

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

**Caracterizando e quantificando
não-localidade de estados
quânticos a partir de
quantificadores para
comportamentos e desigualdades
de Bell**

Ari Patrick Pereira da Costa

Orientador: Prof. Dra. Bárbara Lopes
Amaral

Tese de doutorado apresentada ao Instituto
de Física da Universidade de São Paulo,
como requisito parcial para a obtenção do
título de Doutor(a) em Ciências.



Banca Examinadora:

Prof(a). Dr(a). Barbara Lopes Amaral (Orientadora) - IFUSP

Prof(a). Dr(a). Gabriel Teixeira Landi - IFUSP

Prof(a). Dr(a). Reginaldo de Jesus Napolitano - IFSC USP

Prof(a). Dr(a). Gláucia Murta - Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Prof(a). Dr(a). Cristhiano Andre Gamarano Duarte Carneiro Silva - ULeeds

São Paulo

2022

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Costa, Ari Patrick Pereira da

Caracterizando e quantificando não-localidade de estados quânticos a partir de quantificadores para comportamentos e desigualdades de Bell. São Paulo, 2022.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Bárbara Lopes Amaral

Área de Concentração: Fundamentos de Teoria Quântica e Informação Quântica

Unitermos: 1. Não-localidade; 2. Informação quântica; 3. Teorema de Bell

USP/IF/SBI-044/2022

University of São Paulo
Institute of Physics

Characterizing and quantifying nonlocality of quantum states using quantifiers for behavior and Bell inequalities

Ari Patrick Pereira da Costa

Advisor: Prof. Dra. Bárbara Lopes Amaral

Thesis submitted to the Physics Institute of
the University of São Paulo in partial fulfill-
ment of the requirements for the degree of
Doctor of Science.

Examining Commission:

Prof(a). Dr(a). Barbara Lopes Amaral (Orientadora) - IFUSP

Prof(a). Dr(a). Gabriel Teixeira Landi - IFUSP

Prof(a). Dr(a). Reginaldo de Jesus Napolitano - IFSC USP

Prof(a). Dr(a). Gláucia Murta - Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Prof(a). Dr(a). Cristhiano Andre Gamarano Duarte Carneiro Silva - ULeeds

São Paulo

2022

Agradecimentos

Agradeço a Profa. Bárbara por ter me aceitado, apesar do pouco tempo que eu tinha para o restante do doutorado, pela serenidade e atenção comigo, e por praticamente ter feito tudo para eu ter uma experiência acadêmica fora do meu país. Eterna gratidão!

Agradeço o Prof. Adán Cabello por topar me orientar em Sevilla, pelas dicas de onde comer, lugares para visitar, e principalmente pela paciência e disposição para sempre elucidar minhas dúvidas.

Agradeço a Brenda por fazer parte de todos ótimos momentos que tive no IF, bandejões, lanches da tarde, passeios pelo campus, conversas sobre a vida e dicas de alongamento. Tudo seria bem mais difícil sem as boas amizades que fiz aqui em Sampa, obrigado demais Aninha, Maíra e Arthur. Gratidão máxima ao Giulio por basicamente ter feito todos os resultados computacionais presentes no capítulo 2.

Ficar sozinho em um país estrangeiro é meio complicado mas, graças a Lucía e Javier, tudo ficou mais fácil. Obrigado pela ajuda com a língua, pelos desayunos e cenas e por me dar apoio durante toda minha estadia em Sevilla.

Agradeço ao CNPq pela bolsa de doutorado, ao “Colegio de doctorado de Física del Grupo Tordesillas” pelo auxílio durante minha estadia em Sevilla e por fim, ao Instituto Serrapilheira pela prorrogação de bolsa para terminar a escrita desta tese.

Resumo

A não-localidade quântica é uma manifestação contra-intuitiva de previsões quânticas quando vista pelos olhos de um observador. A não-localidade de Bell é uma consequência do emaranhamento, e implica que as estatísticas de certas medições realizadas em sistemas quânticos emaranhados espacialmente separados não podem ser explicadas por modelos de variáveis ocultas locais [1]. Nesta tese, tratamos de quantificar não-localidade em dois casos. Primeiro definimos uma forma alternativa de quantificar a não-localidade de estados com base na não-localidade de comportamentos de Bell, chamada de volume não-local ponderado pelo traço. A construção é baseada no volume não-local, um quantificador de não-localidade para estados que conta o volume do conjunto de medidas que dão origem a comportamentos não locais quando aplicados a este estado, mais a distância do traço, um quantificador de não-localidade para comportamentos baseado na distância entre o comportamento e o conjunto local. Mostramos que a anomalia fraca da não-localidade para o cenário (2, 2, 3) persiste, mas o mínimo local para não-localidade com o volume não-local ponderado pelo traço ocorre em um estado diferente em comparação com o mínimo para a versão não-ponderada, mostrando que a anomalia fraca não é uma característica intrínseca do cenário, mas é dependente da escolha do quantificador. Em seguida, estudamos mensurar a não-localidade de Bell para estados em um cenário de muitas partículas emaranhadas, onde perdemos o conhecimento de quais partículas em Alice e Bob estão emaranhadas, com a única informação dada sendo as intensidades nos detectores em cada rodada do experimento com N pares de partículas. Mostramos que, apesar da não-localidade de Bell diminuir à medida que N aumenta, se as partes puderem distinguir pequenas diferenças nas intensidades nos detectores e a visibilidade for maior que 0.98, então a não-localidade de Bell ainda pode ser

detectada experimentalmente até $N = 15$ partículas. Mostramos que essa predição pode ser testada com a tecnologia atual, mas requer assumir “fair sampling”.

Palavras-Chave: Não-localidade; volume não-local ponderado pelo traço; comportamentos; intensidade; detectores .

Abstract

Quantum nonlocality is a counter-intuitive manifestation of quantum predictions when viewed through the eyes of an observer. Bell's nonlocality is a consequence of entanglement, and implies that the statistics of certain measurements performed on spatially separated entangled quantum systems cannot be explained by local hidden variable models [1]. In this thesis, we try to quantify nonlocality in two cases. First, we define an alternative way to quantify the nonlocality of states based on the nonlocality of Bell behaviors, called trace-weighted nonlocal volume. The construction is based on the nonlocal volume, a quantifier of nonlocality for states that counts the volume of the set of measurements that give rise to nonlocal behaviors when applied to this state, plus the trace distance, a quantifier of nonlocality for behaviors based on the distance between the behavior and the local set. The key difference from preceding candidates was the introduction of a quantifier of nonlocality to weight each contribution from behaviors in the nonlocal volume. We list some interesting properties of this quantifier and investigate the $(2, 2, 2)$ and $(2, 3, 2)$ scenarios. We show that the weak anomaly of nonlocality for the $(2, 2, 3)$ scenario persists, but the local minimum for nonlocality with the trace-weighted nonlocal volume occurs in a different state as compared to the minimum for the non-weighted version, showing that the weak anomaly is not an intrinsic characteristic of the scenario, but is dependent of the choice of quantifier. Then, we studied measuring Bell nonlocality for states in a scenario of many entangled particles, where we lose the knowledge of which particles in Alice and Bob are entangled, where the only information given are the intensities in the detectors in each round of the experiment with N pairs of particles. We show that, although Bell nonlocality decreases as N increases, if the parties can distinguish small differences in detector intensities and visibility is great

ter than 0.98, then Bell nonlocality can still be detected experimentally until $N = 15$ particles. We show that this prediction can be tested with current technology, but it requires assuming fair sampling.

Keywords: nonlocality; trace-weighted nonlocal volume; behaviors; intensities; detectors .

Lista de Figuras

1.1	Alice e Bob têm cada um dispositivo de medida com medições x e y e resultados a e b . O dispositivo é descrito por um conjunto de distribuições de probabilidade $p(ab xy)$, que dá a probabilidade dos resultados a e b dada as medições x e y	2
1.2	Típica estrutura dos conjuntos de comportamentos de interesse.	5
1.3	Desenho esquemático de uma distribuição $\mathbf{q} \in \mathcal{NS}$ e $d = \text{NL}(\mathbf{q})$, a distância (com respeito à norma ℓ_1) de \mathbf{q} para a mais próxima distribuição local $\mathbf{p}^* \in \mathcal{L}$	8
2.1	volume não-local ponderado pelo traço em porcentagem para o estado de dois qubits maximamente emaranhado em função do número de medições em cada parte no cenário de Bell, ou seja, cenários do tipo $(2, n, 2)$	19
2.2	Em azul nosso quantificador está abaixo da versão não-ponderada em vermelho, como esperado, mantendo o ponto de máximo, que coincidem com o máximo da curva tracejada representando o emaranhamento entropia em preto. Em (a) para o cenário CHSH e em (b) para o cenário 3322.	20
2.3	O máximo do volume não-local ponderado pelo traço (em azul) é alcançado no estado que exhibe a entropia de emaranhamento máxima (em preto).	21

2.4	Anomalia fraca da perspectiva do volume não-local ponderado pelo traço, com α dado em graus. Em (a) vemos como o peso comprime ligeiramente a curva normalizada, enquanto em (b) uma visão ampliada da região contendo o mínimo local mostra que cada quantificador atinge o mínimo em um ângulo diferente (pontos destacados).	22
2.5	Volume de traço ponderado para diferentes famílias de estados em função de α (dado em graus); a família neste caso é rotulado pelo valor de seu parâmetro β em $\text{GHZ}(\alpha, \beta)$. Curvas mais claras significam maior emaranhamento entre os estados $ 11\rangle$ e $ 22\rangle$	24
3.1	(a) Experimento de Bell padrão em que a fonte emite um par de partículas emaranhadas e Alice e Bob detectam uma delas após escolher suas respectivas configurações de medição. (b) Experimento de Bell estudado aqui, no qual a fonte emite N pares de partículas emaranhadas e Alice e Bob só detectam as intensidades produzidas por um fluxo de N partículas após a escolha de suas respectivas configurações de medição. Figura adaptada de [2].	28
3.2	Máxima violação quântica da desigualdade de Bell $S_N \geq 1$ como uma função do número N de partículas detectadas por cada parte para estados no formato de (3.9), para diferentes valores de V . Para um dado V , a violação é maior quando N é ímpar. Para $V = 0.95$, a violação desaparece para $N > 9$, se N é ímpar, e para $N > 4$ se N é par. Para $V = 0.97$, a violação desaparece para $N > 17$, se N é ímpar, e para $N > 6$ se N é par. Para $V \geq 0.99$, há sempre violação (apesar de muito pequena) pelo menos até $N = 18$. Obter a máxima violação quântica para valores altos de N requer um poder computacional que ultrapassa nossa capacidade.	33

Conteúdo

Introdução

1	Preliminares	1
1.1	Comportamentos não-sinalizantes	2
1.2	Comportamentos locais	3
1.3	Comportamentos quânticos	4
1.4	Caracterização do conjunto local usando programação linear	4
1.5	Distância do traço	6
2	Volume não-local ponderado pelo traço	9
2.1	Quantificando não-localidade de um estado quântico	13
2.2	Propriedades	17
2.3	Revisando cenários simples	19
2.4	Anomalia fraca da não-localidade	21
3	Não-localidade com informação apenas de intensidade	26
3.1	Motivação	27
3.2	Cenários experimentais	29
3.3	Caso ideal	30
3.4	Efeito de ruído	34
3.5	Detectores ineficientes	34
3.6	Proposta experimental	39
	Conclusão	41
	Referências	44

Introdução

A não-localidade sugere que o universo é de fato profundamente diferente de nossa compreensão habitual dele, e que as partes “separadas” do universo estão, na verdade, potencialmente conectadas de uma maneira íntima e imediata. A não-localidade ocorre devido ao fenômeno do emaranhamento, pelo qual as partículas que interagem umas com as outras tornam-se permanentemente correlacionadas, ou dependentes dos estados e propriedades umas das outras, na medida em que efetivamente perdem sua individualidade e se comportam de várias maneiras como uma única entidade. Os conceitos de não-localidade e emaranhamento embora andem de mãos dadas, são fundamentalmente diferentes e, por mais peculiares que sejam, são fatos de sistemas quânticos que foram repetidamente demonstrados em experimentos de laboratório.

Apesar das dúvidas sobre o emaranhamento e a não-localidade e as dificuldades práticas de obter provas de uma forma ou de outra, o físico irlandês John Bell tentou colocar a questão tornando-a experimental em vez de apenas teórica. O Teorema de Bell, publicado em 1964 [1], e referido como uma das descobertas mais profundas de toda a física, mostrou efetivamente que os resultados previstos pela mecânica quântica (por exemplo, em um experimento como o descrito por Einstein, Podolsky e Rosen [3]) não poderia ser explicada por nenhuma teoria que preservasse a localidade. Os experimentos práticos subsequentes de John Clauser e Stuart Freedman em 1972 [4] e de Alain Aspect em 1982 [5] parecem mostrar definitivamente que os efeitos da não-localidade são reais e que “ações fantasmagóricas à distância” são realmente possíveis. Isto somente acontece pois abrimos mão do realismo e mantemos a localidade, ou seja, essa “ação fantasmagórica” só é necessária se exigirmos realismo.

Até o momento existem várias compilações na área sob diversas perspectivas.

Em [6] é dado um foco principalmente em implementações experimentais. Buhrman e colaboradores revisam a relação entre ciência da informação quântica e conceitos fundamentais em mecânica quântica como não-localidade em [7]. A mais recente (e provavelmente a mais conhecida) é a revisão de Nicolas Brunner e colaboradores [8]. Finalmente, na dissertação de mestrado de Gláucia Murta é apresentada uma série de ferramentas matemáticas essenciais para compreender a estrutura geométrica por trás da não-localidade quântica [9].

Existem muitas tarefas cujo desempenho pode ser aprimorado pelo uso de recursos quânticos como o emaranhamento. No entanto, em vários casos a mera presença deste recurso não é suficiente, é necessário poder gerar correlações não-locais também. Além disso, foi comprovado de várias perspectivas que emaranhamento e não-localidade representam recursos estritamente diferentes [10, 11], de fato, o primeiro é um ingrediente do segundo, mas sua presença não garante a observação de correlações não clássicas, uma vez que é necessário poder realizar medições locais que não comutam nas partes envolvidas. Por esta razão, é muito importante ter uma maneira de avaliar o quão não local é um determinado sistema. Uma abordagem possível consiste em tratar o problema do ponto de vista das teorias de recursos [12]. Sob esta abordagem são definidos os objetos que possuem a propriedade, juntamente com as regras que uma medida adequada deve satisfazer e as operações livres sob as quais o recurso não é aumentado. A teoria dos recursos do emaranhamento é a mais conhecida e bem estabelecida deste tipo [13, 14] e tem servido como referência para desenvolver uma grande variedade de construções análogas para grandezas como coerência [15], *quantum steering* [16], contextualidade [17], entre outros. Em relação à não-localidade de Bell, vários esforços têm sido feitos para esta formulação, para maiores detalhes [18][19][20].

Uma questão relevante é como quantificar a não-localidade. Uma escolha comum para quantificar a não-localidade é através da quantidade de violação de uma desigualdade de Bell por um estado ρ . Mas um problema nesta abordagem é o fato da existência de outras desigualdades de Bell que diria outros possíveis valores para violação do mesmo estado ρ . Afim de contornar esse infortúnio, pegamos não mais um desigualdade específica mas o comportamento gerado pelas probabilidades

conjuntas do cenário de Bell.

