

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA



ALGUNS ASPECTOS DA EXPANSÃO 1/N  
EM MECÂNICA QUÂNTICA E TEORIA DE CAMPOS



RENIO DOS SANTOS MENDES

DEPTO. DE FÍSICA-MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA  
NO INSTITUTO DE FÍSICA DA UNIVERSI-  
DADE DE SÃO PAULO

*Diferença: 22.04.88*

SÃO PAULO, MARÇO DE 1988

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Mendes, Renio dos Santos

Alguns aspectos da expansão  $1/N$  em mecânica quântica e teoria de campos. São Paulo, 1988.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo  
Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.

Área de Concentração: Física de Partículas Elementares.

Orientador: Prof.Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes

Unitermos: 1. Esquemas de aproximação; 2. Estados ligados; 3. Potencial efetivo; 4. Quebra espontânea de simetria.

USP/IF/SBI - 15/88

## AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. MARCELO GOMES pelo estímulo e orientação, os quais foram de suma importância durante a realização deste trabalho
- Aos meus colegas, em especial ao Prof. Rubens Ribeiro pelas valiosíssimas discussões
- Ao Prof. Adilson da Silva
- À Isabel Marti pelo trabalho datilográfico
- À FAPESP pelo apoio financeiro dos últimos dois anos e meio

## ÍNDICE

RESUMO	
ABSTRACT	
INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I - EXPANSÃO 1/N EM MECÂNICA QUÂNTICA . . . . .	I.1
01. Introdução . . . . .	I.1
02. Estado Fundamental . . . . .	I.5
03. Estados Excitados . . . . .	I.12
04. Outras Formas de Promover a Expansão . . . . .	I.16
APÊNDICE A . . . . .	I.22
REFERÊNCIAS . . . . .	I.24
CAPÍTULO II - MODELOS VETORIAIS . . . . .	II.1
01. Modelo $\lambda\phi^4$ . . . . .	II.1
01.1 Introdução . . . . .	II.1
01.2 O Potencial Efetivo . . . . .	II.7
01.3 Análise do Vácuo . . . . .	II.16
02. Modelo Sigma não Linear . . . . .	II.29
APÊNDICE B . . . . .	II.34
REFERÊNCIAS . . . . .	II.35
CAPÍTULO III - MODELO $O(N) \times O(N)$ . . . . .	III.1
01. Introdução . . . . .	III.1
02. Potencial Efetivo . . . . .	III.4
REFERÊNCIAS . . . . .	III
CAPÍTULO IV - MODELOS MATRICIAIS . . . . .	IV.1
01. Introdução . . . . .	IV.1
02. Modelos Grassmanianos . . . . .	IV.5
APÊNDICE C . . . . .	IV.12
REFERÊNCIAS . . . . .	IV.16
CONCLUSÕES	

## RESUMO

Reveremos nesta tese vários métodos de implementação da expansão  $1/N$ . Isto é feito tanto na mecânica quântica como na teoria de campos. Na mecânica quântica a expansão é usada para estudar potenciais centrais. No contexto da teoria de campos estudamos modelos vetoriais ( $\lambda\phi^4$ , sigma não linear e  $CP^{N-1}$ ) e também modelos matriciais (que exibem um número infinito de diagramas planares!). Além dessa revisão discutimos o caso de um modelo com simetria  $O(N) \times O(N)$ , onde mostramos que, para temperaturas moderadamente altas, não há quebra de simetria. Mostramos também que existe uma temperatura a partir da qual a expansão perde o sentido. No caso particular que os dois  $O(N)$  são idênticos provamos a não existência da quebra de simetria para nenhum valor da temperatura.

## ABSTRACT

In this thesis several methods to implement the  $1/N$  expansion for Quantum Mechanics and Fields Theory are reviewed. In the Quantum Mechanical case central potentials are studied. In Quantum Field Theory we analyse both vectorial models ( $\lambda\phi^4$ , non linear sigma model and  $CP^{N-1}$ ) and matricial models, where in the dominant order there exists an infinite number of planar diagrams.

Besides these issues, we investigate a model with  $O(N) \times O(N)$  symmetry. We show that at moderated temperatures there is no symmetry breakdown. We also show that there exists a critical temperature beyond which the expansion is meaningless. In the special case of two identical  $O(N)$  models we prove the absence of spontaneous - symmetry breakdown at any value of the temperature.

## INTRODUÇÃO

Na maioria dos problemas físicos deparamos com equações nas quais não conseguimos encontrar soluções exatas. Assim, uma idéia é procurarmos algum tipo de aproximação para estas equações. A expansão  $1/N$  é um tipo dessas possíveis aproximações.

Esta aproximação é feita quando a teoria inicial tem algum tipo de simetria que pode ser generalizada facilmente (tal como  $O(3)$  indo para  $O(N)$ ). Esta generalização faz com que o número de graus de liberdade do modelo aumente ao tomarmos  $N$  cada vez maior. De maneira que, no limite de  $N$  tendendo ao infinito obteremos uma simplificação do problema.

Comparada com a teoria de perturbação na constante de acoplamento, a expansão  $1/N$  pode dar resultados que a anterior não exhibe até uma ordem finita. Por exemplo, em teoria de campos temos a geração dinâmica de massa nos modelos sigma não linear e Gross-Neveu que são resultados não analíticos na constante de acoplamento. Podemos dizer ainda que, na mecânica quântica, de uma maneira geral, a expansão  $1/N$  estima melhor os dados relacionados com os estados menos excitados, em particular o fundamental.

Uma aplicação interessante da expansão  $1/N$  em teoria de campos foi proposta por 't Hooft ('t H 1974) para a Cromodinâmica quântica, QCD. Esta consiste em substituir o grupo  $SU(3)$  de cor pelo  $SU(N)$ . Isto propiciou a obtenção de

---

vários resultados qualitativos, que concordam com os dados experimentais.

No Capítulo I desta tese apresentamos uma exposição da expansão  $1/N$  para o caso da mecânica quântica ordinária, onde damos exemplos de aplicação. Um exemplo original ali tratado é a queda de uma partícula no centro de um campo central atrativo. Realçamos que a expansão  $1/N$  pode ser vista como um "limite clássico" (veja o apêndice do capítulo IV) e que proporciona melhores resultados para os estados de menor energia, sendo assim, de certa forma complementar a aproximação WKB. Chamamos também a atenção para as diversas maneiras de implementar a expansão  $1/N$ , como por exemplo a  $1/N$  deslocada.

Começamos o estudo de modelos em teoria de campos no Capítulo II. O primeiro modelo que tratamos é o  $\lambda\phi^4$  com simetria  $O(N)$ . Após um esclarecimento detalhado de como deve ser colocado o fator de  $N$  na constante de acoplamento, apresentamos a construção do potencial efetivo e a procura de seu mínimo. Damos ainda a condição para a estabilidade do vácuo. A seguir desenvolvemos a expansão  $1/N$  para o modelo sigma não linear, através do método da integração funcional. Mostramos que essa teoria tem liberdade assintótica, transmutação dimensional e geração dinâmica de massa.

A parte onde apresentamos a contribuição mais original é justamente o Capítulo III, no qual tratamos de dois modelos  $\lambda\phi^4$  acoplados através de um termo quártico. Esta teoria tem simetria  $O(N) \times O(N)$ . Utilizamos como recurso a introdução de dois campos auxiliares a fim de construirmos o potencial efetivo. Conforme mostramos,

este modelo apresenta dificuldades bem maiores para serem analisadas, quando comparado com o  $\lambda\phi^4$ . O interesse em estudar este modelo advém de um artigo de Weinberg (Weinberg 1974) no qual é argumentado que esta teoria apresenta quebra espontânea de simetria para temperaturas suficientemente altas. Esta conclusão de Weinberg foi posteriormente contestada por Fujimoto e Sakakibara (Fujimoto e Sakakibara 1985), e Manesis e Sakakibara (Manesis e Sakakibara 1985). Entretanto a forma pela qual fizeram a expansão  $1/N$  não é a convencional, tendo assim tratado o problema de forma incompleta. A conclusão que tiraram foi a seguinte: A partir de uma dada temperatura o modelo deve apresentar-se numa fase sem quebra espontânea de simetria. Como veremos, potencial efetivo é uma função plurívoca apresentando uma estrutura de ramos variável em função dos campos básicos, tão logo a constante de acoplamento,  $g$ , entre os dois  $O(N)$  seja diferente de zero. Para valores elevados dessa constante, dependendo do valor de  $g$ , deixa o modelo, ou pelo menos a expansão  $1/N$ , de ter sentido. Para o caso particular em que os dois  $O(N)$  são idênticos (i.e. mesma massa e constantes de acoplamento) mostramos ainda no Capítulo III que não existe quebra de simetria. O resultado é válido a qualquer temperatura.

No último Capítulo, o IV, apresentamos uma breve exposição do uso da expansão  $1/N$  para os modelos matriciais. Ressaltamos que a dificuldade em promovermos a expansão  $1/N$  para a QCD não está no fato dela ser uma teoria de "Gauge", mas sim uma teoria matricial. Mostramos a dificuldade encontrada ao tentarmos somar os gráficos de Feynman que contribuem em uma mesma ordem de  $1/N$ . Também, apresentamos uma classe de modelos bidimensionais, os chamados

Grassmanianos, que mostram o mesmo tipo de dificuldades para construir sua expansão  $1/N$ , que a QCD.

Nas conclusões damos um apanhado de vários resultados encontrados na tese.

Devo dizer que, as referências foram separadas por capítulo e estão em ordem alfabética.

Para finalizar esta introdução cito alguns artigos de revisão, onde o leitor poderá encontrar uma ampla gama de referências e mais discussões sobre a expansão  $1/N$ .

S. Coleman, "1/N" in "Pointlike Structures Inside and Outside Hadrons", Zichichi ed., Plenum, New York, 1981.

A.A.Slanov, "Recent Developments in  $1/N$  expansion for QCD and Matrix Models", Acta Phys Austriaca, Suppl. XXV, 357, 1983.

Sumit R. Das, "Some Aspects of Large N Theories", Rev. Mod. Phys., 59, 235, 1987.

E.Witten, "The  $1/N$  expansion in Atomic and Particle Physics" in "Recent Developments in Gauge Theories", 't Hooft ed., Plenum, New York, 1979.

E. Witten, "Barions in  $1/N$  Expansion, Nucl. Phys., B160, 57, 1979.

M.O.C. Gomes, "1/N Expansion in Quantum Mechanics and  
Field Theory, IV Escola de Verão de Partículas e Cam-  
pos Jorge André Swieca (1987), a ser publicada.

(1985) - T. Fujimoto and S. Sakakibara, Phys. Lett.  
151B, 360 (1985)

(1985) - T. Fujimoto and S. Sakakibara, Institut für  
Physik, Johannes - Gutenberg - Universität  
1-70, Mainz, D. Germany, MI-79/85-07

Phys. Rev. Phys. 27, 461 (1974)

Phys. Rev. Phys. 19, 131 (1974)

## REFERÊNCIAS

- (Fu 1985) - Y. Fujimoto and S. Sakakibara, Phys. Let.  
151B, 260 (1985)
- (Ma 1985) - E. Manesis and S. Sakakibara, Institut für  
Physik, Johannes - Gutenberg - Universität  
D-6500 Mainz, F.R. Germany, MZ-TH/85-03
- ('t H 1974) - G. 't Hooft, Nucl. Phys. B72, 461 (1974)
- (We 1974) - S. Winberg, Phys. Rev. D9, 3357 (1974)

CAPÍTULO I - EXPANSÃO  $1/N$  EM MECÂNICA QUÂNTICA

## 01. INTRODUÇÃO

Comumente deparamos com sistemas de uma partícula em um campo central. O que faremos a seguir é tratar estes tipos de sistemas em  $N$  dimensões. A partir daí chegaremos aos resultados que nos interessam sob a forma de séries no parâmetro " $1/N$ ". Vejamos a seguir como conseguir esta expansão.

A equação de Schrödinger para tais sistemas é

$$E\psi = H\psi$$

onde

$$H = \frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{p} + V(r) \quad (1)$$

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$$\vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad r = |\vec{r}|$$

$$p_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{e} \quad \hbar = m = 1$$

A seguir usamos coordenadas esféricas em  $N$  dimensões. Como de costume fazemos uso da seguinte decomposição para a função de onda

$$\psi = R S = R(r) S(\vec{r}) \quad (2)$$

onde  $R$  e  $S$  correspondem as partes radial e angular da função de onda, respectivamente.

A parte angular "S" tem solução exata em qualquer dimensão. Em geral o difícil é achar a solução para a parte radial. Desta forma, em um problema onde há simetria central, é apenas para a solução da parte radial "R" que faremos a aproximação. (M1 1984)

A equação radial em N dimensões tem a forma abaixo (ver apêndice A)

$$ER = \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r} \frac{d}{dr} \right) + \frac{\ell(\ell+N-2)}{2r^2} + \hat{V}(r) \right\} R \quad (3)$$

Redefinamos a função radial, da seguinte forma

$$\phi = r^{\frac{N-1}{2}} R \quad (4)$$

Isto nos possibilita escrever a equação (3) como

$$-\frac{1}{2K^2} \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \left\{ \frac{(1 - 1/K)(1 - 3/K)}{8r^2} + V \right\} \phi = \frac{E}{K^2} \phi \quad (5)$$

onde usamos

$$K = N + 2\ell \quad e \quad \hat{V} = K^2 V$$

Ao escolhermos

$$\hat{V} = K^2 V \quad (6)$$

redefinimos a constante de acoplamento, sendo que no final dos cálculos deveremos expressar o resultado em termos da constante de acoplamento inicial. A fim de ilustrar esta redefinição da constante de acoplamento, consideremos o potencial coulombiano

$$\hat{V} = - \frac{\hat{l}^2}{r} \quad (7)$$

Comparando com (6) temos então que a nova constante de acoplamento é dada por

$$\hat{l}^2 = K^2 l^2 \quad (8)$$

Voltando a equação (5) vemos que  $K^2$  comporta como se fosse uma massa. Assim podemos usar o seguinte argumento: o termo

$$- \frac{1}{2K^2} \frac{d^2}{dr^2} \phi \quad (9)$$

será tanto menor quanto maior  $K^2$ , portanto, desprezível no limite  $K^2$  tendendo a infinito. (é claro que estamos admitindo que  $\phi$  seja uma função suave do parâmetro  $K$ ). Desta forma, encontramos em primeira aproximação para a energia

$$E = K^2 V_{ef}(r_0) \quad (10)$$

onde  $V_{ef}(r_0)$  significa o valor mínimo do potencial efetivo, definido por

$$V_{ef} = \frac{1}{8r^2} + V(r) \quad (11)$$

que é o termo entre chaves na expressão (5), a menos dos termos proporcionais a  $1/K$  e  $1/K^2$ .

Portanto, neste limite, temos que a função de onda difere de zero apenas numa pequena vizinhança de  $r_0$ . Concluimos, então, que a partícula descreverá uma trajetória circular com momento angular

$$L = \ell + \frac{N}{2} \quad (12)$$

### 1º EXEMPLO - Queda num campo central

Uma aplicação interessante da equação (10) é a análise da queda de uma partícula em um campo central atrativo.

Para tal usaremos o seguinte potencial

$$V = - \frac{a}{8r^s} \quad (13)$$

com  $a > 0$  e  $s > 0$ ,

a partir do qual chegamos ao potencial efetivo

$$V_{ef} = \frac{1}{8r^2} - \frac{a}{8r^s} \quad (14)$$

Analisemos os casos  $s > 2$  e  $s < 2$ .

- I) Para  $s > 2$  temos a queda da partícula no centro atrativo, pois

$$\lim_{r \rightarrow +0} V_{ef}(r) = -\infty \quad (15)$$

- II) Quando  $s < 2$  encontramos o mínimo do potencial efetivo em

$$r_0^{s-2} = 2sa \quad (16)$$

Portanto, concluímos que neste caso não existe queda no centro do potencial.

Vemos que, nesta análise temos a coincidência com os resultados esperados. (La 1985)

## 02. ESTADO FUNDAMENTAL

A fim de encontrarmos resultados mais apurados para o estado fundamental, é conveniente redefinir a função de onda para

$$\phi = \exp A \quad (17)$$

Assim a equação (5) toma a nova forma

$$-\frac{1}{2} (u' + uu) + K^2 V_{cf} + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} K\right) r^{-2} = E \quad (18)$$

onde

$$u = \frac{dA}{dr} \quad e \quad u' = \frac{du}{dr}$$

Para obtermos uma solução recursiva dessa equação escrevamos a energia e a função "u" como (M1 1984)

$$E = \sum_{n=-2}^{\infty} E^{(n)} K^{-n} \quad (19)$$

$$u = \sum_{n=-1}^{\infty} u^{(n)} K^{-n}$$

Se substituirmos (19) em (18), e logo a seguir agruparmos os termos de mesma ordem em K, teremos

$$-\frac{1}{2} u^{(-1)} u^{(-1)} + V_{ef} = E^{(-2)} \quad (20)$$

$$u^{(-1)} u^{(0)} = E^{(-1)} + \frac{1}{2} r^{-2} + \frac{1}{2} u^{(-1)'} \quad (21)$$

$$u^{(-1)} u^{(1)} = E^{(0)} - \frac{3}{8} r^{-2} + \frac{1}{2} (u^{(0)'} + u^{(0)} u^{(0)}) \quad (22)$$

e

$$u^{(-1)} u^{(n+1)} = E^{(n)} + \frac{1}{2} (u^{(n)'} + \sum_{m=0}^n u^{(m)} u^{(n-m)}) \quad (23)$$

para  $n > 0$ 

De (19) vemos que a primeira aproximação para a energia é

$$E = K^2 E^{(-2)} \quad (24)$$

Ao compararmos com (10) chegaremos a

$$E^{(-2)} = V_{ef}(r_0) \quad (25)$$

Quando substituirmos (25) em (20), e resolvermos para  $u^{(-1)}$ , teremos

$$u^{(-1)} = - \sqrt{2(V_{ef} - E^{(-2)})} \quad \text{para } r > r_0 \quad (26)$$

O sinal da raiz quadrada foi escolhido de maneira que a função de onda seja normalizável. Notemos que, em  $r > r_0$  devemos ter o sinal negativo, e positivo para  $r < r_0$ . Vale ressaltarmos que somente a partir desta escolha de sinais conseguiremos obter uma função de onda " $\phi$ " diferente de zero apenas numa vizinhança de  $r_0$ , quando  $K$  tende para infinito.

A fim de determinarmos as correções de ordem mais alta para a energia e função de onda, sigamos as etapas abaixo

$$a) \text{ como } u^{(-1)}(r_0^-) = 0 \quad (27)$$

e supondo

$$u^{(n)} < \infty \quad (28)$$

vemos do cálculo de (21) em  $r = r_0$ , que

$$E^{(-1)} = -\frac{1}{2} r_0^{-2} - \frac{1}{2} u^{(-1)'}(r_0) \quad (29)$$

b) substituamos (29) em (21), e resolvamos para  $u^{(0)}$

c) Similarmente a etapa "a" encontramos

$$E^{(0)} = \frac{3}{8} r_0^{-2} - \frac{1}{2} [ u^{(0)'}(r_0) + u^{(0)}(r_0) u^{(0)}(r_0) ] \quad (30)$$

d) A partir de (30), (22) e  $u^{(0)}$  chegamos a  $u^{(1)}$

e) Se continuarmos desta forma acharemos quantos termos das séries (19) que desejarmos. Assim, por exemplo

$$E^{(n)} = -\frac{1}{2} [ u^{(n)'}(r_0) + \sum_{m=0}^n u^{(m)}(r_0) u^{(n-m)}(r_0) ], \quad n > 0 \quad (31)$$

Analogamente, usando as expressões (17), (18) e (19), obteremos a função radial  $\phi$  em termos dos  $u^{(n)}$ 's, que é (a menos da constante de normalização)

$$\phi = \exp \left\{ \int \sum_{n=-1}^{\infty} u^{(n)}(r) k^{-n} dr \right\} \quad (32)$$

Quando formos aplicar estes resultados é conveniente usarmos uma nova variável "x" proporcional a " $r-r_0$ ", isto é,

$$x = \alpha (r - r_0) \quad (33)$$

a qual nos facilitará os cálculos, como teremos a oportunidade de ver.

## 2º EXEMPLO - Oscilador Harmônico

Um oscilador harmônico num espaço N-dimensional tem o potencial

$$\bar{V} = \frac{\bar{\omega}^2}{2} r^2 \quad (34)$$

Como mencionamos anteriormente, é conveniente introduzir

$$\bar{\omega}^2 = K^2 \omega^2 \quad (35)$$

Logo encontramos

$$V_{ef} = \frac{1}{8r^2} + \frac{\omega^2}{2} r^2 \quad (36)$$

para o potencial efetivo do problema, a partir do qual estimamos a primeira aproximação para a energia do estado fundamental (veja (24) e (25))

$$E = K^2 V_{ef}(r_0) = K^2 \frac{\omega}{2} \quad (37)$$

onde

$$r_0^2 = \frac{1}{2\omega} \text{ dá o mínimo de } V_{ef}(r)$$

De acordo com a discussão que fizemos após a equação (6), o que devemos fazer a seguir é voltar à constante de acoplamento inicial. Assim (37) toma a forma conhecida

$$E = \frac{N\bar{\omega}}{2} \quad (38)$$

onde usamos  $K = N$ , pois  $l=0$  para o estado fundamental.

Através das relações (26) e (36) temos também que

$$u^{(-1)} = -\sqrt{2\left(\frac{1}{8r^2} + \frac{\omega^2 r^2}{2} - \frac{\omega}{2}\right)} \quad (39)$$

Conforme (33), a variável que nos facilitará os cálculos é

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \cdot (r - r_0). \quad (40)$$

De (37), (39) e (40) encontramos uma forma bastante simples para  $u^{(-1)}$ , que é

$$u^{(-1)} = -\sqrt{\frac{\omega}{2} \frac{x(x+2)}{x+1}} \quad (41)$$

Se usarmos os passos a, b, c, d e e vemos facilmente (obviamente usando (41) e não (39) para os cálculos) que as primeiras correções seguintes a  $E^{(-2)}$  são nulas.

### 3º EXEMPLO - Potencial Coulombiano

Agora apliquemos para o caso Coulombiano atrativo, isto é

$$\hat{V} = -\frac{\hat{\ell}^2}{r} \quad \hat{\ell}^2 > 0 \quad (42)$$

A seguir vamos achar a energia e a autofunção do estado fundamental, aproximadamente. Para isto sigamos a metodologia usada no exemplo anterior.

O potencial efetivo é (veja equações 6, 8 e 11)

$$V_{ef} = \frac{1}{8r^2} - \frac{\ell^2}{r} \quad ; \quad \hat{\ell}^2 = K^2 \ell^2 \quad (43)$$

Para acharmos  $E^{(-2)}$  usemos as equações (25) e (43), logo

$$E^{(-2)} = V_{ef}(r_0) = -2\ell^4 \quad (44)$$

onde  $r_0 = \frac{1}{4\ell^2}$

A partir de agora usemos a variável

$$x = 4\ell^2 (r - r_0) \quad (45)$$

daí encontramos

$$u^{(-1)} = -2\ell^2 \frac{x}{x+1} \quad (46)$$

De maneira semelhante ao do exemplo anterior determinamos

$$E^{(-1)} = -4\ell^4 \quad (47)$$

$$u^{(0)} = -2 \ell^4 \frac{x+2}{x+1} \quad (48)$$

Portanto, a energia pode ser escrita como

$$E = -2 \ell^4 K^2 - 4 \ell^4 K + \dots \quad (49)$$

Dessa expressão e de (43) voltamos a constante de acoplamento inicial,

$$E = -2 \ell^4 \frac{1}{K^2} \left(1 + 2 \frac{1}{K} + \dots\right) \quad (50)$$

a qual corresponde aos primeiros termos da expansão em  $1/K$  do resultado exato

$$E = -2 \ell^4 \frac{1}{(K-1)^2} \quad (51)$$

Vejamos agora que as expressões (46) e (48) nos levam a função de onda radial exata, até a ordem  $1/K$  aqui tratada. Se usarmos as relações (32) e (45) com os resultados (46) e (48), obtemos após a integração em  $r$ , a menos de uma constante multiplicativa

$$\phi = r^{\frac{K-1}{2}} \exp \left\{ -2 \ell^2 K \left(1 + \frac{1}{K} + \dots\right) \right\} \quad (52)$$

Em termos da constante de acoplamento original  $\tilde{\ell}^2$ , a função de onda é escrita como

$$\phi = r^{\frac{K-1}{2}} \exp \left\{ -2 \tilde{\ell}^2 \frac{1}{K} \left(1 + \frac{1}{K} + \dots\right) \right\} \quad (53)$$

Que até a ordem  $1/K$  aqui considerada, coincide com a solução exata

$$\phi = r^{\frac{K-1}{2}} \exp \left\{ -2 \bar{r}^2 \frac{1}{K-1} \right\} \quad (54)$$

### 03. ESTADOS EXCITADOS

Vejamos agora como podemos implementar a expansão  $1/N$  para os estados excitados. O que devemos fazer é modificar o ansatz (17) para (M1 1984)

$$\phi = \left\{ \prod_{i=1}^n (r - r_i) \right\} \exp A_n \quad (55)$$

O termo entre chaves nos diz que a função " $\phi$ " tem " $n$ " zeros, sendo assim o número " $n$ " nomeia o  $n$ -ésimo estado excitado.

