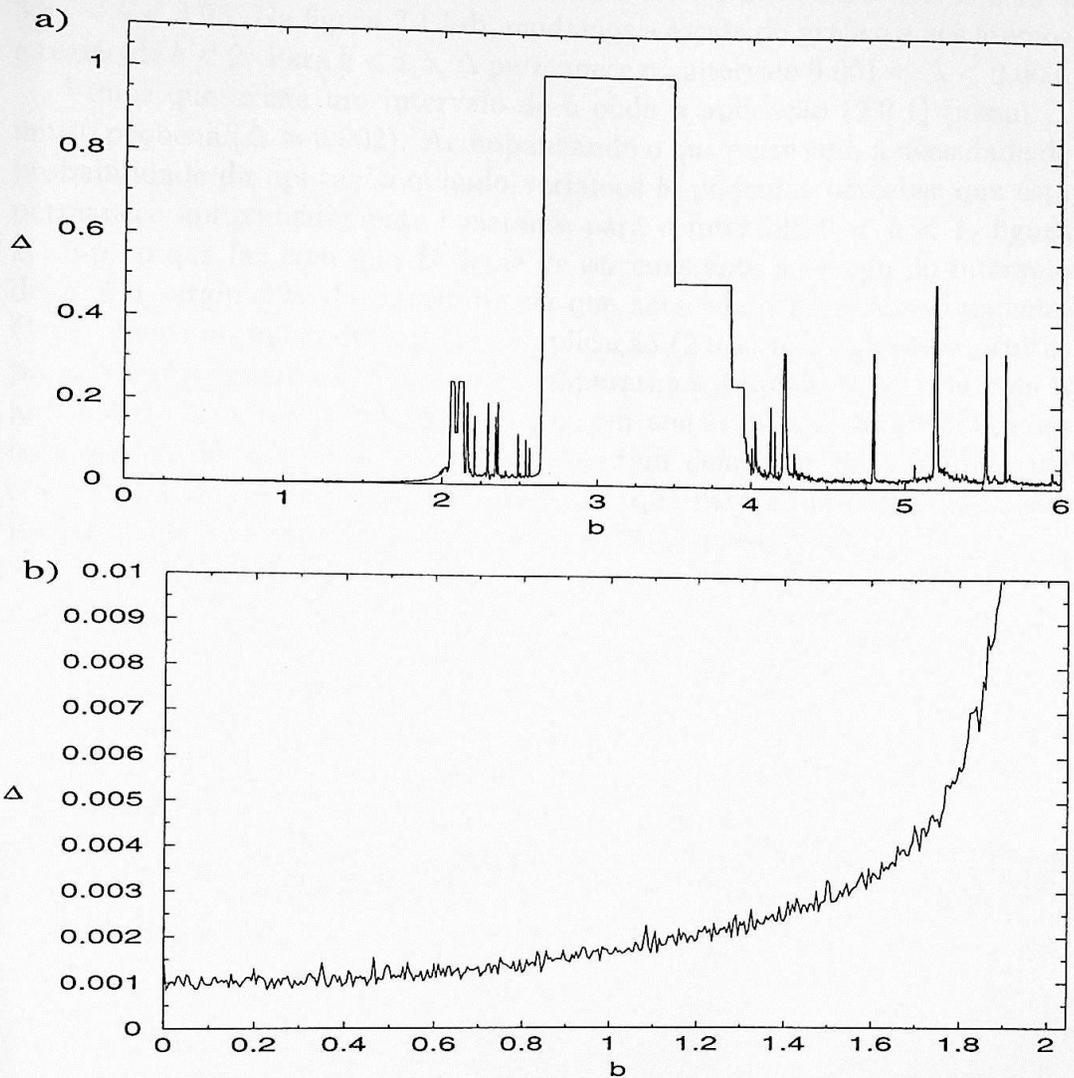


Figura 2.1.5:  $\Delta$  para diferentes valores de  $b$ . a)  $b = [0, 6]$ ; b)  $b = [0, 2.04]$ .

temos apenas um subintervalo com todos os pontos da órbita. Se tivermos uma órbita de período 2,  $\Delta = 0.5$ , e podem ser identificados nos intervalos  $3.50 < b < 3.87$  e  $5.19 < b < 5.2$ , órbita de período 4,  $\Delta = 0.25$ , encontramos três intervalos onde ocorre,  $2.05 < b < 2.07$ ,  $2.10 < b < 2.13$  e  $3.87 < b < 3.95$ . Na figura 2.1.5-b, mudamos a escala do gráfico e nos atemos a região de  $b < 2$ . Para  $b < 1.5$ ,  $\Delta$  permanece no intervalo  $0.001 < \Delta < 0.003$ .

Vimos que existe um intervalo de  $b$  onde a aplicação (2.0.1) possui  $\Delta$  muito pequena ( $\Delta \approx 0.002$ ). Acompanhando o que ocorre com a densidade de probabilidade da aplicação quando variamos  $b$ , podemos perceber que esta permanece aproximadamente constante para o intervalo  $0 < b < 1$ , figura 2.1.5-b. o que faz com que  $D$  deixe de ser constante ao longo do intervalo de  $x$ , é o surgimento da intermitência que antecede a bifurcação tangente. Como vimos no início do capítulo a aplicação (2.0.1) não apresenta órbitas periódicas estáveis para  $b < 1$ . Se compararmos a aplicação (2.0.1) com a aplicação do círculo, podemos notar que em ambas as aplicações há regiões com comportamento ergódico que apresentam densidade de probabilidade constante para  $b < 1$ . Temos que salientar que para a aplicação do círculo isso só ocorre para os casos onde o movimento é quasiperiódico.

## 2.1.2 Bolhas Primárias

A primeira órbita periódica estável, quando mantemos  $\Omega = 0.3$ , é uma órbita de período 8 que surge para  $b \approx 2$ . Esta órbita permanece estável por um pequeno intervalo de  $b$  que pode ser observado na figura 2.1.6 como sendo uma estreita faixa em branco para  $b \approx 2$ . Se aumentarmos um pouco mais o parâmetro  $b$  surge uma órbita de período 4, e surge por bifurcação tangente em  $b \approx 2.046$ . Seguindo o diagrama de bifurcação, figura 2.1.6, no sentido crescente do parâmetro de controle, temos que, para  $b \approx 2.075$ , a órbita periódica sofre uma bifurcação do tipo duplicação de período e passa a ser uma órbita de período 8; em seguida, volta a sofrer uma bifurcação de duplicação de período, mas agora inversa, em  $b = 2.100$ , e a órbita passa a ter período 4 novamente. Em [38] essa sequência de bifurcações é chamada de bolha primária e é caracterizada pelo surgimento de pequenos círculos no diagrama de bifurcação, como os que são vistos na figura 2.1.6.

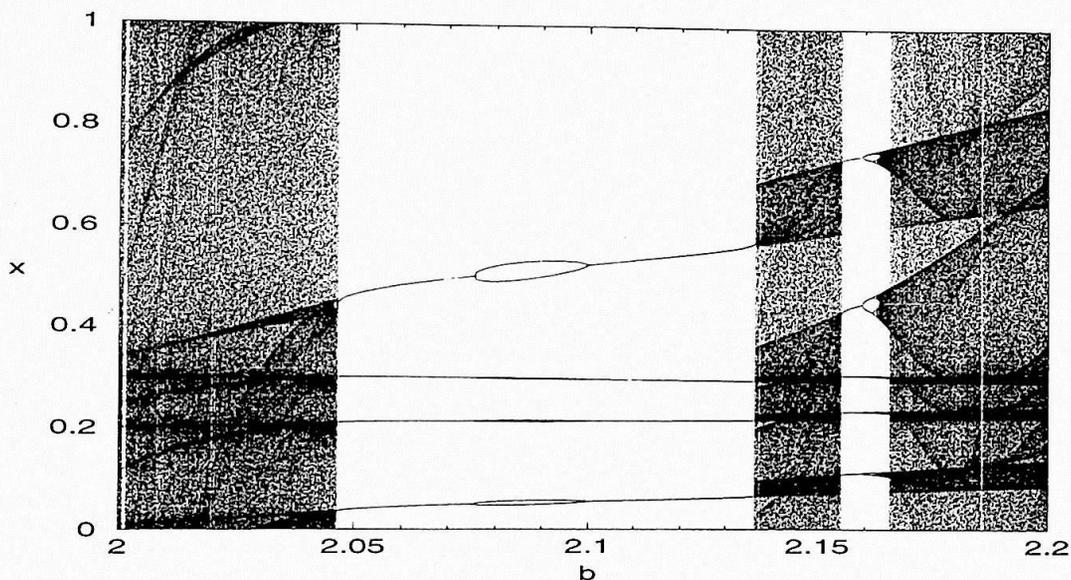


Figura 2.1.6:  $\Omega = 0.3$ ,  $b = [2, 2.2]$ : *diagrama de Bifurcação, com 4 bolhas primárias.*

Com a ajuda da figura 2.1.7 veremos o que ocorre com a função (2.0.2) quando há formação de bolhas. Na figura 2.1.7 temos o gráfico da função  $f^4(x)$ , para diferentes valores de  $b$ . Em 2.1.7-a,  $b = 2.04$ , o sistema é caótico, não apresenta órbitas estáveis, mas está próximo de uma bifurcação tangente.

Há quatro pontos de máximo que encontra-se próximos da diagonal,  $f^4(x) = x$ , e se aumentarmos o valor de  $b$ , a função (2.0.2) irá tangenciar a linha  $f^4(x) = x$ . Para  $b = 2.046$  surge uma órbita estável de período 4.

Um método gráfico para encontrarmos a órbita periódica de período 4 da aplicação (2.0.1), é localizarmos os pontos da função  $f^4(x)$ , que interceptam a linha  $f^4(x) = x$ . Para sabermos sobre a estabilidade dessas órbitas, vemos qual a inclinação da curva  $f^4(x)$ , no ponto em que a curva cruza a diagonal. Se a inclinação estiver entre  $[-45^\circ, 45^\circ]$ , o ponto será estável. Isto equivale a dizer que  $|\delta| < 1$ , sendo  $\delta = \frac{df^4(x)}{dx}$  [43]. Para uma inclinação igual a  $45^\circ$ , teremos uma bifurcação tangente ( $\delta = 1$ ) e para uma inclinação igual a  $-45^\circ$ , uma bifurcação de duplicação de período ( $\delta = -1$ ).

A órbita de período 4 permanecerá estável para  $2.046 < b < 2.075$ , sua inclinação estará entre  $[-45^\circ, 45^\circ]$  quando para  $b \approx 2.075$ , surge uma órbita de período 8. Na figura 2.1.7-b, a inclinação da curva forma um ângulo de  $-45^\circ$  com a horizontal, uma bifurcação de duplicação de período ocorre e surge uma órbita de período 8. Para o intervalo  $2.075 < b < 2.100$  a inclinação será maior que  $45^\circ$  e a órbita de período 4 será instável, a órbita de período 8 passa a ser estável. Na figura 2.1.7-c a curva  $f^4(x)$  tem inclinação  $-45^\circ$  e teremos uma nova bifurcação de duplicação de período e a órbita de período 4 volta a ser estável. Para  $b \approx 2.137$  os pontos de mínimo tangenciam a linha  $f^4(x) = x$ , e há uma bifurcação tangente, aumentando  $b$  não teremos mais ponto fixo estável. Em 2.1.7-d todos os pontos da função, que interceptam a diagonal, possuem inclinação maior que  $45^\circ$ .

Daremos mais detalhes sobre a formação de bolhas quando apresentarmos o gráfico do esqueleto de bifurcação no espaço de parâmetros.