Há também o fato de alguns experimentos termos apenas a informação sobre um fluxo de partículas emaranhadas, ao invés de uma realização experimental com um par emaranhado de cada vez. Ou seja, um experimento típico de Bell é realizado com 2 partes recebendo 1 par de partículas por vez. Então, dada um fonte de partículas que emite não apenas um par em cada realização, mas sim um feixe com N pares, podemos usar a quantidade de violação das desigualdades de Bell, usando uma associação entre o rótulo do resultado presente na expressão da desigualdade e o número de partículas detectadas para quantificar a não-localidade desta situação.

Nesta tese, tratamos de observar a quantificação da não-localidade em dois problemas em específico. O primeiro é o uso de um novo quantificador de não-localidade, com boas propriedades, com o objetivo de avaliar situações já presentes na literatura. Por último, usando o valor numérico de violação da desigualdade de Bell, tratamos do problema de quantificar não-localidade quando temos um fluxo de N partículas emaranhadas produzidas por um fonte.

No capítulo 1, revisamos alguns conceitos importantes e ferramentas que ajudarão no entendimento do trabalho. No capítulo 2, apresentamos uma proposta de medida de não-localidade chamada de *volume não-local ponderado pelo traço*, que nada mais é do que uma combinação de duas medidas conhecidas, o volume não-local (estados) e a distância do traço (comportamentos). Avaliamos cenários de Bell já conhecidos na literatura e buscamos tratar da chamada *anomalia fraca da não-localidade*.

No capítulo 3, vamos falar em detalhes mais sobre a localidade macroscópica e a motivação sobre estudar o cenário de muitas partículas; colocamos os resultados para uma fonte de estados maximamente emaranhados e detecção perfeita, em seguida estudamos efeitos de ruído e detecção imperfeita. Por fim, propomos uma realização experimental para testar nossos resultados.

Na conclusão, falamos de maneira mais específica sobre os resultados obtidos.

Capítulo 1

Preliminares

Considere dois observadores distantes um do outro, Alice e Bob, realizando medições conjuntas sobre um sistema físico que eles compartilham, como um par de partículas emaranhadas. Cada um dos observadores pode escolher um número r de diferentes medições para aplicar no seu sistema. E cada medição tem como resposta um número s de resultados. Assim, esse cenário de Bell é composto de dois observadores, cada observador têm r possíveis medições para escolher e cada medição possui s possíveis resultados.

A descrição dos resultados de Alice e Bob é dada por um conjunto de distribuições de probabilidade $p(ab|xy)$, chamado de comportamento, que fornece a probabilidade dos resultados a e b dadas as entradas x e y , como mostrado na figura 1.1. O conjunto de comportamentos em consideração depende das suposições físicas que fazemos sobre os sistemas que Alice e Bob compartilham.

Podemos representar por um vetor $\mathbf{p} = p(ab|xy)$ um comportamento dentro de um cenário de Bell específico. O comportamento pode ser visto como um ponto que pertence a um espaço de probabilidades, cujas características são a positividade e normalização.

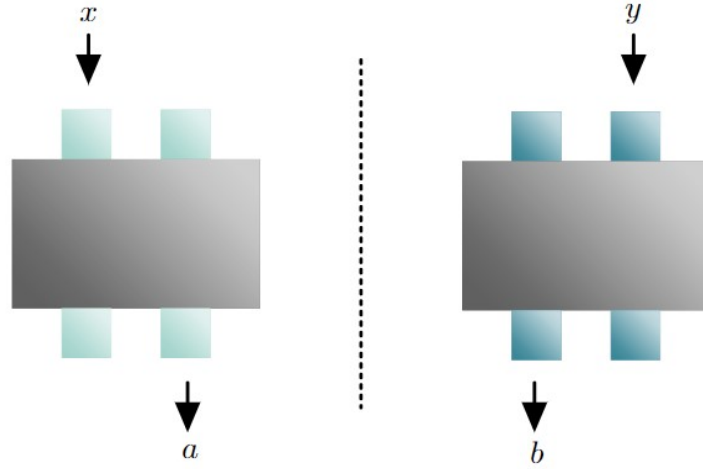


Figura 1.1: Alice e Bob têm cada um dispositivo de medida com medições x e y e resultados a e b . O dispositivo é descrito por um conjunto de distribuições de probabilidade $p(ab|xy)$, que dá a probabilidade dos resultados a e b dada as medições x e y .

1.1 Comportamentos não-sinalizantes

Sabemos que, da teoria da relatividade, a transmissão instantânea de informações é fundamentalmente proibida, com isso, mesmo aqueles eventos ¹ em que Alice e Bob estejam separados por intervalos tipo-espaço, então os resultados de Alice não são influenciados causalmente pela escolha das medições de Bob e vice-versa. Isso leva às chamadas condições não-sinalizantes: os resultados de Alice não dependem da escolha feita por Bob. Ou seja,

$$\sum_{b=1}^s p(ab|xy) = \sum_{b=1}^s p(ab|x'y) = p(a|x), \forall x, a, y, y'. \quad (1.1)$$

Analogamente, temos também

$$\sum_{a=1}^s p(ab|xy) = \sum_{a=1}^s p(ab|x'y) = p(b|y), \forall y, b, x, x'. \quad (1.2)$$

Então, dizemos que um comportamento \mathbf{p} é não-sinalizante se satisfaz (1.1) e (1.2).

¹Um evento é definido pelas medições de Alice (x) e Bob (y) e seus respectivos resultados (a e b).

Tabela 1.1: Exemplo de um comportamento não-sinalizante. Considere Alice com medições (A_1, A_2) e Bob com (B_1, B_2) com possíveis resultados 0 e 1 para ambas medidas, ou seja, $a, b \in \{0, 1\}$, $x \in A_1, A_2$, $y \in B_1, B_2$. Os elementos do comportamento são descritos pela tabela abaixo.

$p(ab x, y)$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(A_1, B_1)	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
(A_1, B_2)	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
(A_2, B_1)	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
(A_2, B_2)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

A desigualdade CHSH [21] pode ser escrita como

$$|\langle A_1 B_1 \rangle - \langle A_1 B_2 \rangle| + \langle A_2 B_2 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle \leq 2, \quad (1.3)$$

onde

$$\langle xy \rangle = p(11|xy) + p(-1 - 1|xy) - p(-11|xy) - p(1 - 1|xy). \quad (1.4)$$

Usando a tabela (1.1), obtemos o valor algébrico máximo 4 para (1.3). Este exemplo extremo foi introduzido em [22] e é conhecido como a caixa de Popescu e Rohrlich.

1.2 Comportamentos locais

Dada nossa percepção newtoniana da natureza, temos a condição do realismo local. A localidade é uma restrição natural que surge da noção de que nada pode alterar as propriedades de algo que está suficientemente separado e a prescrição de realismo sugere que os resultados de uma dada medição existem antes mesmo da medição em si. Assumir localidade implica que devemos ser capazes de identificar um conjunto de fatores, que chamamos de variáveis ocultas λ , que influenciam, junto com as medições, os resultados de um dado evento. Assim, se uma probabilidade conjunta pode ser construída a partir de um modelo de variáveis ocultas locais, podemos escrevê-la como:

$$p(ab|xy) = \int_{\Lambda} d\lambda q(\lambda) p(a|x, \lambda) p(b|y, \lambda), \quad (1.5)$$

onde assumimos implicitamente que as medições de Alice e Bob podem ser escolhidas livremente de modo que independe de λ , ou seja, $q(\lambda|xy) = q(\lambda)$ e $p(a|x, \lambda)$ e $p(b|y, \lambda)$ são probabilidades locais. Então, se os elementos de um comportamento \mathbf{p} satisfazem (1.5), dizemos que o comportamento é local. Todo comportamento local é um comportamento não-sinalizante mas o inverso não é válido. Os elementos de um comportamento de um dado cenário que não podem ser como (1.5) são chamados de *não-locais*. Olhando para (1.3), o valor de 2 indica o limite clássico, ou seja, um cenário onde as probabilidades dadas por (1.5) não ultrapassam este valor.

1.3 Comportamentos quânticos

Agora passamos a descrever o conjunto formado por comportamentos resultantes de previsões da mecânica quântica. Os elementos de probabilidade de um comportamento quântico que podem ser escritos como

$$p(ab|xy) = \text{Tr}(\rho_{AB} M_{a|x} \otimes M_{b|y}), \quad (1.6)$$

onde ρ_{AB} é um estado compartilhado entre Alice e Bob, $M_{a|x}$ são os operadores associados a medição x feita por Alice e $M_{b|y}$ são operadores referentes a Bob realizar a medição y . Voltando a (1.3), o máximo da violação quântica é $2\sqrt{2}$, conhecida como Cota de Tsirelson [23].

Existem comportamentos quânticos que não satisfazem a condição de localidade da seção anterior (o que leva as chamadas violações das desigualdades de Bell) e há comportamentos não-sinalizantes que não pertencem ao conjunto de comportamentos quânticos [22].

1.4 Caracterização do conjunto local usando programação linear

Em geral, o conjunto de comportamentos locais \mathcal{L} é um subconjunto estrito dos comportamentos quânticos \mathcal{Q} que por sua vez é um subconjunto estrito de compor-

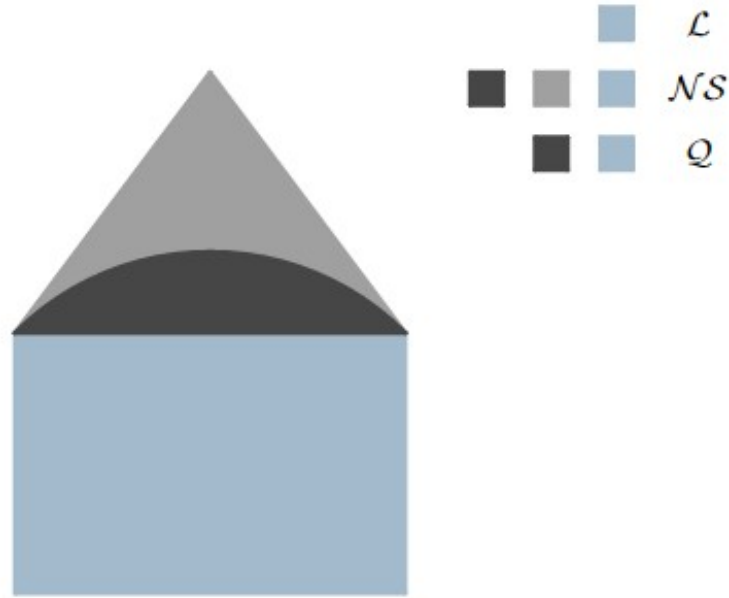


Figura 1.2: Típica estrutura dos conjuntos de comportamentos de interesse.

tamentos não-sinalizantes \mathcal{NS} , como mostrado na figura 1.2.

O conjunto local é um polítopo e, portanto, qualquer comportamento local pode ser escrito como uma soma convexa de um conjunto finito de pontos extremos [8]. Se representarmos um comportamento $p(a, b|x, y)$ como um vetor \mathbf{p} com $|x||y||a||b|$ componentes, a condição (1.5) pode ser escrito sucintamente como

$$\mathbf{p} = A \cdot \boldsymbol{\lambda}, \quad (1.7)$$

com $\boldsymbol{\lambda}$ sendo um vetor de probabilidade sobre o conjunto de variáveis λ , com componentes $\lambda_i = p(\lambda = i)$, e A sendo uma matriz indexada por i e a variável multi-índice $j = (x, y, a, b)$ com $A_{j,i} = \delta_{a, f_a(x, \lambda=i)} \delta_{b, f_b(y, \lambda=i)}$, onde f_a e f_b são funções determinísticas que dê os valores das medidas x e y quando $\lambda = i$. Assim, verificar se \mathbf{p} é local equivale a um problema de viabilidade simples que pode ser escrito como o

seguinte programa linear [24–28]:

$$\begin{aligned} & \min_{\lambda \in \mathbb{R}^m} && \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\lambda} && (1.8) \\ \text{sujeito a} && & \mathbf{p} = A \cdot \boldsymbol{\lambda} && \\ && & \lambda_i \geq 0 && \\ && & \sum_i \lambda_i = 1, && \end{aligned}$$

onde \mathbf{v} representa um vetor arbitrário com a mesma dimensão $m = |x|^{|a|}|y|^{|b|}$ como o vetor que representa a variável $\boldsymbol{\lambda}$.

Outra maneira de testar a pertinência em \mathcal{L} é usando uma *desigualdade de Bell*, que fornece um critério simples para avaliar se um comportamento é local ou não-local. Uma desigualdade de Bell é linear desigualdade que é satisfeita por todos os comportamentos locais mas é violado por alguns não-locais. Essas desigualdades correspondem a hiperplanos que separam o conjunto local de um comportamento não-local, e assim dá uma condição suficiente para não-localidade[8]. Como o conjunto local é um politopo, ele pode ser caracterizado por um número finito de desigualdades de Bell que definem as facetas. Assim, testar o pertencimento em \mathcal{L} pode ser feito testando se o comportamento satisfaz todas as desigualdades de Bell que definem a faceta para aquele cenário. Embora isso seja equivalente a formulação de programação linear (LP), isso não pode ser feito na prática porque encontrar o conjunto de todas as desigualdades de Bell que definem as facetas é um problema extremamente difícil [29].

1.5 Distância do traço

Além de identificar distribuições não-locais, as desigualdades de Bell fornecem uma maneira de quantificar quão não-local é uma distribuição p . A mais medida comum de não-localidade é associar uma maior violação numérica de uma desigualdade de Bell com um maior grau de não-localidade de p . No entanto, isso fornece um quantificador de não-localidade que não é *fiel*², uma vez que existem muitas distribuições

²Por quantificador fiel queremos dizer que o mesmo é uma função contínua e sempre positiva.

não-locais que não violarão uma dada desigualdade. Pode-se, em princípio, maximizar essa quantidade sobre todas as desigualdades para esse cenário, mas isso é geralmente inviável devido à complexidade de encontrar essas desigualdades [8].

O LP (1.8) pode ser ligeiramente modificado para definir um quantificador de não-localidade com base na distância do traço [30] entre duas distribuições de probabilidade $\mathbf{q} = q(x)$ e $\mathbf{p} = p(x)$:

$$D(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_x |q(x) - p(x)|. \quad (1.9)$$

Para quantificar a não-localidade, usamos a distância entre a distribuição de probabilidade gerada em um experimento de Bell e a probabilidade clássica mais próxima. Estamos então interessados na distância do traço entre $q(a, b, x, y) = q(a, b|x, y)p(x, y)$ e $p(a, b, x, y) = p(a, b|x, y)p(x, y)$, onde $p(x, y)$ é a probabilidade das entradas e que escolhemos fixar como uma distribuição uniforme, isto é, $p(x, y) = \frac{1}{|x||y|}$. A medida $NL(\mathbf{q})$ para a não-localidade da distribuição $\mathbf{q} = q(a, b|x, y)$ que é dada por

$$\begin{aligned} NL(\mathbf{q}) &= \frac{1}{|x||y|} \min_{\mathbf{p} \in \mathcal{L}} D(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{2|x||y|} \min_{\mathbf{p} \in \mathcal{L}} \sum_{a,b,x,y} |q(a, b|x, y) - p(a, b|x, y)|. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Esta é a distância do traço mínima entre a distribuição em teste e o conjunto de distribuições locais. Geometricamente pode ser entendido o quão estamos longe desse conjunto, como mostrado na fig 1.3.

