

# Ressonância Estocástica: Estudo Geral e Aplicação na Geração de Segundo Harmônico.

SBI-IFUSP



Alexandre Rigotti Silva

Banca Examinadora: DEFESA - 28/07

Prof. Dr. Mário José de Oliveira (Orientador)

Prof. Dr. Paulo Nussenzveig (IF-USP)

Prof. Dr. Alex Antonelli (Unicamp)



*Mário José de Oliveira*

Dissertação  
submetida como requisito  
parcial para a obtenção  
do grau de  
Mestre em Ciências  
na  
Universidade de São Paulo

*Armando Corbani*

Prof. Armando Corbani  
Presidente da Comissão de Pós Graduação

Universidade de São Paulo  
2000

530.4

S5862

M

ex. 1

### FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Silva, Alexandre Rigotti

Ressonância Estocástica: Um Estudo Geral e  
Aplicação na Geração de Segundo Harmônico.  
São Paulo, 2000.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo.  
Instituto de Física – Departamento de Física Geral

Orientador: Prof. Dr. Mário José de Oliveira  
Área de Concentração: Física do Estado Sólido

Unitermos: 1. Ressonância Estocástica;  
2. Equação de Fokker-Planck;  
3. Equação de Langevin;  
4. Geração de Segundo Harmônico.

USP/IF/SBI-040/2000



## Resumo

Neste trabalho fizemos um estudo do fenômeno da ressonância estocástica em sua forma geral e uma aplicação na geração de segundo harmônico. Utilizamos o formalismo da equação de Langevin e da equação de Fokker-Planck para descrever um sistema sujeito a um potencial de duplo poço e a uma força periódica externa. Através de métodos analíticos e de simulações da equação de Langevin determinamos a razão sinal-ruído que caracteriza a ressonância estocástica. Estudamos, também, a ressonância estocástica na geração de segundo harmônico constatando a possibilidade de sua ocorrência.

## Abstract

In this work we have studied stochastic resonance in its general form and applied it to second harmonic generation. We used the formalism of the Langevin and the Fokker-Planck equations to describe a system subject to a double well potential and an external periodic force. Through analytical methods and numerical simulations of the Langevin equation we have determined the signal to noise ratio that characterizes stochastic resonance. We have also studied the stochastic resonance in second harmonic generation finding the condition for its occurrence.

*“ ... nossa aproximação indica a possibilidade de um novo tipo de ressonância chamada **ressonância estocástica** entre uma força determinística externa de nosso modelo climático e um mecanismo estocástico interno. O termo ressonância é adequado pois se o ruído é muito pequeno não há correlação entre o tempo de alternância e a mudança periódica. O mesmo é verdade se o ruído é muito grande.”*

Robert Benzi e colaboradores [1]  
em seu primeiro artigo sobre  
Ressonância Estocástica onde  
explicam a escolha deste  
nome para o fenômeno.

# Agradecimentos

Seria impossível citar a todos que me ajudaram neste trabalho e eu com certeza esquecerei de muitas pessoas.

Iniciei este trabalho sob a orientação do Prof. Ricardo Horowicz que me apresentou o problema da Ressonância Estocástica.

Ao Prof. Mário de Oliveira pela acolhida, orientação e principalmente por ter me auxiliado em todos os momentos difíceis neste final de trabalho.

Ao Dr. Murray Olsen pela sua orientação em integração estocástica, *MATLAB* e sobre a pesquisa em si.

Ao Prof. Paulo Nussenzveig pela ajuda em todo o processo e pelas infinitas dicas em  $\LaTeX$ .

Aos meus amigos Diogo, Felix, Hamilton e Sarah por terem me ajudado nesses momentos finais do trabalho.

Ao Prof. Mikiya Muramatsu por ter permitido que eu utilizasse de seu laboratório e pela ajuda nos momentos difíceis.

À direção do IFUSP nas pessoas do Diretor Prof. Silvio Salinas e do vice-diretor: Prof. Adalberto Fazzio.

À Cláudia da CPG, pela ajuda na burocracia.

Aos meus colegas do Grupo de Ótica Quântica.

Pela eterna paciência das nossas amigas da secretaria: Eliane, Iracema, Lourdes e Dayse.

A FAPESP pelo apoio financeiro.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Breve Introdução Histórica da Ressonância Estocástica . . . . .	1
1.2	Introdução à Ressonância Estocástica . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Estudo da Ressonância Estocástica através da Razão Sinal-Ruído</b>	<b>8</b>
2.1	Introdução . . . . .	8
2.2	A Equação de Langevin . . . . .	9
2.3	Integração Numérica da Equação de Langevin . . . . .	10
2.3.1	Introdução . . . . .	10
2.3.2	Equações Estocásticas . . . . .	10
2.3.3	Integração de Equações Diferenciais . . . . .	12
2.4	Construção da Razão Sinal-Ruído . . . . .	13
2.4.1	Introdução . . . . .	13
2.4.2	Transformada de Fourier . . . . .	13
2.4.3	Definição da Razão Sinal-Ruído . . . . .	13
2.4.4	Construção do Gráfico da Razão Sinal Ruído . . . . .	14
2.5	Resultados para a Construção da Razão Sinal-Ruído . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Estudo da Convergência e Estabilidade do Cálculo da Relação Sinal-Ruído</b>	<b>19</b>
3.1	Motivação para os testes . . . . .	19
3.2	Estudo do comportamento do algoritmo com a variação do número de trajetórias . . . . .	19
3.3	Estudo do Comportamento da SNR com a Variação do Número de Pontos das Séries Temporais . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Estudo da Equação de Fokker-Planck</b>	<b>28</b>
4.1	Introdução . . . . .	28
4.2	Cálculo da Equação de Fokker-Planck para a Ressonância Estocástica . . . . .	30

4.2.1	Tratamento Geral para a Transformação entre uma Equação de Langevin e uma de Fokker-Planck . . . . .	30
4.2.2	Cálculo da Equação de Fokker-Planck para o Caso da Ressonância Estocástica . . . . .	31
4.3	Estudo do Comportamento Estacionário para a Equação de Fokker-Planck . . . . .	32
4.3.1	Introdução . . . . .	32
4.3.2	Cálculo Analítico para a Solução Estacionária . . . . .	33
4.3.3	Simulações Numéricas para o Estudo da Solução Estacionária . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Aplicação na Geração de Segundo Harmônico</b>	<b>49</b>
5.1	Introdução e Cálculo da Solução Estacionária para as Equações de Movimento da Geração de Segundo Harmônico . . . . .	49
5.2	Estudo da Biestabilidade . . . . .	51
5.2.1	Estudo das Condições para a Existência de Biestabilidade	51
5.2.2	Algoritmo para o Cálculo das Regiões de Biestabilidade	51
5.3	Integração das Equações de Movimento Clássicas para a Geração de Segundo Harmônico . . . . .	53
5.3.1	Introdução . . . . .	53
5.3.2	Métodos de Integração e Resultados . . . . .	54
5.3.3	Estudo da Aparente Assimetria da Trajetória . . . . .	57
5.3.4	Método para a Filtragem de Movimentos Internos . . . . .	58
5.4	Procura da Região de Ressonância Estocástica . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>69</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>71</b>
<b>A</b>	<b>Estudo da Geração do Ruído</b>	<b>73</b>
A.1	Geração de ruído . . . . .	73
A.1.1	Ruído Uniforme . . . . .	73
A.1.2	Ruído Telegráfico . . . . .	75
A.1.3	Ruído Gaussiano . . . . .	75
<b>B</b>	<b>Tempo de Passagem</b>	<b>78</b>
B.1	Introdução . . . . .	78
B.2	Estudo das Aproximações para o Cálculo do Tempo de Passagem	82
<b>C</b>	<b>Descrição do Algoritmo para o Cálculo do Histograma</b>	<b>88</b>
C.1	Motivação . . . . .	88
C.2	Métodos Clássicos . . . . .	88

C.3 Nosso Método . . . . .	89
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>90</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Em nossas atividades experimentais, sejam elas de caráter tecnológico ou acadêmico, a existência de ruído nas medidas sempre nos desagrada pois sabemos que este ruído irá degradar a confiabilidade da medida. Podemos ter ruídos de vários tipos. Podemos citar o ruído eletromagnético que é oriundo de todo o campo em que nosso sistema está imerso, o ruído térmico que causa flutuações em nossas medidas e um novo tipo de ruído: o ruído computacional que advém de uma precisão finita em nossos cálculos numéricos que leva a variações finais inesperadas.

Normalmente o ruído não é objeto de estudo em si. O que existem são técnicas para minimizá-lo buscando, assim, uma melhoria da nossa medida. Mas existe um tipo de sistema (conhecido desde 1981) que apresenta um fenômeno diferente: o aumento do nível de ruído melhora a qualidade do sinal ao invés de piorá-lo. Neste caso o ruído atua como um amplificador do sinal. Este fenômeno recebe o nome de **Ressonância Estocástica** e é o objeto de estudo desta dissertação.

### 1.1 Breve Introdução Histórica da Ressonância Estocástica

Em 1981 Robert Benzi e colaboradores estudavam o problema da periodicidade das eras glaciais terrestres. Na época já se sabia que a ocorrência destes períodos de glaciação tinha um período de  $10^5$  anos, mas não se conhecia o motivo desta periodicidade. Os pesquisadores da época procuravam por uma grandeza astronômica que possuísse a mesma periodicidade da glaciação. Quando essa grandeza foi descoberta os pesquisadores tiveram um problema a resolver. A única grandeza que poderia funcionar era a excentricidade da órbita terrestre causada pela influência gravitacional de outros



planetas. O problema a ser resolvido era que, pelos modelos geodinâmicos existentes, essa excentricidade representaria uma flutuação muito pequena (0,1%) na energia solar incidente o que, obviamente, não era capaz de causar uma mudança tão drástica como as eras glaciais.

Benzi e colaboradores propuseram um modelo [1, 2, 3] em que a temperatura era representada por um potencial bi-estável com um dos vales representando a temperatura média encontrada nas eras glaciais e o outro vale, a temperatura média do planeta nos períodos entre estas eras. A excentricidade foi modelada como uma força periódica fraca e todas as outras influências como um ruído branco.

Na simulação deste sistema Benzi e seus colaboradores perceberam que a resposta (representando a temperatura média do planeta) e a excentricidade da órbita apresentaram uma periodicidade semelhante (conforme podemos ver na figura 1.1) indicando que apesar da excentricidade ter um valor muito pequeno ela influenciou a temperatura terrestre.

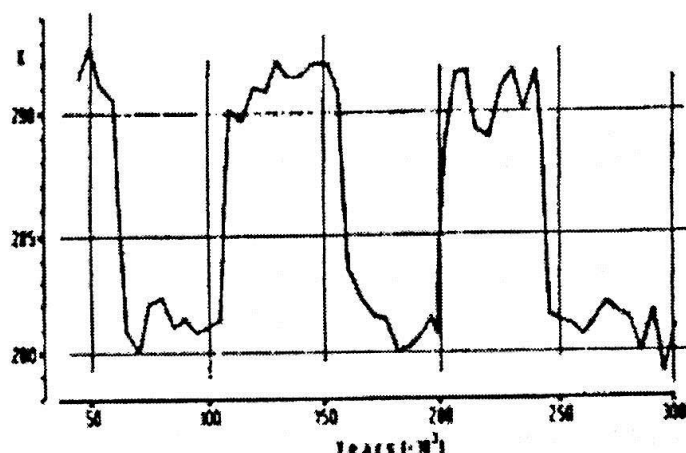


Figura 1.1: Gráfico apresentado por Benzi e colaboradores [1] em que podemos ver que a temperatura apresenta uma periodicidade de  $10^5$  anos.

Benzi e colaboradores chamaram este fenômeno de ressonância estocástica por ser uma ressonância (amplificação) causada por uma força estocástica (ruído), como podemos ver no trecho abaixo de seu artigo original [1]:

*... nossa aproximação indica a possibilidade de um novo tipo de ressonância chamada **ressonância estocástica** entre uma força determinística externa de nosso modelo climático e um mecanismo estocástico interno. O termo ressonância é adequado pois*

se o ruído for muito pequeno não haverá correlação entre o tempo de alternância e a mudança periódica. O mesmo é verdade se o ruído é muito grande.

A primeira observação experimental da ressonância estocástica veio com o trabalho de Fauve e Heslot [4] que, em 1983, observaram em um analisador de espectro<sup>1</sup> a dependência do espectro de saída de um *Schmitt Trigger* (figura 1.2) em relação ao ruído.

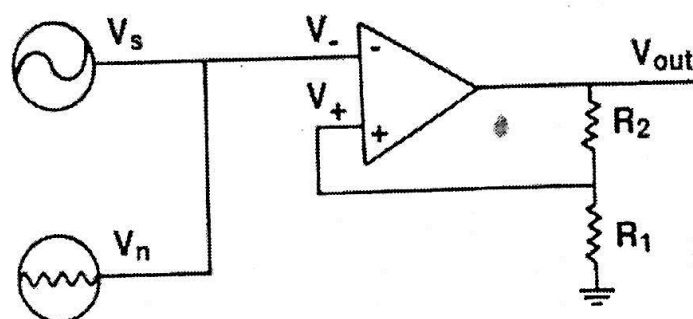


Figura 1.2: Esquema elétrico de um Schmitt Trigger, usado por Fauve e Heslot [4]. Podemos notar o sinal periódico,  $V_s$ , o ruído branco,  $V_n$  e a saída do sistema,  $V_{out}$ .

As pesquisas em ressonância estocástica ficaram praticamente estagnadas até o ano de 1988 quando McNamara e colaboradores apresentaram seus resultados obtidos em um laser em anel[7], e em seu excelente artigo teórico[8].

Com o passar do tempo o conceito de ressonância estocástica foi sendo ampliado para explicar um grande número de fenômenos. Em 1993, Longtin[9] apresentou um sistema em que o potencial biestável é substituído por um sistema com um limiar. Abaixo deste limiar é considerado um estado de repouso e acima deste limiar como um estado excitado que irá decair após um tempo longo. O conceito da ressonância estocástica foi também utilizado em situações multidisciplinares como a Neurofisiologia, onde foi observada ressonância estocástica em neurônios de peixes [10], ou em Ciências Humanas com a observação no Modelo de Weidlich para a formação de opinião pública[11].

Para termos uma idéia do desenvolvimento das pesquisas podemos observar a figura 1.3 onde mostramos o número de artigos publicados entre os anos

<sup>1</sup>equipamento de laboratório que permite medir o espectro de potências (módulo da Transformada de Fourier) do sinal de entrada.

de 1981 e 1998. Neste gráfico podemos perceber o, já citado, renascimento da produção científica em 1989.

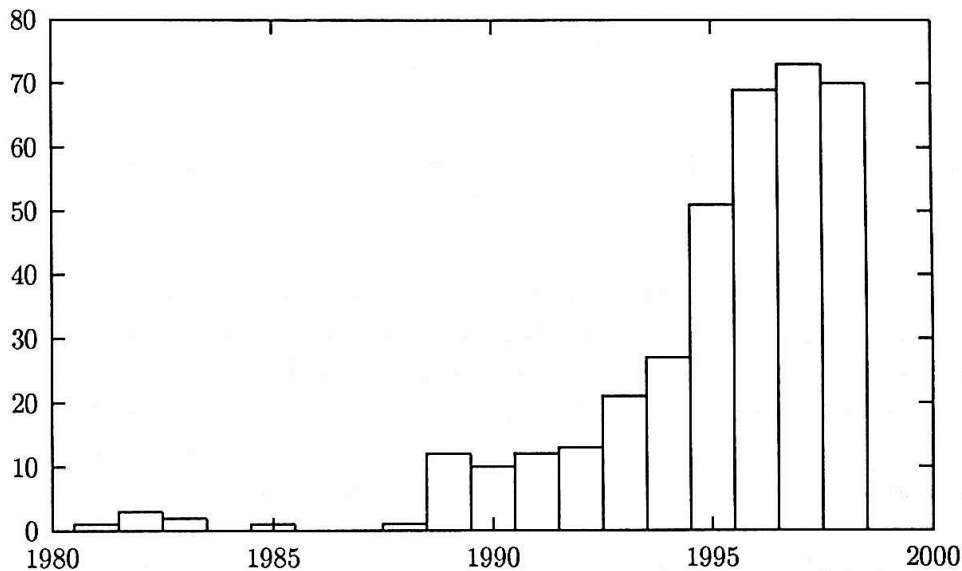


Figura 1.3: Número de artigos publicados por ano sobre Ressonância Estocástica.

Mais recentemente (1995,1996) o conceito da ressonância estocástica foi estendido para o domínio da física quântica com a descoberta de um análogo quântico para a ressonância estocástica [12, 13, 14, 15].

## 1.2 Introdução à Ressonância Estocástica

Para que a ressonância estocástica ocorra são necessárias três condições:

1. Um potencial que possua dois mínimos com uma barreira entre eles, chamado de potencial bi-estável (Figura 1.4).
2. Uma força periódica pequena,  $F(t) = A \sin(\omega t)$ , atuante no sistema com frequência  $\omega$  bem definida. Entendemos por força pequena uma força que por si só não seja suficiente para o sistema evoluir de um estado estável para o outro (passar por sobre a barreira).
3. Uma força aleatória representada por um ruído branco cuja intensidade podemos controlar.

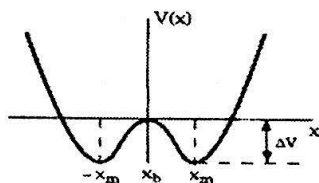


Figura 1.4: Representação de um potencial bi-estável. Podemos ver os dois estado estáveis e a barreira de potencial.

Quando estudamos este sistema estamos interessados apenas na passagem de um estado estável para outro (ou apenas no salto sobre a barreira). Como definido pela condição 2 só com a força periódica o sistema não consegue evoluir por sobre a barreira. Com o aumento no nível do ruído o sistema começará a apresentar passagens entre os estados estáveis.

Quando o sistema inicia esta alternância entre os estados podemos estudar o comportamento temporal desta alternância medindo um tempo característico ou sua frequência. Estuda-se o comportamento desta frequência com o aumento do nível de ruído. Paradoxalmente existe um nível de ruído em que o sistema passa a oscilar com a frequência da força periódica  $\omega$ . Quando isto ocorre temos a ressonância estocástica.

À primeira vista o fenômeno da ressonância estocástica parece não ter explicação. Como é possível o aumento do nível do ruído amplificar um sinal? Principalmente se lembrarmos que o nosso sinal tem um frequência bem determinada  $\omega$  e o ruído, por ser um ruído branco, apresenta-se em todas as frequências.

A chave para o entendimento deste fenômeno reside no estudo do tempo de passagem. Se estudarmos o comportamento de um sistema sujeito a um potencial com uma barreira e uma força aleatória iremos perceber que para cada nível de ruído existe um tempo característico para que o sistema evolua passando pelo potencial. Este tempo é chamado tempo de passagem e foi apresentado nesta dissertação no Apêndice B.

A ressonância estocástica ocorre quando há um acoplamento entre a força periódica e o tempo de passagem. Para entendermos este acoplamento existem dois modelos mecânicos que podem ser usados:

- i) A força aleatória sendo somada à força periódica.

Para facilitar o entendimento devemos observar o nosso sistema através de um análogo mecânico bem simples. Podemos imaginar uma bolinha sujeita a um campo gravitacional e uma força periódica. Essa pode ser entendida como qualquer força que faça a bolinha subir e descer

pelo potencial, periodicamente. O ruído pode ser entendido como uma agitação mecânica ou um banho térmico.

Com este modelo podemos imaginar as seguintes situações. A bolinha fica presa a um vale: com a força periódica ela fica subindo e descendo pelo potencial mas sem conseguir escapar do vale em que está. Com a força estocástica ela consegue algumas vezes escapar e passar para o outro vale. Lembrando que para cada nível de ruído existe um tempo característico (com sua frequência associada) podemos entender que pode existir uma ressonância entre a frequência da força periódica  $\omega$  e o inverso do tempo de passagem  $T_{\text{pass}}$ , dada por  $\omega = 2/T_{\text{pass}}$ , onde o fator 2 indica que a partícula chega à barreira de potencial a cada duas oscilações.

A ressonância estocástica ocorre quando há a ressonância entre duas forças: a periódica e a estocástica. As duas se acoplam para permitir que a partícula atravesse o potencial.

ii) A força periódica alterando o potencial.

A outra abordagem possível para o entendimento da ressonância estocástica é estudando a influência que o potencial sofre da força periódica. A força periódica pode ser representada pelo potencial dependente do tempo:  $U_{\text{per}}(x) = f(t)x$ . Podemos entender nosso potencial como sendo um potencial efetivo formado pela soma dos dois potenciais:  $U_{\text{ef}}(x) = U(x) + U_{\text{per}}(x)$ .

O potencial passa a ter uma dependência temporal onde em cada instante uma função afim é somada ao potencial. Como iremos estudar no Capítulo 4, a soma desta função transforma o potencial de simétrico em assimétrico, sendo assim temos um potencial cuja profundidade dos vales alterna-se periodicamente. Neste modelo a ressonância estocástica pode ser entendida como um acoplamento entre o momento em que o potencial onde está a partícula encontra-se na posição mais "rasa" e a força periódica empurrando a partícula por sobre a barreira de potencial. Esta abordagem foi usada por Gammaitoni e colaboradores em seu excelente artigo de revisão [16]. Neste artigo eles apresentam uma divertida figura que mostra este processo (Figura 1.5).

Quando se estuda ressonância estocástica gostaríamos que este fenômeno pudesse ser usado para amplificar sinais eletrônicos e assim revolucionar a comunicação. Observando melhor podemos perceber que isso não é possível, pois cada nível de ruído amplifica apenas uma e uma só frequência específica.

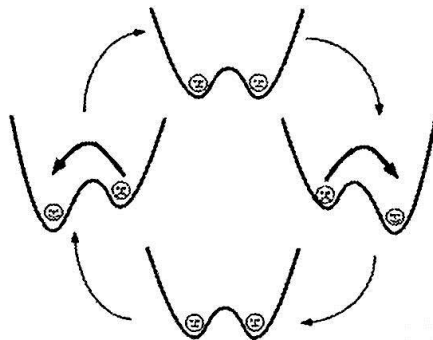


Figura 1.5: Desenho que representa o fenômeno da ressonância estocástica através da alteração do potencial. A seta mais forte representa a força estocástica que se estiver em ressonância com o momento em que o potencial apresenta-se mais raso facilita a passagem da partícula (face triste para face feliz). Devemos entender que isto é apenas verdade numa média estatística. Baseada na figura do artigo [16].

Dessa forma um sinal que possui um número grande de frequências associadas jamais poderia ser melhorado através deste método.



## Capítulo 2

# Estudo da Ressonância Estocástica através da Razão Sinal-Ruído

### 2.1 Introdução

Como vimos na Introdução a ressonância estocástica é uma amplificação de um sinal de entrada com uma frequência bem definida em um sistema com ruído. Para o estudo deste fenômeno devemos lançar mão de ferramentas que nos forneçam esta amplificação: esta ferramenta chama-se Razão Sinal-Ruído ("Signal to Noise Ratio", SNR).

Esta SNR conceitualmente é muito simples: trata-se da divisão, na saída do sistema, da componente correspondente à frequência  $\omega$  do sinal de entrada pelo nível de ruído. Para o estudo da ressonância estocástica observa-se o comportamento da SNR variando-se o nível de ruído, procurando-se por um pico. O nível de ruído onde localiza-se o pico é o ruído onde ocorre a ressonância estocástica e o valor da SNR indica a amplificação do sinal de entrada.

Os cálculos necessários para o cálculo da SNR não são triviais e apresentam a dificuldade para o estudo do ressonância estocástica. Inicialmente a equação de movimento do sistema é aproximada por uma Equação de Langevin (seção 2.2) por ser um sistema com ruído. A integração numérica desta equação (seção 2.3) fornece uma série temporal que representa uma possível trajetória para este sistema.

O próximo passo é calcular a Transformada de Fourier desta trajetória e observar o pico que surge na frequência  $\omega$ . Este pico é comparado com o nível de ruído. Esta comparação é a SNR. Devemos lembrar que como o

nosso sistema apresenta ruído este processo deve ser todo integrado estocasticamente.

Neste capítulo iniciaremos com uma apresentação da Equação de Langevin e sua integração. Depois aplicaremos estes conceitos para o cálculo da SNR.

## 2.2 A Equação de Langevin

Em 1827 um biólogo chamado Robert Brown examinando através de um microscópio pequenos grãos de pólen em suspensão percebeu que esses tinham um movimento irregular. Inicialmente pensou que este movimento era devido ao caráter vital do pólen. Para testar essa hipótese ele substituiu o pólen por grânulos de materias não-vivos (como bolinhas de vidro, minerais, etc). Como estas materias também apresentavam o mesmo tipo de movimento ele concluiu que a causa do movimento era outra. Este problema não foi satisfatoriamente resolvido até que em 1905 Einstein [5] e Smoluchowski chegaram independentemente à mesma solução. Smoluchowski foi o responsável pelos experimentos que testaram esta solução.

Fisicamente este movimento advém do fato das partículas sofrerem constantemente impactos pelas moléculas do fluido. A característica principal destes impactos é que eles são totalmente aleatórios. A diferença de impactos que acontece em um lado da partícula causa uma força resultante que causa o movimento das partículas (hoje sabemos que este fenômeno é o responsável pela pressão exercida por um gás). A força aleatória é o que diferencia este tipo de sistema dos determinísticos. O termo que definirá a força periódica na equação de movimento representará um papel fundamental neste tipo de estudo.

Algum tempo depois, Langevin [6] apresentou uma nova formulação para o Movimento Browniano e, segundo o próprio Langevin, bem mais simples do que aquela apresentada por Einstein. Sua formulação inicia escrevendo a equação de movimento para uma partícula onde duas forças são adicionadas:

- uma força viscosa, dada por  $-Bdx/dt$  onde  $B = 6\pi\eta a$ , sendo  $\eta$  a viscosidade e  $a$  o diâmetro médio da partícula
- uma força aleatória  $X$  que representa os impactos das moléculas do fluido na partícula

Com estas forças podemos escrever a equação de movimento para o sistema:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -B \frac{dx}{dt} + X \quad (2.1)$$



Se além da força viscosa a partícula estiver sujeita a uma outra força  $F(x, t)$ , então a equação do movimento será:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -B \frac{dx}{dt} + F + X \quad (2.2)$$

Essas equações ao serem integradas numericamente fornecem uma possível trajetória para a partícula. Devemos notar aqui a diferença fundamental deste sistema (onde temos ruído) para os sistemas determinísticos. Nos determinísticos a integração da equação de movimento fornece uma única trajetória possível para o sistema. Já nos sistemas onde temos ruído (que são chamados sistemas estocásticos) a integração fornece apenas uma das possíveis trajetórias para o sistema.