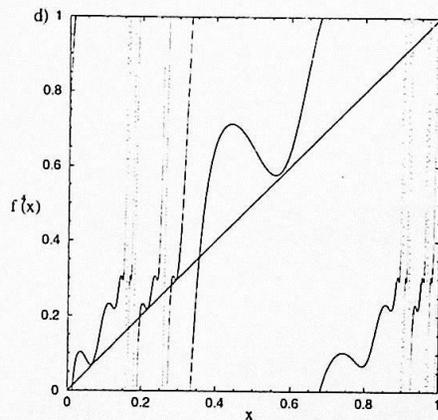
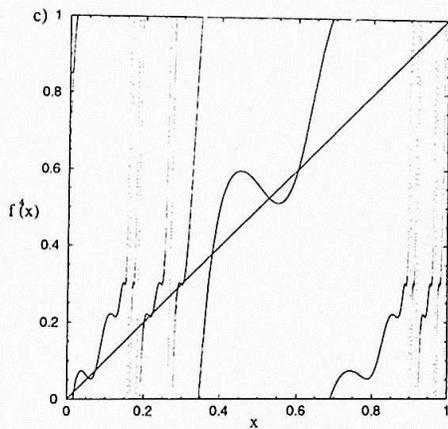
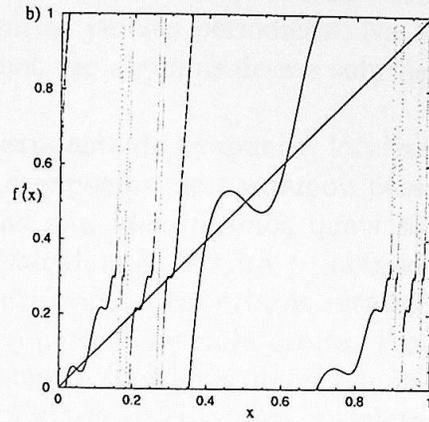
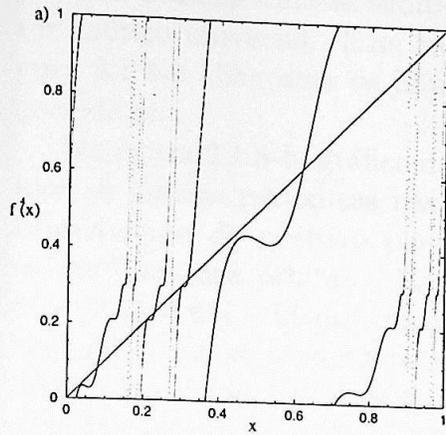


Figura 2.1.7: Mapa de retorno para a aplicação (2.0.1) com  $\Omega = 0.3$ : a)  $b = 2.04$ ; b)  $b = 2.075$ ; c)  $b = 2.100$ ; d)  $b = 2.145$ .

### 2.1.3 Movimento Caótico-Periódico

A aplicação (2.0.1) volta a apresentar comportamento caótico no intervalo  $2.137 < b < 2.635$ , pela rota de intermitência, onde a órbita estável de período 4 transforma-se subitamente em uma órbita caótica, com um atrator caótico universal. Esse trecho mostra várias janelas periódicas. Na figura 2.1.8-a, diagrama de bifurcação, podemos ver algumas dessas soluções periódicas.

Na figura 2.1.8-b, gráfico da evolução do expoente de Lyapunov, localizamos as janelas periódicas nas regiões onde o expoente de Lyapunov passa bruscamente de positivo para negativo, mas não identificamos quais são os períodos das órbitas. Na figura 2.1.9, calculamos  $\Delta$  para o intervalo  $b = [2.13, 2.63]$  e identificamos o período de algumas das órbitas estáveis. Na tabela abaixo temos a relação entre  $\Delta$  e o período de cada órbita. Para órbitas de período maiores que 15 a diferença entre os valores dos  $\Delta$  é muito pequena (menor que 0.01) e não conseguimos identificar o período das órbitas por esse método.

$\Delta$	<i>Período</i>
1	P1
0.5	P2
0.33	P3
0.25	P4
0.2	P5
0.166	P6
0.143	P7
0.125	P8
0.111	P9
0.1	P10
0.0909	P11
0.0833	P12
0.0769	P13
0.0714	P14
0.0666	P15
0.0625	P16
.	.
.	.
.	.

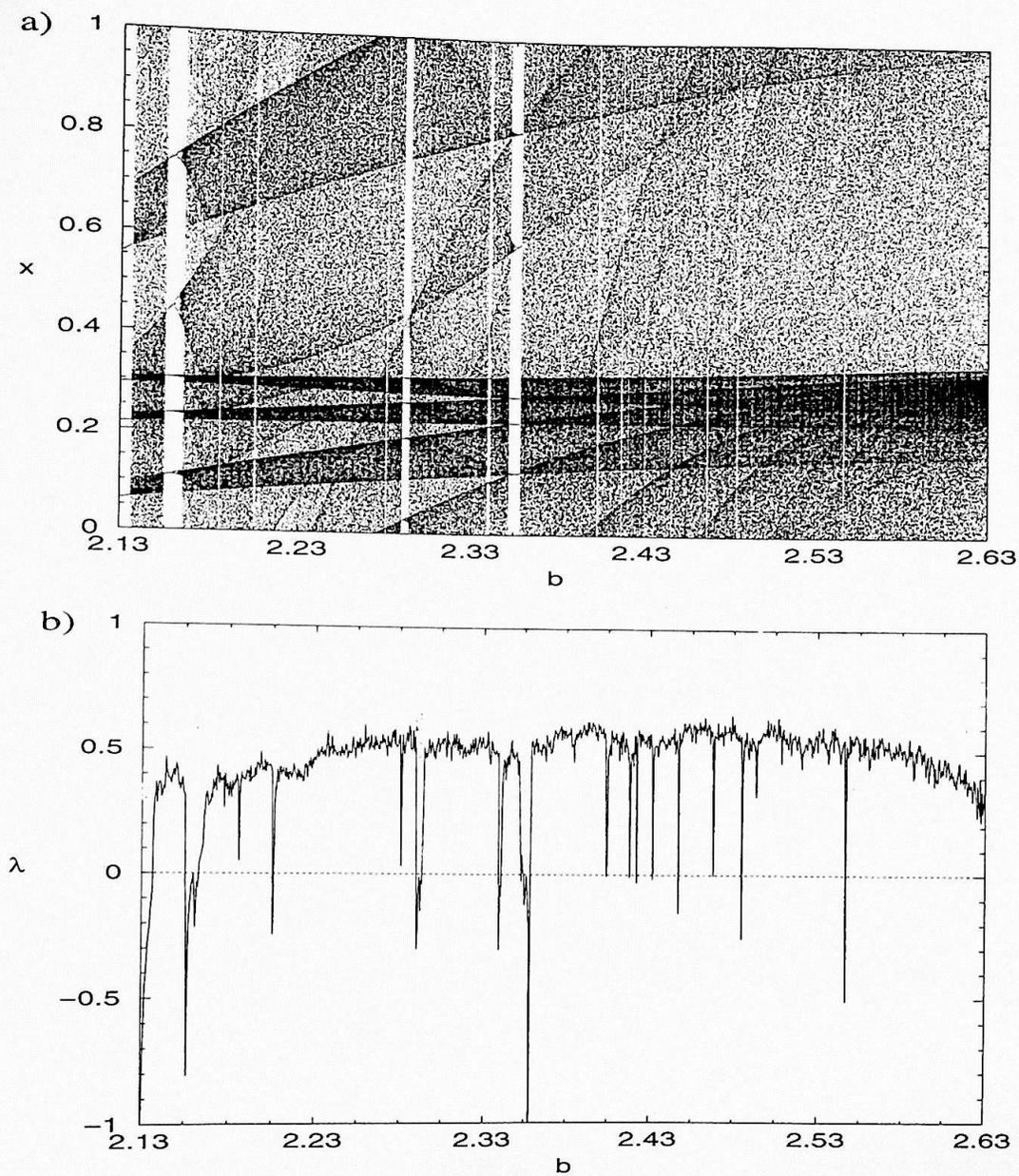


Figura 2.1.8: a) Diagrama de bifurcação; b) evolução do expoente de Lyapunov.

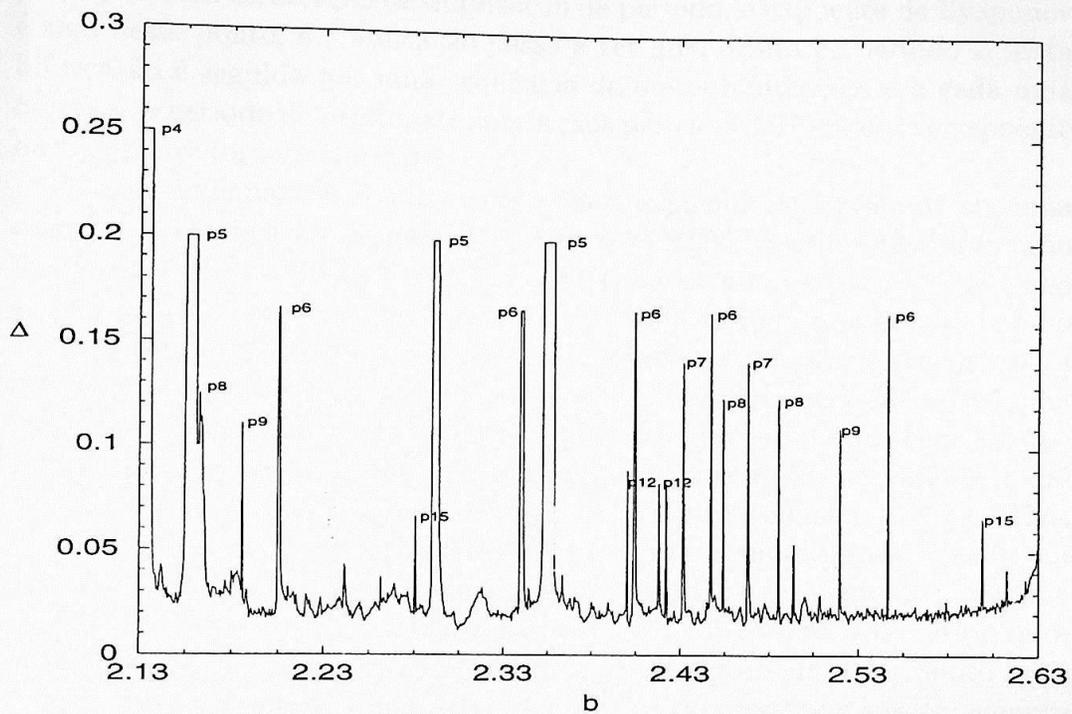


Figura 2.1.9: Gráfico de  $\Delta$  para o intervalo de  $b = [2.13, 2.63]$ , onde identificamos os períodos das órbitas estáveis.

### 2.1.4 Duplicação de Período

Na figura 2.1.2-a podemos ver um típico exemplo de cascata de duplicações de período que leva a aplicação (2.0.1) ao caos. Para  $b \approx 2.635$  ocorre uma bifurcação tangente dando origem a um ponto fixo. No diagrama de bifurcação, o ponto fixo é representado por uma simples curva e pode ser visto para  $2.635 < b < 3.498$ . Na figura 2.1.2-b, o expoente de Lyapunov é negativo para esse intervalo. Se aumentarmos  $b$ ,  $b \approx 3.498$ , a aplicação passa por uma bifurcação de duplicação de período, o expoente de Lyapunov é zero nesse ponto, e a aplicação passa a ter uma órbita de período 2. Esta bifurcação é seguida por uma sequência de novas bifurcações e a cada uma dobra-se o período da órbita, até surgir caos para  $b \approx 3.97$ , quando o expoente de Lyapunov torna-se positivo.

Vamos acompanhar o que ocorre com o expoente de Lyapunov em uma cascata de duplicação de período. Para  $b \approx 2.635$ , ocorre uma bifurcação tangente e surge o ponto fixo. Para este valor de  $b$  temos que  $\delta = 1$ , como já foi visto, e o expoente de Lyapunov é nulo. Em todo o intervalo de  $b$  no qual haja o ponto fixo, o expoente de Lyapunov é negativo, até que para  $b \approx 3.498$ , o expoente de Lyapunov é nulo novamente quando ocorre uma bifurcação de duplicação de período. Neste caso  $\delta = -1$ . O que vemos é que desde o surgimento do ponto fixo e o seu desaparecimento,  $\delta$  varia de 1 até  $-1$ , e surge uma órbita superestável neste intervalo. Quando  $\delta = 0$ , temos  $\lambda = -\infty$ , e chamamos esta órbita de uma órbita superestável. Na figura 2.1.2-b, vemos que no intervalo onde há o ponto fixo, o expoente de Lyapunov vai de zero para um valor bem negativo ( $\lambda < -3$ ) e volta a ter valor zero. Como  $\lambda$  é calculado numericamente, apenas mostra-se um valor muito mais negativo que os outros, e não  $-\infty$ . As órbitas superestáveis surgem sempre que há uma bifurcação tangente seguida de uma bifurcação de duplicação de período. Em uma cascata de duplicação de período, há sempre uma órbita superestável para cada nova órbita de período  $p$  que surge. Ou seja, entre duas bifurcações de duplicação de período há sempre uma órbita superestável [3].

