

- Universidade de São Paulo -

Instituto de Física

SBI-IFUSP



305M810T1690

Sobre A Equivalência
Entre
Ferromagnéticos Com Campos Aleatórios
E
Antiferromagnéticos Diluídos

Carlo

H.L.

José Augusto Baêta Segundo
Wingu Hild *Mabel*
Fernan Guy

orientado por

prof. Dr. José Fernando Perez

- São Paulo -
1990



530.13

B142D

D

e.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Baêta Segundo, José Augusto
Sobre a equivalência entre ferromagnéticos
com campos aleatórios e antiferromagnéticos
diluídos. São Paulo, 1990.

Tese (Doutorado) - Universidade de São
Paulo. Instituto de Física. Departamento de
Física e Matemática.

Área de Concentração: Física de Partícu-
las Elementares

Orientador: Profº Dr. José Fernando Perez

Unitermos: 1. Mecânica estatística; 2. Sis-
temas aleatórios.

USP/IF/SBI - 28/90

Agradecimentos

Ao orientador e amigo Fernando Perez.

À Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI.

Ao colega e particular amigo Luiz Francisco Pontin.

-aos meus pais Otto (in memoriam) e Lígia.

À Téia, a quem dedico este trabalho.

Resumo

Usando um método proposto por van Hemmen nós computamos a energia livre da versão Curie-Weiss do modelo de Ising antiferromagnético com diluição de sítio na presença de um campo magnético uniforme. A solução apresenta uma correspondência exata entre as termodinâmicas deste modelo e da versão Curie-Weiss do modelo de Ising ferromagnético na presença de um campo magnético aleatório. Os diagramas de fase são discutidos e mostra-se a existência de um ponto tricírtico.

Apresentamos também uma de-

nivação alternativa dos resultados de van Hemmen a qual permite uma comparação com os métodos usuais de campo médio contidos na literatura.

A solução obtida a partir da transformação de Hubbard-Stratonovich permite o cálculo das flutuações do parâmetro de ordem dos respectivos modelos e a constatação de uma equivalência também a este nível, em particular com a igualdade dos expoentes críticos relevantes.

Abstract

Using a method proposed by van Hemmen we compute the free energy of the Curie-Weiss version of the site-dilute antiferromagnetic Ising model in the presence of a uniform magnetic field. The solution displays an exact thermodynamic correspondence between this model and the Curie-Weiss version of the Ising model in the presence of a random magnetic field. The phase diagrams are discussed and a tricritical point is shown to exist.

We present also an alternative derivation of van Hemmen's results which allows an easy comparison with

the usual mean-field methods used in the literature.

The solution obtained via Hubbard-Stratonovich transformation allows the computation of the fluctuations of the order parameter in both models as to display their equivalence with equality of the relevant critical exponents.

Índice

<i>Introdução</i>	01
<i>1- O método de van Hemmen e o modelo AD</i>	15
(i) O método	15
(ii) O modelo AD	27
<i>2- Derivação alternativa dos resultados de van Hemmen</i>	42
<i>3- A equivalência termodinâmica dos modelos FA e AD</i>	59
<i>4- Flutuações</i>	62
<i>Referências</i>	89

Introdução

A mecânica estatística de sistemas desordenados têm se dedicado, quer pelo desafio de questões físico-matemáticas bem como, e principalmente, pela relevância física de seus problemas, inúmeros pesquisadores.

A literatura especializada testemunha, em anos recentes, um considerável esforço teórico objetivando entender o modelo de Ising na presença de um campo magnético aleatório (FA). Mais especificamente, no que se refere às transições de fase de segunda ordem, que ocorrem quando regimes nos quais há prevalência da ordem de longo alcance

passam a predominar sobre aqueles nos quais reina a desordem térmica, o fato de que um campo magnético aleatório em cada ponto da rede vem fornecer a desordem já estabelecida pelas flutuações térmicas, conduziu pesquisadores à investigação teórica sobre a hipótese de um aumento da dimensão crítica mais baixa (aquela, aqui denotada por d_c , acima da qual existe transição) do modelo FA em relação ao modelo sem a desordem adicional introduzida pelo campo aleatório.

O mais importante argumento heurístico em favor de que, para o modelo FA, $d_c = 2$, foi apresentado por Y. Imry e S. K. Ma [1] e baseia-se numa discussão da competição entre a energia ga-

nha na formação de pequenos domínios não dominicamente orientados no campo aleatório e a energia perdida na fronteira dos domínios. Algumas tentativas para aperfeiçoar o argumento de Imry e Ma foram feitas [2,3] e em particular a de E. Pytte, Y. Imry e D. Mukamel [2] sugeriu o valor 3 e não 2 para d_c . Subsequentemente, D. Fisher, J. Fröhlich e T. Spencer [4] e J. Chalker [5] colocaram o argumento de Imry e Ma sobre uma base mais sólida.

Por outro lado, G. Panisi e N. Sourlas [6], baseados em argumentos de supersimetria, indicam que o problema dimensional com campo aleatório é equivalente ao correspondente problema com

campo nulo em dimensão $d=2$, havendo assim uma redução de duas unidades na dimensão crítica mais baixa para o modelo sem campo aleatório. Neste sentido, o da redução dimensional, também contribuiram L. A. Pastur [7] e J. F. Perez, W. F. Wreszinski e J. L. van Hemmen [8] mostrando, sem o uso de réplicas, que, para o modelo esférico com campo aleatório, $d_c = 4$. Assim, nesta linha da redução dimensional, deveríamos ter, para o modelo FA, $d_c = 3$.

A dúvida sobre se há ou não transição de ordem magnética no modelo de Ising tridimensional em campo aleatório, foi definitivamente resolvida por J. Brémont e A. Kupiainen [9]: mostra-

ram através de uma aplicação rigorosa das ideias do grupo de renormalização associadas aos contornos de Peierls que, em três dimensões com um pequeno campo aleatório, o modelo de Ising apresenta duas fases em baixas temperaturas, isto é, que a dimensão crítica mais baixa deste modelo é no máximo 2. Finalmente, M. Aizenman e J. Wehr [34] mostram que $d_c = 2$.

Clinda que campos aleatórios não sejam produzidos em laboratórios, acredita-se, após o trabalho original de S. Fishman e A. Aharony [10] e o de Z. Wong, S. von Molnar e P. Dimon [11], que o comportamento crítico e o diagrama de fase do modelo FA, estejam relacionados, no sentido de matematicamente equivalentes, aos de sistemas experimen-

talmente acessíveis, como os antiferromagnéticos diluídos na presença de um campo uniforme (AD). Estes, por sua vez, preparados através de substâncias magnéticas com impurezas não magnéticas — fluoretos e cloretas de metais de transição tais como Zn , Mg , Co e Fe — vêm sendo investigados experimentalmente, particularmente no que se refere à transição de ordem magnética como função do campo externo e do grau de concentração de impurezas, parâmetros que admitem um bom controle experimental [12].

Na aproximação usual de campo médio concentra-se, com poucas exceções [13, 35], grande parte dos trabalhos que discutem a conjectura de Fishman

e Aharony relativa à equivalência, anteriormente citada, dos modelos FA e AD [10, 11, 14].

Utilizando as idéias com as quais J. Bricmont e A. Kupiainen resolvem explicitamente uma aproximação hierárquica do modelo FA [15], J. F. Perez, L.F. Pontin e J.A. Baêta Segundo [16] e L. F. Pontin [17] trataram a mesma versão hierárquica do modelo DA, demonstrando, também neste nível de aproximação, a citada equivalência.

No que diz respeito às flutuações dos modelos FA e AD, J.M.G. Amaro de Matos e J. F. Perez [18], J.M.G. Amaro de Matos, J. A. Baêta Segundo e J. F. Perez [19] e J. M.G. Amaro de Matos [20],

lançando mão dos resultados rigorosos de R. S. Ellis e L. M. Newman [21] relativos ao estudo de grandes desvios em modelos clássicos de Curie-Weiss, convenientemente estendidos à modelos desordenados mostraram que as flutuações do parâmetro de ordem na versão Curie-Weiss dos modelos FA e AD não são equivalentes pelo mapeamento que estabelece a equivalência termodinâmica.

Os resultados apresentados neste trabalho e que a seguir sumarizamos, referem-se às versões dos modelos AD e FA cujas hamiltonianas são, respectivamente, dadas por:

$$H_{AD} = - \frac{J_0}{2N} \sum_{i,j \in L_+} \tilde{\xi}_i \tilde{\xi}_j s_i s_j - \frac{J_0}{2N} \sum_{i,j \in L_-} \tilde{\xi}_i \tilde{\xi}_j s_i s_j +$$

$$+ \frac{J}{N} \sum_{\substack{i \in \Lambda_+ \\ j \in \Lambda_-}} \xi_i \xi_j s_i s_j + H \sum_{i \in \Lambda} \xi_i s_i$$

e

$$H_{FA} = - \frac{J}{2N} \sum_{i,j \in \Lambda} s_i s_j + \sum_{i \in \Lambda} H_i s_i$$

onde as variáveis aleatórias $\xi_i \in \{0, 1\}$ (resp. $H_i \in \{H, -H\}$) descritas a diluição de si-
tio (resp. os campos aleatórios) e são to-
madas independentes e identicamente dis-
tribuídas: $\xi_i = 1$ com probabilidade p
e $\xi_i = 0$ com probabilidade $1-p$ (resp. $H_i =$
 $\pm H$ com probabilidade $\frac{1}{2}$). Para estes
modelos conseguimos:

(i) usando uma abordagem rigorosa pro-
posta por J. L. van Hemmen, A. C. D. van
Enter e J. Lanisius [22], computar
a energia livre do modelo AD com
 $J_0 = J$;

- (ii) comparando os nossos resultados para o modelo AD ($J_0 = J$) com os obtidos por S. R. Salinas e W. F. Wnieszinski [23] para o modelo FA, mostrar a existência de um mapeamento que estabelece uma correspondência termodinâmica exata entre os referidos modelos;
- (iii) revisitando os modelos FA e AD através da aplicação da transformada de Hubbard-Stratonovich e de alguns resultados sobre grandes desvios [21] generalizados à sistemas desordenados [18], gerar as funções necessárias à análise das flutuações dos parâmetros de ordem além de mostrar que os modelos AD com $J_0 = J$ e $J_0 \neq J$ não são, pelo menos de uma maneira óbvia, ma-

tematicamente mapeáveis;

(iv) com base nos resultados obtidos em
(iii), analisar as flutuações e mos-
trar a equivalência dos modelos,
no sentido da igualdade dos índices
críticos, também a este nível, mes-
mo no caso em que $J_0 \neq J$ que não
é trivialmente mapeável no modelo
 AD com $J_0 = J$ e, consequentemente,
no modelo FA .

É importante ressaltar
que a equivalência termodinâmica por
nós obtida entre os modelos considera-
dos, se dá mesmo quando $p=1$, is-
to é, sem diluição. Assim, o mode-
lo FA é termodinamicamente equi-
valente a um modelo determinístico.

Todavia é a estatística, isto é, as flutuações que tornam rica a questão da equivalência visto que, a este nível, a diluição tem um forte efeito, modificando profundamente a natureza das distribuições fora do e no ponto crítico, bem como alterando os expoentes críticos de modo a torná-los iguais aos correspondentes expoentes no modelo FA como determinados por J. M. G. Amaro de Matos e J. F. Perez [18]. Um dos aspectos notáveis das flutuações é o fato de que na criticalidade amplificam-se os efeitos das flutuações das variáveis aleatórias (diluição ou campo aleatório) de forma a sobrepujar as flutuações térmicas.

