

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física

# Correções Radiativas na Teoria de Chern-Simons Calculadas em um Gauge Interpolante

Fernando Teixeira da Silva Filho

## BANCA EXAMINADORA

Prof.Dr. Adilson José da Silva (IFUSP) - Orientador

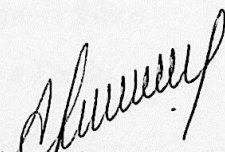
Prof.Dr. Adriano Antonio Natale (IFT-UNESP)

Prof.Dr. Fernando T. C. Brandt (IFUSP)



Dissertação apresentada  
para a obtenção do grau  
de Mestre em Ciências.

Agosto de 2002

  
Prof. Armando Corbani Ferraz  
Presidente da Comissão de Pós Graduação

INSTITUTO DE FÍSICA  
Serviço de Biblioteca e Informação  
Tombo: 3896  
ex. 1

S 50.47  
S 586 co  
M  
2002  
Ex. 1

SY8NO 125 7758

**FICHA CATALOGRÁFICA**  
**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação**  
**do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Silva Filho, Fernando Teixeira da

Correções Radiativas na Teoria de Chernsimons  
Calculadas em um Gauge Interpolante.  
São Paulo 2002.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo  
Instituto de Física ~ Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Adilson José da Silva  
Área de Concentração: Física de Partículas e Campos

Unitermos: 1. Teoria de Campos; 2. Chern–Simons;  
3. Renormalização; 4. Momento Magnético.

USP/IF/SBI-041/2002

2002  
132

# AGRADECIMENTOS

À Prof. Dr. Adilson José de Silva pela orientação, auxílio, competência e entusiasmo.  
À Prof. Dr. Marcelo César Camargo Gomes, com quem aprendi as técnicas básicas da  
fórmula de integração dos campos e ainda continue aprendendo.  
À Prof. Dr. Armando Cabral Feres pela oportuna e esclarecedora orientação.  
À Prof. Dr. George Alexopoulos pelo encorajamento e paciência durante a redação deste trabalho.

## Conteúdo

Introdução	1
Capítulo 1 - O campo de Gauss e o Teorema de Gauss	2
Capítulo 2 - O campo de Dirac $\delta(x)$ e o Teorema de Dirac	14
Capítulo 3 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	22
Capítulo 4 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	26
Capítulo 5 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	32
Capítulo 6 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	38
Capítulo 7 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	44
Capítulo 8 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	50
Capítulo 9 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	56
Capítulo 10 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	62
Capítulo 11 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	68
Capítulo 12 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	74
Capítulo 13 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	80
Capítulo 14 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	86
Capítulo 15 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	92
Capítulo 16 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	98
Capítulo 17 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	104
Capítulo 18 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	110
Capítulo 19 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	116
Capítulo 20 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	122
Capítulo 21 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	128
Capítulo 22 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	134
Capítulo 23 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	140
Capítulo 24 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	146
Capítulo 25 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	152
Capítulo 26 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	158
Capítulo 27 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	164
Capítulo 28 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	170
Capítulo 29 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	176
Capítulo 30 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	182
Capítulo 31 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	188
Capítulo 32 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	194
Capítulo 33 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	200
Capítulo 34 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	206
Capítulo 35 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	212
Capítulo 36 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	218
Capítulo 37 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	224
Capítulo 38 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	230
Capítulo 39 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	236
Capítulo 40 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	242
Capítulo 41 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	248
Capítulo 42 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	254
Capítulo 43 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	260
Capítulo 44 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	266
Capítulo 45 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	272
Capítulo 46 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	278
Capítulo 47 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	284
Capítulo 48 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	290
Capítulo 49 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	296
Capítulo 50 - O campo de Dirac e o Teorema de Dirac	302

Dedico aos meus pais,  
Fernando e Jenny,  
e aos meus filhos  
André e Paulo.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Adilson José da Silva pela orientação amigável, competente e estimulante.

Ao Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes, com quem aprendi as primeiras lições da Teoria Quântica dos Campos, e ainda continuo aprendendo.

Ao Prof. Dr. Armando Corbani Ferraz pela oportunidade concedida.

À Geny Aleixo pelo companheirismo e paciência durante a realização deste trabalho.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>O Campo de Gauge de Chern-Simons</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>O Campo de Dirac em (2+1) Dimensões</b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>Apresentação do Modelo e das Regras de Feynman</b>	<b>20</b>
<b>5</b>	<b>Correções Radiativas</b>	<b>26</b>
5.1	Correção de Auto-Energia do Elétron . . . . .	27
5.2	Correção de Vértice . . . . .	31
5.3	Correção devida à Polarização do Vácuo . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Renormalização e Cálculo do Momento Magnético Anômalo</b>	<b>46</b>
6.1	Renormalização . . . . .	46
6.2	Cálculo do Momento Magnético Anômalo . . . . .	52
6.3	Renormalização do Tensor de Polarização do Vácuo . . . . .	54
<b>A</b>	<b>Cálculo do Momento Magnético do Elétron na Teoria de Dirac</b>	<b>57</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>60</b>

## RESUMO

Nesta dissertação nós investigamos o modelo de um campo fermiônico interagindo com o campo de gauge de Chern-Simons, utilizando um termo de fixação de gauge não covariante dado por  $\mathcal{L}_{FG} = -1/2\lambda (\alpha\partial_0 A^0 - \nabla \cdot \mathbf{A})^2$ . A variação contínua do parâmetro interpolante  $\alpha$  entre 0 e 1 reproduz nestes limites o gauge não covariante de Coulomb e o gauge covariante de Lorentz. Calculamos as correções radiativas na aproximação de um loop e determinamos o valor do momento magnético anômalo.

## ABSTRACT

In this dissertation we investigate the model of a fermionic field interacting with a gauge Chern-Simons field, with a noncovariant gauge fixing term of the form  $\mathcal{L}_{FG} = -1/2\lambda (\alpha\partial_0 A^0 - \nabla \cdot \mathbf{A})^2$ , where  $\alpha$  is a free parameter. The continuous variation of  $\alpha$  between 0 and 1 bring us from the noncovariant gauge of Coulomb to the covariant Lorentz one. Radiative corrections to the magnetic moment of the fermion is calculated in one loop and shown that different Feynman graphs contribute to the physical result in the Coulomb or the Lorentz gauge.

# Capítulo 1

## Introdução

É bem sabido que os resultados físicos da eletrodinâmica quântica, como em qualquer teoria de gauge, são invariantes de gauge. No entanto, os cálculos em si são dependentes do gauge adotado.

O que despertou o nosso interesse para a realização deste trabalho é que, quando calculamos as correções radiativas para a determinação do momento magnético anômalo do elétron, as contribuições provenientes dos diagramas de Feynman são dependentes do gauge adotado. Tanto para o caso de um campo fermiônico interagindo com o campo de gauge de Chern-Simons como no caso de um campo fermiônico interagindo com o campo de gauge de Maxwell, as correções radiativas são diferentes [7][8]. Especificamente, quando fazemos os cálculos em um gauge covariante (Lorentz), com o termo de fixação de gauge dado por  $\mathcal{L}_{FG} = -1/2\lambda (\partial_\mu A^\mu)^2$ , para ambos os casos a única contribuição para o cálculo do momento magnético anômalo vem do diagrama de correção de vértice, enquanto que se adotarmos um gauge não covariante (Coulomb), dado por  $\mathcal{L}_{FG} = -1/2\lambda (\nabla \cdot \mathbf{A})^2$  temos que considerar, além da contribuição do diagrama de vértice, as contribuições provenientes da inserção do diagrama de autoenergia do férmion nas linhas externas. Com o objetivo de tentarmos entender melhor a origem dessas diferentes contribuições, vamos realizar os cálculos adotando uma lagrangiana de fixação de gauge com um parâmetro interpolante,

dada por:

$$\mathcal{L}_{FG} = -\frac{1}{2\lambda} (\alpha\partial_0 A^0 + \nabla \cdot \mathbf{A})^2 \quad (1.1)$$

Variando parâmetro  $\alpha$  continuamente entre 0 e 1, reconstituimos para os valores limites os termos de fixação de gauge não covariante e covariante, respectivamente.

No capítulo 2 apresentamos o campo de gauge de Chern-Simons, onde procuramos evidenciar seus aspectos mais importantes para a elaboração deste trabalho. Apresentamos também o cálculo do propagador do campo de gauge com o termo de fixação de gauge apresentado em (1.1). No capítulo 3 apresentamos do campo de Dirac em (2+1)D onde novamente, sem pretendermos esgotar o assunto, apresentamos os seus aspectos mais relevantes para o nosso trabalho. No capítulo 4 apresentamos o modelo da teoria que detalharemos e estabelecemos as regras de Feynman no espaço dos momentos para o cálculo das correções radiativas na aproximação de um loop. No capítulo 5 apresentamos com detalhe o cálculo das correções radiativas e no capítulo 6 fazemos a renormalização da teoria, concluindo com o cálculo do momento magnético anômalo do elétron.

Neste trabalho adotaremos o tensor métrico  $g^{\mu\nu}$  definido como  $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = 1$ . Nas equações que envolvem grandezas vetoriais ou tensoriais os índices representados por letras gregas indicam que os mesmos podem tomar valores 0, 1 e 2, enquanto que os índices representados por letras latinas significam que os mesmos podem tomar os valores 1 e 2.

Como trabalharemos com uma teoria abeliana, os fantasmas de Faddeev-Popov induzidos pelo termo de fixação de gauge não se acoplam aos campos de gauge e de matéria, podendo portanto ser esquecidos nos cálculos.



## Capítulo 2

# O Campo de Gauge de Chern-Simons

Teorias de campos de gauge em duas dimensões espaciais não se limitam a uma redução dimensional das teorias em tres dimensões, a saber a teoria abeliana de Maxwell e as não abelianas de Yang-Mills. Novas teorias completamente diferentes destas existem. Se nos restringirmos às teorias abelianas, além da teoria de Maxwell em (2+1)D (duas dimensões espaciais + tempo), obtida pela redução dimensional da teoria de Maxwell em (3+1)D, uma nova teoria pode ser construída: A Teoria de Chern-Simons, que se mostrou interessante não só pela novidade teórica como também pela sua aplicação prática em alguns fenômenos planares da matéria condensada como, por exemplo, o efeito Hall quântico fracionário [1].

Com o objetivo de enfatizar as novidades apresentadas na teoria de Chern-Simons, vamos apresentar inicialmente a teoria de gauge de Maxwell em (2+1)D

A teoria de gauge de Maxwell é definida em termos do potencial de gauge  $A^\mu = (A^0, A^j)$ , onde  $A^0$  é o potencial escalar e  $A^j$  são as componentes do potencial vetor. A lagrangiana do campo de Maxwell livre, isto é, numa região do espaço sem a presença de correntes de matéria, é dada por

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor anti-simétrico do campo eletromagnético. Se fizermos uma transformação de gauge

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (2.2)$$

onde  $\Lambda(x)$  é uma função escalar arbitrária, teremos que  $F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = F_{\mu\nu}$ , implicando que  $\mathcal{L}_M(A_\mu, A_\nu) = \mathcal{L}_M(A'_\mu, A'_\nu)$ , ou seja, a lagrangiana de Maxwell é invariante sob uma transformação de gauge e, conseqüentemente, as equações de movimento de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu A_\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.3)$$

são invariantes de gauge.

Vamos introduzir o tensor completamente anti-simétrico de Levi-Civita  $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ , para o qual adotamos a definição  $\epsilon^{012} = \epsilon_{012} = 1$ , e também definimos  $\epsilon^{ij} \equiv \epsilon^{0ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ). Desta forma podemos escrever explicitamente o campo magnético  $\mathbf{B}$  e o campo elétrico  $\mathbf{E}$  como

$$B = F^{12} \equiv \epsilon^{ij} \partial_i A_j, \quad (2.4)$$

$$E^i = F^{0i} \equiv -\partial_0 A_i - \partial_i A_0 \quad (i = 1, 2), \quad (2.5)$$

o que nos mostra que em (2+1) dimensões o campo magnético é um pseudo escalar, enquanto que em (3+1) dimensões  $B^i = (\nabla \times \mathbf{A})^i \equiv B^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ) é um pseudo vetor. Para o campo elétrico vemos que a única diferença em (2+1) dimensões é que  $E^i = -\nabla^i A^0 - \partial A^i / \partial t \equiv E^i = -\partial_0 A_i - \partial_i A_0$  é um vetor bidimensional. Essas são as diferenças quando fazemos a redução dimensional da teoria de Maxwell, de (3+1)

dimensões para (2+1) dimensões.

No caso em que consideramos o campo de Maxwell interagindo com uma corrente de matéria  $J^\mu(x) \equiv (\rho, \mathbf{J})$  que satisfaz a equação da continuidade

$$\partial_\mu J^\mu \equiv \partial\rho/\partial t - \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.6)$$

a lagrangiana é dada por  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{INT}$ , onde  $\mathcal{L}_{INT} = -A_\mu J^\mu$ , de modo que temos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu. \quad (2.7)$$

Já verificamos que  $\mathcal{L}_M$  é invariante para a transformação de gauge (2.2). Para  $\mathcal{L}_{INT}$  temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{INT}(A'_\mu) &= -A'_\mu J^\mu, \\ &= -(A_\mu + \partial_\mu \Lambda) J^\mu, \\ &= -A_\mu J^\mu - (\partial_\mu \Lambda) J^\mu, \\ &= \mathcal{L}_{INT}(A_\mu) - \partial_\mu (\Lambda J^\mu), \end{aligned}$$

o que nos mostra que  $\delta\mathcal{L}_{INT} = -\partial_\mu (\Lambda J^\mu)$ , isto é, varia por uma divergência. Se pudermos desprezar termos de superfície, o que significa considerar que a interação entre o campo de Maxwell e o campo de matéria ocorre numa região finita do espaço ( $J^\mu \rightarrow 0$  para  $x \rightarrow \infty$ ), teremos que a ação  $\mathcal{S} = \int d^3x \mathcal{L}$  é invariante sob a transformação (2.2).

As equações de Euler-Lagrange de (2.7) são dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (2.8)$$

Observemos que, em decorrência da anti-simetria de  $F^{\mu\nu}$ , temos que  $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu J^\nu = 0$ , consistente com a conservação da corrente.

Escrevendo as equações de movimento (2.8) em termos de suas componentes obtemos

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} \partial_i E^j + \partial_0 B &= 0, \\ \epsilon_{ij} \partial_j B - \partial_0 E^i &= J^i, \\ \partial_i E^i &= J^0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

As equações apresentadas em (2.9) mostram que, tanto em (3+1) dimensões como em (2+1) dimensões,  $(\mathbf{E}$  e  $B$ ) satisfazem equações diferenciais, implicando que o campo de Maxwell é um campo propagante, isto é, assume valores não nulos fora da região onde se localizam suas fontes. É importante observar que mesmo na teoria livre de Maxwell temos soluções além da solução trivial  $\mathbf{E} = 0$  e  $B = 0$ , que corresponderiam à propagação de ondas.

A teoria de Chern-Simons é uma teoria planar totalmente diferente da teoria de Maxwell planar, sendo definida a partir da lagrangiana

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\theta}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \equiv \frac{\theta}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho}, \quad (2.10)$$

onde  $\theta$  é o parâmetro de Chern-Simons.

As equações de movimento  $\partial \mathcal{L}_{CS} / \partial A_\nu - \partial_\mu \partial \mathcal{L}_{CS} / \partial \partial_\mu A_\nu = 0$  tem como solução  $F^{\mu\nu} = 0$ , ou seja, para a teoria livre de Chern-Simons temos somente a solução trivial, o que a torna desinteressante. No entanto, esse quadro se modifica quando consideramos o campo de Chern-Simons interagindo com uma corrente de matéria  $J^\mu$  que, como anteriormente, obedece à equação (2.6). Para tanto, vamos considerar uma teoria descrita pela lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{CS} + \mathcal{L}_{INT} \\ &= \frac{\theta}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho - A_\mu J^\mu \end{aligned} \quad (2.11)$$

Inicialmente verificamos que sob a transformação de gauge (2.2), (2.11) se modifica como

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{CS} &= \mathcal{L}_{CS}(A'_\mu, A'_\rho) - \mathcal{L}_{CS}(A_\mu, A_\rho) \\ &= \frac{\theta}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) \partial_\nu (A_\rho + \partial_\rho \Lambda) - (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) J^\mu \\ &\quad - \frac{\theta}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho + A_\mu J^\mu \\ &= \partial_\mu \left[ \Lambda \left( \frac{\theta}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho + J^\mu \right) \right], \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde usamos o fato de que o produto dos operadores  $\partial_\mu \partial_\rho$  e  $\partial_\mu \partial_\nu$  é simétrico e resultam numa contribuição nula quando contraídos com  $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ , além de aplicarmos (2.6). O resultado

apresentado em (2.12) mostra que a lagrangiana de Chern-Simons não é invariante sob uma transformação de gauge, mas se também pudermos desprezar os termos de superfície a ação de Chern-Simons  $S_{CS} = \int d^3x \mathcal{L}_{CS}$  é invariante de gauge, o que se reflete no fato de que as equações de Euler Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{CS}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{CS}}{\partial \partial_\mu A_\nu} &= 0 \quad \rightarrow \\ \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho &= \frac{1}{\theta} J^\mu \quad \rightarrow \quad \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = \frac{2}{\theta} J^\mu \quad \rightarrow \quad F_{\mu\nu} = \frac{1}{\theta} \epsilon_{\mu\nu\rho} J^\rho \end{aligned} \quad (2.13)$$

são invariantes de gauge [3]. Observemos também que  $\partial_\mu [\theta \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho] = \partial_\mu J^\mu = 0$ , em concordância com (2.6).