## 2.3 Integração Numérica da Equação de Langevin

### 2.3.1 Introdução

Nesta seção desenvolveremos os métodos para integrarmos uma equação de Langevin. Inicialmente devemos ter em mente que toda equação de Langevin é derivada de uma equação mais geral denominada **Equação Estocástica**. Para integrarmos este tipo de Equação existem dois métodos: o método de Itô e o de Stratonovich. Ambos apresentam o mesmo resultado para o caso da Ressonância Estocástica pois trata-se de ruído aditivo.

### 2.3.2 Equações Estocásticas

A Equação do Movimento (2.2) pode ser simplificada se considerarmos que a massa é muito pequena. Assim o termo do lado esquerdo da equação (2.2) pode ser desprezado de modo que a equação se torna

$$B \frac{dx}{dt} = F + X. \quad (2.3)$$

Dividindo ambos os membros por  $B$  obtemos a equação:

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t) + b(x, t)\xi(t), \quad (2.4)$$

onde  $x$  é a variável de interesse que representa a posição da partícula,  $a(x, t)$  e  $b(x, t)$  representam o termo de arrasto e difusão respectivamente e  $\xi(t)$  é

uma variável estocástica. que obedece as condições de ruído branco:

$$\begin{cases} \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t'), \\ \langle \xi(t) \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

No caso específico de sistemas que apresentam ressonância estocástica as funções  $a(x, t)$  e  $b(x, t)$  que representam, respectivamente, as forças determinísticas e estocásticas que agem sobre a partícula, são dadas por:

$$a(x, t) = A \sin(\omega t) - \frac{d}{dx}U(x) \quad (2.6)$$

$$b(x, t) = \gamma \quad (2.7)$$

onde  $\gamma$  é uma constante que representa o nível de ruído e  $U(x)$  é o potencial de duplo poço.

Portanto, nossa equação diferencial toma a forma:

$$\frac{dx}{dt} = A \sin(\omega t) - U'(x) + \gamma \xi(t) \quad (2.8)$$

Para estudarmos o comportamento temporal desse sistema devemos integrá-lo no tempo:

$$\int_{t_0}^t \frac{dx}{dt} dt = \int_{t_0}^t A \sin(\omega t) dt - \int_{t_0}^t U'(x) dt + \gamma \int_{t_0}^t \xi(t) dt \quad (2.9)$$

Para resolução desta integral devemos utilizar dos conceitos de integração Estocástica em particular com o uso dos métodos de de Itô e Stratonovich que neste caso apresentam o mesmo resultado. Discretizamos o tempo em intervalos iguais a  $\tau$ , into é, fazendo  $t = n\tau$ , então esta equação integral pode ser transformada numa equação de recorrência:

$$x_{n+1} = x_n + \tau A \sin(\omega n\tau) + \tau U'(x) + \gamma \sqrt{\tau} \Gamma_n \quad (2.10)$$

onde  $\Gamma_n$  é tal que:

$$\begin{cases} \langle \Gamma_n \Gamma_{n'} \rangle = \delta_{nn'}, \\ \langle \Gamma_n \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

A integração numérica desta equação representa um papel fundamental em nosso trabalho. Na próxima seção iremos apresentar como efetuamos esta integração.

### 2.3.3 Integração de Equações Diferenciais

#### Introdução

Na seção anterior terminamos apresentando a equação de recorrência que será usada para o estudo da evolução do nosso sistema. Nesta seção apresentaremos as formas de se calcular numericamente esta equação. Esta integração apresenta como resultado uma série de números  $(x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  que pode ser interpretada como as posições em que o sistema se encontra em cada instante de tempo. Podemos interpretar esta série como um filme de cinema. O filme não apresenta uma situação contínua mas um conjunto de quadros que representam fotografias das cenas tiradas em intervalos de tempos iguais. Inicialmente devemos nos ater ao ruído. Para sua geração métodos numéricos foram estudados, e serão apresentados no Apêndice A.

#### Integração Numérica

A integração da equação (2.10) pode ser feita numericamente. Para este cálculo devemos ter em mente alguns tópicos:

- devemos saber a posição inicial da partícula, i. e., a posição que a partícula apresentará no início do movimento ( $t = 0$  ou  $n = 0$ ).
- esta posição inicial será considerada a primeira da nossa série de saída  $x(t = 0) = x(n = 0) = x_0$ .
- este primeiro ponto será inserido no lado direito da (2.10) para calcularmos  $x_1$
- este ponto será, por sua vez, utilizado na mesma equação e com  $n = 1$ , obteremos  $x_2$ .
- o processo será repetido (por esse motivo a equação é chamada de recorrente) até o tempo desejado.
- para integrarmos o sistema até o tempo final de integração  $t_{final}$  devemos integrar o sistema  $k$  vezes em que  $t_{final} = k\tau$ .

Com este procedimento podemos simular o comportamento do sistema e gerar uma série temporal que representa os diversos estados que o sistema possa ter no decorrer do tempo.

## 2.4 Construção da Razão Sinal-Ruído

### 2.4.1 Introdução

Como já vimos, quando procuramos pela ocorrência de ressonância estocástica procuramos por uma amplificação do sinal de entrada em relação ao ruído por nós inserido. O estudo é feito procurando-se, no sinal de saída, pela amplificação do sinal de entrada. O nosso sinal de saída é a nossa série temporal de resposta do nosso sistema. Podemos, então nos perguntar: como separar da série de saída a componente do sinal de entrada das componentes do ruído? Isso pode ser feito através da Transformação de Fourier.

### 2.4.2 Transformada de Fourier

Se em uma série temporal aplicarmos a Transformada de Fourier esta série não mais terá como variável independente o tempo mas sim as frequências. A série de saída apresenta a decomposição do sinal em suas frequências. Como a transformada de Fourier é um número complexo devemos calcular seu módulo (que fornece a potência de cada frequência que em conjunto forma o seu sinal). Este espectro de potências é muito útil tecnologicamente sendo inclusive apresentado em aparelhos de som (os indicadores luminosos que demonstram a equalização do som).

Matematicamente a Transformada de Fourier é definida pela integral:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{i\omega t} dt. \quad (2.12)$$

Mas, computacionalmente, utiliza-se de um algoritmo chamado FFT (*Fast Fourier Transform*) [19] que tem a vantagem de ser mais rápido que a integração pura mas tem a desvantagem de só funcionar com séries de entrada com  $2^n$  componentes.

### 2.4.3 Definição da Razão Sinal-Ruído

Com o cálculo da componente de Fourier do nosso sinal de entrada podemos definir a Razão Sinal-Ruído como a razão entre o sinal e o nível de ruído. O sinal é calculado observando-se, no sinal de saída, a componente na frequência do sinal de entrada. Como normalmente os valores da Razão Sinal-Ruído são altos geralmente são representados em decibéis.

Para a determinação do nível de ruído aplicado utilizamos de um método que observa a saída da Transformada de Fourier.

Podemos perceber pela comparação das figuras 2.1 que o efeito da injeção do sinal periódico em nosso sistema é simplesmente o surgimento de um pico na frequência do sinal de entrada.

Para determinarmos o nível de ruído utilizamos um método de inspeção do espectro de potência. Para a determinação do nível de ruído analisamos o gráfico do espectro de potência (com sinal periódico) e, perto do pico do sinal de entrada, fizemos uma média antes e depois do pico do valor da potência do sinal de saída. Essa média pode ser identificada como o valor do ruído para o sistema.

Este foi o método utilizado por nosso programa para o cálculo da SNR. Escolhemos um intervalo (foi escolhido 10 Hz) antes e depois da frequência do nosso sinal de entrada. Foi computada a média de alguns pontos antes e depois deste intervalo que nos fornece o valor do nível de ruído.

#### 2.4.4 Construção do Gráfico da Razão Sinal Ruído

Como já vimos o gráfico da razão sinal-ruído nos mostra o comportamento desta grandeza com a variação do nível de ruído associado. Para o estudo desta dependência é necessário calcular-se a SNR na frequência do sinal periódico para diferentes ruídos. Procura-se então por um valor de ruído onde a SNR tenha um valor máximo. A existência de um valor máximo para a SNR para valores de ruídos diferentes de zero, configura a existência desta.

### 2.5 Resultados para a Construção da Razão Sinal-Ruído

Um resultado interessante que surge com o estudo da Razão Sinal-Ruído é a comparação da SNR quando o nosso sistema é descrito por um potencial simétrico e por um assimétrico.

Para esta comparação foram usados dois potenciais, um simétrico  $U_{sim}(x)$  e outro assimétrico  $U_{assim}(x)$  dados matematicamente por:

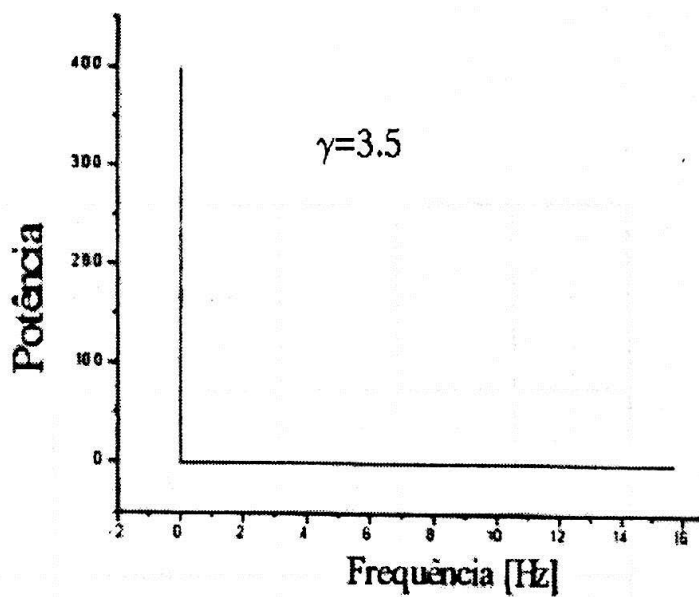
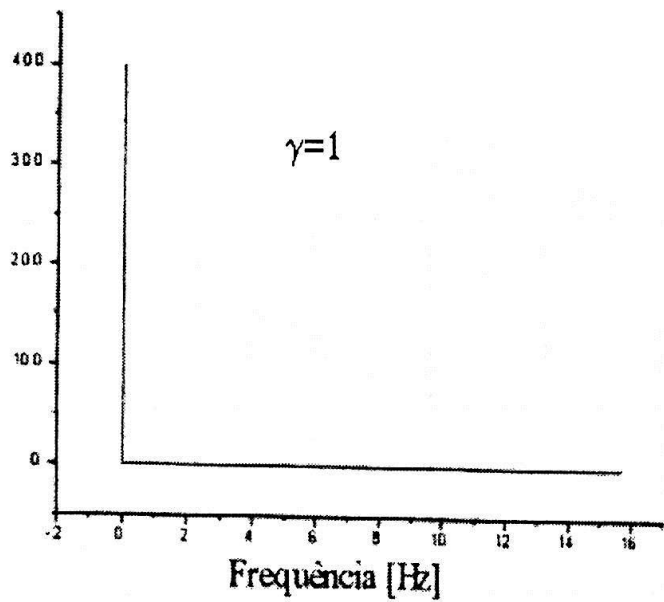
$$\begin{aligned}U_{sim}(x) &= x^4 - 2x^2 \\U_{assim}(x) &= x^4 - 2x^2 - 0.5x\end{aligned}$$

Para a força periódica utilizamos os valores usados por Ippen e colaboradores[23]:  $F(t) = 1.3039 \sin(0.7304t)$ .

Podemos observar nas figuras 2.2 e 2.3 os dois gráficos da SNR.

Observando as duas figuras podemos perceber que os gráficos diferem apenas nos dois primeiros pontos (que correspondem aos mais baixos níveis de ruído). A única diferença entre os dois gráficos é a assimetria do potencial na segunda figura, como estas tornam-se iguais para ruídos altos poderia-se supor neste ponto da dissertação que o caráter assimétrico do potencial sofre alguma influência pelo nível de ruído. Quando estudarmos a Equação de Fokker-Planck este aspecto tornar-se-á mais claro e veremos que nossa suposição estava certa.

Potência



Potência

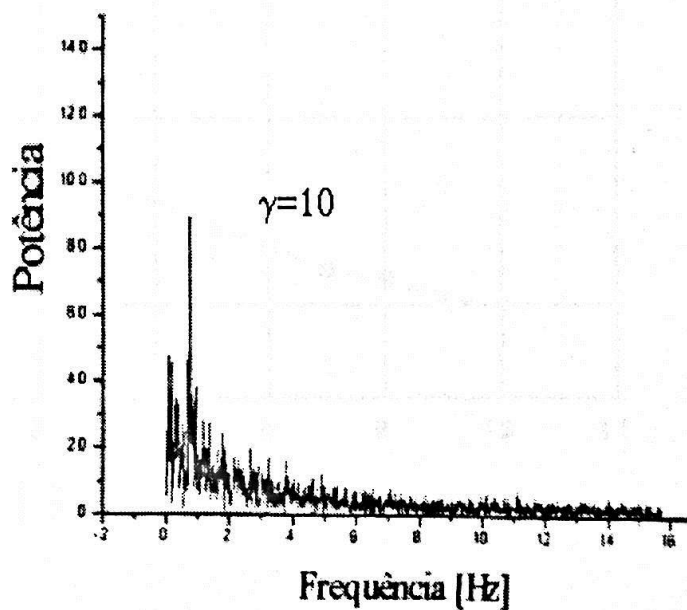
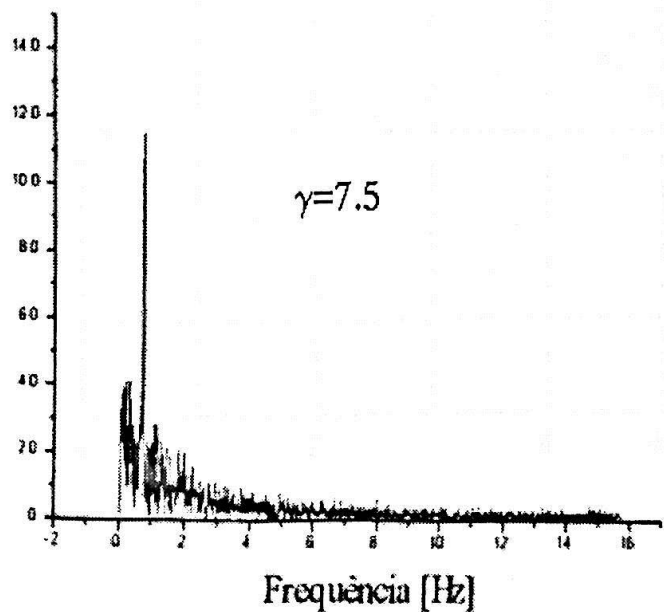


Figura 2.1: Espectros de Potência de Fourier com a alteração do nível de ruído, pode-se perceber a variação da altura do pico.

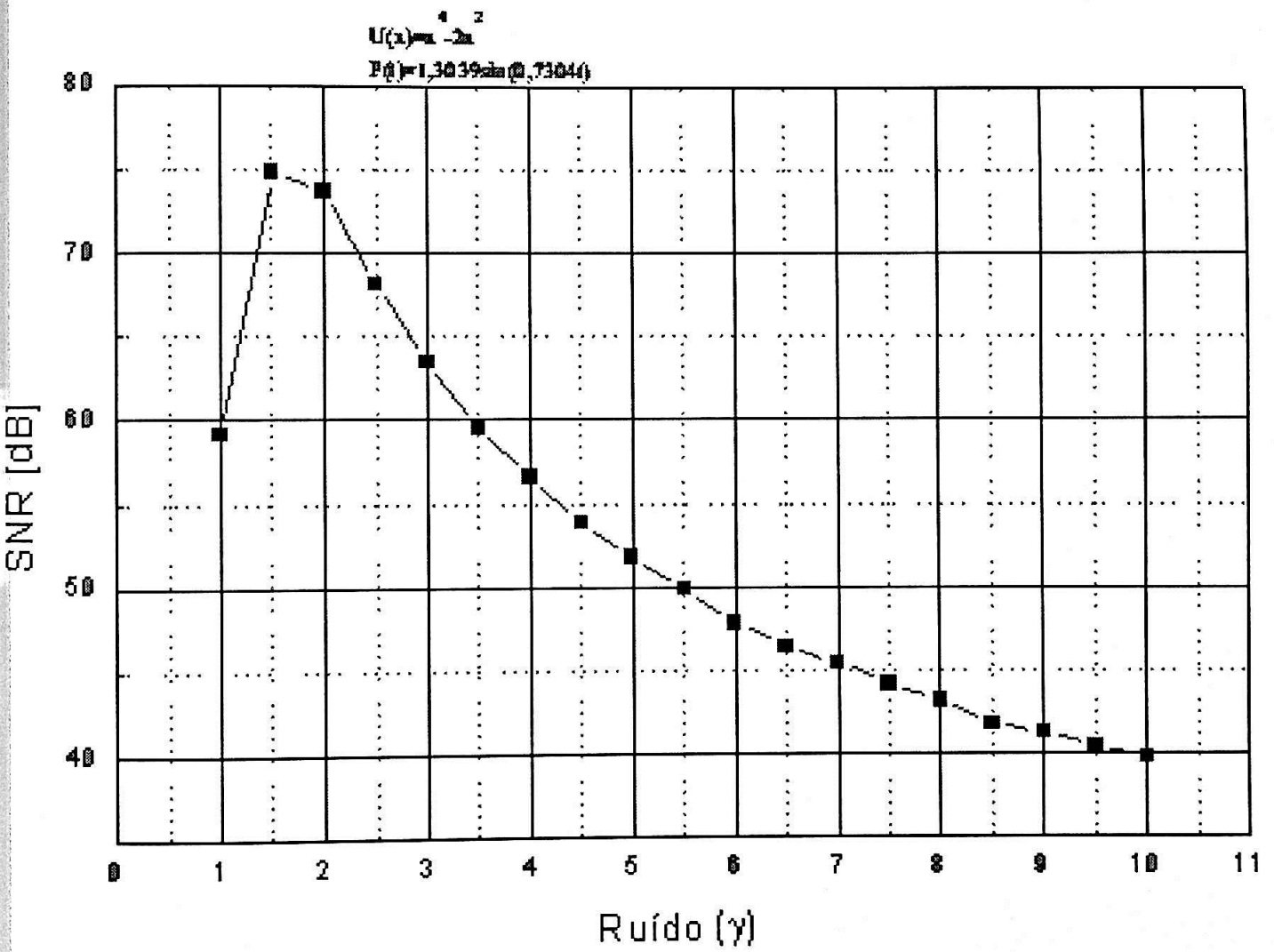


Figura 2.2: Gráfico da SNR para um potencial simétrico



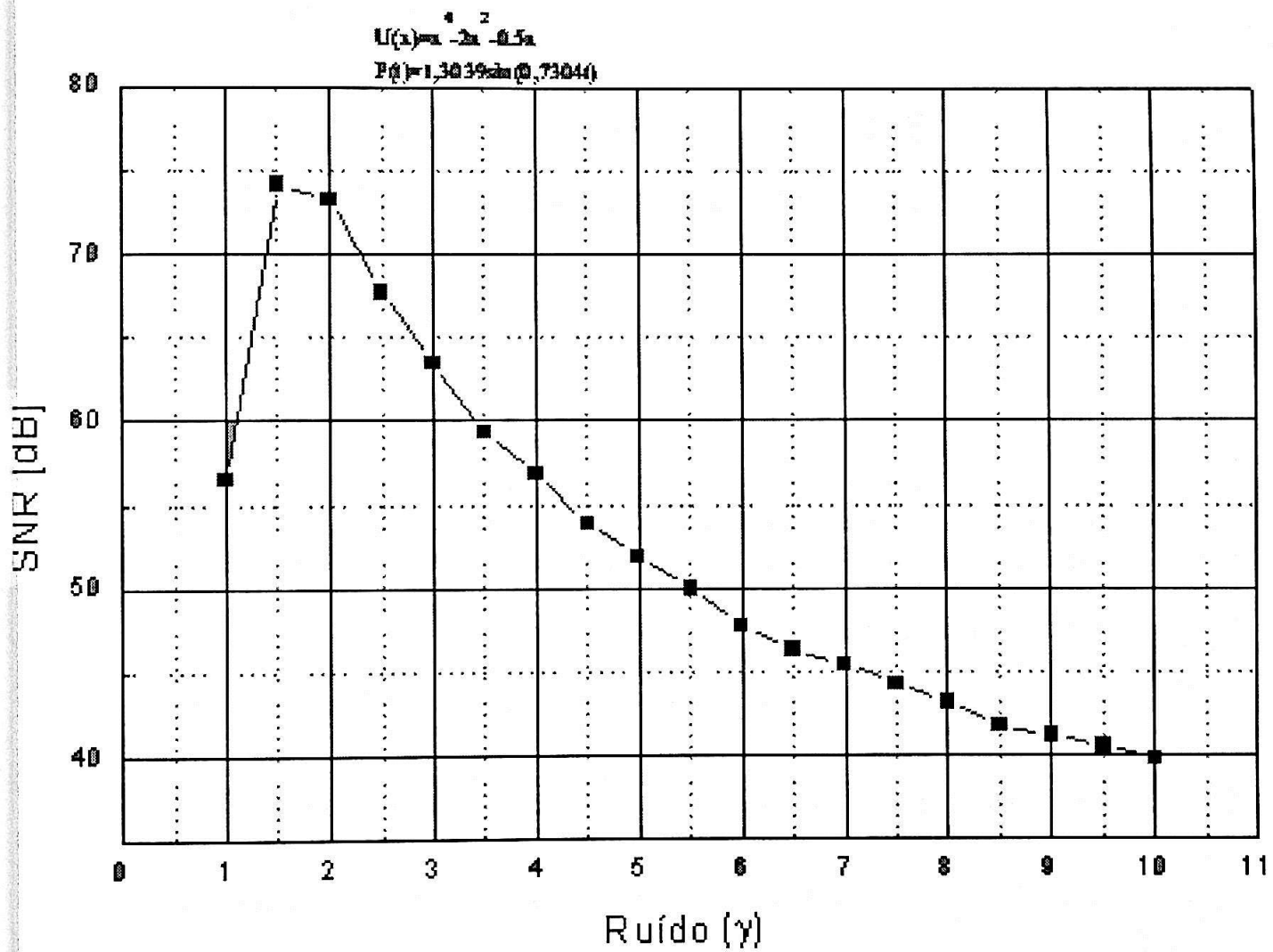


Figura 2.3: Gráfico da SNR para um potencial assimétrico

## Capítulo 3

# Estudo da Convergência e Estabilidade do Cálculo da Relação Sinal-Ruído

### 3.1 Motivação para os testes

No capítulo anterior mostramos como se calcula o gráfico de uma SNR. O maior problema para este cálculo foi o tempo de computação necessário pois utilizamos séries temporais com mais de 100000 pontos, repetidas por 100 vezes. O fato destas simulações terem duração de algumas horas nos motivou a estudar seu comportamento para uma variação de dois parâmetros: (número de trajetórias e número de pontos em cada trajetória. Nosso trabalho neste capítulo pode ser dividido em duas etapas:

1. estudaremos o comportamento da relação sinal-ruído com a variação do número de trajetórias utilizadas para o cálculo da médias das Transformadas de Fourier de cada trajetória,
2. variação do número de pontos da série temporal,

### 3.2 Estudo do comportamento do algoritmo com a variação do número de trajetórias

Como vimos anteriormente para calcularmos a relação sinal-ruído nos utilizamos de séries temporais longas ( $\approx 100.000$  pontos) que tinham os Espectros de Fourier calculados. Esse procedimento foi repetido 100 vezes (gerando

100 trajetórias) calculando assim uma média aritmética simples das Transformadas de Fourier.

O objetivo desta primeira parte do trabalho é estudar a variação do comportamento da Relação Sinal- Ruído quando mudamos o número de trajetórias geradas que foram variadas de 10 até 100 de em intervalos de 10.

As várias Relações Sinal-Ruído foram geradas pelo potencial simétrico,  $U(x) = ax^2 + bx^4$ . Todos os resultados foram colocados no mesmo gráfico apresentados na figura (3.1).

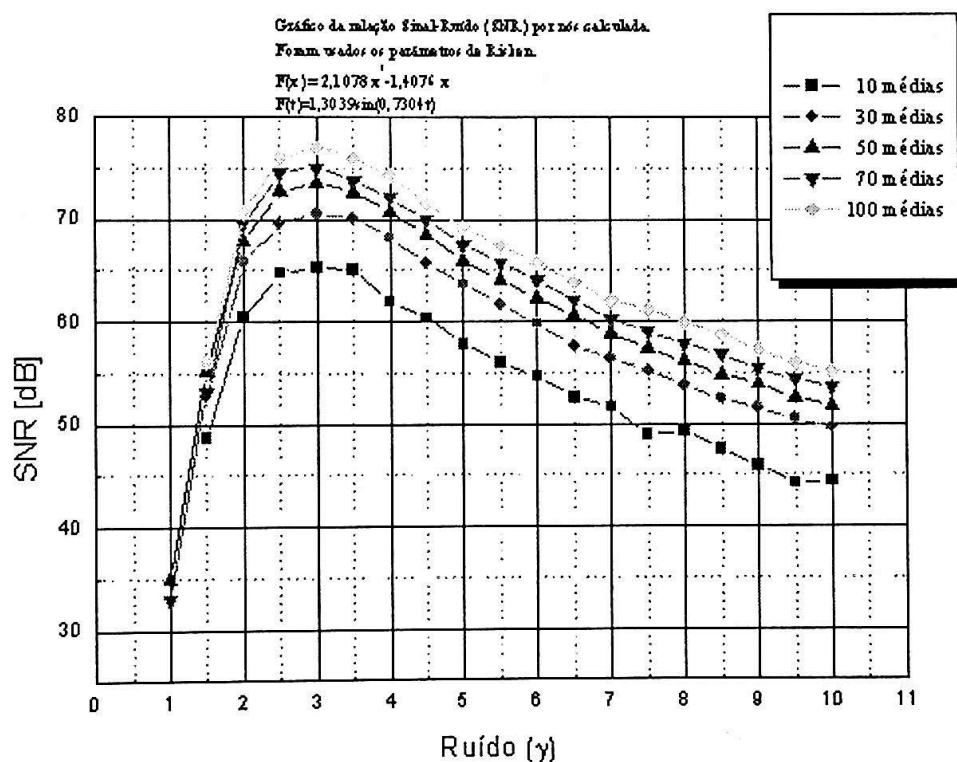


Figura 3.1: Estudo do comportamento da Razão Sinal -Ruído para o potencial simétrico com a variação do número de trajetórias utilizadas.

