

N.T. 683

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

SBI-IFUSP



305M810T0683

RESULTADOS MATEMÁTICOS SOBRE O MÉTODO DE
ESPALHAMENTO INVERSO



Helena Maria Ávila de Castro

Tese de Doutoramento apresentada ao
Instituto de Física da Universidade
de São Paulo, sob a orientação do
Prof. Dr. W.F. Wreszinski.

SÃO PAULO

1984

5392758
C 355 n
D
e. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do
Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Castro, Helena Maria Ávila de
Resultados Matemáticos sobre o Método de
Espalhamento Inverso. São Paulo, 1984.

Tese (Doutoramento) - Universidade de
São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.

Área de Concentração: Física das Partículas Elementares.

Orientador: Walter Felipe Wreszinski

Unitermos: 1. Método de Espalhamento Inverso; 2. Propriedade Isoespectral de operadores do tipo par de lax; 3. Operadores do tipo Zakharov-Shabat.

USP/IF-B37/84

à minha mãe e
ao Raul

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Wreszinski, a orientação dedicada e a paciência, sem as quais esta tese não teria sido concluída.

A FAPESP e ao IMEUSP, o suporte financeiro.

A Tamico, a datilografia.

A todos aqueles que de um modo ou de outro contribuíram para a realização deste trabalho.

"The mathematician, carried along on his flood of symbols, dealing apparently with purely formal truths, may still reach results of endless importance for our description of the physical universe".

Karl Pearson

"But there is another reason for the high repute of mathematics: it is mathematics that offers the exact natural sciences a certain measure of security which, without mathematics, they could not attain".

Einstein

"A verdade sai do erro mais facilmente do que da confusão".

Bacon

R E S U M O

Neste trabalho são apresentados alguns resultados matemáticos relevantes para a aplicação do método de espalhamento inverso à resolução de uma classe de equações de evolução não-lineares. É demonstrada a propriedade isoespectral para certas famílias de operadores lineares não auto-adjuntos. Esta propriedade tem um papel central na aplicação do método acima a equações de evolução não-lineares de interesse físico, tais como a equação de sine-Gordon e a equação de Schrödinger não-linear. É feito também, uma teoria de espalhamento inverso rigorosa para sistemas do tipo Zakharov-Shabat, o que inclui uma análise qualitativa do espectro de operadores deste tipo.

ABSTRACT

This Thesis presents some mathematical results relevant in applications of the inverse scattering transform to the solution of a class of non-linear evolution equations. First, it is shown that certain families of non-selfadjoint linear operators have the isospectral property, which is fundamental for the above applications. These families include various operators related to non-linear equations of great physical interest, such as the sine-Gordon and the non-linear Schrödinger equations. In the sequel, a rigorous inverse scattering theory, including a qualitative spectral analysis, is developed for systems of Zakharov-Shabat type.

ÍNDICE

Capítulo I - Introdução	1
Capítulo II - O Método de Espalhamento Inverso	
II.1 - Introdução	4
II.2 - A propriedade isoespectral e o teorema de Lax	7
II.3 - O Método de Espalhamento Inverso para Operadores lineares do tipo Zakharov-Shabat	8
Capítulo III - Propriedades Isoespectrais de uma Família de operadores não auto-adjuntos	
III.1 - Introdução	15
III.2 - Um Teorema Isoespectral	16
III.3 - A Propriedade Isoespectral da equação de sine-Gordon	22
III.4 - A Propriedade Isoespectral da equação de Schrödinger não-linear	26
Capítulo IV - Propriedades Espectrais de uma Família de operadores do tipo Zakharov-Shabat	
IV.1 - Introdução	30
IV.2 - Existência das "funções de Jost" e definição dos "dados de espalhamento"	31
IV.3 - Sobre a finitude do espectro discreto de L	37

Capítulo V - A Teoria de Espalhamento Inverso

V.1 - Introdução 45

V.2 - Relações integrais entre as funções de Jost 45

V.3 - As equações de Marchenko: existência e unicidade das soluções 53

V.4 - A evolução temporal dos dados de espalhamento 61

Capítulo VI - Conclusão 65

Apêndice A - Alguns resultados sobre operadores agindo num espaço de Banach 68

Apêndice B - Sobre a diferenciabilidade de $L_1 u_0(t)$ 71

Apêndice C - O operador $H(t)$ relativo à equação de sine-Gordon é liso 73

Apêndice D - A invariância do espectro essencial de $L(t)$ e um teorema de existência e unicidade de soluções 75

Referências 77

CAPÍTULO IINTRODUÇÃO

Desde 1967, quando a teoria de espalhamento inverso foi aplicada por Gardner, Greene, Kruskal e Miura⁽⁶⁾ à resolução da equação de Kortweg-deVries, a resolução de equações de evolução não-lineares através desse método, tem despertado grande interesse por parte de físicos e matemáticos, tanto por sua grande gama de aplicações⁽¹⁹⁾ quanto pela extensão do método a uma classe mais geral de equações não-lineares.

Nos últimos anos, um tratamento rigoroso da teoria de espalhamento inverso aplicada à equação de Kortweg-deVries, foi feito^{(4), (3), (21)}. Neste caso, existe uma simplificação importante, que é o fato de que o operador linear associado é auto-adjunto, o que não acontece para a maioria das outras equações não-lineares de interesse físico.

Em 1974, Ablowitz, Kaup, Newell e Segur⁽¹⁾ desenvolveram um tratamento geral, que englobaria as equações não-lineares de interesse, que eram solúveis pelo espalhamento inverso (inclusive a equação de Kortweg-deVries, como um limite singular). Este tratamento foi baseado no trabalho de Zakharov-Shabat⁽²²⁾, em 1972, sobre a equação de Schrödinger não-linear.

Embora o tratamento dado em⁽¹⁾ seja de grande elegância, e bastante abrangente, apresenta al-

guns problemas matemáticos. Destes, o mais sério, é o fato dos autores não demonstrarem a propriedade isopectral dos operadores lineares associados. Esta propriedade é assumida, tendo por consequência um conjunto de equações de consistência, que se mostram equivalentes à validade de uma certa classe de equações não-lineares. A maior dificuldade é que, os operadores formando o "par de Lax"⁽¹⁶⁾ dependem, na maior parte dos casos, do próprio auto-valor. Existem entretanto, alguns casos importantes^{(9), (12)}, onde se obtêm pares de Lax sem este problema, para os quais foi possível demonstrar a propriedade isopectral.

Por outro lado, as hipóteses feitas em⁽¹⁾, com relação às propriedades espectrais do operador linear associado, não haviam sido demonstradas. Em particular, a existência de apenas um número finito de auto-valores discretos, se constitui num ponto importante para a aplicação do método de espalhamento inverso. Estas propriedades puderam ser aqui demonstradas sob a hipótese de "potenciais" exponencialmente decrescentes.

Quanto à teoria de espalhamento inverso propriamente dita, muitos dos métodos utilizados em^{(4), (3)} puderam ser aplicados. A maior diferença reside no problema de existência e unicidade das soluções das equações de Marchenko. Este problema só pode ser resolvido aqui em alguns casos especiais, como o da equação de Schrödinger não-linear. No caso geral os resultados são incompletos.

No capítulo II, será feita uma descrição do método de espalhamento inverso, segundo as linhas de (1). No capítulo III será demonstrada a propriedade isoespectral para uma certa classe de operadores, e demonstrado que os casos da equação de Schrödinger não-linear⁽²²⁾ e a equação de sine-Gordon⁽⁵⁾ estão incluídos nesta classe.

Nos capítulos IV e V estará sendo tratada apenas a classe de equações para as quais valha a propriedade isoespectral e sob a hipótese de "potenciais" exponencialmente decrescentes. No capítulo IV serão demonstradas as propriedades espectrais assumidas em (1), sendo a mais importante, a finitude do espectro discreto do operador linear associado. No capítulo V, será tratado o espalhamento inverso propriamente dito, sendo o principal resultado, a existência e unicidade da solução da equação de Marchenko, numa certa região do espaço no caso geral, e globalmente em certos casos particulares importantes, como o da equação de Schrödinger não-linear.

No capítulo VI serão apresentadas as conclusões deste trabalho. Nos apêndices estão enunciados alguns resultados bem conhecidos utilizados no texto, bem como demonstrados alguns resultados essencialmente técnicos.

CAPÍTULO IIO MÉTODO DE ESPALHAMENTO INVERSOII.1 - Introdução

O método de espalhamento inverso consiste na resolução de equações diferenciais parciais não lineares através de etapas lineares, podendo ser encarado como um análogo não linear da transformada de Fourier. É claro que um tal método, mesmo se aplicando apenas a uma classe bastante restrita de equações não lineares, consiste num grande avanço, do ponto de vista matemático. Tem sido observado, que este método, em geral, se aplica às equações da física que apresentam solução tipo soliton (soluções localizadas que assintoticamente não mudam sua forma e velocidade após colisões com outros solitons do mesmo tipo), o que acrescenta ao interesse matemático um grande interesse físico e inúmeras aplicações.

Esquematicamente, o método de espalhamento inverso pode ser descrito da seguinte maneira: considere uma equação de evolução não linear representada genericamente por:

$$\phi_v(u, v) = K(\phi(u, v)) , \quad (II-1)$$

onde K é um operador não linear e u e v são as variáveis do problema (geralmente tempo e uma dimensão espacial).

Suponha que associada a esta equação não linear está dada uma família $L(\phi(u,v))$ de operadores lineares, que define um problema de espalhamento $L\psi = \xi\psi$, para todo $v \geq 0$, num espaço conveniente.

Seja $\phi(u,0)$ a condição inicial de (II.1). A determinação da solução geral $\phi(u,v)$ será feita através das três etapas descritas abaixo:

i) Problema Direto

Para $v = 0$, o operador L é determinado, pois a condição inicial $\phi(u,0)$ é uma função dada. Pode-se portanto resolver o problema de espalhamento e calcular o comportamento assintótico ($u \rightarrow \pm\infty$) das autofunções ψ (designados por "dados de espalhamento"), bem como os auto-valores ξ . Note-se que poderão ocorrer "estados ligados", descritos pelo espectro discreto, e "estados de espalhamento", descritos pelo espectro contínuo. Os "estados ligados" estarão associados ao aparecimento de solitons, e os "estados de espalhamento" à soluções do tipo "radiação", que tenderão assintoticamente ($v \rightarrow \infty$) a zero.

ii) Evolução em v dos "dados de espalhamento"

A partir dos "dados de espalhamento" para $v=0$, e da equação de evolução (II-1), deve ser possível a determinação destes "dados de espalhamento" para todo $v \geq 0$. Para que isto seja possível, é evidente que é crucial a escolha da família L de operadores lineares. Conforme será visto na próxima secção, a propriedade essencial para a realização desta etapa é a propriedade iso-

espectral da família de operadores $L(\phi(u, \cdot))$, i.e., é necessário que o espectro seja o mesmo para todo $v \geq 0$.

iii) Problema do espalhamento inverso

Conhecidos os "dados de espalhamento" para todo $v \geq 0$, deve ser possível reconstruir o "potencial" $\phi(u, v)$, i.e., resolver o problema de espalhamento inverso. Novamente, a escolha do operador L é crucial, já que este problema só tem chance de ser resolvido para operadores L suficientemente simples.

Apresenta-se abaixo um diagrama representativo do método de espalhamento inverso:

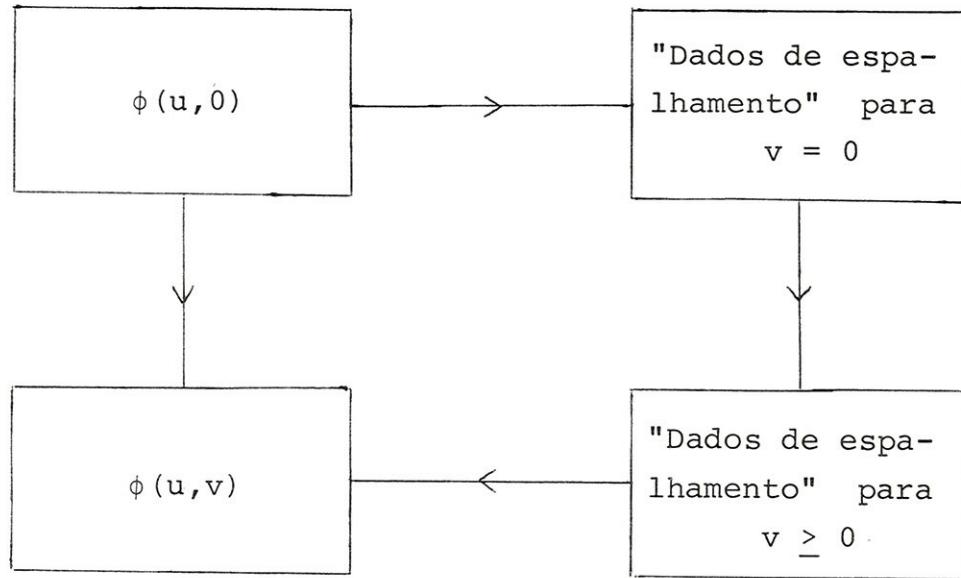


Fig. II.1 - Diagrama do Método de Espalhamento Inverso

Por esta descrição esquemática fica claro que a grande dificuldade do método é a escolha (e a existência) de operadores lineares associados que permitam

a implementação das etapas acima. De fato, não existe nenhum processo sistemático para tal associação, podendo-se verificar apenas "a posteriori" se certa família de operadores lineares é conveniente ou não para a resolução de um certo problema não linear.