A região caótica que sucede a cascata de duplicação de período é repetidamente interrompida por janelas periódicas de vários tamanhos e diferente períodos. Em um diagrama de bifurcação, identificamos estas órbitas periódicas como sendo as faixas claras nas regiões que apresentam caos. A janela de período 3 é a mais nítida. Na figura 2.1.11 podemos ver com mais detalhes o que ocorre nesse intervalo. A órbita estável de período 3 passa

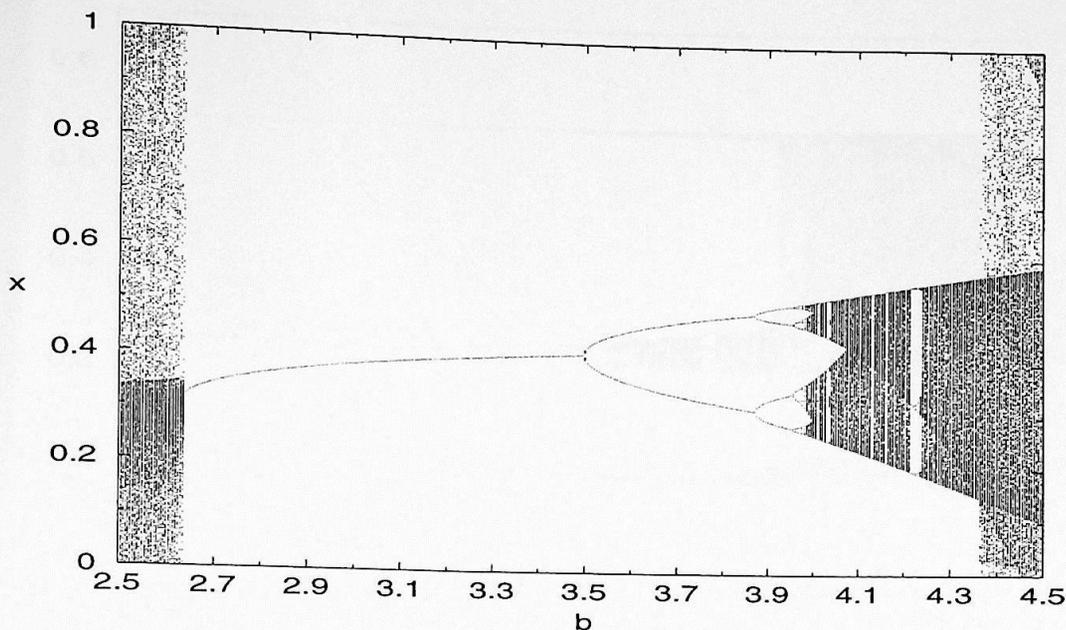


Figura 2.1.10: Diagrama de bifurcação mostrando uma cascata de duplicação de período.

por uma cascata de duplicação de período reproduzindo o comportamento da aplicação. Cada uma das três linhas que vemos na figura 2.1.11 comporta-se como o ponto fixo que citamos anteriormente e passa por uma série de bifurcações até chegar a um movimento caótico. Há infinitas janelas periódicas de períodos diferentes numa região caótica que sucede uma cascata de duplicação de período [5]. Algumas dessas janelas estão em  $b \approx 4.126$ , uma janela de período 5; e  $b \approx 4.210$ , uma janela de período 3, essas são janelas que permanecem mais tempo imersas no regime periódico.

Olhando para figura 2.1.10 podemos acompanhar as mudanças que ocorrem com o atrator caótico depois que a aplicação passa por uma cascata de duplicação de período. Inicialmente o atrator é formado por várias partes separadas que vão se chocando até formarem um atrator universal. No intervalo  $3.98 < b < 3.99$  o atrator apresenta quatro regiões caóticas separadas, que para  $b \approx 3.99$  combinam-se duas a duas, ficando com duas regiões. Estas também combinam-se entre si para  $b \approx 4.07$ , formando uma única região caótica.

Na figura 2.1.12 mostramos o mapa de retorno com o atrator caótico formado após a cascata de duplicação de período. Em 2.1.12-a o atrator é

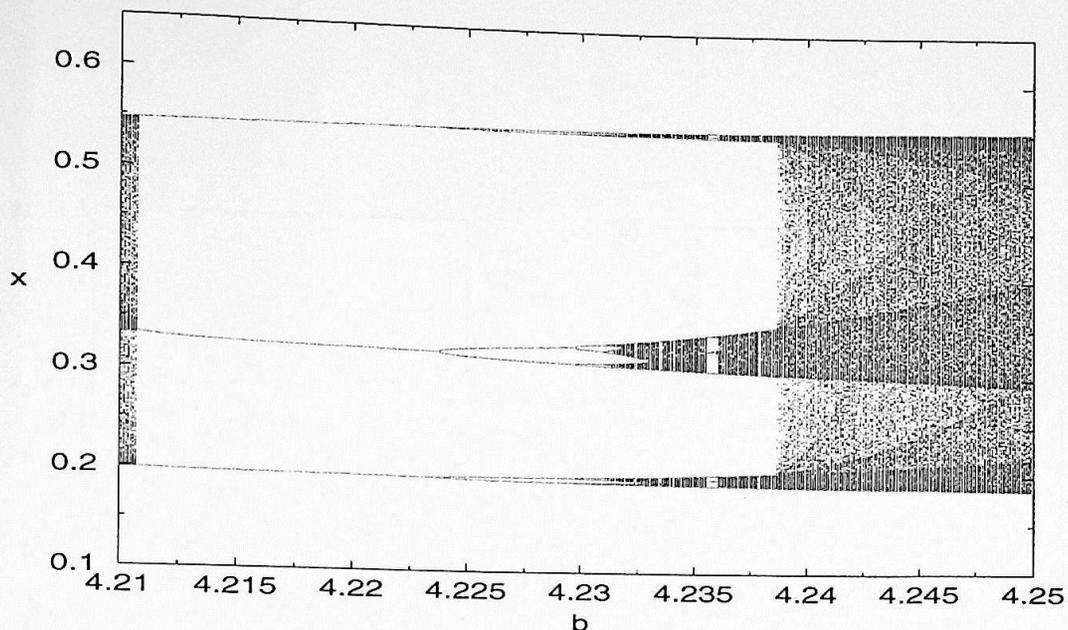


Figura 2.1.11: Diagrama de bifurcação mostrando uma janela periódica, que passa por uma cascata de duplicação de período.

formado por quatro partes separadas. Com a mudança do parâmetro essas partes vão aumentando de tamanho até ocorrer crise, mudando a estrutura do atrator, que passa a ter apenas duas partes separadas, figura 2.1.12-b. O sistema passa por uma nova crise e o atrator muda novamente. Vemos a nova forma do atrator em 2.1.12-c, onde o atrator é formado por uma única linha. Em  $b \approx 4.36$  o atrator caótico choca-se com o ponto fixo instável, e há crise interior, o que gera uma mudança estrutural no sistema, surgindo um atrator universal. O atrator caótico que tínhamos antes da crise e a órbita instável estão imersos no novo atrator. Na figura 2.1.12-d vemos o atrator logo depois da crise. A região que era ocupada pelo atrator antes da crise pode ser identificada por uma maior densidade de pontos. No diagrama de bifurcação, as trajetórias movem-se entre as proximidades do atrator anterior, em uma via intermitente [5].

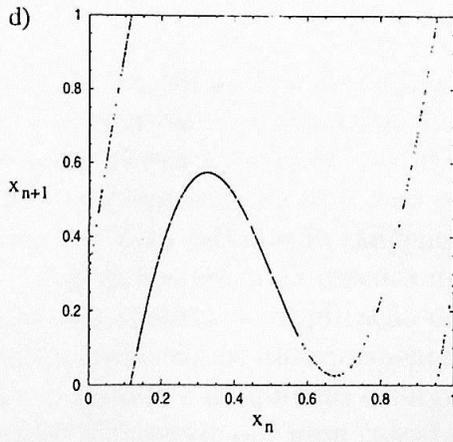
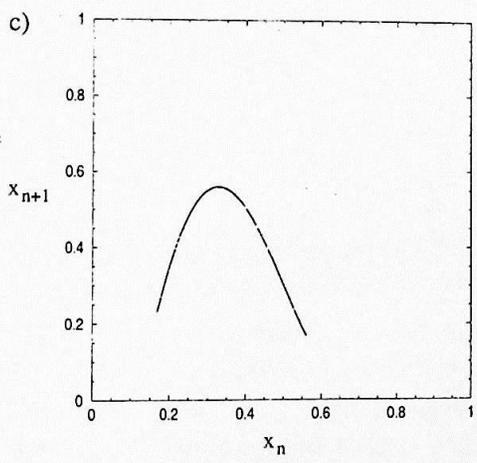
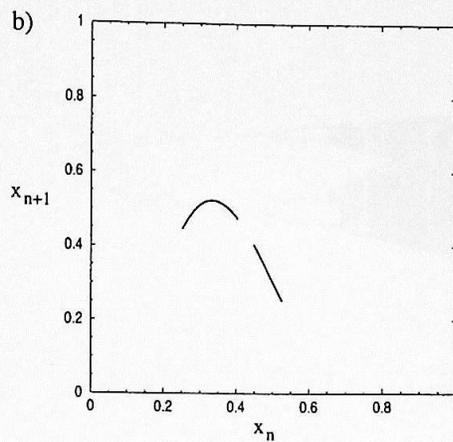
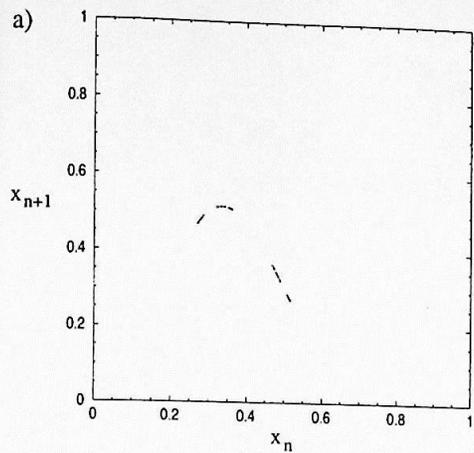


Figura 2.1.12: a)  $b = 3.98$ , b)  $b = 4.04$ , c)  $b = 4.3$ , d)  $b = 4.4$

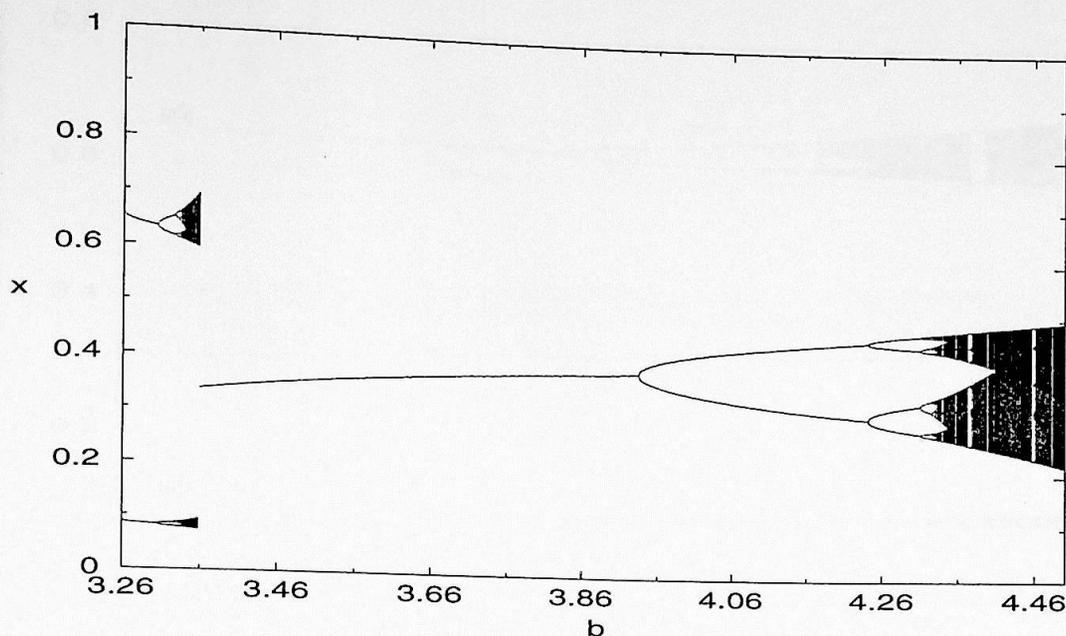


Figura 2.1.13: a) *Diagrama de Bifurcação*,  $\Omega = 0.207$ . Escolhemos uma condição inicial da bacia de atração da órbita de período 2,  $x_0 = 0.65$ .

### 2.1.5 Biestabilidade

Em um sistema não linear é possível existir mais que um atrator simultaneamente, e sua dinâmica passa a depender da escolha das condições iniciais. Vamos ilustrar esse fenômeno com o diagrama de bifurcação para  $\Omega = 0.207$ , na figura 2.1.13. Para  $b < 3.26$  o sistema é predominantemente caótico apresentando janelas periódicas. Para  $b \approx 3.26$  ocorre uma bifurcação tangente e surge uma solução estável de período 2 que logo passa por uma cascata de duplicação de período. O que se espera é que essa cascata de duplicação de período leve o sistema para um atrator caótico, como vimos anteriormente. Isto não acontece, e há um salto na solução, o atrator é aniquilado e surge um ponto fixo em  $b \approx 3.358$ . O ponto fixo segue até passar por uma cascata de duplicação de período e então chegar em um atrator caótico. O que ocorre para  $b \approx 3.358$  é uma crise ou uma bifurcação catastrófica [41], para valores fixos de  $\Omega$  e, para uma pequena mudança no valor de  $b$  (da ordem de  $10^{-3}$ ), o sistema pula de um atrator para outro.