Também devemos supor que

$$r_i = r_0 + a_i^{(1)} K^{-1} + a_i^{(2)} K^{-2} + \dots \quad (56)$$

Da qual vemos que no limite de  $K$  tendendo a infinito, temos  $r_i$  igual a  $r_0$ . Isto está em concordância com as observações por nós vistas após a fórmula (8).

Analisemos concretamente o caso onde a função de onda tem apenas um zero. Portanto, (55) toma a forma

$$\phi = (r - r_1) \exp A_1 \quad (57)$$

Substituamos a expressão acima na equação (5), e a obteremos em termos de  $a_1$ , como sendo

$$\frac{1}{2} \{ u_1' + u_1 u_1 \} (r - r_1) - u_1 + \quad (58)$$

$$+ \{ K^2 V_{ef} + (-\frac{1}{2} K + \frac{3}{8}) r^{-2} \} (r - r_1) = (r - r_1) E$$

onde  $u_1 = \frac{d A_1}{dr}$  e  $u_1' = \frac{d u_1}{dr}$

Assim, como fizemos para o estado fundamental, tomemos

$$E_1 = \sum_{n=-2}^{\infty} E_1^{(n)} K^{-n} \quad (59)$$

$$u_1 = \sum_{n=-1}^{\infty} u_1^{(n)} K^{-n}$$

Se colecionarmos os termos de mesma ordem em  $K^{-1}$ , que advêm da substituição de (59) em (58), obteremos

$$-\frac{1}{2} u_1^{(-1)} u_1^{(-1)} \{r - r_0\} + \{r - r_0\} V_{ef} = E^{(-2)} \{r - r_0\} \quad (60)$$

$$-\frac{1}{2} u_1^{(-1)'} \{r - r_0\} + \frac{1}{2} u_1^{(-1)} u_1^{(-1)} a_1^{(1)} - u_1^{(-1)} u_1^{(0)} \{r - r_0\} \quad (61)$$

$$- u_1^{(-1)} - \frac{1}{2} r^{-2} \{r - r_0\} - V_{ef} a_1^{(1)} = -E^{(-2)} a_1^{(1)} + E^{(-1)} \{r - r_0\}$$

Ao examinarmos o limite de  $r$  tendendo a  $r_0$  na expressão (60), concluiremos que

$$E_1^{(-2)} = V_{ef}(r_0) \quad (62)$$

já que o termo com  $u^{(-1)}$  tende a zero mais rapidamente que os outros.

Para encontrarmos  $u_1^{(-1)}$ , substituamos (62) em (60) e encontraremos

$$u_1^{(-1)} = -\sqrt{2(V_{ef} - E^{(-2)})} \quad (63)$$

Tomemos o limite de  $r$  indo para  $r_0$  em (61) e usemos (62) e (63) para encontrarmos

$$E_1^{(-1)} = -\frac{1}{2} r_0^{(-2)} - \frac{3}{2} u_1^{(-1)}(r_0) \quad (64)$$

Das cinco últimas expressões tiramos imediatamente  $u_1^{(0)}$ .

No decorrer deste processo recursivo depararemos com os coeficientes  $a_1^{(m)}$ , os quais deveremos saber como calcular. Para tal devemos fazer uma pequena mudança na metodologia descrita para o estado fundamental (descrita em a, b, c, d e e):

f) Nos termos que contêm um  $a_1^{(m)}$  a ser determinado, tomemos o limite  $r$  indo para  $r_0$ , e assim chegaremos ao  $a_1^{(m)}$ .

g) Para obtermos  $E_1^{(m)}$  nestes casos, usemos a derivada em relação a "r", da expressão recursiva em questão, no limite de r tendendo a  $r_0$ .

Com o uso de relações do tipo (5) (55) (59) podemos chegar facilmente nas expressões abaixo

$$E_n^{(-2)} = V_{ef}(r_0) \quad (65)$$

$$u_n^{(-1)} = -\sqrt{2(V_{ef} - E_n^{(-2)})}$$

para todo "n", ou seja, a primeira aproximação para as energias e as funções  $u_n^{(-1)}$  são sempre as mesmas, independentemente de n. Também temos que

$$E_n^{(-1)} = -\frac{1}{2} r_0^{-2} - (n+\frac{1}{2}) u_{.1}^{(-1)'}(r_0) \quad (66)$$

Logo, vemos que o espectro até esta aproximação é harmônico, com a frequência proporcional

$$\omega = \sqrt{V_{ef}''(r_0)} \quad (67)$$

Esta proporcionalidade é clara a partir da definição de  $u_n^{(-1)}$ , pela fórmula (65).

#### 4º EXEMPLO - Autovalores para os Estados Excitados do Oscilador Harmônico

Usemos (35), (37), (40), (41), (65) e (66) para calcularmos os autovalores dos níveis de energia excitados do oscilador harmônico. Logo, encontramos

$$E = K^2 E^{(-2)} + KE^{(-1)} = \bar{\omega} \left( 2n + 1 + \frac{N}{2} \right) \quad (68)$$

que é o resultado exato.

De uma maneira geral, num estado excitado qualquer teremos "n+1" parâmetros a determinar (em cada etapa da metodologia recursiva); são eles  $a_1^{(m)}$ ,  $a_2^{(m)}$ , ...  $a_n^{(m)}$  e  $E_n^{(m)}$ , além da função  $u_n^{(m)}$ . A fim de encontrarmos os parâmetros acima, devemos calcular "n+1" limites de  $r$  indo para  $r_0$ . Tomamos estes limites da n-ésima expressão, juntamente com suas "n" primeiras derivadas.

#### 04. OUTRAS FORMAS DE PROMOVER A EXPANSÃO 1/N

Vimos que a correção seguinte a dominante na energia nos dá um espectro harmônico (veja fórmula (66)). Isto nos indica que até esta aproximação, podemos tratar a equação radial como sendo a de um oscilador harmônico. Consequentemente, é plausível pensarmos nas correções seguintes como sendo uma perturbação à parte harmônica. De fato, há os que preferem usar a teoria de perturbação convencional (Rayleigh - Schrödinger) e não a qual usamos na parte inicial (teoria de perturbação logarítmica) deste capítulo. A realização desta idéia é simples, basta tomarmos a expansão em série de Taylor do potencial efetivo,  $V_{ef}$ , em torno de  $r_0$ , e considerarmos os termos seguintes ao de segunda ordem como uma perturbação (Ku 1983, Su 1983, Im 1984). A medida que aumenta a ordem de perturbação, o trabalho computacional para obtermos as correções cresce enormemente.

Comparando com o primeiro método, temos que o cálculo algébrico cresce bastante.

Outra forma de promovermos a expansão  $\frac{1}{N}$ , é através do uso de cálculos diretos com operadores. A idéia é expressarmos a hamiltoniana do sistema em função de operadores de criação e destruição. Daí identificamos a parte harmônica, tratando o restante como uma perturbação (M1 1980, M1 1982). Vejamos agora como podemos conseguir isto.

Definamos os operadores

$$a_i = \frac{1}{(2\omega)^{1/2}} p_i - i \left(\frac{\omega}{2}\right)^{1/2} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (69)$$

e  $a_i^+$ , ou seja, o conjugado hermitiano de  $a_i$ . Tomamos  $\omega$  como sendo um parâmetro a fixar posteriormente, de modo a facilitar os cálculos específicos em cada caso.

Partiremos de  $a_i$  e  $a_i^+$  para construirmos os operadores

$$R_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N (a_i^+ a_i + a_i a_i^+) \quad (70)$$

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i a_i \quad \text{e} \quad R^+$$

que são invariantes por rotação no espaço N-dimensional e satisfazem as relações de comutação

$$[R, R^+] = 2R_0, \quad [R_0, R] = -R \quad \text{e} \quad [R_0, R^+] = R^+ \quad (71)$$

que é a álgebra de SO (2, 1).

Vemos que qualquer operador invariante por rotação, num espaço de  $N$  dimensões, será uma função de  $R_0$ ,  $R$  e  $R^+$ . Isto é assim porque qualquer operador invariante pode ser escrito em termos de  $x_i x_i$ ,  $p_i p_i$ ,  $x_i p_i + p_i x_i$  e cada um desses pode colocado em função de  $R$ ,  $R^+$  e  $R_0$ .

Agora coloquemos  $R_0$ ,  $R$  e  $R^+$  como função de dois operadores, um de criação e outro de destruição. Essa transformação é (Be 1982)

$$R_0 = \frac{K}{4} + n^+ n$$

$$R = \left( \frac{K}{2} + n^+ n \right)^{1/2} n \quad (72)$$

$$R^+ = n^+ \left( \frac{K}{2} + n^+ n \right)^{1/2}$$

onde  $n$  e  $n^+$  satisfazem a relação de comutação

$$[n, n^+] = 1 \quad (73)$$

Essa representação dos três operadores,  $R_0$ ,  $R$  e  $R^+$ , por dois operadores,  $n$  e  $n^+$ , só é possível porque estamos restringindo a um subespaço onde o operador de Casimir

$$C = R_0^2 - \frac{1}{2} (RR^+ + R^+R) = \frac{L^2}{4} + \frac{N}{4} \left( \frac{N}{4} - 1 \right) \quad (74)$$

$$(L^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N L_{ij} L_{ij} \quad \text{e} \quad L_{ij} = x_i p_j - x_j p_i)$$

tem um valor determinado, dado por (de acordo com o apêndice A,  $L = \ell(\ell + N - 2)$ )

$$C = \frac{K}{4} \left( \frac{K}{4} - 1 \right) \quad (75)$$

Portanto  $K$  rotula em qual subespaço estamos trabalhando.

O passo seguinte é expressarmos a hamiltoniana como função de

$$n, n^+ e \frac{1}{K}$$

em seguida fazemos sua expansão em série de potências de  $1/K$ . Finalmente, separamos a parte harmônica (em  $n$  e  $n^+$ ) da não harmônica, tratando a última como uma perturbação da primeira.

A transformação (72) é do tipo da usada para sistema de spins (Ho 1940), e tem o nome de transformação de Holstein-Primakoff. Na realidade essa técnica de operadores que acabamos de usar, foi baseada na expansão análoga para sistema de spins, chamada teoria semiclássica de sistemas de spin. Nesta teoria  $1/s$ ,  $s$  sendo o spin, é o parâmetro análogo ao  $1/N$ .

Tivemos a oportunidade de ver que a expansão em  $1/K$  (veja os resultados encontrados para os potenciais coulombiano e harmônico) dava quase o resultado exato já na ordem dominante. O sentido desta última afirmação é: se no lugar de " $K$ " tivéssemos usado um " $K$ " deslocado, ou seja,

$$K \rightarrow K - a \quad (76)$$

(onde  $a$  é uma constante), teríamos o resultado exato consi

derando apenas a ordem dominante.

Assim, com a finalidade de incrementar a convergência da expansão  $1/N$ , foi criada (Su 1983, Im 1984) uma modificação para a forma de escrever a equação radial, obtendo assim uma expansão  $1/N$  modificada. O que devemos fazer é simplesmente um deslocamento no parâmetro  $K$ , ou seja, definimos

$$\bar{K} = K - a \quad (77)$$

Portanto, usaremos o parâmetro  $1/\bar{K}$ , o qual aparecerá nas nossas expansões, daqui para frente. Logo, não mais trataremos com a equação (5), e sim com

$$E\phi = \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} + \bar{K}^2 \left( \frac{[1-(1-a)/\bar{K}][1-(3-a)/\bar{K}]}{8r^2} + V(r) \right) \right) \phi \quad (78)$$

Para incrementar a expansão em  $1/\bar{K}$  usamos a maneira mostrada na parte inicial deste capítulo. Porém ainda fica nos restando fixar o valor de "a" (fórmula (19)). É bom lembrarmos que "a" deve ser tratado como sendo de ordem zero em  $\bar{K}$ , ou seja,  $\bar{K}^0$ .

Podemos fixar o valor de "a", impondo que a correção seguinte a dominante, para a energia, seja nula. Então, teremos uma equação algébrica para "a". Isto faz com que já na ordem dominante, os autovalores para a energia do oscilador harmônico e o hidrogenoide (potencial da forma  $-a/r$ ,  $a > 0$ ) dêem exatos. Para os potenciais estudados na literatura, essa aproximação, para uma mesma ordem em  $1/K$  e  $1/\bar{K}$ , dá melhores resultados (aproxima melhor os resulta-

dos obtidos por solução numérica) que  $a$  em  $1/K$ .

A fim de escolher o valor de " $a$ ", podemos também impor que seja zero a correção para a energia, numa dada ordem arbitrária (Ma 1986). A medida que aumenta a ordem escolhida para a escolha da fixação de " $a$ ", temos em geral uma melhora para os resultados obtidos. Convém ressaltar que este último resultado é somente para uma pequena classe de potencial estudados.

## APÊNDICE A

Obtemos a equação radial, da seguinte maneira:

- A definição do Laplaciano em N dimensões é

$$\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \quad (\text{A.1})$$

e em coordenadas esféricas podemos representá-lo como

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_A \quad (\text{A.2})$$

onde  $\Delta_r$  e  $\Delta_A$  representam a parte radial e angular, respectivamente. Para determinarmos a parte radial, apliquemos o Laplaciano numa função,  $f(r)$ , que dependa apenas do módulo do raio vetor, isto nos fornece

$$\Delta f(r) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} f(r) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{d}{dr} \right) f(r) \quad (\text{A.3})$$

Ao compararmos com (A.2), temos que

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (\text{A.4})$$

Seja  $Z_\ell$  um polinômio harmônico de grau  $\ell$  isto é,

$$\Delta Z_\ell = 0 \quad (\text{A.5})$$

O harmônico esférico,  $S_\ell$ , de grau " $\ell$ " é definido por (Mu 1966)

$$Z_{\ell} = r^{\ell} S_{\ell} \quad (\text{A.6})$$

Temos, portanto, que  $S_{\ell}$  satisfaz

$$\Delta_A S_{\ell} = -\ell(\ell+N-2)S_{\ell} \quad (\text{A.7})$$

Observemos que o operador de momento angular  $L^2$ , é

$$L^2 = -\Delta_A \quad ; \quad \hbar = m = 1 \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, se fizermos a suposição de que a função de onda,  $\psi$ , decompõe-se como o produto

$$\psi = R(r)S_{\ell} \quad (\text{A.9})$$

teremos que  $R(r)$  satisfaz a equação (I.3).

## REFERÊNCIAS

## CAPÍTULO I

- (Ho 1940) - T. Holstein and H. Primakoff, Phys. Rev. 58, 1098 (1940)
- (Im 1984) - T. Imbo, A. Pagnamenta, U. Suktame, Phys. Rev. D29, 1669 (1984)
- (Ku 1983) - A. V. Kudinov M. A. Smondyrev, Theor. Math. Phys. 56, 871 (1983)
- (La 1985) - L. Landau e E. Lifshitz, "Mecânica Quântica", Editora Mir (1985)
- (Ma 1986) - S.A. Maluendes, F. M. Fernandez, A.M. Meson, E.A. Castro, Phys. Rev. D34, 1835 (1986)
- (Ml 1980) - L.D.Mlodinow, N. Papanicolau, Ann. Phys. 128, 314 (1980)
- (Ml 1982) - L.D.Mlodinow, "Progress in Particle and Nuclear Physics, Quarks and the Nucleus", Editado por D. Wilkenson, Proc. de 1981 Int. School of Nuclear Physics, Erice, Italy, Pergamon - New York, vol. 8 (1982)
- (Ml 1984) - L. Modinow e M.P. Shatz, J. Math Phys, 25 943 (1984)

(Mu 1966) - C. Muller, "Spherical Harmonics", Lectures  
notes in Mathematics, vol. 17, 1966, Springer-  
Verlag

(Su 1983) - U. Suktame, T. Imbo, Phys. Rev. D28, 418 (1983)



Até a inclusão de gráficos de Feynman, a obtenção de  
um resultado aproximado significa que, nos cálculos envol-  
vidos, levamos em consideração apenas um subconjunto dos  
gráficos possíveis. De outra forma poderíamos dizer que, ao fa-  
zermos um tipo de aproximação, estamos a realizar um  
trabalho de gráficos de ordem zero, cada uma relacionada com  
uma ordem de referência aproximada. Portanto, mesmo que  
nos referamos a um tipo de aproximação de ordem zero, a  
nossa aproximação é de ordem zero.

## CAPÍTULO II - MODÉLOS VETORIAIS

Neste capítulo, usando a expansão  $1/N$ , estudaremos os modelos vetoriais onde os campos básicos estão na representação fundamental do grupo de simetria subjacente. Em particular estudaremos os modelos  $\lambda\phi^4$  e sigma não linear. (Co 1981)

01. MODELO  $\lambda\phi^4$ 

## 01.1 INTRODUÇÃO

Começaremos nosso estudo com o modelo  $\lambda\phi^4$  com simetria  $O(N)$ , o qual é definido pela densidade de Lagrangiana.

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - g_0 (\phi^2)^2 \quad ; \quad (1)$$

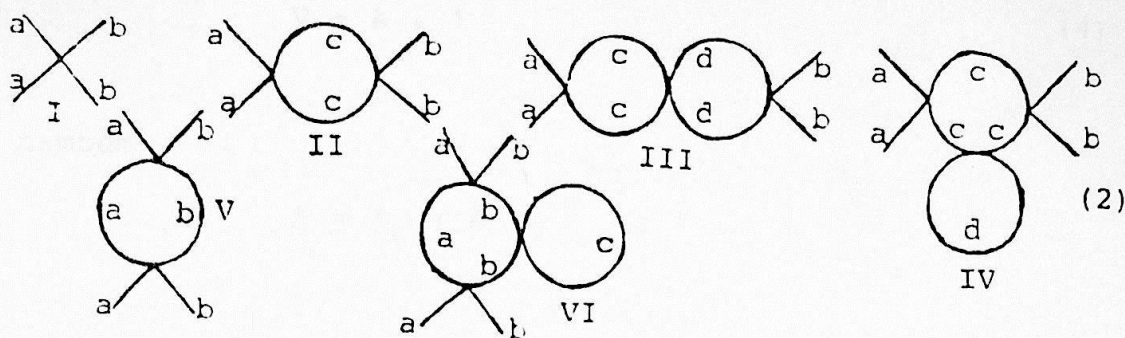
$$(\partial_\mu \phi)^2 = \sum_{a=1}^N \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a \quad \text{e} \quad \phi^2 = \sum_{a=1}^N \phi^a \phi^a$$

*expansão  $1/N$*

Na linguagem de gráficos de Feynman, a obtenção de um resultado aproximado significa que, nos cálculos envolvidos levaremos em consideração apenas um subconjunto dos gráficos possíveis. De outra forma podemos dizer que, ao fazermos um dado tipo de aproximação, estamos na realidade separando os gráficos em classes, cada uma relacionada com alguma ordem da referida aproximação. Portanto, nessa linguagem, a expansão  $1/N$  não é nada mais que uma maneira conveniente de agruparmos os gráficos de Feynman.

Passemos a analisar a dependência em  $N$ , que temos

para os gráficos de quatro pernas (poderia ser quaisquer outros, o resultado obtido seria o mesmo). Consideremos os gráficos abaixo.



onde



representam o propagador para um campo  $\phi^a$  e o vértice do modelo, respectivamente.

Podemos ver que existem  $N^0$ ,  $N$ ,  $N^2$ ,  $N^2$ ,  $N^0$  e  $N$  gráficos dos tipos I, II, III, IV, V e VI, respectivamente, já que "c" e "d" podem tomar valores indo de 1 até N, para as pernas externas "a" e "b", fixadas a priori. Isto quer dizer que, em cada anel (loop) onde pudermos tomar as linhas externas fixas, temos um fator de N.

Suponhamos um gráfico que tenha  $A'$  anéis, do tipo descrito no parágrafo acima, e  $A_0$  de outro tipo (por exemplo veja 2-V). Como ilustração:  $A'$  é igual a, na sequência de I até VI, 0, 1, 2, 2, 0 e 1;  $A_0$  tem valor 1 para V e VI e zero para os demais. A potência de N que advém por parte dos anéis para estes gráficos é, em geral,

$$N^{A'} = N^{V-A_0-1} \tag{3}$$

Aqui usamos que o número de anéis,  $A$ , está relacionado com a quantidade de vértices,  $V$ , pela expressão

$$V = A + 1 \quad (4)$$

e também

$$A = A_0 + A'$$

Daqui em diante, façamos a suposição de que a constante de acoplamento,  $g_0$ , dependa de  $N$ . Sem perda de generalidade podemos escrever essa dependência na forma seguinte

$$g_0 = \lambda'_0 N^\alpha \quad (5)$$

onde  $\lambda'_0$  independe de  $N$  e " $\alpha$ " é uma função de  $N$ . Com isto, a potência de  $N$  proveniente dos  $V$  vértices, para um dado gráfico é

$$N^{\alpha V} \quad (6)$$

A potência de  $N$  para um determinado gráfico tem duas contribuições: A que vem dos anéis e dos vértices. Temos que, a potência de  $N$  para um gráfico de quatro pernas é

$$N^{A'+\alpha V} = N^{-(A_0+1)+(\alpha+1)V} \quad (7)$$

Vamos exigir que a aproximação  $1/N$  em cada uma de suas ordens dê resultados novos, comparados com a teoria de perturbação na constante de acoplamento, ou seja, envolva não apenas gráficos que tenham potência finita na constan-

te de acoplamento. Da exigência acima, vemos que em cada ordem da expansão  $1/N$  poderemos obter um resultado não analítico na constante de acoplamento; por este motivo, muitas vezes a chamamos de uma aproximação não perturbativa. A existência de infinitos gráficos em uma ordem qualquer da expansão  $1/N$ , combinado com a expressão (7), e para  $N$  grande, impõe que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha = -1 \quad (8)$$

Tomemos

$$\alpha = -1 \quad (9)$$

para o modelo aqui tratado. Desta forma, obteremos uma expansão  $1/N$  usando a densidade de Lagrangiana.

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!N} (\phi^2)^2 \quad (10)$$

onde  $\lambda_0$  é uma constante independente de  $N$ .

A expansão  $1/N$  é facilitada se utilizarmos um campo auxiliar  $\chi$ . Com este intuito, redefinamos a densidade de Lagrangiana como

$$L \rightarrow L + \beta (\chi - \alpha \phi^2 - \gamma m^2)^2 \quad (11)$$

$\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes que fixaremos a seguir. Cabe ressaltar que a presença do termo adicional não deve modificar em nada a dinâmica do modelo, caso contrário teríamos um outro modelo e não o  $\lambda\phi^4$ . De fato, classicamente vemos que a

equação Euler-Lagrange para o campo  $\chi$  nos fornece

$$\chi = \alpha \phi^2 + \gamma m_0^2 \quad ; \quad (12)$$

Daqui já vemos que o campo auxiliar é invariante pelas transformações do grupo  $O(N)$ , conseqüentemente traz consigo um comportamento coletivo dos campos  $\phi^a$ 's. Quanticamente, observamos que a contribuição para o funcional gerador das funções de Green advindas da introdução de  $\chi$  é zero, pois a integração funcional no campo auxiliar se reduz a uma constante.