II.2 - A propriedade isoespectral e o teorema de Lax

Seja $L(v)$, $v \geq 0$, uma família de operadores auto-adjuntos (agindo num espaço dado) que satisfaça a seguinte condição:

$$L(0) = U^{-1}(v) L(v) U(v), \quad (\text{II-2})$$

onde $U(v)$ é uma família de operadores unitários. Se estes operadores dependem diferencialmente de v , então a $U(v)$ está associada uma família de operadores antissimétricos $B(u)$ tal que:

$$U_v(v) = B(v) U(v) \quad (\text{II-3})$$

Nestas condições é imediato, que a condição (II-2) é equivalente a:

$$[B(v), L(v)] = L_v(v) \quad (\text{II-4})$$

Foi Lax⁽¹³⁾, quem colocou nesta forma estas observações com relação à equação de Kortyeg-de Vries, e o operador de Schrödinger, que era o operador linear as-

sociado, em⁽⁶⁾. Com esta formalização e com o teorema enunciado a seguir, Lax esclareceu a relação entre a propriedade isospectral da família $L(v)$ e a possibilidade do cálculo dos "dados de espalhamento", para $v > 0$

Teorema II.1 (Lax). Sob as hipóteses de (II-2), vale:

- i) Existe $B(v)$ antissimétrico tal que $[B, L] = L_v$
- ii) Os autovalores de $L(v)$ são independentes de v .
- iii) A evolução das autofunções de $L(v)$ é dada por

$$\psi_v = B(v) \psi \quad (\text{II-5})$$

Como no caso do método de espalhamento inverso, a família de operadores lineares é dada por $L(\phi(u, v))$; L_v dependerá da equação não linear dada e em geral, a família de operadores $B(v)$, dependerá também de $\phi(u, v)$. Nos casos tratados concretamente, o comportamento assintótico das soluções $\phi(u, v)$ da equação não linear ($u \rightarrow \pm \infty$) é dado, donde, usando a equação (II-5) é possível determinar os "dados de espalhamento", (i.e. $\psi(u, v)$, $u \rightarrow \pm \infty$). Um par B, L satisfazendo (II-4) é denominado na literatura como par de Lax.

III.3 - O método de Espalhamento Inverso para operadores lineares do tipo Zakharov-Shabat

Conforme já foi citado, o problema linear

associado, na resolução da equação de Kortveg - de Vries era o operador de Schrödinger, para o qual era conhecido que, com hipóteses suficientes sobre o "potencial", era possível resolver o problema inverso, ou seja, a etapa III. Em (22), Zakharov e Shabat, trataram a equação de Schrödinger não linear:

$$i \frac{\delta u}{\delta t} + \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + K |u|^2 u = 0 \quad (\text{II-6})$$

através do método de espalhamento inverso, utilizando como operador linear associado:

$$L(t) = i \begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-7})$$

onde u^* é o complexo conjugado de u e p é definido por:

$$K = \frac{2}{1-p^2} \quad (\text{II-8})$$

e puderam achar uma família $B(t)$ de operadores, que juntamente com $L(t)$ formam um par de Lax. Entretanto, como $L(t)$ não é auto-adjunto, o teorema de Lax não se aplica, Zakharov e Shabat, assumiram que o espectro de $L(t)$ era independente de t , e conseguiram, para este operador linear realizar a etapa III.

Inspirados neste trabalho, Ablowitz, Kaup, Newell e Segur⁽¹⁾, consideraram os operadores lineares

da seguinte forma

$$L(x, t) = i \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -q_t(x, t) \\ q_-(x, t) & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (\text{II-9})$$

denominados na literatura, operadores tipo Zakharov-Shabat, e procuraram então, equações não lineares que poderiam ser resolvidas utilizando este operador linear.

Descreveremos abaixo o procedimento lá utilizado.

Para cada $t \geq 0$ fixado, considere o problema de auto-valores

$$L(x, t) \psi(x, t) = \xi(t) \psi(x, t) \quad (\text{II-10})$$

e suponha que o operador de evolução das autofunções $\psi(x, t)$ é dado por:

$$M(x, t, \xi) = \begin{pmatrix} A(x, t, \xi) & B(x, t, \xi) \\ C(x, t, \xi) & D(x, t, \xi) \end{pmatrix} \quad (\text{II-11})$$

isto é,

$$\psi_t(x, t, \xi) = M(x, t, \xi) \psi(x, t, \xi) \quad (\text{II-12})$$

Suponha que o espectro de $L(x, t)$ seja independente de t . Diferenciando-se (II-10) em relação a

t e (II-11) em relação a x, obtém-se o seguinte sistema de equações não lineares:

$$D = -A + d(t) \quad (\text{II-12-a})$$

$$A_x = q_+ C - q_- B \quad (\text{II-12-b})$$

$$B_x + 2i\xi B = q_{+t} - 2Aq \quad (\text{II-12-c})$$

$$C_x - 2i\xi C = q_{-t} + 2Ar \quad (\text{II-12-d})$$

onde, sem perda de generalidade, pode-se assumir $d(t) = 0$.

Uma observação importante é que o sistema (III-12) é equivalente à:

$$[L(x,t), M(x,t,\xi)] \psi(x,t,\xi) = L_t(x,t) \psi(x,t,\xi) \quad (\text{II-13})$$

O trabalho de Ablowitz, Kaup, Newell e Segur se baseiam na seguinte suposição: se q_+ e q_- são soluções de um problema não linear dado, e as funções A, B, C, D são tais que as equações (II-12) (ou, equivalentemente, (II-13)) são satisfeitas, então o espectro de $L(x,t)$ é independente de t. É claro que a condição (II-13) é necessária para que seja válida a propriedade isoespectral de $L(x,t)$, mas de forma alguma é claro que seja suficiente.

Aceita esta hipótese, suponha que são dadas as condições iniciais $q_+(x, 0)$ e $q_-(x, 0)$ e condições de contorno $q_{\pm}(x, t) \rightarrow 0$ para $|x| \rightarrow \infty$. Sejam $\phi, \bar{\phi}, \psi$ e $\bar{\psi}$ autofunções de (II-10) (para ξ real) satisfazendo as seguintes condições de contorno:

$$\phi \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{II-14-a})$$

$$\bar{\phi} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \quad x \rightarrow -\infty \quad (\text{II-14-b})$$

$$\psi \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \quad x \rightarrow +\infty \quad (\text{II-14-c})$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \quad x \rightarrow +\infty \quad (\text{II-14-d})$$

e sejam $a(\xi, t)$, $b(\xi, t)$, $\bar{a}(\xi, t)$, $\bar{b}(\xi, t)$ definidas por (ξ real):

$$\phi = a\bar{\psi} + b\psi \rightarrow \begin{pmatrix} a e^{-i\xi x} \\ b e^{i\xi x} \end{pmatrix} \quad \text{para } x \rightarrow +\infty \quad (\text{II-15-a})$$

$$\bar{\phi} = \bar{b}\bar{\psi} - \bar{a}\psi \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{b} e^{-i\xi x} \\ -\bar{a} e^{i\xi x} \end{pmatrix} \quad \text{para } x \rightarrow -\infty \quad (\text{II-15-b})$$

Suponha que as condições iniciais e de con-

torno sobre os potenciais q_+ e q_- , impliquem que ^(*):

$$A(x, t, \xi) \rightarrow A_0(\xi) \quad \text{para } |x| \rightarrow \infty \quad (\text{II-16-a})$$

$$B(x, t, \xi) \rightarrow 0 \quad \text{para } |x| \rightarrow \infty \quad (\text{II-16-b})$$

$$C(x, t, \xi) \rightarrow 0 \quad \text{para } |x| \rightarrow \infty \quad (\text{II-16-c})$$

Neste caso, sob as hipóteses já feitas, é fácil mostrar que:

$$a(\xi, t) = a(\xi, 0) \quad (\text{II-17-a})$$

$$b(\xi, t) = b(\xi, 0) e^{-2A_0(\xi)t} \quad (\text{II-17-b})$$

$$\bar{a}(\xi, t) = \bar{a}(\xi, 0) \quad (\text{II-17-c})$$

$$b(\xi, t) = b(\xi, 0) e^{2A_0(\xi)t} \quad (\text{II-17-d})$$

Sob estas hipóteses é possível mostrar que ϕ, ψ, a podem ser analiticamente estendidas para $I_m \xi > 0$, enquanto que as funções $\bar{\phi}, \bar{\psi}$ e \bar{a} , podem ser analiticamente estendidas para $I_m \xi < 0$. Suponha que o espectro

(*) Casos mais gerais podem ser incluídos, entretanto para que a exposição do método fique mais simples, nos restringiremos a este caso, que é o que aparece na maior parte dos problemas, e em particular, nos que podem ser tratados rigorosamente com os métodos dos capítulos seguintes.

discreto de L no semiplano superior (respectivamente, inferior) corresponda aos zeros de $a(\xi, t)$ (respectivamente $\bar{a}(\xi, t)$) e que estes sejam simples, e em número finito. Assim, é possível demonstrar⁽¹⁾ que as soluções procuradas $q_+(x, t)$, $q_-(x, t)$ são obtidas através da resolução de equações de Marchenko, cujos núcleos dependem apenas dos "dados de espalhamento" $a(\xi, t)$, $b(\xi, t)$, $\bar{a}(\xi, t)$ e $\bar{b}(\xi, t)$, o que completaria a etapa III, do método de espalhamento inverso.

Não serão aqui apresentadas em detalhes estas demonstrações, pois estas serão feitas nos capítulos seguintes, sendo que neste capítulo pretende-se apenas dar uma idéia geral do funcionamento do método, e das hipóteses não demonstradas em (1).

CAPÍTULO III

PROPRIEDADES ISOESPECTRAIS DE UMA FAMÍLIA DE
OPERADORES NÃO AUTO-ADJUNTOS

III.1- Introdução

Conforme foi visto no capítulo II, a aplicabilidade do método de espalhamento inverso a uma dada equação não-linear, depende crucialmente da existência de um par de Lax associado, que é o que permite a determinação da evolução temporal das autofunções do operador linear.

Se a família de operadores lineares $L(t)$ é auto-adjunta, e se existe uma família de operadores $M(t)$ anti-auto-adjunto tal que $-\frac{\partial L(t)}{\partial t} = [M(t), L(t)]$, então o espectro do operador $L(t)$ é independente de $t^{(13)}$. Entretanto, em muitos dos problemas tratados pelo método de espalhamento inverso e suas generalizações^{(1), (5), (22)}, a situação que se apresenta é mais geral. No caso de Ablowitz et al.⁽¹⁾, a propriedade isopectral de $L(t)$ é assumida, e a existência de um par de Lax é substituída por equações de consistência. A família de operadores M depende em geral do espectro de L , o que torna impossível uma demonstração da propriedade isopectral de L , seguindo a linha de Lax. Por outro lado, para algumas equações importantes, como a equação de sine-Gordon, e a equação de Schrödinger não-linear, é possível encontrar-se um par de Lax, onde a família de operadores $L(t)$ não

é auto-adjunta.

Neste capítulo, será demonstrado um teorema que permite garantir a propriedade isoespectral de $L(t)$, quando esta família não é auto-adjunta, que será aplicado aos casos da equação de sine-Gordon e da equação de Schrödinger não linear.

III.2- Um teorema Isoespectral

O objetivo desta secção é apresentar condições sob as quais o espectro discreto de uma família de operadores $L(t)$ é invariante. Considerou-se apenas o espectro discreto porque nas aplicações relevantes é este o fato necessário (Ver Apêndice D).

Seja X um espaço de Banach, fixado, onde agirão os operadores. Dado um operador A , $D(A) \subset X$ denotará seu domínio e $\sigma_d(A)$ seu espectro discreto.

Sejam $L(t)$ e $M(t)$ duas famílias de operadores lineares satisfazendo,

$$L(t) = L_1 + L_2(t) \quad (\text{III-1})$$

$$M(t) = M_1 + M_2(t) \quad (\text{III-2})$$

onde L_1 é auto-adjunto em $D(L_1)$, M_1 é anti-auto-adjunto em $D(M_1)$ e $L_2(t)$ e $M_2(t)$ são, para cada $t \in \mathbb{R}$, limitados em X .

Estas condições significam tomar "pequenas perturbações" de famílias de operadores auto-adjuntos e anti-auto-adjuntos (que é o problema bem conhecido).

Para que se possa definir o significado preciso de $L(t)$ e $M(t)$ formarem um par de Lax, são necessárias condições sob seus domínios:

$$D(M_1 L_1) \supseteq D(M_1^2) \cap D(M_1) \quad (\text{III-3})$$

$$D(M_1) \subseteq D(L_1)^{\dagger} \quad (\text{III-4})$$

Define-se que $\{L(t), M(t)\}$ formam um par de Lax, se para todo $v \in D(M_1^2) \cap D(M_1)$, tem-se que:

$$\frac{dL(t)}{dt} v = [M(t), L(t)]v \quad (\text{III-5})$$

onde $[,]$ indica o comutador de dois operadores.

Serão enunciados a seguir algumas hipóteses técnicas cuja necessidade será tornada clara na demonstração do teorema.

Seja $B(X)$ o conjunto dos operadores limitados em X . Uma família de operadores $\{A(t) \in B(X), t \in \mathbb{R}\}$ é dita lisa se é continuamente fortemente diferenciável

* A condição III-4 é mais forte do que o necessário para que se prove o que segue. Bastaria impor que $D(L_1 M_1) \supset D(M_1^2) \cap D(M_1)$. No entanto a condição III-4 é satisfeita nas aplicações, e será adotada para simplificar as demonstrações.

vel para todo $t \in \mathbb{R}$ e se a norma de $A(t)$ é uniformemente limitada em t , para t em compactos de \mathbb{R} .

Sejam:

$$F(t) \equiv [L_1, M_2(t)](M_1 + \xi)^{-1} \quad (\text{III-6-a})$$

$$G(t) \equiv [M_1, L_2(t)](M_1 + \xi)^{-1}, \quad (\text{III-6-b})$$

$$H(t) \equiv [M_1, M_2(t)](M + \xi)^{-1} \quad (\text{III-6-c})$$

onde $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$ é fixado.