No que tange à organização do trabalho temos, além desta Introdução, quatro seções a saber:

1- O método de van Hemmen e o modelo AD: descrição suscinta do método e sua aplicação ao modelo.

2- Derivação alternativa dos resultados de van Hemmen: o modelo FA [23] é revisitado via transformação de Hubbard-Stratonovich [24].

3- A equivalência termodinâmica dos modelos FA e AD: da comparação dos resultados obtidos nas seções 1 e 2 resulta a equivalência; os diagramas de fase são analisados.

4- Flutuações: um tratamento informal conduz à equivalência estatística dos modelos AD e FA no sentido de igualdade dos expoentes críticos.

Quanto ao estilo da apresentação, optamos por uma descrição simples das ideias sempre que, para estas, exista na literatura especializada uma versão rigorosa. Só nos afastamos desta linha naqueles pontos onde nos foi necessário construir o suporte rigoroso.

1- O método de van Hemmen e o modelo AD.

Nosso principal objetivo nessa seção consiste em caracterizar e resolver a versão Curie-Weiss do modelo AD, no sentido de determinar sua densidade de energia livre no limite termodinâmico, através de um método proposto por van Hemmen et al. [22].

Antes mesmo de definir o modelo AD vamos, a seguir, apresentar uma descrição heurística do método de van Hemmen.

(i) O método

Consideremos um sistema de N spins clássicos do tipo Ising ($\sigma_i = \pm 1$) numa rede Λ , descrito por uma hamil-

toniana $H(\{\sigma_i\})$. Admitamos que à cada configuração $\sigma \in \{\sigma_i\}$ dos spins esteja associada, de forma unívoca, uma quantidade $m = m(\sigma) \in \mathbb{R}$ de tal forma que toda a dependência de $H(\sigma)$ no que diz respeito às configurações σ se realize através de m . Neste caso podemos escrever

$$H(\sigma) = H(m).$$

Assim, por exemplo, no caso do modelo de Curie-Weiss cuja hamiltoniana é dada por

$$H_{CW}(\sigma) = -\frac{1}{2} \frac{J}{N} \left\{ \sum_{i=1}^N \sigma_i \right\}^2,$$

podemos definir a quantidade $m(\sigma)$ co-mo

$$m(\sigma) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{N}} \sigma_i ,$$

com o que

$$\underset{\text{c.w.}}{H(\sigma)} = \underset{\text{c.w.}}{H(m)} = -\frac{1}{2} J N m^2 .$$

A densidade de energia livre, $f(\beta)$, como sabemos, é definida por:

$$-\beta f(\beta) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \ln \left[\text{Tr}_{\sigma} \exp(-\beta H(\sigma)) \right] \right\} .$$

Orá, como $H(\sigma) = H(m)$, então, ao fixarmos m estaremos fixando a energia $E(m)$ do sistema e, em assim sendo, o traço em σ contido na definição de $f(\beta)$ pode ser realizado da seguinte forma:

$$\text{Tr}_{\sigma} \{ X(m) \} = \text{Tr}_m \{ \Omega(m) X(m) \} ,$$

onde $X(m)$ representa um observável e

$\Omega(m)$ a degenerescência do nível de energia $E(m)$, isto é, o número de configurações σ dos spins que correspondem a um mesmo valor m . Por outro lado, sendo

$$S(m) = N\eta(m)$$

a entropia do sistema, o número $\Omega(m)$ é dado por:

$$\Omega(m) = e^{\frac{S(m)}{k}} = e^{\frac{N\eta(m)}{k}}$$

Assim sendo

$$\text{Tr}_{\sigma} \{ X(m) \} = \text{Tr}_m \left\{ e^{N\eta(m)} X(m) \right\}$$

e desta forma, tomando-se $X(m) = e^{-\beta H(m)}$, a densidade de energia livre pode ser escrita na seguinte forma:

$$-\beta f(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \ln \left[\sum_m \exp(-\beta H(m) + N\sigma(m)) \right] \right\}$$

ou ainda

$$-\beta f(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \ln \left[\sum_m \exp(N\varphi(m) + N\sigma(m)) \right] \right\},$$

onde

$$\varphi(m) \equiv -\beta \frac{H(m)}{N}.$$

No limite termodinâmico, quando $N \rightarrow \infty$, esperamos que o traço, que é uma soma sobre as 2^N configurações de spins, transforme-se numa integral sobre m , isto é,

$$\begin{aligned} \sum_m \exp[-\beta H(m)] &= \sum_m \exp[N(\varphi(m) + \sigma(m))] \\ &\sim \int_{\mathbb{R}} \exp[N(\varphi(m) + \sigma(m))] dm. \end{aligned}$$

Desta feita seríamos conduzidos, pela a-

plicação do método de Laplace [25], à seguinte expressão para $f(\beta)$:

$$-\beta f(\beta) = \max_{m \in \mathbb{R}} \{ \varphi(m) + \eta(m) \}.$$

As considerações anteriores, de natureza informal, têm uma versão rigorosa — sustentada por resultados de H. Kramér e H. Chernoff [26], relativos à teoria de grandes desvios, e de M. D. Donsker e S.R.S. Varadhan [27, 28], relativos ao método de Laplace — que em linhas gerais a seguir consideramos.

Sejam $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e seja S_N definida como a seguir:

$$S_N \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma_i .$$

Pela lei dos grandes números [29] temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \langle \eta_i \rangle = \alpha \quad \forall i$$

com probabilidade um, onde o símbolo $\langle A(\eta) \rangle$ denota a média da quantidade $A(\eta)$ com relação à distribuição de probabilidade da variável aleatória η . Consequentemente a probabilidade da grandeza S_N se afastar muito da média α diminui à medida que N cresce, isto é, o evento

$$\{|S_N - \alpha| \geq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

denominado grande desvio, torna-se cada vez menos provável quando $N \rightarrow \infty$. De fato, Cramér e Chernoff [26] mostraram

que a probabilidade de um grande desvio vai a zero com rapidez exponencial, isto é, admitindo, sem perda de generalidade, $\alpha = 0$, então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \ln \text{Prob}\{S_N \geq \varepsilon\} \right] = -C^*(\varepsilon)$$

onde

$$C^*(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{xt - C(t)\}$$

é a transformada de Legendre da função convexa

$$C(t) = \ln \mathbb{E}[\exp(t\eta)] ,$$

sendo que $\text{Prob}\{\cdot\}$ denota a probabilidade do evento $\{\cdot\}$ e $\mathbb{E}[\cdot]$ o valor esperado de $\{\cdot\}$ com relação à distribuição de probabilidade comum, λ , às variáveis aleatórias η_i , isto é:

$$E[\exp(t\eta)] = \int \exp(t\eta) \lambda d\eta.$$

A observação anterior sobre a convexidade da função $C(t)$ permite concluir que também sua transformada de Legendre, a função $C^*(x)$, é convexa [30]. Este fato tem sua importância associada à interpretação física da função $-C^*(x)$ que, como veremos, é a entropia do processo estocástico.

O resultado de Cramér e Chernoff acerca do decaimento exponencial de um grande desvio, que para o evento $\{S_N \leq \varepsilon\}$ com $\varepsilon < 0$ vale uma forma análoga, sugere que, quando $N \rightarrow \infty$,

$$\text{Prob}\{m \leq S_N \leq m + dm\} \sim \exp\{-N C^*(m)\} dm$$

de modo que, sendo $F(S_N)$ uma função contínua, então

$$\mathbb{E}\{\exp\{NF(S_N)\}\} \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{N[F(m) - C^*(m)]\} dm$$

e assim

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \ln \mathbb{E}\{\exp\{NF(S_N)\}\} \right\} = \max_m \{F(m) - C^*(m)\}.$$

As três últimas expressões representam o conteúdo principal da generalização do método de Laplace desenvolvida por Donsker e Varadhan [27,28].

Retomemos a questão física, agora com a hipótese adicional de que a quantidade $m(\sigma)$, anteriormente caracterizada, tenha uma definição à da grandeza S_N que acabamos de considerar, isto é, como uma soma de variáveis alea-

tórias independentes, podendo os spins do tipo Ising, σ_i , desempenhar o papel das variáveis aleatórias η_i . Nesta situação, e como temos 2^N configurações σ de spins, podemos escrever que:

$$\mathbb{E}[\cdot] \equiv \frac{1}{2^N} \text{Tr}[\cdot].$$

Desta forma, levando em conta as duas últimas expressões juntamente com a definição de densidade de energia livre, temos:

$$-\beta f(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \ln \left[2^N \mathbb{E} \left(\exp(N\varphi(m)) \right) \right] \right\}$$

ou seja

$$-\beta f(\beta) = \ln z + \max_m \{ \varphi(m) - c^*(m) \}.$$

A menos da imaterial constante aditiva $\ln(z)$, a comparação da última ex-

pressão com aquela anteriormente obtida para $f(\beta)$ nos fornece para a entropia por spin a seguinte expressão:

$$S(m) = -C^*(m).$$

Para um caso mais geral no qual a dependência da hamiltoniana, no que diz respeito às configurações σ dos spins, concentra-se não em uma única quantidade $m = m(\sigma) \in \mathbb{R}$ mas num vetor $\vec{m} = \vec{m}(\sigma) \in \mathbb{R}^n$, de sorte que $H = H(\vec{m})$, e admitindo-se, agora para as componentes do vetor \vec{m} , hipóteses análogas às feitas para m , temos, como provado por van Hemmen et al. [22], de forma análoga à anterior, que:

$$-\beta f(\beta) = \ln 2 + \max_{\vec{m}} \{ S(\vec{m}) - C^*(\vec{m}) \}$$

onde

$$\varphi(\vec{m}) = -\beta \frac{H(\vec{m})}{N} ,$$

$$C^*(\vec{m}) = \sup_{\vec{t}} \{ \vec{m} \cdot \vec{t} - C(\vec{t}) \} , \quad \vec{t} \in \mathbb{R}^n ,$$

$$C(\vec{t}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \ln \left[\frac{1}{2^N} \text{Tr} \exp(N\vec{m} \cdot \vec{t}) \right] \right\} .$$

(ii) O modelo AD.

Nossa versão Curie-Weiss do modelo antiferromagnético é descrita numa rede finita $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, de cardinalidade $|\Lambda| = N$, constituída de duas subredes, Λ_+ e Λ_- , conforme ilustra a figura a seguir:

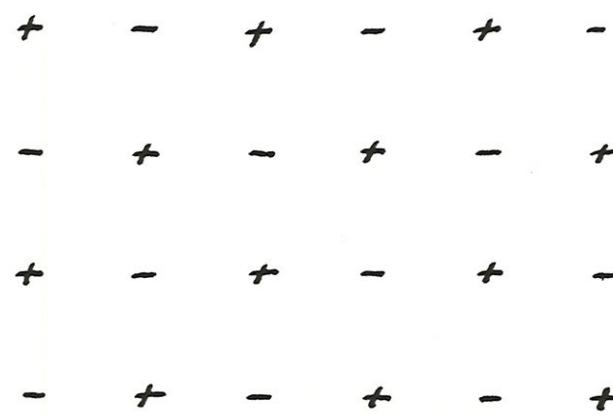


Figura 1.1- Subredes Λ_+ e Λ_-

isto é, $\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$ onde $\Lambda_\pm = \Lambda \cap \mathbb{Z}_\pm^d$ com \mathbb{Z}_\pm^d (respec. \mathbb{Z}_-^d) sendo o subconjunto de \mathbb{Z}^d formado pelos elementos cuja soma das componentes é um número par (respec. ímpar).

