



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA MATEMÁTICA

SBI-IFUSP



305M810T1028

CROMODINÂMICA QUÂNTICA A TEMPERATURA FINITA

Nadja Simão Magalhães



Dissertação de M e s t r a d o
elaborada sob orientação do
prof. dr. GIL DA COSTA MARQUES

Defesa em 6/11/87

SÃO PAULO

1987

539.7548

M188c

M

e.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Magalhães, Nadja Simão

Cromodinâmica quântica à temperatura finita. São Paulo, 1987.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.

Área de Concentração: Física das Partículas Elementares.

Orientador: Prof. Dr. Cil da Costa Marques

Unitermos: 1.Cromodinâmica quântica; 2.Método semi-clássico; 3.Defeitos topológicos; 4.Teoria de campos a temperatura finita; 5.Transições de fase; 6.Monopólos magnéticos.

USP/IF/SBI - 19/87

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo principal a análise da situação econômica do Brasil, com especial referência à indústria de transformação. O estudo abrange o período compreendido entre 1950 e 1960, sendo que os dados estatísticos foram obtidos através de fontes oficiais. A metodologia utilizada baseia-se na análise de dados secundários, com ênfase na interpretação dos resultados. O trabalho está dividido em três partes principais: a primeira trata da situação econômica geral do Brasil; a segunda, da indústria de transformação; e a terceira, das conclusões e perspectivas futuras. Os resultados indicam que a economia brasileira apresentou um crescimento significativo durante o período analisado, embora com algumas flutuações. A indústria de transformação mostrou-se uma das principais fontes de crescimento econômico, com destaque para o setor de bens de consumo duráveis. As perspectivas futuras apontam para a necessidade de continuar a investir em infraestrutura e em pesquisa e desenvolvimento tecnológico para garantir o crescimento sustentável do país.

A meus pais.

RESUMO

Determinamos uma expressão formal para a energia livre de Gibbs de defeitos topológicos da cromodinâmica quântica (QCD), utilizando a aproximação semi-clássica no contexto da teoria dos campos a temperatura finita e no limite de altas temperaturas. Com a expressão obtida, calculamos a energia livre de monopolos magnéticos. Aplicando nossos resultados a um método no qual a energia livre de defeitos topológicos de uma dada teoria pode servir como indicadora das fases desta, procuramos obter informações sobre fases da QCD.

ABSTRACT

We determine a formal expression to the Gibbs free energy of topological defects of quantum chromodynamics (QCD) by using the semiclassical approach in the context of field theory at finite temperature and in the high temperature limit. We use this expression to calculate the free energy of magnetic monopoles. Applying our results to a method in which the free energy of topological defects of a theory may indicate its different phases, we search for informations about phases of QCD.

AGRADECIMENTOS

Ao Gil da Costa Marques, pela orientação;
ao José Mandacaru Guerra Júnior, pelas longas discussões;
aos professores e colegas do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, pela colaboração na elucidação de dúvidas;
a Mircel de Souza Simão, pela leitura do manuscrito;
à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pelo apoio financeiro.

Í N D I C E

Introdução	2	
Referências da Introdução	6	
I Teoria dos Campos a Temperatura Finita		7
1.1 Termodinâmica de Equilíbrio	8	
1.2 Função de Partição na Teoria dos Campos		9
1.2.a Campos Bosônicos	9	
1.2.b Extensão para Fermions		12
1.3 Campos de Gauge, O Método de Fadeev-Popov		15
1.3.a Simetrias de Gauge	15	
1.3.b Mecanismo de Faddev-Popov		20
1.3.c Passagem para o Espaço Euclidiano		24
1.4 A Cromodinâmica Quântica	25	
1.4.a Introdução	25	
1.4.b QCD no Espaço Euclidiano		30
Referências do Capítulo Um	31	
2 A Abordagem Semi-clássica	32	
2.1 Método Semi-clássico	33	
2.2 A Questão do Acoplamento	47	
2.3 A Questão da Solução Clássica		50
2.4 O Monopolo	53	
2.4.a O Modelo de 'tHooft		53
2.4.b O Modelo de 'tHooft e a Teoria de Yang-Mills		56
2.5 A Expansão para a QCD	59	

Referências do Capítulo Dois	62	
3 Transições de Fase	63	
3.1 Quebra Espontânea de Simetria	64	
3.2 Mecanismo de Higgs	69	
3.3 Vácuo e Simetrias	72	
3.4 Transições de Fase na Teoria dos Campos		76
3.4.a O Potencial Efetivo	78	
3.4.b Transições e Defeitos Topológicos		83
Referências do Capítulo Três	91	
4 Energia Livre de Defeitos na QCD	93	
4.1 Cálculo da Expressão para a Energia Livre		94
4.2 Energia Livre do Monopolo	101	
4.3 Comentários sobre a Aproximação Usada		103
Referências do Capítulo Quatro	106	
Conclusão	107	
Apêndices	109	
A Notação	110	
B Teoria dos Campos	113	
C Teoria dos Grupos. SU(3), SU(2), SU(N).		115
D Integrais Gaussianas	123	
E Regras de Feynman	126	
F Espaço Euclidiano	130	
G Expansão Semi-clássica da Ação de Yang-Mills		135

*A evolução é a lei da Vida.
O Número é a lei do Universo.
A Unidade é a lei de Deus.*

PITÁGORAS

I N T R O D U Ç Ã O

Atualmente conhecemos(*) quatro tipos de interações entre partículas na natureza:

INTERAÇÃO	CARACTERÍSTICA	CONSTANTE DE ACOPLAMENTO FENOMENOLÓGICA
gravitacional	envolve partículas com massa	$\sim 6 \times 10^{-39}$
fraca	responsável pelo decaimento	$\sim 10^{-5}$
eletromagnética	envolve partículas com carga elétrica	$\sim 1/137$
forte	envolve partículas com carga de cor	~ 1

A teoria que descreve mais satisfatoriamente as interações fortes é conhecida como **cromodinâmica quântica** (QCD). Dizemos "satisfatoriamente" porque esta teoria não é ainda capaz de fornecer uma descrição completa de toda a física dessas interações, existindo mesmo dificuldades em se defini-la precisamente. Contudo, a fenomenologia calculada no contexto da QCD para a física das interações fortes supera as expectativas de uma forma que nenhuma outra teoria dessas interações, baseada em primeiros princípios, consegue fazer. Além disto, juntamente com o modelo de Weinberg-Salam para as interações eletrofracas, a QCD fundamenta a Teoria da Grande Unificação (GUT) [1], apontando para um fecundo campo de atividades na física de altas energias. Assim, podemos afirmar que, se a QCD não for a teoria correta

(*)Recentemente têm havido especulações acerca de uma quinta força. Veja Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 3.

para as interações fortes, ela é, pelo menos, uma boa aproximação desta.

A QCD é uma teoria quântica de campos, cujo estudo pode ser feito a "temperatura zero" (que é a teoria dos campos usual) ou a "temperatura finita" (que possui o mesmo formalismo da anterior, mas que nos permite que obter grandezas termodinâmicas através de uma mudança adequada de espaço).

Quando trabalhamos a temperatura finita podemos, dentre outras coisas, estudar as diferentes fases pelas quais uma teoria de campos pode passar. Transições de fase ocorrem em sistemas físicos que apresentam singularidades ou descontinuidades analíticas nas suas funções termodinâmicas. Nestes tipos de sistemas, em geral, um grande número de seus constituintes microscópicos tende a interagir intensa e cooperativamente, de tal forma que, a uma dada temperatura T , este comportamento cooperativo assume importância macroscópica e uma transição de fase acontece.