É necessário que as seguintes condições sejam impostas:

$$\{L_2(t)\} \text{ é lisa,} \quad (\text{III-7})$$

$$\{M_2(t)\} \text{ é lisa,} \quad (\text{III-8})$$

$$\{F(t)\} \text{ é lisa,} \quad (\text{III-9})$$

$$\{G(t)\} \text{ é lisa,} \quad (\text{III-10})$$

$$\{H(t)\} \text{ é lisa,} \quad (\text{III-11})$$

Teorema III-1 - Sejam $L(t)$ e $M(t)$ duas famílias de operadores satisfazendo as hipóteses (III-1) a (III-5) e (III-7) a (III-11). Suponha-se ainda que

os auto-valores de $L(t)$ sejam simples^(*), Se para todo auto-vetor u_0 de $L(0)$, correspondente a um auto-valor $\xi_0 \in \sigma_d(L(0))$, tem-se que

$$u_0 \in D(M_1^2) \cap D(M_1), \quad (\text{III-12})$$

então

$$\sigma_d(L(t)) = \sigma_d(L(0)), \quad (\text{III-13})$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Nesta demonstração será necessário usar alguns resultados técnicos, parte dos quais enunciados no apêndice A, e outros demonstrados no apêndice B. Estes resultados consistem de um teorema de existência e unicidade de solução e de equação diferenciais, e de um lema e uma proposição que tornam licitas as derivações no tempo que sejam necessárias.

Para que seja possível a aplicação do teorema A-1 do apêndice A, t deve variar num intervalo limitado. Seja, pois, dado $t_0 \in \mathbb{R}$, qualquer. Seja $T > t_0$ fixado e $I = (-T, T)$. Seja $\xi \in \mathbb{R}$, tal que $-M(t) + \xi$ satisfa

(*) Nos exemplos de interesse foi provado (Cap. IV - Seção II) que o espectro dos operadores $L(t)$ envolvidos, é simples.

ça à hipótese a) do teorema A-1, para todo $t \in I$. (isto é, $-M(t)+\xi$ é o gerador infinitesimal de um subgrupo contrativo sobre X , $\forall t \in I$, com $0 \in \rho(A(t))$). Tal constante existe já que, por (III-8), a norma de $M_2(t)$ é uniformemente limitada em t , para t em subconjuntos limitados de R .

Além disso, pela hipótese III-8, $(-M(t)+\xi)$ satisfaz as hipóteses b) e c) do teorema A-1, donde, o problema de valor inicial:

$$\frac{dg(t)}{dt} = M(t)g(t), \quad g(0) = g_0 \in D(M) = D(M_1) \quad (\text{III-14})$$

tem solução única para todo $t \in I$, com $g(t) \in D(M)$, continuamente diferenciável.

Dado $u_0 \in D(M_1) \cap D(M_1^2)$, autovetor de $L(0)$, correspondente ao autovalor ξ_0 , seja $u_0(t)$, $t \in I$, a única solução de (III-14), com $u_0(0) = u_0$. É imediato que $u_0(t) \in D(M_1) \cap D(M_1^2)$, pois o teorema A-1 continua válido, restringindo-se o domínio do operador a $D(M_1) \cap D(M_1^2)$.

Seja f definida por

$$f(t) = L(t)u_0(t) - \xi_0 u_0(t). \quad (\text{III-15})$$

$f(t) \in D(M_1)$, por (III-3).

Pela proposição B-1 do apêndice B, $L_1 u_0(t)$ é continuamente diferenciável em todo $t \in I$. Fazendo $B = L_1 + i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, tem-se que B é definido em

$D(L_1)$, inversível com inversa limitada e $B u_0(t)$ é continuamente diferenciável. Por (III-4) e por (III-12) $B u'_0(t)$ está definida e é contínua, pela proposição 1-B. Como além disso, $L(t)$ é fortemente continuamente diferenciável por (III-7), tem-se, pelo lema A.1, do apêndice A, que $f(t)$ é continuamente diferenciável e

$$\frac{df}{dt} = \frac{dL(t)}{dt} u_0(t) + L(t) \frac{du_0(t)}{dt} - \xi_0 \frac{du_0(t)}{dt}, \quad (\text{III-16})$$

donde, por (III-5) e pela definição de $u_0(t)$,

$$\frac{df}{dt}(t) = M(t)f(t), \quad (\text{III-17-a})$$

$$f(0) = 0 \quad (\text{III-17-b})$$

para todo $t \in I$.

Pela unicidade da solução de (III-14), tem-se que

$$f(t) = 0, \quad \forall t \in I \quad (\text{III-18})$$

ou seja, $\xi_0 \in \sigma_d(L(t))$, $\forall t \in I$, donde

$$\sigma_d(L(0)) \subset \sigma_d(L(t_0)) \quad (\text{III-19})$$

Repetindo o argumento, tomando agora como condição inicial $t = t_0$, tem-se que $\sigma_d(L(t_0)) \subset \sigma_d(L(0))$. Como t_0 era arbitrário fica demonstrado o teorema.

Cabe ressaltar que as hipóteses (III-3), (III-4), (III-7) a (III-10) garantem que:

$$[M(t), L(t)] v = [M_1, L_1] v + [M_2(t), L_1] v + [M_1, L_2(t)] v + \\ + [M_2(t), L_2(t)] v \quad (\text{III-20})$$

está bem definido para todo $v \in D(M_1) \cap D(M_1^2)$.

III.3- A propriedade isoespectral da equação de sine-Gordon.

Considere-se as soluções $u(x, t)$ da equação de sine-Gordon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0, \quad -\infty < x, t < \infty, \quad (\text{III-21})$$

globais, reais, infinitamente diferenciáveis⁽¹⁶⁾, com condições iniciais:

$$u(x, 0) = f(x) \in C^\infty, \quad |f(x)| \leq C e^{-\varepsilon|x|} \quad (\text{III-22-a})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \in C^\infty, \quad |g(x)| \leq C e^{-\varepsilon|x|} \quad (\text{III-22-b})$$

e com condição adicional

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| < \infty, \text{ para cada } t \\ (\text{III-22-c})$$

A existência de soluções com esta última condição não está demonstrada. Entretanto, para condições iniciais $f, g \in C_0^\infty$, o espaço de Schwartz de funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto, é conhecida⁽¹⁶⁾ a existência de soluções de (III-21) que satisfazem (III-23-c) (de fato, $u(x,t) \in C^\infty$, para cada $t \geq 0$). Estas soluções correspondem ao estudo do setor de vácuo (zero sólitons) da equação de sine-Gordon. Acredita-se que a análise, feita em (16) possa ser estendida para mostrar a existência de soluções satisfazendo (III-22), entretanto os detalhes técnicos não foram feitos.

Foi mostrado⁽⁵⁾ que este problema pode ser tratado pelo método de espalhamento inverso, utilizando-se o par de Lax $\{L, M\}$ dado por:

$$L_1 = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (\text{III-23-a})$$

$$L_2(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ B(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{III-23-b})$$

$$L(t) = L_1 + L_2(t) \quad (\text{III-23-c})$$

e

$$M_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (\text{III-24-a})$$

$$M_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & C(t) \\ D(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{III-24-b})$$

$$M(t) = M_1 + M_2(t) \quad (\text{III-24-c})$$

onde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{III-25})$$

$$A(t) = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} 0 & w(x, t) \\ w(x, t) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III-26})$$

$$B(t) = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \exp(i u(x, t)/2) & 0 \\ 0 & \exp(-i u(x, t)/2) \end{pmatrix} \quad (\text{III-27})$$

$$C(t) = -2J B(t) \quad (\text{III-28})$$

$$D(t) = 2B(t)J \quad (\text{III-29})$$

$$w(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \quad (\text{III-30})$$

sendo $u(x, t)$ a solução de (III-21) satisfazendo (III-22) (quando esta existir).

A escolha natural para o espaço de Banach sobre os quais agem os operadores, é dada por:

$$X = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^4 \quad (\text{III-31})$$

Proposição III.2- Com a formulação acima, $\sigma_d(L(t)) = \sigma_d(L(0))$

Demonstração:

É imediato que os domínios dos operadores envolvidos são dados por:

$$D(L_1) = D(M_1) = D(L(t)) = D(M(t)) =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in X \text{ tais que } v_i \in L^2(\mathbb{R}), v_i \text{ absolutamente contínua, e } \frac{\partial v_i}{\partial x} \in L^2(\mathbb{R}), \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 \right\},$$

(III-32)

As hipóteses (III-1) e (III-2) são verificadas pela definições dos operadores $L(t)$ e $M(t)$. As hipóteses (III-3) e (III-4) são verificadas por (III-32). A hipótese (III-5) é verificada trivialmente, aplicando as definições dos operadores. O fato dos auto-valores de $L(t)$ serem simples, tem demonstração análoga à do lema IV.2, do capítulo IV.

Para mostrar a hipótese (III-12), basta notar que se $L(0)u_0 = \xi_0 u_0$, então $u_0' \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\frac{\partial^n u_0}{\partial x^n} \in L^2(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, já que $u_0 \in D(L(0)^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por (III-24-a), é imediato que $u_0 \in D(M_1^2)$.

Para a demonstração de (III-11), vê-se que:

$$[M_1, M_2(t)] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial C}{\partial x} \\ -\frac{\partial D}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2C \\ -2D & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{III-33})$$

onde

$$\| [M_1, M_2(t)] \phi \| \leq c(t) \| \phi \| + d(t) \| (M_1 + \xi) \phi \| \quad (\text{III-34})$$

onde $c(t)$ e $d(t)$ são constantes dependentes das normas L^∞ das funções $e^{\pm iu(x,t)}$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)e^{\pm iu(x,t)}$, ou seja, $[M_1, M_2(t)]$ é $(M_1 + \xi)$ -limitada (ver apêndice C). No apêndice C, é demonstrado que esta propriedade, bem como as propriedades de diferenciabilidade e limitação de $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ implicam que $H(t)$ é liso. A verificação das hipóteses (III-7) a (III-10) é análoga.

III.4- A propriedade isoespectral da Equação de Schrödinger não linear

Seja $u(x,t)$ uma solução infinitamente diferenciável global da equação de Schrödinger não-linear:

$$i \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \kappa |u|^2 u = 0, \quad \kappa > 2, \quad (\text{III-35})$$

com condição inicial

$$u(x,0) = u_0(x) \in C^\infty, \quad (\text{III-36-a})$$

e condição adicional.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| + |u(x, t)| \right) < \infty, \quad \text{para cada } t \quad (\text{III-36-b})$$

Como no caso da equação de sine-Gordon, a existência de soluções de (III-35) satisfazendo (III-36) é um problema aberto. Entretanto, foi mostrado^{(7), (20)}, que para $u_0(x) \in C_0^\infty$, a equação (III-35) tem solução, e esta satisfaz (III-36-b).

Foi mostrado por Zakharov-Shabat⁽²²⁾ que este problema pode ser tratado pelo método do espalhamento inverso, utilizando-se como par de Lax $\{L, M\}$, os operadores definidos por:

$$L_1 = i \begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{III-37-a})$$

$$L_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & u^*(x, t) \\ u(x, t) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III-37-b})$$

$$L(t) = L_1 + L_2(t) \quad (\text{III-37-c})$$

e

$$M_1 = ip \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (\text{III-38-a})$$

$$M_2(t) = -i \begin{pmatrix} u^*(x, t)u(x, t)/1+p & i\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \\ -i\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) & -u^*(x, t)u(x, t)/1-p \end{pmatrix}$$

$$(\text{III-38-b})$$

$$M(t) = M_1 + M_2(t) \quad (\text{III-38c})$$

onde p é definido por:

$$\kappa = \frac{2}{1-p^2}, \quad p > 0, \quad (\text{III-39})$$

$u(x,t)$ é a solução (III-36) e $u^*(x,t)$ é seu complexo conjugado.

O espaço de Banach natural para estes operadores agirem, é dado por:

$$X = L^2(\mathbb{R}) \otimes C^2$$

É imediato que:

$$D(L(t)) = D(L_1) = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in X \text{ tais que } v_i \text{ é absolutamente contínua e } v'_i \in L^2(\mathbb{R}), i = 1, 2 \right\} \quad (\text{III-40})$$

$$D(M(t)) = D(M_1) = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in X \text{ tais que } v_i, v'_i \text{ são absolutamente contínuas e } v''_i \in L^2(\mathbb{R}), i = 1, 2 \right\} \quad (\text{III-41})$$

Proposição III-2- Com a formulação acima, $\sigma_d(L(t)) = \sigma_d(L(0))$

Demonstração:

As hipóteses (III-1), (III-2), (III-4) e (III-5) são trivialmente verificadas. Para a verifica-

ção da hipótese (III-3) basta notar que:

$$D(M_1 L_1) = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in X \text{ tais que } v_i \in v'_i \text{ e } v''_i \text{ são absolutamente contínuas e } v'''_i \in L^2(\mathbb{R}), i = 1, 2 \right\}. \quad (\text{III-42})$$

O fato dos auto-valores de $L(t)$ serem simples, está provado no Capítulo IV, lema IV-2. Se u_0 é um autovetor de $L(0)$, então $u_0 \in D(L^n(0))$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $u_0 \in D(M_1) \cap D(M_1^2) = D(M_1^2)$.

As hipóteses (III-7) a (III-11) tem verificação análoga à da demonstração da proposição III-1.

CAPÍTULO IV

PROPRIEDADES ESPECTRAIS DE UMA FAMÍLIA DE
OPERADORES DO TIPO ZAKHAROV-SHABAT

IV-1 - Introdução

Neste capítulo serão demonstradas algumas propriedades espectrais dos operadores do tipo Zakharov-Shabat, as quais foram assumidas em⁽¹⁾, e desempenham um papel importante na análise do método de espalhamento inverso, aplicado a operadores deste tipo.

Em particular, será demonstrado, sob a hipótese de decaimento exponencial dos "potenciais" q_{\pm} , que o espectro discreto do operador L é finito. O aparecimento de uma condição deste tipo não é surpreendente, já que foi demonstrado em (15) que a condição $\sup_{0 \leq x < \infty} |p(x)| \exp(\varepsilon \sqrt{x}) < \infty$, $\varepsilon > 0$, é necessária para que o número de autovalores discretos do operador $L_y \equiv -\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)y$ em $L^2(0, \infty)$, com condição inicial $y(0) = 0$, seja finito.

Não foi, entretanto, possível demonstrar a ausência de zeros múltiplos de $a(\cdot)$ (definido em II.15), em contraste com o caso de operadores auto-adjuntos⁽³⁾, nem a ausência de zeros reais.

A hipótese de potenciais exponencialmente decrescentes para todo $t \geq 0$ parece natural, já que os sólitons apresentam estas propriedades, e o mesmo se espera para a parte da solução correspondente à "radiação".