Vamos inicialmente apresentar alguns aspectos da teoria quando consideramos o acoplamento com campos de matéria (escalares carregados ou férmions). Escrevendo (2.13) em termos de suas componentes obtemos

$$E_j = -\frac{1}{\theta} \epsilon_{jk} J^k, \quad (2.14)$$

$$B = \frac{1}{\theta} \rho \quad (2.15)$$

A equação (2.14) nos mostra que mostra que as componentes do campo elétrico  $\mathbf{E}$  são localmente proporcionais às componentes transversais da corrente  $\mathbf{J}$ , e da mesma forma a equação (2.15) nos mostra que o campo magnético é localmente proporcional à densidade de carga, com o termo de proporcionalidade dado pelo inverso da constante de Chern-Simons em ambos os casos.

Uma característica importante dessas equações é seu caráter algébrico, não diferencial, e uma consequência imediata é que, diferentemente da teoria de Maxwell, os campos  $\mathbf{E}$  e  $B$  são não propagantes, isto é, somente são não nulos nos pontos do espaço onde suas fontes ( $\mathbf{J}$  e  $\rho$ ) são não nulas.

Outro aspecto interessante da teoria de Chern-Simons é quando consideramos a sua combinação com outros campos de gauge. Um exemplo ilustrativo é a teoria de Maxwell-

Chern-Simons , descrita pela lagrangiana

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{CS} \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

onde o parâmetro  $\theta$  tem a dimensão de massa. As equações de movimento de (2.16) são dadas por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{2}\epsilon^{\nu\sigma\rho}F_{\sigma\rho} = 0 \tag{2.17}$$

que descreve a propagação de um grau de liberdade transverso com massa  $m_{MCS} = \theta$ , o que deu origem à terminologia “teoria de gauge topologicamente massiva” [2]. Quando calculamos o propagador deste campo de gauge no espaço dos momentos adotando o termo de fixação de gauge  $\mathcal{L}_{FG} = -1/2\lambda(\partial_\mu A^\mu)^2$ , obtemos [3], [4]

$$\Delta^{\mu\nu}(k) = \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 - \theta^2} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2(k^2 - \theta^2)} - i\frac{\theta\epsilon^{\mu\nu\rho}k_\rho}{k^2(k^2 - \theta^2)} + \lambda\frac{k^\mu k^\nu}{k^4}, \tag{2.18}$$

onde identificamos a massa de gauge no polo  $\sqrt{k^2} = \theta$ .

Como a estrutura do propagador do campo de gauge depende do gauge adotado e o ponto central deste trabalho consiste no cálculo de correções radiativas num gauge interpolante, vamos calcular o propagador do campo de Chern-Simons com o termo de fixação de gauge dado por  $\mathcal{L}_{FG} = -1/2\lambda(\alpha\partial_0 A^0 + \nabla \cdot A)^2 \equiv -1/2\lambda(\alpha\partial^0 A_0 + \partial_j A^j)^2$ , onde  $j = (1, 2)$ . Para tanto tomemos a lagrangiana do campo de gauge dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_G &= \mathcal{L}_{CS} + \mathcal{L}_{FG} \\
\mathcal{L}_G &= \frac{\theta}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu A^\rho - \frac{1}{2\lambda}(\partial_j A^j + \alpha\partial_0 A^0)^2.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Uma vez que a ação do campo de gauge  $\mathcal{S}_G = \int d^3x\mathcal{L}_G$  é invariante mediante uma integração por partes, desprezando os termos de superfície, podemos reescrever  $\mathcal{L}_G$  na forma

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2}A^\mu\mathcal{O}_{\mu\nu}(\vec{\partial}_\mu, \vec{\partial}_\nu)A^\nu. \tag{2.20}$$

O propagador associado ao operador  $\mathcal{O}_{\mu\nu}$  pode ser determinado a partir de ([6], [5])

$$\mathcal{O}_{\mu\rho}(\partial_\mu, \partial_\rho)\Delta^{\rho\nu}(x-y) = ig_\mu^\nu\delta^3(x-y). \quad (2.21)$$

Por simplicidade e adequação aos nossos propósitos, vamos determinar a estrutura do propagador no espaço dos momentos, o que é implementado por meio da transformada de Fourier

$$\Delta^{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-ik_\mu(x-y)^\mu} \tilde{\Delta}^{\mu\nu}(k). \quad (2.22)$$

Como a transformada de Fourier da função delta de Dirac é dada por

$$\delta^3(x-y) = 1/(2\pi)^3 \int d^3k e^{-ik_\mu(x-y)^\mu}, \quad (2.23)$$

então podemos reescrever (2.21) como

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \mathcal{O}_{\mu\rho} e^{-ik_\xi(x-y)^\xi} \tilde{\Delta}^{\rho\nu}(k) = ig_\mu^\nu \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-ik_\xi(x-y)^\xi}. \quad (2.24)$$

Uma vez que

$$\mathcal{O}_{\mu\nu}(\partial_\mu, \partial_\nu) e^{-ik_\xi(x-y)^\xi} = \tilde{\mathcal{O}}_{\mu\nu}(k_\mu, k_\nu) e^{-ik_\xi(x-y)^\xi}, \quad (2.25)$$

então podemos escrever (2.21) como

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\mu\rho}(k) \tilde{\Delta}^{\rho\nu}(k) = ig_\mu^\nu. \quad (2.26)$$

Como o termo de fixação de gauge em (2.19) tem uma estrutura não covariante, teremos que tratar separadamente as componentes espaciais e temporais, e por esse motivo a convém reescrevermos a lagrangiana de Chern-Simons como:

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\theta}{2} \epsilon_{0jl} (A^0 \partial^j A^l - A^j \partial^0 A^l + A^j \partial^l A^0). \quad (2.27)$$

Como (2.27) já tem a estrutura apresentada em (2.20) vamos simplesmente reescreve-la como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CS} &= \frac{1}{2} A^0 (\theta \epsilon_{0lj} \partial^l) A^j + \frac{1}{2} A^j (-\theta \epsilon_{0jl} \partial^0) A^l + \frac{1}{2} A^j (\theta \epsilon_{0jl} \partial^l) A^0 \\ &= \frac{1}{2} A^0 \mathcal{O}_{0j}^{CS} A^j + \frac{1}{2} A^j \mathcal{O}_{jl}^{CS} A^l + \frac{1}{2} A^j \mathcal{O}_{j0}^{CS} A^0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Uma vez que  $\mathcal{L}_{FG}$  em (2.19) não tem a estrutura mostrada em (2.20), vamos inicialmente expandi-la em seus termos, de modo que obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{FG} &= -\frac{1}{2\lambda} (\partial_j A^j + \alpha \partial_0 A^0)^2 \\ &= -\frac{1}{2\lambda} (\partial_j A^j \partial_l A^l + \alpha \partial_0 A^0 \partial_j A^j + \alpha \partial_j A^j \partial_0 A^0 + \alpha^2 \partial_0 A^0 \partial_0 A^0). \quad (2.29)\end{aligned}$$

Efetuada a integração por partes de  $\mathcal{S}_{FG}$  e desprezando os termos de superfície podemos reescrever (2.29) como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{FG} &= \frac{1}{2} A^j \left( \frac{1}{\lambda} \partial_j \partial_l \right) A^l + \frac{1}{2} A^j \left( \frac{\alpha}{\lambda} \partial_j \partial_0 \right) A^0 + \frac{1}{2} A^0 \left( \frac{\alpha}{\lambda} \partial_0 \partial_j \right) A^j \\ &\quad + \frac{1}{2} A^0 \left( \frac{\alpha^2}{\lambda} \partial_0 \partial_0 \right) A^0 \\ &= \frac{1}{2} A^j \mathcal{O}_{jl}^{FG} A^l + \frac{1}{2} A^j \mathcal{O}_{j0}^{FG} A^0 + \frac{1}{2} A^0 \mathcal{O}_{0j}^{FG} A^j + \frac{1}{2} A^0 \mathcal{O}_{00}^{FG} A^0 \quad (2.30)\end{aligned}$$

Reagrupando os termos de (2.20) e (2.30) temos como resultado

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2} (A^0 \mathcal{O}_{00} A^0 + A^0 \mathcal{O}_{0j} A^j + A^j \mathcal{O}_{j0} A^0 + A^j \mathcal{O}_{jl} A^l) \quad (2.31)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{00}(\partial_0, \partial_0) &= \mathcal{O}_{00}^{CS} + \mathcal{O}_{00}^{FG} = \frac{\alpha^2}{\lambda} \partial_0 \partial_0, \\ \mathcal{O}_{0j}(\partial_0, \partial_j) &= \mathcal{O}_{0j}^{CS} + \mathcal{O}_{0j}^{FG} = \frac{\alpha}{\lambda} \partial_0 \partial_j + \theta \epsilon_{0lj} \partial^l, \\ \mathcal{O}_{j0}(\partial_j, \partial_0) &= \mathcal{O}_{j0}^{CS} + \mathcal{O}_{j0}^{FG} = \frac{\alpha}{\lambda} \partial_j \partial_0 + \theta \epsilon_{0jl} \partial^l, \\ \mathcal{O}_{jl}(\partial_j, \partial_l) &= \mathcal{O}_{jl}^{CS} + \mathcal{O}_{jl}^{FG} = \frac{1}{\lambda} \partial_j \partial_l - \theta \epsilon_{0jl} \partial^0. \quad (2.32)\end{aligned}$$

a partir de (2.25) podemos escrever os operadores apresentados em (2.32) no espaço dos momentos, tendo como resultado

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{O}}_{00}(k) &= -\frac{\alpha^2}{\lambda} k_0^2, \\ \tilde{\mathcal{O}}_{0j}(k) &= -\frac{\alpha}{\lambda} k_0 k_j + i\theta \epsilon^{jl} k_l, \\ \tilde{\mathcal{O}}_{j0}(k) &= -\frac{\alpha}{\lambda} k_j k_0 - i\theta \epsilon^{jl} k_l, \\ \tilde{\mathcal{O}}_{jl}(k) &= -\frac{1}{\lambda} k_j k_l + i\theta \epsilon_{jl} k^0, \quad (2.33)\end{aligned}$$



Comos resultados acima obtidos, podemos escrever as equções de (2.24) explicitamente e obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{O}}_{00}\tilde{\Delta}^{00} + \tilde{\mathcal{O}}_{0j}\tilde{\Delta}^{j0} &= i, \\
\tilde{\mathcal{O}}_{j0}\tilde{\Delta}^{00} + \tilde{\mathcal{O}}_{jl}\tilde{\Delta}^{l0} &= 0, \\
\tilde{\mathcal{O}}_{00}\tilde{\Delta}^{0j} + \tilde{\mathcal{O}}_{0l}\tilde{\Delta}^{lj} &= 0, \\
\tilde{\mathcal{O}}_{j0}\tilde{\Delta}^{0l} + \tilde{\mathcal{O}}_{jn}\tilde{\Delta}^{nl} &= ig_j^l.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Para determinar o propagador do fóton, vamos supor que suas componentes sejam da forma

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}^{00} &= A, \\
\tilde{\Delta}^{0j} &= Bk^0k^j + C\epsilon^{jl}k_l, \\
\tilde{\Delta}^{j0} &= Bk^0k^j - C\epsilon^{jl}k_l, \\
\tilde{\Delta}^{jl} &= Dk^jk^l + Eg^{jl} + F\epsilon^{jl}k_0,
\end{aligned} \tag{2.35}$$

onde A, B, C, D e E são funções escalares que podem depender de  $k$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $\lambda$ .

Substituindo (2.33) e (2.35) em (2.34), e utilizando os resultados referentes às contrações entre os tensores totalmente anti-simétricos de Levi-Civita

$$\epsilon_{\mu\nu\rho}\epsilon^{\mu\nu\sigma} = 2g_\rho^\sigma, \tag{2.36}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho}\epsilon^{\mu\alpha\beta} = g_\nu^\alpha g_\rho^\beta - g_\rho^\alpha g_\nu^\beta, \tag{2.37}$$

obtemos as seguintes equações:

$$-\frac{\alpha^2}{\lambda}k_0^2A + \frac{\alpha}{\lambda}k_0^2\mathbf{k}^2B + i\theta\mathbf{k}^2C = i,$$

$$\left(-\frac{\alpha}{\lambda}A + \frac{1}{\lambda}\mathbf{k}^2B + i\theta C\right)k_0k_j + (-i\theta A + i\theta k_0^2B)\epsilon_{jl}k^l = 0,$$

$$\left(-\frac{\alpha^2}{\lambda}k_0^2B + \frac{\alpha^2}{\lambda}\mathbf{k}^2D - \frac{\alpha}{\lambda}E + i\theta F\right)k_0k^j + \left(-\frac{\alpha^2}{\lambda}k_0^2C - \frac{\alpha}{\lambda}k_0^2 + i\theta E\right)\epsilon_{jl}k^l = 0,$$

$$(B - D)\theta^2k_0k^l\epsilon_{jn}k^n + i\theta\epsilon_{0j}{}^lk_0E - \frac{1}{\lambda}(\alpha C - F)k_0k_j\epsilon^{ln}k_n +$$

$$+ \left(-\frac{\alpha^2}{\lambda}k_0^2B + \frac{1}{\lambda}\mathbf{k}^2D - \frac{1}{\lambda}E + i\theta C\right)k_jk^l + i\theta(\mathbf{k}^2C - k_0^2F)g_j^l = ig_j^l. \quad (2.38)$$

Resolvendo o sistema apresentado acima obtemos

$$A = -\frac{i\lambda k_0^2}{(\alpha k_0^2 - \mathbf{k}^2)^2},$$

$$B = -\frac{i\lambda}{(\alpha k_0^2 - \mathbf{k}^2)^2},$$

$$C = \frac{1}{\theta} \frac{1}{(\alpha k_0^2 - \mathbf{k}^2)},$$

$$D = B,$$

$$E = 0,$$

$$F = \alpha C. \quad (2.39)$$

Portanto o propagador do campo de gauge no espaço dos momentos tem suas componentes dadas por :

$$\tilde{\Delta}^{00} = -\frac{i\lambda k_0^2}{(\alpha k_0^2 - \mathbf{k}^2)^2} \quad (2.40)$$

$$\tilde{\Delta}^{0j} = \frac{1}{\theta} \frac{\epsilon^{0jl}k_l}{\alpha k_0^2 - \mathbf{k}^2} - i\lambda \frac{k^0k^j}{(\alpha k_0^2 - \mathbf{k}^2)^2} \quad (2.41)$$

$$\tilde{\Delta}^{jl} = \frac{1}{\theta} \frac{\epsilon^{j0l}\alpha k_0}{\alpha k_0^2 - \mathbf{k}^2} - i\lambda \frac{k^jk^l}{(\alpha k_0^2 - \mathbf{k}^2)^2} \quad (2.42)$$

Com os resultados apresentados em (2.40), (2.41) e (2.42) obtemos a estrutura geral do propagador:

$$\tilde{\Delta}^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{\theta} \epsilon^{\mu\nu\rho} \frac{\tilde{k}_\rho}{\tilde{k} \cdot k} - i\lambda \frac{k^\mu k^\nu}{(\tilde{k} \cdot k)^2}; \quad (2.43)$$

onde introduzimos  $\tilde{k}^\rho \equiv (\alpha k^0, \mathbf{k})$ . Nos valores limites de  $\alpha$ , 0 e 1, (2.43) reproduz os propagadores nos gauges não covariante e covariante, respectivamente. Em particular, para  $\lambda \rightarrow 0$  estes limites correspondem aos gauges de Coulomb e de Landau, respectivamente  $\tilde{\Delta}_C^{ij} = 0$ ,  $\tilde{\Delta}_C^{0i} = -\frac{1}{\theta} \epsilon^{ij} k_j / \mathbf{k}^2$  e  $\tilde{\Delta}_L^{\mu\nu} = \frac{1}{\theta} \epsilon^{\mu\nu\rho} k_\rho / k^2$ .

Como todos os cálculos que serão apresentados envolverão o propagador do campo de gauge somente nos espaço dos momentos, por simplicidade substituiremos sua notação de  $\tilde{\Delta}^{\mu\nu}(k)$  para  $\Delta^{\mu\nu}(k)$ .