Através de um método que apresentaremos no capítulo 3, podemos obter informações sobre as fases de teorias de campos a temperatura finita, no limite de altas temperaturas, analisando a energia livre de Gibbs de defeitos topológicos da mesma (que classicamente são soluções das equações de movimento). Consideremos, por exemplo, uma teoria que possui um defeito topológico ϕ , e cuja configuração de vácuo é ϕ_v . Através da aproximação semi-clássica, podemos obter, no limite de altas temperaturas, uma expressão para a energia livre do defeito, F_ϕ . Quando $F_\phi > 0$, os defeitos não são favorecidos porque necessitam uma certa quantidade de energia para surgirem

no sistema. Se $F_3 < 0$, porém, os defeitos se encontram favorecidos e o sistema apresenta-se como um condensado destes defeitos. Assim, observamos que, quando $F_3 = 0$, temos uma transição de fase (do vácuo para um condensado de defeitos), e a temperatura para a qual esta ocorre é chamada temperatura crítica do sistema. O objetivo básico do método que utilizamos seria, então, determinar a temperatura crítica através do cálculo de $F_3 = 0$.

No caso da QCD, têm havido muitas pesquisas para se tentar obter o seu diagrama de fases. Sabemos, hoje, que, a altíssimas temperaturas e densidades, os quarks e os glúons são partículas livres, que esta fase de quarks e glúons possui alguma estrutura e que, pelo menos, duas transições[2] acontecem. Desse modo, o diagrama de fases tem que apresentar três fases, cuja interpretação, infelizmente, não é única. O que está claro é que, para T menor que T_d (temperatura de deconfinamento) e T_q (temperatura de restauração da simetria quiral), a matéria hadrônica usual existe; e, para T acima de T_d e T_q , surge o plasma de quarks e glúons.

Procurando obter informações sobre as fases da QCD, iremos, neste trabalho, estender o método exposto acima a esta teoria. Ele já foi aplicado anteriormente a outros modelos, tais como a teoria $\lambda\phi^4$ [3], o modelo SU(5) mínimo[4] e a eletrodinâmica escalar[5].

No primeiro capítulo apresentaremos elementos da teoria dos campos a temperatura finita, particularmente a função de partição; trataremos também de campos de gauge e campos fermiônicos, com vistas à QCD, que é o tema das duas últimas

seções desse capítulo.

Para efetuarmos nossos cálculos utilizaremos métodos aproximativos (basicamente a aproximação semi-clássica e a expansão em loops, no limite de altas temperaturas), que serão expostos no capítulo dois. Neste também incluímos estudos sobre como a QCD responde a essas aproximações, introduzimos os defeitos topológicos desta teoria e apresentamos as primeiras contas.

O capítulo três será dedicado ao estudo de transições de fase, objetivando principalmente descrever o método cujo formalismo desejamos estender à QCD.

No quarto capítulo apresentaremos os cálculos que efetuamos para a QCD, com base no que foi exposto nos capítulos precedentes. Obteremos uma expressão formal geral para a energia livre de defeitos nessa teoria e a aplicaremos ao defeito escolhido. Faremos, então, uma análise dos resultados obtidos. Um resumo das análises e extensões do trabalho serão apresentados na conclusão.

REFERENCIAS DA INTRODUÇÃO

- [1] P. Langacker, Phys. Rept. 72 (1981) 185
- [2] H. Satz, Nucl. Phys. A400 (1982) 541
- [3] C.A.A. de Carvalho, G.C.Marques, A.J. da Silva e I.Ventura, Nucl. Phys. B625 (1986) 45
- [4] D. Bazela, O.J.P.Eboli, J.M.Guerra Jr. e G.C.Marques, *Topological defects at finite temperature*, preprint IFUSP/P-594, Julho/1986
- [5] C.A.A. de Carvalho, D.Bazela, O.J.P.Eboli e G.C.Marques, Phys.Rev. D32 (1985) 3256

TEORIA DOS CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

Quando estudamos sistemas no estado de **equilíbrio** (no qual as grandezas que o caracterizam não variam com o tempo), podemos fazer uma classificação de tipos de ensembles(*):

- Ensemble Microcanônico: É aquele para o qual a energia quase não varia, indicando um sistema praticamente isolado.

- Ensemble Canônico: Seus constituintes estão em contato com um reservatório térmico (um outro sistema proporcionalmente muito maior, a temperatura T), que define a temperatura do ensemble. Sua energia pode variar, mas não o número de partículas que o compõe.

- Ensemble Gran-Canônico: sua energia e seu número de partículas podem variar, sendo que, para este último, só se pode definir sua média.

Como iremos trabalhar com ensembles **canônicos**, iniciaremos o capítulo apresentando uma revisão para, em seguida, estender o estudo à teoria dos campos.

(*) Um ensemble é um conjunto estatístico formado por MUITOS sistemas ideais com **mesmas** realidades macroscópicas.

1.1 - Termodinâmica de Equilíbrio [1]

A energia de um ensemble canônico, ainda que variável, é bem definida. Sendo E_r a energia do sistema no estado r , podemos definir a grandeza

$$Z = \sum_r e^{-\beta E_r}$$

com $\beta \equiv 1/T$, chamada **função de partição** do sistema. Através dela somos capazes de obter várias outras grandezas relevantes, tais como

energia média

$$\bar{E} \equiv -\partial(\ln Z)/\partial\beta$$

entropia

$$S = \ln Z + \bar{E}\beta$$

energia livre

$$F = -(\ln Z)/\beta$$

equação de estado

$$p = \beta^{-1} \partial(\ln Z)/\partial V$$

flutuação da energia

$$\overline{(\Delta E)^2} = \partial^2(\ln Z)/\partial\beta^2, \text{ etc.}$$

Consideremos um sistema que, a nível clássico, possui energia dada pela sua hamiltoniana H . Quanticamente, os valores mensuráveis dessa energia (supostos discretos, por simplicidade) são dados pelos autovalores E_i do operador

hamiltoniano \hat{H} , cuja equação de autovalor é

$$\hat{H}|\epsilon_i\rangle = \epsilon_i|\epsilon_i\rangle$$

($\{|\epsilon_i\rangle\}$ são auto-estados de \hat{H}).

Neste caso, podemos colocar a função de partição definida acima sob a forma

$$Z = \sum_r e^{-\beta\epsilon_r} = \sum_r e^{-\beta\epsilon_r} \langle \epsilon_r | \epsilon_r \rangle = \sum_r \langle \epsilon_r | e^{-\beta\epsilon_r} | \epsilon_r \rangle$$

Como $e^{-\beta\epsilon_r} = 1 - \beta\epsilon_r + \beta^2\epsilon_r^2/2 + \dots$, resulta

$$Z = \sum_r \langle \epsilon_r | e^{-\beta\hat{H}} | \epsilon_r \rangle$$

e, portanto, quanticamente,

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta\hat{H}} \quad (1.1),$$

com Tr significando traço (veja apêndice C).

1.2 - Função de Partição na Teoria dos Campos

1.2.a - Campos Boscônicos

Veremos agora que forma a função de partição Z assume quando usamos o formalismo da teoria dos campos. Por simplicidade, trabalharemos com um único campo escalar neutro, já que a extensão para um número maior de campos é imediata.