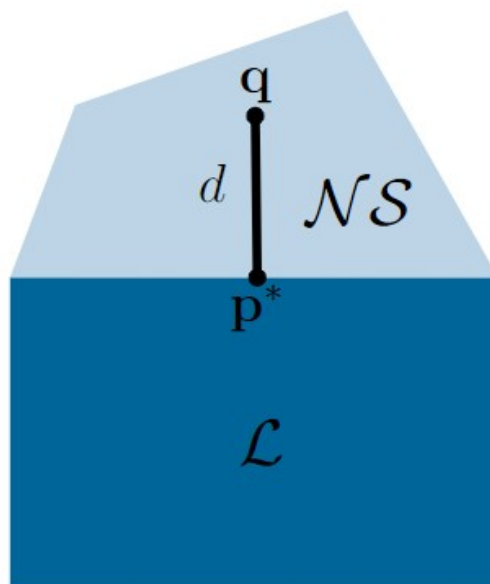


Figura 1.3: Desenho esquemático de uma distribuição $\mathbf{q} \in \mathcal{NS}$ e $d = \text{NL}(\mathbf{q})$, a distância (com respeito à norma ℓ_1) de \mathbf{q} para a mais próxima distribuição local $\mathbf{p}^* \in \mathcal{L}$.

Capítulo 2

Volume não-local ponderado pelo traço

Uma vez que a não-localidade foi identificada como um recurso, é essencial formular *teorias de recursos de não-localidade*, permitindo não apenas interpretações operacionais, mas também quantificação de não-localidade. Uma teoria de recursos fornece uma estrutura robusta para o tratamento de uma propriedade como um recurso, permitindo pela sua caracterização, quantificação e manipulação [31]. Uma teoria de recursos consiste de três ingredientes essenciais: um conjunto de *objetos*, que representam as entidades físicas que podem conter o recurso e um subconjunto de objetos chamados de *objetos livres*, que são os objetos que não contém o recurso; uma classe especial de transformações, chamadas de *operações livres*, que cumprem o requisito essencial de mapear cada objeto livre da teoria em um objeto livre; e, finalmente, um *quantificador*, que mapeia cada objeto para um número real que representa quantitativamente quanto recurso esse objeto contém, e que é monótono sob a ação das operações livres.

Dada a sua importância geral, a teoria de recurso para emaranhamento [32] é sem dúvida a mais bem compreendida e amplamente explorada e assim tornou-se o exemplo arquetípico para o desenvolvimento de teorias de recursos de outros fenômenos quânticos [17, 20, 33–37]. O emaranhamento é um ingrediente necessário para a não-localidade de Bell, mas apesar de sua estreita conexão, emaranhamento e não-localidade referem-se a recursos fundamentalmente diferentes [24], pois existem

estados emaranhados que só podem dar origem a correlações locais [38]. Por isso é importante desenvolver teorias de recursos de não-localidade que sejam independentes de emaranhamento.

Vamos considerar um cenário de Bell bipartido onde duas partes distantes, Alice e Bob, compartilham um par possivelmente correlacionado de sistemas físicos, em que realizam medições, obtendo resultados de medição. Alice e Bob não são permitidos se comunicar e as escolhas de entradas (inputs) são consideradas independentes. Na discussão da não-localidade, é geralmente assumido que esses sistemas físicos são descritos por caixas fechadas e que Alice e Bob não tem acesso aos detalhes do estado do sistema e as medições que estão sendo realizadas. Assim, a descrição dos resultados de Alice e Bob é dada por um conjunto de distribuições de probabilidade, chamadas de *comportamentos*, que dependem das suposições físicas que fazemos sobre os sistemas que eles compartilham. Nesta situação, estamos interessados em uma teoria de recursos onde o conjunto de objetos é o conjunto de comportamentos, e o conjunto de objetos livres é o conjunto de comportamentos locais, aqueles consistente com uma descrição através de um modelo de variáveis ocultas locais.

Também é interessante focar no estado compartilhado por Alice e Bob e estudar como comportamentos não-locais podem ser gerados usando este estado. Isso está intimamente relacionado com a ideia de quanta não-localidade pode ser “extraída” do estado. Nesta situação, estamos interessados em uma teoria de recursos onde o conjunto de objetos é o conjunto de estados quânticos, talvez com dimensão fixa, e o conjunto de objetos livres é o conjunto de estados para o qual todo conjunto possível de medições realizadas por Alice e Bob geram comportamentos locais. Nesta tese investigamos como quantificadores de não-localidade para comportamentos podem ser usados para criar quantificadores de não-localidade para estados. Além disso, investigamos o fenômeno conhecido como *anomalia da não-localidade* [39], com atenção especial para a *anomalia fraca* observada em [40].

Recentemente, vários quantificadores de não-localidade para comportamentos foram propostos [19, 20, 22, 24, 25, 28, 41–52], e uma teoria de recursos da não-localidade para comportamentos foi desenvolvida [19, 20], permitindo assim uma prova formal que quantidades introduzidas anteriormente de fato fornecem boas

medidas de não-localidade. De especial importância para este trabalho é o quantificador de não-localidade baseado na distância do traço apresentada na referência [30], que mede a distância l_1 entre um dado comportamento e o politopo local. É mostrado nesta referência que, para o cenário $(2, 2, d)$, a violação numérica máxima da desigualdade CGLMP cresce com d , e da mesma forma, o valor máximo da distância do traço segue a mesma tendência.

Também temos vários exemplos de quantificadores de não-localidade para uma teoria de recursos onde os objetos são estados quânticos [39, 41, 45, 49, 53, 54]. Diferentes medidas terão significados operacionais diferentes e não necessariamente terão que concordar na ordenação para a quantidade de não-localidade. Por exemplo, uma maneira natural de quantificar a não-localidade é a violação máxima de uma desigualdade de Bell específica permitida por um determinado estado quântico. No entanto, também podemos estar interessados em quantificar a não-localidade de um estado pela quantidade de ruído (por exemplo, ineficiências de detecção) que pode suportar antes de se tornar local [39, 55, 56]. Curiosamente, essas duas medidas podem ser inversamente relacionadas, como demonstrado pelo fato de que no cenário CHSH [57] a resistência contra ruído aumenta à medida que o emaranhamento do estado diminui [41], reduzindo também a violação da desigualdade CHSH.

Devido à sua simplicidade, uma escolha natural de um quantificador de não-localidade é usar a violação numérica de uma dada desigualdade de Bell produzida por um estado quântico. Uma característica curiosa desses quantificadores é que o maior valor de violação nem sempre é alcançado pelo estado maximamente emaranhado, uma propriedade conhecida como *anomalia da não-localidade* [39]. Esta é uma propriedade contra-intuitiva, uma vez que inicialmente se esperava que “mais” emaranhamento levaria a “mais” não-localidade.

Essa constatação levou à investigação de se a anomalia era uma propriedade apenas deste quantificador específico, ou se era uma prova de que a não-localidade e o emaranhamento são, de fato, recursos distintos. Com esse propósito em mente, os autores de [49] propuseram um quantificador de não-localidade chamado *volume de violação*, que conta o volume do conjunto de medições que levam à violação da desigualdade escolhida quando aplicado a este estado. Este quantificador resolve o

anomalia para qutrits, já que neste caso qutrits maximamente emaranhados são maximamente não-locais (em relação ao volume de violação)[40]. Ainda [40] os autores analisam vários cenários, incluindo até 5 qubits e diferentes estados emaranhados. Eles mostram que a probabilidade de violação aumenta à medida que aumentamos o número de medições e o máximo violação para essas dimensões é obtido pelo o estado maximamente emaranhado. Várias propriedades desses quantificadores provadas na referência [58].

A desvantagem do volume de violação é que se concentra em apenas uma desigualdade, e para cenários com mais de duas partes, medições ou resultados, sabe-se que existem muitas famílias não equivalentes de desigualdades de Bell. Portanto, uma única desigualdade pode não capturar toda a estrutura do conjunto de comportamentos locais. Isso implica que o volume de violação não leva em conta grande parte dos comportamentos não-locais que podem ser gerados pelo estado, e isso pode levar a muitas propriedades. Por exemplo, considerando apenas uma única desigualdade CGLMP, a anomalia de não-localidade reaparece para $d > 7$ [54].

Outro quantificador de não-localidade foi proposto para resolver este problema. A definição é semelhante à definição do volume de violação, mas leva em consideração todo o espaço de comportamentos: conta o volume do conjunto de medidas que dão origem a comportamentos não-locais quando aplicadas a este estado. O máximo volume não-local é obtido com o estado bipartido maximamente emaranhado para dimensões até $d = 10$ [59], o que indica que os quantificadores baseados no volume têm maior relevância quando calculados sobre os politopos do que considerando uma desigualdade específica. Recentemente, foi estudado um quantificador baseado tanto no volume de violação quanto na resistência ao ruído, onde essas duas quantidades são combinadas [60], e um experimento baseado nesta combinação também foi realizado [61].

No entanto, o volume não-local não resolve completamente a anomalia da não-localidade. Foi mostrado na referência [40] que este quantificador exibe uma *anomalia fraca* para qutrits: o volume máximo é alcançado para o estado maximamente emaranhado, mas o volume não-local não é uma função monotônica do emaranhamento do estado. Sugerimos que o aparecimento desta não-monotonicidade, ape-

sar da coincidência dos máximos, é uma manifestação inevitável da inequivalência intrínseca entre emaranhamento e não-localidade.

Neste capítulo, usamos o volume não-local mais a distância do traço [30] para definir um novo quantificador de não-localidade para estados, chamado *volume não-local ponderado pelo traço*. A proposta é usar o valor numérico da distância do traço ao conjunto de comportamentos locais como um peso na definição do volume não-local. Inicialmente, nós reproduzimos alguns resultados encontrados em trabalhos anteriores para os cenários (2, 2, 2) e (2, 3, 2). Também verificamos se esta nova medida de não-localidade satisfaz as propriedades listadas em [58]. Finalmente, nós aplicamos esse quantificador na anomalia fraca relatada em [40].

2.1 Quantificando não-localidade de um estado quântico

Agora, abordamos o problema de quantificar não-localidade de um estado quântico ρ . Como a partir de ρ podemos gerar infinitos comportamentos não-locais diferentes p , este não é um problema trivial.

Uma maneira de definir um quantificador de não-localidade para estados quânticos é maximizar o grau de violação de uma desigualdade de Bell sobre todas medições possíveis para Alice e Bob e associar uma violação numérica maior com um maior grau de não-localidade. É fato que maior violação de uma desigualdade de Bell indica que mais correlacionado é o sistema (estado), o que não necessariamente pode ser estendido à não-localidade.

Esta associação entre violação numérica de desigualdade de Bell e não-localidade gerou algumas conclusões discutíveis. Por exemplo, usando a medida usual, a chamada “anomalia da não-localidade” aparece [39, 62]. Considere a desigualdade Collins-Gisin-Linden-Massar-Popescu (CGLMP) no cenário (2, 2, 3) [63]:

$$I_3 = p(A_1 = B_1) + p(B_1 = A_2 + 1) + p(A_2 = B_2) + p(B_2 = A_1) \\ - p(A_1 = B_1 - 1) - p(B_1 = A_2) - p(A_2 = B_2 - 1) - p(B_2 = A_1 - 1) \leq 2, \quad (2.1)$$

onde

$$p(A_a = B_b + k) \equiv \sum_{j=0}^2 p(j, j + (k \bmod 3) | A_a, B_b). \quad (2.2)$$

Para mais detalhes sobre um formato reduzido e geral da desigualdade CGLMP recomendo o artigo [59], e sobre as medições usadas no cenário de qutrits chamadas de *multiport beam splitters and phase shifters*, veja [55]. Dado um sistema de dois qutrits no estado

$$|\psi(\gamma)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 + \gamma^2}} (|00\rangle + \gamma |11\rangle + |22\rangle), \quad (2.3)$$

para o estado maximamente emaranhado ($\gamma = 1$), a melhor escolha de medições dá $I_3 = \frac{4(2\sqrt{3}+3)}{9} \simeq 2.873$ [63]. No entanto, os autores em [39] descobriram que, para uma escolha de configurações próxima, outro estado dá uma violação maior. Especificamente, a violação $I_3 = 1 + \sqrt{\frac{11}{3}} \simeq 2.915$ é obtida para o estado não-maximamente emaranhado com $\gamma = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2} \simeq 0.792$. Assim, o uso da violação máxima de uma desigualdade de Bell como uma figura de mérito para avaliar quão não-local um determinado estado é leva a um desacordo entre não-localidade máxima e emaranhamento máximo. Este fato é conhecido como *anomalia da não-localidade*.

Além da característica inesperada de anomalia da não-localidade, há outras questões discutíveis com o uso do valor numérico da violação de uma desigualdade de Bell específica para quantificar a não-localidade. O estado ρ tendo uma violação numérica maior que σ não influencia o fato de que as correlações geradas com ambos não podem ser explicado por modelos realistas locais. Em outras palavras, dada uma configuração experimental em algum experimento de Bell, as desigualdades de Bell só podem dizer se o comportamento obtido com algum estado é local ou não-local.

Na referência [49], os autores apresentam uma medida alternativa para quantificar a não-localidade, chamada *volume de violação*. Enquanto a medida anterior leva em consideração apenas a configuração que leva em consideração à violação máxima, o volume de violação leva em consideração todas as configurações que produzem violação de uma desigualdade de Bell. Para o cálculo desta nova quantidade, para um determinado estado, fazemos uma integração na região que leva à violação de

uma desigualdade de Bell fixa [62]. Em geral, podemos escrever

$$V_I(\rho) = \frac{1}{V_T} \int_{\Gamma} d^n x, \quad (2.4)$$

em que Γ é o conjunto de escolhas de medição para Alice e Bob que levam a uma violação da desigualdade I para o estado ρ e

$$V_T = \int_{\Lambda} d^n x, \quad (2.5)$$

é o volume do conjunto Λ de todas as possíveis escolhas de medição para Alice e Bob. Observe que $d^n x$ irá exibir o formato que dá peso igual para qualquer configuração. Assim, o estado ρ é mais não-local que o estado σ se, e somente se, $V_I(\rho) > V_I(\sigma)$. Também, se para o estado ρ o volume de violação é $V_I(\rho) = 0$, dizemos que o estado ρ é local em relação a dada desigualdade. Seguindo o mesmo raciocínio, $V_I(\rho) = 1$ indica que ρ é maximamente não-local em relação a essa desigualdade.

Esta medida usa o volume relativo de escolhas de medição que levam à violação de uma desigualdade de Bell particular para quantificar a não-localidade. Portanto, $V_I(\rho)$ tem uma interpretação direta: corresponde à probabilidade de violar uma desigualdade de Bell particular com o estado ρ quando a configuração de medição é escolhida aleatoriamente.