Podemos perceber pelo gráfico (figura 3.1) que o valor do nível de ruído onde ocorre o pico máximo permanece constante (eixo X) variando apenas o valor da amplificação (eixo Y). Para um melhor visualização deste fenômeno podemos trabalhar com as amplificações máximas que são obtidas do gráfico por inspeção. Estes valores são apresentados na tabela 3.1

Os resultados desta tabela foram apresentados, também, no gráfico 3.2 onde podemos ver que o valor do nível de ruído onde ocorre a amplificação máxima da SNR apresenta um comportamento aproximadamente linear com a variação do número de trajetórias utilizadas para o cálculo da Transformada de Fourier.

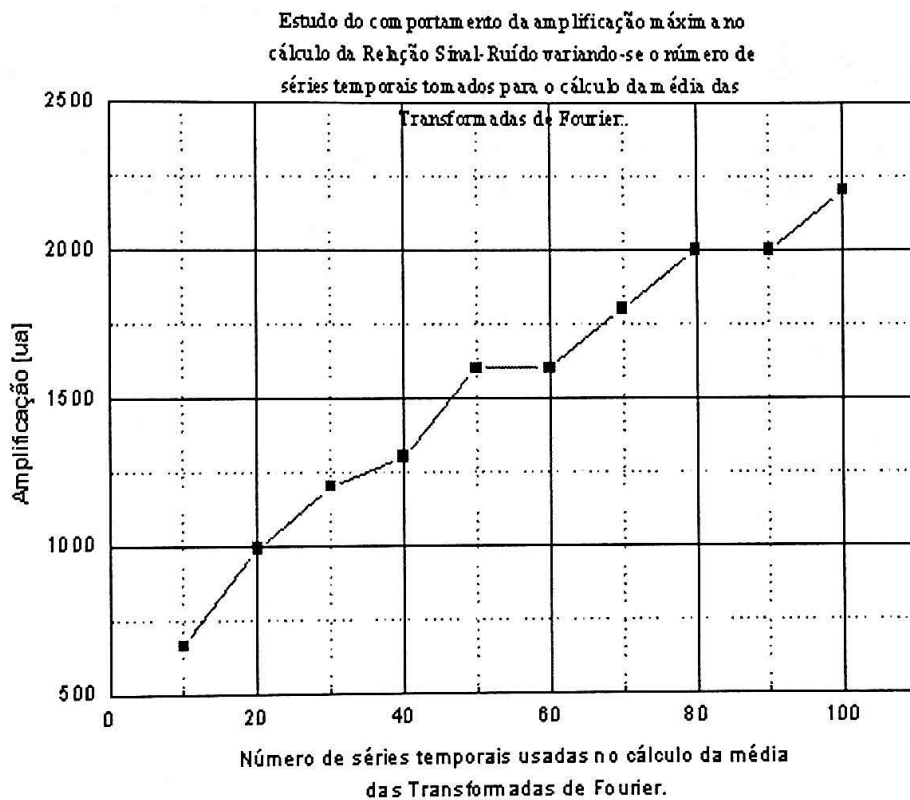


Figura 3.2: Estudo do comportamento da Amplificação máxima estudada como função do número de Trajetórias utilizadas para ao cálculo da média da Transformada de Fourier. Os valores foram obtidos a partir da tabela (3.1)

Este estudo da dependência do valor do nível de ruído onde ocorre a amplificação máxima da SNR não foi por nós localizada em nenhuma publicação científica, pois normalmente no estudo da Ressonância Estocástica é estudado apenas o nível de ruído onde ocorre a amplificação (que podemos ver independente do número de trajetórias).

Algumas hipóteses podem ser construídas a partir deste fenômeno:

- O algoritmo normalmente utilizado para o cálculo da SNR apresenta uma instabilidade. Podemos classificar esta hipótese como sendo a mais viável em virtude da alta linearidade que a instabilidade apresenta (mostrando não ser instabilidade mas um problema conceitual).
- Uma instabilidade intrínseca ao sistema: não acreditamos ser uma hipótese viável pois trabalhamos com outros sistemas além destes sistemas serem teoricamente simples.
- Podemos também pensar numa instabilidade numérica (que poderia ocorrer em virtude de estarmos trabalhando com a integração discreta de sistemas estocásticos); não acreditamos nesta hipótese por dois motivos: inicialmente o programa foi repetido várias vezes dando sempre o mesmo resultado e por outro lado o próprio programa trabalha com médias, o que levaria a uma minimização deste problema.

### 3.3 Estudo do Comportamento da SNR com a Variação do Número de Pontos das Séries Temporais

Nesta segunda parte de nosso trabalho estudaremos a convergência do algoritmo que calcula a SNR como função do número de pontos utilizado na série temporal. A variação do número de ponto tem significado físico melhor definido do que a variação de trajetórias vista anteriormente. Esse significado está ligado ao tempo de integração do sistema. Como já vimos o sistema é integrado em passos temporais fixos que diferem entre si de  $\tau$ , i.e., o primeiro ponto é aquele onde  $t = 0$ , o segundo  $t = \tau$ , o terceiro  $t = 2\tau$  e assim sucessivamente. Podemos então perceber que a diminuição do número de pontos das séries temporais representam um diminuição no tempo total que deixamos o sistema evoluir.

Logo este estudo poderia ser chamado de maneira mais própria de: **Estudo do Comportamento da Amplificação Máxima de SNR Variando-se o Tempo Total de Integração**. Como este estudo tem um procedimento totalmente similar ao utilizado no item anterior nos limitaremos a apresentar os resultados obtidos.

Por motivo de escala, o gráfico comparativo das Relações Sinal-Ruído foi separado em dois: 3.3 e 3.4. É importante lembrar que os valores aparentemente estranhos para o número de pontos deve-se ao fato de utilizarmos para o cálculo da transformada de Fourier o famoso algoritmo FFT (*Fast Fourier Transform*) que apenas converge se o número de pontos do vetor onde se deseja calcular a TF tenha comprimento dado por  $2^x$  (i.e. a nossa série temporal tem que ter 1024, 2048, etc pontos)

Novamente criamos uma tabela com os níveis de ruído onde ocorre a amplificação máxima por inspeção dos gráficos.

Como no caso anterior os resultados da tabela (3.2) pode ser colocado num gráfico (3.5) onde podemos perceber seu comportamento linear.

Estes testes também não foram por nós achados em nenhuma publicação científica. Duas conclusões importantes podem ser retiradas deste estudo. A primeira é muito semelhante àquela conseguida na primeira parte destes estudos, o valor de amplificação máxima que conseguimos depende do tempo de integração de nosso sistema. Isto normalmente não é detectado pois normalmente estamos interessados apenas na determinação do nível de ruído onde ocorre a amplificação máxima.

A segunda conclusão diz respeito às duas curvas onde não conseguimos determinar um pico para a SNR (1024 e 2048 pontos), isto pode ser explicado usando-se o conceito definido anteriormente que ligava o número de pontos

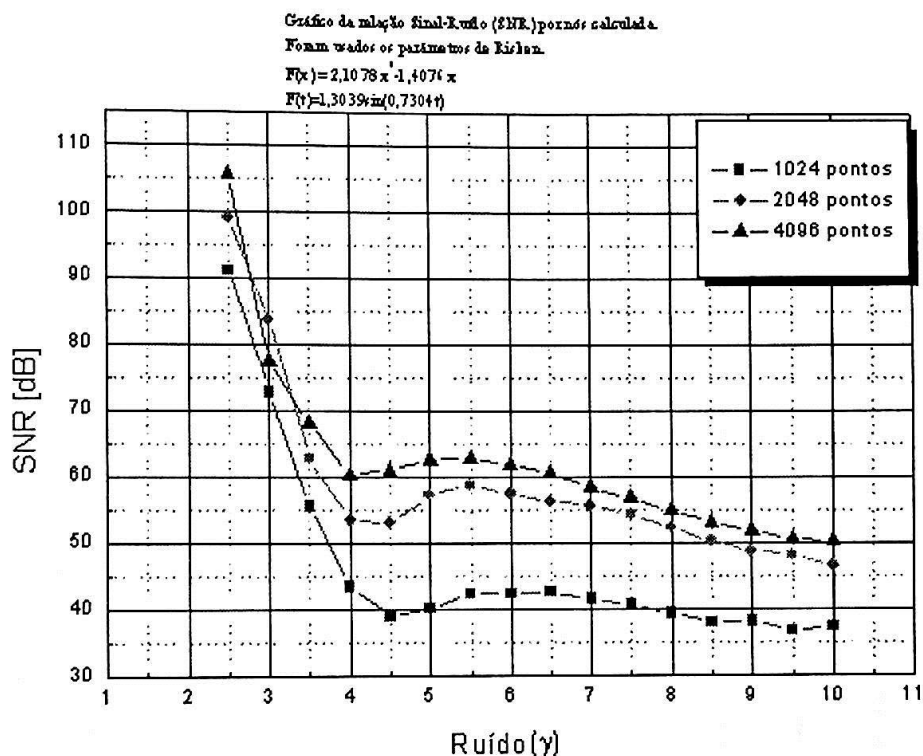


Figura 3.3: Estudo do comportamento da Razão Sinal -Ruído para o potencial simétrico com a variação do número de pontos na série original. (três primeiros casos: 1024, 2048 e 4096 pontos)

da série temporal ao tempo total de integração, nestes dois casos o sistema teve a sua evolução temporal paralisada antes que o sistema atingisse um estado estável (iremos estudar este estado em detalhes na segunda parte desta dissertação onde veremos tratar-se da Solução Estacionária da Equação de Fokker-Planck associada a este problema), nestes dois casos o sistema está ainda evoluindo segundo um estado transiente.

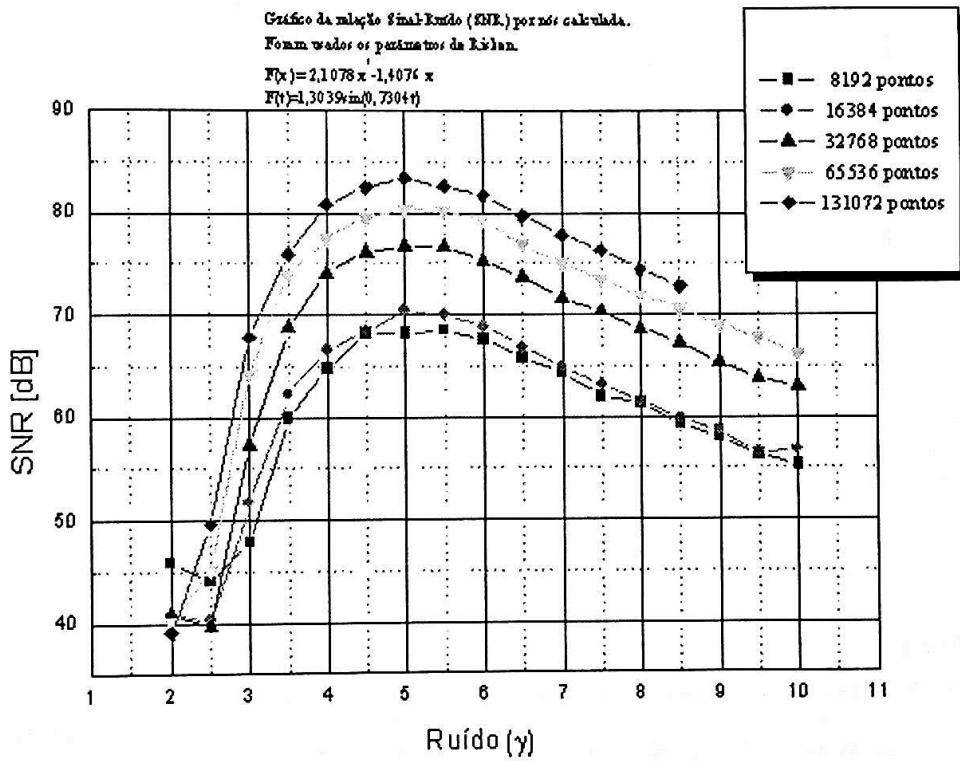


Figura 3.4: Estudo do comportamento da relação Sinal -Ruído para o potencial simétrico com a variação do número de pontos na série original. ( casos com: 8192, 16384, 32768, 65536 e 131072 pontos)



Tabela 3.1: Valores com as ampliações máximas para o gráfico 3.1. A terceira coluna é obtida a partir da primeira usando-se  $amp = \exp(amp[dB]/10)$

Número de Médias	Amplificação [dB]	Amplificação
10	65	665
20	69	992
30	71	1200
40	72	1300
50	74	1600
60	74	1600
70	75	1800
80	76	2000
90	76	2000
100	77	2200

Tabela 3.2: Valores com as ampliações máximas para os gráficos 3.3 e 3.4. A terceira coluna é obtida a partir da primeira usando-se  $amp = \exp(amp[dB]/10)$

Número de Médias	Amplificação [dB]	Amplificação
1024	não converge	não converge
2048	não converge	não converge
4096	62	490
8192	68	900
16384	70	1100
32768	77	2200
65536	80	3000
131072	83	4024

Comportamento da amplificação causada pela Ressonância Estocástica em função do número de pontos da série gerada.

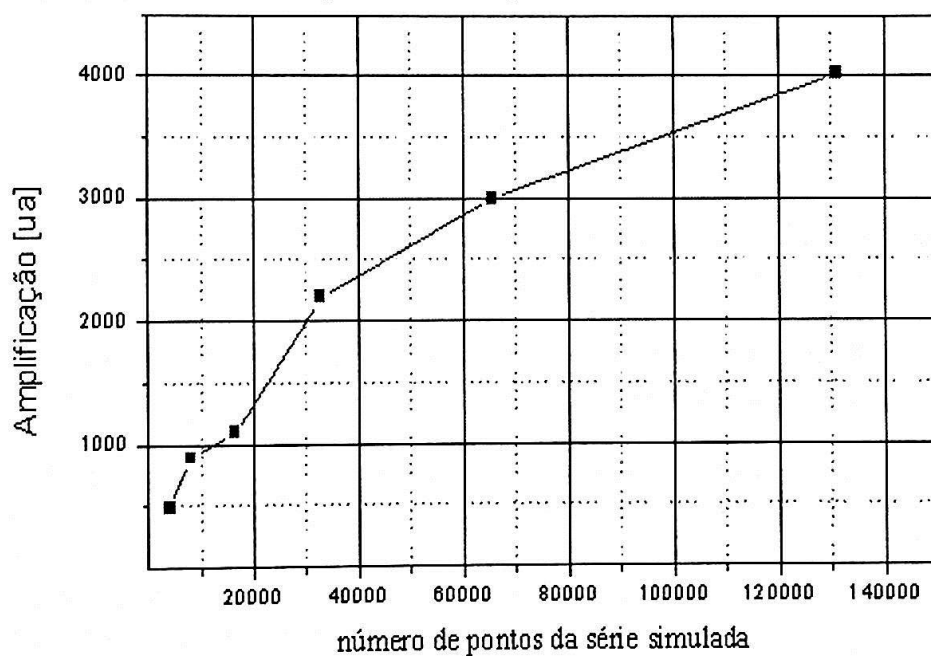


Figura 3.5: Estudo do comportamento da amplificação máxima estudada como função do número de pontos utilizados na série temporal. Os valores foram obtidos a partir da tabela (3.2)

## Capítulo 4

# Estudo da Equação de Fokker-Planck

### 4.1 Introdução

Em nosso trabalho até este ponto da dissertação nós utilizamos como ferramenta principal a Equação de Langevin que descreve nosso sistema. Nosso método de trabalho foi a análise e integração numérica desta equação. Neste capítulo iremos nos utilizar de uma outra ferramenta teórica: **A Equação de Fokker-Planck** (EFP). Esta equação desempenha um papel importante na Física e se adequa de maneira precisa nesta situação.

A EFP é uma equação diferencial no espaço e no tempo para a Função Densidade de Probabilidade. No nosso modelo mecânico (bolinhas simuladas num potencial) a função densidade de probabilidade pode ser entendida como uma função que descreve como varia temporalmente a probabilidade de encontrar a bolinha numa determinada posição  $x$ .

Para introduzirmos o assunto é conveniente discutirmos um pouco a Equação de Fokker-Planck utilizando apenas conceitos intuitivos. Inicialmente devemos observar que a diferença principal entre o estudo da ressonância estocástica através da Equação de Langevin e o estudo através da EFP é que agora será necessário simularmos um número grande de partículas simultaneamente, ao invés de uma como fazíamos anteriormente. Estas partículas estão sujeitas ao ruído ( $\xi(t)$ ) e a uma força periódica ( $F(t) = A \sin(\omega t)$ ). É importante frisar que, apesar de todas as partículas serem simuladas no mesmo potencial e ao mesmo tempo, elas são todas *não-interagentes* (não interagem entre si). Quando falamos não-interagentes, queremos definir que as partículas são “transparentes” umas às outras e que o ruído afeta a todas de maneira independente. A única ligação que elas apresentam é o

fato que a força periódica está em fase, ou seja, todas estão sujeitas à mesma força periódica:

$$F(t) = A \sin(\omega t) \quad (4.1)$$

Essa hipótese tem um significado físico claro: se pensarmos em nossa força periódica com uma força que atua através de um campo todas as nossas partículas estarão sujeitas à mesma força.

Com estas condições torna-se fácil simularmos todas as partículas simuladas simultaneamente, devemos apenas repetir a simulação quantas vezes forem o número de partículas a serem simuladas. Essas simulações podem ser feitas por um intervalo de tempo determinado estudando-se as posições finais das partículas.

Após este tempo total de simulação podemos transformar estas várias posições em um histograma que fornece a porcentagem de partículas que encontrava-se em um determinado intervalo de posições após um tempo fixo. Este histograma pode ser identificado como a distribuição espacial de partículas em um tempo fixo.

Se ao simularmos as partículas, usarmos a mesma condição inicial para todas (i. e.,  $x_i(t = 0) = x_0$  para qualquer partícula  $i$ ) a distribuição de posições  $U(x, t)$  pode ser identificada como a distribuição espacial de probabilidade de se encontrar a partícula num instante  $t$ .

Podemos discretizar o tempo em intervalos de tempo  $\tau$  repetindo-se a simulação para cada intervalo de tempo. Teremos um conjunto de distribuições espaciais do tipo:

$$\{U(x, t = 0), U(x, t = \tau), U(x, t = 2\tau), \dots, U(x, t = n\tau), \dots\}. \quad (4.2)$$

Podemos perceber que o conjunto de todos os  $U(x, t)$  representa a variação espaço-temporal de nossa distribuição de probabilidades. Essa função  $U(x, t)$  nos dá o comportamento de nosso sistema, pois com ela sabemos em qualquer instante  $t$  a probabilidade de se encontrar uma partícula em uma determinada posição.

A equação de Fokker-Planck é uma equação diferencial de 1ª ordem no tempo e 2ª ordem no espaço para a distribuição de probabilidades  $U(x)$  que tem como forma geral:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [A(x, t)U(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x, t)U(x, t)] \quad (4.3)$$

Os termos A e B são os chamados coeficientes de arrasto (*drift*) e difusão, respectivamente. Essa é a equação fundamental de nosso trabalho pois com ela

podemos prever o comportamento espaço-temporal da função de distribuição de probabilidades. Como iremos ver nas seções seguintes o uso da EFP leva a um formalismo muito elegante para o estudo da ressonância estocástica.

Neste capítulo iremos dividir o nosso estudo em duas partes. Inicialmente iremos calcular a equação de Fokker-Planck para o nosso caso particular de Ressonância Estocástica onde o termo de arrasto está relacionado com o termo de força periódica  $F(x) = A \sin(\omega t)$ , enquanto que o termo de difusão está relacionado com o termo de ruído  $\gamma \xi(t)$ .

Na segunda etapa iremos estudar o comportamento estacionário da equação de Fokker-Planck. A solução estacionária pode ser entendida como o comportamento do sistema para tempos muito longos.

## 4.2 Cálculo da Equação de Fokker-Planck para a Ressonância Estocástica

Nesta seção partiremos da Equação de Fokker-Planck genérica para calcularmos o caso particular da ressonância estocástica. Esta equação particular será usada em todos os cálculos desta parte da dissertação o que nos motivou a colocar sua dedução no corpo da tese.

A primeira parte deste desenvolvimento pode ser achado em vários livros textos[20, 21] mas como esta primeira parte é de fundamental importância para a compreensão da seguinte (que trata do cálculo no caso da Ressonância estocástica) é conveniente tê-las juntas.

### 4.2.1 Tratamento Geral para a Transformação entre uma Equação de Langevin e uma de Fokker-Planck

Partiremos nesta dedução da Equação de Langevin mais genérica possível:

$$\frac{dx}{dt} = h(x, t) + g(x, t)\xi(t) \quad (4.4)$$

onde  $h(x, t)$  e  $g(x, t)$  são funções quaisquer do espaço e do tempo e a função  $\xi(t)$  é uma Função Estocástica que apresenta as características de Ruído Branco:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad (4.5)$$

e

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t') \quad (4.6)$$

A Equação de Fokker-Planck para uma dimensão pode ser escrita de uma forma muito elegante usando-se o conceito de operador:

$$\dot{W}(x, t) = L_{FP}W(x, t) \quad (4.7)$$

Onde  $W(x, t)$  é a distribuição de probabilidades espaço-temporal e o Operador de Fokker-Planck é definido por:

$$L_{FP}\Phi(x) = -\frac{\partial}{\partial x} [D^{(1)}(x, t)\Phi(x)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D^{(2)}(x, t)\Phi(x)] \quad (4.8)$$

Os termos de arrasto (primeiro termo) e difusão (segundo termo) desempenham um papel importantíssimo pois são eles que fazem a ligação entre as equações de Langevin e Fokker-Planck através das relações abaixo:

$$D^{(1)}(x, t) = h(x, t) + \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} g(x, t) \quad (4.9)$$

$$D^{(2)}(x, t) = [g(x, t)]^2 \quad (4.10)$$

Esta primeira parte pode ser achada em livros que tratem de fenômenos estocásticos; a seguir apresentamos a parte calculada por nós que utiliza dos resultados acima para o estudo da Ressonância Estocástica.

#### 4.2.2 Cálculo da Equação de Fokker-Planck para o Caso da Ressonância Estocástica

No capítulo anterior calculamos e trabalhamos com a Equação de Langevin que descreve o fenômeno da Ressonância Estocástica. Esta equação pode, por exemplo, ser vista em sua forma completa na equação (4.4). Pela inspeção desta equação podemos perceber que as funções  $h(x, t)$  e  $g(x, t)$  da equação de Langevin geral (4.4) são dadas por:

$$h(x, t) = A \sin(\omega, t) - U'(x) \quad (4.11)$$

$$g(x, t) = \gamma^2 \quad (4.12)$$

onde  $\gamma$  é o nível de ruído. Podemos, então, calcular os coeficientes de arrasto e difusão para a Equação de Fokker-Planck:

$$D^{(1)}(x, t) = A \sin(\omega, t) - U'(x) \quad (4.13)$$

$$D^{(2)}(x, t) = \gamma \quad (4.14)$$

Usando essas duas relações na nossa definição de Operador de Fokker-Planck (4.8) teremos que este operador terá forma:

$$L_{FP}\Phi(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\{[A \sin(\omega, t) - U'(x)] \Phi(x)\} + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x) \quad (4.15)$$

Este operador pode ser aplicado na equação geral de Fokker-Planck (4.7):

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\{[A \sin(\omega, t) - U'(x)] W(x, t)\} + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t) \quad (4.16)$$

Fazendo todas as derivações explicitamente, obtemos finalmente a Equação de Fokker-Planck para o caso específico da Ressonância Estocástica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = & -A \sin(\omega t) \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} + U''(x) W(x, t) \\ & + U'(x) \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} + \gamma^2 \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

## 4.3 Estudo do Comportamento Estacionário para a Equação de Fokker-Planck

### 4.3.1 Introdução

Na seção anterior deduzimos a EFP para o caso onde temos uma força periódica atuando no sistema onde pode existir a Ressonância Estocástica. A integração desta equação tem como solução o comportamento espaço-temporal da função densidade de probabilidades. Em termos físicos esta solução mostra como varia no tempo a probabilidade de encontrar-se a partícula em uma determinada posição  $x$ . Ou, se olharmos em todo o espaço de integração ( $x_{min} \rightarrow x_{max}$ ) a densidade de probabilidades mostra como varia temporalmente a probabilidade de se encontrar a partícula. Neste tipo de estudo geralmente procura-se um pico na Densidade de Probabilidades pois este pico representa uma posição onde é máxima a probabilidade de encontrar-se a partícula. O comportamento deste pico é estudado.

Para sistemas estocásticos temos dois tipos de soluções bem determinadas: uma estacionária e uma transiente. A solução estacionária reflete o comportamento da função densidade de probabilidades para tempos longos, onde esta função apresenta um comportamento constante no tempo (como iremos ver, no caso da Ressonância Estocástica este conceito deve ser ampliado) ou como iremos definir (4.3.2) de uma forma mais geral, a *corrente de probabilidades* deve ser constante no tempo.



A solução transiente reflete (como o próprio nome indica) o comportamento da função densidade de probabilidade enquanto o sistema ainda não atingiu o estado de solução estacionária.

Podemos também notar uma diferença fundamental entre estas duas soluções: para o cálculo da solução estacionária temos métodos analíticos bem estruturados e elegantes. Já para a solução transiente nosso único recurso é a integração. Em vista destes motivos iremos nesta seção estudar somente solução estacionária.

Inicialmente iremos definir os conceitos utilizados para o cálculo e as ferramentas teóricas utilizadas. Numa segunda etapa iremos falar de nossos resultados.

Nesta parte dividiremos o trabalho em duas partes: inicialmente iremos calcular a solução estacionária analítica para o caso em que o arrasto não depende do tempo. A seguir será estudado o comportamento desta solução para um sistema bem conhecido: sem força periódica. Finalmente, iremos estudar a solução estacionária para um sistema com força periódica (sistema onde pode ocorrer Ressonância Estocástica).

### 4.3.2 Cálculo Analítico para a Solução Estacionária

Nesta seção calcularemos a solução estacionária da Equação de Fokker-Planck para o caso em que  $D^{(1)}$  e  $D^{(2)}$  não dependem do tempo. Para este cálculo é conveniente que pensemos em nossa equação como uma equação de continuidade onde possamos definir uma **Corrente de Probabilidade  $S$**  como:

$$S(x, t) = D^{(1)}(x)W(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} D^{(2)}(x)W(x, t). \quad (4.18)$$

A Equação de Fokker-Planck geral pode então ser escrita na forma:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \quad (4.19)$$

Podemos perceber que esta equação pode ser identificada como uma equação de continuidade, pois retrata que a variação temporal da densidade de probabilidade é dada pela variação de uma grandeza  $S$  que pode ser identificada, então, como uma corrente de probabilidades.