Escolhamos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  de forma a cancelar os termos

$$-\frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 \quad \text{e} \quad -\frac{\lambda_0}{4!N} (\phi^2)^2 \quad (13)$$

isto nos leva a tomarmos

$$\alpha = \frac{\lambda_0}{3!N} \quad , \quad \beta = \frac{3N}{2\lambda_0} \quad \text{e} \quad \gamma = 1 \quad (14)$$

Portanto a densidade de Lagrangiana toma a forma

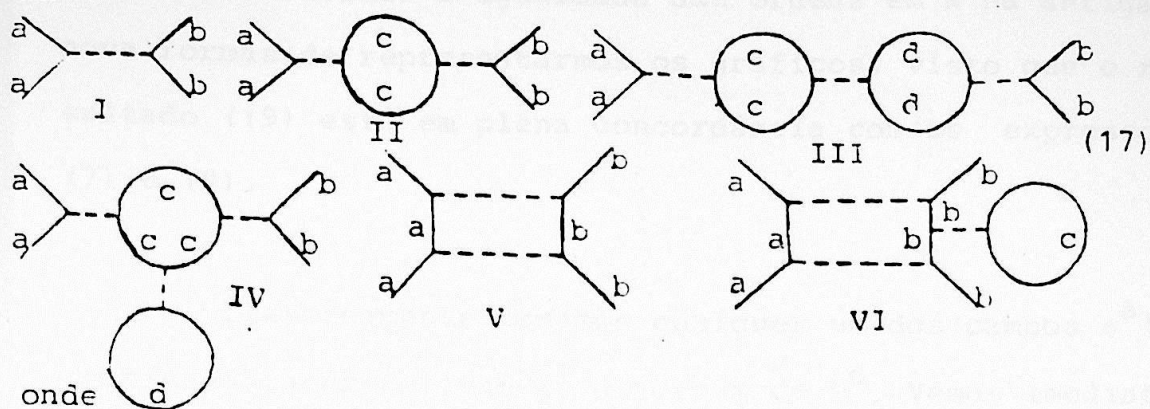
$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V_{CL} \quad (15)$$

onde

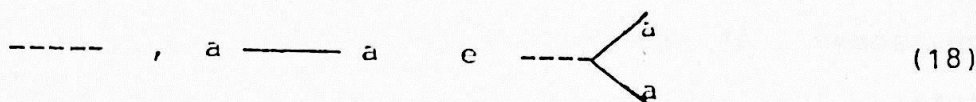
$$V_{CL} = -\frac{3N}{2\lambda_0} \chi^2 + \frac{1}{2} \chi \phi^2 + \frac{3Nm_0^2}{\lambda_0} \chi \quad (16)$$

Apesar da presença do campo auxiliar não modificar a dinâmica, as regras de Feynman mudam. Por exemplo, os grã

ficos apresentados em (2) tomam respectivamente a nova forma



onde



representam, em ordem, os propagadores dos campos  $\chi$  e  $\phi^a$ 's, e o vértice referente a interação  $1/2 \chi \phi^b \phi^b$ . Cabe ressaltarmos que o propagador do  $\chi$  é proporcional a  $1/N$ , já que, não existe termo cinético e  $3N/\lambda_0$  se comporta como uma massa ao quadrado.

Por comparação vemos que os anéis dos novos gráficos trazem consigo um fator de  $N$ . Podemos chegar a esta mesma conclusão observando que os novos anéis podem ter qualquer índice "c" dos campos  $\phi^c$ 's, independente das linhas externas. Os anéis que tinham seus índices fixados pelas externas deixaram de ter apenas propagadores dos campos  $\phi^a$ 's.

A ordem em  $N$  dos novos diagramas deve ser a mesma que a dos antigos. Para vermos isto, chamemos o número de propagadores do campo  $\chi$  de  $V$ ,  $A'$  a quantidade de anéis em  $\phi^a$ 's. Pelas discussões dos dois últimos parágrafos vemos que,

$$N^{A'} = V$$

é a potência em  $N$  para qualquer um dos novos gráficos. Acabamos de verificar a igualdade das ordens em  $N$  na antiga e nova formas de representarmos os gráficos, visto que o resultado (19) está em plena concordância com as expressões (7) e (9).

Classicamente tomamos qualquer um dos campos  $\phi^a$ 's, independente de  $N$ , isto é, de ordem de  $N^0$ . Vemos imediatamente que  $\phi^2$  é proporcional a  $N$ , pois, o mesmo é a somatória de  $N$   $\phi^a$ 's ao quadrado. Pela definição de  $\chi$  temos que, ele é proporcional a  $N^0$  (veja as expressões (12) e (14)). Concluimos, portanto, que a Lagrangiana é da ordem de  $N$ .

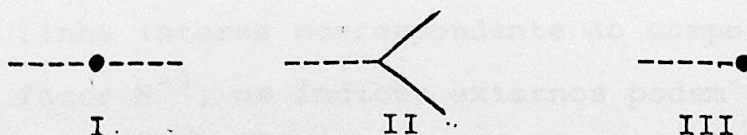
## 01.2 O POTENCIAL EFETIVO

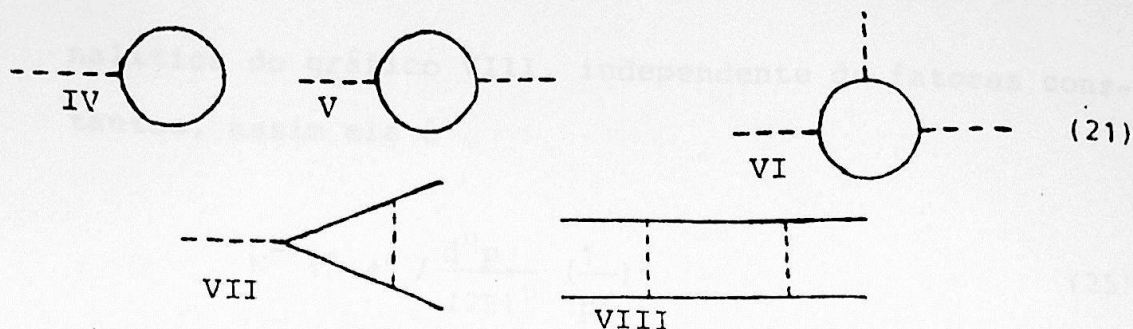
Para analisarmos o modelo  $\lambda\phi^4$  usaremos a técnica do potencial efetivo (Co 1974), definido por

$$V_{\text{ef}} = V_{\text{Cl}} + \text{C.R.} \quad (20)$$

onde  $V_{\text{Cl}}$  e C.R. correspondem ao potencial clássico, definido através da expressão (16) e as correções radiativas, isto é, as correções quânticas para o potencial.

Os gráficos correspondentes as correções radiativas são tomados com as pernas externas amputadas e substituídas pelo campo a qual corresponde, tomado constante. Por exemplo, os gráficos





são da ordem  $N$ , os seis primeiros, e  $N^0$  os dois últimos. Esclareçamos sua forma analítica e a dependência em  $N$ .

a) Nos gráficos I e III tomamos para seus vértices os valores  $-3N/2\lambda_0$  e  $3Nm_0^2/\lambda_0$ , respectivamente, que correspondem as expressões algébricas

$$-\frac{3N}{2\lambda_0} \chi^2 \quad \text{e} \quad \frac{3Nm_0^2}{\lambda_0} \chi \quad (22)$$

b) No II consideramos todos os "a's" possíveis, representando-os como

$$\frac{1}{2} \chi \phi^2 \quad (23)$$

c) Para IV, V e VI temos apenas o fator  $N$  do anel. Analiticamente são proporcionais a

$$N \chi^n \int \frac{d^u p}{(2\pi)^u} \left(\frac{1}{p^2}\right)^n \quad (24)$$

onde "n" é o número de vértices do gráfico.

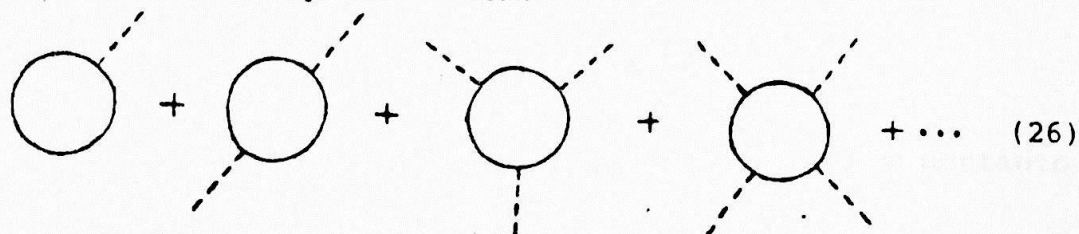
d) Cada linha interna correspondente ao campo  $\chi$  traz consigo o fator  $N^{-1}$ , os índices externos podem tomar  $N$  valores distintos. Por comodidade vejamos apenas a parte a-

nalítica do gráfico VIII, independente de fatores constantes, assim ela é

$$N^{-2} \phi^2 \phi^2 \int \frac{d^u p}{(2\pi)^u} \left(\frac{1}{p^2}\right)^2 \quad (25)$$

e analogamente para o VII.

A soma dos gráficos I, II e III, acima, correspondem ao potencial clássico. Os demais gráficos são os que estão ligados as correções radiativas. Se restringirmos a ordem dominante, apenas a soma



$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \dots \quad (26)$$

contribuirá para as correções radiativas. Vemos que nas correções radiativas temos a ausência de termos que são função dos campos  $\phi^a$ 's. É útil lembrarmos que somente os gráficos 1PI (aqueles que não se dividem em dois quando cortamos ao meio uma de suas linhas internas) entram no cálculo do potencial efetivo.

Antes de efetuarmos a soma acima, escrevamos a expressão analítica para o n-ésimo gráfico, na região Euclidiana. Esta expressão é

$$\frac{1}{n!} (n-1)! 2^{n-1} N \int \frac{d^u p}{(2\pi)^u} \left(\frac{1}{p^2}\right)^n \left(-\frac{1}{\chi}\right)^n = -\frac{N}{2} (-1)^{n+1} \int \frac{d^u p}{(2\pi)^u} \left(\frac{\chi}{p^2}\right)^n \quad (27)$$

Esclareçamos os fatores numéricos:

- a) O fator  $1/n!$  é proveniente da fórmula da expansão perturbativa em ordem "n";
- b) A permutação cíclica nos "n" campos  $\chi$  nos dá o  $(n-1)!$ ;
- c)  $2^{n-1}$  vem a ser o número de contrações, cíclicas possíveis das linhas internas;
- d) O N advém dos anéis nos  $\phi^{\alpha}$ 's;
- e) E as potências n-ésimas aparecem devido a existência de "n" propagadores e "n" vértices.

A expressão analítica para a soma (26) é portanto

$$-\frac{N}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int \frac{d^{\nu} p}{(2\pi)^{\nu}} \frac{(\chi)^n}{p^2} = -\frac{N}{2} \int \frac{d^{\nu} p}{(2\pi)^{\nu}} \ln \left(1 + \frac{\chi}{p^2}\right) \quad (28)$$

onde usamos o conhecido resultado

$$\ln(1+\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \chi^n \quad (29)$$

A correção radiativa para o potencial efetivo na ordem dominante em N é a soma (26) com sinal trocado, ou seja,

$$\text{C.R.} = \frac{1}{2} N \int \frac{d^{\nu} p}{(2\pi)^{\nu}} \ln \left(\frac{p^2 + \chi}{p^2}\right) \quad (30)$$

Agora já temos em mãos a expressão formal para o potencial efetivo, isto é,

$$V_{\text{ef}} = V_{\text{Cl}} + \text{C.R.} = - \frac{3N}{2\lambda_0} \chi^2 + \frac{1}{2} \chi \phi^2 + \frac{3Nm_0^2}{\lambda_0} \chi + \frac{1}{2} N \int \frac{d^u p}{(2\pi)^u} \ln \left( \frac{p^2 + \chi}{p^2} \right) \quad (31)$$

Para iniciarmos o estudo do vácuo do modelo, deveremos encontrar o mínimo do potencial efetivo. As condições necessárias para a existência de mínimo são

$$\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \phi^a} = 0 \quad \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \chi} = 0 \quad (32)$$

Ao substituírmos a expressão do potencial efetivo nas expressões acima, temos que os campos soluções,  $\chi_s$  e  $\phi^a$ 's, satisfazem

$$\lambda_s \phi_s^a = 0$$

e

$$-\chi_s + m_0^2 + \frac{\lambda_0}{6} \frac{(\phi_s^a)^2}{N} + \frac{\lambda_0}{6} \int \frac{d^u p}{(2\pi)^u} \frac{1}{p^2 + \chi_s} = 0 \quad (33)$$

Esta última equação é geralmente chamada de equação do "tad-pole". Nela vemos que, o  $\chi_s$  aparece no lugar de uma massa ao quadrado. Posteriormente, chegaremos a conclusão que  $\chi_s$  é justamente a massa ao quadrado correspondente aos campos  $\phi^a$ 's (veja 82).

Temos que os possíveis valores esperados dos campos no vácuo devem obedecer uma das três possibilidades abaixo

$$\begin{array}{lll}
 \text{I)} & \chi = 0 & \text{e } \phi^a = 0 \\
 \text{II)} & \chi \neq 0 & \text{e } \phi^a = 0 \\
 \text{III)} & \chi = 0 & \text{e } \phi^a \neq 0
 \end{array} \tag{34}$$

Se a última possibilidade acontecer, teremos uma quebra ex pontânea de simetria. A condição

$$\frac{\partial V_{ef}}{\partial \chi} = 0 \tag{35}$$

não é apenas uma condição necessária de mínimo, mas sim a equação de movimento para o campo  $\chi$ , já que não existe termo cinético para este campo. Se impormos

$$\chi \geq 0 \tag{36}$$

o potencial efetivo nunca terá valor imaginário. Temos

$$\phi^2 \geq 0 \tag{37}$$

já que, os  $\phi^a$ 's são campos reais. Assim por (33) vem que

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} - \frac{m_0^2}{\lambda_0} - \frac{1}{6} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + \chi} \geq 0 \tag{38}$$

Visto que o campo auxiliar  $\chi$  é uma função de  $\phi^2$ , podemos tirar o seguinte resultado

$$\frac{dV_{ef}}{d\phi^2} = \frac{\partial V_{ef}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial V_{ef}}{\partial \chi} \frac{d\chi}{d\phi^2} = \frac{\partial V_{ef}}{\partial \phi^2} = \frac{1}{2} \chi \tag{39}$$

onde usamos (35) e (31).

Estes resultados anteriores valem em geral, sem fixarmos a dimensão  $\nu$  do espaço-tempo.

No que segue restringiremos a análise ao caso da dimensão quatro,  $\nu = 4$ .

Para calcularmos a integral

$$A = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln(p^2 + \chi) \quad (40)$$

que é essencial no cálculo do potencial efetivo, devemos restringir a região de integração, já que  $A$  é divergente. Toda integral onde o integrando seja uma função de  $p^2$  podemos tomar

$$d^4 p \rightarrow \pi p^2 d(p^2) \quad (41)$$

Com essas observações em mente, calculamos a integração, colocando um limite superior,  $\Lambda^2$ , assim obtemos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\Lambda^2} \frac{\pi p^2 d(p^2)}{(2\pi)^4} \ln(p^2 + \chi) = \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \frac{(\Lambda^4 - \chi^2)}{2} \ln(\Lambda^2 + \chi) - \left( \frac{\Lambda^4 - 2\Lambda^2\chi - 6\chi^2}{4} + 2\chi^2 \ln\chi \right) \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

Ao tomarmos  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$  na integral anterior, a divergência reaparece. A fim de eliminarmos as divergências quando  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$  redefinamos as constantes do modelo; este processo é o que chamaremos de renormalização do modelo. Uma escolha conveniente das novas constantes, chamadas de cons-

tantes renormalizadas, é

$$\frac{m^2}{\lambda} = \frac{m_0^2}{\lambda_0} + \frac{B}{6}$$

e

(43)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_c} + \frac{C}{6}$$

onde

$$B = \int_0^{\Lambda^2} \frac{\pi^2 p^2 d(p^2)}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} = \frac{\Lambda^2}{16\pi^2}$$

e

$$C = \int_0^{\Lambda^2} \frac{\pi^2 p^2 d(p^2)}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2(p^2+M^2)} = \frac{1}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2+M^2}{M^2}\right)$$

(44)

Este parâmetro novo,  $M^2$ , colocamos para evitarmos a divergência da integral quando  $p^2 \rightarrow 0$ ; este tipo de divergência é chamada de infravermelha. Ao escolhermos um dado valor para  $M^2$ , dizemos que fixamos o ponto de renormalização. Em geral, quando fazemos uma renormalização introduzimos um ponto de renormalização arbitrário.

Ao expressarmos o potencial efetivo, (31), em termos das constantes renormalizadas, obtemos

$$V_{\text{ef}} = -\frac{3N}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{96\pi^2} \ln M^2 \right) \chi^2 + \frac{1}{2} \chi \phi^2 + \frac{3Nm^2}{\lambda} + \frac{N\chi^2}{128\pi^2} (2\ln\lambda - 1)$$

(45)

onde usamos as integrais calculadas acima e tomamos o limite de  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ .

As grandezas físicas devem independender do ponto de renormalização usado para definir grandezas físicas da teoria.

Para deixarmos evidente a independência de  $M^2$  do modelo aqui tratado, é suficiente mostrarmos que o potencial efetivo não depende do ponto de renormalização. A independência é mostrada se o fator

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{96\pi^2} \ln M^2 \quad (46)$$

(a rigor devemos tomar o argumento do logaritmo adimensional)

permanecer constante ao variarmos  $M^2$ , já que  $m^2/\lambda$  não depende do ponto de renormalização (veja as expressões (43) e (44)). A partir da definição de  $1/\lambda$ , vemos que este depende de  $M^2$ ; assim fazemos a seguinte mudança de notação:

$$\frac{1}{\lambda} \rightarrow \frac{1}{\lambda(M^2)} \quad (47)$$

Com o uso das expressões (43) e (44), para dois pontos de renormalização quaisquer,  $M_1^2$  e  $M_2^2$ , vemos que

$$\frac{1}{\lambda(M_1^2)} + \frac{1}{96\pi^2} \ln M_1^2 = \frac{1}{\lambda(M_2^2)} + \frac{1}{96\pi^2} \ln M_2^2 \quad (48)$$

Esta igualdade demonstra que o termo (46) independe  $M^2$ , conseqüentemente o mesmo acontece com o potencial efetivo.

Definamos uma nova constante (Ab 1976),  $\chi_0$ , invariante por mudanças no ponto de renormalização, dada por

$$\chi_0 = M^2 \exp\left(\frac{96\pi^2}{\lambda}\right) \quad (49)$$

que está relacionado com o exponencial do termo (46). Pelas expressões (40) e (44) vemos que a constante tem a mesma dimensão do campo  $\chi$ , sendo assim uma candidata a unidade de medida do  $\chi$ . A fim de ressaltar este fato, definamos o campo adimensional  $\rho$  através da expressão

$$\chi = \rho \chi_0 \quad (50)$$

Podemos agora escrever o potencial efetivo de uma forma manifestamente independente do ponto de renormalização, ou seja.

$$V_{\text{ef}} = 3N\chi_0\rho \left\{ \frac{m^2}{\lambda} + \frac{1}{6} \left(\frac{g^2}{N}\right) + \frac{\chi_0}{384\pi^2} (2\rho \ln\rho - \rho) \right\} \quad (51)$$

onde usamos as definições (49) e (50).

### 01.3 ANÁLISE DO VÁCUO

A seguir partamos para a análise do mínimo do potencial efetivo. O que devemos fazer é acharmos as soluções das condições necessárias de mínimo, (32), são elas

$$\frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial V_{ef}}{\partial \phi^2} = \rho \phi^2 = 0$$

e

(52)

$$\frac{1}{3N\lambda_0} \frac{\partial V_{ef}}{\partial \rho} = \frac{m^2}{\lambda} + \frac{1}{6N} \frac{d^2}{N} + \frac{\lambda_0}{96\pi^2} \rho \ln \rho = 0$$

O passo seguinte é verificarmos qual das soluções corresponde ao menor valor do potencial efetivo.

Como já ressaltamos na discussão subsequente a relação (35) vimos que, a última condição acima é também a equação de movimento para o campo  $\rho$ . Este último argumento nos possibilita expressarmos o potencial efetivo (51) como uma função de  $\rho$ , isto é,

$$V_{ef} = - \frac{N\lambda_0^2}{128\pi^2} \rho^2 \{ 2 \ln \rho + 1 \} \quad (53)$$

A desigualdade (37) aplicada a última das equações (52) nos fornece

$$\frac{1}{6N} \frac{d^2}{N} = - \frac{m^2}{\lambda} - \frac{\lambda_0}{96\pi^2} \rho \ln \rho \geq 0 \quad (54)$$

a qual deve sempre ser satisfeita, caso contrário os campos  $\phi^2$ 's não serão reais.

No mínimo do potencial efetivo os campos  $\rho$  e  $\phi^2$ 's, devem satisfazer uma das três possibilidades (conforme (34):

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} & \rho = 0 \quad e \quad \phi^a = 0 \\
 \text{b)} & \rho \neq 0 \quad e \quad \phi^a = 0 \\
 \text{c)} & \rho = 0 \quad e \quad \phi^a \neq 0
 \end{array} \tag{55}$$

Devemos observar que haverá a quebra espontânea de simetria somente se acontecer a última dessas possibilidades.

Como é sabido da mecânica quântica com finitos graus de liberdade, a existência de uma parte imaginária do potencial está ligada com a não conservação da probabilidade, visto que aparece um termo de fonte na equação de continuidade para a densidade de probabilidade (módulo ao quadrado da função de onda). Em teoria de campos, a existência de uma parte imaginária significa que temos uma fonte ou sumidouro de partículas, ou seja, instabilidade do vácuo. Para evitarmos esta instabilidade, devemos impor que a parte imaginária do potencial efetivo seja nula, isto é,

$$\text{Im } V_{\text{ef}} = 0 \tag{56}$$

A condição acima e a existência de um logaritmo de  $\rho$  no potencial efetivo nos obriga a tomarmos

$$\rho \geq 0 \quad e \quad \text{Im } \chi_0 = 0 \tag{57}$$

Ao tomarmos este resultado em conjunto com a desigualdade (54), nós temos que

$$\text{Im } \frac{m^2}{\lambda} = 0 \tag{58}$$



Se usarmos que  $\chi$  é não negativo, (36), em conjunto com (57) na definição de  $\rho$ , (50), chegamos a conclusão de que

$$\chi_0 \geq 0 \quad (59)$$

Voltemos à procura do mínimo do potencial efetivo, utilizando para tal a expressão (53). Suponhamos a solução seja  $\rho_s = 0$ , isto é,

$$V_{\text{ef}}(\rho_s = 0) = 0 \quad (60)$$

e de (54) vemos que este caso somente é possível se

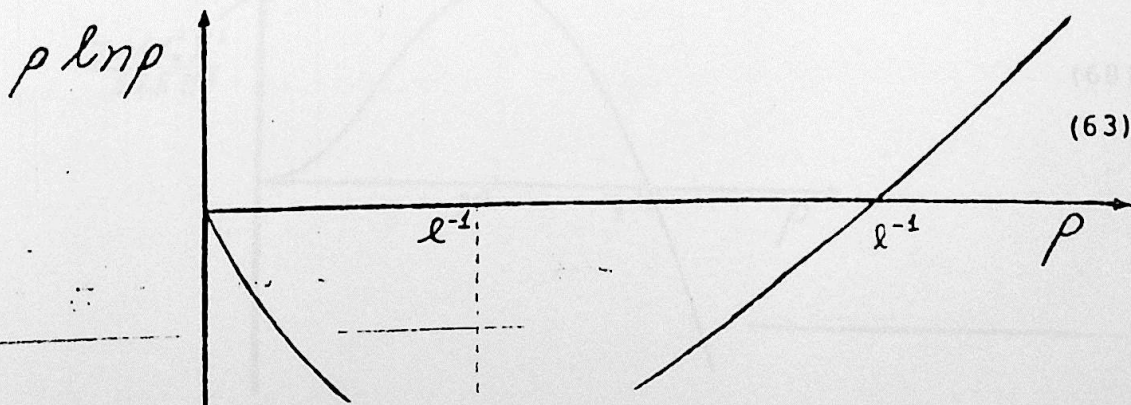
$$\frac{m^2}{\lambda} \leq 0 \quad (61)$$

caso contrário o potencial não estará definido em  $\rho$  igual a zero.