O volume de violação é uma medida de não-localidade para estados quânticos com boas propriedades, como já relatado na referência [49]. No entanto, $V_I(\rho)$ não leva em conta todas as configurações de medição que levam a comportamentos não-locais, mas apenas aquelas que levam a comportamentos não-locais que violam uma desigualdade de Bell particular. Exceto pelo cenário $(2, 2, 2)$, existem muitas famílias não equivalentes de desigualdades de Bell e portanto $V_I(\rho)$ fornece apenas um limite inferior para o volume relativo de escolhas de medição que levam à não-localidade.

Ao aplicar o volume de violação, a “anomalia da não-localidade” deixa de existir para estados emaranhados de qutrits, ou seja, o máximo do volume de violação está associado ao estado maximamente emaranhado [49]. Vale ressaltar que os únicos resultados analíticos sobre o volume de violação sob medidas aleatórias não

enviesadas V_I , atualmente na literatura ¹ são limitados ao cenário (2, 2, 2) para a desigualdade CHSH, com $V_I = 2(\pi - 3)$ [64] e para a primeira desigualdade de Bell [1], $V_I = \frac{1}{3}$ [65], para um par de qubits emaranhados em um estado singlete. Ambos os cálculos foram possíveis devido ao alto grau de simetria do estado.

Na referência [40], os autores consideram uma modificação do volume de violação, chamado de *volume não-local*, substituindo a violação de uma desigualdade de Bell por pertinência do comportamento correspondente ao politopo de comportamentos locais. Assim, o volume não-local leva em conta todas as configurações que produzem um comportamento não-local, que em geral é estritamente maior do que o conjunto de comportamentos que violam uma única desigualdade de Bell. Para o cálculo desta nova quantidade, para um determinado estado, fazemos uma integração na região Δ do conjunto de configurações de medições que levam a um comportamento não-local. Em geral, podemos escrever

$$V(\rho) = \frac{1}{V_T} \int_{\Delta} d^n x, \quad (2.6)$$

onde V_T é definido como antes. Novamente, consideramos uma integração que dá pesos iguais para qualquer configuração.

Embora represente um problema computacional exponencialmente difícil, já foi considerado no contexto muitas partes e múltiplas entradas [40], em que os autores encontram vários resultados interessantes. Notavelmente, eles foram capazes de mostrar numericamente que dentro deste cenário, à medida que a quantidade de entradas aumenta, torna-se mais fácil para um determinado estado demonstrar a não-localidade de Bell, mesmo para estados com baixa quantidade de emaranhamento. Alguns desses resultados também foram obtidos analiticamente em [58].

Nesta contribuição consideramos outra opção na qual integramos sobre o conjunto de escolhas de medição que dão um comportamento não-local mas usando um quantificador de não-localidade Q definido no conjunto de comportamentos como um peso na integral:

$$V_Q(\rho) = \frac{1}{V_T} \int_{\Delta} Q(x) d^n x, \quad (2.7)$$

¹Que o autor saiba...

onde $Q(x)$ é o quantificador Q para o comportamento gerado pelas configurações de medição x e estado e Δ e V_T são definidos como antes. Consideramos apenas quantificadores *fiéis*: $Q(\mathbf{p}) > 0$ se, e somente se, $\mathbf{p} \notin \mathcal{L}$.

Este novo quantificador, que chamamos de *volume não-local Q -ponderado*, pode ser interpretado de forma similar. Como o volume não-local, ele leva em consideração todas as configurações que produzem um comportamento não-local para o estado ρ , mas soma com maior peso os comportamentos que são mais não-locais de acordo com o quantificador Q .

Em particular, estamos interessados no quantificador de não-localidade para estados obtidos quando a escolha é $Q = NL$:

$$V_{NL}(\rho) = \frac{1}{V_T} \int_{\Delta} NL(x) d^n x, \quad (2.8)$$

onde $NL(x)$ é a distância do traço para o comportamento gerado pelo estado ρ e configurações de medições x e Δ e V_T são definidos como antes. Chamamos esse quantificador de volume não-local ponderado pelo traço.

2.2 Propriedades

Na referência [58], os autores mostram que o volume não-local é invariante sob unitárias locais e que é estritamente positivo para estados emaranhados puros bipartidos. As provas podem ser ligeiramente modificadas para mostrar que essas propriedades também são verdadeiras para V_Q .

Teorema 1. *V_Q é invariante sob unitárias locais.*

Demonstração. Seja $\rho' = U_1 \otimes U_2 \rho U_1^\dagger \otimes U_2^\dagger$ onde U_1 e U_2 são unitárias locais para os subsistemas 1 e 2, respectivamente. O comportamento gerado com as medições $\{M_i\}$ e $\{N_i\}$ e o estado ρ é igual ao comportamento gerado com as medições $\{U_1^\dagger M_i U_1\}$ e $\{U_2^\dagger N_i U_2\}$ e o estado ρ' . Conseqüentemente, os conjuntos Δ são os mesmos para ρ e ρ' , o que implica $V_Q(\rho) = V_Q(\rho')$. \square

Teorema 2. *Se Q é uma função contínua, para todos os estados emaranhados puros bipartidos, em um cenário com pelo menos duas escolhas de medições de dois*

resultados, V_Q é estritamente positivo. Ou seja, $V_Q(|\psi\rangle) = 0$ se e somente se $|\psi\rangle$ é um estado produto.

Demonstração. Como $|\psi\rangle$ é emaranhado, sabemos por [66] que existem medições $\{M_i\}$, $\{N_j\}$ no cenário mais simples $(2, 2, 2)$ tal que o comportamento correspondente é não-local. Por continuidade das probabilidades $p(ab|xy)$ em função das medições, e continuidade de Q em função de \mathbf{p} , há uma bola ao redor de $\{M_i\}$, $\{N_j\}$ tal que, para qualquer escolha de medidas dentro desta bola, Q é estritamente positivo. Como estamos integrando uma função estritamente positiva sobre um conjunto de medida maior que zero, isso implica que $V_Q(|\psi\rangle) > 0$.

Por outro lado, se $|\psi\rangle$ é separável, todo comportamento gerado com $|\psi\rangle$ é local e, portanto, $Q(x) = 0$ para cada x e $V_Q(|\psi\rangle) = 0$. \square

Também é fácil ver que o volume não-local Q -ponderado é sempre menor ou igual do que a versão não-ponderada para qualquer quantificador fiel Q que é normalizado tal que $0 \leq Q \leq 1$. De fato, se Q é fiel, podemos escrever

$$V_Q(\rho) = \frac{1}{V_T} \int_{\Lambda} Q(x) d^n x, \quad (2.9)$$

e

$$V(\rho) = \frac{1}{V_T} \int_{\Lambda} \chi(x) d^n x, \quad (2.10)$$

onde χ é a função característica do conjunto não-local, ou seja:

$$\chi(\mathbf{p}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{p} \notin \mathcal{L}, \\ 0, & \text{se } \mathbf{p} \in \mathcal{L}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Se \mathbf{p} for local e Q for fiel, $Q(\mathbf{p}) = \chi(\mathbf{p}) = 0$. Se \mathbf{p} é não-local, $Q(\mathbf{p}) \leq 1 = \chi(\mathbf{p})$, o que implica que $Q(\mathbf{p}) \leq \chi(\mathbf{p})$ para todo \mathbf{p} e, portanto, $V_Q(\rho) \leq V(\rho)$ para todo ρ .

A referência [58] também mostra que o volume não-local vai para 1 no limite onde ambas as partes têm um número infinito de medições. A prova neste caso não pode ser modificada para mostrar que isso também é verdade para V_Q . Os resultados numéricos na figura 2.1 indicam que se escolhermos $Q = NL$, V_{NL} parece aumentar monotonicamente com o número de medidas n , que seria o comportamento desejado.

No entanto, não é possível reivindicar este limite quando n vai para o infinito com base apenas nesta evidência. Como V_Q é sempre menor que o volume não-local, não podemos descartar a possibilidade de que V_Q vá para a quando n vai para infinito, com $0 < a < 1$. Se esta propriedade vale ou não vale para V_{NL} é um problema aberto.

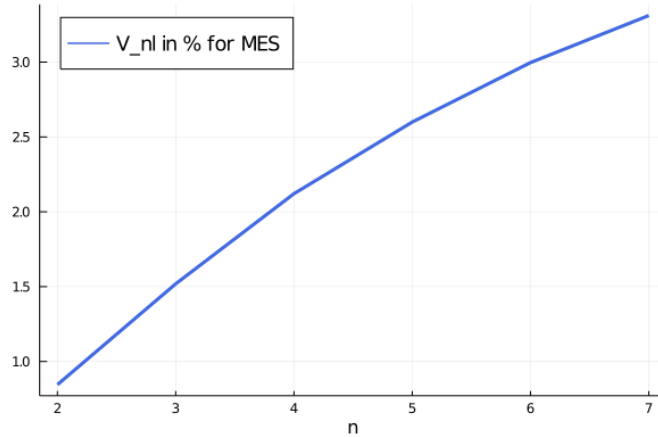


Figura 2.1: volume não-local ponderado pelo traço em porcentagem para o estado de dois qubits maximamente emaranhado em função do número de medições em cada parte no cenário de Bell, ou seja, cenários do tipo $(2, n, 2)$.

2.3 Revisando cenários simples

Nesta seção testamos o quantificador V_{NL} , analisando seu desempenho quando comparado com resultados anteriores na literatura. Comportamentos são decididos como não-locais em nossas simulações para distâncias do traço com magnitude menor que 10^{-8} .

Para começar, verificamos o efeito do peso no volume não-local para o cenário mais simples, o cenário $(2, 2, 2)$, também conhecido como cenário CHSH. O conjunto local neste caso tem uma estrutura simples, uma vez que existe apenas uma família de desigualdades de Bell, e esperamos que os gráficos para a entropia de emaranhamento, o volume não-local e o volume não-local Q -ponderado tenham o mesmo comportamento se Q é um quantificador de não-localidade fiel contínuo para comportamentos. Para testar isso, consideramos a família de estados parametrizada

por:

$$|\psi(\alpha)\rangle = \alpha |00\rangle + \sqrt{1 - \alpha^2} |11\rangle \quad (2.12)$$

e plotamos o volume não-local (vermelho) e o volume não-local ponderado pelo traço (azul) na figura 2.2a. Tanto para o volume não-local quanto para o volume não-local ponderado pelo traço a não-localidade máxima é alcançada no estado maximamente emaranhado ($\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$). Também podemos ver que a versão ponderada é menor ou igual à versão não-ponderada considerando uma normalização utilizando o valor máximo para cada curva.

O próximo cenário interessante, o cenário (2, 3, 2), não é tão trivial quanto o cenário CHSH. Na figura 2.2b os valores ponderados e não-ponderados são comparados para a mesma parametrização (2.12).

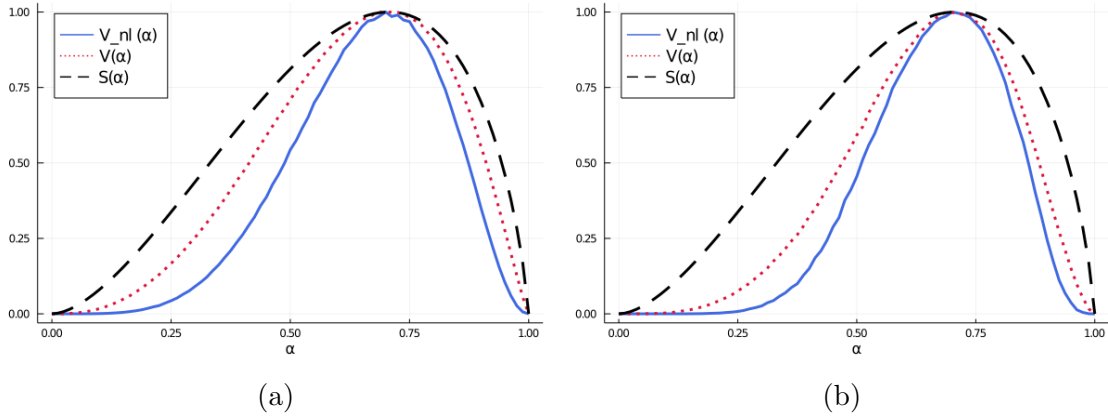


Figura 2.2: Em azul nosso quantificador está abaixo da versão não-ponderada em vermelho, como esperado, mantendo o ponto de máximo, que coincidem com o máximo da curva tracejada representando o emaranhamento entropia em preto. Em (a) para o cenário CHSH e em (b) para o cenário 3322.

Também comparamos V_{NL} e a entropia de emaranhamento para a família de estados dada em (2.3), veja a figura 2.3 para o cenário de qutrits. Para esta família de estados, vemos que a não-localidade máxima é alcançada pelo estado maximamente emaranhado, como nos cenários anteriores com qubits. O mesmo comportamento é observado para a versão não-ponderada, como mostrado na referência [40]. Mas em geral V_{NL} não é uma função monotônica da entropia de emaranhamento. Esta propriedade é conhecida como *anomalia fraca de não-localidade*.

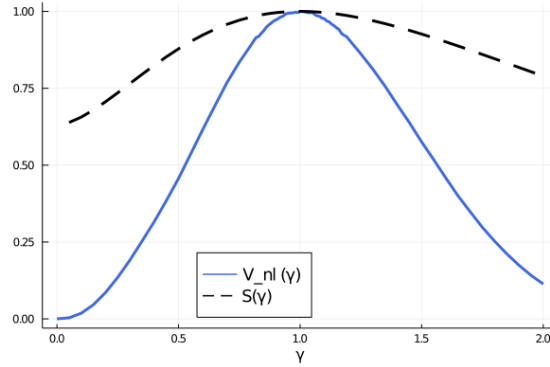


Figura 2.3: O máximo do volume não-local ponderado pelo traço (em azul) é alcançado no estado que exibe a entropia de emaranhamento máxima (em preto).

2.4 Anomalia fraca da não-localidade

Ainda no mesmo sistema de qutrits, para estados GHZ(α) parametrizados como:

$$\text{GHZ}(\alpha) = \sin(\alpha)|00\rangle + \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |22\rangle), \quad (2.13)$$

a não-localidade não aumenta monotonicamente com α . Como nos casos anteriores, atinge o pico no estado maximamente emaranhado, mas tem um mínimo local em torno de 6 graus, semelhante ao observado na versão não-ponderada. A figura 2.4a mostra o ponderado e não-ponderado nas versões de volume não-local em função de α ; a figura 2.4b dá um zoom no que está acontecendo muito próximo do mínimo local, enfatizando o comportamento diferente dos quantificadores.

É interessante observar que os mínimos locais são alcançados para diferentes valores de α para versão ponderada e não-ponderada. Isso mostra que a anomalia fraca não é uma característica intrínseca do cenário, mas é dependente da escolha do quantificador.

Para investigar melhor como o emaranhamento e a não-localidade podem se comportar de maneira diferente, estudamos como essas quantidades mudam quando passamos de um estado de rank inferior para um estado de rank completo. Primeiro mostramos que o emaranhamento nunca diminui nesta situação.