A utilidade da corrente de probabilidades é para facilitar a definição de estado estacionário. Em um estado estacionário a corrente de probabilidades  $S$  deve ser constante espacialmente, pois assim asseguraremos que não haja variação temporal da densidade de probabilidades.



É conveniente utilizarmos condições de contorno naturais ( $x_{min} = -\infty$ ,  $x_{max} = +\infty$ ). Como já vimos a corrente de probabilidades no estado estacionário é constante; para evitarmos divergências devemos nos assegurar que ela seja nula nos extremos:

$$S \xrightarrow{x \rightarrow x_{min, max}} 0 \quad (4.20)$$

Podemos então concluir que a corrente de probabilidades deverá ser nula para os estados estacionários.

### Utilização da Corrente de Probabilidades para o Cálculo da Solução Estacionária

Aqui utilizaremos os resultados da seção anterior para, finalmente, calcularmos de modo analítico a Solução Estacionária  $W_{ST}(x)$ . Como no estado estacionário a corrente de probabilidades é nula, podemos afirmar que:

$$D^{(1)}(x)W_{ST}(x) - \frac{d}{dx}D^{(2)}(x)W_{ST}(x) = 0 \quad (4.21)$$

ou seja:

$$D^{(1)}(x)W_{ST}(x) = \frac{d}{dx}D^{(2)}(x)W_{ST}(x) \quad (4.22)$$

Podemos multiplicar e dividir o primeiro membro por  $D^{(2)}(x)$

$$\frac{D^{(1)}(x)}{D^{(2)}(x)}D^{(2)}(x)W_{ST}(x) = \frac{d}{dx}D^{(2)}(x)W_{ST}(x) \quad (4.23)$$

de onde concluímos que:

$$\frac{d}{dx} \ln [D^{(2)}(x)W_{ST}(x)] = \frac{D^{(1)}(x)}{D^{(2)}(x)} \quad (4.24)$$

Finalmente, após integração:

$$W_{ST}(x) = \frac{N_0}{D^{(2)}(x)} \exp\left(\int \frac{D^{(1)}(x')}{D^{(2)}(x')} dx'\right) \quad (4.25)$$

onde  $N_0$  é uma constante de integração escolhida para que  $W_{ST}$  seja normalizada

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{ST}(x) dx = 1 \quad (4.26)$$

Se definirmos um potencial  $\phi(x)$ :

$$\phi(x) = \ln D^{(2)}(x) - \int \frac{D^{(1)}(x')}{D^{(2)}(x')} dx' \quad (4.27)$$

a Solução Estacionária para a Equação de Fokker-Planck geral pode ser escrita de uma maneira muito elegante:

$$W_{ST}(x) = N_0 e^{-\phi(x)} \quad (4.28)$$

### Solução Aproximada para a Ressonância Estocástica

Podemos utilizar a solução acima como uma solução aproximada para o caso de Ressonância Estocástica. Ou seja, a solução estacionária  $W_{ST}(x, t)$  para o caso da Ressonância Estocástica será então dada de forma aproximada por

$$W_{ST}(x, t) = \frac{N_0}{D^{(2)}(x)} \exp\left(\int \frac{D^{(1)}(x', t)}{D^{(2)}(x')} dx'\right) \quad (4.29)$$

onde:

$$\begin{aligned} D^{(1)}(x, t) &= A \sin(\omega t) - \nabla U \\ D^{(2)}(x, t) &= \gamma^2 \end{aligned}$$

Calculemos a integral que temos em (4.25):

$$\begin{aligned} \int \frac{D^{(1)}(x, t)}{D^{(2)}(x)} dx &= \int \left( \frac{A \sin(\omega t) - U'(x)}{\gamma^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \left[ \int A \sin(\omega t) dx - \int U'(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \left[ \int A \sin(\omega t) dx - \int dU \right] \\ &= \frac{1}{\gamma^2} [A \sin(\omega t)x - U(x)] \end{aligned}$$

Nosso potencial  $\phi$  será então dependente do tempo e dado por:

$$\phi(x, t) = \ln \gamma^2 - \frac{1}{\gamma^2} [A \sin(\omega t)x - U(x)] \quad (4.30)$$

Finalmente, nosso estado estacionário será:

$$W_{ST}(x, t) = \frac{N_0^2}{\gamma} \exp\left[\frac{1}{\gamma^2} (A \sin(\omega t)x - U(x))\right] \quad (4.31)$$

onde valor de  $N_0$  se obtém pela normalização de  $W_{ST}(x, t)$ .

### 4.3.3 Simulações Numéricas para o Estudo da Solução Estacionária

Nesta parte do trabalho fizemos simulações computacionais para verificarmos o comportamento das soluções estacionárias calculadas no item anterior.

Dividimos nosso estudo em dois. Primeiramente simulamos sistemas onde não atuam forças periódicas por ser um tipo de sistema onde os resultados já estão bem sedimentados. Numa segunda etapa estudamos os sistemas com força periódica.

#### Métodos de Cálculo Numérico

Antes da apresentação dos resultados devemos mostrar quais os métodos numéricos utilizados para a simulação. Neste trabalho não fizemos a integração numérica da equação de Fokker-Planck mas a simulamos utilizando apenas conceitos probabilísticos. O método que utilizamos não trabalha com a equação de Fokker-Planck, mas sim com repetidas simulações do sistema através de Equações de Langevin.

Simultaneamente simulamos muitas partículas sujeitas à mesma condição inicial. A distribuição destas partículas em nosso potencial nos dá uma indicação da distribuição espacial da densidade de probabilidade. A simulação pode ser interrompida em um instante  $t$  qualquer nos dando a distribuição espacial de probabilidade num instante  $t$  fixo que é exatamente o resultado da integração da Equação de Langevin. A construção da distribuição de posições das partículas é feita através do histograma da posição destas partículas em um determinado instante de tempo. Para a construção destes histogramas nós desenvolvemos um novo algoritmo que nos parece não ter sido usado antes e está explicitado em detalhes no Apêndice C.

Nesta seção apresentaremos uma comparação entre o nosso método de cálculo e a solução analítica. O cálculo computacional desta parte foi um ponto crítico em nosso trabalho pois para o cálculo dos histogramas foi desenvolvido um programa em FORTRAN e executado remotamente em estações de trabalho ALPHA pertencentes ao Instituto. Já o cálculo das funções analíticas foi efetuado em programas matemáticos de uso em PC (como Matlab, Mathcad) por já possuírem ferramentas prontas e de fácil uso.

Vamos mostrar na seção a seguir alguns resultados para a solução estacionária sem a força periódica ( $A \sin(\omega t)$ ) por ser o resultado que era estudado antes da descoberta da Ressonância Estocástica.

## Estudo da Solução Estacionária para um Sistema Sujeito a um Ruído Branco

Nesta parte do trabalho simulamos o comportamento do sistema quando sujeito a um potencial bi-estável e a um ruído branco. Inicialmente estudamos o caso em que o potencial é simétrico. Escolhemos como potenciais simétricos biestáveis potencial quárticos cuja forma geral é:

$$U(x) = a_1x^2 + a_2x^4 \quad (4.32)$$

A escolha dos parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  foi empírica. O nosso trabalho inicial foi estudar a importância de cada termo ( $a_1$  e  $a_2$ ) na forma final do potencial. Este estudo está apresentado aqui de forma resumida utilizando-se apenas de conceitos pictóricos.

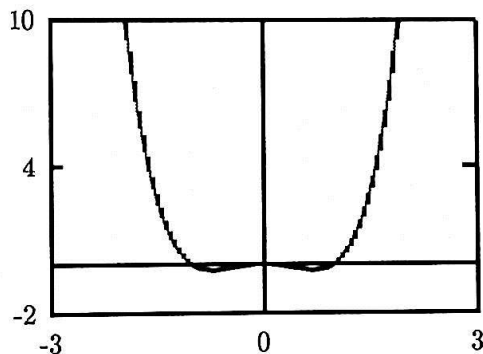


Figura 4.1: Gráfico do Potencial  $U(x) = x^4 - x^2$

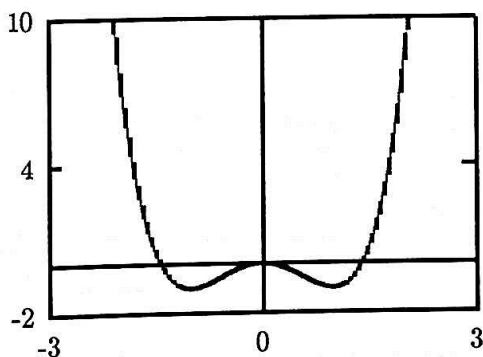


Figura 4.2: Gráfico do Potencial  $U(x) = x^4 - 2x^2$

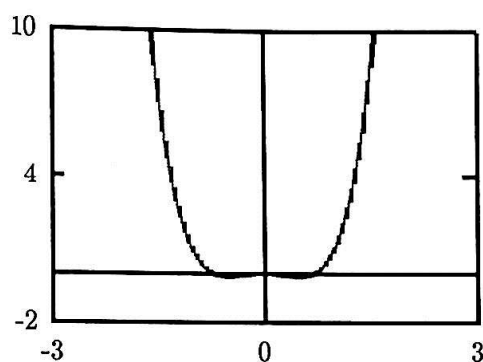


Figura 4.3: Gráfico do Potencial  $U(x) = 2x^4 - x^2$

Com estes três gráficos podemos perceber a função que os parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  desempenham no potencial. O termo  $a_1$  (que deve ter valor negativo) controla a altura da barreira de potencial enquanto o termo  $a_2$  controla as condições de contorno para o sistema (pois é responsável pelo valor do potencial para valores fora da região central).

O potencial que foi escolhido para este estudo foi:  $U(x) = x^4 - 2x^2$  por apresentar um gráfico que é o que mais se aproxima do que esperaríamos de um potencial bi-estável.

Tabela 4.1: Parâmetros utilizados nas simulações de estado estacionário.

Posição Inicial	0
Passo de integração	0.01
Início do Histograma	-5
Final do Histograma	5
Passo do Histograma	0.05
Número de Iterações	5000
	(entre 1000 e 100000 não alterou o resultado)

Para o estudo da solução estacionária foram feitas simulações onde usamos os valores indicados pela tabela 4.1.

As figuras a seguir mostram alguns resultados de nossas simulações usando o método exposto no Apêndice (C) para a construção de histogramas. Estes histogramas retratam as posições de  $N$  partículas (no nosso caso 100.000) descritas por uma equação de movimento do tipo Langevin (histogramas vermelhos), também está retratada a função analítica por nós calculada para este caso (Equação 4.31).

Inicialmente iremos apresentar alguns resultados para potenciais simétricos.

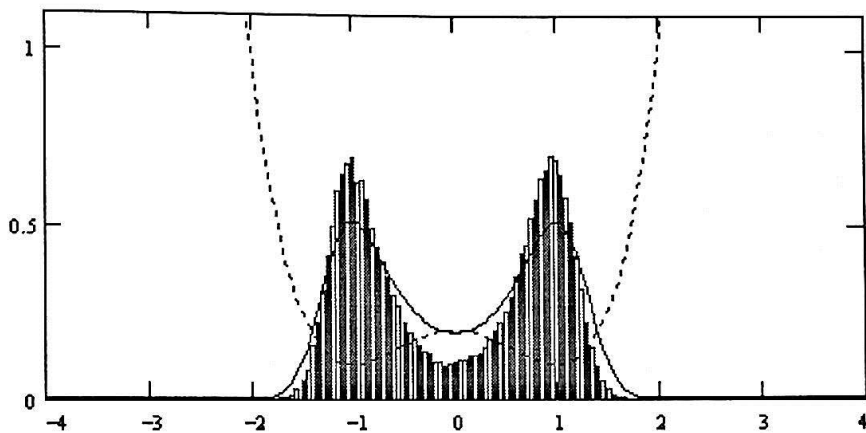


Figura 4.4: Simulação para Regime Estacionário Simétrico (Ruído 1.0), onde a curva contínua é o resultado teórico e no histograma temos nossas simulações.

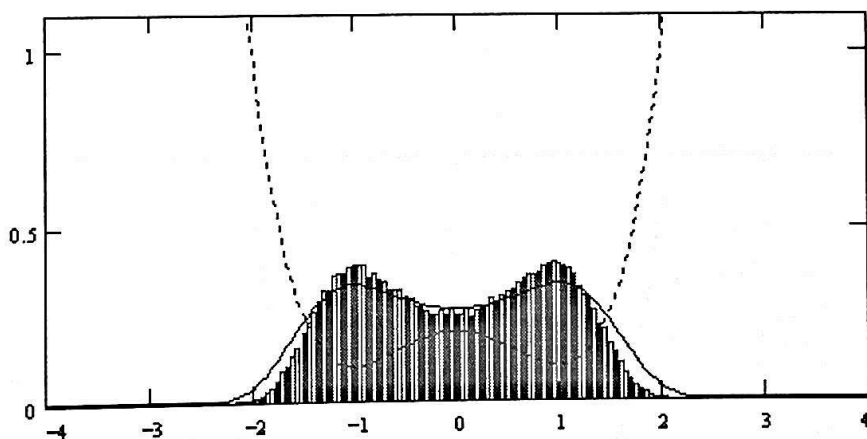


Figura 4.5: Simulação para Regime Estacionário Simétrico (Ruído 2.0).

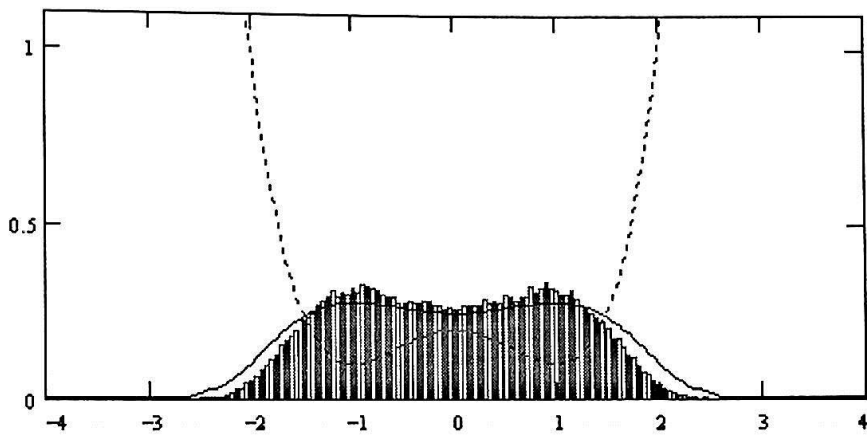


Figura 4.6: Simulação para Regime Estacionário Simétrico (Ruído 3.0).

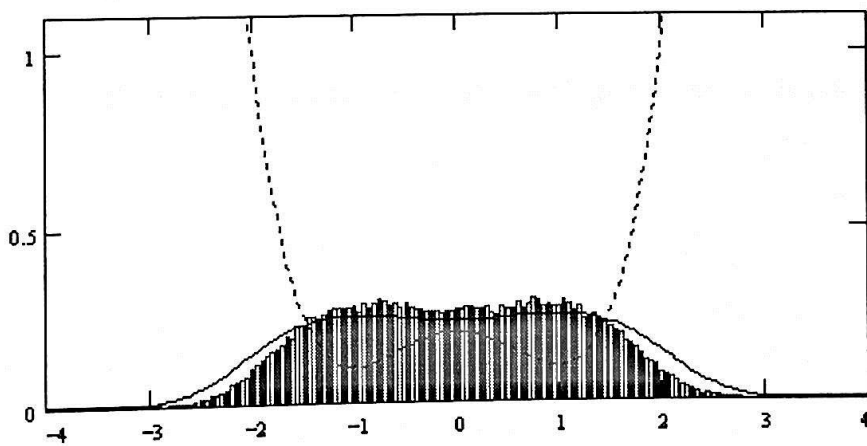


Figura 4.7: Simulação para Regime Estacionário Simétrico (Ruído 4.0).

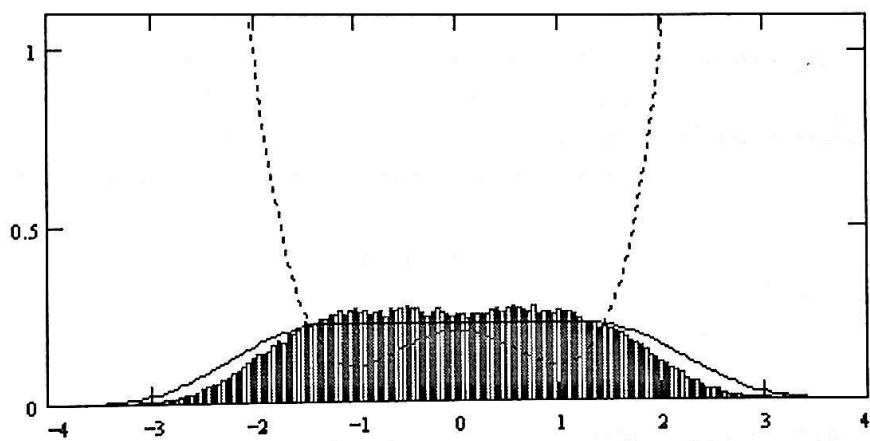


Figura 4.8: Simulação para Regime Estacionário Simétrico (Ruído 5.0).



Inicialmente podemos ver que, como esperávamos, a probabilidade de se encontrar uma partícula é maior nos poços de potencial do que na região intermediária (barreira de potencial).

Pode-se notar, também, que o resultado do aumento do ruído em nosso sistema causa uma diminuição da probabilidade de encontrar-se as partículas nos poços de potencial acompanhado de um aumento da probabilidade de encontrar-se a partícula na barreira de potencial. Este fenômeno pode ser mais facilmente entendido em um ponto de vista mecânico: o aumento do ruído causa um aumento da força que este ruído aplica na partícula, assim, nossa partícula tem maior probabilidade de passar sobre a barreira (o que aumenta a probabilidade de encontrá-la nesta posição). Imaginando dois casos limites, podemos pensar um caso em que o ruído é nulo e outro em que este é infinito; no primeiro caso a partícula nunca conseguiria passar sobre a barreira e, assim, a probabilidade de a encontrarmos lá seria nula, no outro caso limite teríamos uma força infinita atuando em uma barreira finita causando uma distribuição uniforme de posições pelo espaço, ou as partículas não iriam "notar" a existência da barreira.

Em todas as simulações foram feitos testes de normalização com as funções analítica e simulada através de (respectivamente):

$$\int_{-5}^5 W(x) dx$$

e

$$\sum_n W_n \Delta$$

Estes resultados não foram mostrados para cada simulação pois sempre eram iguais a 1 (no mínimo em 1 parte em  $10^5$ ).

As funções simuladas aparentam ter sempre o mesmo comportamento em relação à função analítica: os valores do pico são sempre maiores e os valores dos extremos são menores. (i.e. nossa função simulada aparenta ser sempre mais concentrada).

Pode-se pensar que estamos simulando nosso sistema em um tempo de simulação excessivamente curto apesar de não termos conseguido resultados diferentes com tempos maiores.

Podemos pensar nos instantes iniciais do movimento. A probabilidade estaria concentrada em um só pico (na forma de um delta de Dirac) e com o passar do tempo este pico iria se "alargando", refletindo o movimento das partículas. Quando o tempo é suficientemente longo a função densidade de probabilidade que retrata a posição das partículas no potencial atinge um estado estacionário (que é a solução estacionária para a Equação de Fokker-Planck). Assim, torna-se plausível que, integrando o sistema por

um tempo maior os picos simulados e teóricos iriam se ajustar melhor (pelo “alargamento” dos picos simulados).

Um segundo passo em nosso estudo foi o cálculo de soluções estacionárias para um potencial com assimetria. Inicialmente devemos escolher este potencial. Após um estudo empírico pudemos perceber que um potencial que apresentou um comportamento condizente com o esperado e matematicamente fácil pode ser construído somando-se ao potencial simétrico utilizado anteriormente um termo linear em  $x$ .

$$U(x) = x^4 - 2x^2 + \alpha x \quad (4.33)$$

O parâmetro  $\alpha$  pode ser utilizado para controlar a assimetria do potencial (quanto maior este parâmetro, mais assimétrico o potencial será). O valor de  $\alpha$  utilizado foi escolhido como sendo 0.5 e o potencial foi colocado em um gráfico (Figura 4.9).

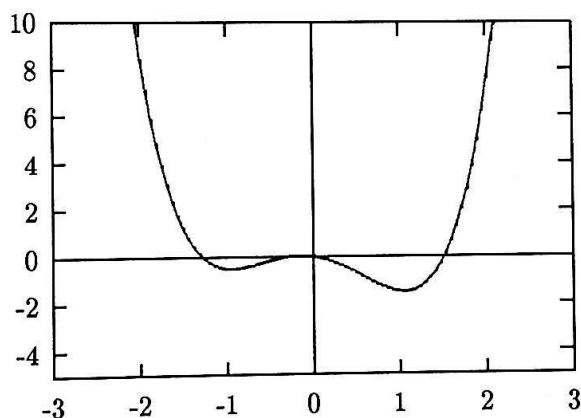


Figura 4.9: Potencial assimétrico  $U(x) = x^4 - 2x^2 - 0.5x$  utilizado no estudo da solução transiente .

As conclusões do item anterior podem ser aqui usadas, mas devemos observar melhor alguns aspectos. Conforme predito teoricamente (e intuitivamente) no regime estacionário a partícula apresenta uma probabilidade maior de estar no poço mais profundo. Este fenômeno pode ser observado pela diferença na altura dos picos, onde o poço mais fundo apresenta uma probabilidade maior. Podemos notar que, com o aumento do nível de ruído, a diferença de altura entre os dois picos diminui. Para um nível de ruído perto de 4.0 as diferenças entre os dois picos torna-se desprezível. Comparando os resultados destas simulações com as do item anterior nota-se que, quanto maior o nível de ruído imposto aos potenciais (simétrico e assimétrico), mais semelhantes são as soluções estacionárias (deduzida e simulada).

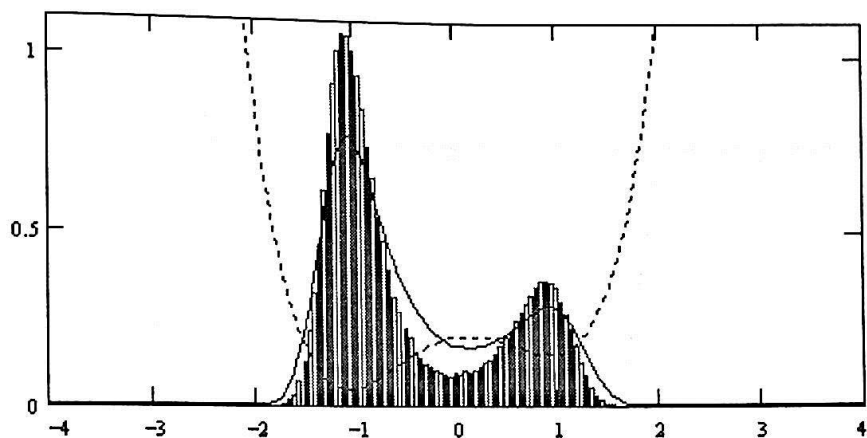


Figura 4.10: Simulação para Regime Estacionário Assimétrico (Ruído 1.0), onde a curva contínua é o resultado teórico e no histograma temos nossas simulações.

Pode-se, então, concluir que o aumento do nível de ruído mascara a assimetria do potencial (tornando um potencial assimétrico em um simétrico). Isso pode ser entendido utilizando-se o mesmo raciocínio do item anterior: quanto maior o ruído, maior a força que este causa nas partículas e a assimetria do potencial torna-se desprezível.

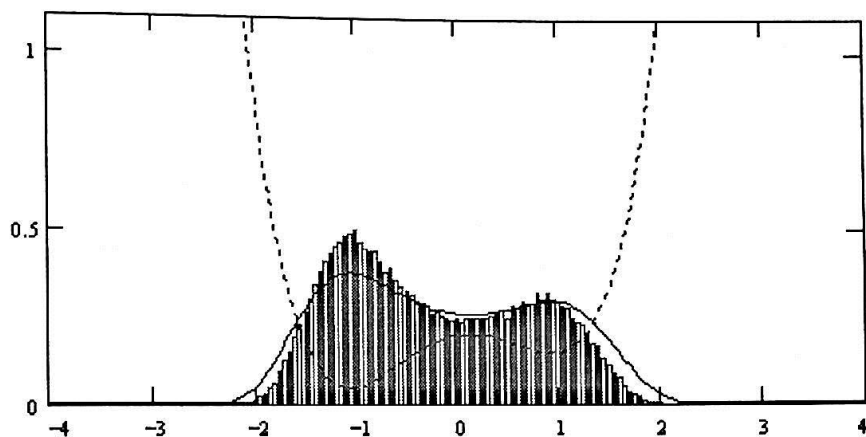


Figura 4.11: Simulação para Regime Estacionário Assimétrico (Ruído 2.0).

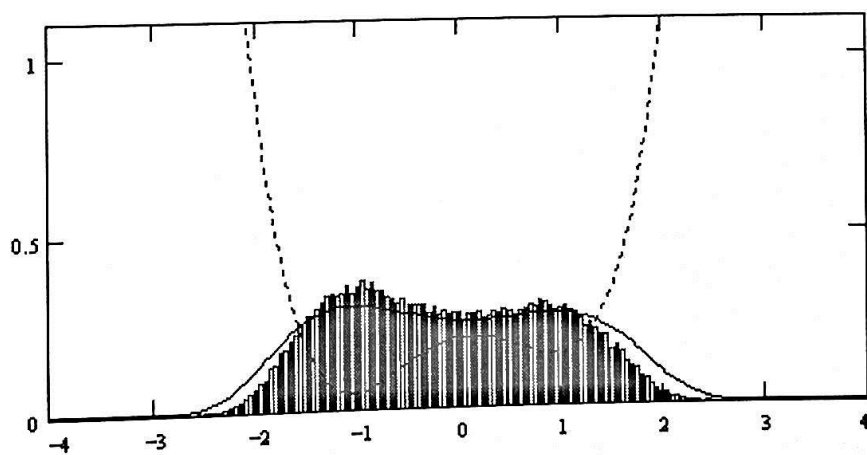


Figura 4.12: Simulação para Regime Estacionário Assimétrico (Ruído 3.0).