O que está acontecendo é que a órbita de período 2, (que passa por uma cascata de duplicação de período) e o ponto fixo existem simultaneamente

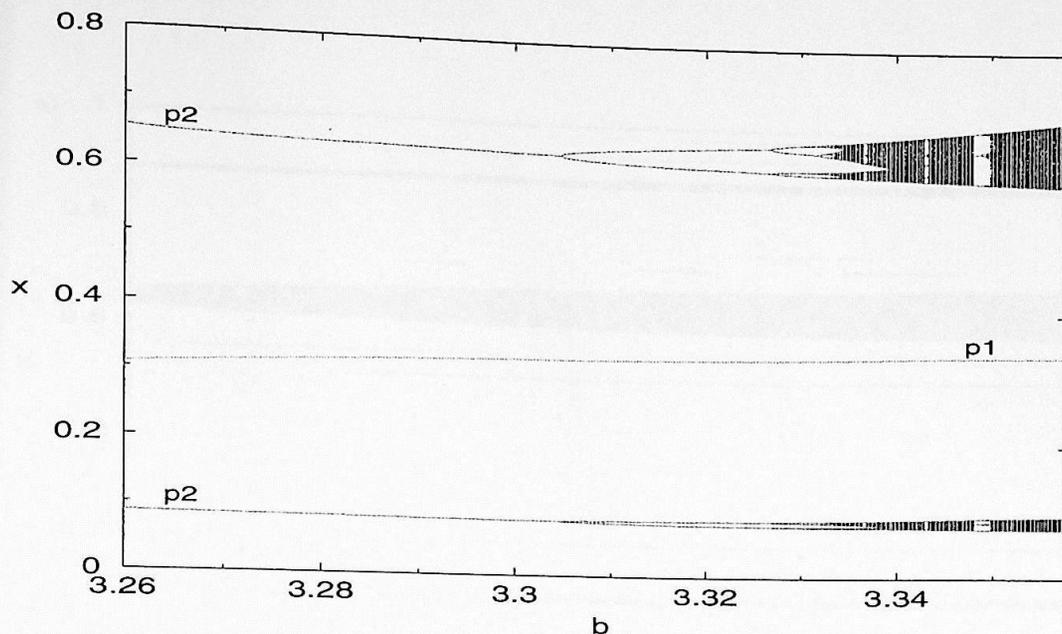


Figura 2.1.14: a) *Diagrama de Bifurcação*,  $\Omega = 0.207$ .

para os mesmos valores de parâmetro, tendo de diferente apenas as bacias de atração. A figura 2.1.14, mostra um ponto fixo,  $p_1$ , e uma órbita de período 2,  $p_2$ , que coexistem no trecho  $b = [3.26, 3.358]$ . Para conseguir o ponto fixo usamos  $x_0 = 0.6$ , para conseguir a órbita de período 2, usamos  $x_0 = 0.65$ .

Na figura 2.1.15 temos o gráfico da bacia de atração para o intervalo onde há a coexistência dos atratores. Em preto temos as condições iniciais que levam a aplicação para o ponto fixo. A bacia de atração do ponto fixo apresenta uma estrutura de auto-similaridade. Para a figura 2.1.15-a temos o intervalo completo de  $x = [0, 1]$ , se nós pegarmos um subintervalo de  $x$ ,  $x = [0.73, 0.95]$ , a bacia de atração terá a mesma forma da anterior. Podemos comparar as figuras 2.1.15-a com a figura 2.1.15-b, e ver que elas mantem a mesma estrutura. O diagrama de bifurcação da figura 2.1.13-b, mostra o trecho,  $b = [3.26, 3.358]$ , onde há coexistência de dois atratores: uma órbita de período 2 que passa por uma cascata de duplicação de período e um ponto fixo. Para fazer esse gráfico usamos 50 diferentes condições iniciais distribuídas uniformemente no intervalo de  $x_0 = [0, 1[$ .

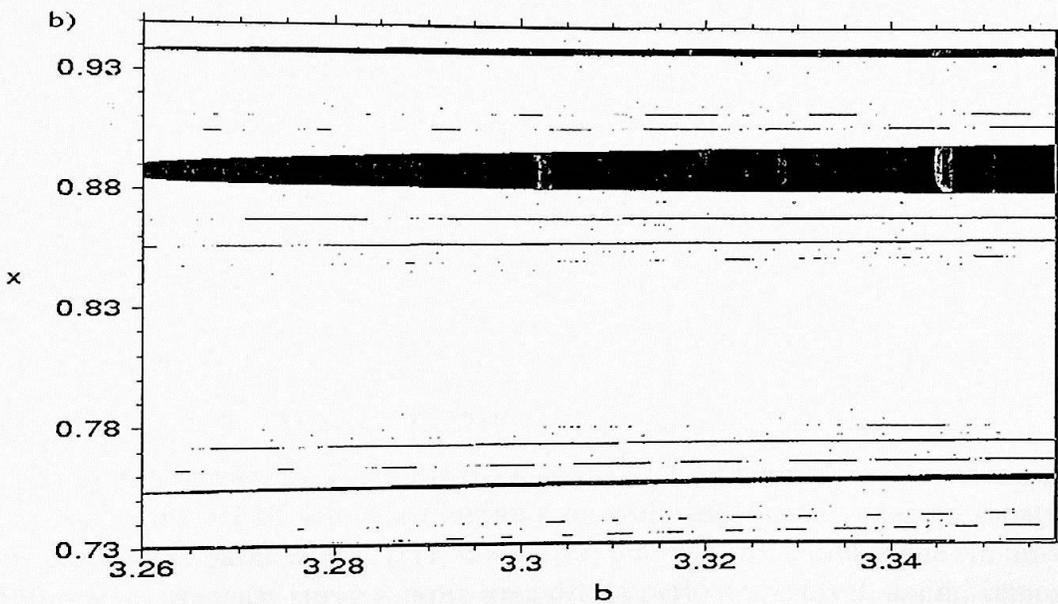
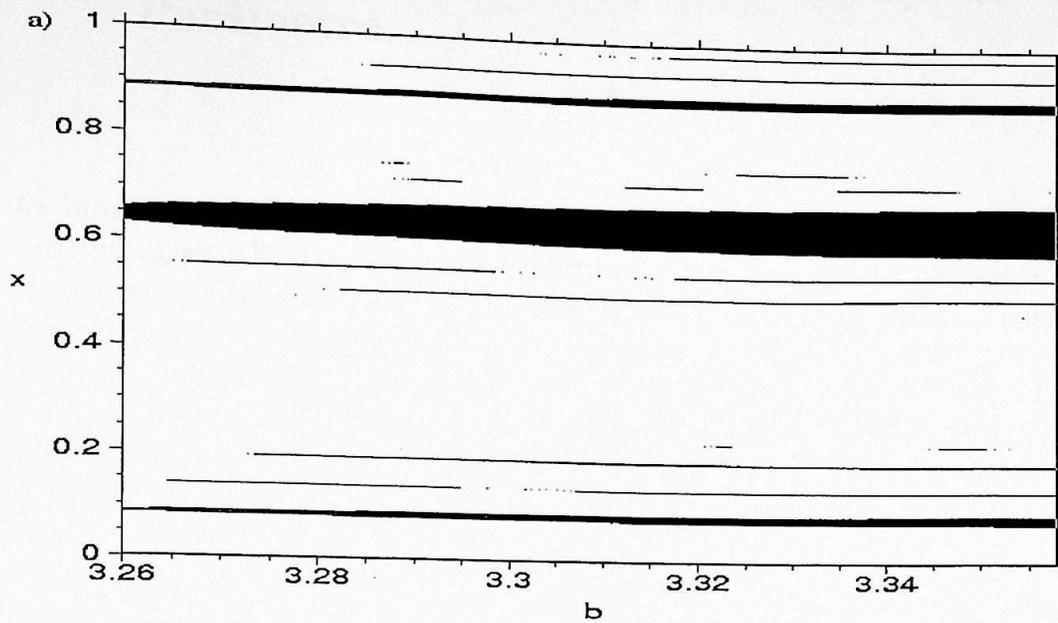


Figura 2.1.15: a) *Bacia de atração do ponto fixo os pontos em preto levam a aplicação para o ponto fixo,  $x = [0, 1]$ ; b) auto-similaridade para  $x = [0.95, 0.73]$ .*

## 2.2 Diagrama de Bifurcação no Espaço de Parâmetro

As bifurcações são responsáveis por mudanças qualitativas nas trajetórias das aplicações. É através de uma bifurcação, que uma órbita periódica é gerada ou, ainda muda sua estabilidade. Para ter uma visão geral do comportamento das órbitas periódicas da aplicação (2.0.1) vamos apresentar o diagrama de bifurcação no espaço de parâmetros. Vamos chamar de diagrama de bifurcação no espaço de parâmetros, o gráfico formado pelos pontos, que são uma combinação de  $b$  e  $\Omega$ , para os quais ocorre uma bifurcação. Para a aplicação (2.0.1), esses pontos são determinados pelas equações:

$$x_i^* = f^n(x_i^*),$$

$$f'^{(n)}(x_i^*) = 1$$

se for uma bifurcação tangente, e

$$f'^{(n)}(x_i^*) = -1$$

se for uma bifurcação de duplicação de período. Onde  $n$  determina o período. Para o caso  $n = 1$ , as equações acima tornam-se:

$$x^* = 2x^* + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi x^*) + \Omega \pmod{1}$$

$$|2 + b \cos(2\pi x^*)| = 1,$$

e  $\Omega$  e  $b$  que satisfazem essas equações são pontos de bifurcação de período 1.

Na figura 2.2.16 temos o diagrama das bifurcações tangentes no espaço de parâmetro para:  $n = 1$ , ( $t1$ );  $n = 2$ , ( $t2$ ) e  $n = 3$ , ( $t3$ ). Vimos que em uma bifurcação tangente surge sempre uma órbita periódica estável, assim, vemos que as primeiras órbitas periódicas estáveis surgem para  $b = 1$  e  $\Omega = 0.5$ , e são pontos fixos. Isso está de acordo com o que vimos anteriormente, que a aplicação (2.0.1), não possui soluções estáveis para  $b < 1$ . As primeiras linhas que surgem em  $b$  crescente, formam uma fronteira entre órbitas estáveis, acima destas linhas, e caóticas. O diagrama das bifurcações tangentes no

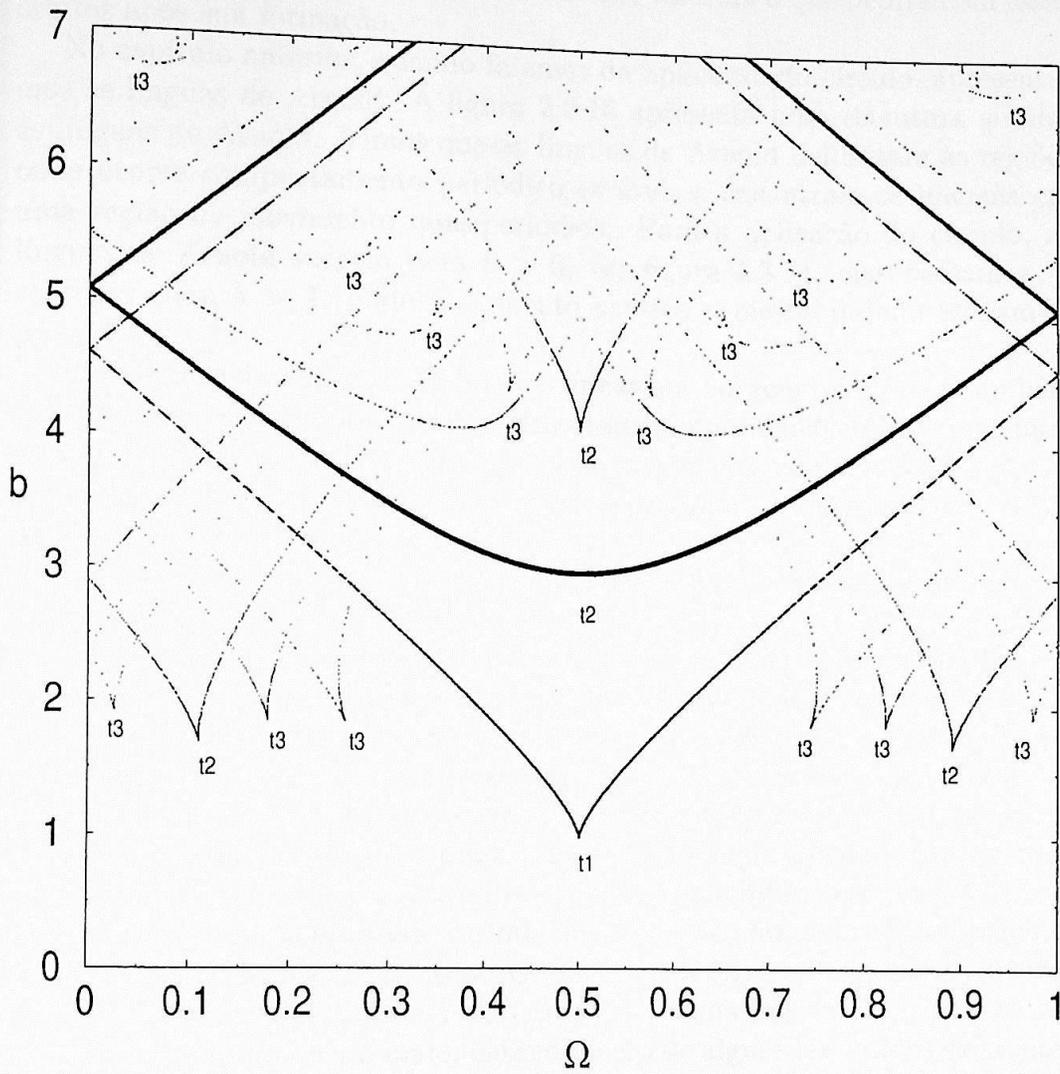


Figura 2.2.16: Diagrama das bifurcações tangente no espaço de parâmetro. Para fazer o gráfico usamos condição inicial aleatória.

espaço de parâmetro nos fornece apenas a localização em que cada órbita periódica estável que é formada, mas não nos informa o que ocorre com essas órbitas após sua formação.