O operador de campo obedece à equação de autovalores

$$\hat{\phi} |\phi_i\rangle = \phi_i |\phi_i\rangle$$

onde ϕ_i é o i -ésimo auto-valor, associado ao auto-vetor $|\phi_i\rangle$.

Com estes dados, podemos escrever a função de partição (1.1) sob a forma

$$Z = \sum_i \langle \phi_i | e^{-\beta \hat{H}} | \phi_i \rangle \quad (1.2).$$

Para colocar este resultado na forma de uma integral funcional, lembremos que [2]

$$\langle \phi_1 | e^{-\hat{H}(t_1-t_0)} | \phi_0 \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int_{t_0}^{t_1} dt \int d^3\vec{x} [\pi \dot{\phi} - H(\pi, \phi)] \right\} \quad (1.3).$$

(Estamos trabalhando em 3+1 dimensões, isto é, 3 dimensões espaciais e uma temporal). O fato de os campos estarem sem o "chapeu" (^) indica que estão na representação das coordenadas

$$\phi(x) = \langle x | \hat{\phi} | x \rangle$$

A integral em $\mathcal{D}\phi$ é efetuada para todas as configurações onde $\phi(t_0, \vec{x}) = \phi_0$ e $\phi(t_1, \vec{x}) = \phi_1$. \mathcal{N} é uma constante de integração. A integração em $\mathcal{D}\pi$ é livre de vínculos e é sempre feita antes da integração em $\mathcal{D}\phi$ para evitar ambigüidades [3]. $\dot{\phi}$ equivale a $\partial\phi/\partial t$.

Este resultado é válido para os casos nos quais a hamiltoniana é **constante no tempo** e $t_1 > t_0$ [2]. A diferença entre (1.2) e o primeiro membro de (1.3) está basicamente no argumento da exponencial. Se, em (1.3), substituirmos

$i(t_1 - t_0)$ por β (isto é, fazemos uma "rotação de Wick") e definimos $\tau \equiv it$ (o que implica $\partial\phi/\partial t = i\partial\phi/\partial\tau$), teremos

$$\langle \phi_1 | e^{-\beta H} | \phi_0 \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} [i\pi\dot{\phi} - H(\pi, \phi)] \right\}$$

(Redefinimos, agora, $\dot{\phi} = \partial\phi/\partial\tau$).

Usando esta expressão, mas com $|\phi_1\rangle = |\phi_0\rangle = |\phi_i\rangle$, podemos escrever a função de partição sob a forma

$$Z = \sum_i \langle \phi_i | e^{-\beta H} | \phi_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int_0^\beta dt \int d^3\vec{x} [i\pi\dot{\phi} - H(\pi, \phi)] \right\} \quad (1.4).$$

Notemos que aqui a integração em $\mathcal{D}\phi$ deve ser feita sobre todas as configurações de campo **periódicas** em τ e de período β , isto é

$$\phi(0, \vec{x}) = \phi(\beta, \vec{x}) \quad (1.5).$$

O parâmetro $\tau = it$, embora tenha unidades de tempo, não é o tempo verdadeiro. Entretanto, podemos fazer uma analogia imaginando que τ seria o tempo para uma dada trajetória. Como a rotação de Wick resulta em passar do que conhecemos como espaço(*) de Minkowski (real) para o espaço euclidiano, costumamos denominar τ de "tempo euclidiano". Assim, podemos aplicar expressões do tipo "velocidade" (euclidiana), "energia cinética" (euclidiana), etc. Quando usamos o tempo euclidiano, dizemos que estamos trabalhando com a **teoria dos campos a temperatura finita**.

(*)Veja, nos apêndices A e G, mais detalhes sobre os espaços e a notação em cada um deles.

Quando a densidade de hamiltoniana \mathcal{H} depende quadraticamente dos momentos, ou seja

$$H(\pi, \phi) = \frac{1}{2} \pi^2 + V[\phi, \vec{\nabla}\phi]$$

as integrais funcionais sobre π em (1.4) são gaussianas e podemos efetua-las explicitamente, resultando em

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp\left[-\int_0^\beta dt \int d^3\vec{x} \mathcal{L}_E\right] \quad (1.6),$$

onde \mathcal{L}_E é a densidade de lagrangiana **euclidiana** do sistema (que é obtida de uma rotação de Wick da lagrangiana no espaço de Minkowski; veja apêndice F).

1.2.b - Extensão para Fermions

Se seguimos exatamente o mesmo procedimento anterior para campos fermiônicos, obtemos uma estatística errada. Do teorema de spin-estatística[4] sabemos que os campos fermiônicos obedecem a relações de **anti**-comutação, quando de sua quantização. Isto torna necessário definirmos, na região euclidiana, o **ordenamento temporal**

$$T[\psi(x)\bar{\psi}(y)] = \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(y) & , x_4 > y_4 \\ \bar{\psi}(y)\psi(x) & , x_4 < y_4 \end{cases}$$

para tempos euclidianos (x_4, y_4) dentro do intervalo $[0, \beta]$.

Com esta definição, a função de dois pontos

euclidiana (correspondente à que existe na teoria dos campos usual), dada por

$$G_2(x-y) = Z^{-1} \text{Tr} \{ e^{-\beta \hat{H}} T[\psi(x) \bar{\psi}(y)] \} ,$$

obedece

$$G_2(\vec{x}, \beta) = -G_2(\vec{x}, 0) \quad (1.7).$$

Observemos agora que a mecânica estatística quântica nos dita que o valor esperado térmico (euclidiano) de um observável \hat{O} é

$$\langle \hat{O} \rangle = Z^{-1} \text{Tr} (\hat{O} e^{-\beta \hat{H}}) .$$

Se \hat{O} é função dos campos bosônicos ϕ e π , em termos de integrais funcionais obtemos

$$\langle \hat{O} \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\phi \mathcal{O}(\pi, \phi) e^{-S_E[\pi, \phi]} \quad (1.8).$$

[S_E é a ação euclidiana do sistema,

$$S_E = \int_0^\beta dt \int d^3\vec{x} \mathcal{L}_E(\vec{x}, t) \quad (1.9)] .$$

A primeira impressão é que poderíamos usar uma simples analogia e encontrar médias térmicas relativas a campos fermiônicos, que seriam dadas por

$$\langle \hat{R}[\psi, \bar{\psi}] \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} R e^{-S_E[\psi, \bar{\psi}]} .$$

Com base no procedimento para os bósons, imporíamos que as configurações seriam periódicas no tempo euclidiano, com período β . Ou seja,

$$\psi(\vec{x}, 0) = \psi(\vec{x}, \beta)$$

$$\bar{\psi}(\vec{x}, 0) = \bar{\psi}(\vec{x}, \beta)$$

Porém, se fizermos isto teremos

$$\begin{aligned} G_2(\vec{x}, \beta) &= \mathcal{N} \int D\bar{\psi} D\psi [\psi(\vec{x}, \beta) \bar{\psi}(\vec{0}, 0)] e^{-S\epsilon} = \\ &= \mathcal{N} \int D\bar{\psi} D\psi [\psi(\vec{x}, 0) \bar{\psi}(\vec{0}, 0)] e^{-S\epsilon} = G_2(\vec{x}, 0) \end{aligned}$$

o que discorda de (1.7), desrespeitando o teorema de spin-estatística.