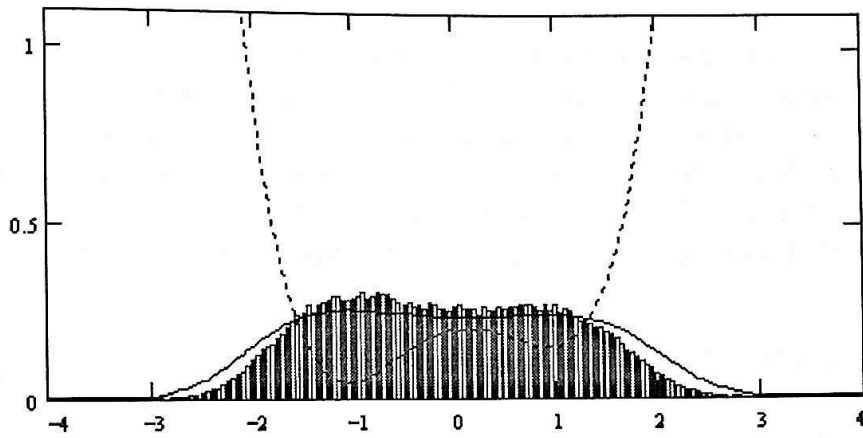


Figura 4.13: Simulação para Regime Estacionário Assimétrico (Ruído 4.0).

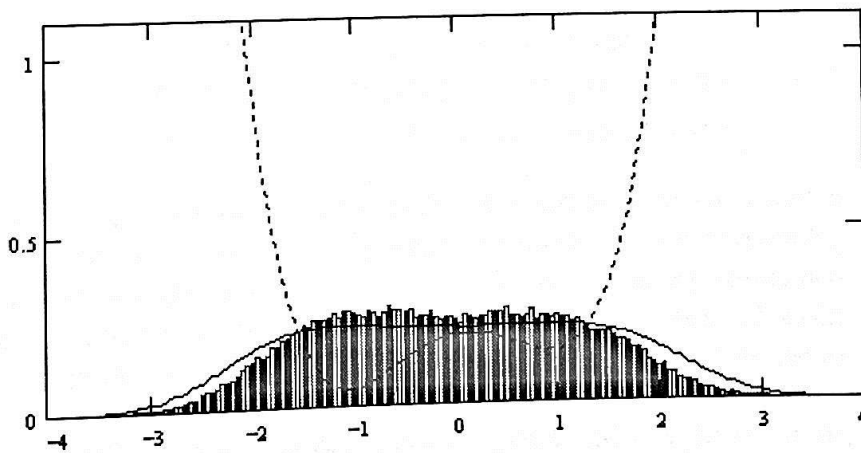


Figura 4.14: Simulação para Regime Estacionário Assimétrico (Ruído 5.0).

## Estudo da Solução Estacionária para um Sistema Sujeito a um Ruído e a uma Força Periódica

Nesta seção apresentaremos uma abordagem [16] que torna o entendimento desta situação particular muito simples. A diferença entre este caso e o estudado na seção anterior é que neste caso temos uma força periódica  $F(t) = A \sin(\omega t)$  aplicada ao sistema. Como já vimos é o acoplamento entre a força estocástica e a força periódica que produz a Ressonância Estocástica.

Inicialmente estudaremos os efeitos resultantes da existência de uma força periódica no sistema. Para facilitar este estudo iremos definir potencial efetivo  $U_{eff}(x, t)$ , como sendo o potencial antigo  $U(x)$ , somado ao potencial da força periódica:

$$U_{eff}(x) = U(x) - \int F(t)dx = U(x) - F(t) \int dx = U(x) - F(t)x \quad (4.34)$$

No caso do potencial simétrico lembremos que este é dado por  $U(x) = a_1x^2 + a_2x^4$ . Com a inserção da força periódica teremos o potencial dado por:

$$U_{eff}(x, t) = a_1x^2 + a_2x^4 - A \sin(\omega t)x. \quad (4.35)$$

Como a função seno assume valores entre -1 e 1, o potencial periódico irá assumir valores entre  $-Ax$  e  $Ax$ .

O nosso potencial efetivo terá então uma característica temporal. Como exemplo apresentamos o potencial efetivo em três instantes:

$$\begin{aligned} t = 0 & \rightarrow U_{eff}(x) = a_1x^2 + a_2x^4 \\ t = \pi/\omega & \rightarrow U_{eff}(x) = a_1x^2 + a_2x^4 - Ax \\ t = 3\pi/\omega & \rightarrow U_{eff}(x) = a_1x^2 + a_2x^4 + Ax \end{aligned}$$

Na seção anterior criamos um potencial assimétrico somando a um potencial simétrico um termo do tipo  $a_3x$ . Como podemos perceber nos casos acima, a inclusão de uma força periódica faz com que o potencial tenha um comportamento oscilatório, alternando-se entre um potencial assimétrico à esquerda, simétrico e assimétrico à direita. Estas alterações periódicas do potencial podem ser vistas na figura 4.15.

Estas subidas e descidas dos vales do potencial irão fornecer o primeiro indício da Ressonância Estocástica. Cada nível  $\gamma$  de ruído tem uma frequência característica bem determinada. Esta frequência é o inverso de uma grandeza clássica denominada Tempo de Primeira Passagem (Apendice B). A Ressonância Estocástica ocorre quando o período da força periódica é o dobro do período dado pelo Tempo de Primeira Passagem.

Esta relação descreve que torna-se mais fácil para as partículas passarem por sobre a barreira quando tivermos o casamento entre as frequências da força periódica e da força aleatória. Em nosso modelo mecânico podemos pensar que o potencial apresenta uma característica oscilatória (em que o ponto mais baixo do potencial sobe e desce periodicamente). Neste modelo torna-se fácil entendermos que as bolinhas têm maior probabilidade de passar quando há o casamento do potencial estar em seu ponto mais alto e a força aleatória ser máxima.

O dobro na relação pode-se ser entendido lembrando que cada vale do potencial é simétrico em relação ao ponto mais baixo, assim, as partículas quando estão em movimento no vale só podem passar pela barreira uma vez em duas que atingem a altura da barreira (pois da outra vez estão no outro lado do potencial).

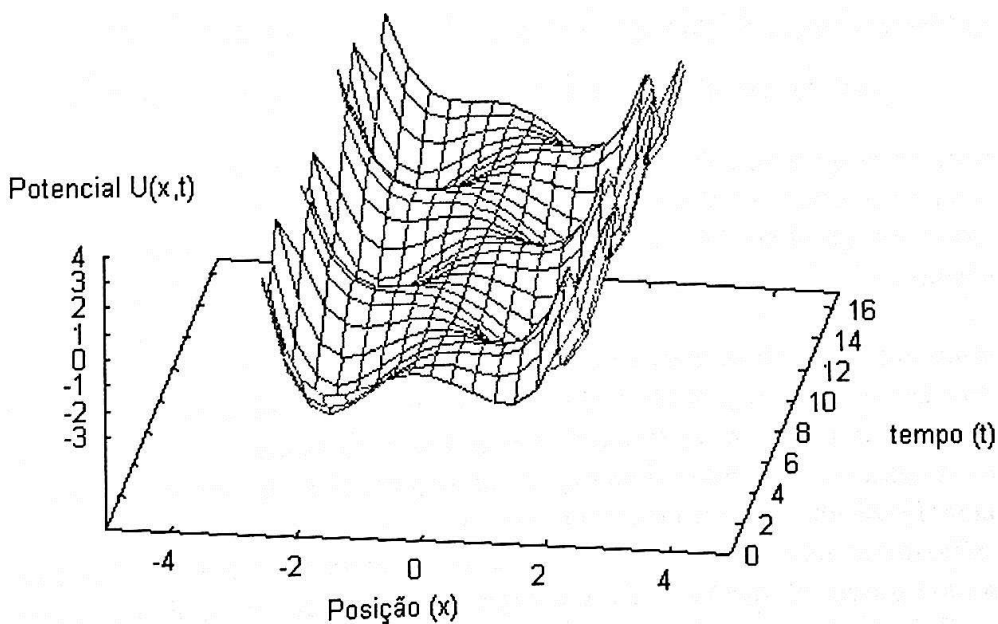


Figura 4.15: Comportamento temporal do Potencial Efetivo



## Capítulo 5

# Aplicação na Geração de Segundo Harmônico

### 5.1 Introdução e Cálculo da Solução Estacionária para as Equações de Movimento da Geração de Segundo Harmônico

O fenômeno da biestabilidade ótica foi predito teoricamente por Szoke e colaboradores juntamente com Seidel [24, 25] e observado experimentalmente inicialmente por Gibbs e colaboradores [26]. Já a possibilidade da biestabilidade ótica no processo da geração de segundo harmônico foi inicialmente descrito por Drummond e colaboradores [17].

O processo da geração de segundo harmônico dentro de uma cavidade ocorre quando um meio não-linear, com suscetibilidade  $\chi^{(2)}$  não desprezível, é colocado em uma cavidade ótica que é bombeada com um campo na frequência fundamental. A interação do campo de bombeio com o meio gera luz no segundo harmônico (que tem como frequência o dobro da frequência fundamental). Nós iremos apenas considerar o caso em que temos um acoplamento perfeito de fases entre os dois campos no cristal e trabalharemos com a aproximação de onda girante. Na aproximação semiclássica usada em [17], a geração de segundo harmônico é descrita por um par de equações não-lineares acopladas:

$$\dot{\alpha}_1 = -i\Delta_1\alpha_1 - \gamma_1\alpha_1 + \kappa\alpha_1^*\alpha_2 + \epsilon \quad (5.1)$$

$$\dot{\alpha}_2 = -i\Delta_2\alpha_2 - \gamma_2\alpha_2 - \frac{1}{2}\kappa\alpha_1^2 \quad (5.2)$$

No sistema acima,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  representam, respectivamente, as amplitudes dos campos nas frequências fundamental e dobrada (segundo harmônico), os



parâmetros  $\Delta_j$  e  $\gamma_j$  são, respectivamente, a dessintonia e as taxas de perda em cada frequência,  $\kappa$  caracteriza a força do meio não-linear e, finalmente,  $\epsilon$  representa o campo de bombeio da cavidade.

Podemos através da equação (5.2) calcularmos a solução estacionária para  $\alpha_2$ :

$$i\Delta_2\alpha_2 + \gamma_2\alpha_2 = -\frac{1}{2}\kappa\alpha_1^2 \Rightarrow \alpha_2 [\gamma_2 + i\Delta_2] = -\frac{1}{2}\kappa\alpha_1^2 \quad (5.3)$$

ou melhor:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\frac{1}{2}\kappa\alpha_1^2 \frac{1}{\gamma_2 + i\Delta_2} \\ &= -\frac{1}{2}\kappa\alpha_1^2 \frac{1}{\gamma_2 + i\Delta_2} \frac{\gamma_2 - i\Delta_2}{\gamma_2 - i\Delta_2} \\ &= -\frac{1}{2}\kappa\alpha_1^2 \frac{\gamma_2 - i\Delta_2}{\gamma_2^2 + \Delta_2^2} \\ &= +\frac{1}{2} \frac{i\kappa\Delta_2\alpha_1^2}{\gamma_2^2 + \Delta_2^2} - \frac{1}{2} \frac{\kappa\gamma_2\alpha_1^2}{\gamma_2^2 + \Delta_2^2} \end{aligned}$$



Podemos definir  $\kappa' = \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\gamma_2^2 + \Delta_2^2}$  e obtemos finalmente para  $\alpha_2$  :

$$\alpha_2 = i\kappa'\Delta_2\alpha_1^2 - \kappa'\gamma_2\alpha_1^2 \quad (5.4)$$

A equação para  $\alpha_1$  pode ser escrita no estado estacionário como:

$$0 = +i\Delta_1\alpha_1 + \gamma_1\alpha_1 - \kappa\alpha_1^*\alpha_2 - \epsilon \quad (5.5)$$

Podemos substituir (5.4) em (5.5):

$$\epsilon = i\Delta_1\alpha_1 + \gamma_1\alpha_1 - \kappa\alpha_1^* [i\kappa'\Delta_2\alpha_1^2 - \kappa'\gamma_2\alpha_1^2] \quad (5.6)$$

Definindo  $\kappa'' = \kappa\kappa'$  e notando que  $\alpha_1^*\alpha_1^2 = \alpha_1^*\alpha_1\alpha_1 = I_1\alpha_1$ , podemos calcular a equação para  $\epsilon$  e seu complexo conjugado:

$$\epsilon = i\Delta_1\alpha_1 + \gamma_1\alpha_1 + \kappa''\gamma_2 I_1\alpha_1 - i\kappa''\Delta_2 I_1\alpha_1 \quad (5.7)$$

$$\epsilon^* = -i\Delta_1\alpha_1^* + \gamma_1\alpha_1^* + \kappa''\gamma_2 I_1\alpha_1^* + i\kappa''\Delta_2 I_1\alpha_1^* \quad (5.8)$$

A multiplicação destas duas equações nos fornece:

$$|\epsilon|^2 = (\Delta_1^2 + \gamma_1^2) I_1 + \kappa^2 \left[ \frac{\gamma_1\gamma_2 - \Delta_1\Delta_2}{\gamma_2^2 + \Delta_2^2} \right] I_1^2 + \frac{1}{4} \frac{\kappa^4}{\gamma_2^2 + \Delta_2^2} I_1^3 \quad (5.9)$$

Esta equação foi calculada por Drummond e colaboradores [17] em seu artigo (equação 8.1 página 330), mas como podemos perceber há uma diferença entre nossa equação e a calculada por ele (no termo em  $I^3$ ). Podemos

afirmar que há um erro no artigo citado o que inviabilizaria nosso trabalho se simplesmente tomássemos esta equação como certa.

Esta equação pode ser escrita na forma  $z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$ :

$$I_1^3 + 4 \frac{\gamma_1\gamma_2 - \Delta_1\Delta_2}{\kappa^2} I_1^2 + 4 \frac{(\gamma_2^2 + \Delta_2^2)(\gamma_1^2 + \Delta_1^2)}{\kappa^4} I_1 + 4 \frac{\gamma_2^2 + \Delta_2^2}{\kappa^4} |\epsilon|^2 = 0 \quad (5.10)$$

## 5.2 Estudo da Biestabilidade

### 5.2.1 Estudo das Condições para a Existência de Biestabilidade

Para que exista biestabilidade devemos ter três raízes reais distintas. Podemos estudar a condição para termos três raízes reais utilizando-nos da derivada da equação 5.9:

$$\frac{d|\epsilon_1|^2}{dI_1} = (\Delta_1^2 + \gamma_1^2) + 2\kappa^2 \left[ \frac{\gamma_1\gamma_2 - \Delta_1\Delta_2}{\gamma_2^2 + \Delta_2^2} \right] I_1 + 3 \frac{1}{4} \frac{\kappa^4}{\gamma_2^2 + \Delta_2^2} I_1^2 \quad (5.11)$$

Com esta equação de 2º grau podemos estudar seu sinal colocando a condição que tenhamos duas raízes reais. A condição é bem conhecida:  $b^2 - 4ac > 0$ . A substituição dos valores do nosso polinômio (5.9) na condição acima nos fornece a condição de biestabilidade:

$$\Delta_1\Delta_2 - \gamma_1\gamma_2 > \sqrt{3}|\gamma_1\Delta_2 + \Delta_1\gamma_2| \quad (5.12)$$

Se utilizarmos-nos da condição  $\Delta_1 = \Delta_2$  podemos facilmente fazer um estudo numérico para as condições de biestabilidade. Obtemos as duas raízes da figura 5.1: 0.374 e 3.016.

Com estes valores obtidos podemos calcular a curva de Biestabilidade. A construção desta curva não é trivial como poderíamos pensar. Normalmente as curvas de biestabilidade são apresentadas como gráficos de  $|\alpha_1|^2$  versus  $|\epsilon_1|^2$  mas como podemos perceber pela equação (5.9) temos apenas uma função de 3º grau entre  $|\epsilon_1|^2$  versus  $|\alpha_1|^2$ , teríamos de inverter esta equação o que é impossível analiticamente para um polinômio de 3º grau.

Na próxima seção iremos apresentar um método que desenvolvemos para a construção do gráfico de biestabilidade, por ora apresentaremos a curva de na forma  $|\epsilon_1|^2$  versus  $|\alpha_1|^2$  (figura 5.2).

### 5.2.2 Algoritmo para o Cálculo das Regiões de Biestabilidade

Como pudemos perceber pela seção anterior, um dos maiores problemas quando calculamos a curva de biestabilidade dispersiva foi a impossibilidade

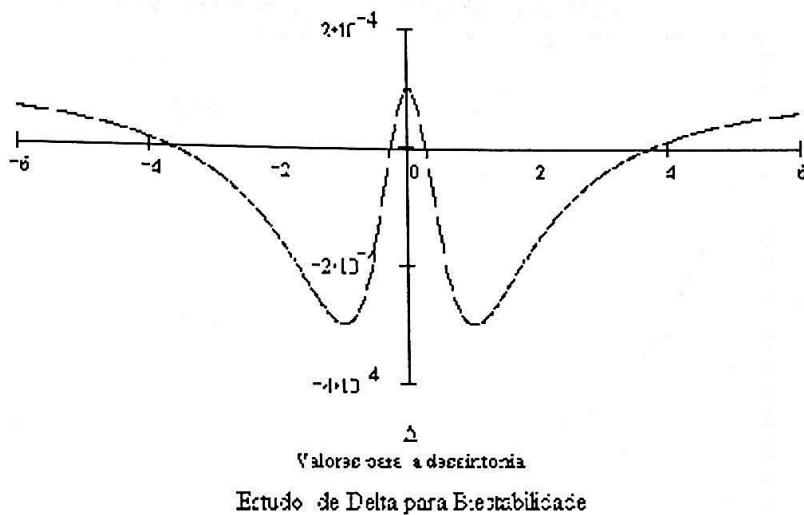


Figura 5.1: Estudo do determinante da equação (5.11) onde podemos ver as regiões onde o determinante apresenta valor positivo. Para este estudo numérico utilizamo-nos das condições:  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ ,  $\kappa = 0.1$ .

de invertermos o polinômio de 3<sup>o</sup> grau que nos fornece  $|\epsilon_1|^2$  como uma função da intensidade  $I_1$ .

Para resolvermos este problema devemos olhar inicialmente para a equação (5.9) onde podemos fazer a simples alteração na ordem dos termos:

$$-|\epsilon_1|^2 + (\Delta_1^2 + \gamma_1^2) I_1 + \kappa^2 \left[ \frac{\gamma_1 \gamma_2 - \Delta_1 \Delta_2}{\gamma_2^2 + \Delta_2^2} \right] I_1^2 + \frac{1}{4} \frac{\kappa^4}{\gamma_2^2 + \Delta_2^2} I_1^3 = 0 \quad (5.13)$$

Podemos perceber que a nossa equação se transformou em um polinômio completo de 3<sup>o</sup> grau. Nosso problema resume-se em calcular os valores de  $|\epsilon_1|^2$  que são iguais aos valores do resto da equação. Isto é o mesmo que calcular os valores de  $|\epsilon_1|^2$  que fazem valer a equação (5.13).

Neste método de cálculo temos que atribuir valores para  $|\epsilon_1|^2$  e calcular as raízes da equação. Os valores devem ser atribuídos em uma faixa onde saibamos que está contida a biestabilidade e cada uma das três raízes é um ponto da curva de biestabilidade para um determinado  $|\epsilon_1|^2$ .

Para este cálculo implementamos um programa em FORTRAN onde usamos o método de Laguerre [19] para o cálculo das raízes. Podemos ver pela figura 5.3 que nosso método apresenta um resultado satisfatório.

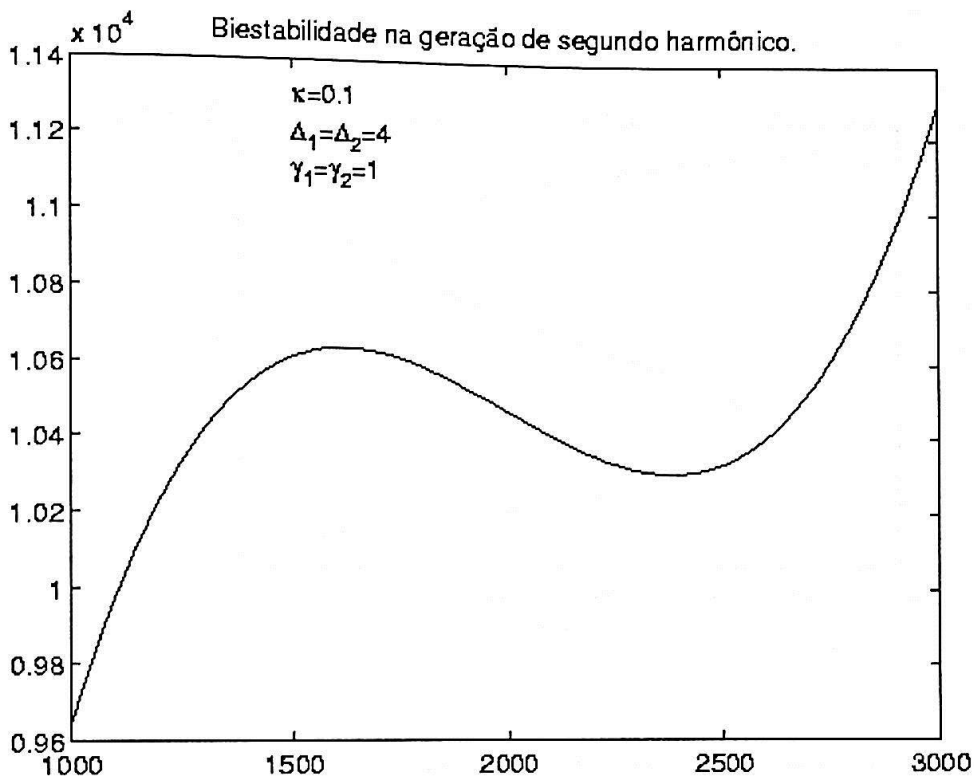


Figura 5.2: Biestabilidade Dispersiva para a Geração de Segundo Harmônico. Bombeamento como função da intensidade do modo 1. Para uma visualização padrão rotacione o gráfico 90° para a esquerda.

## 5.3 Integração das Equações de Movimento Clássicas para a Geração de Segundo Harmônico

### 5.3.1 Introdução

Nesta parte do trabalho iremos trabalhar com as equações de movimento clássicas que já foram por nós utilizadas anteriormente. Iremos agora nos deter em sua integração numérica.

As equações de movimento para a Geração de Segundo Harmônico são[17]:

$$\dot{\alpha}_1 = -i\Delta_1\alpha_1 - \gamma_1\alpha_1 + \kappa\alpha_1^*\alpha_2 + \epsilon_1 \quad (5.14)$$

$$\dot{\alpha}_2 = -i\Delta_2\alpha_2 - \gamma_2\alpha_2 - \frac{1}{2}\kappa\alpha_1^2 + \epsilon_2 \quad (5.15)$$

Como podemos perceber são equações diferenciais acopladas o que representa uma novidade em nosso trabalho (pois apenas tínhamos nos utilizado

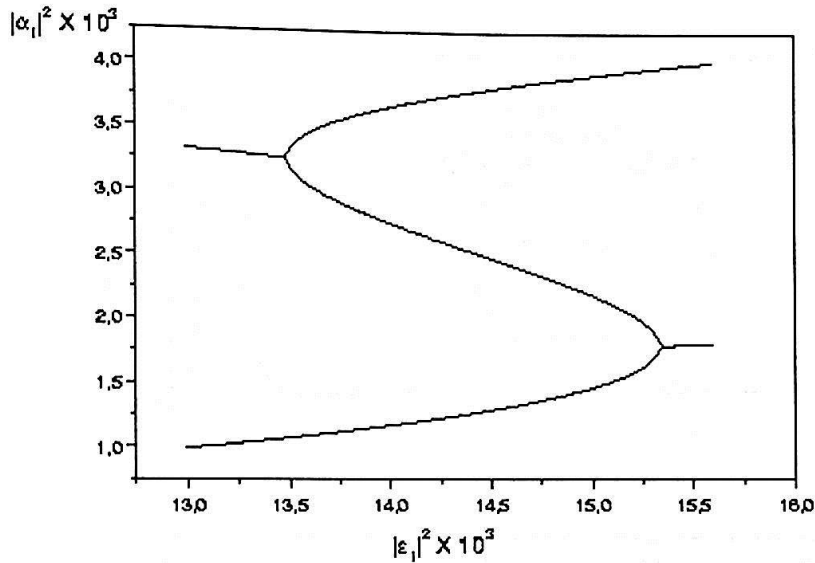


Figura 5.3: Gráfico da Biestabilidade Dispersiva calculado pelo método de Laguerre para a solução da Equação 5.13.

de equações isoladas). Quando inserirmos o ruído no bombeio devemos tomar cuidado na integração pois devemos utilizar os conceitos de integral de Ito [20].

### 5.3.2 Métodos de Integração e Resultados

Iremos nesta parte efetuar a integração numérica das nossas equações de movimento. Inicialmente faremos a integração com o valor de bombeio  $|\epsilon_1|^2$  constante. Numa outra etapa iremos variar este bombeio senoidalmente e acrescentar um ruído.

Para integrarmos as equações de movimento (5.15) podemos simplesmente transformá-las num sistema de equações de diferenças:

$$\begin{aligned}\alpha_1(t + \tau) &= \alpha_1(t) - i\Delta_1\alpha_1(t)\tau - \gamma_1\alpha_1(t)\tau + \kappa\alpha_1(t)^*\alpha_2(t)\tau + \epsilon_1\tau \\ \alpha_2(t + \tau) &= \alpha_2(t) - i\Delta_2\alpha_2(t)\tau - \gamma_2\alpha_2(t)\tau - \frac{1}{2}\kappa\alpha_1(t)^2\tau + \epsilon_2\tau\end{aligned}$$

onde  $\tau$  é o passo de integração.

Devemos também fornecer as condições iniciais  $\alpha_1(0)$  e  $\alpha_2(0)$ . Com isto pudemos fazer as simulações. Inicialmente mantivemos o bombeio constante

e obtivemos uma clássica série temporal de saída (figura 5.4).

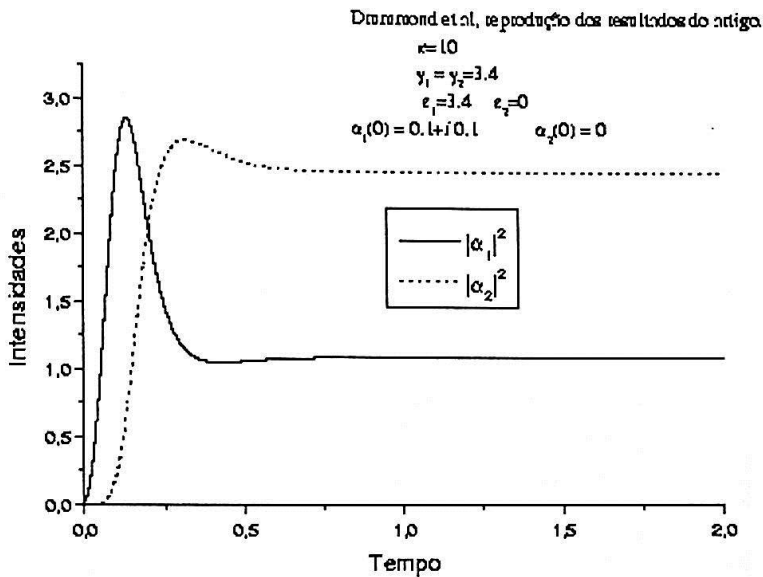


Figura 5.4: Comportamento temporal da intensidade fundamental  $|\alpha_1|^2$  e harmônica  $|\alpha_2|^2$ . Podemos perceber claramente o estado transiente e o estacionário.