## Capítulo 3

# O Campo de Dirac em (2+1)

## Dimensões

A teoria de Dirac é construída a partir da lagrangiana

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2} \bar{\psi} \partial_\mu \gamma^\mu \psi - \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi. \quad (3.1)$$

Em (3.1)  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac, para as quais neste trabalho adotaremos a representação

$$\gamma^0 = \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^1 = i\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^2 = i\sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

onde  $\sigma^i$  são as matrizes de Pauli, enquanto que  $\psi \equiv \psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{bmatrix}$  é um espinor com duas componentes e  $\bar{\psi}$  é definido como  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 = \begin{bmatrix} \psi_1^*(x) & , & -\psi_2^*(x) \end{bmatrix}$ .

As equações de Euler-Lagrange (equações de movimento) dos campos  $\psi$  e  $\bar{\psi}$ , considerados independentes, são dadas por :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}} = 0 \quad \rightarrow \quad i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \partial_\mu \psi} = 0 \quad \rightarrow \quad i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad (3.4)$$

Vamos estudar as soluções de (3.3) nos espaço dos momentos por meio da transformada de Fourier

$$\psi(x) = 1/(2\pi)^3 \int d^3p e^{-ip \cdot x} \tilde{\psi}(p), \quad (3.5)$$

onde  $p \cdot x \equiv p_\mu x^\mu \equiv p^0 x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ , que dá como resultado

$$(\not{p} - m)\tilde{\psi}(p) = 0, \quad (3.6)$$

onde introduzimos a notação  $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$ . Desenvolvendo (3.6) obtemos

$$\begin{bmatrix} p_0 - m & ip_1 + p_2 \\ ip_1 - p_2 & -p_0 - m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Para que haja uma solução de (3.7) diferente da solução trivial é necessário impor que

$$\det \begin{bmatrix} p_0 - m & ip_1 + p_2 \\ ip_1 - p_2 & -p_0 - m \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad p_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \equiv \pm \omega_{\mathbf{p}}. \quad (3.8)$$

A condição  $p_0 = \pm \omega_{\mathbf{p}}$  é referida como estamos trabalhando na concha de massa ou, como utilizaremos neste trabalho, na “mass-shell”.

Temos duas soluções possíveis, que diferem pelo sinal de  $p_0$ , e que correspondem aos estados de partícula com energia positiva ( $p_0 = \omega_{\mathbf{p}}$ ) e com energia negativa ( $p_0 = -\omega_{\mathbf{p}}$ ).

Levando em consideração o resultado apresentado em (3.8) vamos redefinir  $\tilde{\psi}(p)$  como

$$p_0 = \omega_{\mathbf{p}} \quad \rightarrow \quad \tilde{\psi}(p_0 = \omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) = 2\pi u(\mathbf{p}) \delta(p_0 - \omega_{\mathbf{p}}), \quad (3.9)$$

$$p_0 = -\omega_{\mathbf{p}} \quad \rightarrow \quad \tilde{\psi}(p_0 = -\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) = 2\pi v(-\mathbf{p}) \delta(p_0 + \omega_{\mathbf{p}}), \quad (3.10)$$

o que nos permite escrever  $\psi(x) \equiv \psi(x_0, \mathbf{x})$  como

$$\begin{aligned} \psi(x_0, \mathbf{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ 2\pi a(\mathbf{p}) u(\mathbf{p}) e^{-i(p_0 x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \delta(p_0 - \omega_{\mathbf{p}}) \right. \\ &\quad \left. + 2\pi b^\dagger(-\mathbf{p}) v(-\mathbf{p}) e^{-i(p_0 x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \delta(p_0 + \omega_{\mathbf{p}}) \right] \\ &= \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left[ a(\mathbf{p}) u(\mathbf{p}) e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} + b^\dagger(-\mathbf{p}) v(-\mathbf{p}) e^{i(\omega_{\mathbf{p}} x_0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right]. \quad (3.11) \end{aligned}$$

Em (3.11)  $a(\mathbf{p})$  e  $b^\dagger(-\mathbf{p})$  são os coeficientes de Fourier da expansão e que, após a quantização do campo  $\psi$ , são interpretados como operadores atuando no espaço de Fock com as seguintes propriedades [6]:

- $a(\mathbf{p})$  : aniquila um elétron com momento  $\mathbf{p}$ ;  
 $a^\dagger(\mathbf{p})$  : cria um elétron com momento  $\mathbf{p}$ ;  
 $b(\mathbf{p})$  : aniquila uma antipartícula ( pósitron) com momento  $\mathbf{p}$ ;  
 $b^\dagger(\mathbf{p})$  : cria uma antipartícula ( pósitron) com momento  $\mathbf{p}$ ;

As propriedades acima decorrem do fato que a segunda quantização de  $\psi$  se dá pela imposição da relação de anticomutação  $\{\psi(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}(\mathbf{y}, t)\} \equiv \{\psi(\mathbf{x}, t), \pi_\psi(\mathbf{y}, t)\} = i\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ . Substituindo  $\psi$  pela expansão (3.11) e  $\bar{\psi}$  pela correspondente, obtemos para  $a$  e  $b$  as relações de anticomutação

$$\begin{aligned}
 \{a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})\} &= i\delta^2(\mathbf{p} - \mathbf{q}) & \{b(\mathbf{p}), b^\dagger(\mathbf{q})\} &= i\delta^2(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \\
 \{a(\mathbf{p}), a(\mathbf{q})\} &= 0 & \{b(\mathbf{p}), b(\mathbf{q})\} &= 0 \\
 \{a^\dagger(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})\} &= 0 & \{b^\dagger(\mathbf{p}), b^\dagger(\mathbf{q})\} &= 0
 \end{aligned}$$

Efetuada no segundo termo do integrando de (3.11) a mudança de variável  $-\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$  obtemos

$$\psi(x_0, \mathbf{x}) = \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} [a(\mathbf{p})u(\mathbf{p})e^{-i(\omega_{\mathbf{p}}x_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} + b^\dagger(\mathbf{p})v(\mathbf{p})e^{i(\omega_{\mathbf{p}}x_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}] \quad (3.12)$$

onde  $p_0 = \omega_{\mathbf{p}}$ , com  $u(p)$  e  $v(p)$  satisfazendo às equações

$$(\not{p} - m)u(\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) = 0 \quad (3.13)$$

$$(\not{p} + m)v(\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) = 0. \quad (3.14)$$

Escrevendo explicitamente  $u(\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$  como  $\begin{bmatrix} u_1(\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) \\ u_2(\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) \end{bmatrix}$  e desenvolvendo (3.13) obtemos

$$(\omega_{\mathbf{p}} - m)u_1 + (ip_1 + p_2)u_2 = 0, \quad (3.15)$$

$$(ip_1 - p_2)u_1 - (\omega_{\mathbf{p}} + m)u_2 = 0. \quad (3.16)$$

De (3.15) ou (3.16) tiramos que

$$u_2 = \frac{ip_1 - p_2}{\omega_{\mathbf{p}} + m} u_1,$$

de modo que o espinor  $u(p)$  pode ser escrito como

$$u(p) = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{ip_1 - p_2}{\omega_{\mathbf{p}} + m} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Impondo a condição de normalização

$$u^\dagger(\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) u(\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) = 1 \quad (3.18)$$

obtemos como resultado  $u_1 = \sqrt{(\omega_{\mathbf{p}} + m)/2\omega_{\mathbf{p}}}$  e portanto

$$u(p) = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}} + m}{2\omega_{\mathbf{p}}}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \frac{p_1 + ip_2}{\omega_{\mathbf{p}} + m} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Procedendo exatamente da mesma forma com (3.14) obtemos

$$v(p) = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}} + m}{2\omega_{\mathbf{p}}}} \begin{bmatrix} -i \frac{p_1 - ip_2}{\omega_{\mathbf{p}} + m} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Definindo  $p_{\pm} = p^1 \pm ip^2$  podemos reescrever  $u(p)$  e  $v(p)$  como

$$u(p) = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}} + m}{2\omega_{\mathbf{p}}}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \frac{p_+}{\omega_{\mathbf{p}} + m} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$v(p) = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}} + m}{2\omega_{\mathbf{p}}}} \begin{bmatrix} i \frac{p_-}{\omega_{\mathbf{p}} + m} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

A condição de normalização adotada para  $u(p)$  e  $v(p)$  implica que

$$\bar{u}(p)u(p) = -\bar{v}(p)v(p) = \frac{m}{\omega_{\mathbf{p}}}. \quad (3.23)$$

É interessante observar que a condição de normalização dos espinores  $u(p)$  e  $v(p)$  é opcional. Caso adotássemos a condição de normalização  $\bar{u}(p)u(p) = 1$ , obteríamos como resultado

$$u(p) = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{ip_1 - p_2}{\omega_{\mathbf{p}} + m} \end{bmatrix} \quad v(p) = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \begin{bmatrix} \frac{p_1 - ip_2}{\omega_{\mathbf{p}} + m} \\ i \end{bmatrix}$$

e implicaria que  $u^\dagger(p)u(p) = v^\dagger(p)v(p) = \omega_p/m$ . Neste trabalho utilizaremos os espinores de Dirac normalizados de acordo com (3.18), apresentados em (3.21) e (3.22).

Como a ação do campo de Dirac  $\mathcal{S}_D = \int d^x \mathcal{L}_D$  não se altera se fizermos uma integração por partes do termo  $-i/2 (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi$ , desprezando o termo de superfície, a lagrangiana do campo de Dirac (3.1) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi \equiv \bar{\psi} (i \vec{\not{\partial}} - m) \psi, \quad (3.24)$$

de modo que, como no caso do campo de gauge, o propagador do campo de Dirac é determinado a partir da condição

$$(i \not{\partial} - m) S_F(x - y) = i\delta^3(x - y). \quad (3.25)$$

Introduzindo a transformada de Fourier no espaço dos momentos de  $S_F(x - y)$

$$S_F(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{S}_F(p) \quad (3.26)$$

e aplicando (2.23) podemos reescrever (3.25) como

$$(\not{p} - m) \tilde{S}_F(p) = i \rightarrow \tilde{S}_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m}, \quad (3.27)$$

de forma que obtemos o propagador do campo de Dirac no espaço dos momentos, para o qual simplicidade vamos mudar sua notação  $\tilde{S}_F(p)$  para  $S_F(p)$ . O propagador do campo de Dirac pode ainda ser escrito como

$$S_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m} \frac{\not{p} + m}{\not{p} + m} = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \quad (3.28)$$

A partir da representação adotada das matrizes  $\gamma$  de Dirac em (3.2), por inspeção verificamos que o produto de duas matrizes é dado por

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} \mathcal{I} - i\epsilon^{\mu\nu\rho} \gamma_\rho. \quad (3.29)$$

A partir deste resultado temos que

$$\begin{aligned} \not{p}^2 &= p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = p_\mu p_\nu (g^{\mu\nu} \mathcal{I} - i\epsilon^{\mu\nu\rho} \gamma_\rho) \\ &= p^2 - i\epsilon^{\mu\nu\rho} p_\mu p_\nu \gamma_\rho = p^2 \end{aligned}$$



de modo que podemos escrever (3.28) na forma

$$S_F(p) = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (3.30)$$

onde introduzimos o termo  $i\varepsilon$  para deslocar o polo do eixo real.

A expressão do propagador do elétron (3.30) pode ser reescrita numa forma mais conveniente, para ser utilizada quando fizermos a renormalização da teoria.

$$\begin{aligned} \frac{S_F(p)}{i} &= \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} \left[ \frac{\gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m}{p^0 - \omega_{\mathbf{p}} + i\varepsilon} + \frac{-\gamma^0 p^0 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m}{p^0 + \omega_{\mathbf{p}} - i\varepsilon} \right] \\ &= \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} \left[ \frac{\gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m}{p^0 - \omega_{\mathbf{p}} + i\varepsilon} + \frac{\gamma^0 p^0 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m}{p^0 + \omega_{\mathbf{p}} - i\varepsilon} \right] \\ &= \frac{m}{\omega_{\mathbf{p}}} \left[ \frac{u(\mathbf{p})\bar{u}(\mathbf{p})}{p^0 - \omega_{\mathbf{p}} + i\varepsilon} + \frac{v(-\mathbf{p})\bar{v}(-\mathbf{p})}{p^0 + \omega_{\mathbf{p}} - i\varepsilon} \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Apresentamos no apêndice A o cálculo do momento magnético do elétron. Como este cálculo é realizado em (3+1)D, onde uma outra representação das matrizes de Dirac é utilizada, evitamos apresentar este cálculo neste capítulo.

## Capítulo 4

# Apresentação do Modelo e das Regras de Feynman

Neste capítulo vamos apresentar o modelo que é estudado neste trabalho, que corresponde ao espalhamento de um elétron em interação com o campo de Chern-Simons na condição de acoplamento mínimo e no limite de baixos momentos. Este limite significa desprezar as contribuições de ordem igual ou maior a  $p^2/m^2$ .

A interação dos campos  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  com o campo de gauge  $A^\mu$  na condição de acoplamento mínimo pode ser implementada em (3.24) pela substituição do operador  $\partial_\mu$  pela derivada covariante  $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ , de modo que obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{D-INT} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \psi, \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \\ &= \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{INT},\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde a corrente de matéria associada ao campo do férmion é dada por  $J^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ . Com isto a lagrangiana do modelo é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{CS} + \mathcal{L}_{FG} + \mathcal{L}_{INT} \\
&= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + \frac{\theta}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{1}{2\lambda} (\alpha \partial_0 A^0 + \partial_j A^j)^2 - e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad (4.2)
\end{aligned}$$

Nos processos de interação entre partículas parte-se de uma situação inicial ( $t \rightarrow -\infty$ ) em que as partículas são livres e podem ser representadas por um vetor de estado inicial  $|i\rangle$ . Após a interação ( $t \rightarrow \infty$ ) as partículas são novamente livres e representadas por um estado final  $|f\rangle$ . O objeto de interesse físico é conhecermos a amplitude de transição  $\langle f | i \rangle$ . No formalismo de Lehman, Symanzik e Zimmermann [11], o conjunto dos estados iniciais e dos estados finais formam um conjunto completo, significando que existe um operador unitário  $S$  ( $S^\dagger S = \mathcal{I}$ ) tal que

$$|f\rangle = \sum_f S_{fi} |i\rangle. \quad (4.3)$$

A determinação da estrutura da matriz  $S$  só é possível por métodos perturbativos. Pelo teorema de Gell-Mann Low [11],[6], podemos determinar a matriz  $S$  através da expansão do operador

$$S = T \exp \left\{ i \int d^3x : \mathcal{L}_{INT}^0 : \right\}. \quad (4.4)$$

Em (4.4)  $\mathcal{L}_{INT}^0$  é a lagrangiana de interação escrita em termos dos campos livres com ordenamento normal, isto é, com os operadores de aniquilação escritos sempre à direita dos operadores de criação, quando os operadores estão no mesmo produto. Devemos também escrever a expansão do operador com os termos ordenados temporalmente.

O método perturbativo consiste na determinação da matriz  $S$  como uma expansão de  $\exp \{ i \int d^3x : \mathcal{L}_{INT}^0 : \}$  de acordo com

$$S = 1 + \frac{1}{1!} i \int d^3x : \mathcal{L}_{INT}^0 : + \frac{1}{2!} i \int d^3x : \mathcal{L}_{INT}^0 : i \int d^3x' : \mathcal{L}_{INT}^0 : + \dots \quad (4.5)$$

No nosso modelo temos que

$$S = T \exp \left\{ -ie \int d^3x : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : A_\mu(x) \right\} \quad (4.6)$$

Em primeira ordem não temos nenhuma contribuição e em segunda ordem, na qual iremos calcular as correções radiativas, temos que

$$S^{(2)} = \frac{1}{2}(-ie)^2 \int \int d^3x d^3x' T : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) : \bar{\psi}(x')\gamma^\nu\psi(x') :: T A_\mu(x)A_\nu(x') : \quad (4.7)$$

O cálculo dos produtos ordenados temporalmente é feito aplicando o teorema de Wick [11], [6].

Introduzindo por simplicidade de notação  $A_\mu(x') \equiv A'_\mu$ ,  $A_\mu(x) \equiv A_\mu$ ,  $\psi(x) \equiv \psi$  e  $\psi(x') \equiv \psi'$ , temos que o produto temporalmente ordenado dos operadores do campo de gauge é dado por

$$\begin{aligned} T : A_\mu A'_\nu : &= : A_\mu A'_\nu : + \langle 0 | T A_\mu A'_\nu | 0 \rangle \\ &= : A_\mu A'_\nu : + \Delta_{\mu\nu}(x - x'), \end{aligned} \quad (4.8)$$

e que o produto ordenado temporalmente das correntes é dado por

$$\begin{aligned} T : \bar{\psi}\gamma^\mu\psi :: \bar{\psi}'\gamma^\nu\psi' : &= : \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi' : + \\ &+ : \gamma^\mu\psi\bar{\psi}'\gamma^\nu : \langle 0 | T\bar{\psi}\psi' | 0 \rangle + \\ &+ : \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi' : \langle 0 | T\psi\bar{\psi}' | 0 \rangle + \\ &+ \gamma^\mu\gamma^\nu \langle 0 | T\bar{\psi}\psi' | 0 \rangle \langle 0 | T\psi\bar{\psi}' | 0 \rangle \\ &= : \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi' : + : \gamma^\mu\psi\bar{\psi}'\gamma^\nu : S_F(x' - x) + \\ &+ : \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi' : S_F(x - x') + \gamma^\mu\gamma^\nu S_F(x' - x)S_F(x - x'). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Efetuada o produto  $T : \bar{\psi}\gamma^\mu\psi :: \bar{\psi}'\gamma^\nu\psi' : T : A_\mu A'_\nu :$  obtemos como resultado as contribuições em segunda ordem da matriz S, que têm uma representação gráfica muito ilustrativa, conhecidas como diagramas de Feynman, apresentados em seguida e que descrevem os seguintes fenômenos:

Diagrama 1 : Dois férmions (elétrons ou pósitrons) absorvem ou emitem um fóton. Como o balanço de energia e momento é satisfeito nos dois gráficos parciais, este diagrama não dá contribuição à matriz S.