Concluimos então que, ainda que deixemos as médias térmicas na forma (1.8) para sistemas com férmions, necessitamos usar, neste caso, contornos **anti**-periódicos no tempo euclidiano, ou seja:

$$\psi(\vec{x}, \beta) = -\psi(\vec{x}, 0) \tag{1.10}$$

$$\bar{\psi}(\vec{x}, \beta) = -\bar{\psi}(\vec{x}, 0)$$

Igual raciocínio podemos aplicar à função de partição.

1.3 - Campos de Gauge. O método de Fadeev-Popov (*)

1.3.a- Simetrias de Gauge [5]

Sempre que tomamos uma densidade de lagrangiana, \mathcal{L} , que possui uma simetria contínua, verificamos que a esta corresponde uma lei de conservação[6]. Por exemplo, se \mathcal{L} independe explicitamente do tempo (ou seja, é simétrica por translações temporais), encontramos que a hamiltoniana do sistema se conserva ($\partial H / \partial t = 0$).

No caso de teorias invariantes por transformações de Lorentz - que fisicamente nos interessam -, podemos definir a energia, o momento linear, o momento angular, etc., de tal modo que se apresentem como grandezas conservadas. Além disso, para que as equações de movimento sejam covariantes (isto é, sob uma transformação de simetria nas coordenadas, a forma das equações permanece a mesma), \mathcal{L} tem que ser uma densidade **escalar** de Lorentz.

As transformações de Lorentz dão um exemplo de simetrias espaço-temporais. Entretanto, vejamos o caso de leis de conservação que não são consequência de simetrias do espaço-tempo clássico. Neste caso, podemos **construir** uma transformação nos campos que deixa \mathcal{L} invariante.

Por exemplo, consideremos um campo ϕ_i que possui carga Q_i (em unidades da carga elementar $e = 1,9 \cdot 10^{-19}$ C). Podemos, então, **definir** o seguinte grupo de transformações nos campos:

(*) Em toda esta seção trabalharemos no espaço de Minkowski.

$$\phi_k(x) \rightarrow \phi'_k(x) = \phi_k(x) e^{-iq_k \theta} \quad (1.11).$$

(θ é um parâmetro do grupo. Este, na verdade, é o grupo das transformações unitárias em uma dimensão, ou $U(1)$). A lagrangiana do eletromagnetismo, contendo produtos dos campos ou mesmo gradientes dos campos, permanece invariante sob esta transformação.

Este tipo de transformação, relativo a simetrias internas (isto é, que não são espaço-temporais), é chamado de **transformação de gauge**. Como o parâmetro θ independe de x , este é um exemplo de transformação de gauge de **primeira espécie** (ou global). Portanto, pelo fato de \mathcal{L} ser invariante sob o grupo de gauge, dizemos que há uma "invariância de gauge de primeira espécie" (ou global). A grandeza conservada associada à invariância do exemplo anterior é identificada com a carga q_i .

Uma teoria pode ter mais de uma quantidade conservada, ou ser invariante por um grupo de transformações mais complicado do que o $U(1)$. É o caso do isospin (exemplo não-abeliano mais simples). Se a teoria possui simetria de isospin, os campos aparecerão em multipletos(*) que formam uma base para representações do grupo de isospin $SU(2)$, e uma transformação semelhante e um pouco mais complexa que (1.11) pode ser definida.

Em uma situação mais geral, a transformação de gauge pode depender do ponto espaço-temporal que serve de

(*)Podemos entender um multiplete como um conjunto com múltiplas componentes que define um ente com certas propriedades. (No nosso caso, o 'ente' é o campo). Uma única componente define um singleto, três definem um triplete, etc.

argumento para o campo. Ou seja,

$$\phi_k(x) \rightarrow \phi'_k(x) = \phi_k(x) e^{-iq_k \theta(x)} \quad (1.12).$$

A esta chamamos **transformação de gauge de segunda espécie** (ou local).

Sob este tipo de transformação, devemos tratar com cuidado os termos em \mathcal{L} que contiverem gradientes dos campos, pois

$$\partial_\mu \phi_k(x) \rightarrow \partial_\mu \phi'_k(x) = e^{-iq_k \theta(x)} [\partial_\mu \phi_k(x) - iq_k \phi_k(x) \partial_\mu \theta(x)] ,$$

que é bem diferente do resultado $e^{-iq_k \theta} \partial_\mu \phi_k(x)$ que encontramos no caso de transformações globais.

Em eletrodinâmica, por exemplo, fazemos com que \mathcal{L} permaneça invariante sob este tipo de transformação introduzindo o campo do fóton como se segue (é a regra do "acoplamento mínimo"): só permitimos que o gradiente de um campo carregado ($\partial_\mu \phi_k$) apareça em **acompanhado do campo do fóton (A_μ) de acordo com a combinação**

$$(\partial_\mu - iq_k A_\mu) \phi_k \quad (1.13).$$

(O fóton, que é um méson de spin 1, é um **boson de gauge**, pois o campo que o representa é bosônico e surge na teoria por causa da invariância sob transformações de gauge). Em seguida, **exigimos** que (1.13) se transforme exatamente como $\phi_k(x)$ se transforma em (1.11), isto é

$$(\partial_\mu - ieq_k A'_\mu) \phi'_k(x) = e^{-iq_k \theta(x)} (\partial_\mu - ieq_k A_\mu) \phi_k(x) \quad (1.13.a).$$

Desta equação obtemos a lei de transformação que o campo do foton deve obedecer:

$$A'_\mu(x) = -\frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x) + A_\mu(x)$$

Além de (1.13), que acopla o campo do foton ao campo das partículas carregadas, poderiam existir na teoria termos de massa e de energia cinética que acoplariam A_μ a ele mesmo. Entretanto, é possível mostrar que, para preservarmos a invariância de gauge local, o foton não pode ter massa. Quanto ao termo de energia cinética (invariante de gauge) do foton, ele vale

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

onde

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

O que fizemos para a eletrodinâmica podemos generalizar, estudando a invariância de gauge local para grupos **não-abelianos**, relativos a uma simetria interna qualquer. Suponhamos que os campos transformem-se de acordo com

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\vec{L} \cdot \vec{\theta}} \phi(x) \equiv U(\theta) \phi(x)$$

onde $\phi(x)$ é um vetor coluna e U é uma representação matricial dos geradores do grupo. Já sabemos que \mathcal{L} é invariante sob transformações com θ^i constante e queremos **construir** uma teoria que seja invariante também por transformações de gauge locais. Por analogia com a eletrodinâmica, introduzimos os campos vetoriais $A_\mu^i(x)$ seguindo a regra do acoplamento mínimo. Ou seja, os campos A_μ se acoplam aos $\phi(x)$ através de

$$D_\mu \phi(x) \equiv [\partial_\mu - ig \vec{L} \cdot \vec{A}(x)] \phi(x)$$

D_μ é conhecida como **derivada covariante** do campo $\phi(x)$ e substituí, em \mathcal{L} , as derivadas ∂_μ usuais. A constante de acoplamento g é arbitrária.