Por outro lado, nos casos dos "kink" que aparecem na equação de sine-Gordon, o "potencial" correspondente é a derivada deste "kink", que tem o comportamento exponencialmente decrescente.

Será suposto neste capítulo, que os operadores tratados tenham a propriedade isoespectral, ou seja, que satisfaçam as hipóteses do teorema III-1 (note que esta proposição se refere apenas ao espectro discreto do operador).

IV.2 - Existência das "funções de Jost" e definição dos "dados de espalhamento"

Consideraremos operadores do tipo Zakharov-Shabat, dados por:

$$L(t) = i \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -q_+(x, t) \\ q_-(x, t) & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (\text{IV-1})$$

agindo em

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dx) \oplus L^2(\mathbb{R}, dx) \quad (\text{IV-2})$$

Os "potenciais" $q_{\pm}(x, t)$ são expressos, de forma simples, como função da solução de uma dada equação não linear, e serão supostas dadas as condições iniciais:

$$q_{\pm}(x, 0) = q_{\pm 0}(x) \quad (\text{IV-3-a})$$

Além disto, estarão sendo consideradas apenas soluções diferenciáveis da equação não linear, com condições de contorno tais que reflitam nos potenciais $q_{\pm}(x, t)$ as propriedades:

$$|q_{\pm}(x, t)| \leq C \exp(-\varepsilon|x|), \quad (\text{IV-3-b})$$

para cada $t \geq 0$ fixo, e para alguma constante $C=C(t) \geq 0$ e $\varepsilon = \varepsilon(t) \geq 0$, e

$$q(x, t) \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \quad (\text{IV-4})$$

O operador $L(t)$ pode ser decomposto em:

$$L(t) = L_0 + A(t) \quad (\text{IV-5})$$

onde

$$L_0 = i \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV-6-a})$$

$$L(t) = i \begin{pmatrix} 0 & -q_+(x, t) \\ q_-(x, t) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV-6-b})$$

O domínio de L_0 é dado por:

$$D(L_0) = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H} / u_i \text{ é absolutamente contínua e} \right.$$

$$u_i' \in L^2(\mathbb{R}, dx), i = 1, 2 \} , \quad (\text{IV-6-c})$$

Pelo teorema III-1, que está sendo suposto aplicável neste caso, garante-se que o espectro discreto de $L(t)$ é invariante. No apêndice D, está apresentada uma análise que garante a invariância do espectro essencial de $L(t)$. Entretanto, não foi possível demonstrar a invariancia do espectro total de $L(t)$, já que em princípio, poderia existir um espectro residual, embora para operadores deste tipo isto não seja esperado. Como para a aplicação do método de espalhamento inverso, é necessária apenas a invariança do espectro discreto, a presença de espectro residual (não necessariamente invariante) não prejudica a análise aqui feita.

Seja O_ε a seguinte região aberta do plano complexo:

$$O_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{C} / |\operatorname{Im}\xi| < \varepsilon/4\} \quad (\text{IV-7})$$

Considerando a equação de autovalores

$$Lv = \xi v \quad (\text{IV-8})$$

e aplicando a transformação

$$v = \begin{pmatrix} e^{-i\xi x} & 0 \\ 0 & e^{i\xi x} \end{pmatrix} u , \quad (\text{IV-9})$$

obtém-se a seguinte expressão equivalente à (IV-8):

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -e^{2i\xi x} q_+ \\ -e^{-2i\xi x} q_- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{IV-10})$$

Aplicando o teorema 2, do apêndice D à (IV-10), mostra-se a existência e unicidade das "funções de Jost", para todo $\xi \in O_\varepsilon$:

$$\phi : \begin{cases} \begin{pmatrix} a(\xi) e^{-i\xi x} \\ b(\xi) e^{i\xi x} \end{pmatrix}, & x \rightarrow +\infty \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} & x \rightarrow -\infty \end{cases}, \quad (\text{IV-11})$$

$$\psi : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+i\xi x} \quad \begin{pmatrix} -\bar{b}(\xi) & e^{-i\xi x} \\ a(\xi) & e^{i\xi x} \end{pmatrix} \quad (\text{IV-12})$$

$$\bar{\phi} : \begin{pmatrix} \bar{b}(\xi) e^{-i\xi x} \\ -\bar{a}(\xi) e^{i\xi x} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \quad (\text{IV-13})$$

$$\bar{\psi} : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x}, \quad \begin{pmatrix} -\bar{a}(\xi) & e^{-i\xi x} \\ -\bar{b}(\xi) & e^{i\xi x} \end{pmatrix} \quad (\text{IV-14})$$

Pelo teorema 2, Apêndice D, estas funções são continuamente diferenciáveis, e pela equação de autovalores (IV-8) são de fato, C^∞ .

As funções a , b , \bar{a} e \bar{b} são definidas pelos comportamentos assintóticos das funções de Jost.

Usando a equação (IV-8) é fácil verificar que se v e w são duas de suas soluções correspondentes ao mesmo ξ , então,

$$W(v, w) = v_1 w_2 - v_2 w_1 \quad (\text{IV-15})$$

é independente de x . Desta forma, as funções a, b, \bar{a} e \bar{b} podem ser expressas como:

$$a(\xi) = W(\phi, \psi) = \phi_1(x, \xi) \psi_2(x, \xi) - \phi_2(x, \xi) \psi_1(x, \xi), \quad (\text{IV-16-a})$$

$$b(\xi) = W(\bar{\psi}, \phi), \quad (\text{IV-16-b})$$

$$\bar{a}(\xi) = W(\bar{\phi}, \bar{\psi}), \quad (\text{IV-16-c})$$

$$\bar{b}(\xi) = W(\bar{\phi}, \psi), \quad (\text{IV-16-d})$$

sendo portanto independentes de x .

Pela parte da unicidade das soluções do teorema 2, apêndice D, tem-se que:

$$\phi(x, \xi) = a(\xi) \bar{\psi}(x, \xi) + b(\xi) \psi(x, \xi) \quad (\text{IV-17-a})$$

$$\bar{\phi}(x, \xi) = \bar{b}(\xi) \psi(x, \xi) - \bar{a}(\xi) \bar{\psi}(x, \xi) \quad (\text{IV-17-b})$$

Lema IV.1- Seja $\xi_0 \in \sigma_d(L)$. Então se $\operatorname{Im} \xi_0 \geq 0$,

$$a(\xi_0) = 0 \text{ e se } \operatorname{Im} \xi_0 \leq 0, \quad \bar{a}(\xi_0) = 0.$$

Demonstração: Suponha $\operatorname{Im} \xi_0 \geq 0$, e $Lv = \xi_0 v$, com $v \in D(L)$. Se $a(\xi_0) \neq 0$, tem-se que ϕ e ψ são linearmente independentes. Então

$$v = \alpha\phi + \beta\psi \quad (\text{IV-18})$$

com α, β independentes de x (aplicando-se o teorema 2, apêndice D, analogamente ao que foi feito na demonstração de IV-17).

Se $\alpha \neq 0$, então:

$$e^{i\xi_0 x} v(x, \xi_0) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \begin{pmatrix} \alpha a(\xi_0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV-19})$$

o que contradiz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sup |v_i(x, \xi_0)| = 0, \quad i = 1, 2, \quad (\text{IV-20})$$

que é uma condição necessária para que $v \in \mathcal{H}$,

Então $\alpha = 0$, e como $\psi \notin D(L)$, devemos ter $\beta = 0$, donde $v \equiv 0$ e ξ_0 não é autovalor. Isto prova que $a(\xi_0) = 0$. A demonstração da outra afirmação é análoga.

Lema IV.2- Os autovalores ξ_0 de L são simples.

Demonstração: Seja $\xi \in \sigma_d$ e sejam v e w autovetores de L correspondentes a ξ_0 . Conforme já foi visto, $W(v, w) = v_1 w_2 - v_2 w_1 = c$, constante. Como v e $w \in D(L) \subset \mathcal{H}$, tem-se que:



$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \sup \left\{ \begin{array}{l} |v_i(x)| \\ |w_i(x)| \end{array} \right\} = 0 \quad (\text{IV-21})$$

onde segue que a constante c acima deve ser nula, ou seja, existe $\lambda \in C$ tal que $v = \lambda w$.

IV-3 - Sobre a finitude do espectro discreto de L

Proposição IV-1- $\sigma_d(L) \cap O_\varepsilon$ é finito.

Demonstração: A equação (IV-8) satisfeita para ϕ e ψ são equivalentes respectivamente às equações integrais de Volterra:

$$\phi(\xi, x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} + \int_{-\infty}^x dy \begin{pmatrix} 0 & e^{i\xi(x-y)} q_+(y) \\ e^{i\xi(x-y)} q_-(y) & 0 \end{pmatrix} \phi(\xi, y) \quad (\text{IV-22-a})$$

$$\psi(\xi, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} - \int_x^\infty dy \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\xi(x-y)} q_+(y) \\ e^{i\xi(x-y)} q_-(y) & 0 \end{pmatrix} \psi(\xi, y) \quad (\text{IV-22-b})$$

para todo $\xi \in O_\varepsilon$.

Sejam $h(\xi, x)$ e $g(\xi, x)$ definidas por:

$$h(\xi, x) = e^{i\xi x} \phi(\xi, x) \quad (\text{IV-23-a})$$

$$g(\xi, x) = e^{-i\xi x} \psi(\xi, x) \quad (\text{IV-23-b})$$

Por (IV-16-a),

$$a(\xi) = h_1(\xi, x) g_2(\xi, x) - h_2(\xi, x) g_1(\xi, x) \quad (\text{IV-24})$$

De (IV-22) e (IV-23) obtém-se:

$$h(\xi, x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^x dy \begin{pmatrix} 0 & q_+(y) \\ e^{2i\xi(x-y)} q_-(y) & 0 \end{pmatrix} h(\xi, y) \quad (\text{IV-25-a})$$

$$g(\xi, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \int_x^\infty dy \begin{pmatrix} 0 & e^{-2i\xi(x-y)} q_+(y) \\ q_-(y) & 0 \end{pmatrix} g(\xi, y) \quad (\text{IV-25-b})$$

Seja h^n o n -ésimo termo da série de iteração da equação de Volterra. Então, por (IV-3a),

$$|h_i^{(n)}(\xi, x)| \leq \frac{C^n}{n!} \left(\frac{\varepsilon|x|}{2} \int_{-\infty}^x e^{-(\varepsilon - |2\operatorname{Im}\xi|)|y|} dy \right)^n,$$

$$i=1, 2 \quad (\text{IV-26})$$

e, de (IV-7),

$$\sup_{i=1, 2} |h_i^{(n)}(\xi, n) - h_i^{(m)}(\xi, x)| \leq \frac{C^m}{m!} \exp \left[(4 C'/\varepsilon) \exp \frac{\varepsilon|x|}{2} \right],$$

$$n \geq m \quad (\text{IV-27})$$

onde conclui-se que a série de iteração para cada componente de h converge uniformemente em ξ ($\xi \in O_\varepsilon$) para cada x , donde $h_i(\xi, x)$ é analítica em O_ε , para $i=1, 2$, para to-

do $x \in \mathbb{R}$. Analogamente, $g_i(\xi, x)$ é analítica em O_ε para $i=1, 2$ e para todo $x \in \mathbb{R}$.

De (IV-25-a) é fácil mostrar que a equação para h_1 é dada por

$$h_1(\xi, x) = 1 + \int_{-\infty}^x dy_1 \int_{-\infty}^{y_1} dy_2 q_+(y_1) q_-(y_2) e^{2i\xi(y_1 - y_2)} h_1(\xi, y_2) \quad (IV-28)$$

Pelo lema de Riemann-Lebesgue, pelo teorema da convergência dominada e por argumentos similares aos apresentados acima, obtém-se:

$$\lim_{|\operatorname{Re}\xi| \rightarrow \infty} h_1(\xi, x) = 1, \quad (IV-29-a)$$

e analogamente,

$$\lim_{|\operatorname{Re}\xi| \rightarrow \infty} g_2(\xi, x) = 1, \quad (IV-29-b)$$

$$\lim_{|\operatorname{Re}\xi| \rightarrow \infty} h_2(\xi, x) = 0, \quad (IV-29-c)$$

$$\lim_{|\operatorname{Re}\xi| \rightarrow \infty} g_1(\xi, x) = 0. \quad (IV-29-d)$$

Por (IV-24), tem-se:

$$\lim_{|\operatorname{Re}\xi| \rightarrow \infty} a(\xi) = 1 \quad (IV-30-a)$$

e analogamente,

$$\lim_{|\operatorname{Re}\xi| \rightarrow \infty} \bar{a}(\xi) = 1. \quad (IV-30-b)$$

Finalmente, do Lema IV-3, da analiticidade de a e \bar{a} em O_ε , (de fato, em \bar{O}_ε) e de (IV-30), tem-se a proposição IV-1.

Lema IV-3 - $h_i(\xi, x)$ e $g_i(\xi, x)$, $i=1, 2$, são analíticas na região $\text{Im}\xi > 0$. Além disto,

$$\sup_{\xi: \text{Im}\xi \geq 0} \sup_{x \in \mathbb{R}} |h_1(\xi, x)| < \infty \quad (\text{IV-31-a})$$

$$\sup_{\xi: \text{Im}\xi \geq 0} \sup_{x \in \mathbb{R}} |g_2(\xi, x)| < \infty \quad (\text{IV-31-b})$$

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} a(\xi) = 1, \quad \text{Im}\xi > -\varepsilon/4 \quad (\text{IV-31-c})$$

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \bar{a}(\xi) = 1, \quad \text{Im}\xi < \varepsilon/4 \quad (\text{IV-31-d})$$

Demonstração: Usando as equações (IV-25) é fácil mostrar⁽¹⁾ que a série iterada para h_i e g_i convergem uniformemente para x em compactos e $\text{Im}\xi \geq 0$, donde ϕ e ψ são soluções C^∞ de (IV-8), com as condições (IV-11) e (IV-12), para todo ξ com $\text{Im}\xi > -\varepsilon/4$, e dependem analiticamente de ξ . Além disto, as equações (IV-29) continuam satisfeitas.