Para a solução  $\rho_s \neq 0$  e  $\phi^a = 0$ , concluímos por intermédio de (54) que  $\rho$  satisfaz

$$\rho_s \ln \rho_s = - \frac{96\pi^2 m^2}{\chi_0 \lambda} \quad (62)$$

Para facilitarmos a procura das soluções da equação acima, tracemos o gráfico abaixo



Se tivermos válida a última desigualdade, em conjugação com a relação (62), teremos sempre um

$$\rho_s \geq 1 \quad (64)$$

Isto é visto por mera inspeção do gráfico acima. Substituindo este resultado no potencial efetivo, (53), chegamos a

$$V_{ef}(\rho_s \geq 1) \leq 0 \quad (65)$$

Com ajuda de (60) podemos escrever a desigualdade anterior como

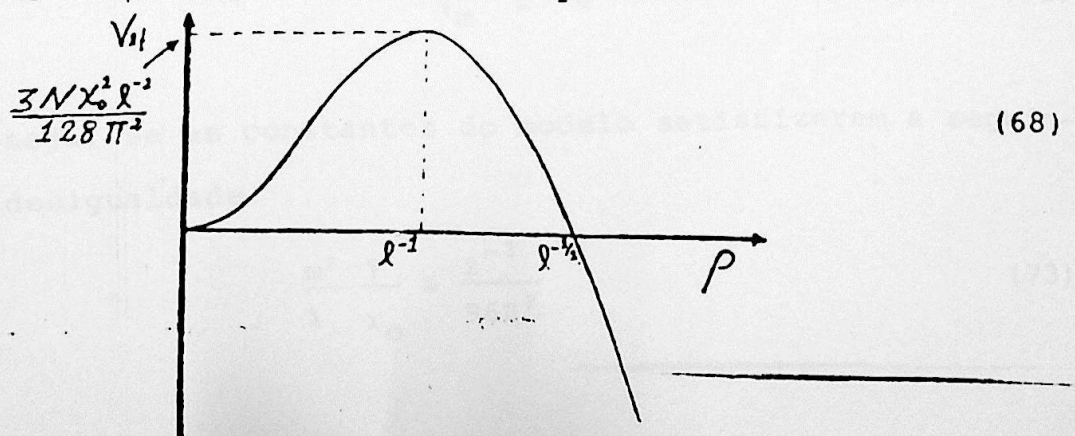
$$V_{ef}(\rho_s \geq 1) \leq V_{ef}(\rho_s = 0) \quad (66)$$

Esta relação conjugada com a observação que segue a desigualdade (61) demonstra que o mínimo será sempre quando

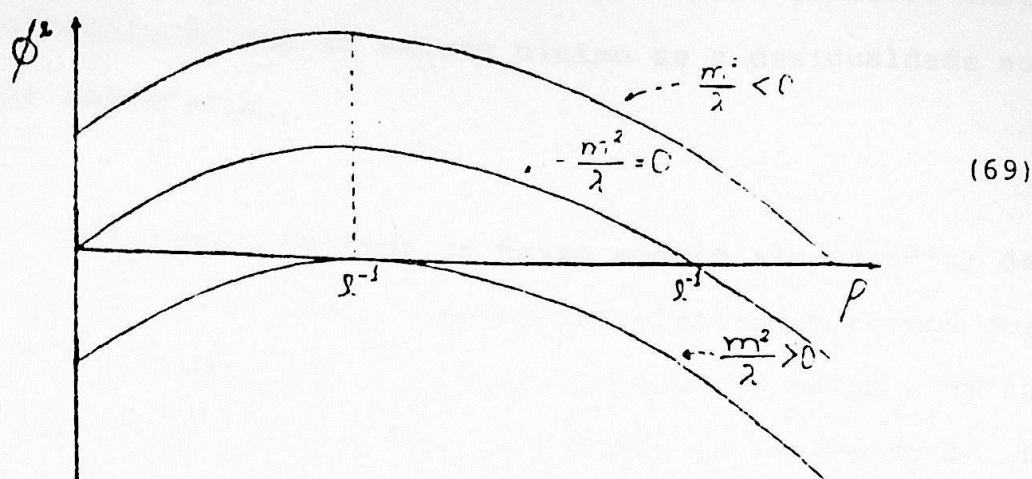
$$\rho_s \neq 0 \quad \text{e, portanto,} \quad \phi^a = 0 \quad (67)$$

Como já ressaltamos, este tipo de solução não apresenta quebra espontânea de simetria.

Agora esboçemos o gráfico do potencial efetivo em função de  $\rho$ . Com o auxílio da expressão (53) obtemos



A seguir tracemos de  $\phi^2$  em função de  $\rho$ , usando (54) encontramos



Deste último gráfico vemos claramente que existe um valor máximo de  $\phi^2$  tal que  $\rho$  seja real positivo. Este valor é dado pela condição de

$$\frac{d\phi^2}{d\rho} = 0 \quad (70)$$

O  $\phi^2$  máximo,  $\phi_m^2$ , corresponde a  $\rho$  igual a  $\lambda^{-1}$ , e vale

$$\frac{1}{6N}\phi_m^2 = -\frac{m^2}{\lambda} + \frac{\chi_0 \lambda^{-1}}{96\pi^2} \quad (71)$$

onde usamos outra vez a expressão (54). É claro que para o potencial ser real o máximo de  $\phi^2$ ,  $\phi_m^2$ , deve ser positivo, isto é,

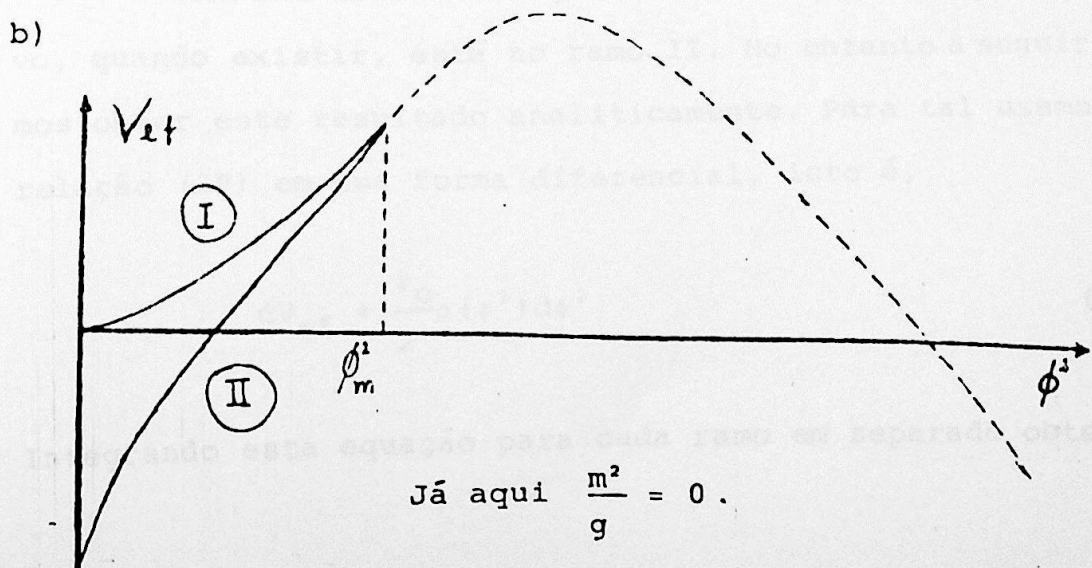
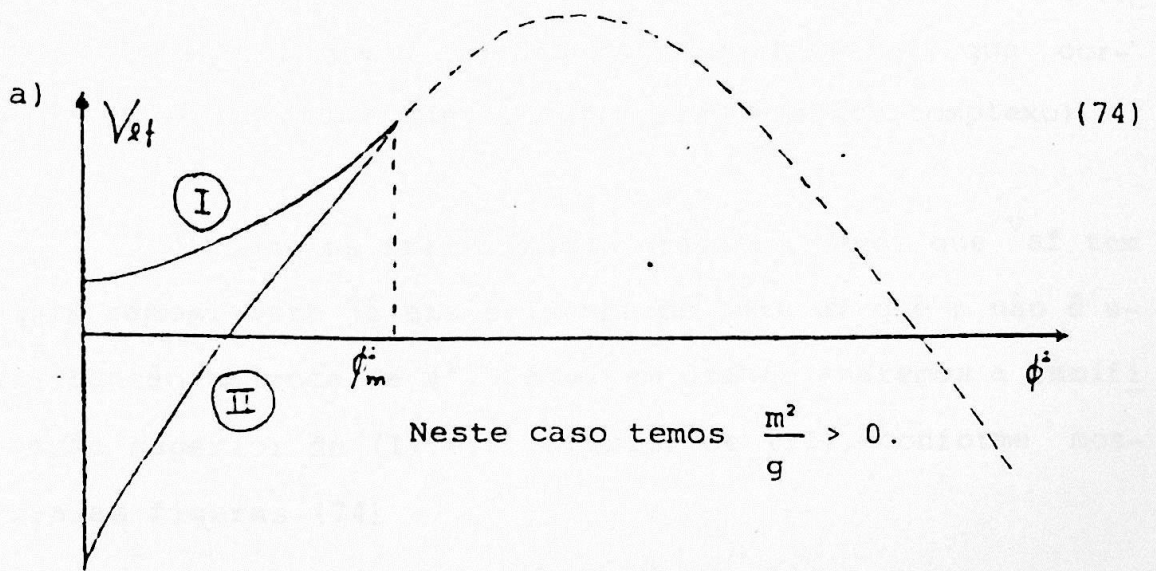
$$\phi_m^2 \geq 0 \quad (72)$$

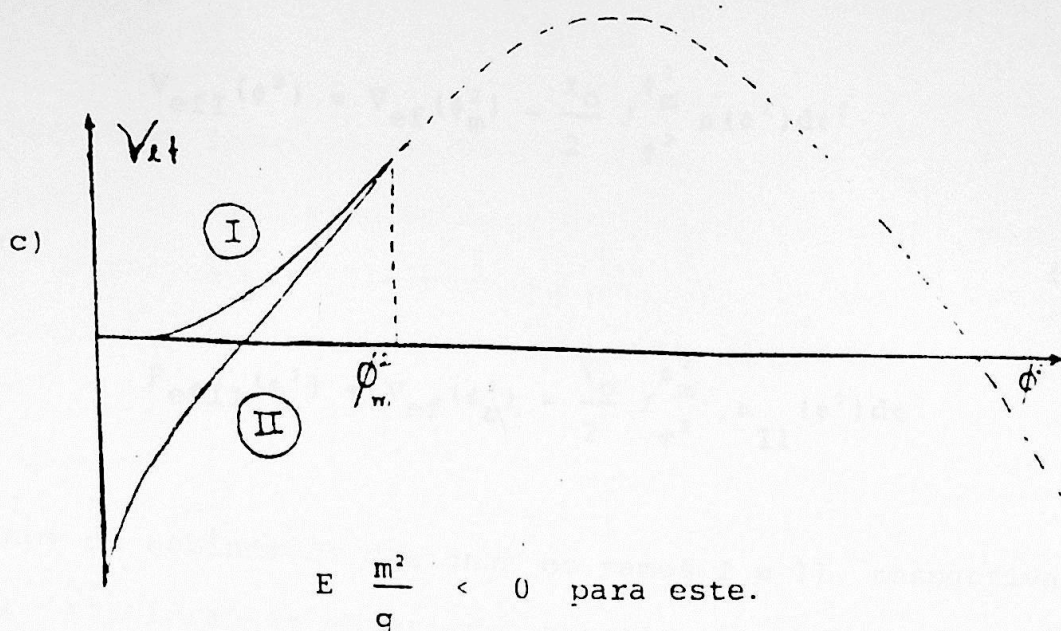
ou seja, se as constantes do modelo satisfizerem a seguinte desigualdade

$$\frac{m^2}{\lambda} \frac{1}{\chi_0} \leq \frac{\lambda^{-1}}{96\pi^2} \quad (73)$$

Ao compararmos o gráfico (63) com a equação que rege a existência de mínimo, (62), para o potencial efetivo, chegamos a conclusão que só existe mínimo se a desigualdade acima for satisfeita.

Os campos básicos de nosso modelo são os  $\phi^a$ 's; devemos portanto exprimir o potencial efetivo em termos destes. Para conseguirmos isto devemos achar o campo  $\rho$  em função dos  $\phi^a$ 's, com o auxílio da equação de movimento de  $\rho$ , (54). Analiticamente não conseguimos fazer isto, porém podemos fazê-lo graficamente. Dos dois últimos gráficos obtemos:





Ressaltemos que o traço contínuo significa a inversão para  $\rho$  maior ou igual a zero (potencial efetivo real) e o traço pontilhado é apenas a para a parte real de  $V_{ef}$ , que corresponde a  $\phi^2$  maior que  $\phi_m^2$  (potencial efetivo complexo).

Olhando os três últimos gráficos vemos que  $V_{ef}$  tem dois ramos. Isto já era evidente do fato de que  $\rho$  não é uma função unívoca de  $\phi^2$ . Daqui em diante charemos a ramificação superior de (I) e a inferior de (II), conforme mostra as figuras (74)

Graficamente vemos que o mínimo do potencial efetivo, quando existir, está no ramo II. No entanto a seguir vamos obter este resultado analiticamente. Para tal usemos a relação (39) em sua forma diferencial, isto é,

$$dV_{ef} = \frac{\chi_0}{2} \rho(\phi^2) d\phi^2 \quad (75)$$

Integrando esta equação para cada ramo em separado obtemos

$$V_{\text{efI}}(\phi^2) = V_{\text{ef}}(\phi_m^2) - \frac{\chi_0}{2} \int_{\phi^2}^{\phi_m^2} \rho(\phi^2) d\phi^2$$

e

(76)

$$V_{\text{efII}}(\phi^2) = V_{\text{ef}}(\phi_m^2) - \frac{\chi_0}{2} \int_{\phi_m^2}^{\phi^2} \rho_{\text{II}}(\phi^2) d\phi^2$$

onde os subíndices designam os ramos I e II, respectivamente. Nas fórmulas anteriores devemos ter em mente que  $\phi_m^2$  é o ponto de ramificação e sempre maior que qualquer  $\phi^2$ . A figura (69) ilustra que os  $\rho$ 's da direita do  $\rho$  correspondente ao maior  $\phi^2$ ,  $\phi_m^2$ , são sempre maiores que os da esquerda. A parte direita está associada ao ramo II e o outro ao I. Usando estas observações nas equações (76), concluímos que

$$V_{\text{efI}}(\phi^2) \geq V_{\text{efII}}(\phi^2) \quad (77)$$

Tendo em vista que  $\rho$  sempre é não negativo, (57), encontramos através de (76) e (77) que o mínimo do potencial efetivo se encontra no ramo II em  $\phi^2$  igual a zero.

Podemos concluir agora que o mínimo de  $V_{\text{ef}}$  ocorre para, quando existir,

$$\rho_s \geq \lambda^{-1} \quad (78)$$

conforme a figura (69). De (62) vemos que esta  $\rho_s$  solução é sua maior raiz.

O método algébrico (veio logo a seguir da expres-

são (59)) que usamos para analisar o mínimo do potencial efetivo dava resultados sobre a não existência de quebra espontânea de simetria. No caso  $m^2/\lambda$  maior que zero, este método complica bastante quando tentamos utilizá-lo para a procura do ramo no qual se encontra o mínimo do potencial efetivo. Somos levados a conclusão de que esta maneira para a busca do mínimo de  $V_{ef}$  é penosa, sendo assim damos preferência a maneira mostrada no parágrafo anterior.

Como passo seguinte averiguaremos se o mínimo do potencial efetivo (vácuo) é estável. Para tal devemos estudar as flutuações em torno do vácuo, ou seja, a dinâmica nas vizinhanças do mínimo de  $V_{ef}$ . A dinâmica do modelo é dada por sua ação, que no caso quântico vem a ser a ação efetiva,  $S_{ef}$ . Devemos, portanto, analisar a ação efetiva no entorno de  $V_{efII}(\phi^2=0)$ . Sendo assim, olhemos para sua parte quadrática nos campos. Como sabemos, são os termos quadráticos que dão origem aos propagadores não perturbados. Logo, a estabilidade do vácuo de uma teoria, com respeito a máximos e mínimos, é ditada pela forma de seus propagadores. A existência de pólos para  $p^2$  maior que zero (na região Euclidiana), diz que a teoria é instável. Se houver esses pólos dizemos que a teoria tem táquions.

Na região Euclidiana a ação efetiva, na ordem dominante em  $1/N$ , para o nosso modelo é (omitindo uma constante aditiva)

$$S_{ef} = \int \left( \frac{1}{2} a_0 \partial^2 \phi^a + \frac{3}{2} \frac{N}{\lambda_0} \chi^2 - \frac{1}{2} \frac{N}{\lambda_0} \chi^2 - \frac{1}{2} \chi \phi^2 - \frac{3Nm_0^2}{\lambda_0} \chi \right) d^4x - \frac{N}{2} \text{tr} \ln(\partial^2 + \chi) \quad (79)$$

Vemos que  $S_{ef}$  é simplesmente a soma da ação clássica mais

a série (26) com o campo  $\chi$  não constante, (31). O fato de que o termo cinético seja igual ao respectivo clássico, se deve a não necessidade de renormalizar os campos  $\phi^a$ 's, na ordem dominante em  $1/N$ .

Antes de partirmos para a análise dos propagadores, discutamos um pouco sobre a dinâmica ditada por  $S_{ef}$ . A equação de movimento para os campos  $\phi^a$ 's tem a mesma forma que a clássica. Já a do campo  $\chi$  é radicalmente diferente quando comparada à clássica, (12) e (14). Notamos, portanto, que a dinâmica do modelo é modificada drasticamente ao levarmos em conta as correções radiativas, já na ordem dominante de  $1/N$ .

No que segue, fixemos a dimensão do espaço - tempo Euclidiano em  $v$  igual a quatro.

Conforme já discutimos, devemos calcular os propagadores em relação ao mínimo do potencial efetivo. Para tal é conveniente redefinirmos o campo  $\chi$ , como

$$\chi \rightarrow \chi_S + \lambda \quad (80)$$

Desta forma, o valor esperado no vácuo do novo campo  $\chi$  é zero. Agora, a ação efetiva toma a forma

$$S_{ef} = \int \left\{ \frac{1}{2} \phi^a \partial^2 \phi^a - \frac{1}{2} \chi_S \phi^2 + \frac{1}{2} \chi \phi^2 + \frac{3}{2} \frac{N}{\lambda_0} - 3N \left( \frac{m_0^2}{\lambda_0} - \frac{\chi_S}{\lambda_0} \right) \chi \right\} d^4 x - \frac{N}{2} \text{tr} \ln(\partial^2 + \chi_S + \chi) \quad (81)$$

Usando a parte quadrática da ação anterior temos

os propagadores para os campos  $\phi^a$ 's,  $\Delta_F^{ab}$ , e são

$$\Delta_F^{ab} = \frac{\delta^{ab}}{p^2 + \chi_S} \quad (82)$$

Como frizamos, (36),  $\chi_S$  é positivo. Assim, a massa de cada "mésom" é  $\sqrt{\chi_S}$ .

Para acharmos o inverso do propagador do campo  $\chi$ ,  $\Delta_\chi$  basta calcularmos a segunda derivada de (81). Obtemos

$$\Delta_\chi^{-1} = -3N \left[ \frac{1}{\lambda_0} - \bar{B}(\chi, k^2, \Lambda^2) \right] \quad (83)$$

onde

$$\bar{B}(\chi, k^2, \Lambda^2) = -\frac{1}{6} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 + \chi_S)[(k+p)^2 + \chi_S]} \quad (84)$$

O fator  $-3N/\lambda_0$  em  $\Delta_\chi^{-1}$  veio do termo  $-3/2 N/\lambda_0 \chi^2$  da ação efetiva. Por outro lado, o  $3N\bar{B}(\chi, k^2, \Lambda^2)$  tem sua origem na parte quadrática em  $\chi$  do logaritmo, representado na série (26), isto é,

$$3N\bar{B}(\chi, k^2, \Lambda^2) \quad (85)$$

O cálculo de  $\bar{B}(\chi, k^2, \Lambda^2)$ , nos dá

$$\bar{B}(\chi_S, k^2, \Lambda^2) = \frac{1}{96\pi^2} \ln \left( \frac{\chi_S}{M^2} \right) + [f(-k^2, \chi_S) - f(0, \chi_S)] \quad (86)$$

onde,

$$f(-K^2, x_S) = \frac{1}{48\pi^2} \left( \frac{K^2 + 4x_S}{K^2} \right)^{1/2} \ln \left[ \frac{(K^2 + 4x_S)^{1/2} + \sqrt{K^2}}{2\sqrt{x_S}} \right] \quad (87)$$

Agora podemos deixar o inverso do propagador numa forma expressamente invariante em relação ao ponto de renormalização, dando

$$\frac{1}{3N} \Delta_\lambda^{-1} = \frac{1}{96\pi^2} (1 + \ln \rho_{II}) + [f(-K^2, x_S) - f(0, x_S)] \quad (88)$$

Se observamos que  $f(-K^2, x_S)$  é monotonicamente crescente para  $K^2$  positivo, concluímos que  $\Delta_\lambda^{-1}$  não tem zeros em  $K^2$  maior ou igual a zero. Para obtermos isto, usamos também que  $\rho_{II}$  é maior ou igual a  $\lambda^{-1}$ , veja (63). Portanto, no vácuo do ramo II não tem táquions, ou seja, este vácuo é estável. Por outro lado, o cálculo do espectro associado ao "vácuo" da região I, mostra a existência de táquions. (Kö 1975). Veja as referências anteriores deste Capítulo. O mesmo tipo de análise, para a equação (88), mostra que dependendo das constantes do modelo pode haver um pólo, no eixo real, associados com um estado ligado ou uma ressonância.

## 02. MODELO SIGMA NÃO LINEAR

Outro modelo vetorial bosônico interessante é o modelo sigma não linear, que é descrito pela densidade de Lagrangiana (Co 1982, No 1983)

$$L = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi^a \partial^\nu \phi^a \quad (89)$$

com o vínculo

$$\phi^a \phi^a = \frac{N}{2f} \quad (90)$$

Esta teoria, incluindo fêrmions, foi primeiramente usada para descrição das interações fortes a baixa energia. Ela também tem sido usada, principalmente em duas dimensões, como um laboratório para investigar propriedades da teoria de campos; como veremos, algumas propriedades são tipicamente não perturbativas e são exibidas através da expansão  $1/N$ .