Aos sítios i da rede Λ associamos variáveis de spin, $s_i = \pm 1$, que interagem entre si, ferromagnética ou antiferromagneticamente conforme consideram-se, respectivamente, os pares (i, j) na mesma subrede (Λ_+ ou Λ_-) ou em subredes distintas ($i \in \Lambda_+$ e $j \in \Lambda_-$), bem como com um campo magnético uniforme e determinístico H . A hamiltoniana do nosso modelo (sem diluição) é portanto

$$H(\{s_i\}) = -\frac{J}{2N} \sum_{i,j \in \Lambda_+} s_i s_j - \frac{J}{2N} \sum_{i,j \in \Lambda_-} s_i s_j + \frac{J}{N} \sum_{\substack{i \in \Lambda_+ \\ j \in \Lambda_-}} s_i s_j + H \sum_{i \in \Lambda} s_i ,$$

com o potencial $J > 0$.

A versão "diluída" do modelo anterior é aquela na qual existem alguns sítios da rede Λ , distribuídos aleatoriamente, desocupados ou, equivalentemente, ocupados por "impurezas" que não interagem com os spins, com o campo magnético externo e nem entre si. Esta situação pode ser caracterizada matematicamente associando-se à cada sítio $i \in \Lambda$, além do spin s_i , uma variável aleatória ξ_i assumindo o valor 0 ou 1 conforme exista ou não, respectivamente, uma impureza no sítio i . Estas variáveis aleatórias $\xi_i \in \{0, 1\}$ que descrevem a diluição e que por isto serão aqui denominadas variáveis de diluição, são, por

hipótese, consideradas independentes e identicamente distribuídas, com densidade de probabilidade

$$\chi(\beta) = p \delta(\beta-1) + q \delta(\beta)$$

sendo que

$$p+q=1 \quad \text{e} \quad p \in (0,1].$$

A hamiltoniana do antiferromagneto diluído na presença de um campo magnético uniforme (modelo AD) será, então, na aproximação Curie-Weiss, dada por:

$$\begin{aligned}
 H_{AD}(\{S_i\}) = & -\frac{J}{2N} \sum_{i,j \in \Lambda_+} \bar{S}_i \bar{S}_j S_i S_j - \frac{J}{2N} \sum_{i,j \in \Lambda_-} \bar{S}_i \bar{S}_j S_i S_j + \\
 & + \frac{J}{N} \sum_{\substack{i \in \Lambda_+ \\ j \in \Lambda_-}} \bar{S}_i \bar{S}_j S_i S_j + H \sum_{i \in \Lambda} \bar{S}_i S_i \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

Notemos que o modelo AD é ma

peado em um ferromagneto (diluído) em campo alternado, já que a transformação

$$S_i \rightarrow \sigma_i \quad \forall i \in L_+$$

$$S_i \rightarrow -\sigma_i \quad \forall i \in L_-$$

conduz $H(\{S_i\})_{AD}$ a

$$\begin{aligned} H(\{\sigma_i\})_{AD} &= -\frac{J}{2N} \sum_{i,j \in L_+} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j \sigma_i \sigma_j - \frac{J}{2N} \sum_{i,j \in L_-} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j \sigma_i \sigma_j + \\ &- \frac{J}{N} \sum_{\substack{i \in L_- \\ j \in L_-}} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j \sigma_i \sigma_j + H \sum_{i \in L_+} \bar{\sigma}_i \sigma_i - H \sum_{i \in L_-} \bar{\sigma}_i \sigma_i = \\ &= -\frac{J}{2N} \sum_{i,j \in L} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in L} H_i \bar{\sigma}_i \sigma_i , \quad (1.2) \end{aligned}$$

onde

$$H_i = \begin{cases} H & \forall i \in L_+ \\ -H & \forall i \in L_- \end{cases} .$$

Introduzindo o vetor $\vec{m} = (m_+, m_-)$ $\in \mathbb{R}^2$, cujas componentes são definidas como as magnetizações de subrede,

$$m_{\pm} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i \in L_{\pm}} \bar{\sigma}_i \sigma_i ,$$

a hamiltoniana (1.2) pode ser escrita na forma

$$\underset{AD}{H}(\vec{m}) = -\frac{1}{2} J N (m_+ + m_-)^2 + H N (m_+ - m_-)$$

apta à aplicação do método de van Hemmen descrito anteriormente. Assim, a densidade de energia livre $f(\beta)$ será dada por:

$$-\beta f(\beta) = \max_{\vec{m}} \{ \varphi(\vec{m}) - C^*(\vec{m}) \} + \ln(2)$$

onde

$$\varphi(\vec{m}) = -\beta \frac{H_{AD}(\vec{m})}{N},$$

$$C^*(\vec{m}) = \sup_{\vec{t} \in \mathbb{R}^2} \{ \vec{m} \cdot \vec{t} - C(\vec{t}) \}, \quad \vec{t} = (t_+, t_-)$$

e

$$C(\vec{t}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \ln \left[\frac{1}{2^N} \text{Tr} \exp(N\vec{m} \cdot \vec{t}) \right] \right\}.$$

Nós então computamos:

$$\begin{aligned}
 C(\vec{t}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \ln \left[\frac{1}{2^N} \sigma \operatorname{Tr} \left(\exp \left(t_+ \sum_{i \in \Lambda_+} \xi_i \sigma_i \right) \exp \left(t_- \sum_{j \in \Lambda_-} \xi_j \sigma_j \right) \right) \right] \right\} = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \ln \left[\frac{1}{2^N} \left(\prod_{i \in \Lambda_+, \sigma_i=\pm 1} \exp(t_+ \xi_i \sigma_i) \right) \left(\prod_{j \in \Lambda_-, \sigma_j=\pm 1} \exp(t_- \xi_j \sigma_j) \right) \right] \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N/2} \sum_{i \in \Lambda_+} \ln [\cosh(t_+ \xi_i)] \right\} + \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N/2} \sum_{j \in \Lambda_-} \ln [\cosh(t_- \xi_j)] \right\}
 \end{aligned}$$

ou seja

$$C(\vec{t}) = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N/2} \sum_{i \in \Lambda_+} \eta_i + \frac{1}{N/2} \sum_{j \in \Lambda_-} \eta_j \right\}$$

sendo $\eta_i \in \eta_j$, com $i \in \Lambda_+ \subset j \in \Lambda_-$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, dadas por:

$$\eta_i \equiv \ln [\cosh(t_+ \xi_i)]$$

$$\text{e} \quad \eta_j \equiv \ln [\cosh(t_- \xi_j)].$$

Logo, pela lei dos grandes números, podemos escrever:

$$C(\vec{t}) = \frac{1}{2} \langle \ln [\cosh(t_+ \xi)] \rangle + \frac{1}{2} \langle \ln [\cosh(t_- \xi)] \rangle.$$

Tendo em conta a densidade de probabilidade de $\chi(\xi)$ da variável de diluição ξ , segundo a qual $\xi=1$ com probabilidade p e $\xi=0$ com probabilidade $q=1-p$, resulta:

$$C(\vec{t}) = \frac{p}{2} \ln(\cosh t_+) + \frac{p}{2} \ln(\coth t_-) .$$

A transformada de Legendre de $C(\vec{t})$ será então,

$$\begin{aligned} C^*(\vec{m}) &= \sup_{\vec{t}} \{ \vec{m} \cdot \vec{t} - C(\vec{t}) \} = \\ &= \sup_{\vec{t}} \left\{ m_+ t_+ + m_- t_- - \frac{p}{2} \ln(\coth t_+) - \frac{p}{2} \ln(\cosh t_-) \right\} . \end{aligned}$$

ou ainda

$$C^*(\vec{m}) = m_+ t_+ + m_- t_- - \frac{p}{2} \ln(\coth t_+) - \frac{p}{2} \ln(\cosh t_-)$$

com $\vec{t} = (t_+, t_-)$ determinado pelas equações

$$m_\pm = \frac{p}{2} \operatorname{tgh} t_\pm \Rightarrow t_\pm = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{2m_\pm}{p}}{1 - \frac{2m_\pm}{p}} \right)$$

que conduzem, após algumas manipulações algébricas, à seguinte expressão:

$$C^*(\vec{m}) = \frac{m_+}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{2m_+}{p}}{1 - \frac{2m_+}{p}} \right) + \frac{m_-}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{2m_-}{p}}{1 - \frac{2m_-}{p}} \right) + \\ + \frac{p}{4} \ln \left[1 - \left(\frac{2m_+}{p} \right)^2 \right] + \frac{p}{4} \ln \left[1 - \left(\frac{2m_-}{p} \right)^2 \right].$$

De posse da função $C^*(\vec{m})$ podemos determinar a densidade de energia livre:

$$-\beta f_{AD}(\beta, J, p, H) = \max_{\vec{m}} \left\{ -\beta \frac{H(\vec{m})}{N} - C^*(\vec{m}) \right\}$$

ou seja

$$-\beta f_{AD}(\beta, J, p, H) = \beta \frac{J}{2} (m_+ + m_-)^2 - \beta H(m_+ - m_-) - C^*(\vec{m}),$$

com $\vec{m} = (m_+, m_-)$ determinado pelas equações a seguir,

$$\frac{\partial C^*(\vec{m})}{\partial m_\pm} = \beta J(m_+ + m_-) \mp \beta H$$

que, tendo em conta a expressão obtida para $C^*(\vec{m})$, assumem a seguinte forma,

$$\frac{1}{Z} \ln \left(\frac{1 + \frac{2m_+}{P}}{1 - \frac{2m_-}{P}} \right) = \beta J(m_+ + m_-) \mp \beta H$$

de onde resultam para m_+ e m_- as expressões:

$$m_{\pm} = \frac{P}{2} \tanh [\beta J(m_+ + m_-) \mp \beta H].$$

Se agora inserirmos estes dois últimos resultados na expressão de $C^*(\vec{m})$ e em seguida esta última na expressão da densidade de energia livre f_{AD} , teremos:

$$f_{AD}(\beta, J, P, H) = \frac{1}{2} J m^2 - \frac{P}{2\beta} \ln [\cosh(\beta J m + \beta H)] + \\ - \frac{P}{2\beta} \ln [\cosh(\beta J m - \beta H)] \quad (1.3)$$

onde o parâmetro de ordem m , defini-

do por

$$m \equiv m_+ + m_- ,$$

é obtido da equação

$$m = \frac{\rho}{2} \tanh(\beta J m + \beta H) + \frac{\rho}{2} \tanh(\beta J m - \beta H). \quad (1.4)$$

Equivalentemente podemos escrever que:

$$f(\beta, J, \rho, H) = \inf_{AD} g_{AD}(\beta, J, \rho, H, m) \quad (1.5)$$

sendo g_{AD} , a densidade de energia livre no ensemble de magnetização, definida pelo segundo membro de (1.3), isto é,

$$\begin{aligned} g_{AD}(\beta, J, \rho, H, m) = & \frac{J}{2} m^2 - \frac{\rho}{2\beta} \ln[\cosh(\beta J m + \beta H)] + \\ & - \frac{\rho}{2\beta} \ln[\cosh(\beta J m - \beta H)]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Finalizando esta seção, comparamos o método aqui utilizado no

tratamento do modelo AD com a abordagem usual de campo médio usada, por exemplo, por J.L. Candy [14] e S. Galam [14]. Para tal consideremos a função de partição do modelo AD na versão Curie-Weiss,

$$Z_{AD} = \text{Tr}_S \left\{ \exp[-\beta H_{AD}(\{s_i\})] \right\}$$

com $H_{AD}(\{s_i\})$ dada em (1.1), e realizemos a transformação de Hubbard-Skratovovich [24] (como em Candy [14]) para obter o fator de normalização α e ago-

$$\begin{aligned} Z_{AD} &= \frac{1}{N^{1/2}} \int_{i \in \Lambda_+} (\prod_i dt_i) \exp \left\{ -\frac{\beta J}{2N} \sum_{i,j \in \Lambda_+} t_i t_j - \frac{\beta J}{2N} \sum_{i,j \in \Lambda_-} t_i t_j + \frac{\beta J}{N} \sum_{i \in \Lambda_+, j \in \Lambda_-} t_i t_j + \right. \\ &\quad + \left(\sum_{i \in \Lambda_+} \xi_i \right) \ln \cosh \left\{ \beta \left[\frac{J}{N} \left(\sum_{i \in \Lambda_+} t_i - \sum_{j \in \Lambda_-} t_j \right) + H \right] \right\} + \\ &\quad \left. + \left(\sum_{j \in \Lambda_-} \xi_j \right) \ln \cosh \left\{ \beta \left[\frac{J}{N} \left(\sum_{i \in \Lambda_+} t_i - \sum_{j \in \Lambda_-} t_j \right) - H \right] \right\} \right\}. \end{aligned}$$

onde

$$N' = \int \left(\prod_{i \in \Lambda_+} d\beta_i \right) \exp \left\{ -\frac{\beta J}{N} \left(\sum_{i,j \in \Lambda_+} \beta_i \beta_j + \sum_{i,j \in \Lambda_-} \beta_i \beta_j - 2 \sum_{\substack{i \in \Lambda_+ \\ j \in \Lambda_-}} \beta_i \beta_j \right) \right\}.$$