Lema IV-4 - Se $\text{Im}\xi_0 > 0$ e $a(\xi_0) = 0$ então $\xi_0 \in \sigma_d(L)$.

Demonstração: Seja $a(\xi_0) = 0$, com $\text{Im}\xi_0 > 0$.

Então $\phi(\xi_0, x) = \alpha \psi(\xi_0, x)$ para algum $\alpha \neq 0$,

pois pelo Lema IV-3, estas funções estão bem definidas.

Então:

$$\psi(\xi_0, x) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi_0 x} \quad (\text{IV-32-a})$$

$$\phi(\xi_0, x) \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi_0 x} \quad (\text{IV-32-b})$$

As equações (IV-11), (IV-12), (IV-32-a) e (IV-32-b) implicam que:

$$\phi_1(\xi_0, x) = \alpha \psi_1(\xi_0, x) \in L^2((-\infty, 0], dx) \quad (\text{IV-33-a})$$

$$\psi_2(\xi_0, x) = 1/\alpha \quad \phi_2(\xi_0, x) \in L^2([0, \infty), dx) \quad (\text{IV-33-b})$$

Pelo lema IV-3, $g_1(\xi_0, x)$ e $h_2(\xi_0, x)$ são limitados, donde:

$$\psi_1(\xi_0, x) = e^{i\xi_0 x} \quad g_1(\xi_0, x) = 1/\alpha \quad \phi_1(\xi_0, x) \in L^2([0, \infty), dx), \quad (\text{IV-34-a})$$

$$\phi_2(\xi_0, x) = e^{-i\xi_0 x} \quad h_2(\xi_0, x) = \alpha \psi_2(\xi_0, x) \in L^2((-\infty, 0], dx), \quad (\text{IV-34-b})$$

onde ϕ e $\psi \in D(L)$ e portanto $\xi_0 \in \sigma_d(L)$

Analogamente ao lema IV-3 e ao lema IV-4

demonstram-se as seguintes proposições:

Lema IV-3' - As funções $\bar{\psi}(\xi, x)$ e $\bar{\phi}(\xi, x)$ são analíticas em $\xi \in C^\infty$, para $\operatorname{Im}\xi < \varepsilon/4$. Além disto são soluções de (IV-8) satisfazendo (IV-13) e (IV-14) respectivamente.

Lema IV-4' - Se $\operatorname{Im}\xi_0 < 0$ e $\bar{a}(\xi_0) = 0$ então $\xi_0 \in \sigma_d(L)$

Do Lema IV-3 e Lema IV-3' e da proposição IV-1, tem-se o seguinte corolário:

Proposição IV-2- A função $a(\xi)$ é analítica para $\operatorname{Im}\xi \geq 0$.

O conjunto dos zeros de $a(\xi)$ em $\operatorname{Im}\xi \geq 0$ é finito. A função $\bar{a}(\xi)$ é analítica para $\operatorname{Im}\xi \leq 0$. O conjunto dos zeros de $\bar{a}(\xi)$ em $\operatorname{Im}\xi \leq 0$ é finito.

Finalmente, do Lema IV-1, da proposição IV-2, e dos lemas IV-4 e IV-4', tem-se:

Proposição IV-3- O espectro discreto de $L(0)$ é finito.

Além disto, $\sigma_d(L(0)) \cap \{\xi / \operatorname{Im}\xi > 0\} = \{\xi / \operatorname{Im}\xi > 0 \text{ e } a(\xi) = 0\}$ e $\sigma_d(L(0)) \cap \{\xi / \operatorname{Im}\xi < 0\} = \{\xi / \operatorname{Im}\xi < 0 \text{ e } \bar{a}(\xi) = 0\}$.

Lema IV-5 - $\sigma_d(L(0)) \cap R = \emptyset$

Demonstração: Seja $\xi \in R$ e v solução de $Lv = \xi v$, com $v \in D(L)$. Então, como ψ e $\bar{\psi}$ são linearmente independentes, tem-se que $v = \alpha\psi + \beta\bar{\psi}$.

Mas então $v \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha e^{i\xi x} \\ \beta e^{-i\xi x} \end{pmatrix}$, o que, se $v \neq 0$, contradiz

$$v \in D(L) \quad . \quad \text{Logo } v = 0 \text{ e } \xi \notin \sigma_d(L(0)).$$

A proposição IV-3 e o Lema IV-5 caracterizam completamente o espectro de $L(0)$. Entretanto não é verdade que não existam, em geral, zeros reais de $a(\xi)$ e $\bar{a}(\xi)$. Estes não correspondem a autovalores de L , e podem ser interpretados como "ressonâncias" de L . O Lema IV-6 abaixo exemplifica este fato:

Lema IV-6 - O conjunto $\{\xi \in \mathbb{R} / a(\xi) = 0\}$ é finito, mas em geral, é não vazio.

Demonstração: O fato do conjunto acima ser finito segue da demonstração da proposição IV-1.

Seja $q_- = \alpha q_+$. Para $\xi = 0$ as séries para h e g podem ser somadas⁽¹⁾, fornecendo:

$$a(0) = \bar{a}(0) = \cosh(\sqrt{\alpha} p), \quad (\text{IV-35})$$

onde

$$p = \int_{-\infty}^{+\infty} q_+(x) dx \quad (\text{IV-36})$$

Obtem-se portanto zeros reais, sempre que:

$$\sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} q_+(x) dx = i (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad (\text{IV-37})$$

Do exemplo acima, vê-se que no caso ge-

ral, os zeros de a não são invariantes com o tempo, já que p não corresponde a nenhuma lei de conservação geral. Entretanto, embora esta invariancia não seja necessária na aplicação do espalhamento inverso, nos casos conhecidos ela é explicitamente verificada, já que, nestes casos, a dependência temporal de a com o tempo ou é do tipo exponencial, ou independente do tempo.

CAPÍTULO VA TEORIA DE ESPALHAMENTO INVERSOV.1 - Introdução

Neste capítulo será tratado o problema inverso para o operador do tipo Zakharov-Shabat, (IV-1), agindo no espaço (IV-2), onde os potenciais q_{\pm} satisfazem (IV-3), para cada t fixado. Este problema consiste de, conhecendo-se as funções a , \bar{a} , b e \bar{b} e suas propriedades, demonstradas no capítulo IV, encontrar os "potenciais" q_{\pm} , através da solução de equações do tipo Marchenko. Será mostrado que tais equações tem solução única, para $|x| \geq M$ para algum $M \in \mathbb{R}$. A existência e unicidade das soluções das equações de Marchenko para todo x , só pode ser obtida em exemplos concretos. A existência de soluções da equação não-linear, de forma que (IV-3) seja satisfeita também é um problema em aberto, tendo solução parcial para o caso da equação de sine Gordon⁽¹⁶⁾ e Schrödinger não linear^{(7), (20)}. Entretanto, foi aqui mostrado de forma rigorosa que nos casos em que tais soluções existam, estas são determinadas pelas soluções das equações de Marchenko.

V.2 - Relações integrais entre as funções de Jost

Sejam

$$m_{\phi}(\xi, x) \equiv \phi(\xi, x) e^{i\xi x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V-1-a})$$

$$m_{\psi}(\xi, x) \equiv \psi(\xi, x) e^{-i\xi x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{V-1-b})$$

$$m_{\bar{\phi}}(\xi, x) = \bar{\phi}(\xi, x) e^{-i\xi x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{V-1-c})$$

$$m_{\bar{\psi}}(\xi, x) = \bar{\psi}(\xi, x) e^{i\xi x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V-1-d})$$

Por (IV-28), e utilizando a analiticidade de h, para $\operatorname{Im}\xi \geq 0$, tem-se as seguintes estimativas:

$$h_1(\xi, x) \rightarrow 1 - \frac{1}{2i\xi} \int_{-\infty}^x q_+(x') q_-(x') dx' + 0\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \quad \operatorname{Im}\xi \geq 0,$$

$$|\xi| \rightarrow \infty \quad (\text{V-2-a})$$

$$h_2(\xi, x) \rightarrow -\frac{1}{2i\xi} q_-(x) + 0\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \quad \operatorname{Im}\xi \geq 0, \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (\text{V-2-b})$$

e, analogamente,

$$g_1(\xi, x) = \psi_1(\xi, x) e^{-i\xi x} \rightarrow \frac{1}{2i\xi} q_+(x) + 0\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im}\xi \geq 0 \quad (\text{V-3-a})$$

$$\begin{aligned} g_2(\xi, x) &= \psi_2(\xi, x) e^{-i\xi x} \rightarrow 1 - \frac{1}{2i\xi} \int_x^\infty q_-(y) q_+(y) dy + \\ &+ 0\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im}\xi \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{V-3-b})$$

$$\bar{h}_1(\xi, x) = \phi_1 e^{-i\xi x} \rightarrow -\frac{1}{2i\xi} q_+(x) + 0\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \quad \operatorname{Im}\xi \leq 0, \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (\text{V-3-c})$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_2(\xi, x) &= \bar{\phi}_2(\xi, x) e^{i\xi x} \rightarrow -1 - \frac{1}{2i\xi} \int_{-\infty}^x q_-(y) q_+(y) dy + 0\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \quad \operatorname{Im}\xi \leq 0, \\ &\quad |\xi| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (\text{V-3-d})$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_1(\xi, x) &= \bar{\psi}_1(\xi, x) e^{i\xi x} \rightarrow 1 + \frac{1}{2i\xi} \int_x^\infty q_-(y) q_+(y) dy + \\ &+ 0\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \quad \operatorname{Im}\xi \leq 0, \quad |\xi| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (\text{V-3-e})$$

$$\bar{g}_2(\xi, x) = \bar{\psi}_2(\xi, x) e^{i\xi x} \rightarrow -\frac{1}{2i\xi} q_-(x) + 0 \left(\frac{1}{\xi^2}\right), \operatorname{Im}\xi < 0, |\xi| \rightarrow \infty$$

(V-3-f)

Destas estimativas vem que:

Lema V-1 - m_ϕ e m_ψ estão no espaço de Hardy,

$$H^{2+} = \left\{ h \text{ analítica em } \operatorname{Im}\xi > 0 / \sup_{b>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(a+ib)|^2 da < \infty \right\}$$

e $m_{\bar{\phi}}$ e $m_{\bar{\psi}}$ estão no espaço de Hardy,

$$H^{2+} = \left\{ h \text{ analítica em } \operatorname{Im}\xi < 0 / \sup_{b>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(a-ib)|^2 da < \infty \right\}$$

Então, as seguintes representações integrais existem e são únicas:

$$m_\psi(\xi, x) = \int_0^\infty K(x, y) e^{2i\xi y} dy, \quad \operatorname{Im}\xi > 0 \quad (\text{V-4-a})$$

$$m_{\bar{\psi}}(\xi, x) = \int_0^\infty \bar{K}(x, y) e^{-2i\xi y} dy, \quad \operatorname{Im}\xi < 0 \quad (\text{V-4-b})$$

$$m_\phi(\xi, x) = - \int_{-\infty}^0 L(x, y) e^{-2i\xi y} dy, \quad \operatorname{Im}\xi > 0 \quad (\text{V-4-c})$$

$$m_{\bar{\phi}}(\xi, x) = - \int_0^\infty \bar{L}(x, y) e^{2i\xi y} dy, \quad \operatorname{Im}\xi < 0 \quad (\text{V-4-d})$$

Além disto, K, \bar{K}, L e \bar{L} são funções C^∞ com relação às variáveis x e y , e satisfazem:

$$|K(x, y)| \leq C \exp(-\varepsilon'(x+y)) \quad x, y \geq 0 \quad (\text{V-5-a})$$

$$|\bar{K}(x, y)| \leq c \exp(-\varepsilon^*(x+y)) \quad x, y \geq 0 \quad (\text{V-5-b})$$

$$|L(x, y)| \leq c \exp(\varepsilon^*(x+y)) \quad x, y \leq 0 \quad (\text{V-5-c})$$

$$|\bar{L}(x, y)| \leq c \exp(\varepsilon^*(x+y)) \quad x, y \leq 0 \quad (\text{V-5-d})$$

para algum $c > 0$ e $\varepsilon^* > 0$. Em particular, em (V-4), os valores limites para o eixo real (que existem no sentido L_2) podem ser tomados ponto a ponto. São satisfeitas ainda, as seguintes condições de contorno:

$$K_1(x, 0) = -q_+(x) = -L_1(x, 0) \quad (\text{V-6-a})$$

$$K_2(x, 0) = \int_x^\infty q_+(y) q_-(y) dy = \bar{K}_1(x, 0) \quad (\text{V-6-b})$$

$$L_1(x, 0) = -L_2(x, 0) = \int_{-\infty}^x q_+(y) q_-(y) dy \quad (\text{V-6-c})$$

$$L_2(x, 0) = K_2(x, 0) = q_-(x) \quad (\text{V-6-d})$$

Demonstração: A demonstração é idêntica as utilizadas para demonstrar resultados análogos em (3).

Por motivo de simplicidade, será suposto que \underline{a} tem N zeros simples ξ_j , com $\operatorname{Im}\xi_j > 0$, $1 \leq j \leq N$, e um único zero real, simples, ξ_0 , e que \bar{a} tem M zeros simples $\bar{\xi}_j$, com $\operatorname{Im}\bar{\xi}_j < 0$, $0 \leq j \leq M$ e um único zero real, $\bar{\xi}_0$. O caso de um número finito de zeros reais é idêntico, e o caso de zeros múltiplos implica mudanças óbvias

na análise que segue.

Seja:

$$f(\xi, \xi', x) = \frac{e^{i\xi'x} \phi(\xi', x) - a(\xi') \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{a(\xi') (\xi' - \xi)}, \quad (V-7)$$

definida para $\operatorname{Im}\xi < 0$, $\operatorname{Im}\xi' \geq 0$, e $\xi' \neq \xi_j$ $0 \leq j \leq N$.