Para implementarmos a expansão  $1/N$ , usaremos o método da integração funcional. Assim, o funcional gerador das funções de Green é dado por

$$Z = \int \prod_{a=1}^N D\phi^a \delta\left(\phi^a \phi^a - \frac{N}{2f}\right) \exp\left\{-\int d^2x (L + J^a \phi^a)\right\} \quad (91)$$

usando que

$$\delta(\phi^a \phi^a - \frac{N}{2f}) = \int D\phi \exp\left\{ i \int \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \phi^a \phi^a - \frac{N}{2f} \right\} d^2x \quad (92)$$

chegamos a

$$Z = \int D\phi \prod_{a=1}^N D\phi^a \exp\left\{ -\int \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a + \frac{m^2}{2} \phi^a \phi^a - i \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \phi^a \phi^a + i \frac{\sqrt{N}\sigma}{2f} + J^a \phi^a \right] d^2x \right\} \quad (93)$$

onde adicionamos o termo

$$\frac{m^2}{2} \phi^a \phi^a \quad (94)$$

que é irrelevante neste ponto, devido a vínculo (90). A integração nos  $\phi^a$ 's é Gaussiana. Temos portanto que

$$Z = \int D\phi [\det K]^{-N/2} \exp\left\{ \int \left[ -i \frac{\sqrt{N}\sigma}{2f} + \frac{1}{2} J^a K^{-1} J^a \right] d^2x \right\} \quad (95)$$

Aqui cabem as seguintes definições, que também serão úteis nas etapas posteriores,

$$K = D - i \frac{2\sigma}{\sqrt{N}} = -\partial^2 + m^2 + i \frac{2\sigma}{\sqrt{N}} \quad (96)$$

e

$$K^{-1} J^a(x) = \int Q(x-y) J^a(y) d^2y \quad (97)$$

com

$$Q(x-y) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \exp\{ i p(x-y) \} \bar{K}^{-1}(p^2) \quad (98)$$

Coloquemos o termo correspondente ao determinante numa forma mais tratável, usando a identidade

$$[\det K]^{-N/2} = \exp\left\{-\frac{N}{2} \operatorname{tr} \ln K\right\} \quad (99)$$

Desta forma, o funcional gerador das funções de Green pode ser expresso por

$$Z = \int D\sigma \exp\left\{-S_{\text{ef}} + \frac{1}{2} \int J^a K^{-1} d^2x\right\} \quad (100)$$

onde

$$S_{\text{ef}} = \frac{N}{2} \operatorname{tr} \ln K + i \frac{\sqrt{N}}{2t} \int \sigma(x) d^2x \quad (101)$$

é a ação efetiva do modelo. Esta ação tem um termo logarítmico, assim como no caso do modelo  $\lambda\phi^4$ . Assim, esta ação é a série, usando (96),

$$S_{\text{ef}} = i \frac{\sqrt{N}}{2t} \int \sigma(x) d^2x - i \sqrt{N} \operatorname{tr} (D^{-1}\sigma) - \frac{1}{2} \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1-\frac{\nu}{2}}{V} \operatorname{tr} [D^{-1} \cdot (2i\sigma)]^{\nu} \quad (102)$$

Devemos observar que a maneira pela qual colocamos os fatores de  $N$ , (90) e (92), é a que nos possibilita fazer a expansão  $1/N$  conforme veremos a seguir.

Examinemos os termos de ordem dominante em  $1/N$ , ou seja, os proporcionais a  $\sqrt{N}$ . Neste caso, somente os dois primeiros termos da última expressão contribuem, dando

$$i \sqrt{N} \left( \frac{1}{2f} - \int \frac{d^2 K}{(2\pi)^2} \left( \frac{1}{K^2 + m^2} - \frac{1}{K^2 + \Lambda^2} \right) \right) \int_0(x) d^2 x \quad (103)$$

onde colocamos um termo regulador do tipo Pauli-Villars. Para que o limite de  $N$  tendo a infinito exista, a expressão entre chaves deve ser nula; isto é,

$$\frac{1}{2f} - \int \frac{d^2 K}{(2\pi)^2} \left( \frac{1}{K^2 + m^2} - \frac{1}{K^2 + \Lambda^2} \right) = 0 \quad (104)$$

Ao efetuarmos a integração acima temos

$$\frac{1}{2f(\Lambda)} - \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} = 0 \quad (105)$$

Esta fórmula mostra que a teoria apresenta liberdade assintótica, ou seja, ao fazermos  $\Lambda \rightarrow \infty$ ,  $f(\Lambda) \rightarrow 0$ . É conveniente introduzirmos uma constante de acoplamento renormalizada,  $f_r(\mu)$ , dada por

$$\frac{1}{2f_r(\mu)} = \frac{1}{2f(\Lambda)} + \frac{1}{4\pi^0} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \quad (106)$$

Assim como no modelo  $\lambda\phi^4$ , o parâmetro  $\mu^2$  desempenha o papel de ponto de renormalização. Substituindo as duas últimas equações, uma na outra, obtemos

$$m^2 = \mu^2 \exp \left( - \frac{2\pi}{f_r} \right) \quad (107)$$

O fato de  $m^2$  poder ser expresso em termos de  $f_r$  é chamado de transmutação dimensional. Visto que esta massa gerada dinamicamente depende não analiticamente da constante de acoplamento, trata-se, então, de um fenômeno tipicamente não perturbativo.

Consideremos agora o termo seguinte na expansão  $1/N$ , o qual é quadrática em  $c$ ,

$$\text{tr} (D^{-1} \circ D^{-1} \sigma) = \int \int \sigma(x) \Gamma(x-y) \sigma(y) d^2x d^2y \quad (108)$$

onde a transformada de Fourier,  $\bar{\Gamma}(p)$ , de  $\Gamma(x-y)$  é dada por

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}(p) &= \int \frac{d^2K}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(p+K)^2 + m^2] (K^2 + m^2)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{[p^2 (p^2 + 4m^2)]^{1/2}} \ln \frac{\sqrt{p^2 + 4m^2} + \sqrt{p^2}}{\sqrt{p^2 + 4m^2} - \sqrt{p^2}} \end{aligned} \quad (109)$$

O propagador,  $\Delta$ , para o campo  $\sigma$  no espaço dos momentos é então

$$\Delta = \frac{2}{\bar{\Gamma}(p)} \quad (110)$$

Podemos agora resumir as regras de Feynman adequadas à expansão  $1/N$  (regras de Feynman efetivas).

### 1) Propagadores

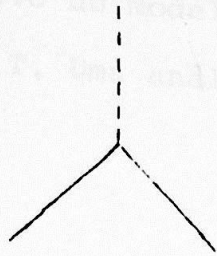
$$a \text{ --- } b \quad (111)$$

corresponde ao propagador de um campo  $\phi^a$  qualquer, sua expressão analítica é

$$\frac{\delta^{ab}}{p^2 + m^2} \quad ; \quad (112)$$

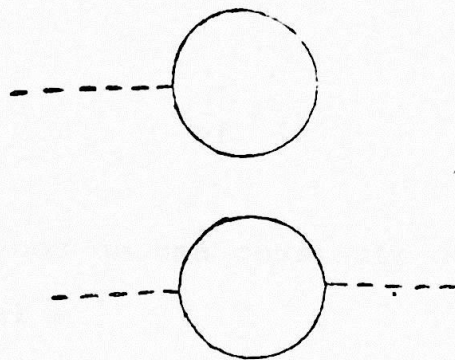
representa o propagador do campo do  $\sigma$ , analiticamente dado pelas expressões (109) e (110).

2) Vértice



(114)

Devemos ressaltar que, os diagramas



(115)

estão proibidos de aparecer, uma vez que já foram considerados (o primeiro, usamos na equação a partir da qual vemos a geração dinâmica de massa, (103), e o segundo na construção do propagador do  $\sigma$ , (108) e (109).

## APÊNDICE E

Neste apêndice veremos brevemente como se comporta o potencial efetivo do modelo  $\lambda\phi^4$  com simetria  $O(N)$  à temperatura finita,  $T$ . Uma análise detalhada é feita por Silva (Si 1987).

Pode-se mostrar que o potencial efetivo a temperatura finita,  $V_{\text{ef}T}$ , corresponde ao  $V_{\text{ef}}$ , (51), (independentemente de  $T$ ) mais um termo,  $\Gamma$ , que depende da temperatura, isto é,

$$V_{\text{ef}T} = V_{\text{ef}} + \Gamma \quad (\text{B.1})$$

onde  $\Gamma$ , a menos de uma constante de proporcionalidade positiva, é igual a

$$- T^4 \left\{ E \left( \frac{\chi_0^0}{T^2} \right) - 1 \right\} \quad (\text{B.2})$$

com

$$E(x) = \frac{45}{\pi^2} \int_0^{\infty} dy y^2 \ln \{ 1 - \exp(-\sqrt{y^2+x}) \} \quad (\text{B.3})$$

A condição

$$\frac{\partial V_{\text{ef}T}}{\partial \rho} = 0 \quad (\text{B.4})$$

como já vimos no caso de temperatura zero, é justamente a equação que define  $\rho$  em termos de  $\phi^2$ , (54). Esta condi-

ção nos fornece

$$\frac{1}{6} \frac{d\phi^2}{d\rho} = - \left( \frac{m^2}{\lambda} + \frac{d\tau}{d\rho} \right) - \frac{\chi_0}{96\pi^2} \rho \ln \rho \quad (\text{B.5})$$

O termo  $\frac{d\tau}{d\rho}$  para um dado valor de  $\rho$  se comporta como um termo de massa na equação acima. Ainda, de (B.2) e (B.3) vemos que  $\frac{d\tau}{d\rho}$  é zero no limite de  $T$  tendendo a zero e tende a infinito positivo quando  $T$  tende ao infinito. Além do mais,  $\frac{d\tau}{d\rho}$  é monotonamente crescente com  $T$ .

Nos nossos estudos do  $\lambda\phi^4$  vimos que, quanto maior é a constante  $m^2/\lambda$ , menor é a região de valores que  $\phi^2$  pode tomar (veja o gráfico (69)).

Agora somos levados a conclusão: Este modelo continua sem quebra de simetria ao aumentarmos a temperatura. Também, existe uma temperatura crítica,  $T_c$ , onde  $V_{ef}$  se torna complexo para qualquer valor de  $\phi^2$ .

Haja visto que, o aumento de  $m^2/\lambda$  não faz aparecer quebra espontânea de simetria. Também, existe uma temperatura -

## REFERÊNCIAS

- (Ab 1976) - L.F. Abbott, J.S. Kang and H.J. Schnitzer,  
Phys. Rev. D13, 2212 (1976)
- (Co 1982) - B.B. Cobra, Dissert. Mestrado, Inst. Fís. Un.  
São Paulo, São Paulo (1982)
- (Co 1974) - S. Coleman, R. Jakiw and H.D. Politzer, Phys.  
Rev. D10, 2491 (1974)
- (Co 1981) - S. Coleman, in "Pointline Structures Inside  
and Outside Hadros, Zichichi ed., Plenum, New  
York (1981)
- (Ko 1975) - M. Kobayashi and T. Kugo, Prof. Theor. Phys.  
vol. 54, 1537 (1975)
- (No 1983) - V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainstein and  
V.I. Zakharov, Phys. Rep. 116, 103 (1984)
- (Si 1987) - A.J. Silva, Tese de Livre-Docência, Inst. Fís.  
Un. São Paulo, São Paulo (1987)

### III. MODELO $O(N) \times O(N)$

#### 01. INTRODUÇÃO

Segundo Weinberg (We 1974), o modelo  $O(N) \times O(N)$  à temperatura zero pode existir em uma fase com simetria não quebrada. Com o aumento da temperatura o modelo apresentaria quebra espontânea de simetria, indo para uma fase  $O(N) \times O(N-1)$ . Isto é o oposto do comumente encontrado, ou seja, restauração da simetria com o aumento da temperatura. A maioria dos sistemas físicos conhecidos apresentam restauração da simetria com o aumento da temperatura. Por outro lado, Fujimoto e Sakakibara (Fu 1985) afirmam que este modelo não apresentará quebra de simetria a partir de uma temperatura suficientemente alta.

Ressaltamos que, as equações de massa (gap) que eles (Fu 1985) usaram estão incompletas quando comparadas com as aqui obtidas. Usando a técnica de grupo de renormalização a temperatura finita Manesis e Sakakibara (Ma 1985), dizem que a partir de uma dada temperatura existirá uma restauração de simetria, sendo assim o modelo passa a ficar numa fase sem quebra de simetria. Nesta tese, mostraremos que o mínimo do potencial efetivo sempre se encontra numa fase sem quebra de simetria para temperaturas moderadamente altas, enquanto este potencial for real.

O modelo  $O(N) \times O(N)$  tem como limite o  $\lambda\phi^4$  quando o termo de interação mútua desaparecer. Portanto, a análise do  $O(N) \times O(N)$  leva consigo a análise do  $\lambda\phi^4$ . Assim, como veremos, muitos resultados são obtidos de maneira análoga aos encontrados no  $\lambda\phi^4$ .

O modelo  $O(N) \times O(N)$  é definido pela Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 - \frac{\lambda_\phi}{4N} (\phi^2)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\nu \psi)^2 - \frac{1}{2} m_\psi^2 \psi^2 - \frac{\lambda_\psi}{4N} (\psi^2)^2 + \frac{\lambda}{2N} \phi^2 \psi^2 \quad (1)$$

onde

$$(\partial_\nu \phi)^2 = \sum_{a=1}^N \partial_\nu \phi^a \partial^\nu \phi^a, \quad \phi^2 = \sum_{a=1}^N \phi^a \phi^a$$

e definições análogas para  $\psi^a$ .

Notemos que a permutação dos campos  $\phi^a$  e  $\psi^a$ , conjuntamente com os índices inferiores dos parâmetros, respectivos, deixa invariante a teoria. Isto nos diz que todos os resultados encontrados devem manifestar esta simetria.

Para este modelo o potencial clássico é

$$V_{Cl} = \frac{1}{2} m_\phi^2 x + \frac{1}{2} m_\psi^2 y + \frac{\lambda_\phi}{4N} x^2 + \frac{\lambda_\psi}{4N} y^2 - \frac{\lambda}{2N} xy \quad (2)$$

sendo

$$x = \phi^2 \quad \text{e} \quad y = \psi^2$$

Os parâmetros  $\lambda_\phi$  e  $\lambda_\psi$  devem ser maiores que zero, para que  $V_{Cl}$  seja limitado inferiormente.

A fim de continuarmos a análise é útil escrevermos  $V_{Cl}$  da forma seguinte

$$V_{Cl} = \frac{1}{2} m_\phi^2 x + \frac{1}{2} m_\psi^2 y + \frac{1}{4N} (\sqrt{\lambda_\phi} x - \sqrt{\lambda_\psi} y)^2 + \frac{1}{2N} (\sqrt{\lambda_\phi \lambda_\psi} - \lambda) xy \quad (3)$$

Agora fica claro que a existência de um limite inferior para o potencial clássico, para quaisquer  $x$  e  $y$ , implica em

$$\lambda_\phi > 0, \quad \lambda_\psi > 0 \quad \text{e} \quad \sqrt{\lambda_\phi \lambda_\psi} - \lambda > 0 \quad (4)$$

A seguir faremos uma análise do potencial clássico no que diz respeito aos seus mínimos. Estes mínimos correspondem aos possíveis vácuos (estado fundamental) da teoria. As condições necessárias de mínimo local são:

$$\frac{\partial V_{Cl}}{\partial \phi^a} = (m_\phi^2 + \frac{\lambda_\phi}{N} \phi^2 - \frac{\lambda}{N} \psi^2) \phi^a = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial V_{Cl}}{\partial \psi^a} = (m_\psi^2 + \frac{\lambda_\psi}{N} \psi^2 - \frac{\lambda}{N} \phi^2) \psi^a = 0$$

As soluções deste sistema de equações, com os respectivos valores do potencial clássico, são:

Primeira (Não tem quebra de simetria)

$$\phi^a = \psi^a = 0 \quad V_{Cl} = 0 \quad (6)$$

Segunda (Com quebra de simetria em um dos  $O(N)$ )

$$\phi^2 = -\lambda_\phi / (Nm_\phi^2) \quad \psi^a = 0 \quad (7)$$

$$V_{Cl} = \frac{\lambda_\phi}{2N} \left( -1 + \frac{\lambda_\phi^2}{2Nm_\phi^4} \right)$$

Terceira (Com quebra de simetria no outro fator  $O(N)$ )

$$c^a = 0, \quad \psi^2 = -\lambda_\psi / (Nm_\psi^2) \quad (8)$$

$$V_{Cl} = \frac{\lambda_\psi}{2N} \left( -1 + \frac{\lambda_\psi^2}{2Nm_\psi^4} \right)$$

Quarta (Há quebra de simetria em ambos  $O(N)$ 's)

$$\phi^2 = -N \frac{m_\phi^2 \lambda_\psi - m_\psi^2 \lambda_\phi}{\lambda_\phi \lambda_\psi - \lambda^2} \quad e \quad \psi^2 = -N \frac{m_\psi^2 \lambda_\phi - m_\phi^2 \lambda_\psi}{\lambda_\phi \lambda_\psi - \lambda^2} \quad (9)$$

$$V = \frac{-N}{\lambda_\phi \lambda_\psi - \lambda^2} \left\{ \frac{\lambda_\psi m_\phi^4}{4} + \frac{\lambda_\phi m_\psi^4}{4} + \frac{\lambda m_\phi^2 m_\psi^2}{2} \right\}$$

Vemos que uma determinada escolha dos parâmetros corresponderá a uma dada fase.

Para a análise quântica do modelo  $O(N) \times O(N)$ , por analogia ao  $\lambda\phi^4$ , é conveniente introduzirmos campos auxiliares, da seguinte forma

$$L \rightarrow L + N \left( \sigma - \frac{a}{2N} \phi^2 + \frac{a_0}{2} \right)^2 + N \left( \beta - \frac{b}{2N} \phi^2 - \frac{c}{2N} \psi^2 - \frac{a_1}{2} \right)^2 \quad (10)$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{ac} (bm_\psi^2 - cm_\phi^2), \quad a_1 = \frac{m_\psi^2}{c}$$

$$a = \left( \frac{\lambda \phi \lambda \psi - \lambda^2}{\lambda \psi} \right)^{1/2}, \quad b = \frac{-\lambda}{\sqrt{\lambda \psi}} \quad e$$

$$c = \sqrt{\lambda \psi}$$

Estas constantes ( $a, b, c, \alpha_0$  e  $\alpha_1$ ) foram escolhidas com a finalidade de eliminar da Lagrangiana os termos em  $\sigma^2, \psi^2, (\phi^2)^2, (\psi^2)^2$  e  $\phi^2 \psi^2$ .

A Lagrangiana contendo estes campos auxiliares fica (a menos de um termo constante)

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\nu \psi)^2 - V$$

$$V_{Cl} = -N\sigma^2 + a\sigma\phi^2 + b\beta\phi^2 - N\alpha_0\sigma - N\beta^2 + C\beta\psi^2 - N\alpha_1\beta \quad (11)$$

Para obtermos uma visão quântica do modelo aqui tratado, usemos o método do potencial efetivo, incluindo termos até a ordem dominante em  $1/N$ .

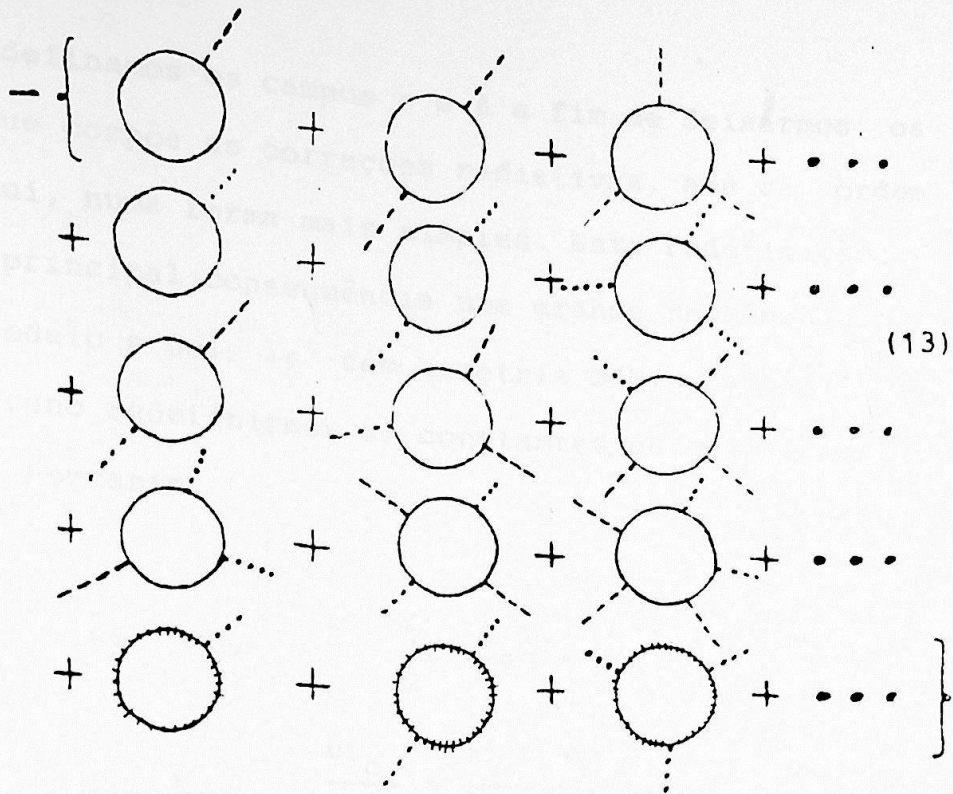
## 02. POTENCIAL EFETIVO

O potencial efetivo será

$$V_{ef} = V_{Cl} + C.R. \quad (12)$$

Analogamente ao modelo  $\lambda\phi^4$ , os gráficos dominantes em  $1/N$  são os de um anel em  $\phi$  e  $\psi$  com linhas externas dos campos  $\sigma$  e  $\beta$ . Para clarificar, segue o desenho destes gráficos

C.R. =



- onde
- representa o propagador de  $\phi^a$
  - representa o propagador de  $\psi^a$
  - representa o propagador de  $\sigma$
  - representa o propagador de  $\beta$
- (14)
- representa o vértice relacionado com  $a\sigma\phi^2$
  - representa o vértice relacionado com  $b\beta\phi^2$
  - representa o vértice relacionado com  $c\beta\phi^2$

A soma destes gráficos é na realidade a expansão em série da expressão abaixo (obtida da mesma maneira que a do modelo  $\lambda\phi^4$ ):

$$\frac{1}{2} N \int \frac{d^u p}{\pi^u} \ln \left( 1 + \frac{a\sigma + b\beta}{p^2} \right) + \frac{1}{2} N \int \frac{d^u p}{(2\pi)^u} \ln \left( 1 + \frac{c\beta}{p^2} \right) \quad (15)$$

onde  $\nu$  representa a dimensão do espaço.

Redefinamos os campos  $\sigma$  e  $\beta$  a fim de deixarmos os gráficos que compõe as correções radiativas, até a ordem tratada aqui, numa forma mais simples. Esta redefinição - traz como principal consequência uma grande semelhança entre este modelo e dois  $\lambda\phi^4$  com simetria  $O(N)$ . Também é bastante oportuno redefinirmos as constantes de acoplamento e as massas. Portanto

$$\frac{1}{2} \rho = c\beta \quad , \quad \frac{1}{2} \chi = a\sigma + b\beta$$

$$\frac{6}{q_{O\phi}} = \frac{\lambda_\psi}{\lambda_\phi \lambda_\psi - \lambda^2} \quad \frac{b\mu_{O\phi}^2}{q_{O\phi}} = \frac{m_\phi^2 \lambda_\psi + m_\psi^2 \lambda}{\lambda_\phi \lambda_\psi - \lambda^2} \quad (16)$$

$$\frac{6}{q_{O\phi}} = \frac{\lambda_\phi}{\lambda_\phi \lambda_\psi - \lambda^2} \quad \frac{6\mu_\psi^2}{q_{O\phi}} = \frac{m_\psi^2 \lambda_\phi + m_\phi^2 \lambda}{\lambda_\phi \lambda_\psi - \lambda^2}$$

$$\frac{6}{q_{O\phi}} = \frac{\lambda}{\lambda_\phi \lambda_\psi - \lambda^2}$$

Frizemos que, os  $\lambda$ 's podem ser expressos em função dos  $q$ 's, para isso devemos essencialmente trocá-los de posição nas relações acima.

Com o uso das relações (16) a Lagrangiana clássica toma a forma

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi)^2 - \frac{3N}{2q_{O\phi}} \chi^2 + \frac{1}{2} \chi \phi^2 + \frac{3N\mu_{O\phi}^2}{q_{O\phi}} \chi \quad (17)$$

$$-\frac{3N}{2q_{O\psi}}\rho^2 + \frac{1}{2}\rho\psi^2 + \frac{3N\nu^2_{O\psi}}{q_{O\psi}}\rho + \frac{3N}{q_O}\rho\chi$$

Assim os gráficos que contribuem para as correções radiativas na ordem tratada aqui passam a ser

Correções Radiativas =

(18)

Aqui as linhas pontilhadas significam o campo  $\chi$  e a tracejada o campo  $\xi$ .