Para termos, seguindo a analogia com (1.13.a), a derivada covariante transformando-se segundo

$$D_\mu \phi(x) \rightarrow U(\theta) D_\mu \phi(x)$$

necessitamos que os campos A_μ^i transformem-se de acordo com

$$\vec{A}'_\mu \cdot \vec{L} = U(\theta) \left[\vec{A}_\mu \cdot \vec{L} - \frac{i}{g} \partial_\mu U(\theta) \right] U^{-1}(\theta)$$

o que equivale a

$$A_\mu^i = -\frac{1}{g} \partial_\mu \theta^i - f_{ijk} \theta^j A_\mu^k + A_\mu^i$$

onde f_{ijk} são as constantes de estrutura do grupo.

O análogo ao termo de energia cinética do foton que podemos adicionar a \mathcal{L} é dado por

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$$

com

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.14).$$

Como antes, um termo de massa violaria a invariância de gauge local, de modo que os A_μ^a têm massa nula.

1.3.b - Mecanismo de Fadeev-Popov

Suponhamos, por simplicidade, que temos um sistema composto sb de campos de gauge, descrito pela lagrangiana (notemos que a teoria é não-abeliana)

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$$

(Esta é a teoria de Yang-Mills[7] pura), onde $F_{\mu\nu}^a$ é dado por (1.14). Da teoria dos campos sabemos que o funcional gerador (análogo, no espaço de Minkowski, da função de partição) é dado por

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \ e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0} \quad (1.15).$$

Da seção anterior, porém, sabemos que \mathcal{L}_0 é invariante por transformações de gauge locais. Isto faz com que possamos implementar transformações de gauge nos campos sem mudar a ação (que está no argumento da exponencial). Dada uma configuração particular $A_\mu^a(x)$, podemos gerar, através de

transformações de gauge, uma órbita no espaço dos A_μ^a . As infinitas trajetórias possíveis nessa órbita, todas com mesma fase [que é o argumento da exponencial em (3.5)], resultam em infinitos na expressão do funcional gerador. Para evitar isto, necessitamos de algum meio que impeça a integração nos campos que ~~estão~~ são equivalentes de gauge (isto é, equivalentes por uma transformação de gauge).

Em teorias de gauge abelianas este problema também existe. Na quantização canônica, geralmente fixamos as relações de comutação para campos a tempos iguais e daí se determinam os comutadores para qualquer tempo. Para campos de gauge, porém, este procedimento apenas não é suficiente, já que sempre podemos fazer uma transformação de gauge para um campo que se anula a $\Delta t = 0$. Portanto, necessitamos eliminar a liberdade de transformações de gauge. Uma das formas de fazermos isto é especificando uma **condição de gauge**, de modo que o comportamento do campo fique fixo para a quantização canônica e assegure que configurações equivalentes de gauge não sejam computadas separadamente, no formalismo de integrais de trajetória.

Como exemplo, tomemos a condição de gauge axial[7]

$$\eta^\mu A_\mu^a = 0 \quad , \quad \eta^2 < 0 \quad ,$$

onde η_μ é um quadri vetor tipo espaço qualquer. Neste gauge a quantização é bem simples. Ao calcularmos o funcional gerador, só integramos nas trajetórias dos campos que satisfazem essa condição. Este vínculo é satisfeito igualmente se introduzimos

uma função δ em (1.15):

$$Z = \mathcal{N} \int DA \prod_{a,x} \delta[\vec{n} \cdot \vec{A}^a(x)] e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0}$$

O problema com este gauge é que não tem regras de Feynman manifestamente covariantes de Lorentz. Muitas vezes, condições de gauge covariantes são preferíveis, ainda que apresentem problemas na quantização. Estes problemas, porém, é que foram resolvidos por Fadeev e Popov[8].

Para uma determinada condição de gauge linear covariante

$$G^a[A_\mu^b] = 0 \quad \text{para qualquer } a$$

mostra-se[9] que podemos escrever o funcional gerador sob uma forma equivalente a (1.15), ou seja:

$$Z = \mathcal{N} \int DA \Delta_G(A_\mu^b) \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}_0 - \frac{1}{2\alpha} (G^a)^2 \right] \right\} ,$$

onde α é um parâmetro real e

$$\Delta_G(A_\mu^b) = \det \left[\frac{\partial G^a}{\partial A_\mu^c} D_\mu^{cb} \delta^4(x-y) \right] , \quad D_\mu^{cb} = \delta^{cb} \partial_\mu + g f_{cbd} A_\mu^d .$$

O fato de surgir este determinante é sugestivo, pois sabemos que as regras para integração de férmions em integrais gaussianas fornecem exatamente tais determinantes. Desse modo, se introduzimos os novos campos anti-comutantes $\bar{C}_a(x)$ e $C_a(x)$, que são elementos de uma álgebra de Grassman (entendamos \bar{C} como o conjugado hermitiano de C), podemos

escrever o determinante de Fadeev-Popov Δ_G como

$$\Delta_G \sim \int D\bar{C} DC \exp\left\{i \int d^4x \bar{C}_a \left(\frac{\partial G^a}{\partial A_\mu^d} D_\mu^{db} \right) C_b\right\}$$

Podemos, então, interpretar o determinante como uma **interação efetiva** em termos dos campos-"fantasma" (ou "ghosts", visto que fisicamente eles não existem), \bar{C} e C . Isto simplifica enormemente os cálculos e não interfere na renormalizabilidade da teoria.

Em resumo, temos que o funcional gerador para uma teoria de Yang-Mills pura submetida à fixação de gauge à Fadeev-Popov admite a forma

$$Z = \mathcal{N} \int DA D\bar{C} DC \exp(i S_{\text{ef}}) \quad (1.16),$$

onde

$$S_{\text{ef}} = S_{\text{YM}} + S_{\text{Fix}} + S_G \quad (1.17),$$

$$S_{\text{YM}} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \right) \quad (1.18),$$

$$S_{\text{Fix}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2\alpha} G^a(A_\mu^b) \right] \quad (1.19),$$

$$S_G = \int d^4x \bar{C}_a \left(\frac{\partial G^a}{\partial A_\mu^d} D_\mu^{db} \right) C_b \quad (1.20).$$

Como um exemplo concreto, tomemos a condição de gauge de Lorentz (ou, simplesmente, o **gauge de Lorentz**)

$$G^a = \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (1.21).$$

Para ela

$$S_{\text{FIX}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^{\mu a})^2 \right] \quad (1.22),$$

$$S_G = \int d^4x \left[-(\partial_\mu \bar{c}_a) \partial^\mu c_a + g (\partial_\mu \bar{c}_a) f_{abc} C_b A^{\mu c} \right] \quad (1.23),$$

Quando o parâmetro $\alpha \rightarrow \infty$, dizemos que estamos usando a condição de gauge de Landau (ou o **gauge de Landau**). Se $\alpha=1$, estamos no **gauge de Feynman**.

1.3.c - Passagem para o Espaço Euclidiano

Os resultados obtidos para as duas sub-seções anteriores estão escritos no espaço de Minkowski. Para o uso em teoria de campos a temperatura finita, necessitamos passá-los para o espaço euclidiano.

Aplicando as regras do apêndice F (veja também o apêndice A) em (1.16), obtemos a função de partição

$$Z = \mathcal{N} \int DA D\bar{c} Dc e^{-\int d^4x_e \mathcal{L}_e} \quad (1.24),$$

\mathcal{L}_e é a lagrangiana escrita no espaço euclidiano, com

$$\mathcal{L}_{\text{YME}} = \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 \quad (1.25),$$

$$\mathcal{L}_{\text{FIX}_e} = \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 \quad (1.26),$$

$$\mathcal{L}_{G_e} = -(\partial_\mu \bar{c}_a) \partial_\mu c_a + g f_{abc} (\partial_\mu \bar{c}_a) C_b A_\mu^c \quad (1.27),$$

Os campos A_μ^a , \bar{C}_a e C_a dependem agora de γ , e não de t , por causa da rotação de Wick.