Por (IV-17-a) e (V-1a), vem, para $\xi' \in O_\varepsilon$,

$$f(\xi, \xi', x) = \frac{\bar{\psi}(\xi', x)}{(\xi' - \xi)} - \frac{b(\xi')}{a(\xi')} \psi(\xi', x) e^{i\xi'x} \quad (V-8)$$

Por (IV-2) e (IV-3), para $\operatorname{Im}\xi \geq 0$, $|\xi| \rightarrow \infty$, tem-se que:

$$a(\xi) \rightarrow 1 - \frac{1}{2i\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} q_-(y) q_+(y) dy + o\left(\frac{1}{\xi^2}\right) \quad (V-9-a)$$

$$e^{i\xi x} \phi(\xi, x) - a(\xi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2i\xi} \left(\int_x^\infty q_+(y) q_-(y) dy \right) + o\left(\frac{1}{\xi^2}\right) \quad (V-9-b)$$

$$b(\xi) \rightarrow 0 \quad \left(\frac{1}{\xi^2}\right) \quad (V-9-c)$$

Seja $R > \max_{0 \leq j \leq N} |\xi_j|$, seja Γ_R o contorno:

$\Gamma_R = [-R, \xi_0 - \varepsilon] \cup [\xi_0 + \varepsilon, R] \cup \gamma_R$, com $\gamma_R = \{Re^{i\theta}, 0 < \theta < \pi\}$ no plano complexo. Então, pelo teorema de Cauchy, e por (V-8), vem:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_R} f(\xi, \xi', x) d\xi' = 2\pi i \sum_{j=0}^N \delta_j \frac{e^{i\xi_j x} \phi(\xi_j, x)}{a'(\xi_j) (\xi_j - \xi)} \quad (V-10)$$

onde,

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j > 0 \\ 1/2 & \text{se } j = 0 \end{cases} \quad (V-11)$$

Por (V-9-a) e (V-9-b),

$$\int_{\gamma_R} f(\xi, \xi', x) d\xi' \rightarrow 0, \text{ para } R \rightarrow \infty, \quad (V-12)$$

onde, por (V-10) e (V-8),

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} & \left| \left(\int_{-R}^{\xi_0 - \varepsilon} + \int_{\xi_0 + \varepsilon}^R \right) d\xi' \cdot \frac{\overline{m_\psi}(\xi', x)}{(\xi' - \xi)} - \frac{b(\xi')}{a(\xi')} \psi(\xi', x) e^{i\xi' x} \right| = \\ & = 2\pi i \sum_{j=0}^N \delta_j \frac{e^{i\xi_j x} \phi(\xi_j, x)}{\dot{a}(\xi_j) (\xi_j - \xi)} \quad (V-13) \end{aligned}$$

Seja agora $R > |\xi|$, e considere o contorno,

$$\Gamma'_R = [-R, \xi_0 - \varepsilon] \cup [\xi_0 + \varepsilon, R] \cup \gamma'_R, \text{ com } \gamma'_R = \{Re^{i\theta}, 2\pi \leq \theta \leq 3\pi\} \quad (V-14)$$

Pelo teorema de Cauchy, e por (V-3-e) e (V-3-f),

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\Gamma'_R} \frac{\overline{m_\psi}(\xi', x)}{(\xi' - \xi)} d\xi' &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{-R}^{\xi_0 - \varepsilon} + \int_{\xi_0 + \varepsilon}^R \frac{\overline{m_\psi}(\xi', x)}{(\xi' - \xi)} d\xi' = \\ &= 2\pi i m_\psi(\xi, x) \quad (V-15) \end{aligned}$$

Por (V-14) e (V-15),

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(\xi, x) e^{i \xi x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{j=0}^N \delta_j \frac{b_j}{\dot{a}(\xi_j)} \frac{\psi(\xi_j, x) e^{i \xi_j x}}{\xi_j - \xi} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} V_p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(\xi')}{a(\xi')} \frac{\psi(\xi', x) e^{i \xi' x}}{\xi' - \xi} d\xi' \text{ para } \operatorname{Im} \xi < 0, \end{aligned} \quad (\text{V-16-a})$$

onde b_j é definido por $\phi(\xi_j, x) = b_j \psi(\xi_j, x)$, e V_p indica o valor principal da integral (bem definido, já que $\dot{a}(\xi_0) \neq 0$).

Analogamente,

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\xi, x) e^{-i \xi x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^N \delta_j \frac{\phi(\xi_j, x) e^{-i \xi_j x}}{b_j \dot{a}(\xi_j) (\xi_j - \xi)} - \\ &- \frac{1}{2\pi i} V_p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{b}(\xi')}{a(\xi')} \frac{\phi(\xi', x) e^{-i \xi' x}}{\xi' - \xi} d\xi', \quad \operatorname{Im} \xi < 0, \end{aligned} \quad (\text{V-16-b})$$

$$\begin{aligned} \psi(\xi, x) e^{-i \xi x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^M \delta_j \frac{\bar{b}_j}{\dot{\bar{a}}(\xi_j)} \frac{\bar{\psi}(\bar{\xi}_j, x)}{\bar{\xi}_j - \xi} e^{-i \bar{\xi}_j x} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} V_p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{b}(\xi')}{\bar{a}(\xi')} \frac{\bar{\psi}(\xi', x) e^{-i \xi' x}}{\xi' - \xi} d\xi', \quad \operatorname{Im} \xi > 0, \end{aligned} \quad (\text{V-16-c})$$

$$\begin{aligned} \phi(\xi, x) e^{i \xi x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{j=0}^M \delta_j \frac{1}{\bar{b}_j \dot{\bar{a}}(\xi_j)} \frac{\bar{\psi}(\bar{\xi}_j, x) e^{i \bar{\xi}_j x}}{\bar{\xi}_j - \xi} - \\ &- \frac{1}{2\pi i} V_p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(\xi')}{\bar{a}(\xi')} \frac{\bar{\phi}(\xi', x) e^{i \xi' x}}{\xi' - \xi} d\xi', \quad \operatorname{Im} \xi > 0, \end{aligned} \quad (\text{V-16-d})$$

onde, \bar{b}_j é definido por $\bar{\phi}(\bar{\xi}_j, x) = \bar{b}_j \bar{\psi}(\bar{\xi}_j, x)$

Para $x \in \mathbb{R}$, sejam

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= \frac{i}{2} \sum_{j=0}^M \delta_j \frac{\bar{b}_j}{\dot{\bar{a}}(\bar{\xi}_j)} e^{-2i\bar{\xi}_j x} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{b}(\xi')}{\bar{a}(\xi')} e^{-2i\xi' x} d\xi' , \end{aligned} \quad (\text{V-17-a})$$

$$\begin{aligned} \bar{G}(x) &= -\frac{i}{2} \sum_{j=0}^N \delta_j \frac{e^{2i\bar{\xi}_j x}}{\bar{b}_j \dot{\bar{a}}(\bar{\xi}_j)} + \frac{1}{4\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(\xi')}{a(\xi')} e^{2i\xi' x} d\xi' , \\ & \quad (\text{V-17-b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{i}{2} \sum_{j=0}^N \delta_j \frac{b_j e^{2i\xi_j x}}{\dot{a}(\xi_j)} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(\xi')}{a(\xi')} e^{2i\xi' x} d\xi' , \end{aligned} \quad (\text{V-17-c})$$

$$\begin{aligned} G(x) &= -\frac{i}{2} \sum_{j=0}^N \delta_j \frac{1}{b_j \dot{a}(\xi_j)} e^{-2i\xi_j x} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{b}(\xi')}{a(\xi')} e^{-2i\xi' x} d\xi' , \end{aligned} \quad (\text{V-17-d})$$

que farão o papel de núcleo nas equações integrais Marchenko.

V.3 - As equações de Marchenko; existência e unicidade das soluções

O lema V-2 abaixo é um lema técnico, necessário à demonstração do teorema principal desta seção:

Lema V-2- As funções F, \bar{F}, G e \bar{G} são C^∞ e satisfazem as estimativas:

$$|F(x)| \leq C e^{-\varepsilon' x} , \quad \text{se } x \geq 0 \quad (\text{V-18-a})$$

$$|\bar{F}(x)| \leq C e^{-\varepsilon' x} , \quad \text{se } x \geq 0 \quad (\text{V-18-b})$$

$$|G(x)| \leq C e^{\varepsilon' x} , \quad \text{se } x \leq 0 \quad (\text{V-18-c})$$

$$|G(x)| \leq C e^{\varepsilon' x} , \quad \text{se } x \leq 0 \quad (\text{V-18-d})$$

para algum $C > 0$ e $\varepsilon' > 0$

Demonstração: Considere $F(x)$ definido em (V-17-c). $F(x)$ pode ser decomposto em:

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) \quad (\text{V-19})$$

onde

$$F_1(x) = -\frac{i}{2} \sum_{j=1}^N \frac{b_j e^{2i\xi_j x}}{\dot{a}(\xi_j)} \quad (\text{V-20})$$

$$F_2(x) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{-\pi i b_0}{\dot{a}(\xi_0)} e^{2i\xi_0 x} + \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(\xi')}{a(\xi')} e^{2i\xi' x} d\xi' \right) \quad (\text{V-21})$$

Seja $0 < r_0 < \min\{\operatorname{Im}\xi_j, |\xi_j|; \varepsilon\}$ e seja $R > 0$, tal que $|\xi_0| < R$. Considere a família de caminhos fechados $\Gamma_\alpha^R, 0 < \alpha \leq r_0$, definida por:

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha^R = \{t+ia, -R < t \leq R\} \cup \{t+ir_0, -R \leq t \leq R\} \cup \{R+it, \alpha \leq t \leq r_0\} \cup \\ \cup \{-R+it, \alpha \leq t \leq r_0\}. \end{aligned}$$

Como $\frac{b(\xi)}{a(\xi)} e^{2i\xi x}$ é analítica no interior

de Γ_α^R $a(\xi)$ não tem zeros nesta região, vem que:

$$\int_{\Gamma_\alpha^R} \frac{b(\xi)}{a(\xi)} e^{2i\xi x} dx = 0, \quad \forall 0 < \alpha < r_0, \quad \forall R > 0. \quad (\text{V-22})$$

Mas,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\alpha}^{r_0} \frac{b}{a}(R+it) e^{-2tx} e^{2ixR} dt \right| = 0 \quad (\text{V-23})$$

uniformemente em α , por (V-9-c). De (V-22), e o resultado análogo para $\{-R+it, \alpha \leq t \leq r_0\}$ vem que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{a}(t+ia) e^{-2i(t+ia)x} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b}{a}(t+ir_0) e^{2i(t+ir_0)x} dt \quad (\text{V-24})$$

e como é bem conhecido da teoria de funções analíticas que

$$4\pi F_2(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{a}(t+ia) e^{2i(t+ia)x} dt, \quad (\text{V-25})$$

vem que

$$4\pi F_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b}{a} (t+ir_0) e^{-2i(t+ir_0)x} dt \quad (V-26)$$

onde segue que $F_2(x)$ é C^∞ e

$$|F_2(x)| \leq C e^{-2r_0 x} \quad (V-27)$$

o que prova o Lema V-2 para F_2 . Para F_1 o lema é trivialmente satisfeito.

Analogamente, prova-se o resultado para \bar{F} , G e \bar{G} .

Pelo lema V-2, utilizando-se (V-5) e o teorema da convolução, obtém-se a partir de (V-16):

$$K(x, y) = F_1(x+y) + \int_0^{\infty} F_2(x+y+z) \bar{K}(x, y) dz, \quad y \geq 0 \quad (V-28-a)$$

$$L(x, y) = G_1(x+y) + \int_{-\infty}^0 G_2(x+y+z) L(x, y) dz, \quad y \leq 0 \quad (V-28-b)$$

onde

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \begin{pmatrix} K(x, y) \\ \bar{K}(x, y) \end{pmatrix}, & L(x, y) &= \begin{pmatrix} \bar{L}(x, y) \\ L(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (V-29-a)$$

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \begin{pmatrix} \bar{F}(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -F(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, & F_2(x) &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{F}(x) I_2 \\ -F(x) I_2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (V-29-b)$$

$$\mathbb{G}_1(x) = \begin{pmatrix} -G(x) & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \bar{G}(x) & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{G}_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & G(x) I_2 \\ -\bar{G}(x) I_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (V-29-a)$$

As equações (V-28-a) e (V-28-b) serão analisadas respectivamente nas equações de Banach:

$$L_1(0, \infty) = \{f: [0, \infty] \rightarrow C^4 / \|f\|_1 = \max_{1 \leq i \leq 4} \int_0^\infty |f_i(x)| dx < \infty\} \quad (V-30-a)$$

$$L_1(-\infty, 0) = \{f: [-\infty, 0] \rightarrow C^4 / \|f\|_1 = \max_{1 \leq i \leq 4} \int_{-\infty}^0 |f_i(x)| dx < \infty\} \quad (V-30-b)$$

Teorema V-1- Existe $M \geq 0$ tal que a equação (V-29-a) tem solução única em $L_1(0, \infty)$, para todo $x > M$ e a equação (V-28-b) tem solução única em $L_1(-\infty, 0]$, para todo $x < -M$.

Demonstração. Considere a equação (V-28-a). Será utilizada na demonstração o teorema do ponto fixo de Banach⁽⁸⁾. Para tal, mostrar-se-á que o operador $U_x: L_1(0, \infty) \rightarrow L_1(0, \infty)$ definido por:

$$U_x(f)(t) = F_1(x+t) + \int_0^\infty F_2(x+s+t) f(s) ds \quad (V-31)$$

é tal que, para cada $x \geq M$ fixo, U_x é uma contração, para algum M . O lema V-2 garante que a imagem de U_x esta, de fato contido em $L_1(0, \infty)$. Ainda usando (V-3), vem:

$$\left\| (U_X(f)(t) - U_X(g)(t))_1 \right\|_1 \leq C e^{-\varepsilon' (x+t)} \left\| \int_0^\infty e^{-\varepsilon' s} (g(s) - f(s))_k ds \right\|_1, \quad (V-32)$$

donde

$$\left\| U_X(f) - U_X(g) \right\|_1 \leq \frac{C e^{-\varepsilon' x}}{\varepsilon'} \| g-f \|_1. \quad (V-33)$$

Do teorema do ponto fixo de Banach, a equação $U_X f = f$ tem uma única solução em $L(0, \infty)$, para cada x com $\frac{C e^{-\varepsilon' x}}{\varepsilon'} < 1$, i.e. $x \geq M = \frac{1}{\varepsilon'} \ln(C/\varepsilon')$, donde segue o resultado para a equação (V-28a). Analogamente, prova-se o resultado correspondente para (V-28-b).