Um outro resultado interessante por nós obtido (figura 5.5) foi quando fizemos o bombeio variar no tempo linearmente. Podemos perceber nesta figura dois aspectos importantes, o primeiro é que houve um ponto a partir do qual a intensidade do segundo harmônico foi superior ao fundamental e o segundo aspecto é que como podemos ver o sistema apresenta uma instabilidade a partir de um certo valor de bombeio. Este segundo aspecto será estudado por nós futuramente.

Com estas etapas bem determinadas pudemos passar à nossa última etapa: para o estudo da Ressonância Estocástica devemos ter um sinal de entrada que varie senoidalmente e um ruído. Nosso sinal de entrada é o bombeio que ficará então definido como:

$$\epsilon_1(t) = \epsilon_0 + A \sin(\omega t) + \gamma \Gamma(t) \quad (5.16)$$

O valor de  $\epsilon_0$  sozinho não pode ser capaz de fazer o sistema pular para o outro estado estável. Já com o acréscimo de  $A$  e  $\gamma$  o sistema pode ter esta flutuação.

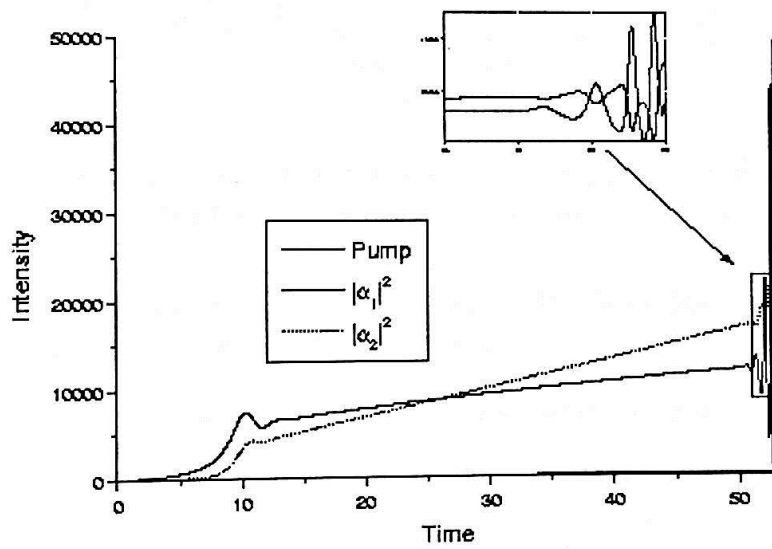


Figura 5.5: Comportamento temporal para o harmônico fundamental ( $|\alpha_1|^2$ ) e o segundo ( $|\alpha_2|^2$ ) quando o bombeio teve um aumento temporal.

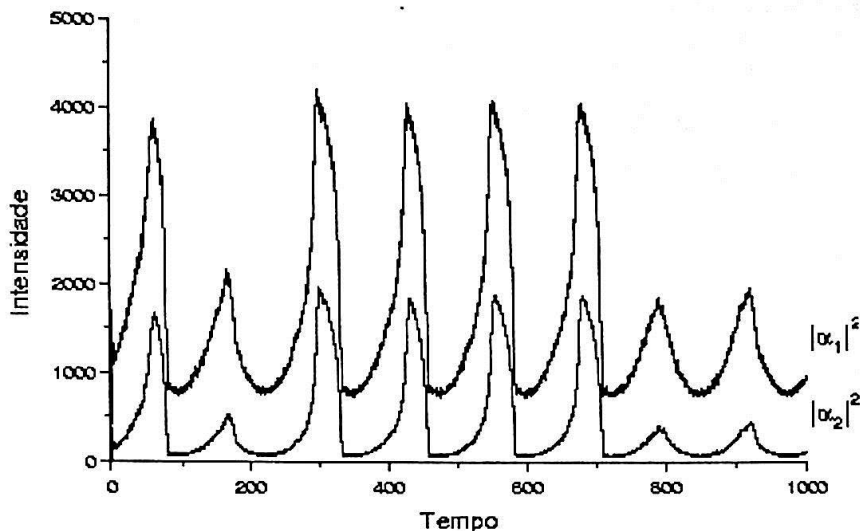


Figura 5.6: Série Temporal com o resultado da integração das Equações de Movimento podemos ver que o sistema alterna entre os dois estados.

Para este cálculo devemos lembrar de usar a Teoria de Integração de Ito [20]. Em primeira ordem a integração torna-se:

$$\alpha_1(t + \tau) = \alpha_1(t) - i\Delta_1\alpha_1(t)\tau - \gamma_1\alpha_1(t)\tau + \kappa\alpha_1(t)^*\alpha_2(t)\tau + \epsilon_1(t)\tau + \sqrt{\gamma\tau}\Gamma(t)$$

$$\alpha_2(t + \tau) = \alpha_2(t) - i\Delta_2\alpha_2(t)\tau - \gamma_2\alpha_2(t)\tau - \frac{1}{2}\kappa\alpha_1(t)^2\tau$$

Para evitarmos instabilidades oriundas do acoplamento entre estas duas equações nos utilizamos de um método de integração de segunda ordem [22] onde a integração é feita em duas passagens intermediárias.

Podemos perceber na figura 5.6 um comportamento interessante: a passagem do sistema de um estado de estabilidade para outro que apresenta ser assimétrico entre a entrada e saída do sistema (subida e descida do pico); há uma explicação interessante para isto que será deixada para a próxima seção.

### 5.3.3 Estudo da Aparente Assimetria da Trajetória

Conforme vimos na seção anterior aparentemente temos uma assimetria no gráfico temporal entre a subida e a descida do pico de passagem de estados meta-estáveis. Podemos ver melhor no gráfico 5.7 onde mostramos apenas dois picos apenas.



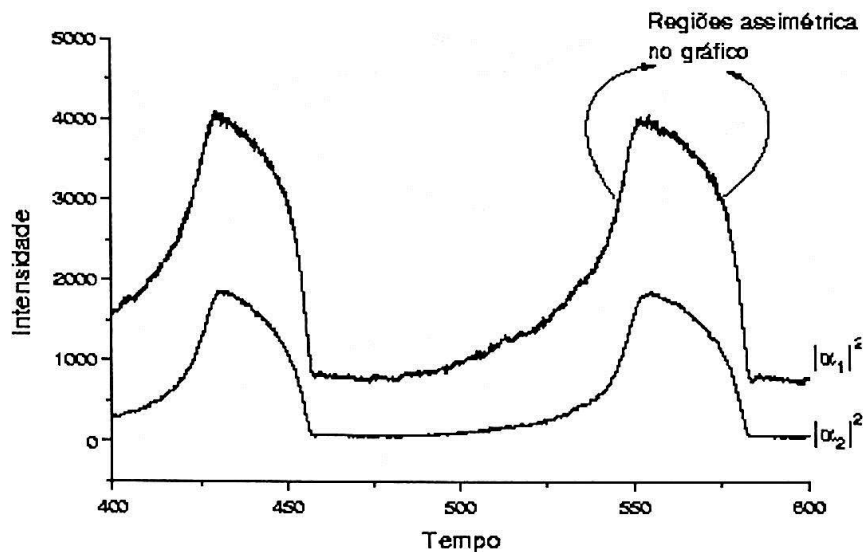


Figura 5.7: Detalhe do gráfico de integração das equações de movimento mostrando apenas dois picos. Podemos perceber a assimetria entre as metade do pico de pulo entre as regiões biestáveis.

Isto pode ser explicado olhando na figura 5.8 onde podemos perceber fisicamente o que ocorre. Quando aumentamos o bombeio o sistema evolui por um tempo no estado mais baixo e só depois pula para o mais alto. Após o pulo o sistema evolui por um tempo no estado mais alto antes de cair.

Isto pode ser também visto na série temporal de saída onde podemos localizar estas regiões (figura 5.9).

Podemos assim perceber uma explicação para a aparente assimetria, se olharmos o potencial não como tendo uma simetria especular mas uma simetria onde as duas metades seriam simétricas quando além de invertidas espacialmente fossem invertidas temporalmente podemos ver que o gráfico apresenta simetria (o que é esperado pelo problema físico).

### 5.3.4 Método para a Filtragem de Movimentos Internos

Como pudemos perceber pelos resultados da seção anterior nossas séries de saída apresentam além das transições entre os estados, movimentos internos em cada estado (representado por picos menores). Estes movimentos além de não contribuírem com o estudo da Ressonância Estocástica, ainda

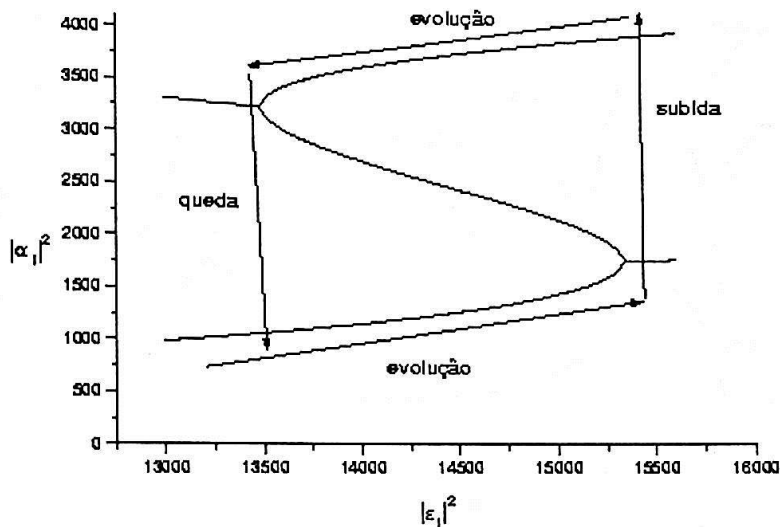


Figura 5.8: Curva de Biestabilidade Dispersiva mostrando as regiões de evolução e Saltos.

atrapalham pois aumentam a potência do sinal de saída sistema mascarando assim a Ressonância Estocástica.

Para evitarmos este problema nos utilizaremos de uma condição que filtra os movimentos dentro de cada estado e apenas permite a passagem de movimentos inter-estados [23].

Neste tipo de filtro escolhemos duas faixas em nosso gráfico (figura 5.10). Abaixo da barreira consideramos como apenas um valor e acima desta como outro valor.

Além deste método de filtro uma melhoria muito comum e já usada anteriormente em nosso trabalho é calcularmos várias trajetórias e obtermos uma que é a média destas. Resultado típicos podem ser vistos nas figuras (5.11) a (5.15).

## 5.4 Procura da Região de Ressonância Estocástica

O cálculo da SNR já foi suficientemente explorado nesta dissertação; de modo que iremos neste capítulo tecer breves comentários sobre os cálculos e apresentar os resultados obtidos.

Como vimos no capítulo dedicado à Equação de Fokker-Planck, as solu

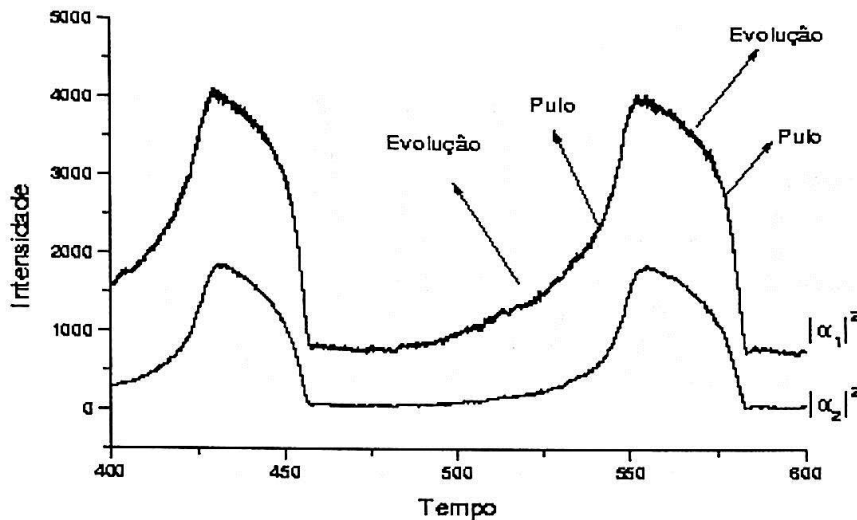


Figura 5.9: Detalhe do gráfico de integração das equações de movimento mostrando apenas dois picos. Estão indicadas as regiões de evolução e pulo entre estados.

-ccões tornam-se muito elegantes se pudermos calcular um pseudo-potencial que torna a solução estacionária trivial (4.25). No caso de Geração de Segundo Harmônico existem cálculos deste potencial [27]; infelizmente os valores de desintonia e taxas de perda necessárias para obter a biestabilidade impossibilitam este cálculo. É possível apenas ter uma idéia da forma deste potencial calculando numericamente a solução estacionária de  $N_a$  (como foi calculado na seção 3.3). Podemos ver nas figuras 5.16 e 5.17 duas soluções estacionárias para dois valores distintos do nível de ruído. O que podemos deduzir destes resultados é:

- o potencial efetivo não é simétrico;
- o potencial efetivo depende do nível de ruído.

Nós utilizamos nestes cálculos o filtro interno, onde o valor 3000 foi assumido como um limite onde qualquer intensidade abaixo deste valor era considerada como nula.

Relembrando: o SNR é obtido dividindo-se a altura do pico em  $\omega$  no espectro de potências pela média dos valores próximos; na prática estes valores aproximavam-se de 12. Os cálculos foram efetuados com duas frequências

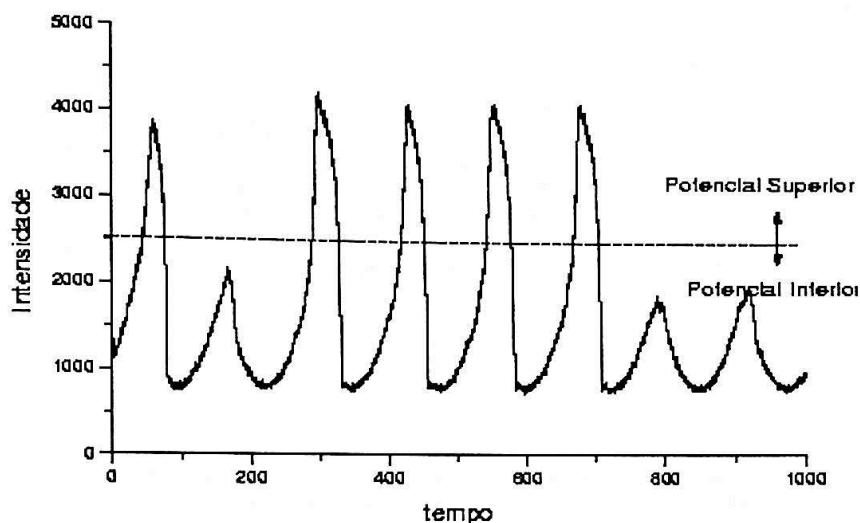


Figura 5.10: Evolução Temporal mostrando a faixa na qual escolhemos se a intensidade pulou ou não de estado.

$\omega = 0.0215\gamma_1$  e  $\omega = 0.0307\gamma_1$ , onde estes valores “estranhos” foram escolhidos pelo caráter discreto das frequências na Fast Fourier Transform (*FFT*).

A primeira etapa em nosso procedimento é o cálculo das transformadas de Fourier das trajetórias (valores de  $N_1$ ). Para o cálculo foram geradas 5.000 trajetórias para que pudéssemos ter uma Transformada de Fourier mais estável. Um resultado desta Transformada de Fourier pode ser visto na figura 5.18 onde o pico na frequência é óbvio. Neste gráfico os valores  $\omega = 0.0217$ ,  $\Gamma = 130$  representam nossos melhores resultados.

Nas figuras 5.19 e 5.20 apresentamos o gráfico das SNR calculados para cada uma das frequências escolhidas.

## Conclusão

Pudemos demonstrar analiticamente que o fenômeno da Ressonância Estocástica é possível na Geração de Segundo Harmônico dentro de cavidade. Poderíamos observar experimentalmente este fenômeno usando um bombeio modulado com um ruído aditivo e um detector sensível à intensidade.

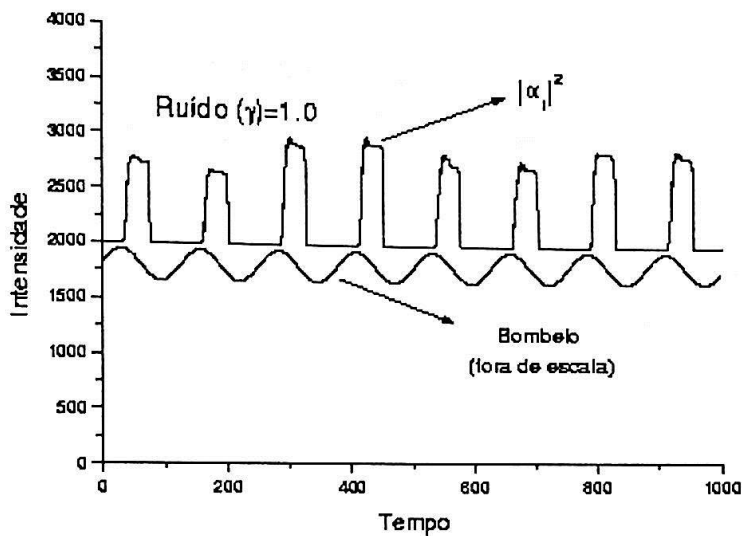


Figura 5.11: Evolução Temporal mostrando a média filtrada de 1000 trajetórias. Neste gráfico  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ ,  $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.1 + 2\sqrt{3}$ ,  $\kappa = 0.1$ . O valor para o segundo harmônico é 4000.

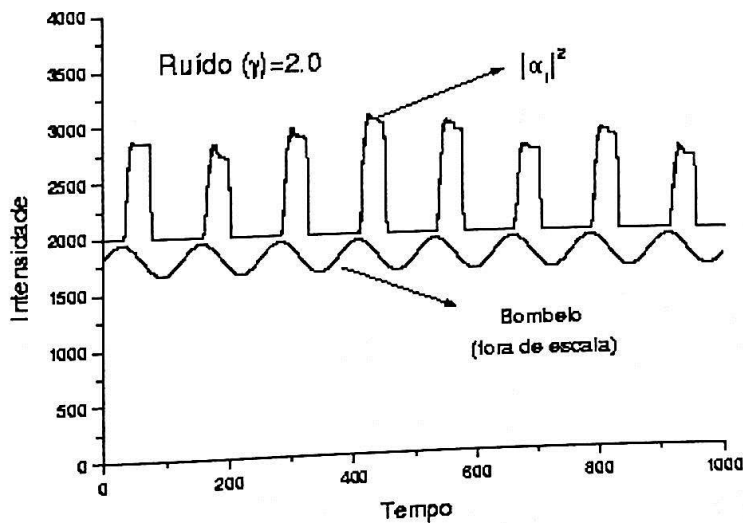


Figura 5.12: Evolução Temporal mostrando a média filtrada de 1000 trajetórias. Neste gráfico  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ ,  $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.1 + 2\sqrt{3}$ ,  $\kappa = 0.1$ . O valor para o segundo harmônico é 4000.

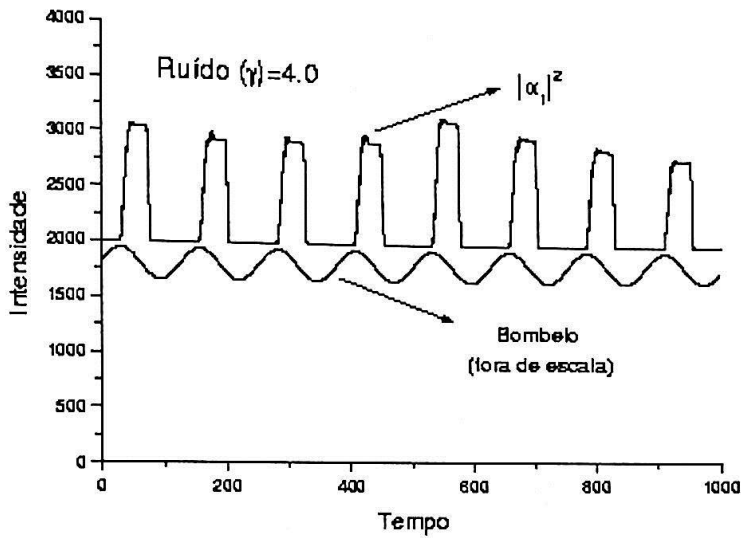


Figura 5.13: Evolução Temporal mostrando a média filtrada de 1000 trajetórias. Neste gráfico  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ ,  $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.1 + 2\sqrt{3}$ ,  $\kappa = 0.1$ . O valor para o segundo harmônico é 4000.

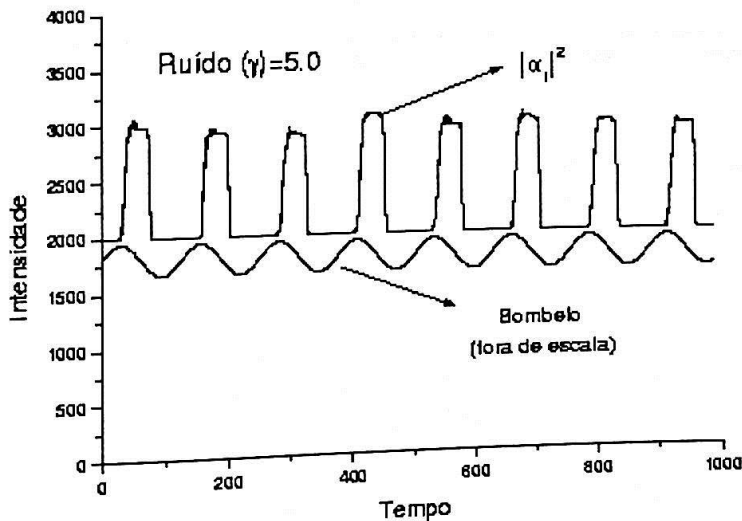


Figura 5.14: Evolução Temporal mostrando a média filtrada de 1000 trajetórias. Neste gráfico  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ ,  $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.1 + 2\sqrt{3}$ ,  $\kappa = 0.1$ . O valor para o segundo harmônico é 4000.

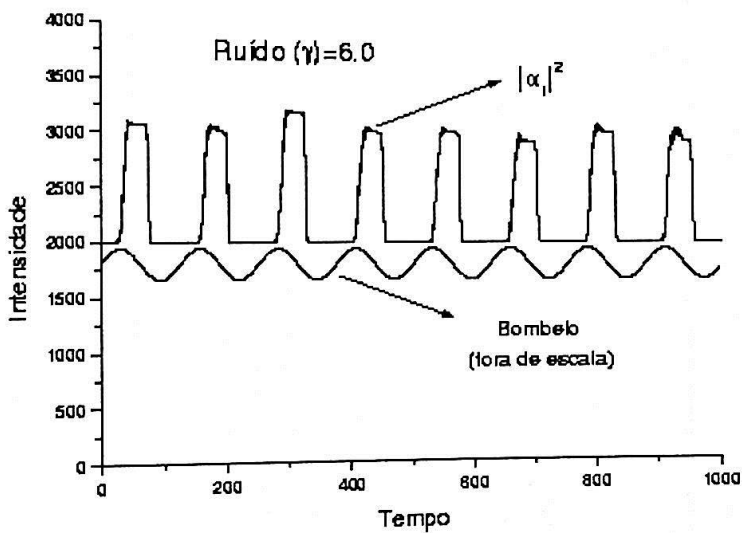


Figura 5.15: Evolução Temporal mostrando a média filtrada de 1000 trajetórias. Neste gráfico  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ ,  $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.1 + 2\sqrt{3}$ ,  $\kappa = 0.1$ . O valor para o segundo harmônico é 4000.

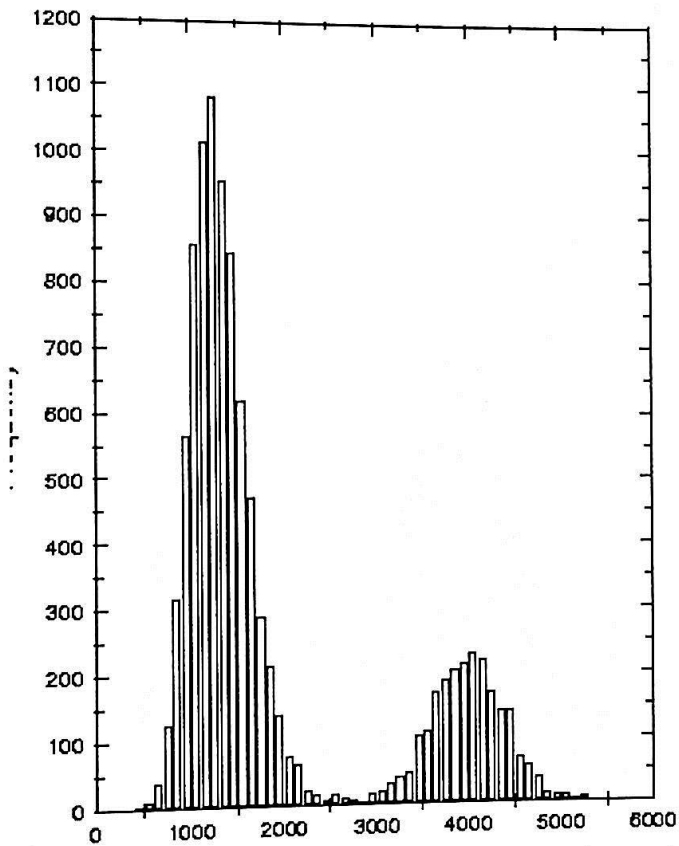


Figura 5.16: A distribuição de intensidades após  $t = 2000/\gamma$ , com os parâmetros  $\kappa = 0.1$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$  e  $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.1 + 2\sqrt{3}$ , com bombeio oscilatório,  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + A \cos \omega t + \sqrt{\Gamma}\eta(t)$ , onde  $\varepsilon_0 = 124$ ,  $A = 4.0$ ,  $\omega = 0.03$  e  $\Gamma = 50$ .