1.4 - A Cromodinâmica Quântica

1.4.a - Introdução[13]

Atualmente, acreditamos que a grande complexidade dos fenômenos hadrônicos deve-se ao fato de que os hádrons são estruturas compostas construídas a partir de um pequeno número de objetos desprovidos de estrutura, chamados **quarks**. Virtualmente toda a física hadrônica - espectroscopia, decaimentos fracos e eletromagnéticos, colisões com elétrons e neutrinos e produção hadrônica na aniquilação e^+e^- - pode ser consideravelmente entendida em termos do modelo a quarks. Este modelo implica as seguintes suposições básicas:

- 1) quarks (q) são partículas de spin $1/2$
- 2) bárions são compostos por três quarks (qqq)
- 3) mésons são compostos por um quark e um anti-quark ($q\bar{q}$)
- 4) como os hádrons são caracterizados pelos números quânticos aditivos I_3 (terceira componente do isospin), S (estranheza), C (charme), é necessário que os quarks possuam valores adequados destes números (veja a tabela 1.1).

Se os quarks são os constituintes hadrônicos básicos, a estrutura dos hádrons e todos os processos de natureza "forte" têm, em última análise, que ser devidos a interações

entre quarks. Assumiremos que existe um campo de interação forte que tem seus próprios graus de liberdade e que pode propagar-se. Os quarks são fontes e sumidouros deste campo, o qual se apresenta como mediador das interações fortes. Além disso, suporemos que este campo se está acoplado ao grau de liberdade do quark conhecido como "cor".

Todas estas premissas têm um embasamento experimental, encontrado de forma clara na ref. [13].

Devido à importância dos estados invariantes de cor, somos impelidos a crer que a invariância de cor é uma simetria da natureza. A teoria que se baseia nessa simetria e na cor como fonte de campos é chamada **cromodinâmica quântica** (QCD).

A QCD é, então, uma teoria quântica de campos com lagrangiana renormalizável, e é a que melhor tem explicado a física dos hádrons.

Matematicamente, o campo do quark, $\psi_{\alpha}^f(x)$, é um espinor de Dirac (as 4 componentes do espinor estão implícitas). O índice f refere-se ao "sabor", e corresponde aos graus de liberdade observados nos hádrons existentes, tais como estranheza, charme, etc. Atualmente pelo menos 5 sabores estão bem estabelecidos (o quark "top" ainda está em estudo), e geralmente chamamos os quarks correspondentes por

$$\begin{array}{llll}
 \psi^1 = u & (\text{up}) & \psi^2 = d & (\text{down}) \\
 \psi^3 = s & (\text{strange}) & \psi^4 = c & (\text{charm}) \\
 \psi^5 = b & (\text{bottom}) & &
 \end{array}$$

QUARKS

TIPO	u	d	s	c
SPIN	1/2	1/2	1/2	1/2
CARGA Q	2/3	-1/3	-1/3	2/3
ISOSPIN	1/2	1/2	0	0
I_3	1/2	-1/2	0	0
ESTRANHEZA	0	0	-1	0
CHARME	0	0	0	1
NUM.BARIONICO	1/3	1/3	1/3	1/3
MASSA EFETIVA (aprox., MeV)	$m_0 \sim$ 10-100	m_0	$m_0 +$ 150	$m_0 +$ 1500

Obs.: o quark b possui carga $Q = -1/3$ e massa efetiva de 5000 MeV ; o quark top (t) tem limite inferior da massa estimado em 20000 MeV.

Tabela 1.1

Na QCD o sabor não possui importância dinâmica. O índice α refere-se aos graus de liberdade de "cor". Assumimos que existem exatamente três cores, que correspondem à nomenclatura (variável)

$$\psi_1^f = \text{vermelho}$$

$$\psi_2^f = \text{verde}$$

$$\psi_3^f = \text{azul}$$

A ideia central da QCD é fazer da simetria de cor SU(3) **local**, e não global. Como já sabemos, para implementarmos esta simetria local necessitamos introduzir um campo de gauge vetorial compensador A_μ^a , $a = 1, 2, \dots, 8$, que

se transforma como uma transformação adjunta de SU(3). Os quantos dos campos de gauge A_μ^a definem os **gluons coloridos** (eles não têm sabor). A densidade de lagrangiana mínima que é localmente invariante de gauge induzida por essa simetria SU(3) é (no espaço de Minkowski)

$$L_0 = i \bar{\Psi}_\alpha^f \not{D}_{\alpha\beta} \Psi_\beta^f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \quad (1.28),$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad ; \quad a = 1, 2, \dots, 8 \quad ; \quad f = 1, 2, \dots, N_F \quad ,$$

onde

$$\not{D}_{\alpha\beta} \Psi_\beta^f = (\delta_{\alpha\beta} \partial_\mu - ig \frac{\lambda_{\alpha\beta}^a}{2} A_\mu^a) \gamma^\mu \Psi_\alpha^f$$

ou

$$\not{D}\psi = (\partial_\mu - ig \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a) \gamma^\mu \psi \quad ,$$

sendo \not{D}_μ a derivada covariante; $F_{\mu\nu}^a$ é dado por (1.14) e $\bar{\Psi}_{\alpha\beta}^f = (\Psi_{\alpha\beta}^f)^\dagger \gamma_0$. $\{\lambda^a/2\}$ são os geradores de SU(3) (*).

Observemos que a intensidade de todas as interações em (1.28) está especificada por uma única constante de acoplamento, g .

Podemos verificar que (1.28) é invariante sob transformações de gauge locais da forma

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) \frac{\lambda^a}{2} \quad \rightarrow \quad U(x) A_\mu(x) U^{-1}(x) + \frac{i}{g} U(x) \partial_\mu U^{-1}(x)$$

$$\psi(x) \rightarrow U(x) \psi(x) \quad (1.29),$$

$$U(x) = e^{i\theta^a(x)\lambda^a/2}$$

(*) As matrizes de Dirac estão no apêndice A, e os geradores de SU(3) no apêndice C.

onde $\Theta^a(x)$ são os parâmetros da transformação de gauge SU(3) local, $U(x)$. Em (1.29) usamos notação matricial.

Com relação à simetria de sabor, assumimos que para N sabores o grupo de **sabor** é SU(N). Ou seja, $(\psi_\alpha^1, \psi_\alpha^2, \dots, \psi_\alpha^N)$, com $\alpha = 1, 2, 3$, forma representações fundamentais de SU(N). Deste modo, para $N = 3$ chegamos à bem conhecida espectroscopia hadrônica de SU(3) [12]. Por outro lado, a simetria quiral de sabor SU(N) \times SU(N) que observamos em (1.28), não é exata no mundo real e podemos facilmente quebrá-la em QCD adicionando a \mathcal{L}_0 um termo de massa para os quarks:

$$\Delta \mathcal{L} = -\psi_\alpha^f M^{fg} \psi_\alpha^g, \quad M^{fg} = \delta^{fg} m^g \quad (1.30).$$

Este é o único termo que quebra esta simetria sem necessitar que introduzamos novos campos, além de não interferir na renormalizabilidade.