Teorema 3. *O emaranhamento sempre aumenta ao fazer uma transição contínua de um estado de rank inferior $|\psi\rangle$ para um estado de rank completo $|\psi'\rangle$.*

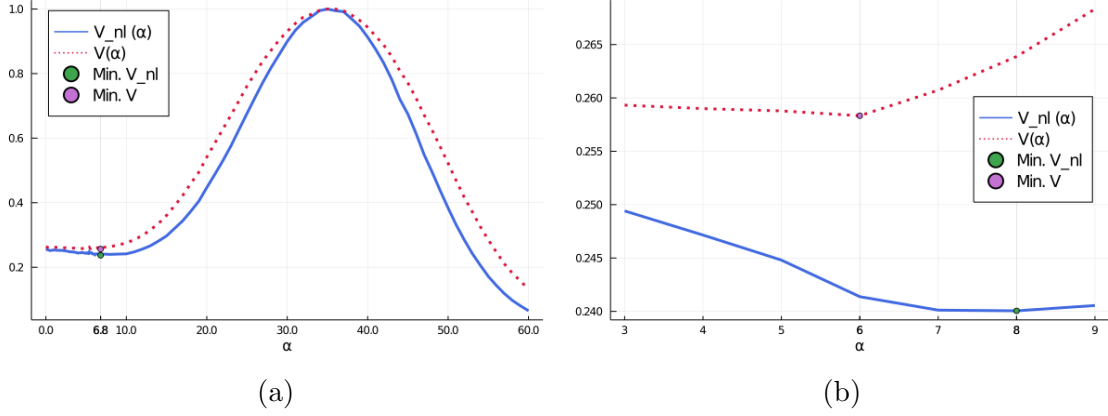


Figura 2.4: Anomalia fraca da perspectiva do volume não-local ponderado pelo traço, com α dado em graus. Em (a) vemos como o peso comprime ligeiramente a curva normalizada, enquanto em (b) uma visão ampliada da região contendo o mínimo local mostra que cada quantificador atinge o mínimo em um ângulo diferente (pontos destacados).

Demonstração. Seja $|\psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$, $\dim \mathcal{H} = D$. Suponha que o rank de $|\psi\rangle$ é menor que \sqrt{D} , para que sua decomposição de Schmidt:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i |ii\rangle, \quad (2.14)$$

onde $\sum_{i=0}^{d-1} |\alpha_i|^2 = 1$ and $d < \sqrt{D}$, levando para a entropia de emaranhamento:

$$E = - \sum_{i=0}^{d-1} |\alpha_i|^2 \log_2 |\alpha_i|^2 \text{ Ebits}. \quad (2.15)$$

Considere agora outro estado $|\psi'\rangle$ que é de rank completo, $\text{rank}(|\psi'\rangle) = \sqrt{D}$

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{N}(\delta |\phi\rangle + |\psi\rangle), \quad (2.16)$$

onde $|\phi\rangle = \sum_{i=d}^{\sqrt{D}} \beta_i |ii\rangle$, $\sum_{i=d}^{\sqrt{D}} |\beta_i|^2 = 1$, $\delta \in \mathbb{C}$ e N é um fator de normalização. Usando que $\langle \phi | \psi \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle \psi' | \psi' \rangle &= \frac{1}{N^2} (1 + |\delta|^2) = 1 \\ \Rightarrow |\psi'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\delta|^2}} (\delta |\phi\rangle + |\psi\rangle), \end{aligned}$$

cuja entropia de emaranhamento é dada por:

$$E' = - \frac{|\delta|^2}{1 + |\delta|^2} \sum_{i=d}^{\sqrt{D}} |\beta_i|^2 \log \left(\frac{|\delta|^2 |\beta_i|^2}{1 + |\delta|^2} \right) \\ - \frac{1}{1 + |\delta|^2} \sum_{i=0}^{d-1} |\alpha_i|^2 \log \left(\frac{|\alpha_i|^2}{1 + |\delta|^2} \right).$$

A primeira soma pode ser escrita como

$$= - \sum_{i=d}^{\sqrt{D}} |\beta_i|^2 [\log |\delta|^2 + \log |\beta_i|^2 - \log(1 + |\delta|^2)] \\ = - \log |\delta|^2 + E_\phi + \log(1 + |\delta|^2).$$

A segunda soma torna-se

$$= - \sum_{i=0}^{d-1} |\alpha_i|^2 [\log |\alpha_i|^2 - \log(1 + |\delta|^2)] \\ = E + \log(1 + |\delta|^2).$$

Então

$$E' = \frac{|\delta|^2}{1 + |\delta|^2} [- \log |\delta|^2 + E_\phi + \log(1 + |\delta|^2)] \\ + \frac{1}{1 + |\delta|^2} [E + \log(1 + |\delta|^2)] \\ = \frac{1}{1 + |\delta|^2} \left[-|\delta|^2 \log |\delta|^2 + |\delta|^2 E_\phi \right. \\ \left. + |\delta|^2 \log(1 + |\delta|^2) + E + \log(1 + |\delta|^2) \right].$$

Agora tomamos $|\delta|^2 \ll 1$

$$E' \rightarrow (1 - |\delta|^2) \left[- |\delta|^2 \log |\delta|^2 + |\delta|^2 E_\phi \right. \\ \left. + |\delta|^4 + E + |\delta|^2 \right].$$

Uma vez que $-\frac{|\delta|^2 \log |\delta|^2}{|\delta|^2} \rightarrow \infty$ quando $\delta \rightarrow 0$, a expressão de ordem principal é:

$$\begin{aligned} E' &\sim (1 - |\delta|^2) [-|\delta|^2 \log |\delta|^2 + E] \\ &\sim E - |\delta|^2 \log |\delta|^2 > E. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Assim, o emaranhamento sempre aumenta quando fazemos uma mudança contínua de um estado de rank inferior $|\psi\rangle$ para um estado de rank completo $|\psi'\rangle$. Além disso, o ganho de emaranhamento de ordem principal é independente da “direção” pela qual o novo subespaço é penetrado (independente de $|\phi\rangle$ e de E_ϕ):

$$\Delta E = E' - E = -|\delta|^2 \log |\delta|^2 > 0 \quad (2.18)$$

para $|\delta|^2$ pequeno. □

Por outro lado, a não-localidade pode se comportar de maneira muito diferente ao mudar de um estado de rank baixo para um estado de rank completo. A Figura 2.5 mostra uma investigação dentro de regiões de estados com emaranhamento parcial entre os estados $|11\rangle$ e $|22\rangle$ no estado GHZ com um parâmetro extra: :

$$\text{GHZ}(\alpha, \beta) = \sin(\alpha)|00\rangle + \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{2}} \left(\beta|11\rangle + \sqrt{1 - \beta^2}|22\rangle \right).$$

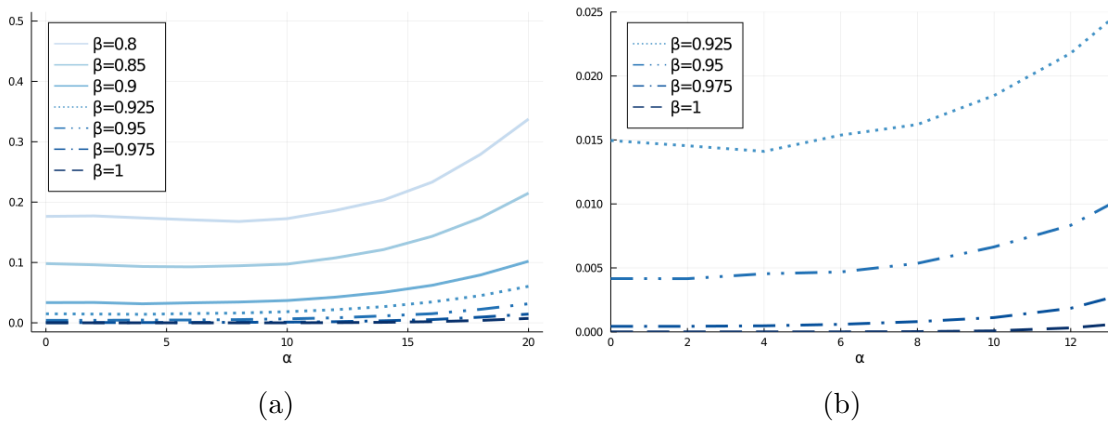


Figura 2.5: Volume de traço ponderado para diferentes famílias de estados em função de α (dado em graus); a família neste caso é rotulado pelo valor de seu parâmetro β em $\text{GHZ}(\alpha, \beta)$. Curvas mais claras significam maior emaranhamento entre os estados $|11\rangle$ e $|22\rangle$.

Observe em 2.5a que o mínimo da anomalia se move em direção a zero grau à medida que aumentamos o valor de β , ou seja, quando consideramos um ponto de partida mais próximo de um estado de rank 1 ([11]). Isso sugere que o mínimo não depende apenas do quantificador para comportamentos que estendemos para quantificar a não-localidade de estados, mas também da região de parâmetros para a qual estamos olhando. Nos arredores de estados com diferentes ranks, a anomalia mostra sua instabilidade.

A figura 2.5b reforça essa observação, ao mesmo tempo que mostra que existe uma família de estados (com $\beta = 0.975$) para os quais o quantificador é monotônico em função de α . Aumentar esse valor levaria a outras curvas monotônicas também.

Isso mostra que a relação entre emaranhamento e não-localidade não é simples, dependendo de muitos aspectos do cenário e das ferramentas que usamos para quantificar essas propriedades. Embora isso possa parecer contra-intuitivo à primeira vista, uma vez que a não-localidade é uma consequência do emaranhamento, já se sabe que emaranhamento e não-localidade são de fato recursos diferentes, e o fato de a não-localidade não ser uma função monotônica de emaranhamento é outra característica que sustenta essa afirmação.

Capítulo 3

Não-localidade com informação apenas de intensidade

A não-localidade de Bell tem sido estudada através dos experimentos de Bell, e até o momento, confirmando as previsões quânticas. Uma considerável maioria de trabalhos para demonstrar a não-localidade de Bell são centrados no caso em que a fonte emite um único par de partículas emaranhadas de cada vez, e assim, boa partes dos experimentos foi projetada de forma a tratar deste caso.

Entretanto, é difícil em muitos experimentos abordar partículas individuais, tornando difícil identificar a presença da não-localidade. Aqui temos que considerar sistemas onde a informação sobre a produção e detecção de um único par emaranhado não está disponível. Ou seja, uma mesma medida é aplicada em todas as partículas e o resultado é somente função do número de partículas, a informação individual da partícula é perdida.

Neste texto, tomaremos como ponto de partida o princípio da localidade macroscópica [67]. O princípio exige que, no limite de muitas partículas ($N \rightarrow \infty$) e sob a hipótese de que os detectores de um sistema bipartido (Alice e Bob) não podem detectar flutuações do número de partículas menores que ordem de \sqrt{N} , as estatísticas macroscópicas não devem violar nenhuma desigualdade de Bell.

Sob a luz deste princípio, fazemos uma análise da violação de uma desigualdade de Bell, fazendo medidas fixas em um número $N > 1$ de partículas e onde os resultados individuais não são possíveis de se observar, somente o resultado coletivo,

codificado por uma estratégia otimizada. Já existem artigos que tratam de cenários de detecção de muitas partículas [68, 69].

3.1 Motivação

A não-localidade de Bell, isto é, violação de desigualdades de Bell [1], é uma das assinaturas mais características da mecânica quântica e tem uma ampla gama de aplicações para comunicação e computação [8]. No entanto, a não-localidade desaparece se:

- (i) As únicas informações experimentais disponíveis para as partes (Alice e Bob) são as intensidades registradas por seus respectivos detectores.
- (ii) As intensidades são produzidas por campos contínuos (ao invés de partículas discretas).
- (iii) As partes só podem medir mudanças nos valores de intensidade da ordem de \sqrt{N} , onde N é o número de partículas.

Para explicar o porque, consideremos o cenário mais simples de Bell: duas partes, cada uma delas com duas opções de medição, $x \in \{1, 2\}$ para Alice e $y \in \{1, 2\}$ para Bob, e cada medida com dois resultados possíveis, $a \in \{0, 1\}$ para medidas de Alice e $b \in \{0, 1\}$ para Bob. Alice e Bob, usando comunicação clássica, podem computar densidades de probabilidade marginal $p(I_{a|x}, I_{b|y})dI_{a|x}dI_{b|y}$, onde $I_{a|x}$ e $I_{b|y}$ estão as intensidades registradas nos detectores de, respectivamente, Alice e Bob. Se as condições (i)-(iii) se mantiverem, então, no limite $N \gg 1$, consistência com a física clássica obriga este conjunto de distribuições marginais a admitir um modelo local de variáveis ocultas para as intensidades. Neste caso, diz-se que as intensidades exibem “localidade macroscópica” [67].

Aqui, investigamos o que acontece quando a condição (i) se mantém mas as condições (ii) e (iii) não se mantêm. Enquanto em um experimento de Bell padrão, toda vez que uma parte escolhe uma configuração de medição detecta uma partícula, como ilustrado na Fig. 3.1(a), neste trabalho assumimos que, ao invés disso, cada parte detecta $N > 1$ partículas. Além disso, assumimos que cada parte só tem

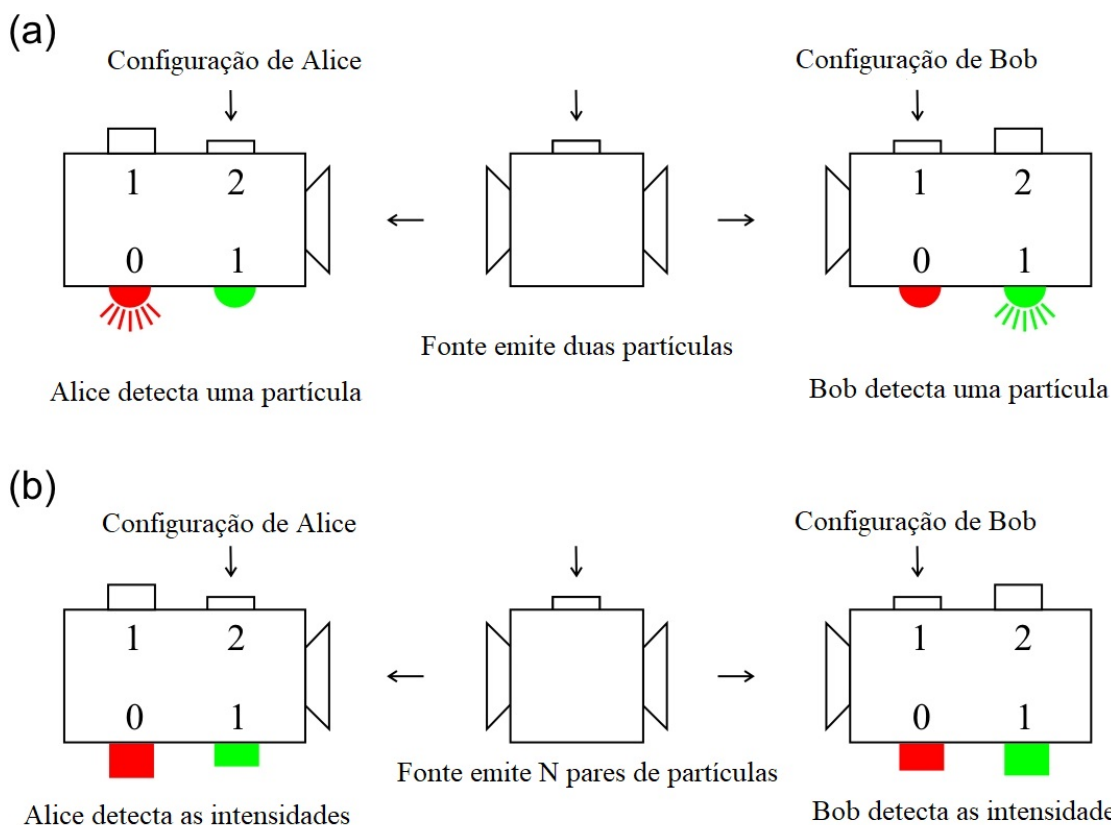


Figura 3.1: (a) Experimento de Bell padrão em que a fonte emite um par de partículas emaranhadas e Alice e Bob detectam uma delas após escolher suas respectivas configurações de medição. (b) Experimento de Bell estudado aqui, no qual a fonte emite N pares de partículas emaranhadas e Alice e Bob só detectam as intensidades produzidas por um fluxo de N partículas após a escolha de suas respectivas configurações de medição. Figura adaptada de [2].

acesso às intensidades que essas N partículas produziram, mas não à ordem em que as partículas chegaram aos detectores. Veja a Fig. 3.1(b). Equivalentemente, mesmo que uma parte tenha detectado as N partículas uma a uma, a ordem em que são detectadas não dá informações sobre a ordem em que foram emitidas pela fonte.