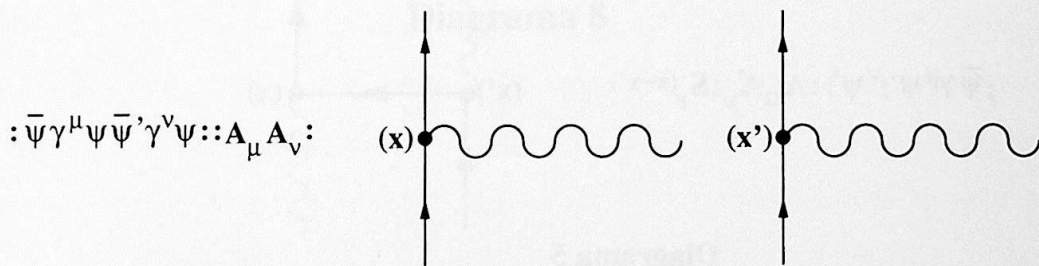
Diagrama 2 : Este diagrama envolvendo quatro linhas fermiônicas externas pode representar o espalhamento elétron-elétron, o espalhamento pósitron-pósitron ou o espalhamento elétron-pósitron.

Diagrama 3 e Diagrama 5 : Estes diagramas descrevem processos que envolvem dois fótons e dois férmions. Dependendo da associação das linhas externas com as partículas incidentes ou emergentes podem representar o espalhamento Compton de um férmion, a produção ou aniquilação de um par elétron-pósitron.

Diagrama 4 e Diagrama 6 : Estes são os diagramas de auto-energia de um férmion.

Diagrama 7 : Este é o diagrama de polarização do vácuo, que descreve a criação e aniquilação de um par elétron-pósitron.

Diagrama 8 : Este diagrama totalmente contraído não tem um operador de campo e sua única contribuição à matriz S é um fator de fase.



**Diagrama 1**

$$:\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}'\gamma_\nu\psi':\Delta_{\mu\nu}(x-x')$$

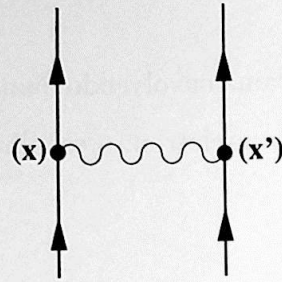


Diagrama 2

$$:\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi'\gamma^\mu\psi::A_\mu A'_\nu:S_F(x'-x)$$

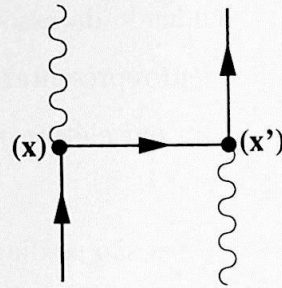


Diagrama 3

$$:\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi':\Delta_{\mu\nu}(x-x')$$

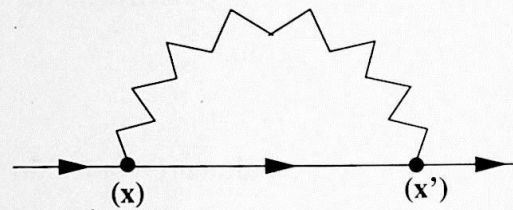


Diagrama 4

$$:\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi':A_\mu A'_\nu:S_F(x-x')$$

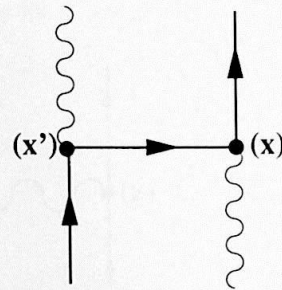


Diagrama 5

$$:\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi':\Delta_{\mu\nu}(x-x')$$

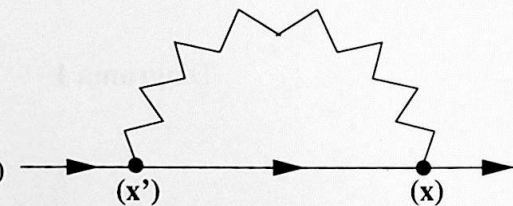
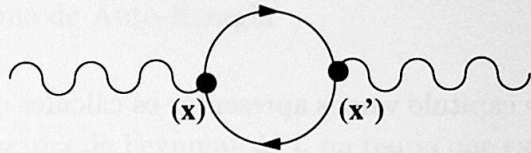


Diagrama 6

## 5.1 Correção de Auto-Energia do Elétron

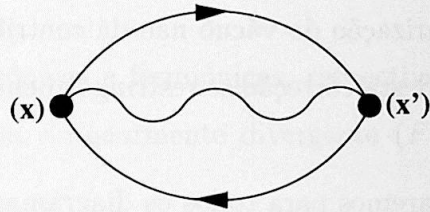
Como se verá, a correção de auto-energia do elétron é dada por

$$\gamma^\nu \gamma^\mu : A_\mu A'_\nu : S_F(x-x') S_F(x'-x)$$



**Diagrama 7**

$$\gamma^\nu \gamma^\mu S_F(x-x') S_F(x'-x) \Delta_{\mu\nu}(x'-x)$$



**Diagrama 8**

## Capítulo 5

### Correções Radiativas

Neste capítulo vamos apresentar os cálculos dos diagramas de Feynman que serão levados em consideração no cálculo das correções radiativas do momento magnético do elétron, na aproximação de um loop. Estas correções correspondem às de auto-energia, correção de vértice e a polarização do vácuo. Como mostraremos no decorrer deste capítulo, o efeito de polarização do vácuo não dá contribuição para a correção do momento magnético, e o efeito desta correção se restringe apenas à correção da intensidade do campo de gauge  $A^\mu$ .

Nós utilizaremos para todos os diagramas que examinaremos o método da regularização dimensional [9], [10], que em  $(2+1)$  dimensões fornece resultados finitos mesmo para as integrais divergentes em um loop e atua como um esquema de renormalização efetivo. Os cálculos no espaço dos momentos serão feitos no espaço de Minkowski, tomando como referência os resultados apresentados por Collins [12] e que são aqui reproduzidos:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_0 &= \int d^d k \frac{1}{(-k^2 - 2p \cdot k + C)^\alpha} = i\pi^{d/2} (C + p^2)^{d/2-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - d/2)}{\Gamma(\alpha)} \\ \mathcal{J}_1^\mu &= \int d^d k \frac{k^\mu}{(-k^2 - 2p \cdot k + C)^\alpha} = i\pi^{d/2} (C + p^2)^{d/2-\alpha} (-p^\mu) \frac{\Gamma(\alpha - d/2)}{\Gamma(\alpha)} \\ \mathcal{J}_2^{\mu\nu} &= \int d^d k \frac{k^\mu k^\nu}{(-k^2 - 2p \cdot k + C)^\alpha} = i\pi^{d/2} (C + p^2)^{d/2-\alpha} \cdot \\ &\quad \cdot \left[ \frac{\Gamma(\alpha - d/2)}{\Gamma(\alpha)} p^\mu p^\nu - \frac{\Gamma(\alpha - 1 - d/2)}{2\Gamma(\alpha)} g^{\mu\nu} (C + p^2) \right]\end{aligned}\tag{5.1}$$



## 5.1 Correção de Auto-Energia do Elétron

Como apresentado no capítulo anterior, a correção de auto-energia corresponde ao diagrama

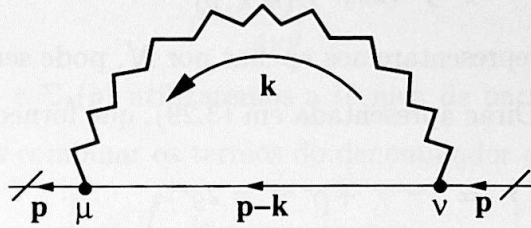


Figura 5.1: Diagrama de Auto-Energia

O grau de divergência superficial de um diagrama de Feynman 1PI, na teoria que estamos apresentando, é dado por:

$$d_{DS} = 3 - B - F \quad (5.2)$$

onde B e F são o número de linhas externas bosônicas e fermiônicas, respectivamente. Portanto, o diagrama de auto energia do férmion é linearmente divergente ( $F = 2$  e  $B = 0$ ).

Aplicando as regras de Feynman para a figura (5.1) obtemos

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (-ie\gamma_\mu) S_F(p-k) (-ie\gamma_\nu) \Delta^{\nu\mu}(k) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (-ie\gamma_\mu) \frac{i(\not{p} - \not{k} + m)}{(p-k)^2 - m^2} (-ie\gamma_\nu) \Delta^{\nu\mu}(k). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Sem perda de generalidade, vamos realizar os cálculos no gauge de Landau, impondo  $\lambda = 0$  e assim o propagador do campo de gauge é dado por

$$\Delta^{\nu\mu}(k) = \frac{1}{\theta} \epsilon^{\nu\mu\rho} \frac{\tilde{k}_\rho}{\tilde{k} \cdot k}, \quad (5.4)$$

e deste modo obtemos

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma(p) &= -\frac{ie^2}{\theta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma_\mu \frac{(p^\alpha - k^\alpha)\gamma_\alpha + m}{(p-k)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{\epsilon^{\nu\mu\rho} \tilde{k}_\rho}{\tilde{k} \cdot k}, \\
 &= -\frac{ie^2}{\theta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{N}(k, \tilde{k}, p)}{\mathcal{D}(k, \tilde{k}, p)}. \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

O numerador de (5.5), que representaremos apenas por  $\mathcal{N}$ , pode ser simplificado a partir da álgebra das matrizes de Dirac apresentada em (3.29), que fornece como resultado

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \tag{5.6}$$

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu = -2i\epsilon^{\mu\nu\rho} \gamma_\rho, \tag{5.7}$$

$$\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu = g_{\mu\alpha} \gamma_\nu + g_{\alpha\nu} \gamma_\mu - g_{\mu\nu} \gamma_\alpha - i\epsilon_{\mu\alpha\nu} \mathcal{I}. \tag{5.8}$$

Com os resultados apresentados acima e aplicando (2.36) e (2.37) obtemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N} &= [(p^\alpha - k^\alpha)\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu + m\gamma_\mu \gamma_\nu] \epsilon^{\nu\mu\rho} \tilde{k}_\rho, \\
 &= \left[ (p_\mu - k_\mu)\gamma_\nu + (p_\nu - k_\nu)\gamma_\mu - g_{\mu\nu}(\not{p} - \not{k}) + i(p^\alpha - k^\alpha)\epsilon_{\mu\nu\alpha} + \right. \\
 &\quad \left. + mg_{\mu\nu} - im\epsilon_{\mu\nu\alpha} \gamma^\alpha \right] \epsilon^{\nu\mu\rho} \tilde{k}_\rho, \\
 &= 2i [m\gamma \cdot \tilde{k} - p \cdot \tilde{k} + \tilde{k} \cdot k]. \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

Com este resultado (5.5) é escrito como

$$-i\Sigma(p) = \frac{2e^2}{\theta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{m\gamma \cdot \tilde{k} - p \cdot \tilde{k}}{[(p-k)^2 - m^2] \tilde{k} \cdot k} + \frac{1}{(p-k)^2 - m^2} \right\} \tag{5.10}$$

Substituindo  $\tilde{k}$  pela sua definição  $\tilde{k}^\mu \equiv (\alpha k^0, \mathbf{k})$  obtemos

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma(p) &= \frac{2e^2}{\theta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\alpha(m\gamma^0 - p^0)k^0 - (m\gamma - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{k}}{[(p-k)^2 - m^2] [\alpha k_0^2 - \mathbf{k}^2]} + \frac{1}{(p-k)^2 - m^2} \right\} \\
 &= \frac{2e^2}{\theta} \left\{ \Sigma_1(p) + \Sigma_2(p) + \Sigma_3(p) \right\} \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

O cálculo de  $\Sigma_3(p)$  tem como resultado:

$$\Sigma_3(p) = \frac{im}{4\pi},$$

e portanto

$$-i\Sigma(p) = \frac{2e^2}{\theta} \left\{ \Sigma_1(p) + \Sigma_2(p) \right\} + 2im\beta, \quad (5.12)$$

onde definimos

$$\beta = \frac{e^2}{4\pi\theta}. \quad (5.13)$$

Para o cálculo de  $\Sigma_1(p)$  e  $\Sigma_2(p)$  utilizaremos a técnica de parametrização de Feynman, segundo a qual podemos combinar os termos do denominador de acordo com:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2}. \quad (5.14)$$

Para  $a = (p-k)^2 - m^2$ ,  $b = \tilde{k} \cdot k \equiv \alpha k_0^2 - \mathbf{k}^2$  e definindo  $\mathcal{D} = ax + b(1-x)$ , após um cálculo algébrico e completando os termos quadráticos obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & \left( \sqrt{x + \alpha(1-x)}k_0 - \frac{p_0x}{\sqrt{x + \alpha(1-x)}} \right)^2 - (\mathbf{k} - \mathbf{p}x)^2 - \\ & - \frac{p_0^2x^2}{x + \alpha(1-x)} + (\mathbf{p}x)^2 + (p^2 - m^2)x. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Desta forma, podemos escrever  $\Sigma_1(p)$  e  $\Sigma_2(p)$  como:

$$\Sigma_1(p) = \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\alpha(m\gamma_0 - p_0)k_0}{\mathcal{D}^2} \quad (5.16)$$

$$\Sigma_2(p) = \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(m\gamma^j - p^j)k_j}{\mathcal{D}^2} \quad (5.17)$$

Podemos observar que (5.15) tem uma estrutura não covariante, e que o parâmetro interpolante de gauge  $\alpha$  aparece somente nas componentes temporais. Esta estrutura não covariante nos obrigaria a realizar a integração no espaço dos momentos em  $dk^0$  e  $d^2\mathbf{k}$  separadamente (este cálculo já foi feito no gauge de Coulomb ( $\alpha = 0$ ), por Nascimento et al na teoria de Chern-Simons em (2+1)D e por Adkins na teoria de Maxwell em (3+1)D). Aqui nós adotaremos um outro procedimento para fazer estas integrais, por meio da mudança de variáveis

$$\xi_0 = \sqrt{\mathcal{H}(x, \alpha)}k_0 - \frac{p_0x}{\sqrt{\mathcal{H}(x, \alpha)}}, \quad (5.18)$$

$$\xi_j = k_j - p_jx, \quad (5.19)$$

onde por simplicidade de notação definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x, \alpha) &= x + \alpha(1 - x), \\ \mathcal{C} &= \frac{(p_0 x)^2}{\mathcal{H}(x, \alpha)} - (\mathbf{p}x)^2 + (m^2 - p^2)x \equiv \mathcal{C}(p, m, \alpha, x)\end{aligned}\quad (5.20)$$

Com esta mudança de variáveis podemos escrever (5.15) como

$$\mathcal{D} = \xi_0^2 - \xi^2 - \mathcal{C} = \xi^2 - \mathcal{C}, \quad (5.21)$$

e desta forma (5.16) e (5.17) são reescritos como

$$\begin{aligned}\Sigma_1(p) &= (m\gamma_0 - p_0) \left\{ \int_0^1 dx \frac{\alpha}{\mathcal{H}(x, \alpha)} \int \frac{d^3\xi}{(2\pi)^3} \frac{\xi_0}{(-\xi^2 + \mathcal{C})^2} + \right. \\ &\quad \left. + p_0 \int_0^1 dx \frac{x}{\mathcal{H}(x, \alpha) \sqrt{\mathcal{H}(x, \alpha)}} \int \frac{d^3\xi}{(2\pi)^3} \frac{1}{(-\xi^2 + \mathcal{C})^2} \right\}\end{aligned}\quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}\Sigma_2(p) &= (m\gamma^j - p^j) \left\{ \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}(x, \alpha)}} \int \frac{d^3\xi}{(2\pi)^3} \frac{\xi_j}{(-\xi^2 + \mathcal{C})^2} + \right. \\ &\quad \left. + p_j \int_0^1 dx \frac{x}{\sqrt{\mathcal{H}(x, \alpha)}} \int \frac{d^3\xi}{(2\pi)^3} \frac{1}{(-\xi^2 + \mathcal{C})^2} \right\}\end{aligned}\quad (5.23)$$

Com a mudança de variáveis (5.18) e (5.19) reescrevemos  $\Sigma_1(p)$  e  $\Sigma_2(p)$  em função de duas integrais covariantes, cujos resultados estão apresentados em (5.1) ( Verificamos a validade deste artifício reproduzindo resultados já conhecidos calculados nos gauges covariante ( $\alpha = 1$ ) e não covariante ( $\alpha = 0$ )).