Lema V-3- As soluções de (V-28) em $L_1(0, \infty)$ e $L_1(-\infty, 0)$ satisfazem as estimativas (V-5). Além disto os operadores:

$$F_X: L_2(0, \infty) \rightarrow L_2(0, \infty) \quad (V-34-a)$$

$$G_X: L_2(-\infty, 0) \rightarrow L_2(-\infty, 0) \quad (V-34-b)$$

definidos por

$$F_X(f)(t) = \int_0^\infty F_2(x+y+t) f(y) dy \quad t \geq 0 \quad (V-35-a)$$

e

$$G_X(f)(t) = \int_{-\infty}^0 G_2(x+y+t) f(y) dy \quad t \geq 0 \quad (V-35-b)$$

são compactos⁽⁺⁾.

Demonstração: Se $K(x, y)$ é uma solução de (V-28-a), tem-se que:

$$|K(x, y)|_1 \leq C e^{-\varepsilon' (x+y)} + C e^{-\varepsilon' (x+y)} \int_0^\infty e^{-\varepsilon' z} |K(x, z)|_j dz,$$

(V-36)

onde,

$$||K(x, y)||_1 < \frac{\frac{C}{\varepsilon} e^{-\varepsilon' x}}{1 - \frac{C}{\varepsilon'} e^{-\varepsilon' x}} \leq \frac{C}{2\varepsilon} e^{-\varepsilon' x}, \quad x \geq M,$$

(V-37)

para M suficientemente grande, donde, por (V-36),

$$|K(x, y)| \leq C' e^{-\varepsilon' (x+y)} \quad x \geq M, \quad y \geq 0 \quad (V-38)$$

Destas estimativas tem-se que as soluções estão em $L_2(0, \infty)$ e por (V-18), as imagens de F_x e G_x estão de fato contidas em $L_2(0, \infty)$. A compactidade destes

(+) Os espaços $L_2(0, \infty)$ e $L_2(-\infty, 0)$ são definidos analogamente aos espaços $L_1(0, \infty)$ e $L_2(-\infty, 0)$ de (V-30).

operadores, vem da referência (8), página 314.

Como corolário imediato, pelo teorema de Riez-Schauder, da compacidade de F , tem-se que:

Proposição V-1- No caso em que F_x e G_x são anti-auto-adjuntos, as equações (V-28) tem uma única solução, para todo $x \geq 0$.

No caso da equação de Schrödinger não-linear tem-se que:

$$q_+ = q_-^* \quad (V-39),$$

o que implica⁽¹⁾,

$$\bar{F}(x) = F^*(x), \quad (V-40-a)$$

$$\bar{G}(x) = G^*(x) \quad (V-40-b)$$

Neste caso, tem-se que:

Proposição V-2- No caso da equação de Schrödinger não linear, as equações (V-28) tem solução única em $L_2[0, \infty)$ e $L_2(-\infty, 0]$, respectivamente.

Demonstração: De (V-28-a), vem que:

$$\begin{aligned} K_i(x, y) &= \bar{F}(x, +y) + \int_0^\infty \bar{F}(x+y+z) \bar{K}_i(x, z) dz = \bar{F}(x+y) + \\ &\quad + \bar{F}_x K_i(x, y) \end{aligned} \quad (V-41-a)$$

$$\begin{aligned}\bar{K}_i(x, y) &= -F(x+y) - \int_0^\infty F(x+y+z) K_i(x, z) dz = \\ &= -F(x+y) - F_x K_i(x, y)\end{aligned}\quad (\text{V-41-b})$$

onde,

$$K_i(x, y) = \bar{F}(x+y) - \bar{F}_x F(x+y) - \bar{F}_x F_x K_i(x, y), \quad (\text{V-42})$$

para $i = 1, 2$.

Mas, por (V-40-a),

$$(\bar{F}_x F_x)^+ = F_x^+ \bar{F}_x^+ = \bar{F}_x F_x^* = F_x^* F_x. \quad (\text{V-43})$$

onde $\bar{F}_x F_x$ é auto-adjunto, positivo e compacto, pelo lema V-3, donde segue que -1 não é autovalor de $\bar{F}_x F_x$, e pelo teorema de Riez-Schauder, (V-42) tem solução única. As demonstrações para \bar{K} , L e \bar{L} são análogas.

Nos casos concretos, onde for possível demonstrar a existência de soluções exponencialmente decrescentes da equação não-linear dado, e a existência e unicidade das soluções de (V-28) para tal $x \geq 0$, então a solução desta equação não-linear será determinada pelas equações (V-6), onde L e M são as únicas soluções de (V-28). No estágio atual, mesmo nos casos acima, em que a existência e unicidade das soluções de (V-28) foi demonstrada, o método não demonstra a existência de soluções da equação não-linear.

V-4 - A evolução temporal dos "dados de espalhamento"

Nesta seção, contrariamente ao resto do trabalho, não serão demonstrados teoremas que valham em casos gerais, mas apenas apresentadas hipóteses suficientes sobre o operador M do par de Lax, que tornem lícitos os cálculos necessários para a determinação da evolução temporal dos dados de espalhamento.

Pela seção (V-3), foi visto que, para se achar os potenciais $q_{\pm}(x, t)$, para um certo tempo t fixo, basta conhecer os "dados de espalhamento" a, b, \bar{a}, \bar{b} para ξ real, e $\bar{a}(\xi_j), \bar{b}_j, 1 \leq j \leq M$, e $a(\xi_j), b_j, 1 \leq j \leq N$, para este tempo t fixado. Assim, a solução da equação de evolução temporal não-linear fica reduzida ao cálculo a evolução temporal destas funções. A ferramenta essencial para este cálculo, é o teorema III-1, bem como parte de sua demonstração. Será suposto, que os operadores $M(t), t$ fixo, do problema são operadores locais, no sentido que, se $f(x) = g(x), x \in I \subset R$, então $M(t)f(x) = M(t)g(x), x \in I \subset R$. Esta não é uma suposição restritiva, já que em todos os exemplos conhecidos o operador M é formado por operadores de diferenciação, em x , e por multiplicação por funções de q_{\pm} . Será suposto ainda que, com as hipóteses (V-3) seja possível calcular o limite para $|x| \rightarrow \infty$ de $M\phi, M\bar{\phi}, M\bar{\psi}$ e $M\psi$ e que estes limites existem e sejam finitos para ξ real e ξ_j autovalores. Ainda mais, será suposto que estas funções sejam contínuas em t , uniformemente em x . Novamente, nos exemplos conhecidos estas hipóteses são verificadas.

Seja ξ_j um autovalor, com $\operatorname{Im} \xi_j > 0$. Tem-se neste caso que, ϕ é uma autofunção, e, pelo teorema III-1:

$$\frac{d}{dt} ((L - \xi_j) \phi) = (L - \xi_j) (\phi_t - M\phi) = 0 \quad (V-44)$$

Como os autovalores de L são simples, vem que:

$$\phi_t - M\phi = \alpha(t) \phi \quad (V-45)$$

Como o comportamento assintótico (IV-11) é uniforme para t em compacto e $x \geq M$, e ϕ_t é limitado, temos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_t - \lim_{x \rightarrow -\infty} M\phi = \alpha(t) \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(t) \quad (V-46-a)$$

ou seja,

$$-\lim_{x \rightarrow -\infty} M\phi = \alpha(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi_j x} \quad (V-46-b)$$

e desta equação, conhecido o $\lim_{x \rightarrow -\infty} M\phi$, determina-se $\alpha(t)$.

Tomando o limite para $x \rightarrow \infty$ vem, nas hipóteses acima,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b_{jt} e^{i\xi x} \end{pmatrix} - \lim_{x \rightarrow \infty} (M\phi) = \alpha(t) \begin{pmatrix} 1 \\ b_j e^{i\xi x} \end{pmatrix} \quad (V-47)$$

que fornece a evolução temporal de $a(\xi_j, t)$ e $b(\xi_j, t)$.

Para ξ real fixo, a situação é mais deli-

cada, já que as funções envolvidas não estarão em $D(M_1) \cap D(M_1^2)$, e não é válida (III-16). Para contornar este problema, considere $\phi_n \in D(M_1) \cap D(M_1^2)$, $n \geq 0$, tal que $\phi_n(x) = \phi(x)$, $-n \leq x \leq n$. Isto em geral é possível, já que nos exemplos conhecidos,

$$C_0^\infty \subset D(M_1) \cap D(M_1^2) \text{ e } \phi \in C^\infty. \text{ Então,}$$

$$\frac{d}{dt} (L\phi_n - \xi\phi_n) = L(M\phi_n - \phi_{nt}) - ML\phi_n - \xi\phi_n, \quad (V-48-a),$$

onde, para $-n \leq x \leq n$

$$\frac{d}{dt} ((L-\xi)\phi) = (L-\xi)(M\phi - \phi_t) = 0, \quad (V-48-b)$$

Como (V-48) vale para todo n , tem-se que (V-39) vale (pontualmente) para todo x . Então,

$$M\phi - \phi_t = \alpha(t)\phi + \beta(t)\bar{\phi} \quad (V-49)$$

já de ϕ e $\bar{\phi}$ são linearmente independentes. Note que ϕ_t é limitada. Tomando o limite para $x \rightarrow -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (M\phi) = \alpha(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} - \beta(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \quad (V-50)$$

onde, pode-se encontrar α e β .

Tomando-se o limite para $t \rightarrow \infty$, encontra-se equações de evolução para a, b , em função de \bar{a} e \bar{b} .

Analogamente, para ψ , $\bar{\phi}$ e $\bar{\psi}$.

Note que as hipóteses que foram aqui feitas, são necessárias para garantir a validade da troca de limites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = \begin{pmatrix} a_t(\xi) & e^{-i\xi x} \\ b_t(\xi) & e^{i\xi x} \end{pmatrix} \quad (V-51)$$

CAPÍTULO VICONCLUSÃO

Dada a complexidade do método de espalhamento inverso, desde a publicação do trabalho de Gardner, Greene, Kruskal e Miura⁽⁶⁾, a formulação rigorosa deste método aplicado à equação de Kortweg-deVries foi demorada e exigiu um grande esforço, sendo finalmente alcançada, em sua totalidade, com os trabalhos de Deift e Trubowitz⁽³⁾, e Tanaka⁽²¹⁾. Por outro lado, nas outras equações tratadas por este método e por suas generalizações, a formulação matemática é extremamente insatisfatória. Os resultados desta tese resolvem em parte este problema, para uma certa classe de equações não lineares.

Do ponto de vista da propriedade isoespectral dos operadores lineares envolvidos, o teorema III-1 é uma generalização importante do teorema de Lax, já que, com exceção da equação de Kortweg-deVries, nos outros exemplos conhecidos, estes operadores lineares não são auto-adjuntos. Embora não se conheça método para se encontrar par de Lax, no sentido do capítulo III, para uma dada equação não-linear, acredita-se que o teorema isoespectral aqui apresentado se aplique a uma vasta classe de equações não-lineares, já que nos exemplos conhecidos as hipóteses são naturalmente verificadas. Além do fato da propriedade isoespectral ser essencial para o cálculo da evolução temporal, esta tem um interesse intrínseco. Foi recentemente provado⁽⁹⁾, que

para sistemas Hamiltonianos, as equações dinâmicas podem ser escritas na forma (III-5). Além disto, para sistemas completamente integrais, as equações (III-5) permitem uma derivação das leis de conservação⁽¹⁴⁾. Pode-se portanto, com os resultados aqui apresentados, utilizando-se os métodos desenvolvidos em⁽¹⁴⁾, demonstrar rigorosamente as leis de conservação para as equações de Sine-Gordon e Schrödinger não-linear.

Do ponto de vista da teoria de espalhamento inverso propriamente dita, foi mostrado que com a hipótese de decaimento exponencial de potenciais para todo t fixo, é possível a dedução rigorosa das equações de Marchenko, para sistemas do tipo Zakharov-Shabat. Foi feita também uma análise mais cuidadosa das hipóteses suficientes para o cálculo da evolução temporal dos dados de espalhamento. Para os casos em que for possível mostrar a existência de soluções da equação não-linear que impliquem decaimento exponencial dos potenciais, a análise aqui feita fornece um método rigoroso para determinar estas soluções.

Entretanto, a existência de soluções de uma equação não-linear com comportamento assintótico que implique potenciais exponencialmente decrescentes, é um problema extremamente difícil. Para contorná-lo, poder-se-ia formular o problema inverso da seguinte forma: supostas as propriedades de decaimento exponencial para F , \bar{F} , G e \bar{G} , o que é em princípio diretamente verificável através do cálculo da evolução temporal dessas funções, é verdade que as

equações de Marchenko tem solução única, e que os potenciais dados por (V-6) são exponencialmente decrescentes e satisfazem às equações originais? Sobre este problema os resultados são incompletos. Existência e unicidade das soluções das equações de Marchenko puderam ser obtidas, no caso geral, apenas para $|x|$ suficientemente grande. Em um caso particular importante, em que $\bar{F} = F^*$ e $\bar{G} = G^*$ (que inclui a equação de Schrödinger não-linear), foi possível demonstrar a existência e unicidade das soluções e o comportamento assintótico (V-5) destas soluções, o que constitui um primeiro passo para a resolução do problema inverso proposto acima. Esta resolução completaria a formulação da aplicação do método de espalhamento inverso à equação de Schrödinger não-linear, demonstrando a existência de soluções com o comportamento assintótico suposto e se constituiria num segundo exemplo rigorosamente concluído.

APÊNDICE AALGUNS RESULTADOS SOBRE OPERADORESAGINDO NUM ESPAÇO DE BANACH

Neste apêndice serão reproduzidos alguns resultados bem conhecidos, usados na demonstração do teorema III.1.

Seja X um espaço de Banach, A um operador sobre X e $\rho(A)$ o resolvente de A . O teorema seguinte é encontrado na referência 17, página 285.