Introduzindo a variável

$$M \equiv \frac{1}{N} \sum_{i \in \Lambda_+} \beta_i - \frac{1}{N} \sum_{j \in \Lambda_-} \beta_j,$$

a expressão de Z_{AD} simplifica-se para:

$$Z_{AD} = \frac{1}{N'} \int dM \exp \left\{ -N \left[\beta \frac{JM^2}{2} - \left(\sum_{i \in \Lambda_+} \frac{\beta_i}{N} \right) \ln \cosh [\beta(JM + H)] + \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\sum_{j \in \Lambda_-} \frac{\beta_j}{N} \right) \ln \cosh [\beta(JM - H)] \right] \right\},$$

onde o fator de normalização N' é agora dado por

$$N' = \int dM \exp \left(-\beta \frac{JM^2}{2} \right).$$

No limite termodinâmico, $N \rightarrow \infty$, $\frac{1}{N} \sum_{i \in \Lambda_+} \beta_i \rightarrow \frac{1}{2} p$ com probabilidade

um pela lei dos grandes números e por tanto, pelo método de Laplace,

$$f_{AD}(\beta, J, \mu, H) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\beta N} \ln Z_{AD} \right] = \\ = \inf_m \left\{ J \frac{m^2}{Z} - \frac{\mu}{2\beta} \ln \cosh[\beta(Jm + H)] - \frac{\mu}{2\beta} \ln \cosh[\beta(Jm - H)] \right\}.$$

Nós vemos assim que, na versão Curie-Weiss da aproximação de campo médio, a lei dos grandes números é ingrediente que desempenha papel fundamental: explica o procedimento de tomar médias.

Esta forma alternativa segundo a qual tratamos o modelo AD é apenas informal, na medida em que algumas integrais envolvidas podem não estar bem definidas. A seguir, na seção

2, revisitando o modelo ferromagnético com campo aleatório [23], uma versão nigorosa é apresentada.

2-Derivação alternativa dos resultados de van Hemmen.

Como dissemos ao final da seção anterior, vamos, nesta, colimar esforços para justificar rigorosamente as etapas do procedimento lá apresentado heuristicamente.

Visando os objetivos da próxima seção, onde a equivalência entre os modelos AD e FA, ambos na versão Cunie - Weiss, é considerada, nesse enfoque rigoroso para o aludido tratamento informal será aplicado, ao invés de no modelo AD, no FA, obtendo assim os resultados que permitirão, quando comparados aos obtidos na seção 1 para o modelo AD, explicitar um mapeamento que esta-

garante a exata correspondência entre eles.

Tomemos então a versão Curie-Weiss do modelo de Ising ferromagnético em campo aleatório, numa rede finita $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, definido pela hamiltoniana

$$H_{FA} = -\frac{J}{2N} \sum_{i,j \in \Lambda} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in \Lambda} H_i \sigma_i ,$$

onde os spins associados à cada sítio $i \in \Lambda$, σ_i , são, por simplicidade, tomados como do tipo Ising ($\sigma_i = \pm 1$) e as variáveis aleatórias H_i , descrevendo o campo magnético aleatório, são independentes e identicamente distribuídas com densidade de probabilidade $p(H)$. N denota, como antes, o número de sítios de Λ e $J > 0$ a interação.

Seja $M_{N,1}(R)$ o espaço euclídeo no das matrizes coluna (N linhas) em R , com as usuais operações de adição e multiplicação por número real e com o produto interno entre dois de seus vetores, denotados genericamente por α , dado por :

$$(\alpha, \beta) = \text{Tr}(\beta^t \alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i.$$

Letras maiúsculas dobradas, como por exemplo A , denotam não transformações lineares em $M_{N,1}(R)$. Assim sendo, a hamiltoniana H_{FA} pode ser escrita na seguinte forma :

$$H_{FA} = -\frac{1}{2} (\Sigma, J \Sigma) + (\Sigma, \Gamma)$$

onde

$$J = (J_{ij})_{i,j=1}^{N,N} \quad \text{e} \quad J_{ij} = \frac{J}{N} \quad \forall i,j.$$

Ficará claro nos desenvolvimentos ulteriores que a aplicação da "estratégia" escolhida para a obtenção da densidade de energia livre, exige que \mathbb{J} seja não singular. Assim sendo, como $\det(\mathbb{J}) = 0$, vamos considerar, ao invés do modelo H_{FA} , um modelo "perturbado" $H(S)$ tal que :

$$\lim_{S \rightarrow 0} H(S) = H_{FA} \text{ e } \det[\mathbb{J}(S)] \neq 0 \text{ se } S \neq 0.$$

Uma das possibilidades que temos para $H(S)$ é a seguinte :

$$H(S) = -\frac{1}{2} (\Sigma, \mathbb{J}(S) \Sigma) + (H, \Sigma)$$

onde

$$\mathbb{J}(S) = \mathbb{J} + S \frac{T}{N} \mathbb{I} \quad \text{sendo } \mathbb{I} = (\delta_{ij})_{i,j=1}^{N,N}.$$

A função de partição para este modelo será então:

$$\begin{aligned} Z_{FA}(J) &= \frac{1}{\sigma} \left\{ \exp \left[-\beta H_{FA}(J) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{\sigma} \left\{ \exp \left[\frac{\beta}{2} (\Sigma, J(J) \Sigma) - \beta (\tilde{H}, \Sigma) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Lançando mão, tal como na transformação de Hubbard-Stratonovich, da identidade

$$\exp \left[\frac{1}{2} (z, Az) \right] = \frac{1}{N} \int_{i \in \Lambda} (\pi d\ell_i) \exp \left[-\frac{1}{2} (z, A^{-1} z) - (z, \ell_i) \right],$$

onde

$$N = \int_{i \in \Lambda} (\pi d\ell_i) \exp \left[-\frac{1}{2} (z, A^{-1} z) \right]$$

e os ℓ_i , $i=1, 2, \dots, N$, são campos escalares reais, a função de partição pode ser escrita como a seguir:

$$Z_{FA}(J) = \frac{1}{N(J)} \frac{1}{\sigma} \left\{ \int_{i \in \Lambda} (\pi d\ell_i) \exp \left[-\frac{1}{2\beta} (z, J(J) z) - (\beta \tilde{H} + z, \Sigma) \right] \right\}$$

ou ainda

$$\frac{Z(S)}{FA} = \frac{e^N}{N(S)} \int (\prod_{i \in \Lambda} d\ell_i) \exp \left\{ -\frac{1}{2\beta} (\ell, \mathbb{J}(S) \ell) + \sum_{i \in \Lambda} \ln [\cosh(\beta H_i + \ell_i)] \right\}$$

onde

$$N(S) = \int (\prod_{i \in \Lambda} d\ell_i) \exp \left[-\frac{1}{2\beta} (\ell, \mathbb{J}(S) \ell) \right].$$



Para que as integrais envolvidas na expressão de $\frac{Z(S)}{FA}$ existam é necessário que a matriz $\mathbb{J}(S)$ seja positiva definida, isto é, todos os seus autovalores sejam estritamente positivos. Para a determinação dos autovalores de $\mathbb{J}(S)$ observemos primeiramente que a matriz

$$\mathbb{I} = (a_{ij})_{i,j=1}^{N,N} \quad \text{com } a_{ij} = 1 \neq i,j,$$

corresponde a uma transformação linear em $M(N, \mathbb{R})$ cuja imagem é o subespaço gerado pelo vetor

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, todos os autovetores de \mathbb{II} com autovalores diferentes de zero são da forma $\alpha \underline{z}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, e consequentemente têm todos o mesmo autovalor de \underline{z} , ou seja, N . Além disto, todos os vetores ortogonais a \underline{z} são autovetores de \mathbb{II} com autovalor zero. Visto que

$$\mathbb{J}(S) = \frac{J}{N} (\mathbb{II} + S\mathbb{II}) ,$$

os autovalores de $\mathbb{J}(S)$ são:

$$\lambda_1 = \frac{J}{N} (N+S) \quad \text{e} \quad \lambda_i = \frac{J}{N} S, \quad i=2,3,\dots,N$$

e portanto $\mathbb{J}(S)$ será positiva definida se e só se $S > 0$.

Com a transformação linear

de variáveis

$$\tilde{M} = \frac{1}{\beta} \tilde{J}(S) \tilde{f},$$

cujo jacobiano

$$\det \left[\frac{1}{\beta} \tilde{J}'(S) \right] = \frac{\beta^{-N}}{(J_N)^N (N+S) J^{N-1}}$$

será diferente de zero para $S > 0$, obtemos:

$$Z_{FA}(S) = \frac{Z^N}{N(S)} \int_{i \in \Lambda} (\pi dM_i) \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} (J(S) \tilde{M}, \tilde{M}) + \right. \\ \left. + \sum_{i \in \Lambda} \ln \left[\cosh \left(\beta H_i + \beta \sum_{j \in \Lambda} J(S) M_j \right) \right] \right\}$$

onde agora

$$N(S) = \int_{i \in \Lambda} (\pi dM_i) \exp \left[-\frac{\beta}{2} (J(S) \tilde{M}, \tilde{M}) \right].$$

O processo de ortogonalização de Gram - Schmidt [31] garante a existência de uma base ortogonal $F = \{F_1, F_2, \dots, F_N\}$ de $M_{N,1}(R)$ tal que:

$$\int \tilde{f}^{(S)} \tilde{F}_i = \lambda_i \tilde{F}_i \quad \text{onde } \tilde{F}_i = \underline{1}.$$

Assim sendo a transformação de variáveis

$$\tilde{M} = \sum_{i \in \Lambda} m_i \tilde{F}_i$$

conduz a

$$\begin{aligned} Z_{FA}^{(S)} &= \frac{Z^N}{N(S)} \int_{\Lambda} \left(\prod_{i \in \Lambda} dm_i \right) \exp \left\{ -\beta \left[S(N+S)m_1^2 + \frac{S}{N} \sum_{j=2}^N m_j^2 \| \tilde{F}_j \|^2 \right] \right\} + \\ &+ \sum_{i \in \Lambda} \ln \left\{ \cosh \left[\beta H_i + \beta \frac{S}{N} (N+S)m_1 + \beta \frac{S}{N} \sum_{j=2}^N m_j (\tilde{E}_i, \tilde{F}_j) \right] \right\}, \end{aligned}$$

onde \tilde{E}_i é o i -ésimo vetor da base canônica de $M_{N,L}(R)$, isto é

$$\tilde{E}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-ésima linha}$$

e

$$N(S) = \int_{\Lambda} \left(\prod_{i \in \Lambda} dm_i \right) \exp \left\{ -\beta \left[S(N+S)m_1^2 + \frac{S}{N} \sum_{j=2}^N m_j \| \tilde{F}_j \|^2 \right] \right\}.$$