Integrando (5.22) e (5.23) no espaço dos momentos obtemos

$$\Sigma_1(p) = -\frac{i}{8\pi} (p_0^2 - m\gamma_0 p_0) \tilde{\mathcal{S}}(p, m, \alpha), \quad (5.24)$$

$$\Sigma_2(p) = \frac{i}{8\pi} (\mathbf{p}^2 - m\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) \mathcal{S}(p, m, \alpha). \quad (5.25)$$

onde

$$\mathcal{S}(p, m, \alpha) = \int_0^1 dx \frac{x}{\sqrt{p_0^2 x^2 + \mathcal{H}(x, \alpha) [(m^2 - p^2)x - (\mathbf{p}x)^2]}}, \quad (5.26)$$

$$\tilde{\mathcal{S}}(p, m, \alpha) = \int_0^1 dx \frac{\alpha x}{\mathcal{H}(x, \alpha) \sqrt{p_0^2 x^2 + \mathcal{H}(x, \alpha) [(m^2 - p^2)x - (\mathbf{p}x)^2]}}. \quad (5.27)$$

Desta forma obtemos para  $\Sigma(p)$

$$-i\Sigma(p) = -i\beta \left\{ (p_0^2 - m\gamma_0 p_0) \tilde{S}(p, m, \alpha) - (\mathbf{p}^2 - m\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) S(p, m, \alpha) - 2m \right\} \quad (5.28)$$

Por simplicidade de notação, nos referiremos a (5.26) e (5.27) como  $S$  e  $\tilde{S}$ .

## 5.2 Correção de Vértice

Nesta sessão vamos estudar o caso em que um elétron emite um fóton e que, antes de absorve-lo novamente, é espalhado pelo campo de gauge. Pelas regras de Feynman, este efeito é representado pelo diagrama da figura (5.2).

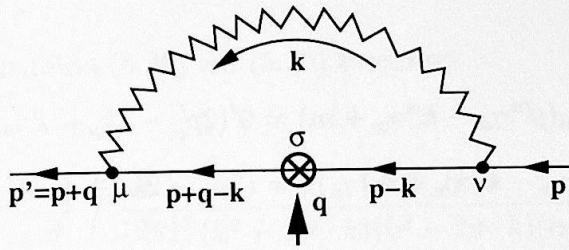


Figura 5.2: Diagrama de Correção de Vértice

Em (5.2)  $q$  é o momento transferido do campo de gauge para o elétron. Verificamos que este diagrama apresenta uma divergência logarítmica.

Aplicando as regras de Feynman no espaço dos momentos, a representação explícita deste diagrama é dada por

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \Lambda_\sigma(p, p') u(p) &= \bar{u}(p') \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ (-ie\gamma_\mu) S_F(p' - k) (-ie\gamma_\sigma) S_F(p - k) \right. \\ &\quad \left. \cdot (-ie\gamma_\nu) \Delta^{\nu\mu}(k) \right\} u(p) \\ &= -\frac{ie^3}{\theta} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\bar{u}(p') \gamma_\mu (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma_\sigma (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\nu}{[(p' - k)^2 - m^2][(p - k)^2 - m^2]} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{\epsilon^{\nu\mu\rho} \tilde{k}_\rho}{\tilde{k} \cdot k} u(p) \right\} \\ &= -\frac{ie^3}{\theta} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\bar{u}(p') \mathcal{N}_\sigma u(p)}{\mathcal{D}} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Como faremos o cálculo do termo de correção de vértice na mass-shell, na qual  $p_0 = w_p$  e  $p'_0 = w_{p'}$ , podemos aplicar a equação de movimento (3.13) para o campo  $u(p)$  e a equação correspondente para o campo  $\bar{u}(p)$

$$\bar{u}(p')(\not{p}' - m) = 0. \quad (5.30)$$

O numerador de (5.29) é dado por:

$$\bar{u}' \mathcal{N}_\sigma u = \bar{u}' \gamma_\mu (p'^\alpha \gamma_\alpha - k^\alpha \gamma_\alpha + m) \gamma_\sigma (p^\alpha \gamma_\alpha - k^\alpha \gamma_\alpha + m) \gamma_\nu \epsilon^{\nu\mu\rho} \tilde{k}_\rho u, \quad (5.31)$$

onde, por simplicidade de notação, adotamos  $\bar{u}' \equiv \bar{u}(p')$  e  $u \equiv u(p)$ . Aplicando (3.13), (5.6) e (5.30) obtemos

$$\begin{aligned} \bar{u}' \gamma_\mu (p'^\alpha \gamma_\alpha - k^\alpha \gamma_\alpha + m) &= \bar{u}' (2p'_\mu - 2k_\mu + \not{k} \gamma_\mu) \\ (p^\alpha \gamma_\alpha - k^\alpha \gamma_\alpha + m) \gamma_\mu u &= (2p_\nu - 2k_\nu + \gamma_\nu \not{k}) u \end{aligned} \quad (5.32)$$

Substituindo (5.32) em (5.31) temos

$$\begin{aligned} \bar{u}' \mathcal{N}_\sigma u &= \bar{u}' (2p'_\mu - 2k_\mu + \not{k} \gamma_\mu) \gamma_\sigma (2p_\nu - 2k_\nu + \gamma_\nu \not{k}) \epsilon^{\nu\mu\rho} \tilde{k}_\rho u \\ &= \bar{u}' \left[ 4p'_\mu p_\nu \gamma_\sigma - 4p'_\mu k_\nu \gamma_\sigma + 2p'_\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu \not{k} - 4p_\nu k_\mu \gamma_\sigma + 4k_\mu k_\nu \gamma_\sigma \right. \\ &\quad \left. - 2k_\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu \not{k} + 2p_\nu \not{k} \gamma_\mu \gamma_\sigma - 2k_\nu \not{k} \gamma_\mu \gamma_\sigma + \not{k} \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu \not{k} \right] \epsilon^{\nu\mu\rho} \tilde{k}_\rho u \end{aligned} \quad (5.33)$$

Uma vez que o tensor  $\epsilon^{\nu\mu\rho}$  é anti-simétrico, somente os termos anti-simétricos de (5.33) se mantem após a contração. Além disso, podemos trocar os índices  $\mu$  e  $\nu$  entre si, bastando apenas inverter o sinal do termo. Portanto

$$\begin{aligned} \bar{u}' \mathcal{N}_\sigma u &= \bar{u}' \left[ 4p'_\mu p_\nu \gamma_\sigma - 4Q_\mu k_\nu \gamma_\sigma + 2p'_\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu \not{k} - 2p_\mu \not{k} \gamma_\nu \gamma_\sigma + \right. \\ &\quad \left. + 2k_\mu (\not{k} \gamma_\nu \gamma_\sigma - \gamma_\sigma \gamma_\nu \not{k}) + \not{k} \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu \not{k} \right] \epsilon^{\nu\mu\rho} \tilde{k}_\rho u, \end{aligned} \quad (5.34)$$

onde introduzimos  $Q = p' - p$ .

Da álgebra das matrizes de Dirac obtemos

$$\begin{aligned}
\cancel{k}\gamma_\nu\gamma_\sigma &= k_\nu\gamma_\sigma - k_\sigma\gamma_\nu + g_{\nu\sigma}\cancel{k} + i\epsilon_{\sigma\nu\alpha}k^\alpha, \\
\gamma_\sigma\gamma_\nu\cancel{k} &= k_\nu\gamma_\sigma - k_\sigma\gamma_\nu + g_{\sigma\nu}\cancel{k} - i\epsilon_{\sigma\nu\alpha}k^\alpha, \\
\cancel{k}\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\nu\cancel{k} &= g_{\mu\sigma}\cancel{k}\gamma_\nu\cancel{k} + g_{\sigma\nu}\cancel{k}\gamma_\mu\cancel{k} - g_{\mu\nu}\cancel{k}\gamma_\sigma\cancel{k} - i\epsilon_{\mu\sigma\nu}k^2.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Substituindo (5.35) em (5.34) obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{u}'\mathcal{N}\sigma u &= \bar{u}'\left[2Q_\mu(\cancel{k}g_{\nu\sigma} - k_\nu\gamma_\sigma - k_\sigma\gamma_\nu) - (2iP_\mu k^\alpha - 4ik_\mu k^\alpha)\epsilon_{\sigma\nu\alpha} - i\epsilon_{\mu\sigma\nu}k^2\right. \\
&\quad \left.+ 4p'_\mu p_\nu\gamma_\sigma\right]\epsilon^{\nu\mu\rho}\tilde{k}_\rho u,
\end{aligned} \tag{5.36}$$

onde  $P = p + p'$ . Substituindo (5.36) em (5.29) teremos:

$$\bar{u}'\Lambda_\sigma(p, p')u = \frac{ie^3}{\theta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\bar{u}'\mathcal{N}_\sigma(k)u}{(k^2 - 2p' \cdot k)(k^2 - 2p \cdot k)(\alpha k_0^2 - \mathbf{k}^2)}. \tag{5.37}$$

O denominador de (5.37), mediante o método de parametrização de Feynman, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{abc} &= 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y}{[axy + by(1-x) + c(1-y)]^3} \\
\frac{1}{abc} &= 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y}{\mathcal{D}^3}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Definindo:

$$\begin{aligned}
a &= k^2 - 2p' \cdot k = k_0^2 - \mathbf{k}^2 - 2p'_0 k_0 + 2\vec{p}' \cdot \mathbf{k}, \\
b &= k^2 - 2p \cdot k = k_0^2 - \mathbf{k}^2 - 2p_0 k_0 + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}, \\
c &= \alpha k_0^2 - \mathbf{k}^2,
\end{aligned} \tag{5.39}$$

o denominador de (5.38) pode ser escrito como

$$\mathcal{D} = \mathcal{H}(y, \alpha)k_0^2 - 2P_{x0}yk_0 + 2\mathbf{P}_{xy} \cdot \mathbf{k} - \mathbf{k}^2, \tag{5.40}$$

onde introduzimos as variáveis

$$\mathcal{H}(y, \alpha) = y + \alpha(1 - y), \quad (5.41)$$

$$P_{x\mu} = p'_\mu x + p_\mu(1 - x) \equiv p_\mu + xQ_\mu. \quad (5.42)$$

Completando os termos quadráticos de (5.40) podemos escrever:

$$\mathcal{D} = \left( \sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}k_0 - \frac{P_{x0}y}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} \right)^2 - (\mathbf{k} - \mathbf{P}_x y)^2 + \mathbf{P}_x^2 y^2 - \frac{P_{x0}^2 y^2}{\mathcal{H}(y, \alpha)}. \quad (5.43)$$

Novamente podemos dar uma estrutura covariante a (5.36) introduzindo as variáveis:

$$\xi_0 = \sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}k_0 - \frac{P_{x0}y}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}}, \quad (5.44)$$

$$\xi_j = k_j - P_{xj}y, \quad (5.45)$$

$$\mathcal{C} = y^2 \left( \frac{P_{x0}^2}{\mathcal{H}(y, \alpha)} - \mathbf{P}_x^2 \right) = \mathcal{C}(P_{x\mu}, y, \alpha). \quad (5.46)$$

Com as mudanças de variáveis que introduzimos podemos escrever (5.37) como

$$\bar{u}' \Lambda_\sigma(p, p') u = \frac{2ie^3}{\theta} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} \int \frac{d^3\xi}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{N}_\sigma(\xi)}{(-\xi^2 + \mathcal{C})^3}. \quad (5.47)$$

Como as variáveis  $k_0$  e  $k_j$  se transformam nas novas variáveis  $\xi_0$  e  $\xi_j$  de formas distintas,

teremos que calcular separadamente os termos  $\bar{u}' \Lambda_0(p, p') u$  e  $\bar{u}' \Lambda_j(p, p') u$ .

Desenvolvendo o numerador apresentado em (5.36) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\sigma(k) &= 2Q_\mu \tilde{k}_\rho k^\zeta g_{\nu\sigma} \epsilon^{\nu\mu\rho} \bar{u}' \gamma_\zeta u - 2Q_\mu k_\nu \tilde{k}_\rho \epsilon^{\nu\mu\rho} \bar{u}' \gamma_\sigma u - 2Q_\mu k_\sigma \tilde{k}_\rho \epsilon^{\nu\mu\rho} \bar{u}' \gamma_\nu u \\ &\quad - 2iP_\mu k^\alpha \tilde{k}_\rho \epsilon_{\sigma\nu\alpha} \epsilon^{\nu\mu\rho} \bar{u}' u + 4ik_\mu k^\alpha \tilde{k}_\rho \epsilon_{\sigma\nu\alpha} \epsilon^{\nu\mu\rho} \bar{u}' u \\ &\quad - ik^2 \tilde{k}_\rho \epsilon_{\mu\sigma\nu} \epsilon^{\nu\mu\rho} \bar{u}' u + 4p'_\mu p_\nu \tilde{k}_\rho \epsilon^{\nu\mu\rho} \bar{u}' \gamma_\sigma u. \end{aligned} \quad (5.48)$$



A aplicação de (2.37) em (5.48) tem o resultado:

$$\mathcal{N}_\sigma(k) = \sum_{i=1}^7 \mathcal{N}_{\sigma i}(k),$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\sigma 1}(k) &= 2(\alpha k_0^2 Q_\mu \epsilon_\sigma^{\mu 0} + k_0 k_n Q_\mu \epsilon_\sigma^{\mu n}) \bar{u}' \gamma_0 u \\ &\quad - 2(\alpha k_0 k^j Q_\mu \epsilon_\sigma^{\mu 0} + k_n k^j Q_\mu \epsilon_\sigma^{\mu n}) \bar{u}' \gamma_j u, \\ \mathcal{N}_{\sigma 2}(k) &= -2(\alpha Q_\mu k_\nu k_0 \epsilon^{\nu \mu 0} + Q_\mu k_\nu k_n \epsilon^{\nu \mu n}) \bar{u}' \gamma_\sigma u, \\ \mathcal{N}_{\sigma 3}(k) &= -2(\alpha k_0 Q_\mu \epsilon^{\nu \mu 0} + k_n Q_\mu \epsilon^{\nu \mu n}) \bar{u}' \gamma_\nu u k_\sigma, \\ \mathcal{N}_{\sigma 4}(k) &= 2i[(\alpha k_0^2 - \mathbf{k}^2) P_\sigma - P_\mu k^\mu \tilde{k}_\sigma] \bar{u}' u, \\ \mathcal{N}_{\sigma 5}(k) &= 4i[(k_0^2 - \mathbf{k}^2) \tilde{k}_\sigma - (\alpha k_0^2 - \mathbf{k}^2) k_\sigma] \bar{u}' u, \\ \mathcal{N}_{\sigma 6}(k) &= -2i(k_0^2 - \mathbf{k}^2) \tilde{k}_\sigma \bar{u}' u, \\ \mathcal{N}_{\sigma 7}(k) &= 4(\alpha p'_\mu p_\nu k_0 \epsilon^{\nu \mu 0} + p'_\mu p_\nu k_n \epsilon^{\nu \mu n}) \bar{u}' \gamma_\sigma u. \end{aligned} \quad (5.49)$$

O cálculo de (5.47), após a substituição de (5.44) e (5.45) em (5.49), pode ser muito simplificado devido ao fato de que o momento magnético anômalo pode ser calculado no limite de baixos momentos. Portanto, vamos introduzir as aproximações que podem ser feitas em (5.49).