Estas somas são bem mais simples que as anteriores e tem como resultado

$$\frac{1}{2} N \int \frac{d^u P}{(2\pi)^u} \ln \left( \frac{P^2 + \chi}{P^2} \right) + \frac{1}{2} N \int \frac{d^u P}{(2\pi)^u} \ln \left( \frac{P^2 + \rho}{P^2} \right) \quad (19)$$

O potencial efetivo fica com a seguinte forma

$$V_{ef} = -\frac{3N}{2q_{O\phi}}\chi^2 + \frac{1}{2}\chi\phi^2 + \frac{3N\nu^2_{O\phi}}{q_{O\phi}}\chi + \frac{1}{2} N \int \frac{d^u P}{(2\pi)^u} \ln \left( \frac{P^2 + \chi}{P^2} \right) \quad (20)$$

$$-\frac{3N}{2q_{O\psi}}\rho^2 + \frac{1}{2}\rho\psi^2 + \frac{3N\nu^2_{O\psi}}{q_{O\psi}}\rho + \frac{1}{2} N \int \frac{d^u P}{(2\pi)^u} \ln \left( \frac{P^2 + \rho}{P^2} \right) - \frac{3N}{q_O}\rho\chi$$

Daqui fica claro que este potencial efetivo é composto de dois modelos  $\lambda\phi^4$  com simetria  $O(N)$  com um acoplamento mú-

tuo (o último termo em 20), veja a expressão (31) do Capítulo II. Isto até a ordem aqui tratada.

A presença das correções radiativas modifica drasticamente a análise do mínimo do potencial efetivo, em relação ao potencial clássico, como constataremos no desenrolar de nossa análise.

O mínimo do potencial efetivo dá o vácuo do modelo, até a ordem levada em conta nos cálculos. Usaremos a seguir as condições necessárias de mínimo,

$$\frac{\partial V_{ef}}{\partial \phi^a} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V_{ef}}{\partial \psi^a} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial V_{ef}}{\partial \gamma} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V_{ef}}{\partial \rho} = 0$$

juntamente com o fato de  $\phi^2$  e  $\psi^2$  serem positivos. Achando as soluções que satisfazem estes requisitos, substituiremos estas no potencial para ver qual delas corresponde ao mínimo. Estas duas últimas expressões são também as próprias equações de movimento que definem os campos  $\chi$  e  $\rho$  em função de  $\phi^2$  e  $\psi^2$ .

As equações anteriores dão

$$\chi \phi^a = 0 \quad , \quad \rho \psi^a = 0$$

$$\chi = \mu_0^2 \phi^2 + \frac{q_0 \phi}{6} \frac{\phi^2}{N} - \frac{q_0 \phi \rho}{q_0} + \frac{q_0 \phi}{6} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + \chi} \quad (22)$$

$$\nu = \nu_{0\phi}^2 + \frac{q_{0\psi}}{6} \frac{\psi^2}{N} - \frac{q_{0\psi}}{q_0} + \frac{q_{0\psi}}{6} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{P^2 + c}$$

Restringiremos o nosso tratamento para quatro dimensões. Nessa situação necessitaremos fazer a renormalização dos parâmetros iniciais. O fato de ter sido possível escrever o potencial efetivo como a soma de dois  $\lambda\phi^4$ , como simetria  $O(N)$ , faz com que não seja necessária a renormalização da constante de acoplamento mútuo, possibilitando usarmos imediatamente a maneira convencional de renormalizar do  $\lambda\phi^4$  com simetria  $O(N)$ . Segue a conveniente escolha dos parâmetros renormalizados da teoria

$$\frac{\mu_{\phi}^2}{q_{\phi}} = \frac{\mu_{0\phi}^2}{q_{0\phi}} + \frac{1}{6} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{P^2}$$

$$\frac{1}{q_{\phi}} = \frac{1}{q_{0\phi}} + \frac{1}{6} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{P^2 (P^2 + M^2)}$$

(23)

$$\frac{\mu_{\psi}^2}{q_{\psi}} = \frac{\mu_{0\psi}^2}{q_{0\psi}} + \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{P^2}$$

$$\frac{1}{q_{\psi}} = \frac{1}{q_{0\psi}} + \frac{1}{6} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{P^2 (P^2 + M^2)} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_0}$$

onde  $M$  é o ponto de renormalização.

Substituindo estes novos parâmetros no potencial efetivo, tem-se

$$V_{\text{ef}} = -\frac{3N}{2q_{\phi}} \chi^2 + \frac{1}{2} \chi \phi^2 + \frac{3N\mu_{\phi}^2}{q_{\phi}} \chi + \frac{N\chi^2}{128\pi^2} \left\{ 2 \ln \left( \frac{\chi}{M^2} \right) - 1 \right\}$$

$$-\frac{3N}{q_\psi} \rho^2 + \frac{1}{2} \rho \psi^2 + \frac{3N \psi^2}{q_\psi} \rho + \frac{N \rho^2}{128 \pi^2} \left\{ 2 \ln \left( \frac{f}{M^2} \right) - 1 \right\} \quad (24)$$

$$-\frac{3N}{q} \chi \rho$$

onde usamos as seguintes integrais

$$\int_0^\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{16\pi^2}$$

$$\int_0^\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 (p^2 + M^2)} = \frac{1}{16\pi^2} \ln \left( \frac{\Lambda^2 + M^2}{M^2} \right)$$

(25)

$$\int_0^\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln(p^2 + \chi) = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \left( \frac{\Lambda^4 - \chi^2}{2} \right) \ln(\Lambda^2 + \chi) - \right.$$

$$\left. \left( \frac{\Lambda^4 - 2\Lambda^2 \chi - 6\chi^2}{4} \right) + 2\chi^2 \ln \chi \right\}$$

Cabe ressaltar que precisamos apenas de um ponto de renormalização. Como dito anteriormente, não foi preciso renormalizar a constante de acoplamento mútua.

É conveniente usarmos constantes que não dependam do ponto de renormalização, no lugar de  $\frac{1}{q_\phi}$  e  $\frac{1}{q_\psi}$ . Como

$$\frac{1}{q_\phi(M_1)} + \frac{1}{96\pi^2} \ln(M_1^2) = \frac{1}{q_\psi(M_2)} + \frac{1}{96\pi^2} \ln(M_2^2) \quad (26)$$

$$\frac{1}{q_\psi(M_1)} + \frac{1}{96\pi^2} \ln(M_1^2) = \frac{1}{q_\psi(M_2)} + \frac{1}{96\pi^2} \ln(M_2^2)$$

vemos que

$$\chi_0 = m^2 \exp\left(\frac{96\pi^2}{g_d(M)}\right) \quad \text{e} \quad \rho_0 = M^2 \exp\left(\frac{96\pi^2}{g_\psi(M)}\right) \quad (27)$$

são escalas naturais de massa, já que estas constantes independem do ponto de renormalização.

### 03. ANÁLISE DO MÍNIMO DO POTENCIAL EFETIVO

O potencial efetivo passa a ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} V_{ef} = & 3N\chi_0\alpha\left\{\frac{\mu_\phi^2}{g_\phi} + \frac{1}{6N}\phi^2 + \frac{\chi_0}{384\pi^2}(2\alpha \ln \alpha - \alpha)\right\} \\ & + 3N\rho_0\gamma\left\{\frac{\mu_\psi^2}{g_\psi} + \frac{1}{6N}\psi^2 + \frac{\rho_0}{384\pi^2}(2\gamma \ln \gamma - \gamma)\right\} \\ & - \frac{3N\chi_0\rho_0}{g} \alpha \gamma \end{aligned} \quad (28)$$

onde foram usados os campos adimensionais  $\alpha$  e  $\gamma$ , definidos como  $\alpha = \chi/\chi_0$  e  $\gamma = \rho/\rho_0$

Para acharmos o vácuo da teoria é necessário fazermos um estudo das equações

$$\frac{1}{\chi_0} = \frac{\partial V_{ef}}{\partial \phi^a} = \alpha \phi^a = 0 \quad , \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial V_{ef}}{\partial \psi^a} = \gamma \psi^a = 0 \quad (29)$$

$$\frac{1}{3N\chi_0} \frac{\partial V_{ef}}{\partial \alpha} = \frac{\mu_\phi^2}{q_\phi} + \frac{1}{6N} \frac{\phi^2}{N} + \frac{\chi_0}{96\pi^2} \alpha \ln \alpha - \frac{\rho_0}{g} \gamma = 0$$

$$\frac{1}{3N\chi_0} \frac{\partial V_{ef}}{\partial \gamma} = \frac{\mu_\psi^2}{q_\psi} + \frac{1}{6N} \frac{\psi^2}{N} + \frac{\rho_0}{96\pi^2} \gamma \ln \gamma - \frac{\chi_0}{g} \alpha = 0$$

e ver qual de suas soluções dará o mínimo para o potencial efetivo, analisando as implicações sobre os valores das constantes.

Antes de procurarmos o mínimo do potencial efetivo vejamos algumas de suas propriedades que nos serão importantes.

Assim como no modelo  $\lambda\phi^4$ , consideraremos as regiões onde  $V_{ef}$  é real, caso contrário teríamos uma instabilidade relacionada com criação ou desaparecimento de partículas. Esta condição de realidade nos obriga a tomarmos

$$\chi \geq 0 \quad \text{e} \quad \rho \geq 0 \quad (30)$$

devido a presença dos termos logarítmicos em (24). Agora, se olharmos para (28) concluiremos também que

$$\alpha \geq 0 \quad \text{e} \quad \gamma \geq 0 \quad (31)$$

A seguir usemos as definições de  $\alpha$  e  $\gamma$ , que aparecem logo após a expressão (28). Logo, a partir das duas desigualdades anteriores, temos

$$\chi_0 \geq 0 \quad \text{e} \quad \rho_0 \geq 0 \quad (32)$$

A condição da parte imaginária de  $V_{ef}$  ser zero, ainda nos fornece

$$\text{Im} \frac{\mu^i}{q_d} = \text{Im} \frac{\nu^i}{q_v} = 0 \quad (33)$$

Com o auxílio das equações que definem  $\alpha$  e  $\gamma$  em função de  $\mu^i$  e  $\nu^i$  (as duas últimas das (29)) podemos escrever o potencial efetivo, (28), em termos de  $\alpha$  e  $\gamma$ , dando

$$V_{ef} = - \frac{N \lambda_0^2}{128\pi^2} \alpha^2 \{2 \ln \alpha + 1\} - \frac{N \gamma^2}{128\pi^2} \gamma^2 \{2 \ln \gamma + 1\} + \frac{3N \lambda_0^2 \epsilon_0}{q} \quad (34)$$

De novo, temos dois  $\lambda\phi^4$  com um termo de acoplamento (compare com a fórmula (53) do Capítulo II). O acoplamento desaparece se  $1/q$  for igual a zero.

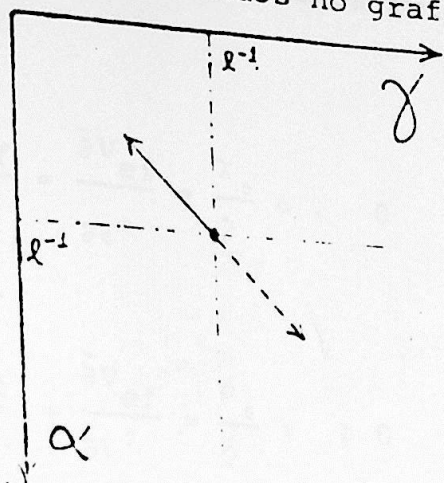
O máximo de  $V_{ef}$  muda com a presença da interação, quando comparado a teoria em  $1/q$  igual a zero. Facilmente, vemos que em  $\alpha = \gamma = e^{-1}$  temos o valor máximo do potencial efetivo, na ausência do termo proporcional a  $\alpha$  vezes  $\gamma$ .

Analisemos duas condições:  $1/q$  maior que zero, a, e  $1/q$  negativo, b.

a)  $1/q > 0$ . O termo em  $1/q$  é monotonamente crescente, assim o máximo passa a se encontrar em  $\alpha$  e  $\gamma$  maiores que  $e^{-1}$ .

b)  $1/q < 0$ . Aqui o termo em  $1/q$  já é monotonamente decrescente, daí o máximo corre para  $\alpha$  e  $\gamma$  menores que  $e^{-1}$ .

Resumamos estes resultados no gráfico



(35)

onde o ponto,  $\bullet$ , corresponde a  $1/q$  igual a zero; a flexa contínua mostra para onde corre o máximo de  $V_{ef}$  com  $1/q$  negativo; e a tracejada o sentido que anda  $1/q$  positivo.

Suponhamos agora que o potencial está representado em função dos campos  $\phi^a$ 's e  $\psi^a$ 's, ou seja, em termos dos campos iniciais. Assim, calculemos a diferencial de  $V_{ef}$ , isto é,

$$dV_{ef} = \frac{\bar{\partial}V_{ef}}{\partial \phi^2} d\phi^2 + \frac{\bar{\partial}V_{ef}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \phi^2} d\phi^2 + \frac{\bar{\partial}V_{ef}}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \phi^2} d\phi^2$$

(36)

$$+ \frac{\bar{\partial}V_{ef}}{\partial \psi^2} d\psi^2 + \frac{\bar{\partial}V_{ef}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \psi^2} d\psi^2 + \frac{\bar{\partial}V_{ef}}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \psi^2} d\psi^2$$

onde as derivadas com o til ( $\bar{\partial}$ ) significam a derivação explícita com relação às variáveis que aparecem em (28). Os quatro últimos termos da direita na expressão acima valem zero por força das equações de movimento para  $\alpha$  e  $\gamma$ , veja (29). Portanto, a diferencial acima, dá

$$dV_{ef} = \frac{\bar{\partial}V_{ef}}{\partial \phi^2} d\phi^2 + \frac{\bar{\partial}V_{ef}}{\partial \psi^2} d\psi^2 = \frac{\chi_0}{2} \alpha d\phi^2 + \frac{\rho_0}{2} \gamma d\psi^2 \quad (37)$$

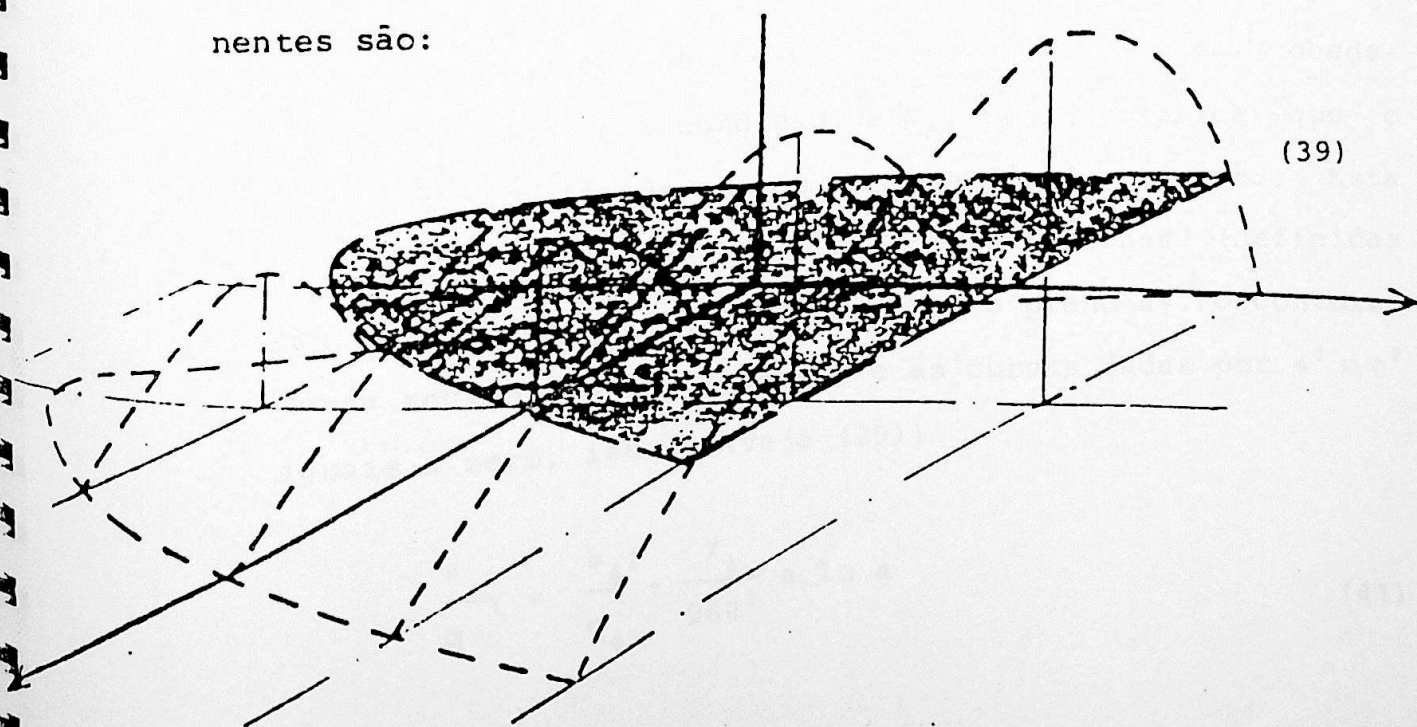
As componentes do gradiente em relação a  $\phi^2$  e  $\psi^2$ , então, são

$$\frac{\partial V_{ef}}{\partial \phi^2} = \frac{\bar{\partial} V_{ef}}{\partial \phi^2} = \frac{\lambda_0}{2} \alpha \geq 0$$

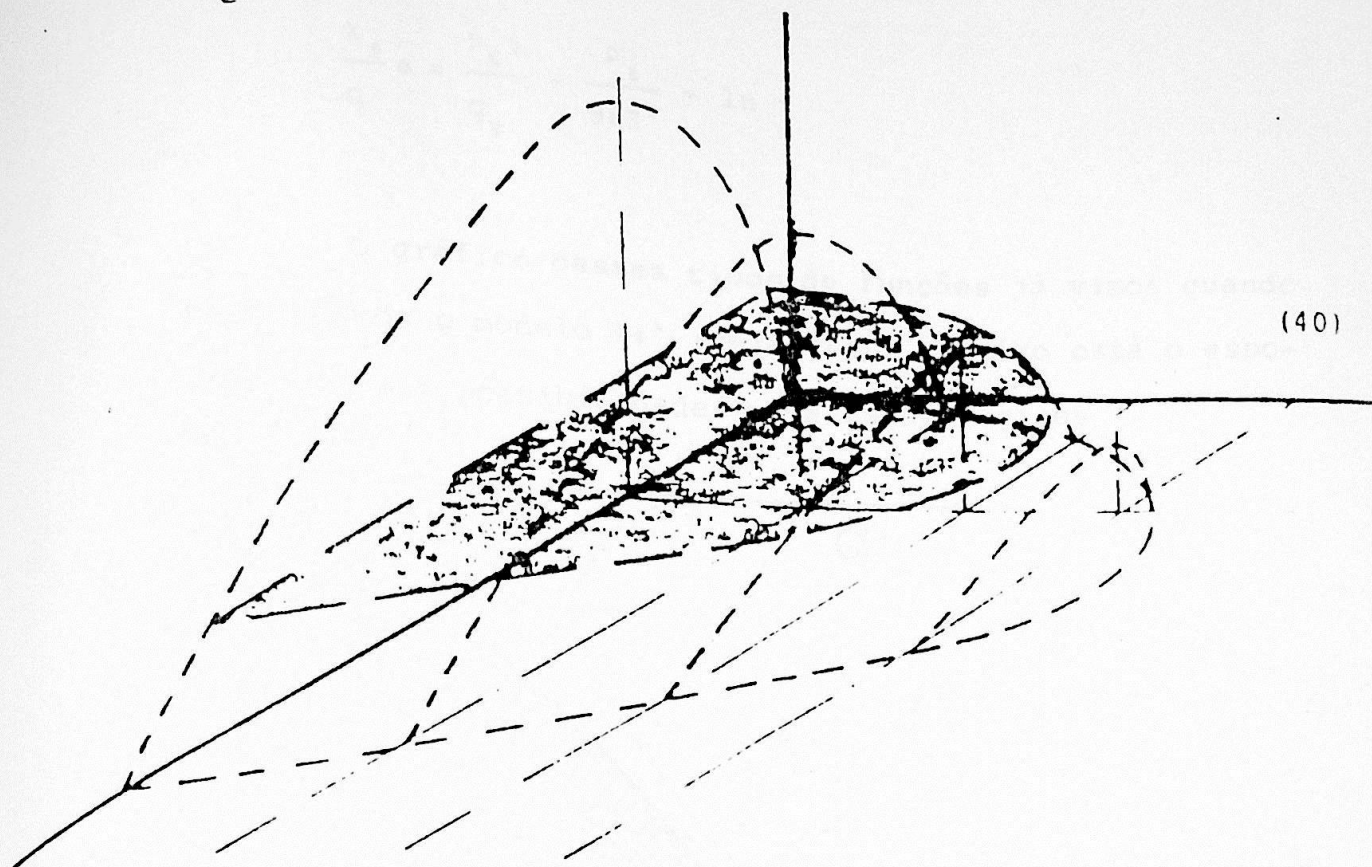
$$\frac{\partial V_{ef}}{\partial \psi^2} = \frac{\bar{\partial} V_{ef}}{\partial \psi^2} = \frac{\rho_0}{2} \gamma \geq 0 \quad (38)$$

Aqui as derivadas sem o til ( $\bar{\partial}$ ) denotam a derivação com respeito a variação total em relação a variável correspondente. As desigualdades acima seguem imediatamente de (31) e (32).

Vejamos como se comporta  $\phi^2$  em função de  $\alpha$  e  $\gamma$ . Para tal usemos a terceira relação em (29). Observemos que, quando tomamos  $\gamma$  constante esta equação tem a forma da equação estudada no caso de  $\lambda\phi^2$  (veja a (52) do Capítulo II). Aqui é mais fácil traçarmos gráficos e interpretá-los do que fazermos um tratamento analítico. Os gráficos pertinentes são:



e



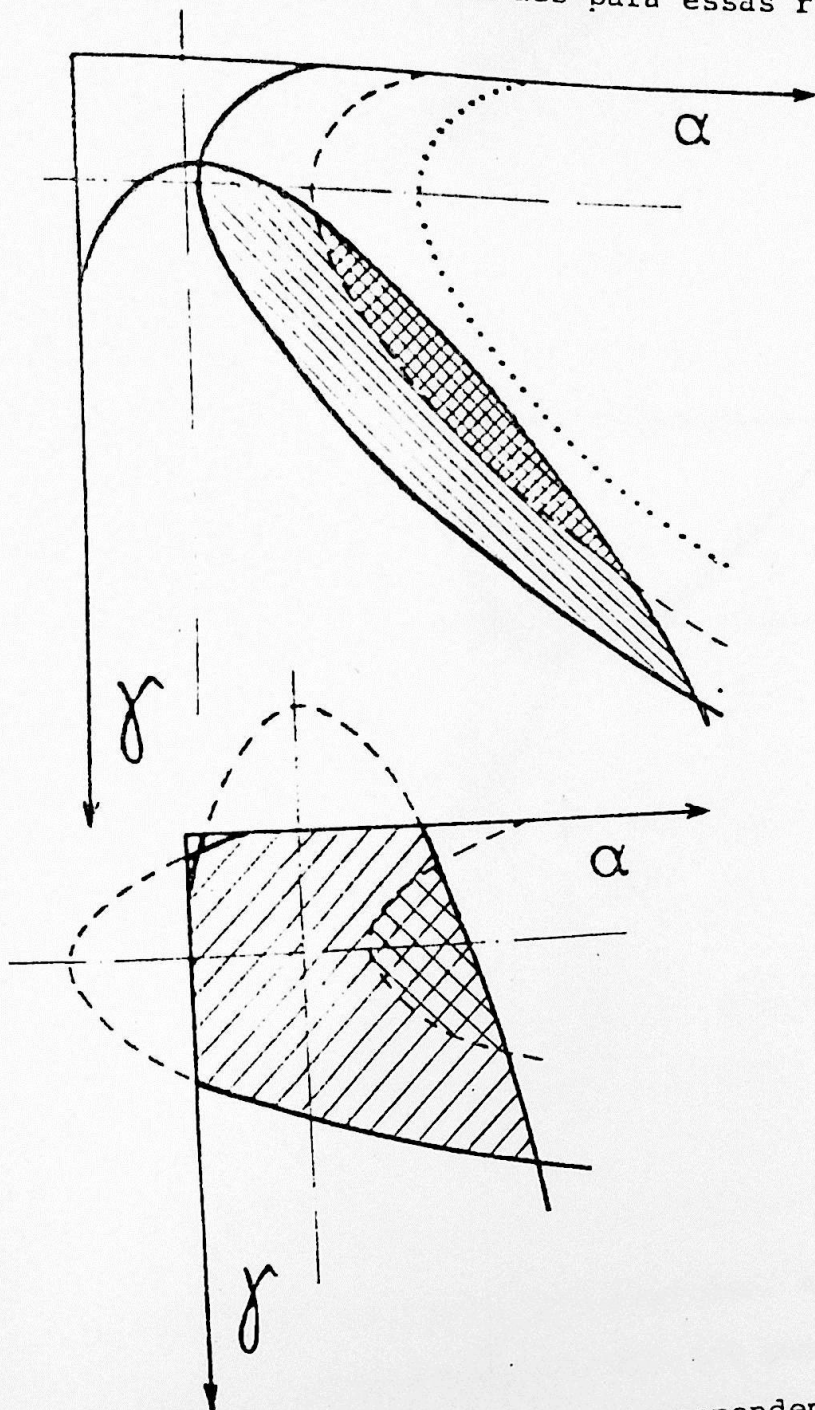
Como vemos, são duas "calhas"; uma crescente com o aumento de  $\gamma$  (para  $1/q > 0$ ), a outra decrescente com o aumento de  $\gamma$  (com  $1/q < 0$ ). Os gráficos de  $\psi^2$  em função de  $\alpha$  e  $\gamma$  tem a mesma forma que os de  $\phi^2$ , a única diferença é que devemos trocar nos desenhos  $\alpha$  por  $\gamma$  e vice versa.