Visto que

$$\lim_{J \rightarrow 0} Z(S) = Z_{FA},$$

então, pelo teorema da convergência dominada [32], que, neste caso, permite comutar as operações integração e limite, obtemos a seguinte expressão para a função de partição do modelo FA:

$$Z_{FA} = \frac{Z^N}{N} \int dm \exp \left\{ -\beta \frac{J}{2} N m^2 + \sum_{i \in \Lambda} \ln \cosh(\beta(H_i + Jm)) \right\}$$

onde

$$N = \int dm \exp \left\{ -\beta \frac{J}{2} N m^2 \right\}.$$

A densidade de energia livre será então:

$$-\beta f_{FA} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \ln Z_{FA} \right\} =$$

$$= \ln(2) + \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \ln \int dm \exp \left\{ -N \left[\beta \frac{J}{2} m^2 - \frac{Y^{(m)}}{N} \right] \right\} \right\}$$

onde

$$\frac{Y^{(m)}}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i \in \Lambda} \ln \cosh(\beta Jm + \beta H_i).$$

Antes de prosseguirmos na determinação de f_{FA} vale lembrar que os resultados a obter, relativos à termodinâmica do sistema, espera-se, sejam válidos com probabilidade um, isto é, os mesmos para quase todas as configurações de campo aleatório $\{H_i\}$. Este de fato é o caso, pois estando a dependência da energia livre f_{FA} em relação às configurações $\{H_i\}$ concentrada na função $\gamma_N^{(m)}$, e sendo esta última da forma

$$\gamma_N^{(m)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma_i^{(m)}$$

onde $\gamma_i^{(m)}$ são variáveis aleatórias independentes, então, pela lei dos grandes números, temos, para cada m fixo, que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Y_n(m) = \langle \eta_i \rangle = \int \eta_i \rho(H) dH \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

a menos de um conjunto B_m (de configurações de campo) de medida nula, que em princípio pode depender de m .

Da última expressão para f_{FA} vemos que m pertence \mathbb{R} e portanto é relevante a seguinte questão:

$\bigcup_{m \in \mathbb{R}} B_m$ é um conjunto de medida nula?

Em outras palavras: a convergência da sequência de funções (de domínio \mathbb{R}) $\{Y_n\}$ para $\langle \eta \rangle$, se dá com probabilidade um, ou seja, a menos de um conjunto de medida nula independente de m ? A resposta (afirmativa) a esta questão pode ser obtida através dos seguintes passos [20]:

1º) $\bigcup_{m \in \mathbb{Q}} B_m$ é um conjunto de medida nula:
de fato, \mathbb{Q} (conjunto dos números racionais) é numerável e a união numerável de conjuntos de medida nula é também de medida nula.

Temos assim garantida a convergência com probabilidade um não para a sequência de funções $\{Y_n\}$ mas para a sequência $\{Y_{n(\varphi)}\}$ das restrições de Y_N a φ .

2º) A sequência $\{Y_n\}$ é equicontínua, isto é, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_x(\epsilon) > 0$ tal que $|x - z| < \delta_x(\epsilon)$ implica $|Y_N(x) - Y_N(z)| \leq \epsilon$ ($\delta_x(\epsilon)$ importante é $\delta_x(\epsilon)$ independente de N): de fato, o teorema do valor médio estabelece que

$$|Y_N(x) - Y_N(z)| \leq |x - z| \sup_{t \in \mathbb{R}} |Y'_N(t)|,$$

e como

$$Y'_N(t) = \frac{\beta J}{N} \sum_{i \in \Lambda} tgh(\beta H_i + \beta J t) \Rightarrow |Y'_N(t)| \leq \beta J ,$$

temos:

$$|Y_N(x) - Y_N(z)| \leq |x-z| \beta J .$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ escolhemos $\delta_x^{(\epsilon)} = \frac{\epsilon}{3\beta J}$

com o que $|x-z| < \delta_x^{(\epsilon)} = \frac{\epsilon}{3\beta J}$ implica

$$|Y_N(x) - Y_N(z)| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ para todo } N.$$

3º) A convergência, com probabilidade um de $\{Y_{N/2}\}$ (vista no 1º passo) e a equicontinuidade de $\{Y_N\}$ implicam a convergência com probabilidade um de $\{Y_N\}$: de fato, pois em J. Dieudonné [33] encontramos o seguinte teorema.

Seja F um espaço de Banach, E um espaço métrico, $\{f_N\}$ uma seqüência

xia equicontínua de funções de $\mathcal{E}_F(E)$ (espaço vetorial das funções de E em F contínuas). Se $D \subset E$ for denso em E e se para cada ponto $x \in D$ a sequência $\{f_N(x)\}$ é convergente em F , então a sequência $\{f_N\}$ converge para uma função contínua g .

No caso específico aqui tratado temos $E = F = \mathbb{R}$, $f_N = Y_N$ e $D = \mathbb{Q}$ que como sabemos é denso em \mathbb{R} . Com estas identificações todas as hipóteses do teorema se cumprem e daí o resultado.

Retomando a questão da determinação da densidade de energia livre f_{FA} , lancamos mão agora do seguinte re-

sultado, que se constitui numa generalização, devida a J.M.G. Amaro de Matos e J. F. Perez [18, 20], à sistemas desordenados, de um lema de Ellis e Newman [21].

| Se $\int |H| \rho(H) dH < \infty$, então

$$f_{FA} = \inf_m \left\{ J \frac{m^2}{2} - \frac{1}{\beta} Y(m) \right\}$$

| onde

$$Y(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} Y_N(m) = \langle \ln \cosh(\beta J m + \beta H) \rangle =$$

$$= \int \ln [\cosh(\beta J m + \beta H)] \rho(H) dH.$$

Para o caso de particular interesse no qual $H_i = \pm h$ ($h > 0$) com probabilidade $1/2$, isto é

$$\rho(H) = \frac{1}{2} [\delta(H+h) + \delta(H-h)],$$

Temos:

$$f_{FA} = \inf_m \left\{ \frac{1}{2} J m^2 - \frac{1}{2\beta} \ln \cosh(\beta J m + \beta h) - \frac{1}{2\beta} \ln \cosh(\beta J m - \beta h) \right\},$$

isto é,

$$\frac{f(\beta, J, h)}{f_{FA}} = \frac{1}{2} J m^2 - \frac{1}{2\beta} \ln \cosh(\beta J m + \beta h) - \frac{1}{2\beta} \ln \cosh(\beta J m - \beta h) \quad (2.1)$$

com o parâmetro de ordem m determinado por

$$m = \frac{1}{2} \tgh(\beta J m + \beta h) + \frac{1}{2} \tgh(\beta J m - \beta h) \quad (2.2)$$

ou, equivalentemente

$$\frac{f(\beta, J, h)}{f_{FA}} = \inf_m g_{FA}(\beta, J, h, m) \quad (2.3)$$

onde g_{FA} é definida pelo segundo membro de (2.1), isto é:

$$g_{FA}(\beta, J, h, m) = \frac{1}{2} J m^2 - \frac{1}{2\beta} \ln \cosh(\beta J m + \beta h) +$$

$$- \frac{1}{2\beta} \ln \cosh(\beta J m - \beta h). \quad (2.4)$$

3-A equivalência termodinâmica dos modelos FA e AD.

No cenário dos resultados obtidos nas seções anteriores, a questão da equivalência torna-se trivial. De fato, basta que comparemos as expressões encontradas para f_{AD} e f_{FA} (nespec. g_{AD} e g_{FA}) dadas em (1.3) e (2.1) (nespec. (1.6) e (2.4)) para concluirmos que:

$$f_{AD}(\beta, J, p, H) = p f_{FA}(\beta, pJ, H)$$

e

$$g_{AD}(\beta, J, p, H, m) = p g_{FA}(\beta, pJ, H, m/p),$$

estabelecendo assim a correspondência entre os dois modelos.

Como na referência [23], o diagrama de fase do modelo AD (fi-

gura 3.1) pode ser analisado através da expansão de $g_{AD}(m)$ em potências de m nas vizinhanças de $m=0$. Temos:

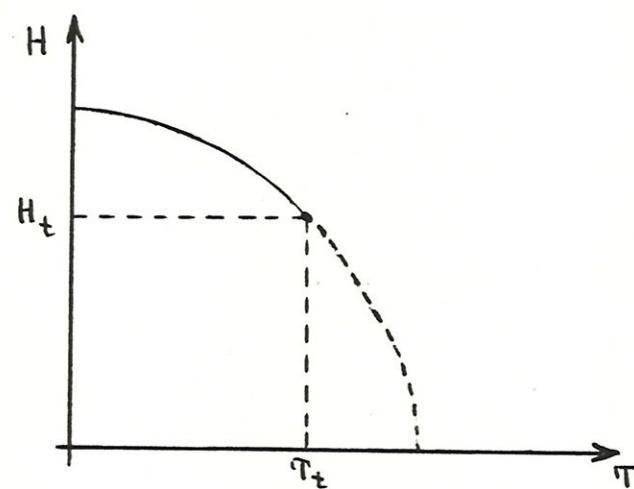


Figura 3.1 - Diagrama de fase do modelo AD.

$$g_{AD}(m) = A + Bm^2 + Cm^4 + Dm^6 + \dots$$

onde

$$A = -\frac{P}{\beta} \ln \cos(\beta H),$$

$$B = \frac{J}{2} - \frac{P}{2\beta} (\beta J)^2 \operatorname{sech}^2(\beta H),$$

$$C = \frac{P}{2\beta} (\beta J)^2 \operatorname{sech}^2(\beta H) \left[1 - 3 \operatorname{tgh}^2(\beta H) \right],$$

$$D = -\frac{P}{6\beta} (\beta J)^6 \operatorname{sech}^2(\beta H) \left[\operatorname{tgh}^4(\beta H) - \operatorname{tgh}^2(\beta H) + \frac{2}{15} \right].$$

Há uma linha crítica determinada pelas condições $B=0$ e $C>0$, isto é

$$\rho\beta J = \cosh^2(\beta H).$$

Sobre esta linha crítica existe um ponto tricírtico (H_t, T_t) determinado pelas condições $B=C=0, D>0$:

$$\rho\beta J = \frac{3}{2}, \quad \tanh^2(\beta H) = \frac{1}{3}.$$

Na figura 3.1 a linha contínua indica uma transição de primeira ordem enquanto que a tracejada uma transição de segunda ordem.

4- Flutuações.

O método de van Hemmen, usado no tratamento do modelo AD (seção 1), não é adequado à análise das flutuações no sentido de não produzir, na sua aplicação, os elementos necessários ao estudo desta questão. Vamos então retomar o citado modelo para considerá-lo de forma conveniente ao nosso atual interesse.

Aproveitaremos a ocasião para mostrar que a explícita interação ferromagnética presente nas subredes do modelo AD tratado na seção 1, é necessária ao mapeamento matemático entre as funções termodinâmicas apresentado na seção anterior, mas

que, no que tange às flutuações, não introduz modificações significativas em relação à do modelo mais natural no qual não se consideram, explicitamente, interações nas subredes.

Mais ainda, a distribuição de probabilidade assintótica e os expoentes críticos são independentes das referidas interações.