Para uma teoria quântica, falta ainda adicionarmos à lagrangiana $\mathcal{L}_0 + \Delta \mathcal{L}$ um termo de fixação de gauge, \mathcal{L}_{FIX} (que assegura um procedimento de quantização adequado), e o termo dos fantasmas, \mathcal{L}_G (que depende de como se fixa o gauge e preserva unitariedade). Portanto, a densidade de lagrangiana completa para a QCD é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_0 + \Delta \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{FIX}} + \mathcal{L}_G \quad (1.31).$$

Para \mathcal{L}_{FIX} e \mathcal{L}_G podemos usar, por exemplo, as expressões obtidas em (1.22) e (1.23). E assim, com esta simples teoria, procuramos dar conta de tudo o que se refere às interações fortes.

Apesar de podermos escrever a lagrangiana da QCD, ainda permanece aberta a questão de se a QCD define uma teoria quântica de campos realmente consistente. Ou seja, pode-se calcular uma matriz S física que seja finita, analítica, unitária, invariante de Lorentz, etc., e que descreva o universo hadrônico que observamos? Grande parte do esforço teórico em QCD é, na verdade, definir a teoria, de forma que se possa calcular uma matriz S significativa.

1.4.b - QCD no Espaço Euclidiano

Como nosso objetivo é estudar a cromodinâmica quântica termodinamicamente, é importante transportarmos os resultados da seção anterior do espaço de Minkowski para o euclidiano. Na prática, isto significa reescrever a lagrangiana (1.31) seguindo o procedimento da seção 1.3.c. Isto resulta em

$$L_{QCD_e} = L_{0_e} + \Delta L_e + L_{fix_e} + L_{G_e} \quad (1.32),$$

onde

$$L_{0_e} = \bar{\psi}_\alpha^f \not{D}_{\alpha\beta} \psi_\beta^f + \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 \quad (1.33),$$

$$\Delta L_e = -i \bar{\psi}_\alpha^f m^f \psi_\alpha^f$$

com $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4$, e L_{fix_e} e L_{G_e} sendo dadas respectivamente por (1.26) e (1.27). O índice e indica que estamos no espaço euclidiano. A derivada covariante em (1.33) vale

$$\not{D} = \not{\partial}_\mu \gamma_\mu = (\partial_\mu - ig \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a) \gamma_\mu \quad (1.34).$$

REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO UM

- [1] Para uma exposição mais ampla e detalhada consulte, por exemplo, H.B.Callen: *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, Wiley, N.Y., 1985 (2a. edição)
- [2] R.P.Feynman e A.R.Hibbs: *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, N.Y., 1965
L.D.Fadeev e A.A.Slavnov: *Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory*, Benjamin Cummings Publ. CO. Inc., 1980
- [3] S.Coleman, *Secret Symmetry*, Erice 1973, Ed. por Zichichi, Acad.Press, N.Y., 1975
- [4] W.Pauli, *Phys.Rev.* 58 (1940) 716
- [5] E.S.Abers e B.W.Lee, *Phys.Rept.* 9 (1973) 1
- [6] E. Nöether, *Nachr.d.Kgl.Ges.d.Wiss.Göttingen* (1918) 235
- [7] C.N.Yang e R.L.Mills. *Phys.Rev.* 96 (1954) 191
- [8] L.D.Fadeev e V.N.Popov, *Phys.Lett.* 25B (1967) 29
- [9] W.Marciano e H.Pagels, *Phys.Rept.* 36 (1978) 137. Neste trabalho há uma abrangente revisão da cromodinâmica quântica
- [10] C.Itzykson e J.-B.Zuber: *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, N.Y., 1980
- [11] Como exposição mais detalhada da QCD sugerimos o livro de T.D.Lee: *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Harwood Acad.Publ., 1981
- [12] M.Gell-Man e Y.Nee'man: *The Eightfold Way*, W.A.Benjamin Inc.Publ., N.Y., 1964
- [13] K. Gottfried e V.F. Weisskopf: *Concepts of Particle Physics*, vol.1, Oxford, N.Y., 1986

A ABORDAGEM SEMI-CLASSICA

Dentre os sistemas físicos que estudamos, não são muitos aqueles para os quais dispomos de soluções exatas. Via de regra, necessitamos de técnicas aproximativas para obter resultados mensuráveis. Um exemplo desse tipo de técnica é dado pela teoria de perturbações.

A cromodinâmica quântica é uma das teorias onde necessitamos métodos aproximativos. Para que possamos compreendê-la melhor, costumamos usar tanto métodos semi-clássicos[1] quanto estudos na rede (lattice)[2], dentre outros.

Para realizar nosso trabalho sobre QCD a temperatura finita, optamos por usar o método semi-clássico, que é objeto do presente capítulo.

2.1 - Método Semi-clássico

Quando trabalhamos com a função de partição no formalismo de integrais de trajetória, surgem expressões do tipo(*)

$$\int D\phi \exp\left\{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int d^3\vec{x} \mathcal{L}[\phi]\right\} \quad (2.1),$$

que são bem definidas quando $\mathcal{L}[\phi]$ apresenta uma forma bilinear nos campos (veja apêndice E). (Por simplicidade, estamos ilustrando a idéia com um sistema de bósons escalares neutros, ϕ). Como veremos nesta seção, uma das qualidades que o método semi-clássico apresenta é a possibilidade de nos fornecer um meio de fazer com que o potencial ($V[\phi]$, em (2.2)) assumam a forma quadrática. Suponhamos que o nosso sistema de interesse obedeça à lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + V[\phi] \quad (2.2).$$

A expressão (2.1) no espaço de Minkowski é

$$\int D\phi \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[\phi]\right\}$$

O método semi-clássico (veja Rajaraman, ref.[1], cap.6) baseia-se no fato de que, quando $\hbar \rightarrow 0$, a exponencial acima oscila muito. Desse modo, a **contribuição importante** vem de configurações que tornam estacionário o argumento de

(*) Nesta seção é conveniente usarmos unidades tais que $\hbar \neq 1$.

e $iS[\phi]/\hbar$ (isto é, as que são extremos de S : $\delta S[\phi_c] = 0$).
 Estendendo esta ideia para (2.1), dizemos que, para $\hbar \rightarrow 0$, os campos que dão maior contribuição são aqueles que minimizam ~~o funcional~~ a ação euclidiana.

Se acontecer de $V[\phi]$ depender de um parâmetro de acoplamento, g , em praticamente todas as teorias usuais podemos definir

$$\frac{1}{g} \bar{\phi} \equiv \phi \quad ; \quad \frac{1}{g^2} \bar{V}[\bar{\phi}] = V[\phi] \quad (2.3),$$

de modo que $\bar{\phi}$ e $\bar{V}[\bar{\phi}]$ são independentes de g . Substituindo esta definição em (2.2), obtemos

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int d^3\vec{x} \left\{ \frac{1}{2g^2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{g^2} V[\phi] \right\} = \\ &= \frac{1}{g^2} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int d^3\vec{x} \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \bar{\phi})^2 + \bar{V}[\bar{\phi}] \right\} \equiv \frac{1}{g^2} \bar{S}[\bar{\phi}] \end{aligned}$$

onde $\bar{S}[\bar{\phi}]$ é uma nova ação, independente do acoplamento. Isto nos permite escrever (2.1) sob a forma

$$A \int D\bar{\phi} \exp \left\{ -\frac{1}{g^2\hbar} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int d^3\vec{x} \bar{S}[\bar{\phi}] \right\} \quad (2.4).$$

Notemos que toda a dependência no acoplamento advém da combinação $(\hbar g^2)^{-1}$ na exponencial. O argumento da "fase estacionária", então, equivale a dizer que quando a combinação $\hbar g^2$ é muito pequena, as contribuições mais importantes vêm das configurações que tornam o argumento da exponencial estacionário (ou seja, são as configurações

classicas, ϕ_c). Este critério é satisfeito quando tanto \hbar quanto o acoplamento g^2 são pequenos.