Também assumimos que as partes podem distinguir qualquer pequena diferença de intensidade entre seus dois detectores. O problema específico que abordamos é o que acontece com a violação de uma desigualdade de Bell quando, em cada execução de um experimento de Bell (ou seja, quando Alice escolheu medir x e Bob escolheu para medir y), cada um de Alice e Bob detecta $N > 1$ partículas (em vez de uma única partícula); alguns deles no detector correspondendo a um dos dois resultados possíveis e o restante no outro detector.

Nossa motivação para investigar este problema é dupla. De uma perspectiva fundamental, sabemos que o campo eletromagnético se comporta como feito de pacotes individuais chamados fótons e, portanto, as intensidades podem ser vistas como produzidas por um acúmulo de partículas discretas. Ou seja, sabemos que, de uma perspectiva fundamental, a condição (ii) não se mantém.

Além disso, do ponto de vista prático, há vários cenários nos quais, efetivamente, a única informação experimental disponível para Alice e Bob são as intensidades, como na Fig. 3.1(b), enquanto Alice e Bob podem ainda distinguir pequenas diferenças de intensidades.

3.2 Cenários experimentais

Os exemplos mais relevantes que identificamos são os seguintes:

- (I) Experimentos de Bell onde a fonte utiliza um processo de conversão paramétrica descendente [70] e o cristal não-linear é bombardeado com pulsos fortes, de modo que cada pulso produz N pares de fótons emaranhados em vez de um único par. Aqui, assumimos que os detectores podem coletar todos esses fótons. Isto é possível, utilizando, por exemplo, matrizes especiais de detectores de nanofios [71].
- (II) Experimentos de Bell onde a fonte dos pares emaranhados está se movendo e longe dos detectores. Além disso, pode haver distúrbios durante a propagação das partículas que torna impossível identificar qual partícula de Alice está emaranhada com que partícula de Bob. Por exemplo, isto acontece quando a fonte está oscilando aleatoriamente na direção de propagação das partículas a velocidades superiores às da velocidade de propagação das partículas e/ou quando as partículas se propagam uma velocidade diferente, devido a distúrbios locais. Isto também pode afetar os futuros testes de Bell satélite-terra em que a fonte está no satélite e tanto Alice como Bob estão em terra. Em testes atuais de satélite para satélite, Alice está no satélite com a fonte [72]. Isto também pode ocorrer nos testes Bell com hipotéticas fontes cósmicas de emaranhamento.

(III) Em experimentos de Bell que utilizam fotodetectores híbridos que incorporam células vivas. Por exemplo, o fotorreceptor de haste de células retiradas do olho de um sapo [73]. Ali, cada haste tem um segmento externo que contém moléculas de rodopsina que sofre uma mudança química quando exposto à luz. Isto resulta em um sinal elétrico que é captado pelo sistema nervoso e transmitido para o cérebro. Quando submetido a um fluxo de fótons, cada fóton interage com apenas uma molécula de rodopsina [73]. Se for possível distinguir qual sinal elétrico (o sinal correspondente a 0 ou o correspondente a 1) corresponde a uma intensidade maior, então estamos no caso que estamos considerando. Se essa distinção fosse possível no cérebro, nós poderíamos detectar a não-localidade de Bell usando olhos humanos e sem necessidade de amplificação de emaranhamento (como em [74, 75]).

Mais adiante, vamos discutir um quarto exemplo destinado a testar nossos resultados em um ambiente mais controlado.

3.3 Caso ideal

Consideramos a desigualdade de Bell mais simples, a desigualdade Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) [21], na versão proposta por Zohren e Gill em [76], isto é,

$$S \geq 1, \tag{3.1}$$

com

$$\begin{aligned} S = & p(01|22) + p(10|12) + p(01|11) \\ & + p(11|21) + p(10|21) + p(00|21), \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $p(ab|xy)$ é a probabilidade de obter os resultados a e b para quando Alice e Bob realizam medidas x e y , respectivamente.

No caso de $N = 1$, a máxima violação quântica é

$$S = \frac{3 - \sqrt{2}}{2} \approx 0.793, \quad (3.3)$$

e é alcançada, por exemplo, com o estado

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B), \quad (3.4)$$

onde, por exemplo, $|0\rangle_A$ denota que a partícula de Alice está no estado representado pelo vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $|1\rangle_B$ denota que a partícula de Bob está no estado representado por $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e as seguintes configurações de medição:

$$M_{x=1} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \sigma_x), \quad M_{x=2} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \sigma_y), \quad (3.5a)$$

$$M_{y=1} = \frac{1}{2} \left[\mathbb{1} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sqrt{2}} \right], \quad M_{y=2} = \frac{1}{2} \left[\mathbb{1} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{2}} \right], \quad (3.5b)$$

onde $\mathbb{1}$ denota a matriz identidade e σ_n a matriz de Pauli na direção n . Cada um desses observáveis têm dois possíveis resultados: 0 e 1, correspondente aos autovalores do operador que representa o observável.

Agora vamos considerar o caso no qual, em cada rodada do experimento de Bell, Alice e Bob recebem um número $N > 1$ de partículas toda vez que escolhem uma configuração de medições. N_0 das partículas acabam no detector correspondente ao resultado 0 da medição e $N_1 = N - N_0$ das partículas acabam no detector correspondente ao resultado 1. Não há informações sobre a ordem em que as partículas chegaram. As únicas informações são as intensidades $I_0 = kN_0$ e $I_1 = kN_1$ em cada detector. Usando essas informações, cada uma das partes, sem se comunicar com a outra parte, deve fornecer uma resposta 0 ou 1 baseada no número de partículas que chega em seus detectores. A questão é qual é a estratégia que melhor preserva a não-localidade de Bell.

Depois de verificar todas as alternativas possíveis, descobrimos que uma estratégia ideal é aquela em que a resposta de cada parte é associada a maior in-

tensidade. Ou seja, se $I_0 > I_1$, a resposta da parte é 0, enquanto, se $I_0 \leq I_1$, a resposta da parte é 1.

Então, por exemplo, para calcular $p_N(a'b'|xy)$, definida como a probabilidade de Alice e Bob medirem x e y , respectivamente, e dar como respostas a' e b' com base nas intensidades medidas, após cada uma das partes detectar N partículas, temos que somar as probabilidades $p(ab|xy)$ de todas as maneiras possíveis pelas quais N partículas no lado de Alice e N partículas no lado de Bob podem ter induzido Alice dar como resposta a' e Bob a b' .

Por exemplo, para $N = 2$,

$$p_2(01|xy) = p(00|xy)p(01|xy) + p(01|xy)p(00|xy) + p(01|xy)p(01|xy), \quad (3.6)$$

onde $p(00|xy)p(01|xy)$ é a probabilidade que o primeiro par de partículas acabem no detector 0 para Alice e Bob, enquanto o segundo par termina no detector 0 de Alice e no detector 1 de Bob.

Para N arbitrário,

$$p_N(00|xy) = \sum_{\sum_{i=1}^N a_i < \frac{N}{2}} \sum_{\sum_{j=1}^N b_j < \frac{N}{2}} \prod_{k=1}^N p(a_k b_k | xy), \quad (3.7a)$$

$$p_N(01|xy) = \sum_{\sum_{i=1}^N a_i < \frac{N}{2}} \sum_{\sum_{j=1}^N b_j \geq \frac{N}{2}} \prod_{k=1}^N p(a_k b_k | xy), \quad (3.7b)$$

$$p_N(10|xy) = \sum_{\sum_{i=1}^N a_i \geq \frac{N}{2}} \sum_{\sum_{j=1}^N b_j < \frac{N}{2}} \prod_{k=1}^N p(a_k b_k | xy), \quad (3.7c)$$

$$p_N(11|xy) = \sum_{\sum_{i=1}^N a_i \geq \frac{N}{2}} \sum_{\sum_{j=1}^N b_j \geq \frac{N}{2}} \prod_{k=1}^N p(a_k b_k | xy). \quad (3.7d)$$

Portanto, podemos definir

$$\begin{aligned} S_N &= p_N(01|22) + p_N(10|12) + p_N(01|11) \\ &\quad + p_N(11|21) + p_N(10|21) + p_N(00|21) \end{aligned} \quad (3.8)$$

e calcular a máxima violação quântica da desigualdade de Bell $S_N \geq 1$ como uma

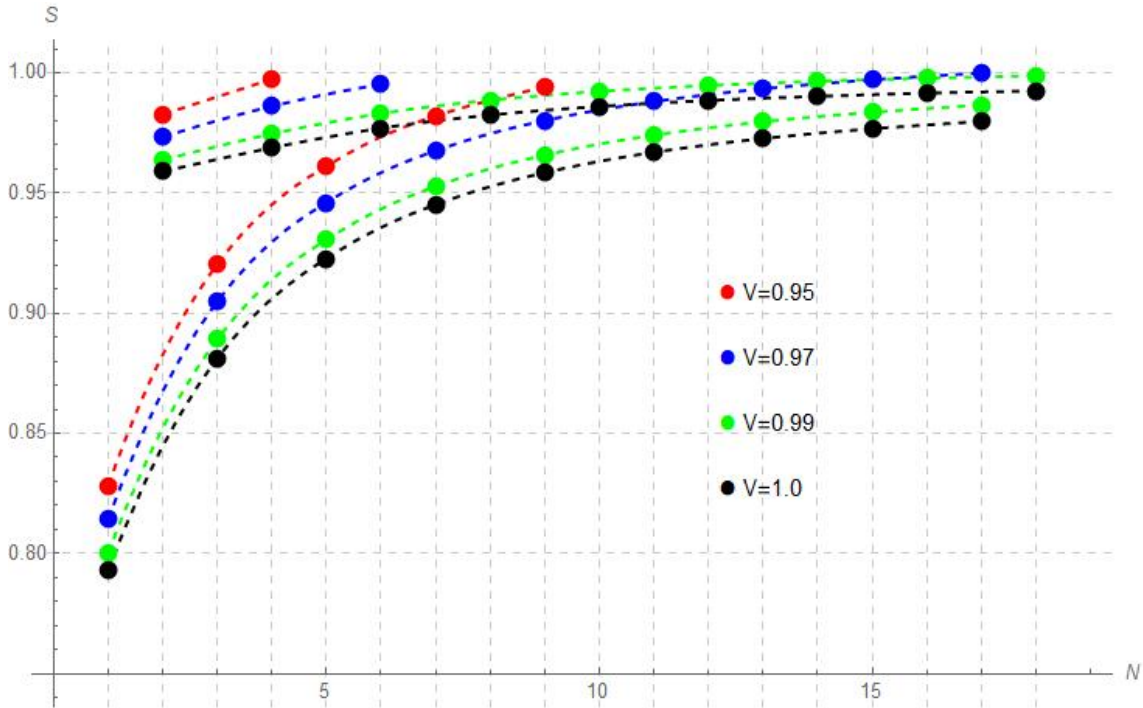


Figura 3.2: Máxima violação quântica da desigualdade de Bell $S_N \geq 1$ como uma função do número N de partículas detectadas por cada parte para estados no formato de (3.9), para diferentes valores de V . Para um dado V , a violação é maior quando N é ímpar. Para $V = 0.95$, a violação desaparece para $N > 9$, se N é ímpar, e para $N > 4$ se N é par. Para $V = 0.97$, a violação desaparece para $N > 17$, se N é ímpar, e para $N > 6$ se N é par. Para $V \geq 0.99$, há sempre violação (apesar de muito pequena) pelo menos até $N = 18$. Obter a máxima violação quântica para valores altos de N requer um poder computacional que ultrapassa nossa capacidade.

função de N . O resultado dos nossos cálculos está apresentado na Fig. 3.2 (pontos pretos).

Encontramos que a máxima violação quântica é sempre obtida para o estado dado pela Eq. (3.4) e para as medições dadas pelas Eqs. (3.5) e depende se N é par ou ímpar. A violação da desigualdade de Bell é maior para N ímpar. Isto é devido ao fato que somente quando N é ímpar, as intensidades em ambos detectores são sempre desiguais, então a estratégia de relacionar a maior intensidade como resposta mantém parcialmente o comportamento quântico. Por outro lado, quando N é par, as intensidades nos dois detectores são às vezes iguais e, então, dar como resposta 1 destrói qualquer correlação quântica e degrada a violação.

3.4 Efeito de ruído

Até agora, assumimos que o estado é perfeito. Aqui, examinamos o caso em que o estado é afetado por uma certa quantidade de ruído branco. Especificamente, assumimos que o estado preparado é

$$\rho = V|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + (1 - V)\frac{\mathbb{1}}{4}, \quad (3.9)$$

onde V , algumas vezes referido como a visibilidade do estado, não é 1. Para experimentos fotônicos mais recentes, é possível $V \geq 0.98$ [77]. Aqui, calculamos a máxima violação quântica para $V = 0.95$, $V = 0.97$, e $V = 0.99$. Os resultados são apresentados na Fig. 3.2 (pontos vermelhos, azuis, e verdes, respectivamente).

A máxima violação quântica é sempre obtida para as medições dadas pelas Eqs. (3.5) e depende se N é par ou ímpar. Um ruído mais alto faz com que a violação desapareça para valores menores de N . Curiosamente, nossos resultados sugerem que, com $V \approx 0.99$, é possível observar experimentalmente uma violação da desigualdade de Bell, mesmo com fluxos de até 15 partículas.

3.5 Detectores ineficientes

Até aqui, temos assumido que os detectores capturam N pares de partículas emitidos por uma fonte. Entretanto, em experimentos reais os detectores somente capturam uma fração das partículas. Então, uma questão interessante é o quão robusta a violação da desigualdade $S_N \geq 1$ é quando algumas das partículas são perdidas mas as partes seguem mantendo a mesma estratégia. Isto é, se uma parte observa $I_0 > I_1$ em seus detectores, então a parte dá a resposta 0, e, se observado $I_0 \leq I_1$, então a parte responde com 1.

Aqui, obtemos a eficiência de detecção mínima η_{\min} necessária para observar violação da desigualdade $S_N \geq 1$ usando a estratégia mencionada acima, como uma função de N . A eficiência de detecção é a razão entre o número de partículas detectadas por um detector e o número de partículas emitidas para esse detector. Admitimos que $V = 1$, todos os detectores têm a mesma eficiência de detecção η , e

não há “dark counts”¹ durante o experimento.