Seja então o modelo caracterizado pela seguinte hamiltoniana:

$$H(J_0) = \underset{AD}{-} \frac{J_0}{2N} \sum_{\substack{i,j \in \Lambda_+ \\ i,j \in \Lambda_-}} \bar{s}_i \bar{s}_j s_i s_j - \frac{J_0}{2N} \sum_{i,j \in \Lambda_+} \bar{s}_i \bar{s}_j s_i s_j + \frac{J}{N} \sum_{\substack{i \in \Lambda_+ \\ j \in \Lambda_-}} \bar{s}_i \bar{s}_j s_i s_j + H \sum_{i \in \Lambda} \bar{s}_i s_i \quad (4.1)$$

tal como descrita na seção 1 e com $J_0 \geq 0$, que pode ser escrita na forma

$$H(J_0) = \frac{J_1}{N} \left(\frac{S_+ + S_-}{2} \right)^2 - \frac{J_2}{N} \left(\frac{S_+ - S_-}{2} \right)^2 + H(S_+ + S_-),$$

onde

$$S_{+(-)} \equiv \sum_{i \in \Lambda_{+(-)}} \xi_i s_i ,$$

$$J_1 \equiv J - J_0 \quad e \quad J_2 \equiv J + J_0 .$$

Desta forma,

$$Z_{AD}^{(J_0)} = \text{Tr}_s \left\{ \exp \left[-\beta H_{AD}^{(J_0)} \right] \right\} =$$

$$= \frac{N^2}{2\pi} \int dq dm \exp \left[-N \phi_{AD}^N(q, m) \right]$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_{AD}^N(q, m) &= \frac{q^2 + m^2}{2} - \frac{F_+^N}{2} \ln \cosh \left(\frac{\sqrt{2\beta J_2'} m - i\sqrt{2\beta J_1'} q - 2\beta H}{2} \right) \\ &\quad - \frac{F_-^N}{2} \ln \cosh \left(\frac{\sqrt{2\beta J_2'} m + i\sqrt{2\beta J_1'} q + 2\beta H}{2} \right) \quad (4.2) \end{aligned}$$

$$\text{sendo} \quad F_{+(-)} \equiv \frac{2}{N} \sum_{i \in \Lambda_{+(-)}} \xi_i .$$

Fizemos aqui, por duas vezes, uso da identidade

$$\exp(\alpha^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \exp \left(-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}\alpha x \right)$$

com $\alpha = -i\sqrt{\frac{\beta J_1'}{N}} \left(\frac{S_+ + S_-}{2} \right)$ em um caso e

$\alpha = \sqrt{\frac{\beta J_2'}{N}} \left(\frac{S_+ - S_-}{2} \right)$ no outro caso, junto com

uma conveniente troca das variáveis de integração.

Pode-se mostrar [25] que o método assintótico de Laplace é válido para integrais múltiplas, obtendo-se assim, para a energia livre, a seguinte expressão:

$$\beta f_{AD}^{(J_0)} = \phi_{AD}^{(q^*, m^*)}$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_{AD}^{(q, m)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \phi_{AD}^N(q, m) = \\ &= \frac{q^2}{2} + \frac{m^2}{2} - \frac{\mu}{2} \left[\ln \cosh \left(\frac{\sqrt{2\beta J_2} m + i\sqrt{2\beta J_1} q + 2\beta H}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \ln \cosh \left(\frac{\sqrt{2\beta J_2} m - i\sqrt{2\beta J_1} q - 2\beta H}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

e (q^*, m^*) ponto de sela de $\phi_{AD}^{(q, m)}$. Nas variáveis

$$m_{\pm} \equiv \frac{m}{\sqrt{2\beta J_2}} \pm i \frac{q}{\sqrt{2\beta J_1}},$$

as expressões anteriores assumem a forma:

$$\beta f_{AD}(J_0) = \frac{J_0}{2} (m_+^2 + m_-^2) + J m_+ m_- -$$

$$-\frac{\rho}{2\beta} \left[\ln \cosh(\beta J_0 m_- + \beta J m_+ + \beta H) + \ln \cosh(\beta J_0 m_+ + \beta J m_- - \beta H) \right]$$

com m_{\pm} obtidos das equações

$$m_{\pm} = \frac{\rho}{2} \operatorname{tgh}(\beta J_0 m_{\pm} + \beta J m_{\mp} \mp \beta H),$$

as mesmas que se obtêm através da aplicação, tal como na seção 1, do método de van Hemmen. Em particular, para

$J_0 = J$, tem-se:

$$\beta f_{AD}(J) = \frac{1}{2} J M^2 - \frac{\rho}{2\beta} \left[\ln \cosh(\beta JM + \beta H) + \ln \cosh(\beta JM - \beta H) \right]$$

com $M \equiv m_+ + m_-$ obtido a partir de

$$M = \frac{\rho}{2} \left[\operatorname{tgh}(\beta JM + \beta H) + \operatorname{tgh}(\beta JM - \beta H) \right],$$

que, por sua vez, não se mapam de maneira óbvia nas correspondentes equa-

ções para $J \neq J_0$.

As considerações anteriores permitem-nos então afirmar que, do ponto de vista matemático, ou seja, o da existência de um mapeamento "simples" entre as termodinâmicas, o modelo AD no qual não se tem uma interação explícita nas subredes ($J_0 = 0$) não é equivalente àquele, aparentemente menos natural, em que $J_0 = J \neq 0$.

Voltemos agora nossa atenção para as flutuações do parâmetro de ordem do modelo AD, no qual $J_0 = J$; o caso mais geral no qual J_0 não é necessariamente igual a J , tem, pode-se

mostrar, no que diz respeito às flutuações, fundamentalmente o mesmo comportamento do caso matematicamente mais simples em que $J_0 = J$.

A questão das flutuações em modelos desordenados, envolvendo variáveis aleatórias como por exemplo as representam a diluição no modelo AD, é tecnicamente delicada encontrando-se porém rigorosamente controlada no trabalho de J. M. G. Amaro de Matos e J. F. Perez [18], que se constitui numa generalização a estes modelos dos resultados sobre flutuações em modelos clássicos de Curie-Weiss de R. S. Ellis e L. M. Newman [21].

Nestas referências o leitor poderá encontrar justificativas rigorosas para as considerações heurísticas que a seguir apresentamos.

O parâmetro de ordem das transições do modelo que estamos considerando, o valor de equilíbrio μ da diferença das magnetizações das subredes, definido por

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{Tr}_s \left\{ \exp(-\beta H_{AD}) \frac{S - S_+}{N} \right\}}{\text{Tr}_s \left\{ \exp(-\beta H_{AD}) \right\}},$$

é proporcional a m^* , isto é,

$$\mu = \frac{m^*}{\sqrt{\beta J'}}$$

sendo m^* tal que

$$\phi_{AD}^{(0,m^*)} = \inf \{ \phi_{AD}^{(0,m)} : m \in \mathbb{R} \} .$$

Portanto, a análise das flutuações do parâmetro de ordem consiste na determinação da distribuição de probabilidades assintótica da variável

$$y_N \equiv \frac{\frac{S_- - S_+}{N} - \mu}{N^{-\delta}} = \frac{(S_- - S_+) - N \frac{m^*}{\sqrt{\beta J}}}{N^{1-\delta}}$$

no limite em que $N \rightarrow \infty$. O valor de δ é obtido da condição de que a distribuição de y_N tenha um bom limite.

A distribuição de probabilidades de y_N para N grande está relacionada com a função (equação 4.2)

$$\begin{aligned} \phi_{AD}^{(0,m)} &= \frac{m^2}{2} - \frac{1}{N} \sum_{j \in L_+} \ln \cosh [(\sqrt{\beta J} m - \beta H) \xi_j] - \\ &\quad - \frac{1}{N} \sum_{j \in L_-} \ln \cosh [(\sqrt{\beta J} m + \beta H) \xi_j] \end{aligned} \quad (4.4)$$

do seguinte modo [20]: seja W uma variável aleatória independente de S_+ e S_- com uma distribuição Gaussiana de média zero e variância 1 (o que denotaremos por $W \sim N(0,1)$), então, para α e δ reais, tem-se

$$\frac{W}{\sqrt{\beta J' N^{\frac{1}{2}-\delta}}} + \frac{(S_- - S_+) - N\alpha}{N^{1-\delta}} \sim \frac{dm \exp\left\{-N\phi_{AD}^N\left(0, \sqrt{\beta J'}\left(\frac{m}{N^\delta} + \alpha\right)\right)\right\}}{\int dm \exp\left\{-N\phi_{AD}^N\left(0, \sqrt{\beta J'}\left(\frac{m}{N^\delta} + \alpha\right)\right)\right\}} \quad (4.5)$$

Esta fórmula pode ser facilmente obtida calculando-se as funções características dos dois membros da igualdade.

Para $N \rightarrow \infty$, o único ponto que contribuirá no cálculo de $\underline{r_\alpha}$

lones esperados é o mínimo, m_N^* , de $\phi_{AD}^N(0, m)$.

Assim sendo, se na expressão (4.5) tomarmos

$a = \frac{m_N^*}{\sqrt{\beta J}}$ e expandirmos $\phi_{AD}^N(0, \sqrt{\beta J}(\frac{m}{N\delta} + a))$ entorno de $m=0$, seremos conduzidos à distribuição assintótica da variável

$$z_N \equiv \frac{(S_- - S_+) - N \frac{m_N^*}{\sqrt{\beta J}}}{N^{1-\delta}}$$

ou seja, teremos as flutuações entorno de $\frac{m_N^*}{\sqrt{\beta J}}$ que por sua vez é uma variável aleatória que tende à $\frac{m^*}{\sqrt{\beta J}}$ no limite quando $N \rightarrow \infty$, mas que também flutua. Desta forma as flutuações de y_N poderão ser obtidas por uma "composição" das flutuações de z_N (entorno de m_N^*) com as de m_N^* (entorno de m^*).

Consideremos em primeiro lugar a questão de como m_N^* tende à

m^* quando $N \rightarrow \infty$. Ora, sendo m_N^* e m^* os mínimos de $\phi_{AD}^{(0,m)}$ e $\phi_{AD}^{(0,m)}$, respectivamente, então, são tais que

$$m_N^* = \frac{\sqrt{\beta J}}{2} \left[\tgh(\sqrt{\beta J} m_N^* - \beta H) F_+^N + \tgh(\sqrt{\beta J} m_N^* + \beta H) F_-^N \right]$$

$$m^* = \frac{PV\sqrt{\beta J}}{2} \left[\tgh(\sqrt{\beta J} m^* - \beta H) + \tgh(\sqrt{\beta J} m^* + \beta H) \right]$$

onde

$$F_{+(-)}^N \equiv \frac{2}{N} \sum_{j \in L_{+(-)}} \tilde{x}_j$$

Em primeiro lugar podemos garantir, pela lei dos grandes números, que m_N^* tende a m^* e assim, expandindo

$$\tgh(\sqrt{\beta J} m_N^* \mp \beta H)$$

entorno de m^* teremos, para temperaturas maiores ou igual à temperatura crítica, onde $m^* = 0$, a seguinte ex-

pressão:

$$\begin{aligned}
 \phi_{AD,2}^{(0,0)} m_N^* &= \frac{\sqrt{\beta J}}{2} \overbrace{\tgh(\underline{F}^N - \underline{F}_+^N)}^{(\beta H)} + \frac{\beta J}{2} \operatorname{sech}^2(\beta H) (\underline{F}^N + \underline{F}_+^N - 2p) m_N^* + \\
 &+ \frac{(\beta J)^{3/2}}{2} \operatorname{sech}^2(\beta H) \tgh(\beta H) (\underline{F}^N - \underline{F}_+^N) {m_N^*}^2 - \\
 &- \frac{1}{3!} \phi_{AD,4}^{(0,0)} {m_N^*}^3 - \frac{1}{3!} \frac{1}{2p} \phi_{AD,4}^{(0,0)} (\underline{F}^N + \underline{F}_+^N - 2p) {m_N^*}^3 + \\
 &+ \dots \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

onde $\phi_{AD,j}$ é a derivada de ordem j de ϕ_{AD} .