Os espinores que descrevem o movimento do elétron, dados por

$$u(p_0, \mathbf{p}) = \sqrt{\frac{w_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \frac{p_+}{w_{\mathbf{p}} + m} \end{bmatrix}, \quad (5.50)$$

e

$$\bar{u}(p_0, \mathbf{p}) = u(p_0, \mathbf{p})^\dagger \gamma_0 \quad (5.51)$$

no limite não relativístico ( $|\mathbf{p}| \ll m$ ) podem ser aproximados para

$$u(p_0, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{p^2}{8m^2} \\ -i \frac{p_+}{2m} \end{bmatrix}, \quad (5.52)$$

$$\bar{u}(p_0, \mathbf{p}) = \left[ 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2} \quad -i\frac{p_-}{2m} \right]. \quad (5.53)$$

Aplicando as aproximações apresentadas em (5.53) obtemos

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_0, \mathbf{p}')u(p_0, \mathbf{p}) &= 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right), \\ \bar{u}(p_0, \mathbf{p}')\gamma_0 u(p_0, \mathbf{p}) &= 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right), \\ \bar{u}(p_0, \mathbf{p}')\gamma_j u(p_0, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2m} (P_j + i\epsilon_{0jl}Q^l) + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^3}{m^3}\right). \end{aligned} \quad (5.54)$$

Por outro lado, como  $p_0 = w_{\mathbf{p}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} = m + \mathcal{O}(\mathbf{p}^2/m^2)$  temos que

$$\begin{aligned} P_0 &= 2m + \mathcal{O}(\mathbf{p}^2/m^2), \\ Q_0 &= 0. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Além destes resultados, podemos fazer as seguintes aproximações em (5.42) e (5.46):

$$P_{x\mu} = p_\mu + xQ_\mu \rightarrow P_{0x} \approx m \quad (5.56)$$

$$C = \frac{y^2}{\mathcal{H}(y, \alpha)} (P_{x0}^2 - \mathcal{H}(y, \alpha)P_x^2) \approx \frac{m^2 y^2}{\mathcal{H}(y, \alpha)} + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right) \quad (5.57)$$

Aplicando os resultados de (5.54) e (5.55) em (5.49) obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\sigma 1}(k) &= 2(\alpha k_0^2 Q_j \epsilon_\sigma^{j0} + k_0 k_n Q_l \epsilon_\sigma^{ln}) + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right) \\ \mathcal{N}_{\sigma 2}(k) &= -2[(\alpha - 1)k_0 k_n Q_j \epsilon^{nj0} + k_s k_n Q_j \epsilon^{sjn}] \bar{u}' \gamma_\sigma u \\ \mathcal{N}_{\sigma 3}(k) &= -2k_n Q_j \epsilon^{0jn} k_\sigma + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right) \\ \mathcal{N}_{\sigma 4}(k) &= 2i[(\alpha k_0^2 - \mathbf{k}^2)P_\sigma - P_\mu k^\mu \tilde{k}_\sigma] \\ \mathcal{N}_{\sigma 5}(k) &= 4i[(k_0^2 - \mathbf{k}^2)\tilde{k}_\sigma - (\alpha k_0^2 - \mathbf{k}^2)k_\sigma] \\ \mathcal{N}_{\sigma 6}(k) &= -2i(k_0^2 - \mathbf{k}^2)\tilde{k}_\sigma \\ \mathcal{N}_{\sigma 7}(k) &= \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right) \end{aligned} \quad (5.58)$$

Invertendo as equações (5.44) e (5.45) e aplicando o resultado apresentado em (5.56), nos permite reescrever (5.58) como:

$$\mathcal{N}_{\sigma 1}(\xi) = 2\alpha \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right)^2 Q_j \epsilon_{\sigma}^{j0} +$$

$$+ 2 \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) \cdot (\xi_n + P_{xn}y) Q_j \epsilon_{\sigma}^{jn}$$

$$\mathcal{N}_{\sigma 2}(\xi) = \left[ 2(1 - \alpha) \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) (\xi_n + P_{xn}y) Q_j \epsilon^{nj0} \right.$$

$$\left. - 2(\xi_s + P_{xs}y) (\xi_n + P_{xn}y) Q_j \epsilon^{sjn} \right] \bar{u}' (g_{\sigma}^0 \gamma_0 + g_{\sigma}^l \gamma_l) u$$

$$\mathcal{N}_{\sigma 3}(\xi) = -2(\xi_n + P_{xn}y) Q_j \epsilon^{ojn} \left[ g_{\sigma}^0 \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) + g_{\sigma}^l (\xi_l + P_{xl}y) \right]$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{\sigma 4}(\xi) = & 2i \left\{ \left[ \alpha \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right)^2 - (\xi + P_x y)^2 \right] (2mg_\sigma^0 + g_\sigma^l P_l) \right. \\
& - \left[ 2m \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) + P_j (\xi^j + P_x^j y) \right] \cdot \\
& \left. \left[ \alpha \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) g_\sigma^0 + g_\sigma^l (\xi_l + P_{xl} y) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{\sigma 5}(\xi) = & 4i \left\{ \left[ \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right)^2 - (\xi + P_x y)^2 \right] \cdot \right. \\
& \cdot \left[ \alpha \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) g_\sigma^0 + g_\sigma^l (\xi_l + P_{xl} y) \right] \\
& - \left[ \alpha \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right)^2 - (\xi + P_x y)^2 \right] \cdot \\
& \left. \cdot \left[ g_\sigma^0 \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) + g_\sigma^l (\xi_l + P_{xl} y) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{5.60}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{\sigma 6}(\xi) = & -2i \left[ \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right)^2 - (\xi + P_x y)^2 \right] \cdot \\
& \cdot \left[ \alpha \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) g_\sigma^0 + g_\sigma^l (\xi_l + P_{xl} y) \right]
\end{aligned} \tag{5.61}$$

A partir de (5.61) podemos reescrever (5.47) como:

$$\bar{u}' \Lambda_\sigma(p, p') u = \sum_{i=1}^6 \bar{u}' \Lambda_{\sigma i}(p, p') u$$

onde

$$\bar{u}' \Lambda_{\sigma i}(p, p') u = \frac{2ie^3}{\theta} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} \int \frac{d^3 \xi}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{N}_{\sigma i}(\xi)}{(-\xi^2 + \mathcal{C})^2} \tag{5.62}$$

Vamos calcular explicitamente as componentes temporal e espaciais de (5.47). Este cálculo pode ser muito simplificado pelo fato de mantermos apenas os termos lineares nos momentos  $P_\mu$  e  $Q_\mu$  para o cálculo do momento magnético anômalo, além do fato de que, das integrais apresentadas em (5.1), somente são diferentes de zero aquelas que tiverem no numerador expressões como  $\xi_0^2$ ,  $1$ ,  $\xi^2$  e  $\xi^j \xi_l$ .

Para o cálculo de  $\bar{u}\Lambda_0(p,p')u$ , vamos escrever os termos de  $\mathcal{N}_{0i}$ , mantendo somente os termos que dão contribuições não nulas

$$\mathcal{N}_{01}(\xi) = 2 \left( \frac{\xi_0 \xi_n}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my \xi_n}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) Q_j \epsilon_0^{jn} = \mathcal{O} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{02}(\xi) &= 2(1 - \alpha) \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) (\xi_n + P_{xn}y) Q_j \epsilon^{nj0} \\ &\quad - 2(\xi_s + P_{xs}y) (\xi_n + P_{xn}y) Q_j \epsilon^{sjn} = \mathcal{O} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{N}_{03}(\xi) = -2 \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) (\xi_n + P_{xn}y) Q_j \epsilon^{0nj} = \mathcal{O} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{04}(\xi) &= -4im (\xi + \mathbf{P}_x y)^2 - 2i\alpha P_j \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) (\xi^j + P_x^j y) \\ &= -4im \xi^2 + \mathcal{O} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{05}(\xi) &= 4i(1 - \alpha) \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) (\xi + \mathbf{P}_x y)^2 \\ &= \frac{4imy(1 - \alpha)}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \xi^2 + \mathcal{O} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{06}(\xi) &= -i\alpha \left[ \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right)^3 - (\xi + \mathbf{P}_x y)^2 \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) \right] \\ &= -\frac{6i\alpha my}{\mathcal{H}^2(y, \alpha)} \xi_0^2 - \frac{2i\alpha m^3 y^3}{\mathcal{H}^3(y, \alpha)} + \frac{2i\alpha my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} + \mathcal{O} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \end{aligned}$$

Fazendo primeiramente a integração no espaço dos momentos em em seguida as integrações paramétricas obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{u}'\Lambda_{01}(p, p')u &= \mathcal{O}\left(\frac{p^2}{m^2}\right), \\
\bar{u}'\Lambda_{02}(p, p')u &= \mathcal{O}\left(\frac{p^2}{m^2}\right), \\
\bar{u}'\Lambda_{03}(p, p')u &= \mathcal{O}\left(\frac{p^2}{m^2}\right), \\
\bar{u}'\Lambda_{04}(p, p')u &= 2ie\beta, \\
\bar{u}'\Lambda_{05}(p, p')u &= -2ie\beta\left(1 + \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha}\right), \\
\bar{u}'\Lambda_{06}(p, p')u &= ie\beta\left(\frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha}\right).
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Portanto

$$\bar{u}'\Lambda_0(p, p')u = \sum_{i=1}^6 \bar{u}'\Lambda_{0i}(p, p')u = -ie\beta\left(\frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{p^2}{m^2}\right). \tag{5.64}$$

onde  $\beta$  foi definido em (5.13).

Para o cálculo da componente espacial de (5.29), ou seja,  $\bar{u}'\Lambda_l(p, p')u$ , com  $l = 1, 2$  adotaremos o mesmo procedimento, e sendo assim os termos de  $\mathcal{N}_{li}$  que dão contribuições não nulas são

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{l1}(\xi) &= 2\alpha \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right)^2 Q_j \epsilon_l^{j0} + 2 \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) \\
&\quad \cdot (\xi_n + P_{xn}y) Q_j \epsilon_l^{jn}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{N}_{l1}(\xi) = 2\alpha Q_j \epsilon_l^{j0} \left( \frac{\xi_0^2}{\mathcal{H}(y, \alpha)} + \frac{m^2 y^2}{\mathcal{H}^2(y, \alpha)} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{l2}(\xi) &= \frac{1}{m} \left[ (1 - \alpha) \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) (\xi_n + P_{xn}y) Q_j \epsilon^{nj0} - (\xi_s + P_{xs}y) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (\xi_n + P_{xn}y) Q_j \epsilon^{sjn} \right] \cdot (P_j + i\epsilon_{0jl} Q^l) = \mathcal{O} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{l3}(\xi) &= -2(\xi_n + P_{xn}y)(\xi_l + P_{xl}y) Q_j \epsilon^{0jn} \\ &= -2Q_j \epsilon^{0jn} \xi_l \xi_n + \mathcal{O} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{l4}(\xi) &= 2iP_l \left[ \alpha \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)^2} \right)^2 - (\xi + \mathbf{P}_x y)^2 \right] - \\ &\quad - 4im \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) (\xi_l + P_{xl}y) - 2iP_j (\xi^j + P_x^j y) (\xi_l + P_{xl}y) \\ &= 2i\alpha P_l \left( \frac{\xi_0^2}{\mathcal{H}(y, \alpha)} + \frac{m^2 y^2}{\mathcal{H}^2(y, \alpha)} \right) - 2iP_l \xi^2 - \frac{4im^2 y^2}{\mathcal{H}(y, \alpha)} P_{xl} - 2iP_j \xi^j \xi_l + \mathcal{O} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{l5}(\xi) &= 4i(1 - \alpha) \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right)^2 (\xi_l + P_{xl}y) \\ &= 4i(1 - \alpha) \left( \frac{P_{xl}y}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \xi_0^2 + \frac{m^2 y^3 P_{xl}}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{l6}(\xi) &= -i \left[ \left( \frac{\xi_0}{\sqrt{\mathcal{H}(y, \alpha)}} + \frac{my}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \right)^2 (\xi_l + P_{xl}y) - (\xi + \mathbf{P}_x y)^2 (\xi_l + P_{xl}y) \right] \\ &= -\frac{2iP_{xl}y}{\mathcal{H}(y, \alpha)} \xi_0^2 - \frac{2im^2 y^3 P_{xl}}{\mathcal{H}^2(y, \alpha)} + 2iP_{xl}y \xi^2 - 4iP_{xj}y \xi^j \xi_l + \mathcal{O} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \end{aligned} \quad (5.65)$$

Integrando no espaço dos momentos e em seguida fazendo as integrações paramétricas obtemos:

$$\begin{aligned}
\bar{u}'\Lambda_{11}(p, p')u &= \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right), \\
\bar{u}'\Lambda_{12}(p, p')u &= \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right), \\
\bar{u}'\Lambda_{13}(p, p')u &= \frac{e\beta}{2m}\epsilon_{0lj}Q^j + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right), \\
\bar{u}'\Lambda_{14}(p, p')u &= \frac{ie\beta}{m}P_l + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right), \\
\bar{u}'\Lambda_{15}(p, p')u &= \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right), \\
\bar{u}'\Lambda_{16}(p, p')u &= -\frac{ie\beta}{2m}P_l + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right).
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Portanto obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{u}'\Lambda_l(p, p')u &= \sum_{i=1}^6 \bar{u}'\Lambda_{li}(p, p')u \\
&= \frac{e\beta}{2m}(iP_l + \epsilon_{0lj}Q^j) + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right).
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Com o objetivo de apresentar os resultados que serão utilizados juntos, reproduzimos os mesmos abaixo:

$$\bar{u}(p')\Lambda_0(p', p)u(p) = -ie\beta \left[ \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} \right] \tag{5.68}$$

$$\bar{u}(p')\Lambda_l(p', p)u(p) = \frac{e\beta}{2m} [iP_l + \epsilon_{0lj}Q^j] \tag{5.69}$$

É interessante observar que a contribuição do parâmetro interpolante de gauge  $\alpha$  continua a aparecer somente na componente temporal. Nos seus valores limite obtemos

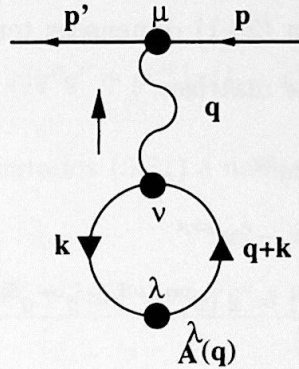
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} = 0 \qquad \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} = -1,$$

em concordância com os resultados conhecidos da contribuição da correção de vértice nos gauges não covariante ( $\alpha = 0$ ) e covariante ( $\alpha = 1$ ).



### 5.3 Correção devida à Polarização do Vácuo

O último efeito que vamos estudar corresponde ao efeito da polarização do vácuo no processo de espalhamento do elétron. Este efeito corresponde à polarização do campo de gauge num par elétron-pósitron, que se recombina num fóton, o qual se propaga e interage com o elétron. O diagrama correspondente a este efeito é dado por

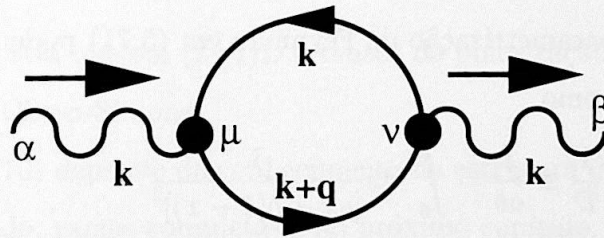


Este diagrama corresponde ao elemento de matriz

$$\mathcal{M}_P = \bar{u}(p-k)(-ie\gamma_\mu)u(p)\Delta^{\mu\nu}(k)\Pi_{\nu\lambda}^R(k)A^\lambda(q)u(p), \quad (5.70)$$

onde  $\Pi_{\nu\lambda}^R(k)$  é o tensor de polarização do vácuo renormalizado.

Vamos primeiramente determinar a estrutura do tensor de polarização do vácuo não renormalizado através do diagrama



O diagrama acima corresponde ao elemento de matriz  $\Delta_{\alpha\mu}(k)\Pi^{\mu\nu}(k)\Delta_{\nu\beta}(k)$ , onde o tensor de polarização do vácuo  $\Pi^{\mu\nu}(q)$ , que apresenta uma divergência linear, é dado por

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = (-1) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (-ie\gamma^\mu)S_F(k+q)(-ie\gamma^\nu)S_F(k)\gamma^\mu$$

$$\begin{aligned}
&= -e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma^\mu \frac{\not{k} + \not{q} + m}{(q+k)^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} \gamma^\mu \\
&= -\frac{e^2}{8\pi^3} \int d^3k \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu (\not{k} + \not{q} + m) \gamma^\nu (\not{k} + m)]}{[(q+k)^2 - m^2](k^2 - m^2)} \\
&= -\frac{e^2}{8\pi^3} \int d^3k \frac{\text{Tr} \mathcal{P}^{\mu\nu}}{\mathcal{D}}
\end{aligned} \tag{5.71}$$

Da algebra das matrizes de Dirac em (2+1) dimensões temos as seguintes propriedades para o cálculo do traço do produto de matrizes:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \\
\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho\} &= -2i\epsilon^{\mu\nu\rho} \\
\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta\} &= 2(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta})
\end{aligned} \tag{5.72}$$

Aplicando (5.72) no numerador de (5.71) obtemos

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \mathcal{P}^{\mu\nu} &= \text{Tr}\{\gamma^\mu [(q_\alpha + k_\alpha) \gamma^\alpha + m] \gamma^\nu (k_\beta \gamma^\beta + m)\} \\
&= \text{Tr}\left[(q_\alpha + k_\alpha) k_\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta + (q_\alpha + k_\alpha) m \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu + m k_\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta + m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu\right] \\
&= 2\left[(q^\mu + k^\mu) k^\nu + (q^\nu + k^\nu) k^\mu - g^{\mu\nu} (q_\alpha + k_\alpha) k^\alpha + im\epsilon^{\mu\nu\alpha} q_\alpha + m^2 g^{\mu\nu}\right]
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Aplicando o método da parametrização de Feynman em (5.71) podemos rescrever o denominador da expressão como

$$\frac{1}{\mathcal{D}} \equiv \frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2}$$

Definindo  $a = (q+k)^2 - m^2$  e  $b = k^2 - m^2$  temos que

$$\mathcal{D} = k^2 + 2q \cdot kx + q^2 x - m^2 \tag{5.74}$$

Introduzindo a mudança de variável  $k \rightarrow k - qx$  obtemos

$$\mathcal{D} = k^2 - C \tag{5.75}$$

onde  $C = m^2 - k^2 x(1 - x)$ . No limite de baixos momentos podemos fazer a aproximação

$$C = m^2(1 - x(1 - x)) + \mathcal{O}(q^2/m^2). \quad (5.76)$$

Com a mudança de variável feita para reescrever  $\mathcal{D}$  o numerador de (5.71), mantendo somente os termos que dão contribuição não nulas na integração no espaço dos momentos, é escrito como:

$$\text{Tr} \mathcal{P}^{\mu\nu} = 2 \left\{ 2k^\mu k^\nu - 2x(1 - x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} [x(1 - x)k^2 - k^2 + m^2] + i\epsilon^{\mu\nu\alpha} q_\alpha \right\} \quad (5.77)$$

Com os resultados acima apresentados (5.71) é dado por

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -\frac{e^2}{4\pi^3} \int_0^1 dx \int d^3k \frac{2k^\mu k^\nu - 2x(1 - x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} [x(1 - x)q^2 - k^2 + m^2] + i\epsilon^{\mu\nu\alpha} q_\alpha}{[-k^2 + C]^2} \quad (5.78)$$

Fazendo a intergração de (5.78) no espaço dos momentos, com os resultados das integrais regularizadas dimensionalmente apresentados em (5.1), e em seguida fazendo a integração paramétrica obtemos

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -i \frac{e^2}{12\pi m} (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) + \frac{e^2}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\alpha} q_\alpha. \quad (5.79)$$

O resultado acima mostra que em (2+1)D o tensor de polarização do vácuo apresenta os termos de Maxwell e Chern-Simons.