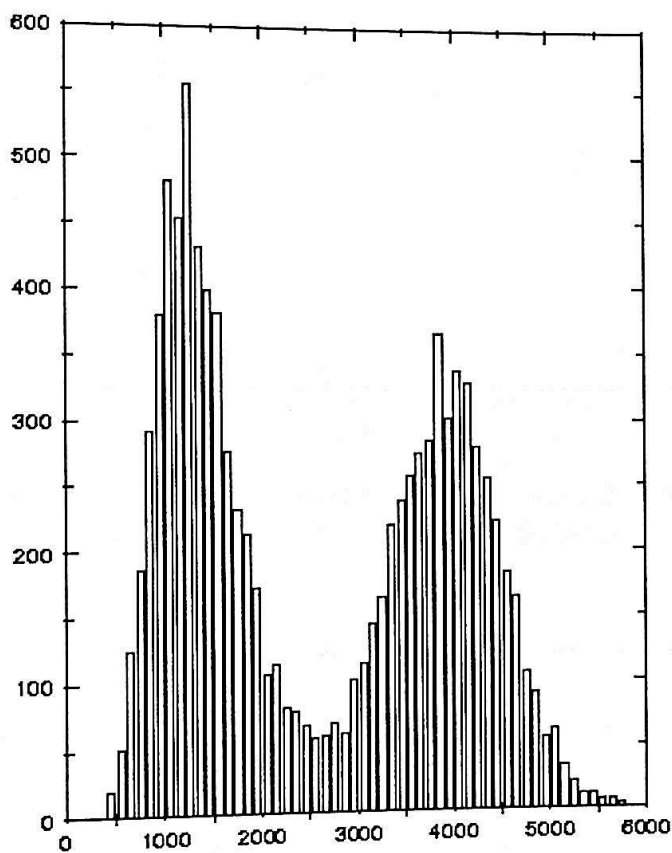


Figura 5.17: A distribuição de intensidades após  $t = 2000/\gamma$ , com os parâmetros  $\kappa = 0.1, \gamma_1 = \gamma_2 = 1$  e  $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.1 + 2\sqrt{3}$ , com bombeio oscilatório,  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + A \cos \omega t + \sqrt{\Gamma} \eta(t)$ , onde  $\varepsilon_0 = 124, A = 4.0, \omega = 0.03$  e  $\Gamma = 50$ . Se o potencial fosse simétrico esperaríamos que a distribuição fosse simétrica

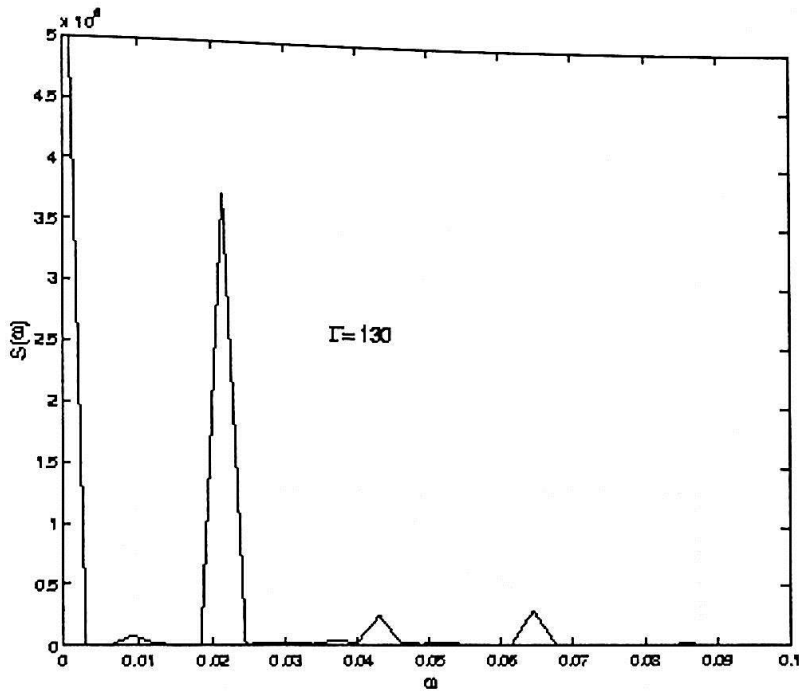


Figura 5.18: Transformada de Fourier da saída filtrada do sistema Fourier para  $\Gamma = 130$  e  $\omega = 0.0215$ . Podemos observar um forte pico na frequência de modulação

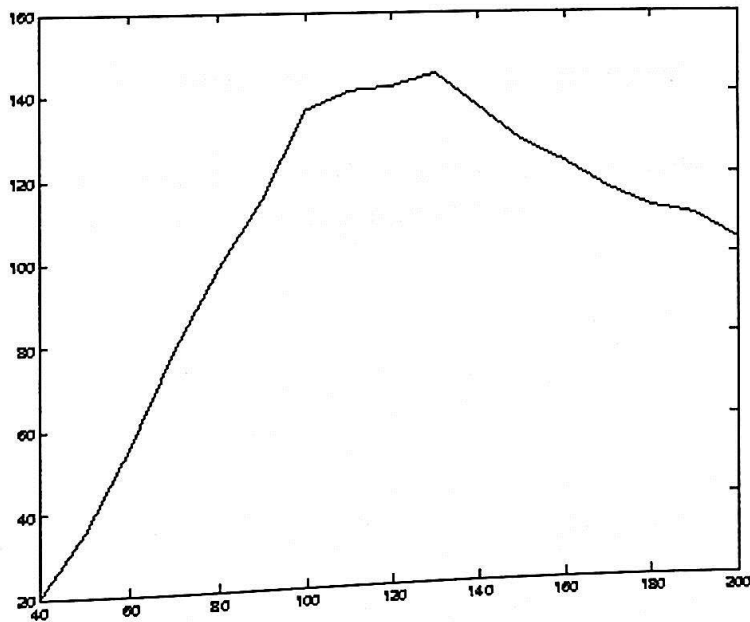


Figura 5.19: SNR como função do nível de ruído com  $\omega = 0.0215$ .

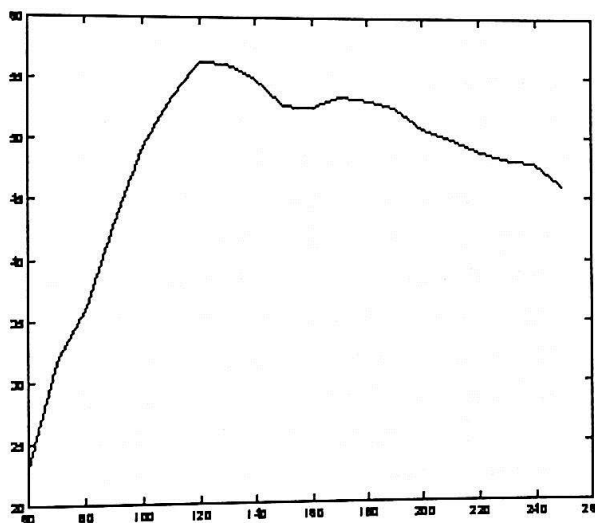


Figura 5.20: SNR com  $\omega = 0.0307$ . Observe que, para uma frequência de bombeio maior a ressonância é menos observada.

# Capítulo 6

## Conclusões

Neste trabalho fizemos um estudo da ressonância estocástica em sua forma mais geral e fizemos uma aplicação na geração de segundo harmônico.

O fenômeno da ressonância estocástica teve sua origem em 1981 quando o grupo liderado por Robert Benzi criou este conceito para explicar a periodicidade das eras glaciais. Apesar de sua teoria explicar satisfatoriamente essa periodicidade, a ressonância estocástica permaneceu quase que totalmente esquecida até que, em 1988, o grupo de McNamara observou-a experimentalmente em um laser em anel e escreveu um artigo que tratava da teoria da ressonância estocástica. A ressonância estocástica foi então utilizada em vários sistemas diferentes, indo de sistemas quânticos a assuntos interdisciplinares, como psicologia comportamental.

Podemos entendê-la como a passagem periódica de um sistema sobre uma barreira de um potencial de duplo poço. Quando esta passagem torna-se periódica e este período é igual àquele da força periódica atuante no sistema temos a ressonância estocástica. Chamamos de ressonância pois temos uma amplificação da força periódica através de uma força estocástica que é muito maior que a força periódica. O objetivo principal é observar a frequência com que o sistema evolui entre os estados e compará-la com a frequência da força periódica. Para este estudo usamos alguns métodos que foram desenvolvidos nessa dissertação.

O primeiro método usado foi o da Razão Sinal-Ruído. Para este cálculo devemos simular numericamente o sistema em estudo utilizando a Equação de Langevin. Essa equação nos fornece uma possível trajetória para o sistema. Se o sistema fosse determinístico sua simulação, ou integração numérica, iria fornecer a única saída para o sistema. Como o sistema é estocástico possui infinitas trajetórias possíveis e sua simulação apenas fornece uma trajetória. Como o objetivo é a comparação entre as frequências (da alternância entre os poços e da força periódica), é feita a decomposição da saída da simulação

em suas frequências fundamentais através da Transformada de Fourier. A Razão Sinal-Ruído consiste na razão entre a componente da saída da simulação na mesma frequência da força periódica pelo nível de ruído aplicado ao sistema. É importante lembrar que, para termos uma Transformada de Fourier mais pura, devemos simular várias trajetórias, calcular sua Transformada de Fourier e tomar a média ponto a ponto dessas transformações. Essa razão é calculada para vários níveis de ruído e a ressonância estocástica ocorre quando essa razão é máxima, i. e., ocorre uma amplificação do sinal de entrada através do aumento do nível de ruído. Com este método conseguimos calcular satisfatoriamente a SNR de alguns sistemas e tivemos um resultado que depois seria revisto: calculamos a SNR para dois sistemas: um com potencial simétrico e o outro com uma perturbação que tornava o potencial assimétrico. Os resultados da SNR diferiam somente nos níveis de ruído baixos, tornando-se iguais com seu aumento. Com o aumento no nível de ruído a força estocástica tem um valor médio aumentado também, e assim a diferença entre os potenciais não é mais sentida pelo sistema.

O tempo computacional exigido para os cálculos da SNR apresentaram-se elevados (algumas horas em computadores Alpha-Digital) o que nos motivou a fazer testes de estabilidade do cálculo para a variação de alguns parâmetros. O primeiro teste foi a variação do número de trajetórias utilizado para calcularmos a média das transformadas de Fourier. Variamos este número entre 10 e 100 trajetórias e pudemos perceber que o nível de ruído onde ocorre a SNR máxima permanece o mesmo mas a amplificação que o sistema sofre tem um comportamento aproximadamente linear com o aumento do número de trajetórias. No segundo teste variamos o tempo de integração do sistema. O resultado apresenta-se semelhante ao teste anterior, mas com um novo resultado: o sistema não convergiu para tempos de integração muito pequenos, o que nos remete ao conceito de solução transiente e solução estacionária que foi estudado posteriormente. Uma sugestão de trabalho futuro seria um estudo mais qualitativo sobre estas variações procurando-se por um valor assintótico para a amplificação.

Em seguida estudamos a ressonância estocástica através da Equação de Fokker-Planck. Essa equação, como vimos, pode ser deduzida através da equação de Langevin do sistema. Apresenta-se como uma equação diferencial no espaço e no tempo cuja solução representa a função densidade de probabilidade  $W(x, t)$  de encontrarmos o sistema numa determinada região do espaço num instante fixo de tempo. Nessa dissertação nós não resolvemos a Equação de Fokker-Planck analiticamente ou numericamente por integração direta, nós utilizamos a equação de Langevin trabalhada nos capítulos anteriores e a simulamos um número grande de vezes. O cálculo do histograma de todas essas simulações em um instante fixo de tempo nos fornece a dis-

tribuição de probabilidades  $W(x, t)$  que podemos identificar como sendo a solução da Equação de Fokker-Planck associada ao sistema. Neste caso existem dois tipos de solução. Inicialmente o sistema evolui em um transiente que não foi calculado e representa um trabalho futuro a ser efetuado. Após um tempo de relaxação o sistema se estabiliza em uma solução estacionária. No caso particular da ressonância estocástica a solução estacionária depende do tempo. Em trabalho futuro iremos estudar a fundo este aspecto analítico e numericamente.

Na última parte de nossa dissertação aplicamos a ressonância estocástica num caso da tica no linear: a geração de segundo harmônico onde pudemos demonstrar que o fenômeno da ressonância estocástica é possível ocorrer na Geração de Segundo Harmônico dentro de uma cavidade. Poderíamos observar experimentalmente este fenômeno usando um bombeio modulado com um ruído aditivo e um detector sensível à intensidade. A ressonância estocástica observada neste processo é muito menor que nos sistemas estudados anteriormente. Podemos perceber isso claramente ao observar que os gráficos da SNR não são indicados em decibéis mas diretamente em amplificação.

# Apêndices

# Apêndice A

## Estudo da Geração do Ruído

### A.1 Geração de ruído

Um dos aspectos mais importantes quando estudamos processos estocásticos é a geração de ruído. Normalmente utilizamos o ruído branco que tem como característica principal possuir a média nula e ser totalmente descorrelacionado. Quando este ruído tem sua Transformada de Fourier calculada esta apresenta-se como uma linha contínua em todas as frequências.

A geração deste ruído branco é um dos aspectos mais importantes no estudo numérico dos processos estocásticos.

Nas linguagens de programação (*C*, *FORTRAN*, *Pascal*) temos embutidas funções para a geração de números aleatórios segundo uma distribuição de probabilidades uniforme (todos os elementos possuem a mesma probabilidade de sorteio, ou  $P(u) = cte, \forall u$ ).

Devemos estudar o comportamento do ruído,  $\Gamma(t)$ , através de sua média,  $\langle \Gamma(t) \rangle$ , e de sua correlação,  $\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle$ , onde  $\langle \dots \rangle$  representa uma média temporal.

#### A.1.1 Ruído Uniforme

Inicialmente estudamos ruídos com distribuição uniforme gerados numericamente.

O ruído uniforme é aquele que tem como probabilidade:



$$p(x)dx = \begin{cases} dx, & 0 < x < 1 \\ 0, & \forall x \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Inicialmente fizemos um estudo do ruído gerado vendo-se a sua distribuição. Para calcular esta distribuição inicialmente geramos uma série de números aleatórios e calculamos a sua distribuição que nos dá como resultado o histograma a seguir.

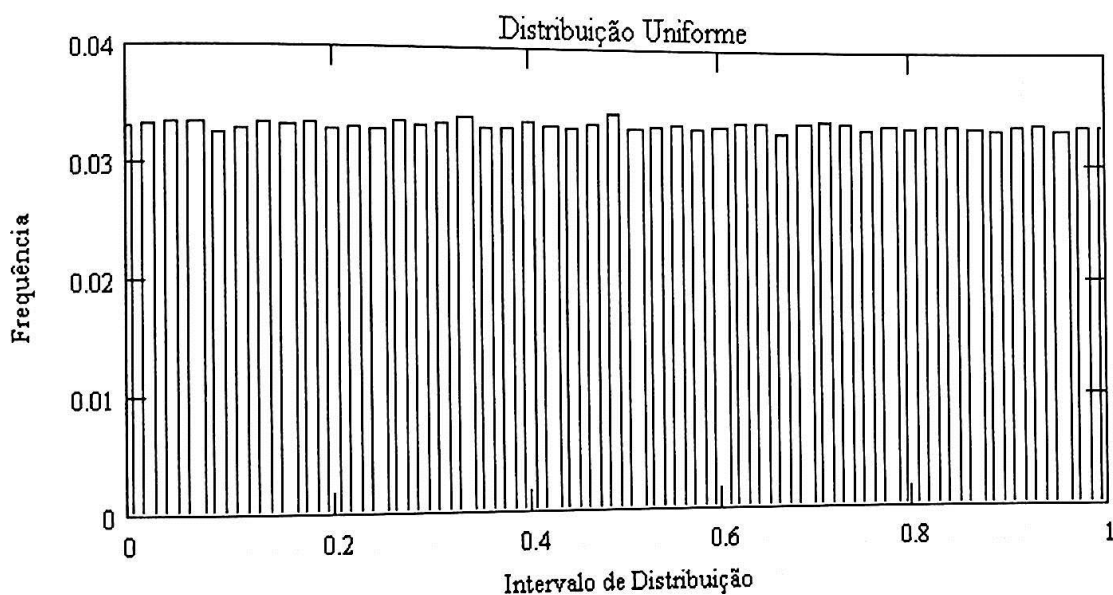


Figura A.1: Histograma de 500000 números aleatórios gerados numericamente segundo uma distribuição uniforme.

Este tipo de ruído, apesar de apresentar as características desejadas (em relação a média e correlação) não apresenta significado físico, pois normalmente os ruídos que acometem nosso sistema são centrados em zero e apresentam uma probabilidade que diminui ao se afastar deste centro. O que pode mudar é a função matemática que retrata esta diminuição: pode ser uma gaussiana, uma lorentziana, etc. Podemos exemplificar num caso bem simples: a tensão elétrica medida numa tomada doméstica. Esperamos que seu valor seja 110V em média, com pequenas oscilações de poucos volts; felizmente o evento de uma mudança brusca nesta tensão é pouco provável. (Se modelássemos este sistema como tendo um ruído uniforme a probabilidade da nossa tensão sofrer um acréscimo de 0.5V seria igual a de sofrer um acréscimo de 55V, o que sabemos não reflete a realidade).

Utiliza-se, então, dois tipos de ruído: o Gaussiano e o Telegráfico.

## A.1.2 Ruído Telegráfico

A geração do ruído Telegráfico é muito simples computacionalmente falando. Podemos gerá-lo a partir de um ruído uniforme com valores entre 0 e 1, através da transformação:

$$\Gamma(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } \Gamma(t) < 0.5 \\ 1, & \text{se } \Gamma(t) > 0.5 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

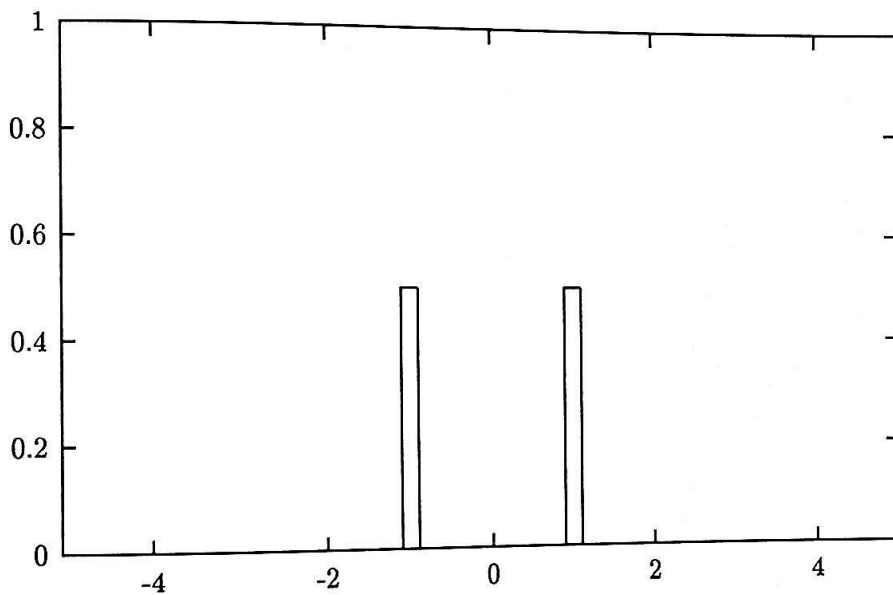


Figura A.2: Histograma da geração de 50000 números gerados segundo uma distribuição Telegráfica.

## A.1.3 Ruído Gaussiano

Para a geração do ruído gaussiano através de uma distribuição uniforme nos utilizamos do método de transformação [19] abaixo.

### Métodos de transformação

Para transformarmos entre dois tipos de distribuição de probabilidades ( $x$  para  $y$ ) nos utilizamos da *lei fundamental de transformação de probabilidades*, que é simplesmente:

$$|p(x)dx| = |p(y)dy| \quad (\text{A.3})$$

mas como  $0 < p(x) < 1$  temos:

$$p(y) = p(x) \left| \frac{dy}{dx} \right| \quad (\text{A.4})$$

Mas como a distribuição gaussiana é uma função de duas variáveis temos que generalizar A.4 para mais de uma dimensão:

$$p(y_1, y_2, \dots) dy_1 dy_2 \dots = p(x_1, x_2, \dots) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots)}{\partial(y_1, y_2, \dots)} \right| dy_1 dy_2 \dots \quad (\text{A.5})$$

onde  $|\partial(x_1, x_2, \dots) / \partial(y_1, y_2, \dots)|$  é o **Jacobiano** de  $x$  em relação à  $y$ .

O método que utilizamos para a geração gaussiana é o *Método de Box Muller*[19]:

Considere a transformação entre duas variáveis uniformes  $x_1$  e  $x_2$  tais que  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ :

$$y_1 = \sqrt{2 \ln x_1} \cos(2\pi x_2) \quad (\text{A.6})$$

$$y_2 = \sqrt{2 \ln x_1} \sin(2\pi x_2) \quad (\text{A.7})$$

A transformação inversa pode ser calculada:

$$x_1 = \exp\left[-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)\right] \quad (\text{A.8})$$

$$x_2 = \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{y_2}{y_1} \quad (\text{A.9})$$

Podemos calcular o Jacobiano para esta transformação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} &= \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial y_1 & \partial x_1 / \partial y_2 \\ \partial x_2 / \partial y_1 & \partial x_2 / \partial y_2 \end{vmatrix} = \\ &= - \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-y_1^2/2] \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-y_2^2/2] \right] \end{aligned}$$

Desde que este é o produto de funções de independentes  $y_1$  e  $y_2$  podemos ver que cada um dos  $y$  tem distribuição gaussiana.

Este algoritmo tem a desvantagem de se utilizar de funções senos e cossenos que podem aumentar consideravelmente o tempo de cálculo computacional.

Existe um truque útil para este caso, ao invés de considerarmos  $x_1$  e  $x_2$  gerados num quadrado ( $x_1, x_2 \in [0,1]$ ) podemos considerar  $v_1$  e  $v_2$  como sendo a abscissa e ordenadas de uma circunferência de raio unitário. Se definirmos o módulo de um ponto pertencente a este círculo ( $R = v_1^2 + v_2^2$ ) pode ser usado com  $x_1$  enquanto o ângulo entre  $(v_1, v_2)$  pode servir como o ângulo  $2\pi x_2$ .

Esta substituição aparentemente complicada tem a vantagem de substituir os senos e cossenos da equação A.6 por  $v_1/R$  e  $v_2/R$  que elimina as funções trigonométricas.

Foram usadas estas transformações para a geração de nossa série de números aleatórios com distribuição gaussiana.

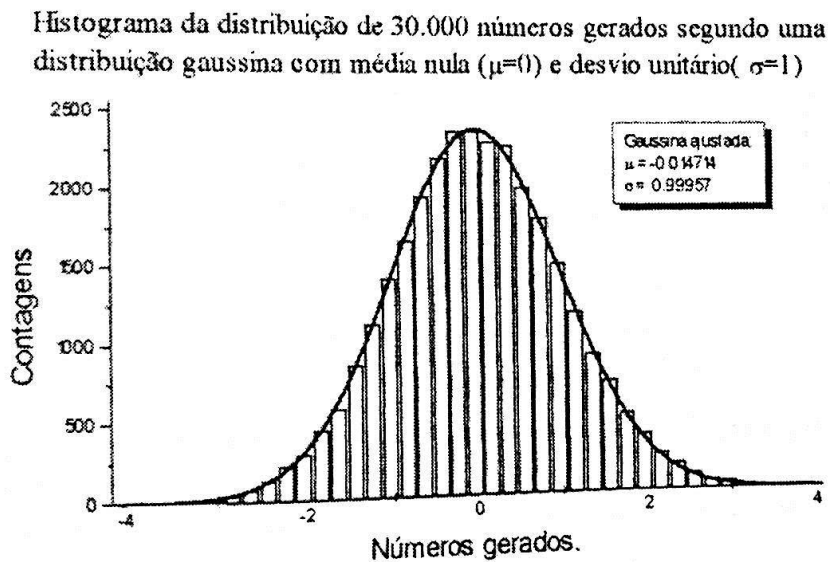


Figura A.3: Histograma de 500,000 pontos gerados segundo uma distribuição gaussiana com média nula e desvio padrão unitário.

# Apêndice B

## Tempo de Passagem

### B.1 Introdução

Estudaremos aqui uma aplicação da Equação de Fokker-Planck: o cálculo do chamado “tempo de escape sobre uma barreira de potencial”. Este tempo de escape é o tempo que uma partícula com posição inicial à esquerda de uma barreira de potencial leva para chegar a um ponto final à direita desta barreira.

Temos a nossa conhecida Equação de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [\nabla U(x) p(x, t)] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t) \quad (\text{B.1})$$

O potencial utilizado pode ser visualizado na figura (B.1) onde podemos ver o ponto de máximo e o ponto de mínimo  $b$ .

Sendo assim, a solução estacionária para a Equação de Fokker-Planck já foi por nós calculada:

$$p_{ST}(x) = N \exp\left(\frac{-U(x)}{D}\right) \quad (\text{B.2})$$

Como podemos ver na referência [20], o tempo de passagem para uma partícula entre uma barreira refletora e uma absorvedora pode ser dado por:

$$T(x) = 2 \int_x^a \frac{dy}{\Psi(y)} \int_0^y \frac{\Psi(z)}{B(z)} dz \quad (\text{B.3})$$

onde em  $a$  temos a barreira refletora, em  $b$  a barreira absorvedora e  $x$  é o valor da posição inicial da partícula.

A função  $\Psi(x)$  usada na equação (B.3) é definida por:

$$\Psi(x) = \exp\left[\int_a^x 2 \frac{A(x')}{B(x')} dx'\right] \quad (\text{B.4})$$

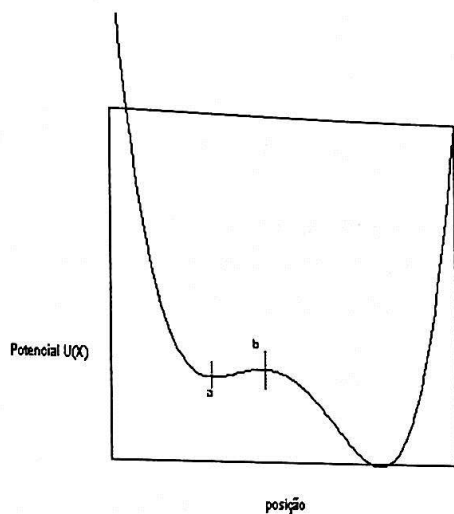


Figura B.1: Esboço do potencial utilizado para o estudo do tempo de passagem. No potencial acima **a** é o ponto de mínimo e **b** o ponto de máximo.

onde  $A(x)$  e  $B(x)$  são os termos de arrasto e difusão da Equação de Fokker-Planck utilizada para o cálculo do Tempo de Passagem.