Tendo em conta que $\underline{F}_{+(-)}^N$ é uma soma de variáveis aleatórias independentes e que tende a p pela lei dos grandes números, quando $N \rightarrow \infty$, então, pelo teorema central do limite, temos que

$$\frac{\sqrt{\beta J}}{2} \tgh(\beta H) (\underline{F}^N - \underline{F}_+^N) \underset{N \rightarrow \infty}{\cong} \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{N}} \tag{4.7}$$

onde

$$\bar{\mu}_i \sim N(0, \sigma^2)$$

sendo

$$\sigma^2 = \frac{\beta J}{2} p(1-p) \tgh^2(\beta H).$$

Definindo agora o tipo de m^* (mínimo de $\phi_{AD}^{(0,m)}$) como o inteiro K tal que $2K$ seja a ordem da primeira derivada não nula de $\phi_{AD}^{(0,m)}$ em $m=m^*$ (lembrar que $m^*=0$), então, a partir da expressão (4.6) e da forma como tende a zero a variável $(E_-^N - E_+^N)$, dada em (4.7), temos:

(i) fora da criticalidade ($K=1$)

$$m_N^* \underset{N \rightarrow \infty}{\cong} \frac{1}{\phi_{AD,2}^{(0,0)}} \frac{\bar{\mu}_i}{\sqrt{N}} \quad (4.8)$$

(ii) na criticalidade de segunda ordem ($K=2$)

$$m_N^* \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} \left[\frac{3!}{\phi_{AD,4}^{(0,0)}} \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{N}} \right]^{1/3} \quad (4.9)$$

Passemos agora à questão da distribuição de probabilidades assintótica da variável z_N para a qual temos a expressão (4.5) com $a = \frac{m_N^*}{\sqrt{\beta J}}$, isto é,

$$\begin{aligned} & \frac{W}{\sqrt{\beta J} N^{1/2-\delta}} + \frac{(S_- - S_+) - N \frac{m_N^*}{\sqrt{\beta J}}}{N^{1-\delta}} \sim \\ & \sim \frac{dm \exp \left\{ -N \phi_{AD}^N \left(0, \sqrt{\beta J} \left(\frac{m}{N^\delta} + \frac{m_N^*}{\sqrt{\beta J}} \right) \right) \right\}}{\int dm \exp \left\{ -N \phi_{AD}^N \left(0, \sqrt{\beta J} \left(\frac{m}{N^\delta} + \frac{m_N^*}{\sqrt{\beta J}} \right) \right) \right\}} \quad (4.10) \end{aligned}$$

Vamos expandir $\phi_{AD}^N \left(0, \sqrt{\beta J} \left(\frac{m}{N^\delta} + \frac{m_N^*}{\sqrt{\beta J}} \right) \right)$ entorno de $m=0$. Resulta, considerando que $\phi_{AD,1}^N(0, m_N^*) = 0$ pois m_N^* é o mínimo

de $\phi_{AD}^N(0, m)$, que

$$\phi_{AD}^N\left(0, \sqrt{\beta J} \left(\frac{m}{N^\delta} + \frac{m_N^*}{\sqrt{\beta J}} \right) \right) = \phi_{AD}^N(0, m_N^*) + \frac{\beta J}{2N^{2\delta}} \phi_{AD,2}^N(0, m_N^*) m_t^2 + \dots \quad (4.11)$$

Expandindo agora $\phi_{AD,2}^N(0, m_N^*)$ entorno de $m^* = 0$, teremos:

$$\phi_{AD,2}^N(0, m_N^*) = \phi_{AD,2}^N(0,0) + \phi_{AD,3}^N(0,0) m_N^* + \frac{1}{2} \phi_{AD,4}^N(0,0) m_N^{*2} + \dots$$

Visto que $\phi_{AD,j}^N(0,0)$ é dado por uma soma de variáveis aleatórias independentes, então, pelo teorema central do limite, temos que

$$\phi_{AD,j}^N(0,0) \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} \phi_{AD,j}^N(0,0) + \frac{\bar{\mu}_j}{\sqrt{N}},$$

sendo que fora da critialidade ($k=1$) $\phi_{AD,2}^N(0,0) > 0$ e na critialidade de se-

gunda ordem ($K=2$) $\phi_{AD,2}^{(0,0)} = \phi_{AD,3}^{(0,0)} = 0$ e
 $\phi_{AD,4}^{(0,0)} > 0$. Portanto, tendo em conta
 a maneira pela qual m_N^* tende a ze-
 ro, dada em (4.8) e (4.9), temos o com-
 portamento assintótico de $\phi_{AD,2}^{(0,m_N^*)}$ da-
 do por:

(i) $K=1$

$$\phi_{AD,2}^{(0,m_N^*)} \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} \phi_{AD,2}^{(0,0)} + \frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{N}}$$

(ii) $K=2$

$$\phi_{AD,2}^{(0,m_N^*)} \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{N}} + \frac{\phi_{AD,4}^{(0,0)}}{2} \left(\frac{3!}{\phi_{AD,4}^{(0,0)}} \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{N}} \right)^{2/3}$$

A partir da expressão (4.10),
 e considerando a expansão do expo-
 niendo nela contido dada em (4.11),
 bem como o comportamento assintótico

obtido para $\phi_{AD,2}^{(0,m_N^*)}$, temos:

(i) para $K=1$ ($\delta = \frac{1}{2}$)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} z_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(S_- - S_+) - N \frac{m_N^*}{\sqrt{\beta J}}}{N^{1-\delta}} \sim$$

$$\sim \exp \left\{ -\beta J \left[\frac{1}{\phi_{AD,2}^{(0,0)}} - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{m^2}{2} \right\} dm$$

(ii) para $K=2$ ($\delta = \frac{1}{3}$)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} z_N \sim \exp \left\{ -\frac{\beta J}{2} \phi_{AD,4}^{(0,0)} \left[\frac{3! \bar{U}_1}{\phi_{AD,4}^{(0,0)}} \right]^{\frac{2}{3}} \frac{m^2}{2} \right\} dm$$

Temos assim a seguinte soma de resultados fornecidos pelas análises assintóticas anteriores:

a) $N^\delta m_N^* \underset{N \rightarrow \infty}{\equiv} \bar{V}_k$

onde

$$\delta = \frac{1}{2(2K-1)} \quad \text{e} \quad \bar{V}_k = \begin{cases} \frac{\bar{U}_1}{\phi_{AD,2}^{(0,0)}} & \text{para } K=1 \\ \left[\frac{3!}{\phi_{AD,4}^{(0,0)}} \bar{U}_1 \right]^{\frac{1}{3}} & \text{para } K=2 \end{cases}$$

$$b) \quad \beta_N = N^P \left(\frac{S_- - S_+}{N} - \frac{m_N^*}{\sqrt{\beta J}} \right) \underset{N \rightarrow \infty}{\equiv} \text{Gaussian}$$

onde

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{para } K=1 \\ \frac{1}{3} & \text{para } K=2 \end{cases}$$

De (a) e (b) resulta que

$$\frac{S_- - S_+}{N} \approx \frac{m_N^*}{\sqrt{\beta J}} + \frac{\text{Gaussian}}{N^P} \approx \frac{\bar{V}_K}{N^{\delta} \sqrt{\beta J}} + \frac{\text{Gaus.}}{N^P}$$

e assim, finalmente, podemos escrever:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} y_N = \begin{cases} \bar{u} \sim N \left(\frac{\bar{U}_1}{\phi_{AD,2}^{(0,0)}}, \frac{1}{\beta J} \left(\frac{1}{\phi_{AD,2}^{(0,0)}} - 1 \right) \right) & p/K=1 \\ \bar{V}_2 & p/K=2 \end{cases}$$

Observemos que fora da criticalidade temos uma Gaussian com média aleatória.

Um tratamento interinamente análogo ao apresentado nesta

seção, quando aplicado ao modelo FA [18] conduz a resultados os quais, comparados aos obtidos para o modelo AD com $J_0 = J$, mostram que o mapamento estabelecendo a equivalência termodinâmica dos referidos modelos, qual seja

$$\phi_{AD}(\beta, J, m^*) = \rho \phi_{FA}(\beta, \rho J, m^*/\sqrt{\rho}) ,$$

não estabelece a equivalência das derivadas $\phi_{AD,j}$ e $\phi_{FA,j}$ já que [20]

$$\rho^{j/2} \phi_{AD,j}(\beta, J, m^*) = \rho \phi_{FA,j}(\beta, \rho J, m^*/\sqrt{\rho}) .$$

Todavia os índices críticos são os mesmos para os dois modelos e portanto, neste sentido, dizemos serem, também a nível estatístico, equivalentes.

A mesma técnica usada para estudar as flutuações no modelo AD com $J_0 = J$, pode ser aplicada ao caso mais geral em que $J_0 \geq 0$. Neste caso, visto que os pontos de sela de $\phi_{AD}^N(q, m)$ (equação 4.2) e $\phi_{AD}(q, m)$ (equação 4.3) se dão, respectivamente, em (q_{tw}^*, m_{tw}^*) e (q^*, m^*) tais que :

$$q_n^* = i \frac{\sqrt{2\beta J_1}}{2} \left[\frac{F_t^N}{2} \operatorname{tgh} \left(\frac{\sqrt{2\beta J_2} m_n^* + i\sqrt{2\beta J_1} q_n^* + 2\beta H}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{F_t^N}{2} \operatorname{tgh} \left(\frac{\sqrt{2\beta J_2} m_n^* - i\sqrt{2\beta J_1} q_n^* - 2\beta H}{2} \right) \right]$$

$$m_n^* = \frac{\sqrt{2\beta J_2}}{2} \left[\frac{F_t^N}{2} \operatorname{tgh} \left(\frac{\sqrt{2\beta J_2} m_n^* + i\sqrt{2\beta J_1} q_n^* + 2\beta H}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{F_t^N}{2} \operatorname{tgh} \left(\frac{\sqrt{2\beta J_2} m_n^* - i\sqrt{2\beta J_1} q_n^* - 2\beta H}{2} \right) \right]$$

e

$$q^* = i \frac{\sqrt{2\beta J_1}}{2} \frac{p}{2} \left[\operatorname{tgh} \left(\frac{\sqrt{2\beta J_2} m^* + i\sqrt{2\beta J_1} q^* + 2\beta H}{2} \right) - \right.$$

$$- \tgh \left(\frac{\sqrt{2\beta J_2} m^* - i \sqrt{2\beta J_1} q^* - 2\beta H}{2} \right) \Big]$$

$$m^* = \frac{\sqrt{2\beta J_2}}{2} \frac{p}{2} \left[\tgh \left(\frac{\sqrt{2\beta J_2} m^* + i \sqrt{2\beta J_1} q^* + 2\beta H}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + \tgh \left(\frac{\sqrt{2\beta J_2} m^* - i \sqrt{2\beta J_1} q^* - 2\beta H}{2} \right) \right],$$

então, novamente, a lei dos grandes números garante-nos que, no limite $N \rightarrow \infty$, $m_N^* \rightarrow m^*$ e $q_N^* \rightarrow q^*$. Além disto, a penúltima equação e o fato de $Z_{AD}^{(J_0)}$ ser real implicam na existência de um único q^* dado por: $q^* = iq_0$ com $q_0 < 0$.