Como o cálculo de (5.70) depende do conhecimento da estrutura do tensor de polarização do vácuo renormalizado, vamos completa-lo no próximo capítulo.

## Capítulo 6

# Renormalização e Cálculo do Momento Magnético Anômalo

Neste capítulo apresentamos o esquema de renormalização da teoria que estudamos e, em sequência calculamos o momento magnético anômalo. Seu resultado, como esperado, é independente do gauge que adotamos.

### 6.1 Renormalização

Os resultados obtidos nas correções de auto energia e de vértice apresentaram valores finitos pelo fato de que o método da regularização dimensional em  $(2+1)D$ , para cálculos no nível de um loop, as divergências existentes nos diagramas de Feynman correspondentes são eliminadas, devido ao fato de que a continuação analítica das funções divergentes são funções não divergentes. No entanto, esta particularidade do método de regularização adotado não elimina a necessidade de termos que introduzir na lagrangeana do modelo os contratermos correspondentes à renormalização de seus diversos parâmetros, o que de fato irá suprimir as divergências.

A lagrangeana renormalizada, escrita em termos dos campos não renormalizados  $\psi_0$  e  $A_0^\mu$  e das constantes não renormalizadas  $e_0$ ,  $m_0$  e  $\theta_0$ , é dada por

$$\mathcal{L}_R = i\bar{\psi}_0 \not{\partial}\psi_0 - m_0\bar{\psi}_0\psi_0 - e_0\bar{\psi}_0 \not{A}_0\psi_0 + \frac{\theta_0}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho}A_0^\mu\partial^\nu A_0^\rho. \quad (6.1)$$

Introduzindo os campos renormalizados  $\psi$  e  $A^\mu$  de acordo com

$$\psi_0 = (1+B)^{1/2}\psi, \quad (6.2)$$

$$A_0^\mu = (1+A)^{1/2}A^\mu, \quad (6.3)$$

onde  $A$  e  $B$  são os contratermos de renormalização das funções de onda dos campos  $A_0^\mu$  e  $\psi_0$ . Substituindo (6.2) e (6.3) em (6.1) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R = & (1+B)^{1/2}\bar{\psi}i \not{\partial}(1+B)^{1/2}\psi - m_0(1+B)^{1/2}\bar{\psi}(1+B)^{1/2}\psi - \\ & - e_0(1+B)^{1/2}\bar{\psi}\gamma_\mu(1+A)^{1/2}A_\mu(1+B)^{1/2}\psi + \\ & + \frac{\theta_0}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho}(1+A)^{1/2}A^\mu\partial^\nu(1+A)^{1/2}A^\rho. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Introduzindo na lagrangiana os termos que impomos corresponder aos parâmetros físicos chegamos em

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R = & i\bar{\psi} \not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi} \not{A}\psi + \frac{\theta}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu A^\rho + \\ & + B\bar{\psi}i \not{\partial}\psi - \delta m\bar{\psi}\psi - \delta e\bar{\psi} \not{A}\psi + \frac{\delta\theta}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu A^\rho, \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde

$$\delta m = m_0(1+B) - m, \quad (6.6)$$

$$\delta e = e_0(1+B)(1+A)^{1/2} - e, \quad (6.7)$$

$$\delta\theta = \theta_0(1+A) - \theta \quad (6.8)$$

são os contratermos de renormalização da massa, carga elétrica e do parâmetro de Chern-Simons.

Ná aproximação de um loop o diagrama de auto-energia renormalizado é dado por

$$-i\Sigma^R(p) = -i\Sigma^{NR}(p) + i(B \not{p} - \delta m), \quad (6.9)$$

onde por conveniência vamos redefinir  $B$  e  $\delta m$  como

$$B = \beta b \quad \delta m = \beta \delta u \quad (6.10)$$

o portanto obtemos


$$\begin{aligned} \frac{-i}{\beta} \Sigma^R(p) = & -i \left[ p^0 (p^0 - m\gamma^0) \tilde{\mathcal{S}} - p^j (p^j - m\gamma^j) \mathcal{S} - 2m - b\gamma^0 p^0 \right. \\ & \left. + b\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \delta u \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

Definindo, por simplicidade de notação

$$\begin{aligned} \eta &= p_0^2 \tilde{\mathcal{S}} - \mathbf{p}^2 \mathcal{S} + \delta u - 2m, \\ \chi &= m\mathcal{S} + b, \\ \tilde{\chi} &= m\tilde{\mathcal{S}} + b, \end{aligned} \quad (6.12)$$

Podemos escrever (6.11) como:

$$\Sigma^R(p) = \beta [\eta + \chi\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - \tilde{\chi}\gamma^0 p^0] \quad (6.13)$$

Uma vez que o diagrama de auto-energia descreve a emissão de a reabsorção de um fóton por um elétron, isto altera a estrutura do seu propagador. Temos que levar em conta efeitos como , o propagador do elétron renormalizado leva em conta todas as contribuições acima apresentadas, de forma que obtemos

$$\begin{aligned} -iS_F^R(p) &= \frac{1}{\not{p} - m} + \frac{1}{\not{p} - m} (-i\Sigma^R(p)) \frac{i}{\not{p} - m} + \dots \\ &= \frac{1}{\not{p} - m - \Sigma^R(p)} \end{aligned} \quad (6.14)$$

A partir de (6.13) podemos escrever:

$$\not{p} - m - \Sigma^R(p) = \not{q} - r \quad (6.15)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} r &= m \left( 1 + \beta \frac{\eta}{m} \right), \\ q_0 &= p_0 (1 + \beta \tilde{\chi}), \\ \mathbf{q} &= \mathbf{p} (1 + \beta \chi). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Uma vez que o propagador do elétron renormalizado pode ser reescrito como

$$\frac{S_F^R}{i} = \frac{1}{\not{q} - r} = \frac{\not{q} + r}{q^2 - r^2}, \quad (6.17)$$

o denominador de (6.17), mantendo somente os termos lineares em  $\beta$ , é dado por

$$\begin{aligned} q^2 - r^2 &= p_0^2(1 + 2\beta\tilde{\chi}) - \mathbf{p}^2(1 + 2\beta\chi) - m^2 \left(1 + 2\beta\frac{\eta}{m}\right) + \mathcal{O}(\beta^2) \\ &= (1 + 2\beta b)(p^2 - m^2) + 2\beta m(bm - \delta u + 2m) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Para manter o polo do propagador na massa física  $m$ , impomos que:

$$\delta u = m(b + 2) \quad (6.19)$$

Substituindo (6.19) e (6.18) em (6.17) obtemos:

$$\frac{S_F^R}{i} = \frac{\not{q} + r}{(1 + 2\beta b)(p^2 - m^2)} = (1 - 2\beta b) \frac{\not{q} + r}{p^2 - m^2} + \mathcal{O}(\beta^2). \quad (6.20)$$

Substituindo (6.12) em (6.16) e substituindo o resultado em (6.20) chegamos ao resultado

$$\begin{aligned} \frac{S_F^R}{i} &= \frac{1}{p^2 - m^2} \left[1 + \beta(m\tilde{\mathcal{S}} - b)\right] \left\{ \gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \left[1 + m\beta(\mathcal{S} - \tilde{\mathcal{S}})\right] + \right. \\ &\quad \left. + m \left[1 + \frac{\beta}{m} \left[(p_0^2 - m^2)\tilde{\mathcal{S}} - \mathbf{p}^2 \mathcal{S}\right]\right] \right\} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Para obtermos o propagador do elétron renormalizado vamos impor a condição que no referencial de repouso ( $\mathbf{p} = 0$ ) e para  $p_0 \rightarrow m$  a estrutura do propagador deve se reduzir a

$$\frac{S_F^R}{i} \rightarrow \frac{m(\gamma^0 + 1)}{p_0^2 - m^2}, \quad (6.22)$$

de modo que obtemos

$$b = m\tilde{\mathcal{S}}_0, \quad (6.23)$$

onde  $\tilde{S}_0 = \tilde{S}(\mathbf{p} = 0, p^0 = m)$ . Substituindo (6.23) em (6.21) obtemos:

$$S_F^R = \frac{i}{p^2 - m^2} f [\gamma^0 p^0 - \vec{\gamma} \cdot \mathbf{p} (1 + \beta z) + m(1 + \beta v)] \quad (6.24)$$

onde por simplicidade de notação definimos

$$\begin{aligned} f &= 1 + \beta m (\tilde{S} - \tilde{S}_0) \\ z &= m (\mathcal{S} - \tilde{S}) \\ v &= \frac{1}{m} [(p_0^2 - m^2) \tilde{S} - \mathbf{p}^2 \mathcal{S}] \end{aligned}$$

Vamos reescrever o propagador  $S_F^R$  (6.24) na forma:

$$\begin{aligned} \frac{S_F^R}{i} &= \frac{1}{p^2 - m^2} e^{\beta g \gamma \cdot \mathbf{p}} (\not{p} + m) e^{\beta g \gamma \cdot \mathbf{p}}, \\ &= \frac{1}{p^2 - m^2} (1 + \beta g \gamma \cdot \mathbf{p}) (\not{p} + m) (1 + \beta g \gamma \cdot \mathbf{p}) + \mathcal{O}(\beta^2), \\ &= \frac{1}{p^2 - m^2} [\not{p} + m + 2\beta g m \gamma \cdot \mathbf{p} + 2\beta g \mathbf{p}^2], \end{aligned} \quad (6.25)$$

onde  $g$  é uma constante a ser determinada. Comparando (6.25) com (6.24) chegamos em:

$$2\beta g m = -\beta z \quad \rightarrow \quad g = \frac{1}{2} (\tilde{S} - \mathcal{S}) \quad (6.26)$$

$$2\beta g \mathbf{p}^2 = \beta v m \quad \rightarrow \quad g = \frac{1}{2\mathbf{p}^2} [(p_0^2 - m^2) \tilde{S} - \mathbf{p}^2 \mathcal{S}] \quad (6.27)$$

Não temos, portanto, uma solução de  $g$  que satisfaça simultaneamente (6.26) e (6.27), o que mostra a impossibilidade do propagador renormalizado do elétron ser representado de acordo com (6.25), exceto se  $p_0^2 \rightarrow \mathbf{p}^2 + m^2$ , ou seja, se estivermos na mass-shell, na qual

$$g_{MS} = 1/2 (\tilde{S}_{MS} - \mathcal{S}_{MS}). \quad (6.28)$$

Portanto

$$S_F^R(p_0^2 \rightarrow \mathbf{p}^2 + m^2) = i \sqrt{f_{MS}} e^{\beta g_{MS} \gamma \cdot \mathbf{p}} \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} e^{\beta g_{MS} \gamma \cdot \mathbf{p}} \sqrt{f_{MS}} \quad (6.29)$$



onde  $f_{MS} = 1 + 1/2\beta m(\tilde{\mathcal{S}}_{MS} - \mathcal{S}_0)$ .

Como mostramos no capítulo 2, o propagador do elétron pode ser escrito como (3.31) e que repetimos aqui

$$\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} = \frac{m}{w} \left( \frac{u(\mathbf{p})\bar{u}(\mathbf{p})}{p_0 - w + i\varepsilon} + \frac{v(-\mathbf{p})\bar{v}(-\mathbf{p})}{p_0 + w - i\varepsilon} \right)$$

Substituindo (3.31) em (6.29) obtemos

$$S_F^R = i \frac{m}{w} \sqrt{f_{MS}} e^{\beta g_{MS} \gamma \cdot \mathbf{p}} \left( \frac{u(\mathbf{p})\bar{u}(\mathbf{p})}{p_0 - w + i\varepsilon} + \frac{v(-\mathbf{p})\bar{v}(-\mathbf{p})}{p_0 + w - i\varepsilon} \right) e^{\beta g_{MS} \gamma \cdot \mathbf{p}} \sqrt{f_{MS}} \quad (6.30)$$

Podemos definir funções de onda renormalizadas tais que:

$$S_F^R(p_0^2 \rightarrow \mathbf{p}^2 + m^2) = i \frac{m}{w} \left( \frac{\psi_R(\mathbf{p})\bar{\psi}_R(\mathbf{p})}{p_0 - w + i\varepsilon} + \frac{\chi_R(-\mathbf{p})\bar{\chi}_R(-\mathbf{p})}{p_0 + w - i\varepsilon} \right) \quad (6.31)$$

onde

$$\begin{aligned} \psi_R(\mathbf{p}) &= \sqrt{f_{MS}} e^{\beta g_{MS} \gamma \cdot \mathbf{p}} u(\mathbf{p}) \\ &= \left[ 1 + \frac{1}{2} \beta m (\tilde{\mathcal{S}}_{MS} - \tilde{\mathcal{S}}_0) \right] \left[ 1 + \frac{1}{2} \beta (\tilde{\mathcal{S}}_{MS} - \mathcal{S}_{MS}) \gamma \cdot \mathbf{p} \right] u(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (6.32)$$

As integrais  $\tilde{\mathcal{S}}_{MS}$ ,  $\mathcal{S}_0$  e  $\mathcal{S}$  têm como resultado

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_{MS} &= \alpha \int_0^1 dx \frac{x}{[x + \alpha(1-x)] \sqrt{m^2 x^2 \{ 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 x^2} [x^2 + [x + \alpha(1-x)](x + x^2)] \}}} \\ &= \frac{\alpha}{m} \int_0^1 dx \frac{1}{x + \alpha(1-x)} + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right) = -\frac{1}{m} \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right) \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_0 = \frac{\alpha}{m} \int_0^1 dx \frac{1}{x + \alpha(1-x)} = -\frac{1}{m} \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int_0^1 dx \frac{x}{\sqrt{p_0^2 x^2 + [x + \alpha(1-x)] [(m^2 - p^2)x - (x\mathbf{p})^2]}} \\ \mathcal{S}_{MS} &= \int_0^1 dx \frac{x}{\sqrt{m^2 x^2 \{ 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} [1 - [x + \alpha(1-x)]] \}}} = \frac{1}{m} + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right) \end{aligned}$$

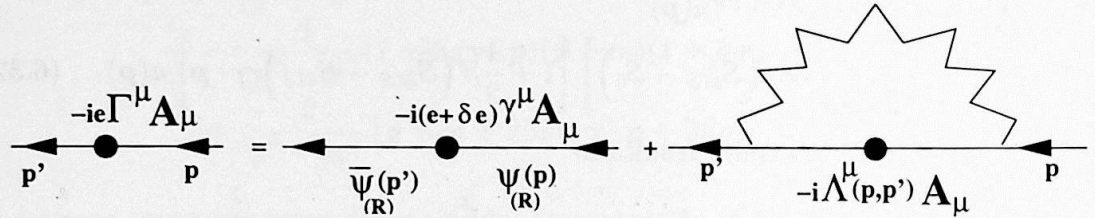
Substituindo (6.33), (6.34) e (6.35) em (6.32) obtemos a função de onda renormalizada dada por

$$\begin{aligned} \psi_R(\mathbf{p}) &= \left[ 1 - \frac{\beta}{2m} \gamma \cdot \mathbf{p} \left( 1 + \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} \right) \right] u(\mathbf{p}) \\ &= u(\mathbf{p}) + \Delta u(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (6.35)$$

Como podemos observar, o parâmetro interpolante  $\alpha$  aparece com a mesma estrutura que foi obtida no cálculo do termo temporal da correção de vértice (5.68), e que, como esperado, no gauge covariante ( $\alpha = 1$ ) não temos contribuição proveniente da inserção do diagrama de auto-energia.