A condição de  $\phi^2$  e  $\psi^2$  positivos, para  $\alpha$  e  $\gamma$  obedecendo (31) (que é a condição de  $V_{ef}$  real) implica que o modelo seja definido apenas numa região do plano  $\alpha\gamma$ . Esta região é a interseção das projeções das calhas (definidas por  $\phi^2$  e  $\psi^2$  maiores que zero) sobre o plano  $\alpha\gamma$ . O contorno dessa região é os eixos  $\alpha$  e  $\gamma$  e as curvas dadas por  $\phi^2$  e  $\psi^2$  iguais a zero, isto é (veja (29))

$$\frac{\rho}{q} \gamma = \frac{\mu \phi^2}{q_\phi} + \frac{\chi_0}{96\pi^2} \alpha \ln \alpha \quad (41)$$

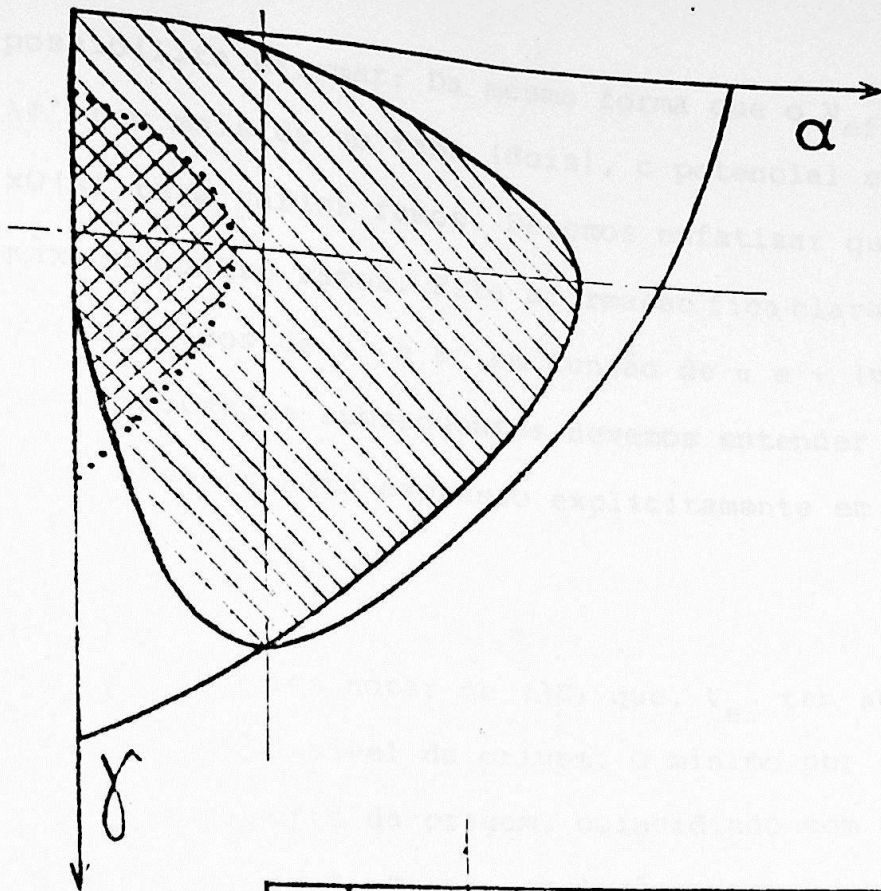
$$\frac{\chi_0}{g} \alpha = \frac{\mu \psi^2}{g_\psi} + \frac{\rho_0}{96\pi^2} \gamma \ln \gamma$$

O gráfico desses tipos de funções já vimos quando estudávamos o modelo  $\lambda d^4$  (veja (69)). Abaixo está o esboço de várias possibilidades para essas regiões

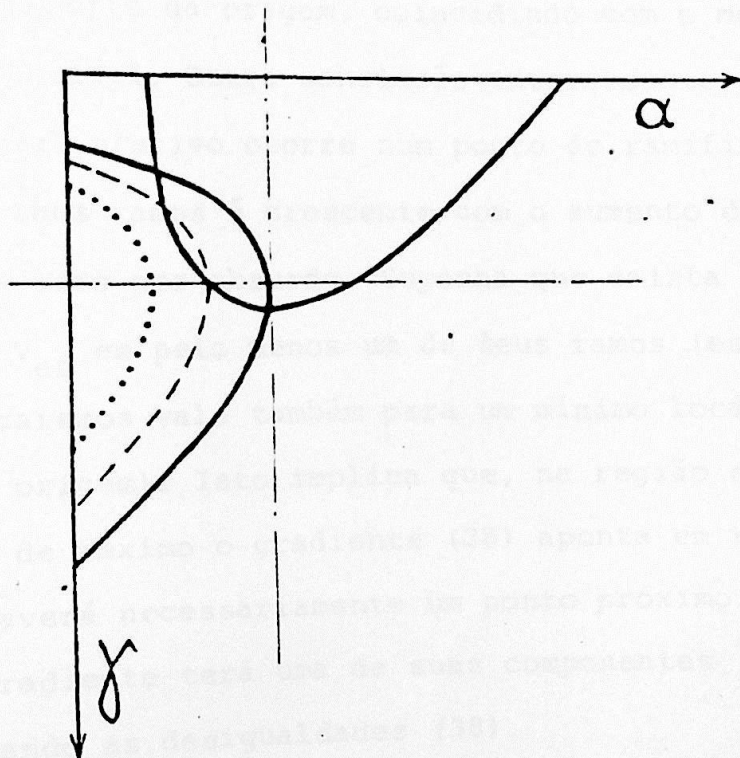


(42)

Estes gráficos anteriores correspondem a regiões para  $1/g$  positivo. Conforme podemos notar, existem casos, a depender do valor dos parâmetros onde a região de intersecção é vazia.



(43)



Nesses gráficos temos  $1/q$  negativo. Aqui também vale observação semelhante ao caso  $1/q$  positivo.

: Quando desejamos expressar  $V_{ef}$  em termos de  $\phi^2$  e  $\psi^2$ , necessitamos escrever  $\alpha$  e  $\gamma$  em "função" de  $\phi^2$  e  $\psi^2$ . Neste caso  $\alpha$  e  $\gamma$  serão funções plurívocas de  $\phi^2$  e  $\psi^2$ . Isto nos

possibilita afirmar: Da mesma forma que o  $V_{ef}$  do modelo  $\lambda\phi^4$  tem mais de um ramo (dois), o potencial efetivo do  $O(N)$   $\chi O(N)$  terá vários ramos. Devemos enfatizar que  $V_{ef}$  tem no máximo quatro ramos. Esta afirmação fica clara se lembrarmos dos gráficos de  $\phi^2$  e  $\psi^2$  em função de  $\alpha$  e  $\gamma$  (veja (39) e (40)). Nas discussões subsequentes devemos entender que o potencial efetivo está expresso explicitamente em termos de  $\phi^2$  e  $\psi^2$ .

Podemos notar de (38) que,  $V_{ef}$  tem seu máximo o mais longe possível da origem. O mínimo por sua vez deve estar o mais perto da origem, coincidindo com o mesmo na medida do possível. Outra conclusão interessante é: O máximo do potencial efetivo ocorre num ponto de ramificação e cada um de seus ramos é crescente com o aumento de  $\phi^2$  e  $\psi^2$ . - Mostremos isto por absurdo. Suponha que exista um máximo local de  $V_{ef}$  em pelo menos um de seus ramos (este argumento que usaremos vale também para um mínimo local, com exceção da origem). Isto implica que, na região em torno deste ponto de máximo o gradiente (38) aponta em sua direção. Assim, haverá necessariamente um ponto próximo ao máximo, onde o gradiente terá uma de suas componentes negativas, contrariando as desigualdades (38).

Agora, tiremos uma conclusão simples a respeito da existência ou não de quebra de simetria para o modelo aqui tratado, analisando apenas seu domínio de validade. Este domínio foi descrito no antepenúltimo parágrafo. Em particular, nas figuras (42) e (43) vemos exemplos de alguns possíveis domínios. A conclusão é a seguinte: se o domínio de  $V_{ef}$  (real) não contém pontos com algum  $\alpha$  ou  $\gamma$  igual a

zero, já teremos garantido que não existe quebra de simetria para o modelo. Isto se torna óbvio ao olharmos para as duas primeiras expressões em (29). Este resultado será muito útil quando falarmos de temperatura finita.

Dependendo da escolha das constantes da teoria, depararemos com um domínio vazio para  $V_{ef}$ . Vejamos alguns exemplos. O entendimento destes exemplos é facilitado se tivermos sempre em mente as figuras (39), (40), (42) e (43), juntamente com as duas últimas expressões de (29).

1) O caso onde a constante de acoplamento,  $1/q$ , seja negativa. A partir de um valor suficientemente grande de seu módulo, o domínio de  $V_{ef}$  (isto é, a região onde ele é real), será vazio. Para enxergarmos isto basta notarmos que a "calha" em (39) fica cada vez mais íngreme, fazendo com que o ponto extremo direito da intersecção da calha com o plano  $\phi^2 = 0$  se desloque para a esquerda. A depender do tanto desse deslocamento, teremos o domínio vazio.

2) Quando  $1/q$  é positivo. Aqui, sempre encontraremos um domínio de validade para  $V_{ef}$ , conquanto que escolhamos o  $1/q$  suficientemente grande. A maneira de chegarmos a este resultado é análoga a anterior. Observamos que esta conclusão é justamente o oposto da anterior.

3) Suponhamos que o modelo tem um domínio de validade, ditado pelo conjunto dos parâmetros da teoria. Agora, variemos somente as constantes relacionadas com as massas

$(\frac{\mu_{\phi^2}}{q_{\phi}} \text{ e } \frac{\mu_{\psi^2}}{q_{\psi}})$ . O aumento do valor dessas constantes faz

com que o domínio diminua. Esse processo pode continuar, ao ponto deste domínio se extinguir.

Começemos agora a discutir de que maneira a introdução de temperatura neste modelo se encaixa na nossa análise anterior. Podemos dizer de antemão que, várias características gerais permanecem as inalteradas, pois o fato de analisarmos a teoria a temperatura finita não muda em nada grande parte dos argumentos por nós usados. Cabe ressaltarmos que, nas discussões seguintes nós utilizaremos - das análises apresentadas no apêndice B (Capítulo II). Assim é conveniente termos os argumentos lá expostos. Caracterisemos, neste momento, alguns fatos relacionados com o modelo  $O(N) \times O(N)$  a temperatura finita. Por exemplo:

a) Dado que, o nosso potencial efetivo é a soma de dois  $V_{ef}$  de  $\lambda\phi^4$ 's, adicionados a um termo de interação, podemos escrever em analogia a um  $\lambda\phi^4$  (veja (B.1) do apêndice B) que

$$V_{efT} = V_{ef} + \tau + \tau' \quad (44)$$

onde  $V_{ef}$  está definido em (28),  $\tau$  e  $\tau'$  são os termos que dependem da temperatura, já o  $V_{efT}$  simboliza o potencial efetivo a temperatura finita.

b) Quando desejamos analisar o mínimo de  $V_{efT}$  chegamos a conclusão que este satisfará equações como as (21). Detalhemos

$$\frac{\partial V_{efT}}{\partial \phi^a} = 0 \quad e \quad \frac{\partial V_{efT}}{\partial \psi^a} = 0 \quad (45)$$

implicam em

$$\alpha \phi^a = 0 \quad e \quad \gamma \psi^a = 0 \quad (46)$$

que são as duas primeiras de (29). Já

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \gamma} = 0 \quad (47)$$

nos fornecem

$$\frac{1}{6} \frac{\phi^2}{N} = - \left( \frac{m^2}{q_\phi} + \frac{d\tau}{d\alpha} \right) - \frac{\chi_0}{96\pi^2} \alpha \ln \alpha - \frac{\rho_0}{\alpha} \gamma \quad (48)$$

$$\frac{1}{6} \frac{\psi^2}{N} = \left( \frac{m^2}{q_\psi} + \frac{d\tau'}{d\gamma} \right) - \frac{\rho_0}{96\pi^2} \gamma \ln \gamma - \frac{\chi_0}{q} \alpha$$

- c) As condições de positividade para  $\alpha$  e  $\gamma$ , (II.81), continuam válidas, assim como (32) e (33).
- d) O gradiente de  $V_{\text{eff}}$  em relação a  $\phi^2$  e  $\psi^2$  mantém a forma apresentada em (38), dando as mesmas implicações já discutidas.
- e) Assim como no modelo  $\lambda\phi^4$  (veja apêndice B), os termos dependentes da temperatura funcionam correções nas constantes  $\frac{\mu_{\phi^2}}{q_\phi}$  e  $\frac{\mu_{\psi^2}}{q_\psi}$ .

Já vimos que o aumento dos parâmetros de massa ( $\mu_{\phi^2}/q_\phi$  e  $\mu_{\psi^2}/q_\psi$ ) provocam uma redução no domínio de  $V_{\text{eff}}$  (veja o resultado 3). Ainda mais, a partir de certos valores de  $\mu_{\phi^2}/q_\phi$  e  $\mu_{\psi^2}/q_\psi$  chegaremos a um momento onde sempre teremos  $\alpha$  e  $\gamma$  diferentes de zero (veja as figuras (42) e (43)), para  $\alpha$  e  $\gamma$  pertencentes ao domínio de  $V_{\text{eff}}$  (real) (veja o último parágrafo da página 20). Se conjugarmos isto com o fato de que o termo de temperatura funciona como um aumentador do termo de massa (veja (B.5) do apêndice B em conjugação com as expressões (49)), concluiremos que

com o aumento da temperatura o modelo corre para um domínio de  $V_{\text{efT}}$  (real), onde todos  $\alpha$  e  $\gamma$  são diferentes de zero, ou seja, é impossível ter quebra de simetria (veja (48)). Assim, chegamos aos resultados apresentados por Fujimoto e Sakakibara (Fu 1985), e Manesis e Sakakibara (Ma 1985). Porém, estes resultados são incompletos, pois, a partir de certo valor das constantes de massa, ou grandes temperaturas (temperatura crítica) o domínio de  $V_{\text{efT}}$  (real) deixa de existir. Ai não podemos dizer nada mais sobre o modelo.

Embora a procura do mínimo, de  $V_{\text{ef}}$  (temperatura zero), em geral, seja bastante complexa, existe um caso particular que pode ser tratado de maneira completa. Isto ocorre quando os parâmetros dos dois  $O(N)$ 's são idênticos, ou seja,

$$\frac{\mu_{\phi}^2}{q_{\phi}} = \frac{\mu_{\psi}^2}{q_{\psi}} \quad \chi_0 = \rho_0 \quad (48)$$

Aproveitando a simetria citada acima, analisemos  $V_{\text{ef}}$  em  $\alpha$  igual a  $\gamma$ . Assim, o potencial efetivo (28) toma a forma

$$V_{\text{ef}} = 6N\chi_0\alpha \left\{ \frac{\mu_{\phi}^2}{q_{\phi}} + \frac{1}{6N} \left( \frac{\phi^2 + \psi^2}{2} \right) + \frac{\chi_0}{384\pi^2} \alpha (2\alpha \ln \alpha - \alpha) \right\} - \frac{3N\chi_0^2}{q} \alpha^2 \quad (49)$$

Podemos colocar este potencial acima numa forma mais tratável, para tal o reescrevamos da forma seguinte

$$V_{\text{ef}} = 6N\bar{\chi}_0\bar{\alpha} \left\{ \frac{\mu_{\phi}}{q_{\phi}} + \frac{1}{6N} \left( \frac{\phi^2 + \psi^2}{2} \right) + \frac{\chi_0}{384\pi^2} (2\bar{\alpha} \ln \bar{\alpha} + \bar{\alpha}) \right\} \quad (50)$$

onde usamos

$$\bar{u} = \exp \left\{ -\frac{96\pi^2}{g} \right\} \alpha \quad e \quad \tilde{\chi}_0 = \exp \left( \frac{96\pi^2}{g} \right) \chi_0 \quad (51)$$

Vemos, portanto, que este potencial idêntico ao de um  $\lambda\phi^4$ , valendo portanto todos os resultados que tiramos no  $\lambda\phi^4$  a respeito da quebra de simetria ou seja, nunca há quebra de simetria para  $V_{ef}$  real.

## REFERÊNCIAS

- (Fu 1985) - Y. Fujimoto and S. Sakakibara, Phys. Lett. 151B, 260 (1985)
- (Ma 1985) - E. Manesis and S. Sakakibara, Institut für Physik, Johannes-Gutenberg - Universität, D-6500 Mainz, F. R. Germany, MZ+TH/85-03 (1985)
- (We 1974) - S. Weinberg, Phys. Rev. D9, 3357 (1974)

## IV - MODELOS MATRICIAIS

## 01. INTRODUÇÃO

Até o momento estudamos apenas os modelos onde os campos básicos estão na representação fundamental. Agora, analisaremos teorias nas quais pelo menos um dos campos básicos está na representação adjunta. Entre essas teorias está a Cromodinâmica Quântica (QCD), visto que o campo do glúon toma valores na álgebra do grupo cor SU (3). Outros exemplos são os modelos sigma generalizados, como os Grassmanianos.

De maneira geral estas teorias matriciais, comparados com os vetoriais, apresentam dificuldades adicionais, como veremos a seguir. Como exemplo concreto, examinemos o modelo definido pela Lagrangiana (Sl 1983)

$$L = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi^{ab} \partial^\nu \phi^{ba} - \frac{1}{2} m^2 \phi^{ab} \phi^{ba} - \frac{g}{\sqrt{N}} \phi^{ab} \phi^{bc} \phi^{ca} \quad (1)$$

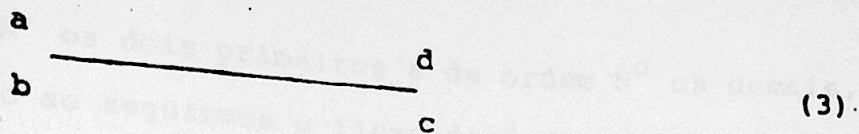
onde esta escolha da constante de acoplamento decorre de uma análise análoga a que fizemos no caso de  $\lambda\phi^4$ .

As regras de Feynman do modelo são:

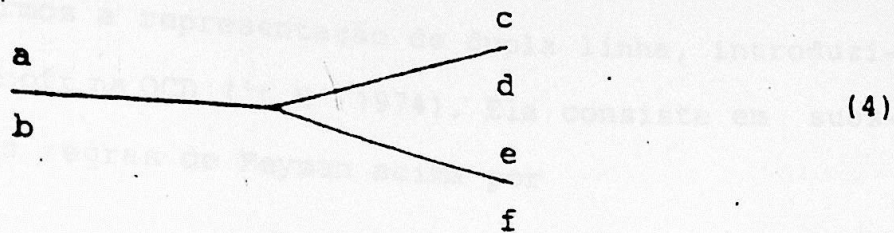
1) O propagador livre,  $\langle T \phi^{ab} \phi^{cd} \rangle$

$$\langle T \phi^{ab} \phi^{cd} \rangle = \delta^{ad} \delta^{bc} \Delta_F(x-y) \quad (2)$$

onde  $\Delta_F(x-y)$  é o propagador do campo de Klein-Gordon, é representado por



2) O vértice de interação

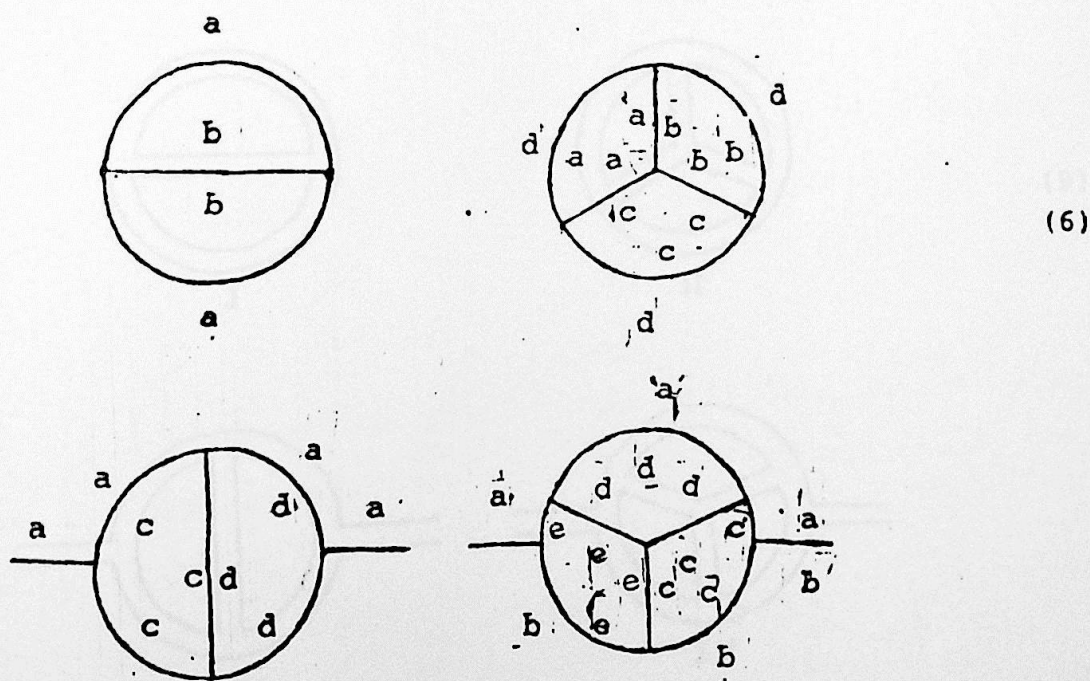


carrega o fator

$$- i \frac{g}{N^2} \quad (5)$$

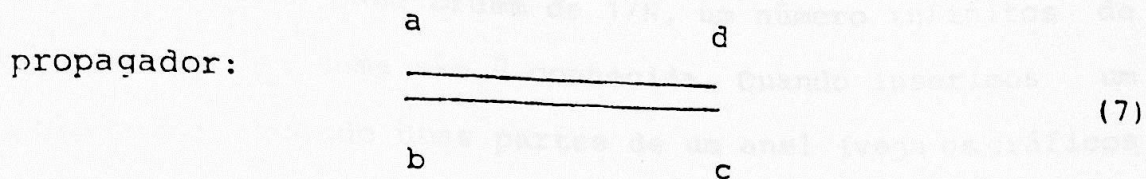
além dos deltas correspondentes as contrações com os campos externos.