No capítulo anterior, quando falamos da aplicação do círculo, apresentamos às línguas de Arnold. A figura 2.2.16 apresenta uma estrutura similar às línguas de Arnold. Vimos que as línguas de Arnold delimitam as regiões onde ocorre comportamento periódico estável, e encontram-se imersas em uma região de movimento quasiperiódico. Para a aplicação do círculo, as línguas de Arnold surgem para  $b > 0$ , ver figura 1.3.11, elas passam a se sobrepor para  $b > 1$ , onde movimento caótico e biestabilidade tornam-se possíveis.

Para o caso da aplicação (2.0.1), as linhas que surgem para  $1 < b$  também delimitam as regiões onde ocorre comportamento periódico estável, mas para este caso, estão imersas em uma região de movimento caótico. Para  $b < 1$ , a aplicação é extritamente caótica. As linhas passam a se sobrepor para  $b \geq 2$ , quando surge o fenômeno de biestabilidade.

Na figura 2.2.17 temos o diagrama das bifurcações de duplicação de período no espaço de parâmetros.

As linhas estão identificadas por (d1), pontos onde ocorrem duplicação de período para  $n = 1$ , um ponto fixo perde a estabilidade e gera uma órbita de período 2; (d2), para o caso  $n = 2$ , onde surge uma órbita de período 4 e (d3), para o caso  $n = 3$ , onde surge uma órbita de período 6. As bifurcações de duplicação de período surgem para  $b > 2$ . Comparando os gráficos 2.2.16 com 2.2.17, percebemos que a linha (d1) é a mesma que a linha (t2) que passa pelo ponto  $b = 3$  e  $\Omega = 0.5$ . Isto ocorre porque uma bifurcação de duplicação de período gera uma órbita de período 2, através de uma bifurcação tangente.

As figuras 2.2.16 e 2.2.17 proporcionam uma imagem global das estruturas de bifurcação de baixa ordem no plano de parâmetros  $(\Omega, b)$  e podem ser usados para promover um maior entendimento de alguns resultados existentes na aplicação (2.0.1). O diagrama de bifurcações no espaço de parâmetros pode atuar como guia para encontrarmos soluções desejadas. Vamos usar esse diagrama de bifurcação para entender o que ocorre no surgimento das bolhas primárias que vimos no diagrama de bifurcação da figura 2.1.6.

## 2.2.1 Bolhas

As bolhas surgem no diagrama de bifurcação de vários sistemas não lineares como em osciladores acoplados, modelos para população de insetos, si-

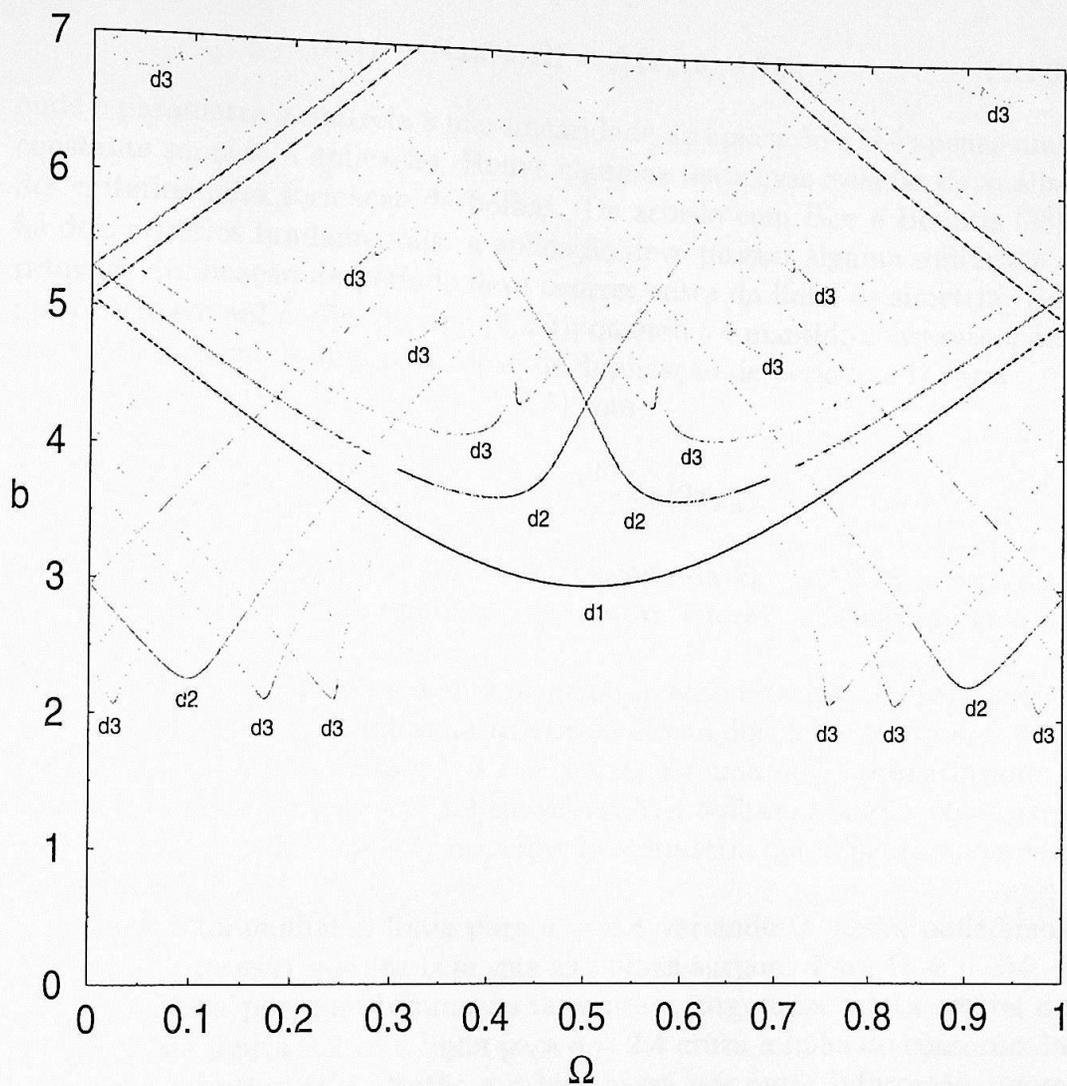


Figura 2.2.17: Diagrama das bifurcações de duplicação de período no espaço de parâmetro. Usamos condição inicial aleatória.

mulações de células cardíacas [38], experimentos de bolhas [42], entre outros. Em [38], G. Ambika e N. V. Sujatha, estudaram o surgimento de bolhas em aplicações com dois parâmetros, do tipo:

$$x_{n+1} = f(x_n, b, \Omega) = f_1(x_n, b) + \Omega, \quad (2.2.3)$$

onde o parâmetro  $b$  controla a não-linearidade da aplicação e  $\Omega$  é apenas uma constante somada à aplicação. Houve algumas tentativas isoladas de análise dos critérios para formação de bolhas. De acordo com Bier e Bountis [38], há dois critérios fundamentais: a aplicação deve possuir alguma simetria e a primeira duplicação de período deve ocorrer antes da linha de simetria. É o que ocorre em aplicações do tipo (2.2.3), quando  $b$  é mantido constante, para um valor próximo a uma bifurcação de duplicação de período e  $\Omega$  varia.

A aplicação (2.0.1) é do tipo (2.2.3) com

$$f_1(x_n, b) = 2x_n + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi x_n),$$

e possui simetria para  $\Omega = 0.5$ . Com a ajuda da figura 2.2.18, e seguindo a descrição dada em [38], podemos encontrar valores de  $b$  onde surgem as bolhas.

Na figura 2.2.18 temos o diagrama de bifurcação no espaço de parâmetros para  $n = 1$  e  $n = 2$ . As linhas horizontais marcam dois distintos valores de  $b$  onde ocorrem bolhas. Para  $b = 3.7$  encontramos uma bolha primária com 4 bolhas secundárias e para  $b = 2.4$  encontramos 4 bolhas primárias, duas para  $\Omega < 0.5$  e duas para  $\Omega > 0.5$ , respeitando a simetria que a figura apresenta para  $\Omega = 0.5$ .

Vamos acompanhar a linha para  $b = 2.4$  variando  $\Omega$ , assim poderemos entender o processo que faz com que as bolhas surjam. Para  $\Omega \approx 0.054$ , a aplicação passa por uma bifurcação tangente e surge uma órbita estável de período 2, na figura 2.2.18 a linha para  $b = 2.4$  cruza a linha do contorno da bifurcação tangente (t2). Então a órbita passa por outra bifurcação, agora uma duplicação de período, em  $\Omega \approx 0.068$ , e a solução torna-se uma órbita estável de período 4. Como essa estrutura de bifurcação possui simetria, a órbita passará por mais duas bifurcações, mas na ordem inversa da que ocorreu antes. A órbita volta a ser estável de período 2, quando a linha  $b = 2.4$  cruza novamente a linha (d2), em  $\Omega \approx 0.123$ , e desaparece em  $\Omega \approx 0.138$  quando cruza a linha (t2), tornando-se caótica. Pela simetria que o gráfico possui em  $\Omega = 0.5$ , esse fenômeno de bolha primária volta a surgir

quando para  $\Omega \approx 0.863$ , a linha  $b = 2.4$  encontra outra linha (t2) e o processo repete-se. Na figura 2.2.19-a, temos o diagrama de bifurcação para  $b = 2.4$  e  $\Omega$  variando no intervalo  $[0, 1]$ . No diagrama de bifurcação há duas bolhas primárias no intervalo  $0.054 < \Omega < 0.068$  porque, nesse caso, a órbita que forma as bolhas é de período dois. Após o surgimento das bolhas a aplicação passa por uma região caótica com janelas periódicas. A aplicação possui um longo intervalo com solução periódica, onde a linha para  $b = 2$ . Para uma aplicação apresentar bifurcação de duplicação de período ela deve satisfazer:

$$x_i^* = f^{(n)}(x_i^*),$$

e

$$f^{(n)}(x_i^*) = -1.$$

Para o caso de  $b = 3.7$ , há o surgimento de bolhas secundárias, os braços que formam a bolha primária também passam por uma bifurcação de duplicação de período, fazendo com que surjam pequenas bolhas. Se seguirmos a linha de  $b = 3.7$  na figura 2.2.18, podemos acompanhar o que está ocorrendo com a aplicação. O processo é o mesmo do caso anterior. Para  $\Omega \approx 0.139$ , a aplicação passa por uma bifurcação tangente e a aplicação passa a ter um ponto fixo. Em  $\Omega \approx 0.255$ , há uma bifurcação de duplicação de período e o ponto fixo torna-se instável e surge uma órbita de período 2, se aumentarmos ainda mais o valor de  $\Omega$  encontraremos duas linhas (d2). Em  $\Omega \approx 0.362$  a órbita passa a ser de período 4. Acompanhando no diagrama de bifurcação 2.2.19-b, é neste ponto que surge a bolha secundária. Para  $\Omega \approx 0.438$  a linha  $b = 3.7$  cruza novamente a primeira linha (d2) e a aplicação volta a ter uma órbita de período 2, fechando assim as duas primeiras bolhas secundárias. Novamente a simetria em  $\Omega = 0.5$ , faz com que esse processo se repita, na ordem inversa, e complete a bolha primária. Na figura 2.2.19-b vemos uma grande bolha primária ocupando a maior parte do diagrama de bifurcação. Nos braços da bolha primária surgem 4 bolhas secundárias. Aumentando ainda mais o valor de  $b$  podemos encontrar outras possibilidades para a formação de bolhas, como é o caso dos diagramas de bifurcação na figura 2.2.20. Na figura 2.2.20-a a aplicação passa por mais uma bifurcação de duplicação de período que formam mais 8 novas bolhas.