## 6.2 Cálculo do Momento Magnético Anômalo

Com os resultados obtidos na seção anterior, podemos representar o esquema de renormalização numa forma mais compacta, mantendo somente os termos lineares em  $\beta$  e dado por



A figura acima será representada por  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_3$ . Primeiramente vamos apresentar o cálculo do elemento de matriz  $\mathcal{M}_1$  de acordo com

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_1 &= -i(e + \delta e) A_\mu \bar{\psi}_R(\mathbf{p}') \gamma^\mu \psi_R(\mathbf{p}) \\
 &= -i(e + \delta e) A_\mu [\bar{u}(\mathbf{p}') + \Delta \bar{u}(\mathbf{p}')] \gamma^\mu [u(\mathbf{p}) + \Delta u(\mathbf{p})] \\
 &= -i(e + \delta e) A_\mu \bar{u}' \left[ 1 - \frac{1}{2m} \beta \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}' \left( 1 + \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} \right) \right] \gamma^\mu \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ 1 - \frac{1}{2m} \beta \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \left( 1 + \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} \right) \right] u + \mathcal{O}(\beta^2)
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

Definindo  $\bar{P}^\mu \equiv (0, \mathbf{P})$ ,  $\bar{Q}^\mu \equiv (0, \mathbf{Q})$ , e lembrando que:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} &= \mathbf{p} + \mathbf{p}' & \mathbf{p}' &= \frac{1}{2} (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \\
 & & \rightarrow & \\
 \mathbf{Q} &= \mathbf{p}' - \mathbf{p} & \mathbf{p} &= \frac{1}{2} (\mathbf{P} - \mathbf{Q})
 \end{aligned}$$

Então podemos reescrever (6.36) como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= -i(e + \delta e)A_\mu \bar{u}' \left\{ \gamma^\mu + \frac{\beta}{2m} \left( 1 + \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} \right) \left[ \gamma^\nu \gamma^\mu \frac{(\bar{P}_\nu + \bar{Q}_\nu)}{2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \gamma^\mu \gamma^\nu \frac{(\bar{P}_\nu - \bar{Q}_\nu)}{2} \right] \right\} u \\
&= -i(e + \delta e)A_\mu \bar{u}' \left\{ \gamma^\mu + \frac{\beta}{2m} \left( 1 + \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} \right) \left[ \frac{\bar{P}_\nu}{2} (\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\bar{Q}_\nu}{2} (\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu) \right] \right\} u \\
&= -i(e + \delta e)A_\mu \bar{u}' \left[ \gamma^\mu + \frac{\beta}{2m} \left( 1 + \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} \right) (\bar{P}^\mu - i\epsilon^{\nu\mu\rho} \bar{Q}_\nu \gamma_\rho) \right] u \\
&= -i(e + \delta e)A_0 - i(e + \delta e) \frac{P^j A_j}{2m} \left[ 1 + \beta \left( 1 + \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} \right) \right] + \\
&\quad + (e + \delta e) \frac{1}{2m} \epsilon^{0jl} A_j Q_l \left[ 1 + \beta \left( 1 + \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} \right) \right] + \mathcal{O} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \\
&= -i(e + \delta e)A_0 - i \left[ e + \delta e + \beta e \left( 1 + \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} \right) \right] \frac{P^j A_j}{2m} + \\
&\quad + \frac{1}{2m} \epsilon^{0jl} A_j Q_l \left[ e + \delta e + \beta e \left( 1 + \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} \right) \right] \tag{6.37}
\end{aligned}$$

A contribuição proveniente da correção de vértice, dada por (5.68) e (5.69) é reescrita como:

$$\mathcal{M}_3 = -ie\beta \left( \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} \right) A_0 + \frac{ie\beta}{2m} P^j A_j + \frac{e\beta}{2m} \epsilon^{0jl} A_j Q_l \tag{6.38}$$

A soma de (6.37) e (6.38) dá como resultado:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_3 \\
&= -i \left( e + \delta e + e\beta \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} \right) A_0 - i \left( e + \delta e + \beta e + e\beta \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} - \beta e \right) \frac{P^j A_j}{2m} + \\
&\quad + \epsilon^{0jl} \frac{A_j Q_l}{2m} \left( e + \delta e + \beta e + e\beta \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} + \beta e \right) \\
&= -i \left( e + \delta e + e\beta \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} \right) A_0 - i \left[ e + \delta e + \beta e \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} \right] \frac{P^j A_j}{2m} + \\
&\quad + \epsilon^{0jl} \frac{A_j Q_l}{2m} \left( e + \delta e + e\beta \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha} + 2e\beta \right)
\end{aligned}$$

Impondo que a correção da carga  $\delta e$  seja

$$\delta e = -e\beta \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha}$$

obtemos

$$\mathcal{M} = -ieA_0 - i\frac{e}{2m}P^j A_j + \epsilon^{0jl} A_j Q_l \left( \frac{e}{2m} + \frac{e\beta}{m} \right) \quad (6.39)$$

onde o termo  $e\beta/m \equiv e^3/4\pi m\theta$  corresponde à correção do momento magnético, em concordância com o resultado já conhecido e obtido anteriormente nos gauges covariante e não covariante.

### 6.3 Renormalização do Tensor de Polarização do Vácuo

Como mostramos na seção 5.3 o tensor de polarização do vácuo não renormalizado é dado por

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = -i\frac{e^2}{12\pi m} (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) + \frac{e^2}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\alpha} q_\alpha. \quad (6.40)$$

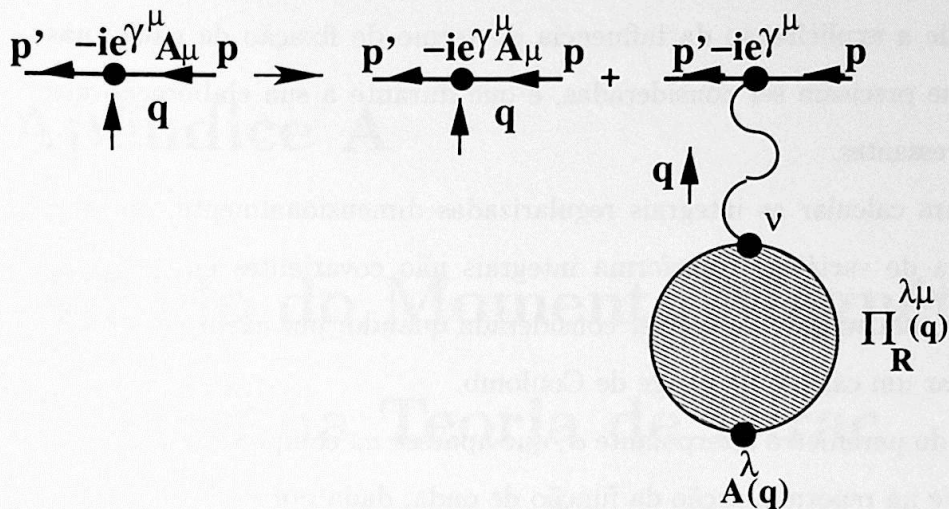
Como existe uma divergência linear em  $\Pi^{\mu\nu}(q)$ , é necessário adicionarmos um contratérmo que impomos ser da forma  $-\delta\theta\epsilon^{\mu\nu\alpha}q_\alpha$  de modo a obtermos

$$\begin{aligned} \Pi_R^{\mu\nu}(q) &= \Pi^{\mu\nu}(q) - \delta\theta\epsilon^{\mu\nu\alpha}q_\alpha \\ &= -i\frac{e^2}{12\pi m} (g^{\mu\nu} q^2 - k^\mu q^\nu) + \left( \frac{e^2}{4\pi} - \delta\theta \right) \epsilon^{\mu\nu\alpha} q_\alpha \end{aligned} \quad (6.41)$$

Impondo que  $\delta\theta = e^2/4\pi$  obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_R^{\mu\nu}(q) &= -i\frac{e^2}{12\pi m} (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \\ &= -i\frac{e\beta}{3m} (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \end{aligned} \quad (6.42)$$

O resultado deste efeito de polarização do vácuo pode ser explicitado onsiderando a figura abaixo :



$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= -ie\bar{u}'\gamma^\mu u A_\mu - ieA_\lambda \Pi_R^{\lambda\nu} \Delta_{\nu\mu} \bar{u}'\gamma^\mu u \\
 &= -ie\bar{u}'\gamma^\mu u (g_\mu^\lambda + \Pi_R^{\lambda\nu} \Delta_{\nu\mu}) A_\lambda \\
 &= -ie\bar{u}'\gamma^\mu u A_\mu^C
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

Como podemos ver, o efeito de polarização do vácuo é de modificar a intensidade do campo externo, com uma correção dada por

$$\begin{aligned}
 A_\mu^C &= A_\mu + \Delta A_\mu \\
 &= A_\mu - i \frac{e\beta}{3m\theta} \frac{1}{\alpha q^0 - q^2} [q^2 (\alpha q^0 \epsilon^\lambda_{\mu 0} + q^j \epsilon^\lambda_{\mu j}) - q^\lambda q^j q^0 \epsilon_{0\mu j} (1 - \alpha)] A_\lambda
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

Levando em consideração este efeito podemos reescrever (6.39) como

$$\mathcal{M} = \left[ -ieg_0^\lambda - i \frac{e}{2m} P^j g_j^\lambda + \epsilon^{0jl} g_j^\lambda Q_l \left( \frac{e}{2m} + \frac{e\beta}{m} \right) \right] A_\lambda^C. \tag{6.45}$$

Uma última observação é necessária. Como vemos em (6.39),  $A_\mu^C$  depende explicitamente do parâmetro interpolante  $\alpha$ . Entretanto é fácil ver que uma mudança  $\alpha \rightarrow \alpha + \delta\alpha$  corresponde a uma transformação de gauge  $A_\mu^C \rightarrow A_\mu^C + q_\mu \Lambda(q, \alpha, \delta\alpha)$ , o que não altera o resultado de qualquer observável físico calculado a partir de  $A_\mu^C$ .

## CONCLUSÃO

Neste trabalho nós reproduzimos um resultado físico já conhecido através de uma teoria que tem como novidade a explicitação da influencia do termo de fixação de gauge nas correções radiativas que precisam ser consideradas, e que durante a sua elaboração nos mostrou aspectos interessantes.

O método adotado para calcular as integrais regularizadas dimensionalmente, que por meio de uma mudança de variáveis transforma integrais não covariantes em integrais “covariantes” é um alternativa que merece ser considerada quando, por exemplo, houver a necessidade de efetuar um cálculo no gauge de Coulomb.

A estrutura da função do parâmetro interpolante  $\alpha$ , que aparece na componente temporal da correção de vértice e na renormalização da função de onda, dada por

$$f(\alpha) = \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha}$$

reproduz, nos seus valores limite ( $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$ ) os valores das correções radiativas já conhecidas.

O principal resultado aqui obtido é a verificação que em gauges não covariantes, a lição tradicional dos livros de teoria de campos, onde se diz que basta o diagrama de correção de vértice para calcular o momento magnético anômalo, não é verdade. Como vimos, os diagramas (não 1PI) com inserção da correção de auto-energia dos férmions são fundamentais para reproduzir o valor observado do momento magnético anômalo.

# Apêndice A

## Cálculo do Momento Magnético do Elétron na Teoria de Dirac

Neste apêndice vamos apresentar o cálculo do momento magnético do elétron feito por Dirac, que na época foi um dos sucessos de sua teoria. Os modelos existentes previam que o valor do momento magnético seria igual a ( $\hbar = 1$ )

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{4m}\boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.1})$$

No entanto, experimentos mostravam uma discrepância por um fator igual a 2, ou seja, o momento magnético medido era o dobro do previsto pela teoria. O cálculo feito foi no limite de baixos momentos em (3+1)D, para o qual a representação das matrizes  $\gamma$  adotada foi

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & -\mathcal{I} \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $\mathcal{I}$  é a matriz identidade  $2 \times 2$  e  $\sigma^i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) são as matrizes de Pauli.

O espinor de Dirac  $\psi(x)$  tem 4 componentes e será representado pela composição da dois espinores com duas componentes de acordo com

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \eta(x) \end{bmatrix}, \quad \varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{bmatrix}, \quad \eta(x) = \begin{bmatrix} \eta_1(x) \\ \eta_2(x) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

A implementação da interação de um elétron com um campo eletromagnético é pode ser feita pela prescrição do acoplamento mínimo, no qual fazemos a substituição

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu, \quad (\text{A.4})$$

onde utilizaremos  $p^\mu \equiv (E, \mathbf{p})$  e  $A^\mu \equiv (\phi, \mathbf{A})$ . Desta forma a equação de Dirac no espaço dos momentos é dada por

$$\begin{aligned} \gamma^0(E - e\phi)\psi - \boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\psi &= m\psi, \\ (E - e\phi) \begin{bmatrix} \varphi \\ -\eta \end{bmatrix} - (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \cdot \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \eta \end{bmatrix} &= m \begin{bmatrix} \varphi \\ \eta \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

que nós escreveremos explicitamente como duas equações

$$(E - e\phi)\varphi - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\eta = m\varphi, \quad (\text{A.6})$$

$$-(E - e\phi)\eta + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\varphi = m\eta. \quad (\text{A.7})$$

A equação (A.7) fornece

$$\eta = (E + m - e\phi)^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\varphi, \quad (\text{A.8})$$

que no limite não relativístico e com o campo de interação “fraco” ( $e\phi \ll 2m$ ) se reduz a

$$\eta \approx \frac{1}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\varphi. \quad (\text{A.9})$$

Substituindo (A.9) em (A.6) obtemos

$$E\varphi = \left[ \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2}{2m} + m + e\phi \right] \varphi, \quad (\text{A.10})$$

onde introduzimos  $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$ . Como o produto das matrizes de Pauli é dado por  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} - i\epsilon_{ijk} \sigma^k$ , segue que

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \quad (\text{A.11})$$



que fornece

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2 &= (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \\ &= (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - ie\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A partir da relação de comutação

$$[p_i, A_j] = -i\partial_i A_j,$$

segue que

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p})_k = -i(\nabla \times \mathbf{A})_k = -iB_k, \quad (\text{A.13})$$

e portanto

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2 = (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - ie\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{A.14})$$

Substituindo (A.14) em (A.10) obtemos

$$E\varphi = \left[ \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + m + e\phi \right] \varphi \quad (\text{A.15})$$

Definindo  $H = E - m$  podemos escrever

$$H\varphi = \left[ \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} + e\phi - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \varphi \quad (\text{A.16})$$

Obtivemos o hamiltoniano do sistema onde o último termo corresponde à energia de interação de um elétron com momento magnético  $e\boldsymbol{\sigma}/2m$  num campo magnético.

Medições posteriores mostraram uma pequena diferença no valor do momento magnético do elétron, dando origem ao termo “momento magnético anômalo”, e este problema foi sanado com o desenvolvimento da teoria da renormalização da eletrodinâmica quântica, que fornece resultados teóricos que têm uma incrível concordância com os resultados experimentais.

# Bibliografia

- [1] Zhang,S.C.:“The Chern-Simons-Landau-Ginsburg Theory of the Fractional Quantum Hall Effect” - Int.J.Mod.Phys. **B6** 25 (1992).
  
- [2] S.Deser,R.Jakiw and S.Templeton ;”Topologically Massive Gauge Theories”- Ann. Phys. **140** (1982) 372-411.
  
- [3] Dunne,G.V.:”Aspects of Chern-Simons Theory” - hep-th/ **9902115** (1999).
  
- [4] Marino,E.C.:”Chern-Simons Theory from First Principles”- **XIV Encontro Nacional de Partículas e Campos** (1993).
  
- [5] Ryder,L.W. :”Quantum Field Theory” 2<sup>nd</sup> ed. **Chap.7** (1995)  
Cambridge Univ. Press
  
- [6] Greiner,W., Reinhardt,J.:”Field Quantization” 2<sup>nd</sup> ed. **Chap.7** (1996)  
Springer-Verlag.
  
- [7] Adkins,G.S.:”Feynman Rules of Coulomb Gauge QED and the Electron Magnetic Moment” - Phys. Rev. D **V36 No.6** (1987) 1929-1932.

- [8] J.L.R.Nascimento, A.J.da Silva, M.Gomes, M.Fleck, A.Foester and H.O.Girotti :”Coulomb Gauge Quantization and Renormalization of the Chern-Simons Theory Coupled to Fermions”- Int.J.Mod.Phys. A **V.12 N0.16** (1997) 2889-2901.
- [9] G.Leibbrandt :”Introduction to the Technique of Dimensional Regularization”- Rev.Mod.Phys. **V.47 No.4** (1975) 849-786.
- [10] P.Ramond :”Field Theory : A Modern Primer”, Front. in Phys. 2<sup>nd</sup> ed. **Chap.4** (1990) .
- [11] M.O.C.Gomes ;” Notas de aula do curso de Introdução à Teoria Quântica dos Campos”-**Cap.5** (2000).
- [12] J.C.Collins :”Renormalization” **Chap.5** Cambridge Univ. Press.