Teorema A.1- Seja X um espaço de Banach, seja I um intervalo aberto de R . Para cada $t \in I$, seja $A(t)$ tal que:

- a) $A(t)$ é o gerador de um semigrupo contrativo sobre X , tal que $0 \in \rho(A(t))$ e $A(t)$ tem um domínio D comum para todo $t \in I$ (onde, pelo teorema do gráfico fechado, segue que, $A(t) A(s)^{-1}$ é limitado).

Seja $C(t,s)$ definido por:

$$C(t,s) = A(t) A(s)^{-1} - I \quad (A-1)$$

- b) Para cada $\phi \in X$, $(t-s)^{-1} C(t,s) \phi$ é uniformemente formalmente contínuo e uniformemente limitado em s, t , para $t \neq s$ variando em qualquer subintervalo compacto de I .

c) Para cada $\phi \in X$, $C(t)\phi = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s < t}} (t-s)^{-1} C(t,s) \phi$ existe uniformemente para t em subintervalos compactos e $C(t)$ é limitado e fortemente contínuo em t .

Sejam $U_R(t,s)$ definidos por:

$$U_k(t,s) = \exp. \left(- (t-s) A \left(\frac{i-1}{k} \right) \right) \text{ se } \frac{i-1}{k} \leq s \leq t \leq \frac{i}{k} \quad (1 \leq i \leq k)$$

(A.2.a)

e

$$U_k(t,s) = U_k(t,r) \cdot U_k(r,s) \quad \text{se } 0 \leq s \leq r \leq t \leq 1$$

(A.2.b)

para todo k inteiro positivo e $0 \leq s \leq t \leq 1$. A diferença é facilmente estendida para $s \leq t$ num subintervalo compacto de I .

Então, para todo $s \leq t$ em qualquer subintervalo compacto de I , e para todo $\phi \in X$,

$$U(t,s) \phi = \lim_{k \rightarrow \infty} U_k(t,s) \phi \quad (A.3)$$

existe uniformemente em s e t . Além disso, se $\psi \in D$, então $\phi_s(t) = U(s,t) \psi$ está em D para todo $t \in I$ e satisfaaz:

$$\frac{d}{dt} \phi_s(t) = - A(t) \cdot \phi_s(t), \quad \phi_s(s) = \psi \quad (A.4)$$

e

$$\|\phi_s(t)\| \leq \|\psi\| \text{ para todo } t \geq s \quad (\text{A.5})$$

A desigualdade (A.5) implica a unicidade da solução do problema de valor inicial (A.4).

Além disto, se as hipóteses do teorema forem verificadas para $A(t) + \xi$, onde ξ é uma constante, então o teorema continua verdadeiro.

O seguinte lema também foi usado na demonstração do teorema III.1. Sua demonstração pode ser encontrada na referência (11), página 178. A palavra função deve ser entendida como função a valores em X .

Lema A.1- Seja $A(t)$ uma família de operadores fechados com domínio constante $D(A)$ e fortemente continuamente diferenciável em seu domínio. Seja B um operador fechado definido em $D(A)$ com inverso limitado e seja $f(t)$ continuamente diferenciável, com as funções $Bf(t)$ e $Bf'(t)$ definidas e contínuas. Então a função $A(t)f(t)$ é continuamente diferenciável e

$$\frac{d}{dt}(A(t)f(t)) = \frac{dA}{dt}(t)f(t) + A(t)\frac{df}{dt}(t). \quad (\text{A.6})$$

APÊNDICE BSOBRE A DIFERENCIABILIDADE DE $L_1 u_0(t)$

Na demonstração do teorema III-1, é necessário que $L_1 u_0(t)$ seja diferenciável. Será demonstrado aqui, com o auxílio do teorema A-1 uma proposição que garante este fato.

Proposição B-1- Seja $u_0 \in D(M_1) \cap D(M_1^2)$ e seja $u_0(t)$ a solução de III.14, com $u_0(0) = u_0$. Se as hipóteses (III-2), (III-3), (III-4), (III-8) e (III-11) são satisfeitas então $L_1 u_0(t)$ é continuamente diferenciável.

Demonstração: Seja $t_0 \in \mathbb{R}$, seja $T > t_0$ e $I = (-T, T)$. Seja $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$ fixado e $x(t) = (M_1 + \xi) u_0(t)$. Formalmente $x(t)$ deve satisfazer a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt}(t) = (M_1 + \xi) M(t) (M_1 + \xi)^{-1} x(t) , \quad (B.1-a)$$

com condição inicial.

$$x(0) = (M_1 + \xi) u_0 \in D(M_1) \quad (B.1-b)$$

Será mostrado que o operador

$$R(t) = -(M_1 + \xi) M(t) (M_1 + \xi)^{-1} \quad (B.2)$$

satisfaz às hipóteses do teorema A.1, para $t \in I$, a menos de uma constante aditiva.

Para isto note que o operador $R(t)$ pode ser escrito como:

$$R(t) = -(M_1 + M_2(t) + H(t))$$

Pelas hipóteses III-2, $-M_1$ é anti-auto-adjunto e portanto gera um semigrupo contrativo. Pelas hipóteses (III-8) e (III-11), $-(M_2(t) + H(t))$ é limitado e com norma uniformemente limitada em $t \in I$. Logo existe uma constante C tal que $R(t) + C$ satisfaz à hipótese a) do teorema A.1. Como além disso $M_2(t) + H(t)$ é liso, tem-se que as hipóteses b) e c) do teorema A.1 são satisfeitas.

Do teorema A.1 tem-se que o problema (B.1) tem solução única. Seja $\tilde{x}(t)$ esta solução e $\tilde{u}_0(t) = (M_1 + \xi)^{-1} \tilde{x}(t)$.

Como $(M_1 + \xi)^{-1}$ é limitado, $\tilde{u}_0(t)$ satisfaz

$$\frac{d}{dt} \tilde{u}_0(t) = M(t) \tilde{u}_0(t) , \quad \tilde{u}_0(0) = u_0 , \quad (B.3)$$

onde, por unicidade $\tilde{u}_0(t) = u_0(t)$ e $\tilde{x}(t) = x(t) = (M_1 + \xi) u_0(t)$, ou seja, $(M_1 + \xi) u_0(t)$ é continuamente diferenciável para todo $t \in I$.

Mas, $L_1 u_0(t) = L_1 (M_1 + \xi)^{-1} (M_1 + \xi) u_0(t)$, onde por (III-4), $L(M_1 + \xi)^{-1}$ é limitado. Então $L_1 u_0(t)$ é continuamente diferenciável, e $L_1 u_0'(t)$ está definido e é contínuo.

APÊNDICE CO OPERADOR $H(t)$ RELATIVO À EQUAÇÃO DE
SINE-GORDON É LISO

Definição C.1- Sejam A e B operadores lineares densamente definidos num espaço de Banach X . Então B é A - limitado se:

i) $D(B) \subseteq D(A)$

ii) Existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|B\phi\| \leq a\|A\phi\| + b\|\phi\|, \quad (\text{C.1})$$

para todo $\phi \in D(A)$.

Se $A^{-1} \in B(X)$, e $\|A^{-1}\| = \alpha$, então, de (C.1),

$$\|BA^{-1}\| \leq a + b\alpha \quad (\text{C.2})$$

e $BA^{-1} \in B(X)$.

De (III-33) obtém-se:

$$\begin{aligned} \| [M_1, M_2(t)] \phi \| &\leq \left\| \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial C}{\partial x} + 2C\xi \\ -\frac{\partial D}{\partial x} + 2D\xi & 0 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \|\phi\| + \\ &+ \left\| \begin{pmatrix} 0 & -2C \\ -2D & 0 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \|(M_1 + \xi)\phi\| = a(t)\|\phi\| + b(t)\|(M_1 + \xi)\phi\| \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Das propriedades de diferenciabilidade e limitação de $C(t)$ e $D(t)$, tem-se que $a(t)$ e $b(t)$ são C^∞ , e uniformemente limitados para t variando em compactos de \mathbb{R} . Como M_1 é anti-auto-adjunto, $(M_1 + \xi)^{-1}$ é um operador limitado para $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$. Seja $\alpha = \|(M + \xi)^{-1}\|$.

De (C.2) vem que $H(t)$ é um operador limitado e

$$\|H(t)\| = \|[M_1, M_2(t)](M_1 + \xi)^{-1}\| \leq a(t) + \alpha b(t) \quad (\text{C.4})$$

e é portanto uniformemente limitado na norma para t em compactos de \mathbb{R} .

Além disso, por C.3

$$\left\| \frac{H(t+h) - H(t)}{h} \phi \right\| \leq \left(\frac{a(t+h) - a(t)}{h} + \alpha \frac{b(t+h) - b(t)}{h} \right) \|\phi\| \quad (\text{C.5})$$

o que implica a diferenciabilidade forte de $H(t)$.

Analogamente, a propriedade de a e b serem C^∞ , implica a que $H(t)$ é continuamente fortemente diferenciável.

APÊNDICE D

A INVARIANÇA DO ESPECTRO ESSENCIAL DE $L(t)$ E UM
TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES

Neste apêndice será analisado o espectro essencial de $L(t)$ e também será enunciado o teorema de existência e unicidade que garante a existência das funções de Jost em O_ε .

O seguinte lema é de demonstração imediata:

Lema D-1- L_0 é auto-adjunto sobre $D(L_0)$ definido em (V6-C), e $\sigma(L_0) = \sigma_{ac}(L_0) = \sigma_e(L_0) = \mathbb{R}$, onde σ_e denota o espectro essencial e σ_{ac} o espectro absolutamente contínuo.

A definição de espectro essencial encontra-se em (10), página 243.

Teorema D.1- $\sigma_e(L(t)) = \sigma_e(L_0) = \mathbb{R}$, para todo $t \geq 0$

Demonstração: Pelo teorema 5.35, página 244, de (10), o resultado é verdadeiro se $L(t) - L_0$ for L_0 - compacto. Mas $L(t) - L_0 = A(t)$, e, por (IV-3,b), vem que:

$$\| A(L_0 - \xi)^{-1} \|_{HS} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dp' |\tilde{q}_\pm(p-p')|^2 |p'-\xi|^{-2} \leq$$

$$\leq \| q_{\pm} \|_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dp |(p-\xi)|^{-2} < \infty, \text{ para } \xi \notin \mathbb{R}, \quad (\text{D.1})$$

onde, $\| \cdot \|_{HS}$ indica a norma de Hilbert-Schmidt. De (D.1) segue o resultado.

O teorema D-2 enunciado abaixo, pode ser encontrado em (18), página 159:

Teorema D.2- Seja $A(x)$ uma função contínua de $[R_0, \infty]$ com valores em $L(X)$, X espaço linear de dimensão finita, e $R_0 \in \mathbb{R}$ finito. Suponha que $\| A(x) \| \in L^1(R_0, \infty)$ e seja $u_0 \in X$. Então, existe uma única função continuamente diferenciável $u(x, u_0)$ tal que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) = A(x) u(x) \quad (\text{D-2})$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = u_0 .$$

Além disto, toda solução não trivial de B-2 tem limite não nulo para $x \rightarrow \infty$.

No caso da equação (IV-10), $X = \mathbb{R}^2$, e a condição $\| A(x) \| \in L^1(-\infty, \infty)$ segue de (IV-3b). A condição do teorema é válida para todo $R_0 \in \mathbb{R}$. Desta forma, existem soluções ψ e $\bar{\psi}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. É claro que o teorema é válido, se for considerado o intervalo $(-\infty, R_0]$ o que garantirá a existência de ψ e $\bar{\psi}$.

REFERÊNCIAS

- (1) M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell and H. Segur -
Stud. Appl. Math. 53, 249 (1974).
- (2) F.A. Berezin and A.M. Perelomov - Funct. Anal. Appl.
14, 50 (1980).
- (3) P. Deift and E. Trubowitz - Comm. Pure Appl. Math.
32, 121 (1979).
- (4) L.D. Faddeev - Amer. Math. Soc. Transl. (2) 65 139
(1967).
- (5) L.D. Faddeev and L.A. Takhtadzhyan - Theor. Math.
Phys., 21, 160 (1974).
- (6) C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal and R.M.
Miura - Phys. Rev. Lett. 19, 1095 (1967).
- (7) J. Ginibre and G. Velo . Lecture Notes in Physics
120 (Springer, Berlin, 1980), pág. 218.
- (8) C.S. Höning - Análise Funcional e Aplicações, vol. II
(Publicações do Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo).
- (9) N.M. Ibragimov and A.B. Shabat - Funct. Anal. Appl.
14, 25 (1980), ibid. 14, 79 (1980).
- (10) T. Kato - Perturbation Theory for Linear Operators -
1st ed., Springer-Verlag, Berlim (1966).
- (11) S.G. Krein - Linear Differential Equations in Banach
Space - American Math. Society Translation, vol. 29,

Providence, Rode Island, 1971.

- (12) G.L. Lamb, Jr - Elements of Soliton Theory - Wiley, 1980.
- (13) P.D. Lax - Comm Pure Appl. Math. 21, 467 (1968).
- (14) M.A. Olshanetsky e A.M. Perelomov - Phys. Rep. 71, 313 (1980).
- (15) B.S. Pavlov - Dobl. Akad Nauk SSSR 141, 807 (1961), and 146, 1267 (1962).
- (16) M. Reed - Abstract Nonlinear Wave Equations - Lecture Notes in Mathematics 507 - Springer-Verlag, 1976.
- (17) M. Reed and B. Simon - Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. II - Academic Press, NY, 1975.
- (18) M. Reed and B. Simon - Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. III, Academic Press, 1979.
- (19) A.C. Scott, F.Y.F. Chu and D.W. McLaughlin - Proc. IEEE 61, 1443 (1973).
- (20) W.A. Strauss - Lecture Notes in Physics 98, 123 - Springer - Verlag - Berlin - Heidelberg - New York, 1979.
- (21) S. Tanaka - Osaka J. Math. 11, 49 (1974).
- (22) V.E. Zakharov and A.B. Shabat - Sov. Phys. JEP 34, 62 (1972).