Para $N = 1$, a estratégia descrita acima é equivalente a dar a resposta 1 quando não ocorre detecção. Então, nós temos os seguintes casos:

[1.1] Com probabilidade η^2 , ambas as partes detectam suas partículas. Para esse subensemble, $S_1 = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$.

[1.2] Com probabilidade $\eta(1 - \eta)$, Alice detecta e Bob não. Assim, Bob observa $I_0 = I_1$ e sempre dá a resposta 1. Portanto, para esse subensemble, $S_1 = p_A(0|2) + 0 + p_A(0|1) + p_A(1|2) + 0 + 0 = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{3}{2}$, onde $p_A(0|2)$ é a probabilidade que Alice encontra a partícula no detector 0 (e então resultado 0) quando ela mede 2.

[1.3] Com probabilidade $(1 - \eta)\eta$, Alice não detecta e Bob detecta. Assim, Alice observa $I_0 = I_1$ e sempre dá a resposta 1. Portanto, para esse subensemble, $S_1 = 0 + p_B(0|2) + 0 + p_B(1|1) + p_B(0|1) + 0 = \frac{3}{2}$.

[1.4] Finalmente, com probabilidade $(1 - \eta)^2$, nem Alice nem Bob detectam, então cada um deles sempre dá a resposta 1. Para esse subensemble, $S_1 = 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 = 1$.

Portanto, η_{\min} decorre de exigir que

$$\eta^2 \left(\frac{3 - \sqrt{2}}{2} \right) + 2\eta(1 - \eta)\frac{3}{2} + (1 - \eta)^2 < 1, \quad (3.10)$$

que implica

$$\eta_{\min}(N = 1) = \frac{2}{1 + \sqrt{2}} \approx 0.828. \quad (3.11)$$

Isto é, existe não-localidade de Bell (sem fazer a hipótese de “fair sampling”; veremos mais adiante) se a eficiência de detecção é maior que este valor. Esse valor coincide com o valor obtido para $N = 1$ depois de otimizar todas as estratégias [78].

Vamos agora supor que $N = 2$. Então, temos os seguintes casos:

[2.1] Com probabilidade η^4 , Alice e Bob detectam as duas partículas. Para esse subensemble, $S_2 = \frac{21}{16} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$, onde S_2 é definido na Eq. (3.8).

[2.2] Com probabilidade $2\eta^3(1 - \eta)$, Alice detecta as duas partículas e Bob só detecta uma (e assim, ele dá como resposta a partícula que detectou.). O fator 2

¹Ou seja, não há contagem de fótons que estão no ambiente livre.

vem do fato que a partícula que Bob detecta pode ser o do primeiro par ou a do segundo par. Para calcular o valor de S_2 para esse subensemble, vamos assumir que Bob detecta a primeira partícula mas não a segunda (o valor de S_2 é o mesmo se Bob detecta a segunda mas não a primeira). Então,

$$\begin{aligned}
S_2 &= p(01|22)p_A(0|2) \\
&\quad + p(00|12)p_A(1|1) + p(10|12)p_A(0|1) + p(10|12)p_A(1|1) \\
&\quad + p(01|11)p_A(0|1) \\
&\quad + p(01|21)p_A(1|2) + p(11|21)p_A(0|2) + p(11|21)p_A(1|2) \\
&\quad + p(00|21)p_A(1|2) + p(10|21)p_A(0|2) + p(10|21)p_A(1|2) \\
&\quad + p(00|21)p_A(0|2) \\
&= [p(01|22) + p(00|12) + p(10|12) + p(10|12) \\
&\quad + p(01|11) + p(01|21) + p(11|21) + p(11|21) \\
&\quad + p(00|21) + p(10|21) + p(10|21) + p(00|21)] \frac{1}{2} \\
&= \frac{6 - \sqrt{2}}{4}. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Po exemplo, $p(01|xy)p_A(0|x)$ é a probabilidade de que, para esse subensemble, Alice dá a resposta 0 e Bob resposta 1 quando eles medem x e y , respectivamente. Isto decorre do fato de que Alice somente tem a resposta 0 quando ela encontra as duas partículas no detector 0, e Bob somente a resposta 1 quando ele encontra sua (primeira) partícula no detector 1 (a segunda partícula não é detectada). Similarmente, $p(00|xy)p_A(1|x) + p(10|xy)p_A(0|x) + p(10|xy)p_A(1|x)$ é a probabilidade de que Alice dê a resposta 1 e Bob a resposta 0, já que Alice dá a resposta 1 quando encontra uma ou duas partículas no detector 1, e Bob a resposta 0 apenas quando encontra sua partícula no detector 0 (a segunda partícula não é detectada).

[2.3] Com probabilidade $2\eta^3(1 - \eta)$, Alice detecta uma partícula (e, assim, ela dá como resposta a partícula que encontrou) e Bob detecta as duas partículas. Para calcular o valor de S_2 para esse subensemble, vamos assumir que Alice detecta a primeira partícula mas não a segunda (o valor de S_2 é o mesmo no outro caso).

Então,

$$\begin{aligned}
S_2 &= p(00|22)p_B(1|2) + p(01|22)p_B(0|2) + p(01|22)p_B(1|2) \\
&\quad + p(10|12)p_B(0|2) \\
&\quad + p(00|11)p_B(1|1) + p(01|11)p_B(0|1) + p(01|11)p_B(1|1) \\
&\quad + p(10|21)p_B(1|1) + p(11|21)p_B(0|1) + p(11|21)p_B(1|1) \\
&\quad + p(10|21)p_B(0|1) \\
&\quad + p(00|21)p_B(0|1) \\
&= [p(00|22) + p(01|22) + p(01|22) + p(10|12) \\
&\quad + p(00|11) + p(01|11) + p(01|11) + p(10|21) \\
&\quad + p(11|21) + p(11|21) + p(10|21) + p(00|21)] \frac{1}{2} \\
&= \frac{6 - \sqrt{2}}{4}. \tag{3.13}
\end{aligned}$$

[2.4] Com probabilidade $2\eta^2(1 - \eta)^2$, Alice detecta uma partícula e Bob detecta sua partícula companheira emaranhada para um dos pares, mas nenhum deles detecta a partícula do outro par. Então, eles dão as respostas que os detectores encontraram sua respectiva partícula. Portanto, o valor de S_2 para esse subensemble é $S_2 = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$.

[2.5] Com probabilidade $2\eta^2(1 - \eta)^2$, Alice detecta uma partícula e Bob detecta uma que não está emaranhada com a de Alice. Portanto, uma vez que seus resultados são estatisticamente independentes, o valor de S_2 para esse subensemble é $S_2 = 6 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$.

[2.6] Com probabilidade $\eta^2(1 - \eta)^2$, Alice detecta as duas partículas e Bob nenhuma (e assim ele sempre contesta o resultado 1). Para esse subensemble, $S_2 = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 0 + 0 = \frac{5}{4}$.

[2.7] Com probabilidade $\eta^2(1 - \eta)^2$, Bob detecta as duas partículas e Alice nenhuma (e assim ela sempre dá a resposta 1). Para esse subensemble, $S_2 = 0 + \frac{1}{4} + 0 + \frac{3}{4} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

[2.8] Com probabilidade, $2\eta(1 - \eta)^3$, Alice detecta uma partícula e Bob nenhuma (e assim, como ele observa intensidades iguais, ele dá a resposta 1). Portanto, o

valor de S_2 para esse subensemble é $S_2 = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{3}{2}$.

[2.9] Com probabilidade, $2\eta(1-\eta)^3$, Bob detecta uma partícula e Alice nenhuma (e assim, como ela observa intensidades iguais, ela dá a resposta 1). Portanto, o valor de S_2 para esse subensemble é $S_2 = 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{2}$.

[2.10] Finalmente, com probabilidade, $(1-\eta)^4$, nenhum deles detecta qualquer partícula, então eles dão as respostas 1. O valor de S_2 para esse subensemble é $S_2 = 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 = 1$.

Portanto, η_{\min} decorre de exigir que,

$$\begin{aligned} & \eta^4 \left(\frac{21}{16} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + 4\eta^3(1-\eta) \left(\frac{6-\sqrt{2}}{4} \right) \\ & + 2\eta^2(1-\eta)^2 \left(\frac{3-\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{4} \right) \\ & + [2\eta^2(1-\eta)^2 + 4\eta(1-\eta)^3] \frac{3}{2} \\ & + (1-\eta)^4 < 1, \end{aligned} \tag{3.14}$$

o que implica

$$\eta_{\min}(N=2) = 0.941. \tag{3.15}$$

Similarmente, para o caso $N=3$, encontramos

$$\eta_{\min}(N=3) = 0.905. \tag{3.16}$$

Calcular $\eta_{\min}(N)$ para valores grandes de N torna-se mais complicadas e não é realmente necessário, pois é claro que $\eta_{\min}(N)$ irá aumentando com N .

O problema é que, para experimentos de Bell com $V \geq 0.98$, as maiores eficiências de detecção experimental relatadas são $\eta = 0.77-0.81$ [79, 80]. Portanto, os valores para a eficiência de detecção necessária para observamos a não-localidade de Bell com base nas intensidades produzidas por N partículas são altos demais para o que é possível com a tecnologia atual: $\eta \approx 1$ pode ser conseguida [81, 82], mas ao custo de visibilidades que não são suficientes para a não-localidade de Bell, com base nas intensidades de partículas com $N > 5$.

No entanto, mesmo que a eficiência da detecção não seja suficiente para um teste de Bell sem “loophole”, podemos executar um experimento adotando a premissa de “fair sampling”. Isto é, selecionando as rodadas (execuções) do experimento em que ambas as partes detectam N partículas e assumindo “fair sampling”, ou seja, que as execuções selecionadas são um subconjunto fiel daquelas que seriam obtidas se a eficiência da detecção fosse perfeita. Isso nos permitirá observar experimentalmente a não-localidade de Bell usando apenas intensidades com os equipamentos atuais.

3.6 Proposta experimental

Antes de aplicar os resultados aqui apresentados a qualquer uma das situações (I) - (III) discutidas na Sec. 3.1, seria interessante testar as previsões em um experimento mais controlado. Com esse objetivo em mente, propomos o seguinte teste de Bell modificado:

(a) Suponha uma fonte que possa emitir um número ímpar $N \leq 15$ de pares de fótons emaranhados, com visibilidade $V > 0.98$. Os pares são emitidos um por um, com separação temporal τ entre cada par. Para isso, podemos usar uma fonte de pares de fótons emaranhados em polarização com base em pontos quânticos [83, 84].

(b) No espaço entre a fonte e o dispositivo de medição de Alice, introduzimos divisores de feixe e espelhos de maneira que os fótons possam percorrer caminhos de diferentes comprimentos. Veja detalhes mais adiante. Por outro lado, existe apenas um caminho possível entre a fonte e o dispositivo de medição de Bob.

(c) Para cada uma das medições locais, usamos dois detectores de fóton único, um para cada resultado. Cada um desses detectores deve permitir distinguir dois fótons que chegam com uma diferença de tempo τ . Se selecionarmos adequadamente algumas execuções, não teremos informações de qual fóton de Alice está emaranhado com qual fóton de Bob.

Por exemplo, vamos assumir por simplicidade que $N = 3$ e que os três fótons de Alice são emitidos por uma fonte nos tempos t_0 , $t_0 + \tau$, e $t_0 + 2\tau$. Suponha que cada um desses fótons podem seguir um caminho de comprimento 6τ , ou 7τ , ou 8τ , ou 9τ , ou 10τ . Agora considere as execuções em que um fóton é detectado em 8τ , um

fóton é detectado em 9τ , e um fóton é detectado em 10τ . Nessas execuções, Alice não pode agora saber qual é o fóton de Bob com o qual cada um de seus fótons está emaranhado. Ainda, de acordo com os resultados na Fig. 3.2, se a visibilidade é alta suficiente e adotando a premissa de “fair sampling”, Alice e Bob podem observar uma violação da desigualdade de Bell $S_N \geq 1$ para qualquer $N \leq 15$ (com N ímpar).

Conclusões

Nesta tese, tratamos de quantificar a não-localidade de Bell, primeiro usando uma nova proposta de medida, onde buscamos testar nossa medida em cenários já existentes na literatura e analisamos a anomalia fraca da não-localidade. Também, usando o conceito de localidade macroscópica, calculamos a quantidade de não-localidade de Bell presente em experimentos onde apenas temos informações sobre as intensidades detectadas pelas partes.

Vimos uma maneira alternativa de quantificar a não-localidade de estados com base na não-localidade de Bell de comportamentos [85]. A principal diferença de candidatos anteriores foi a introdução de um quantificador de não-localidade para ponderar cada contribuição de comportamentos no volume não-local.

Um novo grau de liberdade foi então trazido ao tema. Aqui nós exploramos a possibilidade mais simples entre as disponíveis na literatura quando a questão é como comparar duas distribuições de probabilidade quântica: a distância do traço. Provamos que este quantificador possui várias propriedades boas, incluindo sua formulação em termos de programação linear, mas nossas simulações indicaram que não é uma função monotônica do emaranhamento. Mais especificamente, a anomalia fraca da não-localidade persiste. No entanto, o mínimo local para não-localidade com o volume não-local ponderado pelo traço ocorre em um estado diferente do mínimo para o versão não-ponderada, mostrando que a anomalia fraca não é uma característica intrínseca do cenário, mas é dependente da escolha de quantificador. Conjecturamos que essa não-monotonicidade, apesar da coincidência dos máximos, é uma manifestação inevitável da inequivalência intrínseca entre emaranhamento e não-localidade. É um tópico para investigar como seria o comportamento da versão ponderada para diferentes quantificadores Q e se podemos provar que todo quanti-

ficador de não-localidade para estados exibe algum tipo de anomalia. Além disso, sua robustez contra sistemas ruidosos também deve ser testado.

Deve-se notar, no entanto, que na integral que define o volume não-local consideramos apenas medições projetivas. A próxima generalização natural seria considerar o conjunto dos POVM's, mas aparecem duas dificuldades. Primeiro, não há definição natural de medida uniforme para POVM's, o que torna o quantificador fortemente dependente da escolha da medida que optarmos para amostrar as medições. Segundo, resultados numéricos mostram que a probabilidade de encontrar um comportamento não-local ao amostrar sobre o conjunto de POVMs é muito pequeno. De fato, em um primeira tentativa que fizemos usando o teorema da dilatação de Neumark e a medida de Haar no conjunto de unitárias no espaço de Hilbert maior, tipicamente um comportamento não-local é observado em um de dez milhões de configurações para o cenário $(2, 2, 2)$ (mesmo para o estado maximamente emaranhado), uma simulação que, além disso, leva muito mais tempo para terminar.

Esta ideia geral veio com a aparente necessidade de refinar quantificadores conhecidos para extinguir tais anomalias contra a relação monotônica esperada entre não-localidade e emaranhamento de estados. Um ponto interessante para mais pesquisas é descobrir um quantificador de não-localidade para comportamentos que implicam monotonicidade do volume não-local ponderado e/ou apresenta a propriedade desejada pelo menos para medições projetivas, e de preferência é computacionalmente amigável. No entanto, conjecturamos que isso não seja possível. Se nenhuma anomalia permanece, isto é, se a não-localidade aumenta monotonicamente com o emaranhamento, concluiríamos que não-localidade e emaranhamento são recursos equivalentes, o que sabemos não ser verdade. Além disso, sabemos que diferentes quantificadores de não-localidade dão ordenações diferentes no conjunto de comportamentos, o que torna a não-localidade fortemente dependente da função que usamos para quantificá-la.