Assim, expandindo, tal como no caso em que $J_0 = J$,

$$\tgh \left(\frac{\sqrt{2\beta J_2} m_N^* \pm i \sqrt{2\beta J_1} q_N^* \pm 2\beta H}{2} \right)$$

em torno de (q^*, m^*) teremos, para temperaturas maiores ou igual à crítica,

onde $m^* = 0$, as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial^2 \phi_{AD}}{\partial q^2} \right)_* (q_N^* - q^*) = iA_1(E_-^N + E_+^N)T(+)_* + (iA_1)^2(E_-^N + E_+^N)T'(+) (q_N^* - q^*) + \\
 & + iA_1 A_2 (E_-^N - E_+^N) T'(+) m_N^* - \left(\frac{\partial^3 \phi_{AD}}{\partial q^3} \right)_* \frac{(q_N^* - q^*)^2}{2!} + \\
 & + (iA_1)^3 (E_-^N + E_+^N) T''(+) \frac{(q_N^* - q^*)^2}{2!} - \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial^2 \phi_{AD}}{\partial m^2} \right) \right]_* \frac{(m_N^*)^2}{2!} + \\
 & + (E_-^N + E_+^N) T''(+) \frac{(m_N^*)^2}{2!} + (iA_1)^2 A_2 (E_-^N - E_+^N) T''(+) (q_N^* - q^*) m_N^* - \\
 & - \left(\frac{\partial^4 \phi_{AD}}{\partial q^4} \right)_* \frac{(q_N^* - q^*)^3}{3!} + (iA_1)^4 (E_-^N + E_+^N) \frac{(q_N^* - q^*)^3}{3!} T'''(+) + \\
 & + iA_1 (A_2)^3 (E_-^N - E_+^N) T'''(+) \frac{(m_N^*)^3}{3!} + (iA_1)^3 A_2 (E_-^N - E_+^N) T'''(+) \frac{(q_N^* - q^*)^2 m_N^*}{2} - \\
 & - \left[\frac{\partial^2}{\partial m^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_{AD}}{\partial q^2} \right) \right]_* \frac{(m_N^*)^2 (q_N^* - q^*)}{2} + (iA_1)^2 (A_2)^2 (E_+^N + E_-^N) T'''(+) \frac{(m_N^*)^2 (q_N^* - q^*)}{2} + \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial^2 \phi_{AD}}{\partial m^2} \right)_* m_N^* = A_2 (E_-^N - E_+^N) T(+) + (A_2)^2 (E_-^N + E_+^N) T'(+) m_N^* + \\
 & + iA_1 A_2 (E_-^N - E_+^N) T''(+) (q_N^* - q^*) + (A_2)^3 (E_-^N - E_+^N) T'''(+) (m_N^*)^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (iA_1)^2 A_2 (\underline{\epsilon}^N + \underline{\epsilon}_+^N) T''_{(+)} \frac{(q_N^* - q^*)^2}{2} - \left[\frac{\partial^2}{\partial q^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_{AD}}{\partial m^2} \right) \right]_* (q_N^* - q^*) m_N^* + \\
 & + iA_1 (A_2)^2 (\underline{\epsilon}^N + \underline{\epsilon}_+^N) T''_{(+)} (q_N^* - q^*) m_N^* - \left(\frac{\partial^4 \phi_{AD}}{\partial m^4} \right)_* \frac{(m_N^*)^3}{3!} + \\
 & + (A_2)^4 (\underline{\epsilon}^N + \underline{\epsilon}_+^N) T'''_{(+)} \frac{(m_N^*)^3}{3!} + (iA_1)^3 A_2 (\underline{\epsilon}^N - \underline{\epsilon}_+^N) T''_{(+)} \frac{(q_N^* - q^*)^3}{3!} - \\
 & - \left[\frac{\partial^2}{\partial q^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_{AD}}{\partial m^2} \right) \right]_* \frac{(q_N^* - q^*)^2 m_N^*}{2} + (iA_1)^2 (A_2)^2 (\underline{\epsilon}^N + \underline{\epsilon}_+^N) T'''_{(+)} \frac{(q_N^* - q^*)^2 m_N^*}{2} + \\
 & + (iA_1) (A_2)^3 (\underline{\epsilon}^N - \underline{\epsilon}_+^N) T''_{(+)} \frac{(m_N^*)^2 (q_N^* - q^*)}{2} + \dots
 \end{aligned}$$

onde

$$A_{1(2)} \equiv \frac{\sqrt{2\beta J_{1(2)}}}{2},$$

$$\underline{\epsilon}_{+(-)} \equiv \frac{\underline{\epsilon}_{+(-)}^N - p}{2}$$

e

$$T'_{(+)} \equiv \tanh(iA_1 q^* + \beta H).$$

Visto que

$$\left(\frac{\partial^2 \phi_{AD}}{\partial q^2} \right)_* = 1 + p \operatorname{sech}^2(iA_1 q^* + \beta H) > 0,$$

então, não existe criticalidade para o

parâmetro q e além disto, da expansão obtida para $(q_N^* - q^*)$, temos que:

$$q_N^* - q^* \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\text{Gaussiana}}{\sqrt{N'}}$$

Fora da criticalidade (para m) temos

$\left(\frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial m^2}\right)_* \neq 0$ e da expansão para m_N^* resulta que:

$$m_N^* \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\text{Gaussiana}}{\sqrt{N'}}$$

Tendo em vista a inexistência de criticalidade para o parâmetro q , a forma pela qual q_N^* tende a q^* e m_N^* tende a zero e a expansão para m_N^* , resulta que o comportamento deste modelo ($J_0 \neq J$), no que tange às flutuações, é fundamentalmente o mesmo do obtido para o modelo com $J_0 = J$. Em particular, o ex-

poente crítico & e a distribuição de probabilidade da variável y_N no limite $N \rightarrow \infty$ são os mesmos.

Para finalizar, gostaria de ressaltar que temos nos empenhado no sentido de construir uma prova da equivalência aqui abordada, em níveis não tão distantes da realidade como o da versão Curie-Weiss da aproximação de campo médio. Acreditamos que a aplicação das ideias do grupo de renormalização, tal como o fizeram J. Bricmont e A. Kupiainen [9, 15], ao modelo AD se constitui num caminho, ainda que árduo, promissor. Para uma versão hierárquica dos modelos AD e FA conseguimos, por esta via, uma prova [16, 17]. No entanto, o caso sem

aproximações continua com seu desafio
a estimular-nos.

—II—

Referências.

- [1] Y. Imry , S. K. Ma , Phys. Rev. Lett. 35 (1975) 1399.
- [2] E. Pytte , Y. Imry , D. Mukamel , Phys. Rev. Lett. 46 (1981) 1173.
- [3] G. Grinstein , S. K. Ma , Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 685.
- [4] D. Fisher , J. Fröhlich , T. Spencer , J. stat. Phys. 34 (1984) 863.
- [5] J. Chalker , J. Phys. C 16 (1983) 6615.
- [6] G. Parisi , N. Sourlas , Phys. Rev. Lett. 48 (1979) 744.
- [7] L. A. Pastur , J. Stat. Phys. 27 (1982) 119.
- [8] J. F. Perez , W. F. Wreszinski , J. L. van Hemmen , J. Stat. Phys. 35 (1984) 89.
- [9] J. Bricmont , A. Kupiainen , Commun. Math. Phys. J. Bricmont , A. Kupiainen , Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 1829.

- [10] S. Fishman, A. Aharony, J. Phys. C 12 (1979) L 729.
- [11] Z. Wong, S. von Molnar, P. Dimon, J. Appl. Phys. 53 (1982) 7954.
- [12] H. Yoshizawa, R.A. Cowley, G. Shinaue, R.J. Bingenau, H.J. Guggenheim, H. Ikeda, Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 438 ;
D. P. Belanger, A.R. King, V. Jaccarino, Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 1050 ;
R.J. Bingenau, R.A. Cowley, G. Shinaue, H. Yoshizawa, J. Stat. Phys. 34 (1984) 817.
- [13] A. Aharony, A.B. Harris, Y. Meir, Phys. Rev. B 32 (1985) 3203 ;
J. Adler, A. Aharony, Y. Meir, Phys. Rev. B 34 (1986) 3469 ;
G. S. Grest, C.M. Soukoulis, R. Levin, Phys. Rev. B 33 (1986) 7659 ;

S.L.A. de Queiroz, R.R. dos Santos, Preprint
PUC/RJ.

- [14] S. Galam, Phys. Lett. A 100 (1984) 105;
J. L. Lebowitz, Phys. Rev. B 29 (1984) 505;
J. T. Chayes, L. Chayes, J. Fröhlich, Commun.
Math. Phys. 100 (1985) 399;
S. Galam, Phys. Rev. B 31 (1985) 7274.
- [15] J. Brinkmont, A. Kupiainen, J. stat. Phys.
51 (1988) 1021.
- [16] J. F. Perez, L.F. Pontin e J. A. Baêta Segun-
do, trabalho em preparação.
- [17] L.F. Pontin, tese de doutoramento, IFUSP-1990.
- [18] J.M.G. Amaro de Matos, J. F. Perez ,
Preprint Nr. 538, Universität Heidelberg.
- [19] J. M.G. Amaro de Matos, J. A. Baêta segundo,
J. F. Perez , Preprint IFUSP/P-709.
- [20] J. M.G. Amaro de Matos, tese de doutoramento,
IFUSP-1988.

- [21] R.S. Ellis, L.M. Newman, J. Stat. Phys. 19
(1978) 149;
- R.S. Ellis, L.M. Newman, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie
und verw. Geb. 44 (1978) 117;
- R.S. Ellis, L.M. Newman, in Lect. Notes in
Phys., vol. 80.
- [22] J.L. van Hemmen, A.K.D. van Enter, J. Kanisius,
Z. Phys. B 50 (1983) 311.
- [23] S.R. Salinas, W.F. Wreszinski, J. Stat. Phys.
41 (1985) 299.
- [24] J. Hubbard, Phys. Rev. Lett. 3 (1954) 77;
R.L. Stratonovich, Dok. Akad. Nauk. SSSR
115 (1957) 1097.
- [25] N.G. Bruijn, Asymptotic Methods in Analysis,
Dover Publications, N.Y., 1981.
- [26] H. Gamé, Act. Sci. Ind., Vol. 736, Hermann,
Paris, 1938;

H. Chernoff, Ann. Math. Stat. 23(1952) 493.

[27] S.R.S. Varadhan, Commun. Pure Appl. Math. 19(1966) 261.

[28] M.D. Donsker, S.R.S. Varadhan, Phys. Rep.

77 (1981) 235; online J. Physique A 182

M.D. Donsker, S.R.S. Varadhan, Commun.
Pure Appl. Math. : I 28(1975) 1, II 28(1975)
279, III 29(1976) 389.

[29] R.B. Ash, Real Analysis and Probability,
Academic Press, N.Y., 1972.

[30] A.W. Roberts, D.E. Varberg, Convex Functions, Academic Press, N.Y., 1973.

[31] T.M. Apostol, Kalkulus, 2^a edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1977.

[32] J. Dieudonné, Treatise on Analysis, vol. 2,
Academic Press, N.Y., 1976.

[33] J. Dieudonné, Foundations of Modern

Analysis, Academic Press, N.Y., 1969.

[34] M. Aizenman, J. Wehr, Commun. Math. Phys.

[35] S.M. Moss de Oliveira, P.M. Oliveira,
M.A. Continentino, Physica A 152
(1988) 477-493.

M.A. Continentino, S.M. Moss de Oliveira,
P.M. Oliveira, J. Physique
49 (1988) C8-1247

S.M. Moss de Oliveira, tese de douto-
ramento, UFF - 1989.

S.L.A. de Queiroz - Nota Científica -
PUC - RJ.