Na figura 2.2.20 aumentamos o valor de  $b$  e conseguimos diferentes formações de bolhas para o caso onde  $b$  é fixo e  $\Omega$  varia. Em todos os diagramas de bifurcação da figura 2.2.20 a formação de bolha é gerada por uma órbita

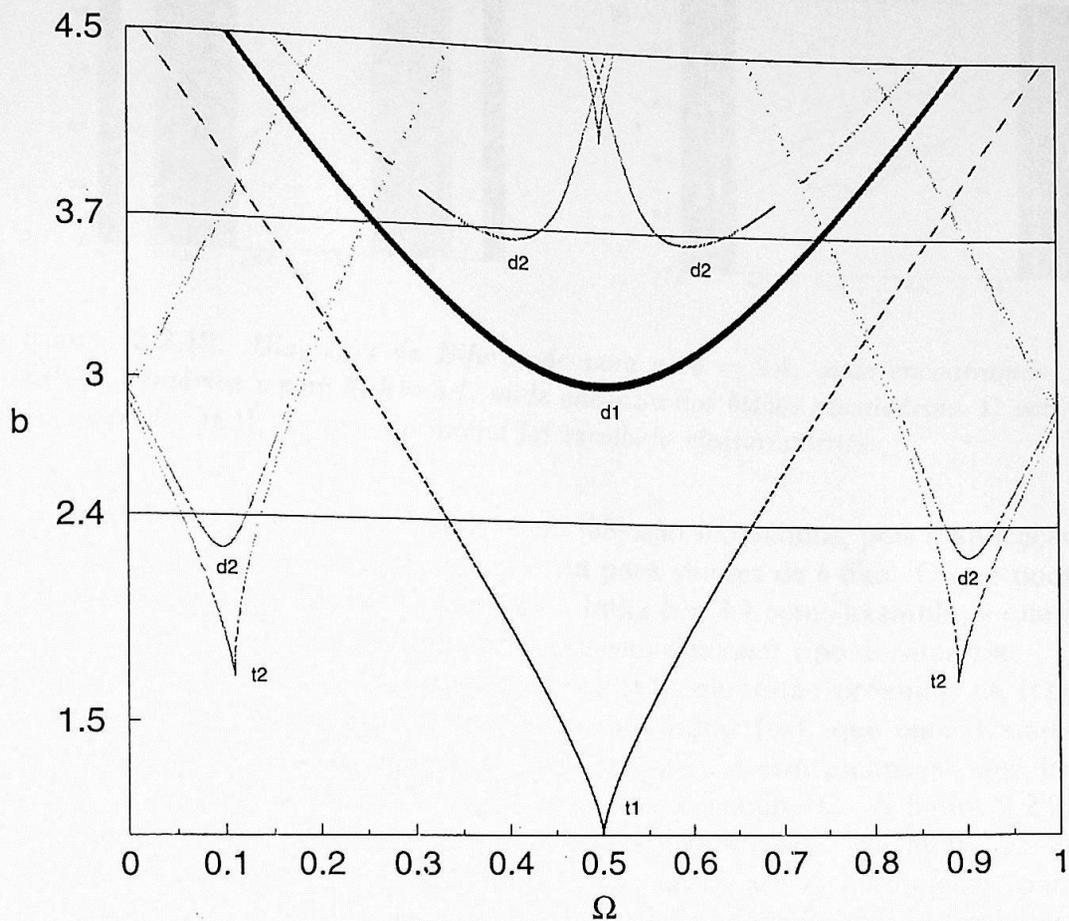


Figura 2.2.18: Diagrama de bifurcação no espaço de parâmetro para órbitas de períodos 1 e 2.

de período 1 que passa por várias bifurcações de duplicação de período formando pequenas bolhas em seus braços. Na figura 2.2.20-a, quando mantemos  $b = 3.79$ , 8 bolhas são formadas nos braços das bolhas secundárias, e em 2.2.20-b,  $b = 3.8$ , surgem mais 16 bolhas. Na figura 2.2.20-c,  $b = 3.81$ , as bolhas secundárias passam por uma cascata de duplicação de período e surge movimento caótico; aumentando ainda mais  $b$ , o movimento caótico é predominante no diagrama de bifurcação, e já fica difícil a identificação do fenômeno de bolhas.

O que vimos no diagrama de bifurcação da figura 2.1.2 foi o surgimento de bolhas primárias com a variação do parâmetro  $b$  e mantendo  $\Omega$  constante.

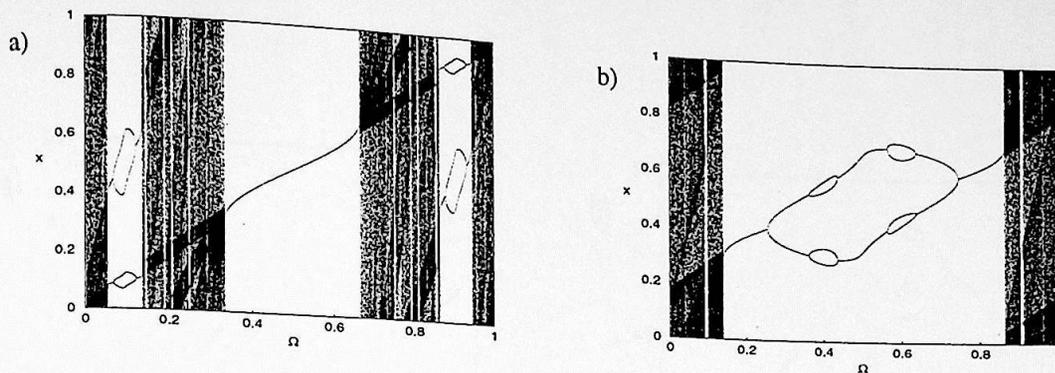


Figura 2.2.19: Diagrama de Bifurcação para a)  $b = 2.4$ , onde encontramos 4 bolhas primárias e para b)  $b = 3.7$ , onde encontramos bolhas secundárias.  $\Omega$  varia no intervalo  $[0, 1]$ , a condição inicial foi escolhida aleatoriamente.

Neste caso os critérios descritos em [38] não são válidos, pois a aplicação não apresenta qualquer tipo de simetria para valores de  $b$  fixo. O que pode ser visto na figura 2.2.18, se usarmos a linha  $b = 3.7$  como exemplo, é que a parte inferior e superior à linha não possuem qualquer tipo de simetria.

Na figura 2.2.16, vemos que as linhas (t3), que estão próximas de (t1), encontram-se inclinadas. Para o caso das linhas (t4), que encontram-se próximas de (t1), a inclinação é ainda maior, e é esta inclinação que faz com que surjam as bolhas quando mantemos constante  $\Omega$ . A figura 2.2.21 pode nos ajudar a entender o que o ocorre nesses casos. Na figura 2.2.21 temos o gráfico do diagrama de bifurcação no espaço de parâmetros para períodos 4 que encontram-se próximo de (t1). Seguindo a linha vertical, com  $\Omega = 0.702$ , no sentido crescente de  $b$ , podemos acompanhar o surgimento das bolhas. Como no caso anterior, para  $b$  constante, a aplicação passa por uma série de bifurcações que chegam em um ponto onde estas passam a repetir-se na ordem inversa, este é o princípio que rege a formação das bolhas. No caso de  $\Omega = 0.702$  a aplicação passa por uma bifurcação tangente de período 4, uma bifurcação de duplicação de período, gerando uma órbita de período 8, outra bifurcação de duplicação período, gerando uma órbita de período 16, (esta não aparece na figura 2.2.21, mas na figura 2.2.22 do diagrama de bifurcação vemos as pequenas bolhas que se formam) e repetem-se as bifurcações no caminho inverso.

Na figura 2.2.22-b,  $\Omega = 0.702$ , vemos bolhas secundárias. A falta da simetria para esse caso, faz com que surjam apenas duas pequenas bolhas nos braços de cada bolha primária. Em 2.2.22-c,  $\Omega = 0.7025$ , há regiões

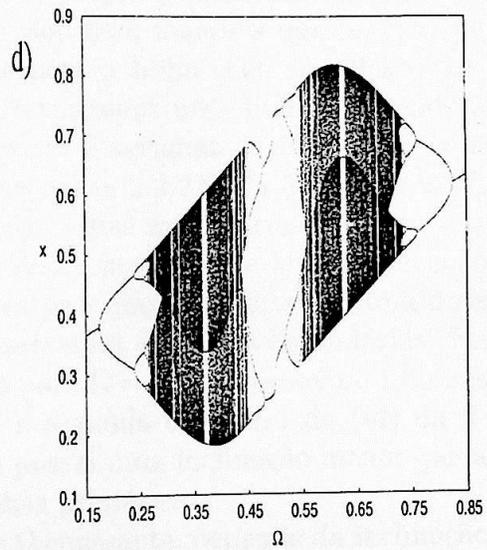
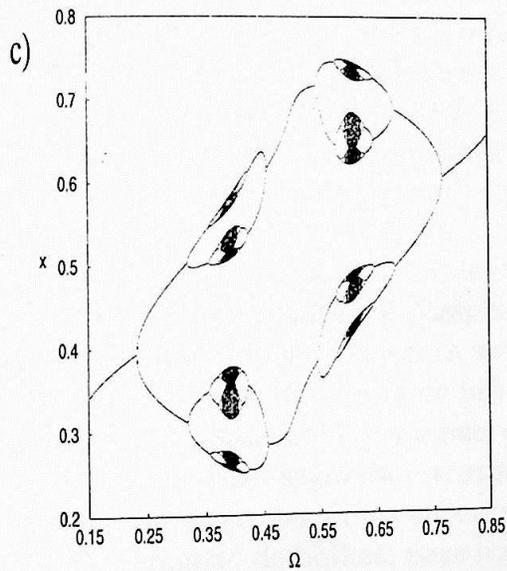
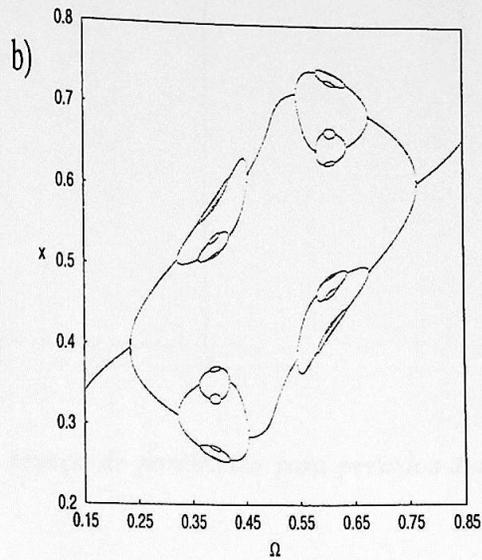
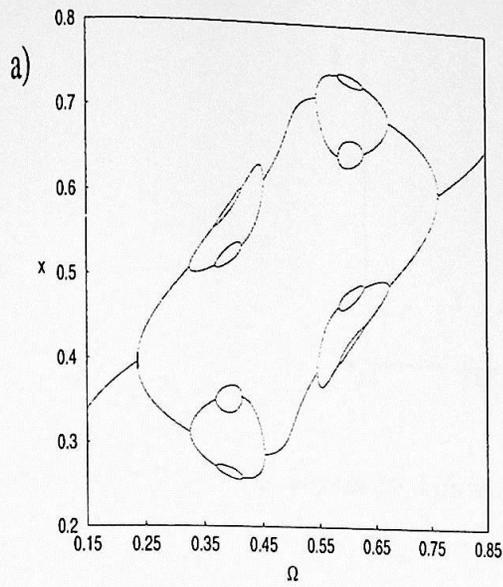


Figura 2.2.19: Diagrama de Bifurcação com diferentes formações de bolhas,  $\Omega = [0, 1]$ . Em a) temos  $b = 3.79$ , b) temos  $b = 3.8$ , c) temos  $b = 3.81$  e d) temos  $b = 4.1$ .