Usando estas regras de Feynman, verificamos que os gráficos

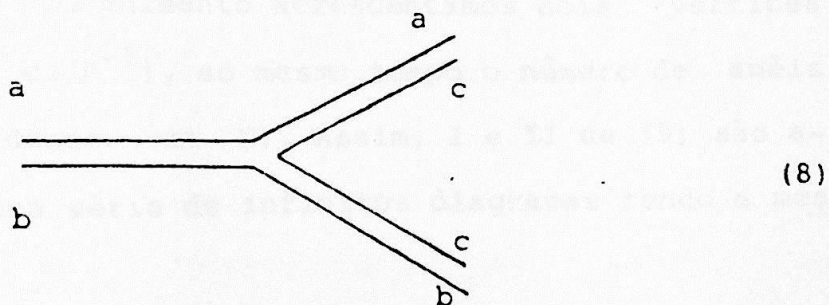


são de ordem  $N^2$  os dois primeiros e de ordem  $N^0$  os demais, constamos isto ao seguirmos o fluxo de índices.

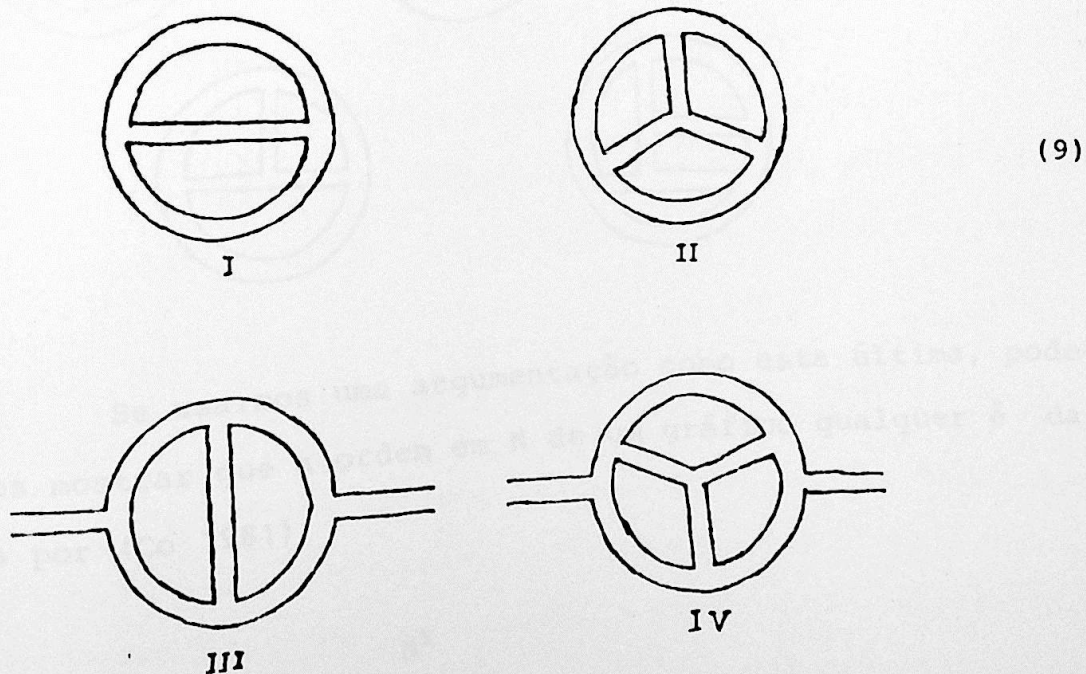
A contagem das potências de  $N$  é grandemente facilitada se usarmos a representação de dupla linha, introduzida por 't Hooft na QCD ('t H 1974). Ela consiste em substituímos as regras de Feynman acima por



vértice:

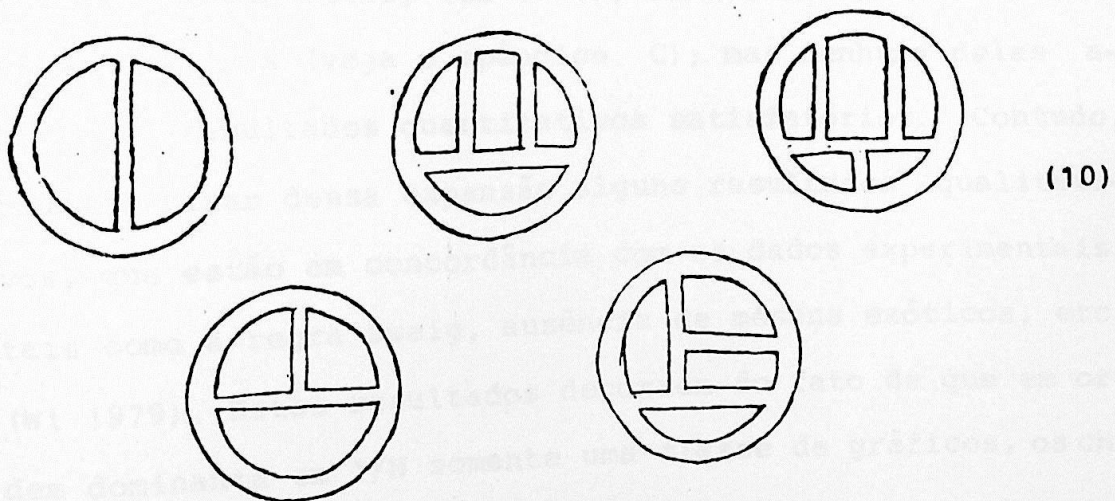


Com esta notação os gráficos que aparecem em (6) são representados por



Agora a contagem das potências em  $N$  fica simples, por exemplo o último desses diagramas tem três anéis, dando um fator de  $N^3$ , e seis vértices, correspondendo a um fator de  $N^{-3}$ , assim este gráfico é de potência  $N^0$ , como afirmamos anteriormente.

Um fato novo em comparação com os modelos vetoriais é que temos, em cada ordem de  $1/N$ , um número infinito de diagramas cuja soma não é conhecida. Quando inserimos um propagador ligando duas partes de um anel (veja os gráficos I e II de (9)), não aumentamos a ordem em  $N$  do gráfico, já que com este procedimento acrescentamos dois vértices (dando um fator de  $N^{-1}$ ), ao mesmo tempo o número de anéis aumenta em um (dando um  $N$ ). Assim, I e II de (9) são apenas dois de uma série de infinitos diagramas tendo a mesma ordem em  $N$ :



Se usarmos uma argumentação como esta última, podemos mostrar que a ordem em  $N$  de um gráfico qualquer é dada por (Co 1981)

$$N^X$$

onde  $\chi$  é a característica de Euler da superfície associada ao gráfico. Esta superfície é obtida pela justaposição da parte interna dos anéis de cada gráfico. Ao colocarmos uma linha externa no gráfico quebramos um anel, formando então um buraco na superfície. Podemos ainda formar alças na superfície determinada por um dado gráfico. A característica de Euler para uma superfície é dada por

$$\chi = 2 - 2H - B \quad (11)$$

onde B é o número de buracos e H o número de alças.

A existência dos infinitos gráficos do tipo descrito acima, em mesma ordem de  $1/N$ , é a raiz dos problemas no que tange a aplicação da expansão  $1/N$  à QCD. Existem várias propostas para o desenvolvimento dessa expansão, por exemplo Master Fields (Co 1981), limite clássico e variáveis coletivas (veja o apêndice C); mas nenhuma delas apresenta resultados quantitativos satisfatórios. Contudo, podemos tirar dessa expansão alguns resultados qualitativos, que estão em concordância com os dados experimentais, tais como a regra Zweig, ausência de mésons exóticos, etc. (Wi 1979). Estes resultados decorrem do fato de que em ordem dominante em  $1/N$  somente uma classe de gráficos, os chamados planares, contribuem.

## 02. MODELOS GRASSMANIANOS

Os modelos Grassmanianos constituem um outro exemplo de teorias matriciais. Estes são um tipo de generalização do modelo sigma não linear, apresentando propriedades como geração dinâmica de massa e liberdade assintótica. Além disso, apresentam outras características que os aproxima

mas mais da QCD, conforme discutiremos a seguir.

Os campos básicos para estas teorias tomam valores no espaço quociente (Co 1982; Ma 1979; Pi 1979)

$$\frac{U(n+m)}{U(n) \times U(m)} \quad (12)$$

no caso dos Grassmanianos complexos, ou

$$\frac{O(n+m)}{O(n) \times O(m)} \quad (13)$$

no do caso Grassmanianos reais.

Consideremos o caso dos Grassmanianos complexos (os reais podemos tratar de modo similar), cuja ação é dada por

$$A = \frac{1}{8} \int \text{tr}(\partial_\mu g) (\partial^\mu g^{-1}) d^2x \quad (14)$$

onde  $g$  tem a forma

$$g = p^{-1} g_0 p \quad ; \quad p \in U(n+m) \quad (15)$$

com  $g_0$  satisfazendo

$$g_0^2 = I \quad (16)$$

e sendo também invariante por  $U(n) \times U(m)$ , isto é,

$$h^{-1} g_0 h = g_0 \quad ; \quad h \in U(n) \times U(m) \quad (17)$$

Observemos que os possíveis autovalores de  $g_0$  são  $\pm 1$ . Seja  $n$  a quantidade destes com o valor  $+1$  e  $m$  para os que valem  $-1$ , de acordo com a expressão (16)

Usando (16) e

$$g^2 = I \quad (18)$$

podemos verificar que

$$P = \frac{g + 1}{2} \quad (19)$$

é um projetor no espaço  $n$ -dimensional correspondente ao autovalor  $+1$  de  $g_0$ . A ação, (14), em termos deste projetor é

$$A = \frac{1}{2} \int \text{tr} (\partial_\nu P \partial^\nu P) d^2x \quad (20)$$

Já que  $P$  é um projetor, podemos representá-lo como

$$P_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n \phi_\alpha^{i*} \phi_\beta^i \quad (21)$$

onde

$$\sum_{\alpha=1}^{m+n} \phi_\alpha^{i*} \phi_\alpha^j = \delta^{ij} \quad (22)$$

Usando os  $\phi_\alpha^i$ 's, a ação vem a ser

$$A = \int [\partial_\nu \phi_\alpha^{i*} \partial^\nu \phi_\alpha^i + (\phi_\alpha^{i*} \partial_\nu \phi_\alpha^j) (\phi_\beta^{j*} \partial^\nu \phi_\beta^i)] d^2x \quad (23)$$

Nesta passagem usamos os vínculos (22).

Para facilitarmos o estudo destes modelos é conveniente que reescrevamos ação como

$$A = \int (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) d^2x \quad (24)$$

onde

$$(D_\mu \phi)_\alpha^i = \partial_\mu \phi_\alpha^i - A_\mu^{ik} \phi_\alpha^k \quad (25)$$

sendo os  $A_\mu^{ik}$ 's campos auxiliares, os quais esclarecemos a seguir. Classicamente os campos  $A_\mu^{ik}$ 's são obtidos através das equações de movimento

$$\frac{\delta A}{\delta A_\mu^{ik}} = 0 \quad (26)$$

que nos fornecem

$$A_\mu^{ik} = \frac{1}{2} \phi_\alpha^{k*} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_\alpha^i \quad (27)$$

Esta nova forma de escrevermos a ação nos possibilita mostrar que ela é invariante por uma transformação de gauge local de  $U(n)$  e uma global de  $U(m+n)$ .

Façamos um reescalonamento nos campos  $\phi_\alpha^i$ 's, isto é

$$\phi_\alpha^i \rightarrow \sqrt{\frac{2f}{m+n}} \phi_\alpha^i \quad (28)$$

Como consequência desta redefinição dos campos temos que

$$A_\mu^{ik} \rightarrow \frac{f}{m+n} \phi_\alpha^{k*} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_\alpha^i \quad (29)$$

e

$$\phi_{\alpha}^{i*} \phi_{\alpha}^j \rightarrow \frac{m+n}{2f} \delta^{ij} \quad (30)$$

É justamente este reescalonamento que nos possibilita introduzir a constante de acoplamento destes modelos.

Para eliminarmos os vínculos na Lagrangiana, coloquemos através de multiplicadores de Lagrange os campos auxiliares  $\alpha^i$  e  $\beta^{ij}$ . Também é conveniente redefinirmos o campo  $A_{\nu}^{ik}$  como

$$\lambda_{\nu}^{ik} = \sqrt{m+n} A_{\nu}^{ik} \quad (31)$$

Portanto, a Lagrangiana toma a forma

$$L = \sum_{i=1}^n \partial_{\nu} \phi_{\alpha}^{i*} \phi_{\alpha}^{\nu i} + \sum_{i,k=1}^n \lambda_{\mu}^{kik*} \overleftrightarrow{\partial}_{\nu} \phi_{\alpha}^i - \sum_{i,k,r=1}^n \lambda_{ir}^{\mu} \lambda_{\mu}^{ik} \phi_{\alpha}^{r*} \phi_{\alpha}^k \quad (32)$$

(32)

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{\alpha^i}{\sqrt{m+n}} \left( \phi_{\nu}^{i*} \phi_{\nu}^i - \frac{m+n}{2f} \right) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\beta^{ij}}{\sqrt{m+n}} \phi_{\nu}^{i*} \phi_{\nu}^j + \sum_{i=1}^n m_i^2 \phi_{\alpha}^{i*} \phi_{\alpha}^i$$

onde colocamos os termos de massa

$$\sum_{i=1}^n m_i^2 \phi_{\alpha}^{i*} \phi_{\alpha}^i \quad (33)$$

que em nada mudam a dinâmica dos modelos, pois, das equações de vínculos vemos que estes são constantes. Salientamos que os índices gregos tomam valores, nas somas, de 1 a  $m+n$ .

O modelo  $Cp^{N-1}$  é um caso particular das teorias descritas por (32). Neste caso  $n$  é igual a um, consequentemente não precisamos mais escrever os índices latinos, logo, a densidade Lagrangiana toma a forma (D'A 1978)

$$L = \partial_\mu Z^{a*} \partial^\mu Z^a + \frac{1}{\sqrt{N}} A_\nu Z^{a*} \overleftrightarrow{\partial}^\nu Z^a - \frac{1}{N} A_\mu A^\mu Z^{a*} Z^a + \frac{\alpha}{\sqrt{N}} (Z^{a*} Z^a - \frac{N}{2f}) + m^2 Z^{a*} Z^a \quad (34)$$

onde identificamos cada  $\phi'_a$  com cada  $Z^a$  e  $m+n$  com  $N$ .

No caso quântico, num gauge tipo Landau o campo  $A_\nu$  terá o seguinte propagador

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) D(p) \quad (35)$$

onde

$$D(p) = [(p^2 + 4m^2) \tilde{\Gamma}(p) - \frac{1}{\pi}]^{-1} \quad (36)$$

com  $\tilde{\Gamma}(p)$  dado na expressão (109) da parte do sigma não linear. Destes propagadores vemos que

$$D(p) = \frac{cte}{p^2} \quad (37)$$

para  $p^2$  pequeno, tendo portanto um comportamento igual ao do campo eletromagnético. Já que este modelo é bidimensional, o potencial Coulombiano correspondente é proporcional a  $r$ , implicando no confinamento dos quanta dos campos  $Z^a$ 's.

Se tivéssemos considerado o caso dos Grassmanianos reais e tomado  $n = 1$ , teríamos obtido o modelo sigma não linear.

Se mantivermos  $n$  fixo e tomarmos  $m+n$  indo para o infinito, podemos fazer a expansão  $1/N$ , na ordem dominante, para esta classe de teorias. Este tipo de tratamento torna esses modelos semelhante aos vetoriais, pois, efetivamente somente um dos índices da matriz que constitui o campo básico tende ao infinito. Como decorrência não temos os infinitos gráficos planares em cada ordem. Assim, procedendo de maneira inteiramente análoga ao modelo sigma não linear, obtemos a massa gerada dinamicamente

$$m^2 = \mu^2 \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda(\mu)}\right) \quad (23)$$

onde  $\mu^2$  é o ponto de renormalização e  $\lambda(\mu)$  é a constante de acoplamento renormalizada.

Por outro lado, se tomarmos  $n$  e  $m$  indo conjuntamente para infinito, teremos teorias matriciais genuínas, havendo, portanto, em cada ordem da expansão  $1/N$  a contribuição de infinitos gráficos planares.

## APÊNDICE C

As dificuldades encontradas para implementar a expansão  $1/N$  em modelos matriciais motivou que aparecesse várias alternativas para desenvolver a expansão  $1/N$ .

Uma dessas está baseada no conceito de variáveis coletivas (Je 1980, Je 1981). A observação fundamental neste caso é que os observáveis são singletos do grupo de simetria subjacente. Portanto, exibem um comportamento coletivo. No caso dos campos vetoriais com simetria de  $O(N)$ , o candidato natural é

$$\sigma(x, y) = \phi^a(x) \phi^a(y) \quad (C.1)$$

Na integração funcional introduzimos este campo através de uma mudança de variável, isto é,

$$Z = \int D\sigma(x, y) \prod_{a=1}^N D\phi^a \delta[\sigma(x, y) - \phi^a(x)\phi^a(y)] e^{S[\phi^a]} \quad (C.2)$$

onde  $S[\phi^a]$  reescrito em termos de  $\sigma(x, y)$  tem a forma

$$S = \int dx \frac{1}{2} \partial_{x\mu} \partial_y^\mu \sigma(x, y) \Big|_{x=y} - \frac{m^2}{2} \sigma(x, x) + V(\sigma) \quad (C.3)$$

A integração nos  $\phi^a$ 's em (2) pode ser feita em ordem dominante de  $1/N$ , usando o método do ponto de sela, dando

$$Z = \int D\sigma(x, y) \exp(i S_{ef}(\sigma))$$

com

$$S_{\text{ef}}[\sigma] = \int \left\{ \partial_x^u \partial_y^v \sigma(x,y) \Big|_{x=y} - \frac{1}{2} m^2 \sigma(x,x) + V(\sigma) - \ln \sigma(x,x) \right\} d^u x \quad (\text{C.4})$$

No caso de teorias de Yang-Mills a variável coletiva,  $\phi(c)$  seria o loop de Wilson

$$\phi(c) = \frac{1}{N} \text{tr} P \exp \left( ig \oint_c A_\nu dx^\nu \right) \quad (\text{C.5})$$

onde  $P$  indica a ordenação do produto de campos, tomada ao longo da curva fechada  $c$ . O Problema, contudo, é muito mais complicado que o caso anterior, devido o aparecimento de desigualdades não triviais, as quais devem ser satisfeitos no processo de obtenção do espectro.

Um outro procedimento interessante (Ya 1982), consiste em tomar o limite de  $N$  tendendo ao infinito, como uma espécie de limite clássico. Isto significa que .. temos uma dinâmica descrita por uma ação clássica, para  $N$  indo para o infinito. Usando este método conseguiríamos o espectro da teoria se minimizássemos o potencial correspondente a "ação clássica" encontrada. Novamente a complexidade dos modelos matriciais tem impedido até hoje a obtenção de resultados quantitativos, via a aplicação deste método. Veja contudo, estudos feitos para modelos de uma plaqueta (Br 1986).

Podemos mencionar um procedimento bastante elegante (Ha 1980) para determinar o espectro no caso de modelos ve

toriais sujeito a um potencial arbitrário. Esse método consiste basicamente em:

- a) Colocar fatores convenientes de  $N$  no potencial, desta forma a ação clássica fica

$$S = \int d^4x \{ L_0(\phi^a) - N V [(g\phi^2 N^{-1})^2] \} \quad (C.6)$$

onde

$$L_0(\phi^a) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (C.7)$$

- b) Na integração funcional

$$Z = \int \prod_{a=1}^N D\phi \exp(iS) \quad (C.8)$$

devemos colocar campos auxiliares, da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \exp \{ -i N \int d^4x V [(g\phi^2 N^{-1})^2] \} = \\ & = \int D_z \delta(zN - g\phi^2) \exp \{ -i N \int dx V(z^2) \} = \\ & = \int D_z D_\sigma \exp \{ i \int dx [(g\phi^2 - zN)\sigma - N V(z^2)] \} \quad (C.9) \end{aligned}$$

Depois de realizarmos a integração nos  $\phi^a$ 's ficamos

com

$$Z = \int D_z D_\sigma \exp \{ i N \bar{S} \} \quad (C.10)$$

onde

$$\bar{S} = \frac{i}{2} \text{tr} \ln (K + g \sigma) - \int dx [z \sigma - V(z^2)]$$

$$K = \begin{cases} -\frac{1}{2} m^2 & D = 1 \\ -\frac{1}{2} (\partial^2 + m^2) & D \geq 2 \end{cases} \quad (11)$$

- c) As equações de "gap" na ordem dominante em  $N$  serão conseguidas simplesmente olhando para os pontos estacionários de  $\bar{S}$ , pois para  $N$  grande podemos fazer o uso da técnica de integração no ponto de sela. Correções para as equações de "gap" são conseguidas via flutuações gaussianas em torno do ponto de sela.

## REFERÊNCIAS

- (Br 1986) - F. R. Brown and G. Yaffe, *Nuc. Phys.*, B.271, 267 (1986)
- (Co 1982) - B.B.Cobra, *Diss. Mestrado, Inst. Fis. Un. São Paulo, São Paulo* (1982)
- (Co 1981) - S. Coleman, in "Pointlike Structures Inside and Outside Hadrons", Zichichi ed, Plenum, New York (1981)
- (D'A 1978) - A. D'Aadda, M. Luschez, and P. di Vecchia, *Nucl. Phys.*, B.146, 63 (1978)
- (Ha 1980) - M. B. Halpern, *Nucl. Phys.* B173, 504 (1980)
- (Je 1980) - A. Jevicki, *Nucl. Phys.* B.165, 511 (1980)
- (Je 1981) - A. Jevicki, *Nuc. Phys.* B185, 89 (1981)
- (Ma 1979) - D. Maison, Max-Planck-Institut preprint MPI/PAE/Pth 52/79
- (Pi 1979) - R. D. Pisarski - *Phys. Rev. D.* 20, 3358 (1979)
- (Sl 1983) - A.A.Slanov, *Acta Phys. Austriaca, Suppl.* XXV, 357 (1983)

('t H 1974) - G. 't Hooft, Nucl. Phys. B72, 461 (1974)

(Ya 1982) - G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. 54, 407 (1982)

(Wi 1979) - E. Witten, in "Recent Developments in Gauge Theories", 't Hooft ed., Plenum, New York (1979)

## CONCLUSÕES

Nesta tese revemos vários aspectos da expansão  $1/N$  na mecânica quântica e teoria quântica de campos. Tanto na mecânica quântica como na teoria de campos bons resultados tem sido obtidos, mas o método precisa ser melhor analisado em suas bases teóricas, a fim de que se possa entender a natureza dessa expansão no que se refere às suas propriedades de convergência. Já no caso de modelos matriciais a expansão, de uma forma geral, padece de problemas (ligados ao número infinito de diagramas planares) que até hoje tem impedido a obtenção de resultados quantitativos. De qualquer forma, a própria existência deste problema motivou o desenvolvimento de várias alternativas para se implementar a expansão  $1/N$ .

Um outro ponto que gostaríamos de ressaltar é o caráter bastante complexo do potencial efetivo no caso do modelo  $O(N) \times O(N)$ . Assim, ao ligarmos a constante de acoplamento  $g$ , entre os dois  $O(N)$ 's, temos por menor que ela seja, não um único ponto de (quadri) ramificação (como ocorre quando  $g = 0$ , mas sim uma estrutura de folhas variável, dependendo do valor dos campos básicos. Devido a esta complexidade, até o momento não é possível afirmar de maneira conclusiva a ausência de quebra espontânea de simetria; isto no caso geral. Entretanto, no caso especial em

---

\* Aqui estamos chamando a constante de acoplamento  $\frac{1}{g}$  de  $g$ .

---

que os dois  $O(N)$ 's são idênticos (mesmas massas e constantes de acoplamento) a simetria não é espontaneamente quebrada, pois o problema pode ser tratado da mesma maneira que um único  $O(N)$ . Este resultado é independente do valor da temperatura.