Como queremos estudar o tempo necessário para que uma partícula saia de um mínimo de potencial passe por sobre a barreira e termine sua trajetória em um ponto perto do outro vale devemos fazer as substituições:

$$b \rightarrow x_0$$

$$a \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow a$$

Pois, como queremos calcular o tempo em que uma partícula saindo do mínimo de potencial (posição  $x = a$ ) atravesse a barreira de potencial e pare em ponto  $x_0$  é conveniente colocarmos a barreira absorvedora na posição  $x_0$ . Nós queremos simular uma partícula que move-se da esquerda para a direita como as características do potencial à esquerda da partícula não são importantes podemos, para facilitar os cálculos, mover a barreira refletora que estava na posição  $a$  para a posição  $x = -\infty$ .

Com as substituições acima e calculando-se em  $\Psi(x)$  (B.4) podemos obter a equação que retrata o tempo de passagem de uma partícula saindo da posição  $x = a$  e chegando até a posição  $x = x_0$ . O parâmetro  $D$  é o nível de ruído a que o nosso sistema está sujeito.

$$T(a \rightarrow x_0) = \frac{1}{D} \int_a^{x_0} \exp\left(\frac{-U(y)}{D}\right) dy \int_{-\infty}^y \exp\left(\frac{-U(z)}{D}\right) dz \quad (\text{B.5})$$

Esta equação apresenta dificuldades de cálculo (principalmente por se tratar de uma integral dupla onde os limites não são independentes). Pode-se fazer duas aproximações para facilitar os cálculos:

1. primeira aproximação: transformação de uma integral dupla em duas integrais simples.

Esta primeira aproximação é uma aproximação que transforma (B.5) em um produto de duas integrais:

$$T(a \rightarrow x_0) = \frac{1}{D} \left\{ \int_a^{x_0} \exp\left(\frac{-U(y)}{D}\right) dy \right\} \int_{-\infty}^b \exp\left(\frac{-U(z)}{D}\right) dz \quad (\text{B.6})$$

Podemos perceber que a integral em  $y$  manteve-se inalterada mas a integral em  $z$  transformou-se num integral não dependente de  $y$ . Esta aproximação transforma uma integral dupla em um produto de duas integrais.

Os argumentos para esta aproximação são: para máximo central de  $U(x)$  largo e para  $D$  pequeno a exponencial,  $\exp\left(\frac{U(y)}{D}\right)$ , tem um pico suave em  $x = b$ , enquanto a exponencial,  $\exp\left(\frac{-U(z)}{D}\right)$ , é pequena perto de  $z = b$ . Isto nos leva ao resultado em que integral em  $z$  é constante para aqueles valores em  $y$  para os quais  $\exp\left(\frac{U(y)}{D}\right)$  é diferente de zero. Assim podemos na integral em  $z$  substituir  $y$  por  $b$ , e assim deixar a equação como um produto de integrais.

2. segunda aproximação: expansão do potencial em uma série de Taylor. Na referência [20] existe uma outra aproximação: o potencial é expandido em uma série de Taylor em torno de seus pontos de máximo e mínimo.

Neste caso trabalharemos com um potencial simétrico:

$$U(x) = k_1 x^2 + k_2 x^4 \quad (\text{B.7})$$

A Expansão de Taylor será feita em torno dos pontos de máximo e mínimo do potencial calculados por  $\frac{d}{dx}U(x) = 0$ .

Os pontos de mínimo e máximo calculados para o potencial simétrico são:

$$\begin{aligned} \text{Máximo } x &= 0 \\ \text{Mínimo } x &= \pm \sqrt{\frac{-k_1}{2k_2}} \end{aligned}$$

Ou seja, os pontos de máximo e mínimo de nosso potencial tem como valor :

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ a &= \pm \sqrt{\frac{-k_1}{2k_2}} \end{aligned}$$

Podemos reescrever a Expansão de Taylor de uma forma elegante onde definimos dois parâmetros  $\alpha$  e  $\delta$ :

$$\begin{aligned} U(x) &\approx U(a) + \frac{1}{2} \left( \frac{x-a}{\alpha} \right)^2 \\ U(x) &\approx U(b) + \frac{1}{2} \left( \frac{x-b}{\delta} \right)^2 \end{aligned}$$

Podemos ver na figura abaixo o potencial simétrico biestável e as duas expansões de Taylor que o aproximam em torno de um máximo e mínimo.

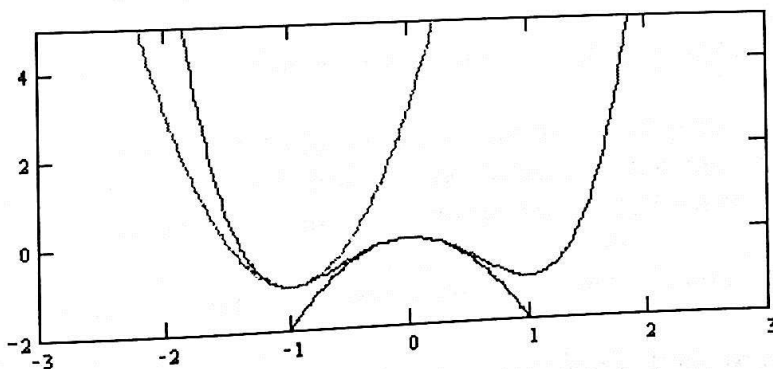


Figura B.2: Potencial simétrico biestável e as duas Expansões em Taylor usados para aproximá-lo em torno do pontos de máximo (a) e mínimo (b).

Usando estas constantes  $\alpha$  e  $\delta$  em (B.6) e fazendo-se alguns cálculos, o Tempo de Passagem pode ser escrito na conhecida forma da **Fórmula de Arrhenius** que é usada na Química.



$$T(a \rightarrow x_0) \approx 2\alpha\delta \exp \left[ \frac{U(x_1) - U(x_2)}{D} \right] \quad (\text{B.8})$$

Para um caso particular de nosso potencial simétrico a Fórmula de Arrhenius ficará:

$$T(a \rightarrow x_0) \approx \frac{\pi}{k_1\sqrt{2}} \exp \left[ \frac{k_1^2}{4k_2} \cdot \frac{1}{D} \right] \quad (\text{B.9})$$

Estas aproximações foram por nós aplicadas em nosso sistema (potencial simétrico) como pode-se ver na seção a seguir.

## B.2 Estudo das Aproximações para o Cálculo do Tempo de Passagem

Estudaremos nesta seção o comportamento do tempo de passagem e suas aproximações calculadas na seção anterior. Para isso faremos dois estudos:

1. estudaremos o comportamento do tempo de passagem variando-se o ponto final;
2. estudaremos o comportamento do tempo de passagem entre dois pontos fixos variando-se o nível de ruído.

Calculamos as integrais das soluções analíticas (B.5) e aproximada (B.6) numericamente.

Os gráficos a seguir retratam o tempo de passagem para uma partícula saindo da posição  $x = -1$  (mínimo do potencial) até uma posição final qualquer: foi variada a posição final num intervalo  $[-1,1]$  e o comportamento do tempo de passagem mostrado nos gráficos a seguir.

Este gráfico (B.3) retrata o tempo de passagem para uma partícula que tem como ponto inicial a posição  $-1$ .

Olhemos primeiro a função exata (linha contínua). Pode-se perceber que alguns resultados intuitivos são confirmados:

- Vê-se no gráfico acima que o tempo de passagem para uma partícula que saindo de  $x = -1$  chegue em  $x = -1$  é nulo.

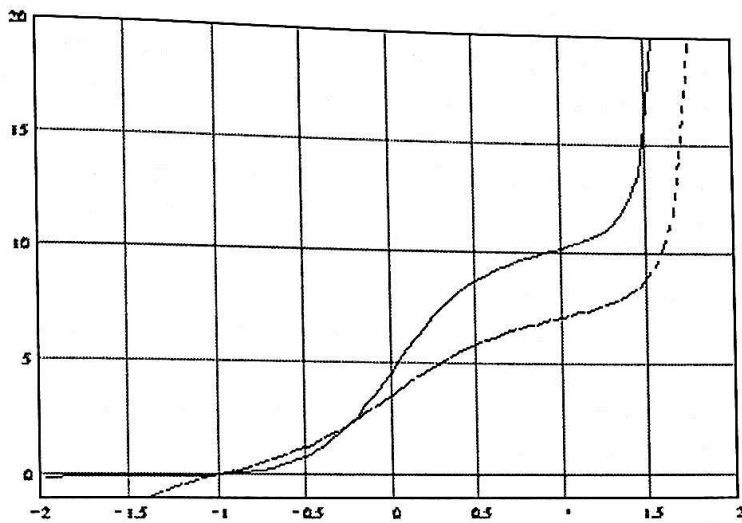


Figura B.3: Gráfico por nós calculado mostrando o comportamento do Tempo de passagem em função da posição final da partícula.. A linha contínua é o resultado teórico, a pontilhada a aproximação. O nível de ruído usado foi 0,5.

- Para valores da posição final menores que -1 o tempo de passagem é negativo, isto deve-se ao fato que em nossos cálculos a partícula move-se para a direita ((B.3) é válida apenas se  $a < b$ ). Assim, este resultado negativo não tem significado físico, é apenas fruto de calcularmos o tempo de passagem em uma região onde ele não está definido.
- Olhemos agora o comportamento do tempo de passagem para valores ao redor do ponto  $x = 0$  (lembrando que  $x = 0$  é o ponto de máximo potencial).

O tempo de passagem apresenta um crescimento (derivada) acelerado perto do ponto  $x = 0$  (à esquerda) isso deve-se ao fato de estarmos perto do pico da barreira de potencial. Podemos ver que quanto mais próximo do pico do potencial maior é o aumento (derivada) do tempo de passagem.

Após a passagem da barreira de potencial a curva do Tempo de passagem sofre uma inflexão que é devida à inflexão do potencial. Pode-se ver que o Tempo de Passagem diminui o seu aumento relativo (derivada) pois a partícula não necessita mais vencer o potencial, ou melhor, a força devido ao potencial tem a mesma direção daquela desejada para a partícula.

Examinemos o comportamento da função aproximada (linha tracejada):

Podemos perceber que a função aproximada não apresenta um bom resultado para valores da posição final a direita da barreira de potencial ( $x > 0$ ).

A solução aproximada apresenta, assim como a exata, uma inflexão na posição  $x = 0$  (barreira de potencial). Mas a forma da solução aproximada é a mesma da solução exata.

Outro ponto que deve ser levado em consideração é a rápida divergência da solução aproximada para pontos finais menores que o ponto inicial, o que contrasta com a lenta divergência da solução exata.

Em ambas as curvas (exata e aproximada) temos um outro ponto de inflexão na posição do outro máximo de potencial. E o tempo de passagem tem uma rápida divergência para  $\infty$  em  $x \approx 1.7$  correspondendo a barreira de potencial.

No gráfico B.4 variamos o valor do ruído, podemos notar como consequência principal a diminuição do tempo de passagem. Isto pode ser explicado: com o aumento do nível de ruído a força necessária para a partícula ultrapassar o potencial passa a ser pequena perto da força aleatória. Assim, podemos falar de maneira mais simples que com o aumento do ruído é mais fácil a partícula passar pelo potencial.

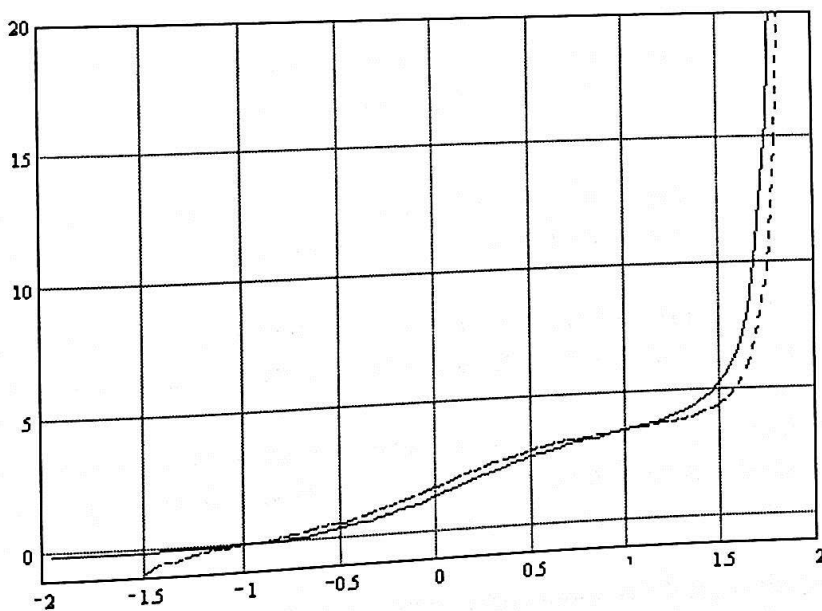


Figura B.4: Comportamento do Tempo de passagem em função da posição final da partícula. A linha contínua é o resultado teórico, a pontilhada a aproximação. O nível de ruído usado foi 1.

Podemos perceber neste gráfico um ajuste melhor entre a solução exata e a aproximada na região  $x > -1$ . Esta situação de nível de ruído igual a 1 apresenta um excelente comportamento da solução aproximada.

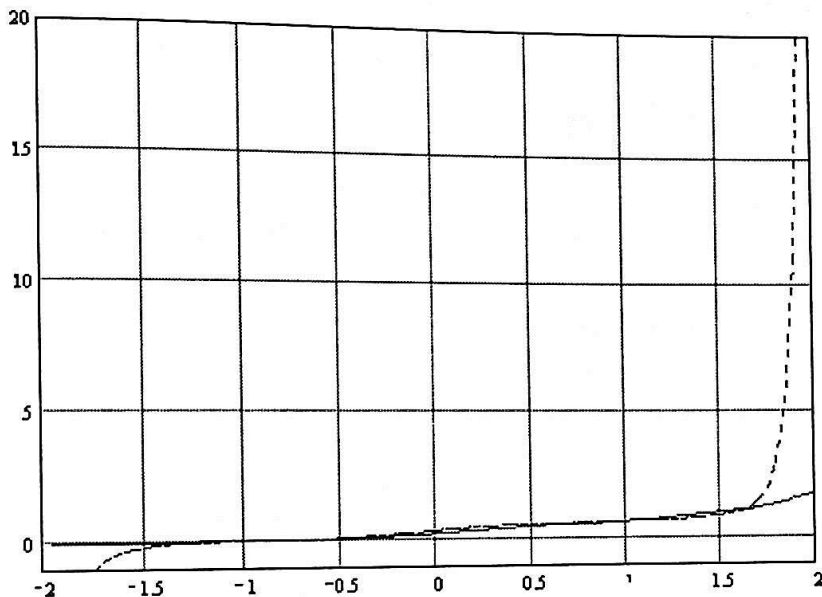


Figura B.5: Comportamento do Tempo de passagem em função da posição final da partícula. A linha contínua é o resultado teórico, a pontilhada a aproximação. O nível de ruído usado foi 5.

B.2

No gráfico pode-se perceber que a solução aproximada ajusta-se bem à solução exata até uma posição  $x = 1.7$ , depois deste valor a solução aproximada diverge e a exata continua aproximadamente linear.

Olhando-se a solução exata percebe-se que além do tempo de passagem ter diminuído as inflexões tornam-se quase imperceptíveis (nesta escala), isto corrobora a afirmação da análise do gráfico anterior: com um nível de ruído alto, as diferenças entre os vales e picos do potencial (que originam forças devidas ao gradiente) tornam-se insignificantes perto da força aleatória. Pode-se falar que a partícula não mais “sente” o potencial, mas apenas “sente” a força periódica.

Poderia-se afirmar que essa aparente linearidade do tempo de passagem é devido apenas à escala do gráfico, pois os valores do tempo de passagem aproximado são muito superiores aos da solução exata. Mas olhando-se o gráfico B.6:

Podemos perceber que mesmo nesta região do gráfico a solução exata quase não apresenta mais as inflexões relacionadas com as inflexões do po-

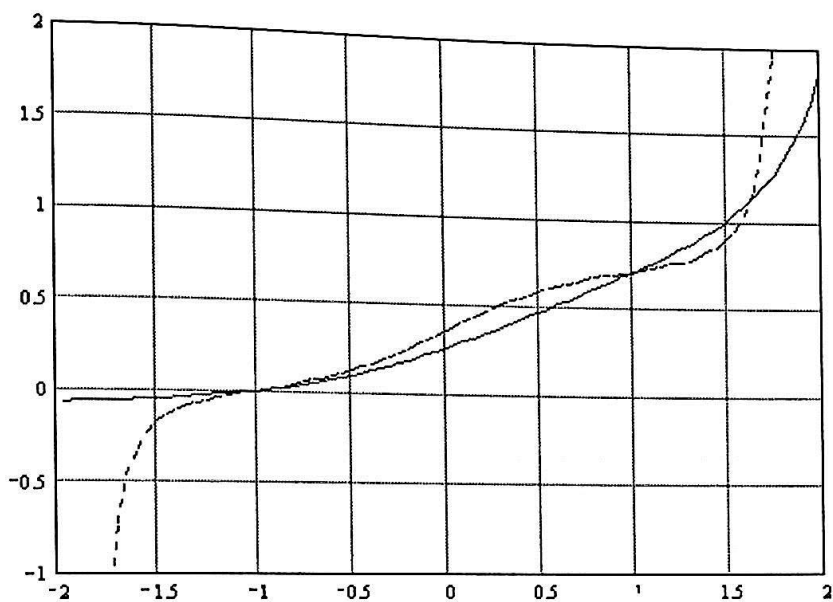


Figura B.6: Comportamento do Tempo de passagem em função da posição final da partícula. A linha contínua é o resultado teórico, a pontilhada a aproximação. O nível de ruído usado foi 5. Este gráfico é apenas um detalhamento de uma região do gráfico B.2.

tencial.

No gráfico B.7 podemos notar uma confirmação das análises anteriores. A solução exata torna-se linear e a solução aproximada diverge da real para valores da posição  $x > 1.7$ .

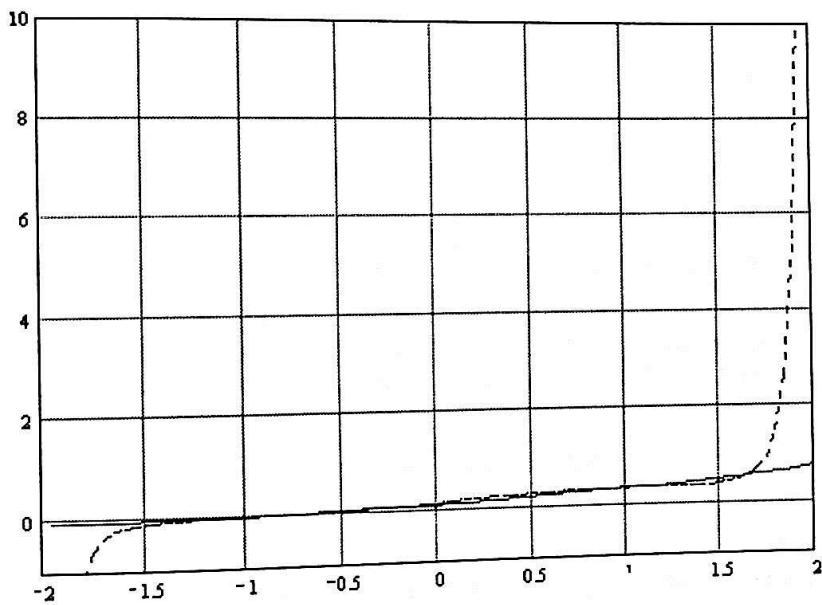


Figura B.7: Comportamento do Tempo de passagem em função da posição final da partícula. A linha contínua é o resultado teórico, a pontilhada a aproximação. O nível de ruído usado foi 10.

# Apêndice C

## Descrição do Algoritmo para o Cálculo do Histograma

### C.1 Motivação

Como pôde-se ver nesta dissertação, a construção de histogramas representou um papel fundamental no estudo da EFP principalmente no estudo da Solução Estacionária. Este estudo consistiu, basicamente, da integração da Equação de Langevin do sistema e a construção de um histograma para as posições finais das trajetórias integradas.

Um histograma consiste numa série de valores que nos fornece a distribuição de uma outra série original de dados. O Histograma é definido sempre entre dois valores ( $H_{min}$  e  $H_{max}$ ) e é composto de intervalos com comprimento  $\Delta$  da forma ( $H_{min} + i\Delta$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  onde  $n$  é o número de intervalos do histograma).

### C.2 Métodos Clássicos

Inicialmente iremos estudar os métodos clássicos para a construção de histogramas.

Os parâmetros de entrada para a construção de um histograma são: os extremos do intervalo onde ele será construído  $H_{min}$  e  $H_{max}$  e o número de classes ou intervalos,  $n$ , onde os pontos serão classificados.

A saída deste algoritmo é dado na forma de um vetor com dimensão  $n$ , que indica quantos pontos da série temporal que pertencem a este intervalo. Para construir este vetor os métodos tradicionais utilizam um algoritmo de busca:

os dois extremos do 1 intervalo são comparados com cada um dos  $N$

pontos da série experimental. Caso o ponto testado faça parte do intervalo o primeiro elemento do vetor de saída é acrescido de uma unidade. Este procedimento é repetido para cada uma das  $n$  classes de nosso histograma.

Apesar da funcionalidade deste algoritmo ele tem o problema de utilizar  $n \times N$  iterações para construir-se todo o histograma.

### C.3 Nosso Método

A freqüente utilização de histogramas nos levou ao desenvolvimento de um algoritmo otimizado. Como iremos ver desenvolvemos um algoritmo que diminui o número de iterações em um fator de  $n$ .

O nosso algoritmo utiliza-se de um princípio diferente dos métodos tradicionais: ao invés de procurarmos os pontos que pertencem a cada intervalo calculamos o intervalo a que cada ponto pertence.

O nosso algoritmo utiliza de alguns resultados teóricos apresentados a seguir.

Usando a mesma nomenclatura para o número de classes e intervalos do histograma usados na seção anterior podemos escrever:

$$H_{max} = H_{min} + n\Delta \quad (C.1)$$

A relação entre o elemento de nossa série e seu intervalo no histograma é dado por uma função de primeiro grau do tipo:

$$\text{Intervalo} = a \times +b \quad (C.2)$$

Para calcularmos os valores de  $a$  e  $b$  construímos duas equações linearmente independentes:

$$0 = a \times H_{min} + b \quad (C.3)$$

$$n = a \times H_{max} + b \quad (C.4)$$

As duas equações podem ser entendidas facilmente se lembrarmos que um elemento de valor  $H_{min}$  deve se localizar no 1º intervalo (intervalo 0) e o último intervalo (de número  $n - 1$ ) deve conter o elemento  $H_{max}$ .

O sistema pode ser resolvido para obtermos o valor de  $a$ :

$$a = \frac{n}{H_{max} - H_{min}} \quad (C.5)$$

Lembrando que o número de intervalos é:

$$n = \frac{H_{max} - H_{min}}{\Delta} \quad (C.6)$$



Podemos calcular este valor para  $a$ :

$$a = \frac{1}{\Delta} \quad (\text{C.7})$$

E substituindo em (C.3), calcula-se o valor para  $b$ :

$$b = -\frac{H_{min}}{\Delta} \quad (\text{C.8})$$

Com estes dois resultados (C.7 e C.8) podemos definir uma relação que a partir de um elemento da série de entrada calcula diretamente a classe a que pertence este elemento:

$$\text{Intervalo} = \frac{1}{\Delta} [\text{elemento} - H_{min}] \quad (\text{C.9})$$

O nosso algoritmo, através de um *loop* que percorre o vetor de entrada, calcula a classe em que o elemento de entrada pertence. No vetor de saída o elemento que representa esta classe é acrescido de uma unidade.

Este algoritmo necessita apenas de  $N$  iterações para a construção do histograma.

# Bibliografia

- [1] Benzi, R., G. Parisi and A. Vulpiani; *Tellus* 1982, **34**, no.10
- [2] Benzi, R., G. Parisi and A. Vulpiani; *SIAM J. Appl. Math* 1983, **43**,565
- [3] Benzi, R., G. Parisi and A. Vulpiani; *J. Phys A* 1981, **14**, L453
- [4] Fauve, S e F. Heslot; *Phys. Lett* 1983, **97A**, 5
- [5] Einstein A.; *Annalen der Physik* 1905, **17**, 549
- [6] Langevin P.; *C. R. Acad. Sci* 1908, **146**, 530
- [7] McNamara, B., K. Wiesenfeld e R. Roy; *Phys. Rev. Lett.* 1988,**60**, 2626
- [8] McNamara, B. e K. Wiesenfeld ; *Phys. Rev. A* 1988,**39**, 4854
- [9] Longtin, A. ; *J. Stat. Phys.* 1993, **70**, 309
- [10] Douglass, J.K., L.Wilkens, E. Pantazelou e F. Moss; *Nature* 1993, **365**, 337
- [11] Babinec, P.; *Phys. Lett. A* 1997, **265**, 179
- [12] Löfsted, R. e S. N. Coppersmith; *Phys. Rev. Lett.* 1994a, **72**, 1947
- [13] Löfsted, R. e S. N. Coppersmith; *Phys. Rev. E* 1994b, **49**, 4821
- [14] Grifoni, M. e P. Hänggi; *Phys. Rev. Lett.* 1996a, **76**, 1611
- [15] Grifoni, M. e P. Hänggi; *Phys. Rev.E* 1996b, **54**, 1390
- [16] Gammaitoni L., P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni ; *Rev. Mod. Phys.* 1998, **70**, 223
- [17] Drummond, P.D., McNeil, K.P, Walls, D.F.; *Optica Acta* 1980, **27**, no.3 312-335

- [18] Abramowitz M., Stegun, I. ; *Handbook of Mathematical Functions* Dover Publications, New York p.17
- [19] Press W., B. Flannery *Numerical Recipes in C. The art of scientific computing*, Cambridge University Press
- [20] Gardiner C.W. *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*, Springer Verlag (1990)
- [21] Risken, H. *The Fokker-Planck Equation*, Springer Series in Synergetics (1988)
- [22] George F. Simmons *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, McGraw-Hill (1991)
- [23] Ippen E., Lindner J. & Ditto W., *Chaotic Resonance, A Simulation*, J. of Stat Phys, **70** 437-450 (1993)
- [24] A. Szoke, V. Daneu, J. Goldhar and N.A. Kurnit, *Appl. Phys. Lett.* **15**, 376 (1969).
- [25] H. Seidel, U.S. Patent No. 3, 610, 731.
- [26] H.M. Gibbs, S.L. McCall and T.N.C. Venkatesan, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1135 (1976).
- [27] *Nonclassical Effects in Quantum Optics*, eds. P. Meystre and D.F. Walls, A.I.P., New York, (1991).
- [28] Vemuri G.e Roy R.; *Phys. Rev. A*, 1989, **39**, 4668