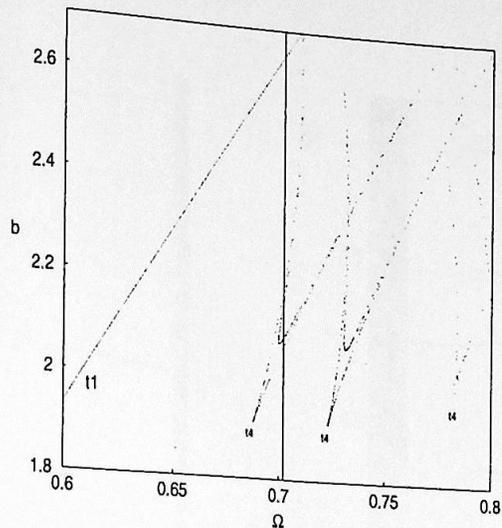


Figura 2.2.21: Diagrama de bifurcação no espaço de parâmetro para períodos 1 e 4.

caóticas que se formam nos braços das bolhas. São necessárias mudanças muito pequenas no valor de  $\Omega$ , para gerar mudanças no comportamento da aplicação quanto ao surgimento de bolhas, já que a estrutura que proporciona a formação das bolhas, nesse caso, são bem menores que no caso de  $b$  constante, quando encontramos bolhas para a linha (t1). A falta de simetria que surge na figura 2.2.18 quando traçamos uma linha mantendo  $b$  constante faz com que a aplicação apresente diagramas de bifurcação com bolhas irregulares como os encontrados na figura 2.2.22. Na figura 2.2.22-d, as 4 bolhas formadas têm em seus braços bolhas secundárias, depois cada braço passa por uma cascata de duplicação de período que leva a aplicação para um atrator caótico e passam por um processo inverso voltando a uma órbita de período 4, mas agora sem apresentarem as bolhas secundárias. Na figura 2.2.22-a, o diagrama de bifurcação para  $\Omega = 0.731$  apresenta 4 bolhas primárias. Essas bolhas surgem devido a segunda estrutura de (t4) da figura 2.2.21. Essa segunda estrutura (t4) possui uma inclinação menor que a primeira e só conseguimos encontrar bolhas primárias.

O fenômeno de bolhas, para o caso de  $\Omega$  constante, depende da inclinação de cada estrutura de bifurcação para um determinado período. Sabemos que as estruturas (t4) que apresentamos na figura 2.2.21 possuem a inclinação necessária, como essas estruturas possuem auto-similaridade, outras estruturas de maior período também podem ter a inclinação suficiente para a

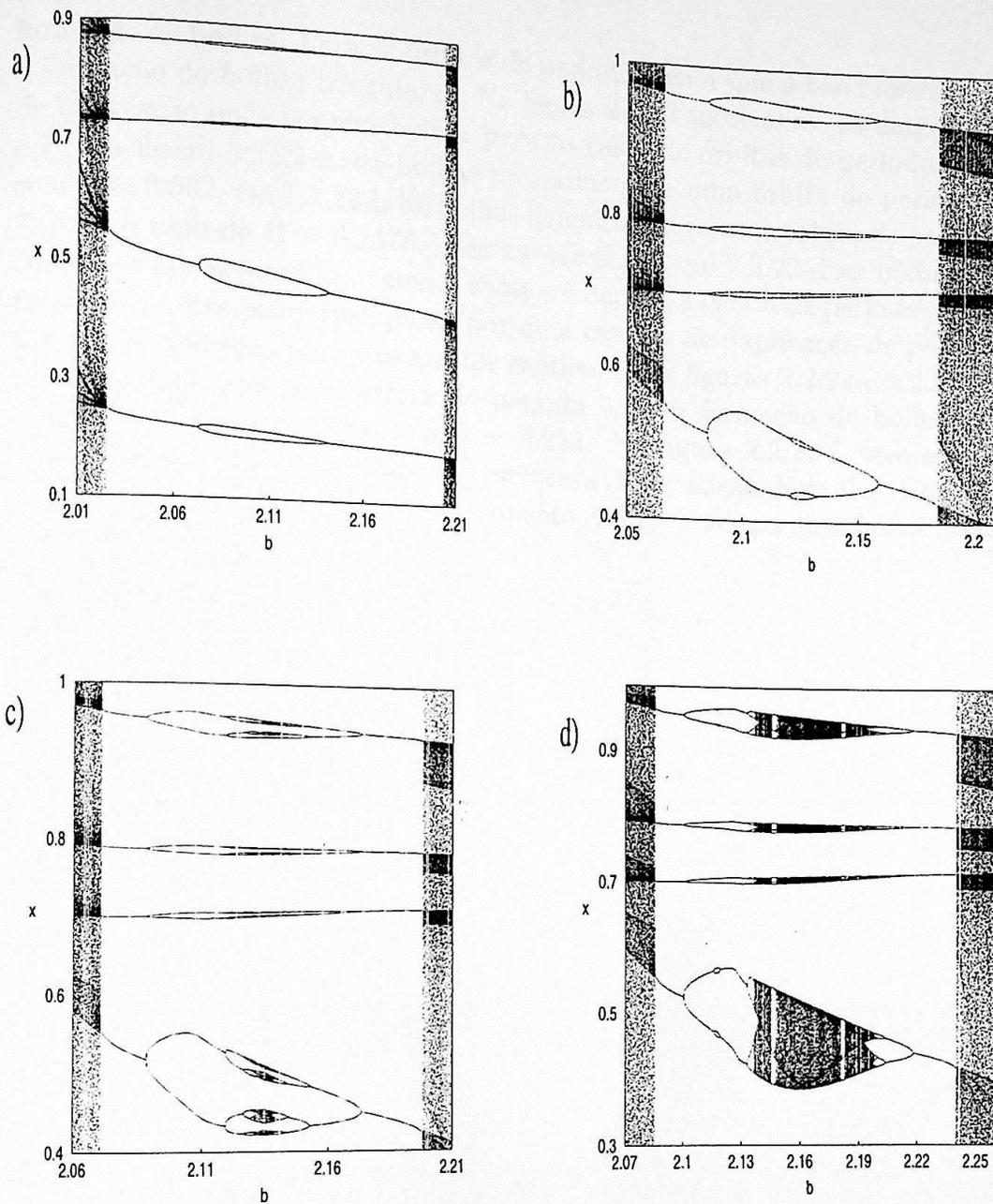


Figura 2.2.21: Diagrama de Bifurcação apresentando o fenômeno de bolhas para órbitas de período 4 com  $\Omega$  constante. A escolha da condição inicial foi aleatória. Em a) há 4 bolhas primárias para o caso de  $\Omega = 0.731$ , b) há bolhas secundárias para  $\Omega = 0.702$ , em c) as bolhas secundárias apresentam movimento caótico para  $\Omega = 0.7025$  e d) temos bolhas secundárias e movimento caótico, demonstrando a falta de simetria para o caso de  $\Omega = 0.704$ .

formação de bolhas. Para as órbitas de período menor que 4 não observamos a formação de bolhas irregulares. Na figura 2.2.22 mostramos os diagramas de bifurcação onde surgem bolhas para os casos de órbitas de períodos 5, 6 e 7. Na figura 2.2.22-a, há bolhas primárias para uma órbita de período 5 com  $\Omega = 0.067$ , em 2.2.22-b há bolhas primárias para uma órbita de período 7, para o caso de  $\Omega = 0.2578$ . Nas figuras 2.2.22-c e 2.2.22-d as bolhas secundárias apresentam movimento caótico e depois, a órbita de período 5, que forma as bolhas primárias, passa por uma cascata de duplicação de período levando a aplicação para um atrator caótico, e nas figuras 2.2.22-e e 2.2.22-f temos bolhas para uma órbita de período 6, com formação de bolhas secundárias e movimento caótico  $\Omega = 0.233$ . Na figura 2.2.22-f, vemos com mais detalhe o que ocorre em cada estrutura de formação de bolha. Uma janela de período 3 interrompe o movimento caótico e vemos uma bolha nesta órbita.

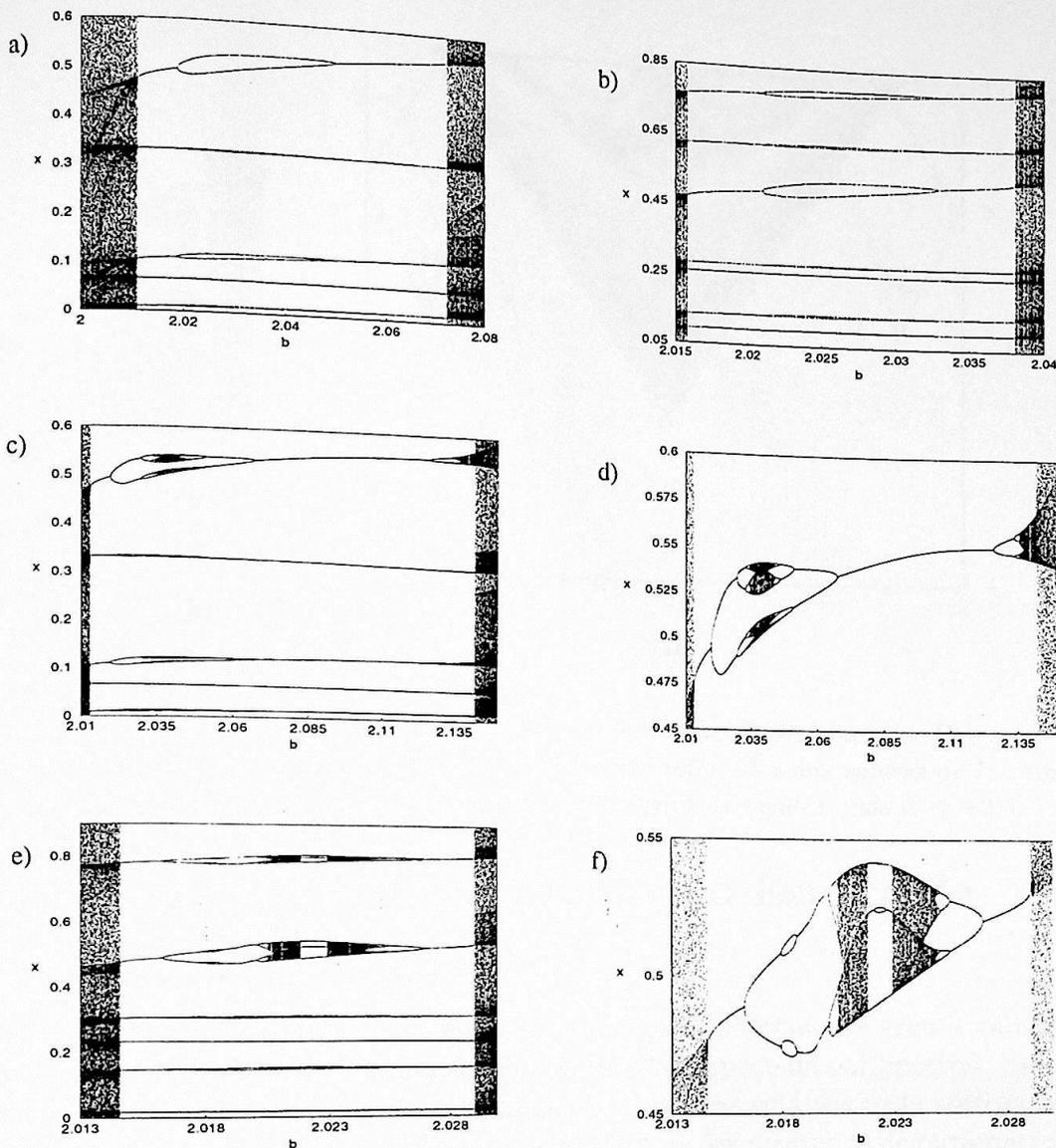


Figura 2.2.22: Diagrama de Bifurcação apresentando o fenômeno de bolhas para órbitas de período 5, 6 e 7, para o caso de  $\Omega$  constante. A escolha da condição inicial foi aleatória. Em a) há bolhas primárias para uma órbita de período 5 com  $\Omega = 0.067$ ; b) há bolhas primárias para uma órbita de período 7, para o caso de  $\Omega = 0.2578$ ; em c) e d) as bolhas secundárias apresentam movimento caótico e depois a órbita de período 5 passa por uma cascata de duplicação de período,  $\Omega = 0.0669$ , em d) ampliamos uma bolha para facilitar a visualização; e em e) e f) temos bolhas para uma órbita de período 6, com formação de bolhas secundárias e movimento caótico  $\Omega = 0.233$ , f) ampliamos uma bolha para facilitar a visualização.

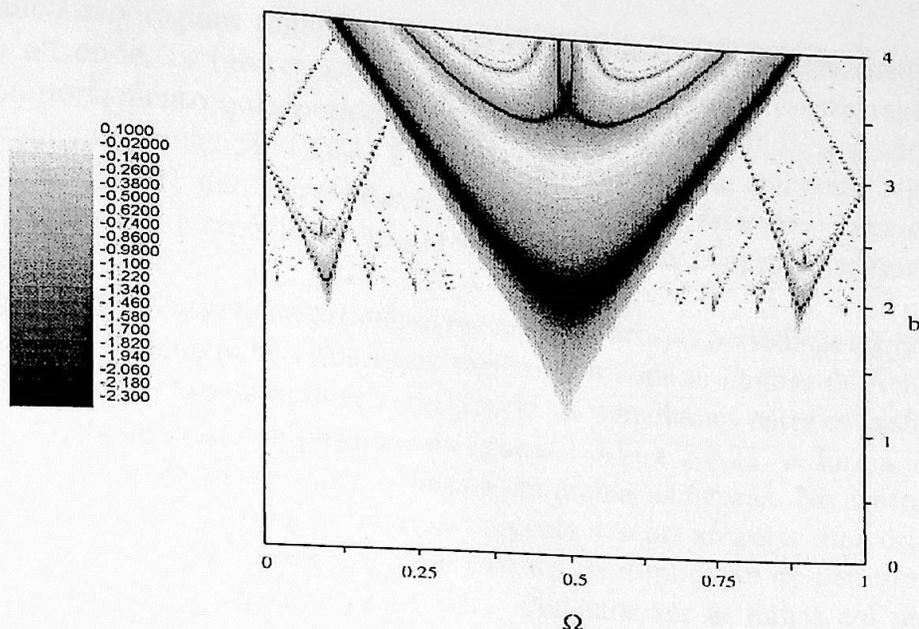


Figura 2.3.23: Espaço de parâmetros, para a aplicação (2.0.1) mostrando o expoente de Lyapunov. Ao lado, legenda com as cores referentes aos valores de  $\lambda$ . Em branco temos as regiões onde  $\lambda > 0$ , e em preto para as regiões onde  $\lambda < -2.3$ .