No limite “macroscópico” de um número infinito de partículas, a violação de desigualdades de Bell desaparece quando a única informação experimental são as intensidades e não podemos distinguir arbitrariamente pequenas diferenças de intensidades. No entanto, aqui mostramos que, para visibilidades alcançáveis nos

atuais experimentos fotônicos de Bell, se o número de fótons que atingem os detectores toda vez que uma medição local é fixada para $N \leq 15$, a não-localidade de Bell pode ser experimentalmente observada, assumindo que as partes possam distinguir pequenas diferenças de intensidade entre seus detectores [2].

Identificamos três cenários nos quais esse resultado pode ser útil: experimentos de Bell baseados em conversão paramétrica descendente bombeada por pulsos fortes, testes de Bell com fontes móveis distantes de pares emaranhados e/ou distúrbios locais na propagação das partículas e experimentos de Bell usando fotodetectores baseados em células vivas, incluindo aqueles que usam olhos humanos como detectores. Além disso, sugerimos uma maneira de testar experimentalmente essa previsão em um ambiente controlado.

Referências

- [1] BELL, J. S. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, APS, v. 1, n. 3, p. 195, 1964.
- [2] PATRICK, A.; CABELLO, A. Bell nonlocality with no information of which particle of alice is entangled with which particle of bob. *arXiv preprint arXiv:2004.13443*, 2020.
- [3] EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, APS, v. 47, n. 10, p. 777, 1935.
- [4] FREEDMAN, S. J.; CLAUSER, J. F. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 28, p. 938–941, Apr 1972. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.28.938>>.
- [5] ASPECT, A.; GRANGIER, P.; ROGER, G. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment: A new violation of bell's inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 49, p. 91–94, Jul 1982. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.91>>.
- [6] REID, M. D. et al. Colloquium: The einstein-podolsky-rosen paradox: From concepts to applications. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 81, p. 1727–1751, Dec 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.1727>>.
- [7] BUHRMAN, H. et al. Nonlocality and communication complexity. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 82, p. 665–698, Mar 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.665>>.

- [8] BRUNNER, N. et al. Bell nonlocality. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 86, p. 419–478, Apr 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.86.419>>.
- [9] GUIMARÃES, G. M. Não-localidade em sistemas quânticos. Universidade Federal de Minas Gerais, 2012.
- [10] BRUNNER, N.; GISIN, N.; SCARANI, V. Entanglement and non-locality are different resources. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 7, n. 1, p. 88, 2005.
- [11] QUINTINO, M. T. et al. Inequivalence of entanglement, steering, and bell nonlocality for general measurements. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 92, p. 032107, Sep 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.92.032107>>.
- [12] AO, F. G. S. L. B.; GOUR, G. Reversible framework for quantum resource theories. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 115, p. 070503, Aug 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.070503>>.
- [13] VEDRAL, V.; PLENIO, M. B. Entanglement measures and purification procedures. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 57, p. 1619–1633, Mar 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.57.1619>>.
- [14] BRANDAO, F. G.; PLENIO, M. B. Entanglement theory and the second law of thermodynamics. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 4, n. 11, p. 873–877, 2008.
- [15] BAUMGRATZ, T.; CRAMER, M.; PLENIO, M. B. Quantifying coherence. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 113, p. 140401, Sep 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.140401>>.
- [16] GALLEGO, R.; AOLITA, L. Resource theory of steering. *Phys. Rev. X*, American Physical Society, v. 5, p. 041008, Oct 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.5.041008>>.

- [17] AMARAL, B. et al. Noncontextual wirings. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 120, p. 130403, Mar 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.130403>>.
- [18] GALLEGO, R. et al. Operational framework for nonlocality. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 109, p. 070401, Aug 2012. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.070401>>.
- [19] GALLEGO, R.; AOLITA, L. Nonlocality free wirings and the distinguishability between bell boxes. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 95, p. 032118, Mar 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.95.032118>>.
- [20] VICENTE, J. I. D. On nonlocality as a resource theory and nonlocality measures. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 47, n. 42, p. 424017, 2014.
- [21] CLAUSER, J. F. et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 23, p. 880–884, Oct 1969. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.880>>.
- [22] POPESCU, S.; ROHRLICH, D. Quantum nonlocality as an axiom. *Foundations of Physics*, Springer, v. 24, n. 3, p. 379–385, 1994. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02058098>>.
- [23] CIREL'SON, B. S. Quantum generalizations of bell's inequality. *Letters in Mathematical Physics*, Springer, v. 4, n. 2, p. 93–100, 1980.
- [24] BRUNNER, N. et al. Bell nonlocality. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 86, p. 419–478, Apr 2014.
- [25] CHAVES, R. et al. Unifying framework for relaxations of the causal assumptions in Bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 114, p. 140403, Apr 2015. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.140403>>.

- [26] FITZI, M. et al. The non-locality of n noisy popescu–rohrlich boxes. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 43, n. 46, p. 465305, 2010. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1751-8121/43/i=46/a=465305>>.
- [27] ABRAMSKY, S.; BARBOSA, R. S.; MANSFIELD, S. Quantifying contextuality via linear programming. In: *Proceedings of the 13th International Conference on Quantum Physics and Logic (QPL 2016)*. [S.l.: s.n.], 2016.
- [28] ROSIER, A. de et al. Multipartite nonlocality and random measurements. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 96, p. 012101, Jul 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.96.012101>>.
- [29] GOH, K. T. et al. Geometry of the set of quantum correlations. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 97, p. 022104, Feb 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.97.022104>>.
- [30] BRITO, S. G. A.; AMARAL, B.; CHAVES, R. Quantifying bell nonlocality with the trace distance. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 97, p. 022111, Feb 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.97.022111>>.
- [31] AMARAL, B. Resource theory of contextuality. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, The Royal Society Publishing, v. 377, n. 2157, p. 20190010, 2019.
- [32] HORODECKI, R. et al. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 81, p. 865–942, Jun 2009. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.865>>.
- [33] GOUR, G.; SPEKKENS, R. W. The resource theory of quantum reference frames: manipulations and monotones. *New Journal of Physics*, v. 10, n. 3, p. 033023, 2008. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1367-2630/10/i=3/a=033023>>.
- [34] AO, F. G. S. L. B. et al. Resource theory of quantum states out of thermal equilibrium. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 111, p. 250404, Dec 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.250404>>.

- [35] WINTER, A.; YANG, D. Operational resource theory of coherence. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 116, p. 120404, Mar 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.120404>>.
- [36] COECKE, B.; FRITZ, T.; SPEKKENS, R. W. A mathematical theory of resources. *Information and Computation*, v. 250, p. 59 – 86, 2016. ISSN 0890-5401. Quantum Physics and Logic. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0890540116000353>>.
- [37] ABRAMSKY, S.; BARBOSA, R. S.; MANSFIELD, S. Contextual fraction as a measure of contextuality. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 119, p. 050504, Aug 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.050504>>.
- [38] WERNER, R. F. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 40, p. 4277–4281, Oct 1989. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.40.4277>>.
- [39] ACÍN, A. et al. Quantum nonlocality in two three-level systems. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 65, p. 052325, May 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.052325>>.
- [40] ROSIER, A. de et al. Multipartite nonlocality and random measurements. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 96, p. 012101, Jul 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.96.012101>>.
- [41] EBERHARD, P. H. Background level and counter efficiencies required for a loophole-free Einstein-Podolsky-Rosen experiment. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 47, p. R747–R750, Feb 1993. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.47.R747>>.
- [42] TONER, B. F.; BACON, D. Communication cost of simulating bell correlations. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 91, p. 187904, Oct 2003. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.187904>>.

- [43] PIRONIO, S. Violations of Bell inequalities as lower bounds on the communication cost of nonlocal correlations. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 68, p. 062102, Dec 2003. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.68.062102>>.
- [44] DAM, W. V.; GILL, R. D.; GRUNWALD, P. D. The statistical strength of nonlocality proofs. *IEEE Transactions on Information Theory*, IEEE, v. 51, n. 8, p. 2812–2835, 2005. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/1468301/>>.
- [45] ACÍN, A.; GILL, R.; GISIN, N. Optimal Bell tests do not require maximally entangled states. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 95, p. 210402, Nov 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.210402>>.
- [46] JUNGE, M. et al. Operator space theory: A natural framework for Bell inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 104, p. 170405, Apr 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.170405>>.
- [47] HALL, M. J. W. Relaxed Bell inequalities and Kochen-Specker theorems. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 84, p. 022102, Aug 2011. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.022102>>.
- [48] CHAVES, R. et al. Multipartite quantum nonlocality under local decoherence. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 86, p. 012108, Jul 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.012108>>.
- [49] FONSECA, E. A.; PARISIO, F. Measure of nonlocality which is maximal for maximally entangled qutrits. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 92, p. 030101, Sep 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.92.030101>>.
- [50] RINGBAUER, M. et al. Experimental test of nonlocal causality. *Science Advances*, American Association for the Advancement of Science, v. 2, n. 8, 2016. Disponível em: <<http://advances.sciencemag.org/content/2/8/e1600162>>.

- [51] MONTINA, A.; WOLF, S. Information-based measure of nonlocality. *New Journal of Physics*, v. 18, n. 1, p. 013035, 2016. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1367-2630/18/i=1/a=013035>>.
- [52] BRASK, J. B.; CHAVES, R. Bell scenarios with communication. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 50, n. 9, p. 094001, 2017. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1751-8121/50/i=9/a=094001>>.
- [53] BRUNNER, N.; GISIN, N.; SCARANI, V. Entanglement and non-locality are different resources. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 7, p. 88–88, apr 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1367-2630/7/1/088>>.
- [54] BARASIŃSKI, A.; NOWOTARSKI, M. Volume of violation of bell-type inequalities as a measure of nonlocality. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 98, p. 022132, Aug 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.98.022132>>.
- [55] KASZLIKOWSKI, D. et al. Violations of local realism by two entangled N -dimensional systems are stronger than for two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 85, p. 4418–4421, Nov 2000. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.4418>>.
- [56] LASKOWSKI, W.; RYU, J.; ŻUKOWSKI, M. Noise resistance of the violation of local causality for pure three-qutrit entangled states. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 47, n. 42, p. 424019, oct 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/42/424019>>.
- [57] CLAUSER, J. F. et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 23, p. 880–884, Oct 1969. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.880>>.
- [58] LIPINSKA, V. et al. Towards an equivalence between maximal entanglement and maximal quantum nonlocality. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 20, n. 6, p. 063043, 2018.

- [59] FONSECA, A. et al. Survey on the bell nonlocality of a pair of entangled qudits. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 98, p. 042105, Oct 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.98.042105>>.
- [60] ROSIER, A. de et al. Strength and typicality of nonlocality in multisetting and multipartite bell scenarios. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 101, p. 012116, Jan 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.101.012116>>.
- [61] BARASIŃSKI, A. et al. Experimentally friendly approach towards nonlocal correlations in multisetting N-partite Bell scenarios. *Quantum*, Verein zur Förderung des Open Access Publizierens in den Quantenwissenschaften, v. 5, p. 430, abr. 2021. ISSN 2521-327X. Disponível em: <<https://doi.org/10.22331/q-2021-04-14-430>>.
- [62] MÉTHOT, A. A.; SCARANI, V. An anomaly of non-locality. *Quantum Info. Comput.*, Rinton Press, Incorporated, Paramus, NJ, v. 7, n. 1, p. 157–170, jan. 2007. ISSN 1533-7146.
- [63] COLLINS, D. et al. Bell inequalities for arbitrarily high-dimensional systems. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 88, p. 040404, Jan 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.040404>>.
- [64] LIANG, Y.-C. et al. Nonclassical correlations from randomly chosen local measurements. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 104, p. 050401, Feb 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.050401>>.
- [65] PARISIO, F. Analytic quantification of the singlet nonlocality for the first bell inequality. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 93, p. 032103, Mar 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.032103>>.
- [66] GISIN, N. Bell's inequality holds for all non-product states. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 154, n. 5-6, p. 201–202, 1991.

- [67] NAVASCUÉS, M.; WUNDERLICH, H. A glance beyond the quantum model. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society Publishing, v. 466, n. 2115, p. 881–890, 2010.
- [68] BANCAL, J.-D. et al. Testing a bell inequality in multipair scenarios. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 78, p. 062110, Dec 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.062110>>.
- [69] POH, H. S. et al. Experimental many-pairs nonlocality. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 96, p. 022101, Aug 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.96.022101>>.
- [70] KWIAT, P. G. et al. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 75, p. 4337–4341, Dec 1995. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.4337>>.
- [71] MIGDALL, A. et al. *Single-photon generation and detection: physics and applications*. [S.l.]: Academic Press, 2013.
- [72] YIN, J. et al. Satellite-to-ground entanglement-based quantum key distribution. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 119, p. 200501, Nov 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.200501>>.
- [73] SIM, N. et al. Measurement of photon statistics with live photoreceptor cells. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 109, p. 113601, Sep 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.113601>>.
- [74] SEKATSKI, P. et al. Towards quantum experiments with human eyes as detectors based on cloning via stimulated emission. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 103, p. 113601, Sep 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.113601>>.
- [75] POMARICO, E. et al. Experimental amplification of an entangled photon: what if the detection loophole is ignored? *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 13, n. 6, p. 063031, 2011.

- [76] ZOHREN, S.; GILL, R. D. Maximal violation of the collins-gisin-lindenmassar-popescu inequality for infinite dimensional states. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 100, p. 120406, Mar 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.120406>>.
- [77] POH, H. S. et al. Approaching tsirelson's bound in a photon pair experiment. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 115, p. 180408, Oct 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.180408>>.
- [78] GARG, A.; MERMIN, N. D. Detector inefficiencies in the einstein-podolsky-rosen experiment. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 35, p. 3831–3835, Jun 1987. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.35.3831>>.
- [79] SHALM, L. K. et al. Device-independent randomness expansion with entangled photons. *arXiv preprint arXiv:1912.11158*, 2019.
- [80] LIU, W.-Z. et al. Device-independent randomness expansion against quantum side information. *arXiv preprint arXiv:1912.11159*, 2019.
- [81] HENSEN, B. et al. Loophole-free bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 526, n. 7575, p. 682–686, 2015.
- [82] ROSENFELD, W. et al. Event-ready bell test using entangled atoms simultaneously closing detection and locality loopholes. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 119, p. 010402, Jul 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.010402>>.
- [83] JAYAKUMAR, H. et al. Deterministic photon pairs and coherent optical control of a single quantum dot. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 110, p. 135505, Mar 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.135505>>.

- [84] HUBER, D. et al. Highly indistinguishable and strongly entangled photons from symmetric gaas quantum dots. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 8, n. 1, p. 1–7, 2017.
- [85] PATRICK, A. et al. From nonlocality quantifiers for behaviors to nonlocality quantifiers for states. *arXiv preprint arXiv:2204.06537*, 2022.