## 2.3 Expoente de Lyapunov no Espaço de Parâmetro

Para concluir o estudo da dinâmica da aplicação do círculo de grau 2 vamos apresentar o gráfico do expoente de Lyapunov no espaço de parâmetros. Esse método nos permite diferenciar as regiões periódicas estáveis das caóticas, e servirá de complemento para o gráfico das bifurcações no espaço de parâmetro.

Na figura 2.3.23, apresentamos o gráfico do expoente de Lyapunov no espaço de parâmetros  $(\Omega, b)$ . Para fazer este gráfico calculamos numericamente o expoente de Lyapunov para cada par dos parâmetros  $b$  e  $\Omega$ . A condição inicial  $x_0$  foi escolhida aleatoriamente.

Na figura 2.3.23 demos ênfase as regiões onde a aplicação possui movimento periódico, em tons de cinza, o que nos possibilitará a visualização das estruturas que formam as línguas de Arnold. Junto ao gráfico do expoente de Lyapunov no espaço de parâmetro temos uma legenda com os tons de cinza correspondente ao intervalos de  $-2.3 \geq \lambda \leq 0.1$ . As regiões

em branco são regiões onde  $\lambda \geq 0$ , ou seja regiões onde o movimento é caótico ou onde há bifurcação. A aplicação (2.0.1) não apresenta regiões com comportamento quasiperiódico. Para o intervalo  $b = [0, 1]$ , o gráfico é todo branco e a aplicação (2.0.1) é caótica. Havíamos visto que nessa região a aplicação (2.0.1) não apresentava órbitas periódicas estáveis. Para essa região a aplicação é ergódica e suas órbitas apresentam  $D$  aproximadamente constante.

Já para  $b \geq 1$  surgem as primeiras regiões com órbitas periódicas estáveis. Podemos ver a semelhança que essas regiões têm com as línguas de Arnold que aparecem no caso da aplicação do círculo. A semelhança entre os gráficos é ainda maior quando comparamos as figuras 1.3.11 e 2.3.23. A forma com que as línguas se desenvolvem é a mesma em ambas as figuras. No contorno externo das línguas há uma bifurcação tangente que faz aparecer uma órbita periódica estável, esta passa por uma cascata de duplicação de período levando a aplicação a um atrator caótico. Podemos ver as linhas em preto dentro das línguas, onde estão as órbitas superestáveis que caracterizam a cascata de duplicação de período. Para  $b > 2$  as línguas passam a se sobrepor e a aplicação passa a ter regiões onde há biestabilidade.

O gráfico 1.3.11 apresenta auto-similaridade e as línguas de Arnold repetem-se. Como podemos observar na figura 2.1.8-a há várias janelas periódicas até de período 15. Na figura 1.3.11 não observamos essas línguas de Arnold referentes à órbitas de período maior do que 4 por limitação computacional.

Ainda comparando as figuras 1.3.11 e 2.3.23, vemos que a disposição das línguas é diferente, não apenas em relação ao parâmetro  $b$ , quando para o caso da figura 2.3.23 essas estruturas surgem apenas para valores de  $b \geq 1$ , mas também com relação a  $\Omega$ . A língua que inicia-se em  $\Omega = 0.5$ , para a aplicação (2.0.1), refere-se a uma órbita de período um, ou seja ponto fixo; já para a aplicação (1.3.19) essa língua refere-se a uma órbita de período 2. Para a aplicação (2.0.1) teremos duas línguas referentes às órbitas de período 2, e seis referentes às órbitas de período 3, como mostra a figura 2.2.16. Essa diferença na disposição das línguas fez com que fosse possível a formação de bolhas, com a variação do parâmetro  $b$ , para órbitas de período 4, o que não foi observado para o caso da aplicação do círculo. Para a aplicação do círculo encontramos a formação de bolhas com a variação do parâmetro  $b$  apenas para órbitas com períodos iguais ou maiores que 9 o que dificulta a visualização dessas bolhas já que as órbitas permanecem por um intervalo de  $b$  pequeno.

# Conclusões e Comentários Finais

Fizemos o estudo da dinâmica da aplicação:

$$x_{n+1} = Mx_n + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi x_n) + \Omega \pmod{1}$$

com  $M = 2$ , e seguindo análises feitas para o estudo da dinâmica da aplicação do círculo, ou seja quando a aplicação acima tem  $M = 1$ , podemos comparar o comportamento apresentado em ambas as aplicações.

Quando a aplicação acima possui o parâmetro  $M = 2$ , aplicação do círculo de grau 2, não apresenta movimento quasiperiódico, como temos no caso da aplicação do círculo. A aplicação (2.1) apresenta apenas movimento caótico ou periódico. Vimos que para o intervalo de  $b < 1$ , onde o movimento quasiperiódico é possível na aplicação do círculo, o único movimento permitido à aplicação (2.1) é o movimento caótico. Nesse intervalo o movimento caótico é caracterizado por apresentar uma densidade de probabilidade aproximadamente constante para quaisquer valores de  $\Omega$ , e ser ergódico. Se compararmos com a aplicação do círculo, o mesmo intervalo de  $b$  possui a mesma característica quando apresenta movimento quasiperiódico. //

Quando temos valores de  $b > 1$  para a aplicação (2.1), estruturas como as línguas de Arnold surgem no espaço de parâmetro quando calculamos o expoente de Lyapunov. Com essas estruturas vimos que a aplicação (2.1) apresenta duplicação de período e intermitência como rotas para o caos além de biestabilidade. Estas são características importantes que também surgem na aplicação do círculo. O que difere o gráfico do expoente de Lyapunov no espaço de parâmetros da aplicação (2.1) do gráfico da aplicação do círculo é a disposição das estruturas das línguas de Arnold se encontram em ambos os gráficos. Essa diferença fez com que o fenômeno de bolhas com variação do

parâmetro  $b$  pudesse ser observado no diagrama de bifurcação da aplicação (2.0.1).

As bolhas encontradas para a aplicação (2.0.1) não possuem simetria e apresentam-se de forma irregular, diferente do que ocorre para o caso da formação de bolhas com a variação do parâmetro  $\Omega$ , como foi estudado em [38]. A observação da formação de bolhas com a variação do parâmetro  $b$ , foi possível porque, para o caso da aplicação do círculo de grau 2, as bolhas surgem para órbitas estáveis de períodos maiores ou iguais a 4. Entendendo o princípio da formação das bolhas irregulares, conseguimos encontra-las para a aplicação do círculo. As bolhas irregulares, nesse caso, surgem apenas para órbitas de períodos iguais ou maiores que 9.

Bolhas no diagrama de bifurcação foram encontradas em trabalhos experimentais como em [42], onde estudou-se o comportamento caótico na dinâmica de formação de bolhas de ar em fluidos viscosos. Nesse trabalho observou-se a formação de bolhas de bifurcação, primárias e secundárias, crise, explosão/sela-nó e adição de período. Alguns desses comportamentos puderam ser emulados com a aplicação cúbica, com a aplicação do círculo bidimensional e com acoplamento deste com a aplicação logística. Acreditamos que os comportamentos encontrados no trabalho [42] podem ser melhor emulados pela aplicação (2.0.1) do que pelo acoplamento das aplicações citadas, já que a aplicação (2.0.1) descreve o comportamento de um oscilador.

# Referências Bibliográficas

- [1] Robinson C 1999 *Dynamics Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos* 2 ed. CRC, Washington
- [2] Alligood K T, Sauer T D, York J A 1996 *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems* Springer, New York.
- [3] Argyris J, Faust G, Haase M 1994 *An Exploration of Chaos: An Introduction for Natural Scientists and Engineers* Elsevier, Amsterdam.
- [4] Schuster H G 1989 *Deterministic Chaos: An Introduction* 2 ed. VCH, New York.
- [5] Ott E 1993 *Chaos in Dynamical Systems* Cambridge University Press, New York.
- [6] Fiedler-Ferrara N, Prado C P C 1994 *Caos: uma Introdução* Edgard Blücher, São Paulo.
- [7] Strogatz Steven H 1994 *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering* 2 ed. Addison-Wesley, Massachusetts.
- [8] Mañé R 1983 *Introdução à Teoria Ergódica* IMPA, Rio de Janeiro.
- [9] Sinai Y G 1994 *Topics in Ergodic Theory* Princeton, New Jersey.
- [10] Devaney R L 1989 *An Intruduction to Chaos Dynamical Systems* 2ed. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.
- [11] May R M 1976 *Nature* **261** 459-467

- [12] Glass L, Machkey M C 1988 *From Clocks to Chaos: The Rhythms of Life*, Princeton Univ. Press, New Jersey
- [13] Salinas S R A 1999 *Introdução à Física Estatística* 2ed. Edusp, São Paulo.
- [14] Bélair J, Glass L 1985 *Physica* 16D 75 3969
- [15] Bélair J, Glass L 1983 *Phys. Lett.* 96A (3) 113-115
- [16] Bug G, Glass L 1995 *Int. J. Bifurcat. Chaos* 5 (2) 356-371
- [17] Dixon T W, Gherghetta T, Kenny B G 1996 *Chaos* 6 (1) 32
- [18] Jensen M H, Bak P, Bohr T 1983 *Rev. Lett.* 50 (21) 1637-1639
- [19] Jensen M H, Bak P, Bohr T 1984 *Rev. Lett. A* 30 (4) 1960-1969
- [20] Figueiredo J C B, Malta C P 1998 *Int. J. Bifurcation and Chaos* 8 (2) 281-293
- [21] Mandel P, Kapral R 1983 *Optics Commun.* 47 (2) 151-156
- [22] Manneville P, Pomeau Y 1980 *Commun. Math. Phys.* 74 189-197
- [23] Nicolaisen N, Werner B 1998 *Z. angew. Math. Phys.* 49 869-895
- [24] Kadanoff L P 1983 *Phys. Today* 36 (12) 46-53
- [25] Feigenbaum M J, Kadanoff L P, Shenker S J 1982 *Physica* 5D 370-386
- [26] Glass L, Guevara M R, Shrier A 1983 *Physica* 7D 89-101
- [27] Van der Pol B, van der Mark J 1928 *Phil. Mag.* 6 (7) 763-775
- [28] Kongas O, von Herten R, Engelbrecht J 1999 *Chaos, Solitons & Fractals* 10 (1) 119-136
- [29] Fenton F H, Cherry E M, Hastings H M, Evans S J 2002 *BioSystems* 64 73-96
- [30] Ikeda K, Daido H 1980 *Phys. Rev. Lett.* 45 (9) 709-712
- [31] Bohr T, Bak P, Jensen M H 1984 *Phys. Rev. A* 30 (4) 1960-1969

- [32] Bohr T, Bak P, Jensen M H 1984 *Phys. Rev. A* **30** (4) 1970-1981
- [33] Batista A M, Viana R L 2002 *Physica A* **308** 125-134
- [34] Jafarizadeh M A, Behnia S 2001 *Physica D* **159** 1-21
- [35] Eckmann J P, Ruelle D 1985 *Rev. Mod. Phys.* **57** (3) 617-656
- [36] Grebogi C, Ott E, Romeiras F, Yorke J A 1987 *Phys. Rev. A* **36** (11) 5365-5380
- [37] Ruzicka M C, Drahos J, Zahradník J, Thomas N H 1997 *Int. J. Multiphase Flow* **23** (4) 671-682
- [38] Ambika G, Sujatha N V 2000 *Pramana - J. Phys.* **54** (5) 751-761
- [39] Dullin H R, Richter P H, Wittek A 1996 *Chaos* **6** (1) 43-58
- [40] Manfra E F, Caldas I L, Viana R L, Kalinowski H J 2002 *Nonlinear Dynamics* **27** 185-195
- [41] Barnes B, Grimshaw R 1997 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **7** (12) 2653-2689
- [42] Piassi V S M, 2002 *Dissertação de mestrado*