O fato de que $\hbar g^2 \rightarrow 0$ e que, portanto, as contribuições relevantes vem das configurações clássicas ϕ_c [isto é, que satisfazem a equação de movimento

$$\partial^2 \phi_c - V'[\phi_c] = 0 \quad (2.5),$$

nos permite introduzir uma expansão em potências de \hbar através da mudança de variáveis

$$\phi \rightarrow \phi_c + \sqrt{\hbar} \eta \quad (2.6)$$

na expressão (1.6). Esta, em unidades onde $\hbar \neq 1$, é dada por (a integral fechada denota contornos periódicos em ϕ)

$$Z = \mathcal{N} \oint \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int d^3\vec{x} \mathcal{L}\right\} \quad (2.7).$$

A substituição de (2.6) em (2.7) resulta em

$$Z = \mathcal{N} \oint \mathcal{D}\eta \exp\left\{-\frac{S[\phi_c]}{\hbar} - \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int d^3\vec{x} \left[\frac{\eta(-\partial^2 + V''[\phi_c])\eta}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sqrt{\hbar}}{3!} V'''[\phi_c]\eta^3 + \frac{\hbar}{4!} V^{(4)}[\phi_c]\eta^4 + \dots \right] \right\} \quad (2.8).$$

Em ordem mais baixa, (2.8) nos dá a correção

$$Z = \mathcal{N} \oint \mathcal{D}\eta \exp\left\{-\frac{S[\phi_c]}{\hbar} - \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \eta(-\partial^2 + V''[\phi_c])\eta\right\} \quad (2.9).$$

Esta correção (que tem origem quântica por basear-se em \hbar) ao termo clássico, explicita o caráter semi-clássico do método.

Se quisermos calcular a energia livre de Gibbs

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{\beta V} \ln Z \quad (2.10)$$

(Ve tal que deixa \mathcal{F} finita no limite termodinâmico, isto é, a volume infinito) do sistema com a correção (2.9), teremos (por simplicidade, iremos omitir a constante de normalização \mathcal{N} e escreveremos $S_c \equiv S[\phi_c]$),

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\beta V} \frac{S_c}{\hbar} - \frac{1}{\beta V} \ln \int \mathcal{D}\eta \, e^{-\frac{1}{2} \int d^4x \, \eta O \eta} \quad (2.11),$$

onde

$$O \equiv -\partial^2 + V''[\phi_c] \quad (2.12).$$

Mas, sendo O diagonalizável, podemos usar a igualdade (apêndice D)

$$\int \mathcal{D}\eta \, e^{-\frac{1}{2} \int d^4x \, \eta O \eta} = (\det O)^{-1/2} \quad (2.13).$$

Portanto,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\beta V} \frac{S_c}{\hbar} - \frac{1}{\beta V} \ln (\det O)^{-1/2} \quad (2.14).$$

Usando a propriedade das matrizes diagonalizáveis

$$\ln (dd0)^a = a \operatorname{Tr} \ln 0 \quad (2.15),$$

obtemos

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\beta V} \frac{S_c}{\hbar} + \frac{1}{2\beta V} \operatorname{Tr} \ln 0 \quad (2.16).$$

Para ilustrar os resultados acima, tomemos como exemplo a teoria $\lambda \phi^4$, que possui densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \quad (2.17)$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 \quad (2.18)$$

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda \phi^4}{4!} \quad (2.19).$$

A equação de movimento da teoria é

$$\partial_\nu \partial_\nu \phi + \mu^2 \phi - \frac{\lambda}{6} \phi^3 = 0 \quad (2.20),$$

a qual admite soluções clássicas do tipo **soliton**,

$$\phi_s(x) = \mu \sqrt{\frac{6}{\lambda}} \operatorname{tgh} \frac{\mu x}{\sqrt{2}} \quad (2.21),$$

onde x é uma dimensão espacial. No que segue iremos determinar, para esta teoria, a expressão semi-clássica da energia livre de Gibbs relativa à configuração ϕ_s no limite de **altas**

temperaturas.

Primeiramente, substituímos na expansão (2.8) os valores relativos a este problema, o que resulta em

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\eta \exp \left\{ -\frac{S[\phi_s]}{\hbar} - \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \eta (-\partial^2 + V''[\phi_s]) \eta \right\} \quad (2.22),$$

com

$$S[\phi_s] = \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int d^3\vec{x} \mathcal{L}_0[\phi_s] \quad (2.23)$$

e

$$V[\phi_s] = -\frac{1}{2} \mu^2 \phi_s^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_s^4 \quad (2.24).$$

A correspondente energia livre, que obtemos de (2.16), vale

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\beta V} \frac{S[\phi_s]}{\hbar} + \frac{1}{2\beta V} \text{Tr} \ln O \quad (2.25),$$

onde

$$O = -\partial^2 + V''[\phi_s] = -\partial^2 - \mu^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_s^2 \quad (2.26).$$

Podemos remanejar a expressão (2.25) e, para isto, observemos que, formalmente

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln O &= \text{Tr} \ln (-\partial^2 - \mu^2 + \lambda \phi_s^2 / 2) = \\ &= \text{Tr} \ln \left[\left(1 + \frac{\lambda \phi_s^2 / 2}{-\partial^2 - \mu^2} \right) (-\partial^2 - \mu^2) \right] = \\ &= \text{Tr} \ln (-\partial^2 - \mu^2) + \text{Tr} \ln \left(1 + \frac{\lambda \phi_s^2 / 2}{-\partial^2 - \mu^2} \right) \end{aligned} \quad (2.27).$$

Além disto, como o logaritmo admite a expansão

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad (2.28),$$

podemos escrever (2.27) sob a forma

$$\text{Tr} \ln O = \text{Tr} \ln(-\partial^2 - \mu^2) + \text{Tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[\left(\frac{1}{-\partial^2 - \mu^2} \right) \left(\frac{\lambda \phi_s^2}{2} \right) \right]^n \quad (2.29).$$

Antes de levarmos (2.29) em (2.25) podemos modificá-la um pouco mais, fixando a atenção no segundo termo do seu segundo membro. Resumidamente, vamos defini-lo por

$$B \equiv \sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{Tr} \left[\left(\frac{1}{-\partial^2 - \mu^2} \right) \frac{\lambda \phi_s^2}{2} \right]^n \quad (2.30).$$

Iremos manipular, separadamente, os dois primeiros termos da expansão em (2.30). Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{(-1)^2}{1} \text{Tr} \left[\left(\frac{1}{-\partial^2 - \mu^2} \right) \frac{\lambda \phi_s^2}{2} \right] = \\ &= \frac{\lambda}{2} \int d^4x \langle x | \frac{1}{-\partial^2 - \mu^2} \phi_s^2 | x \rangle \end{aligned} \quad (2.31).$$

Reescreveremos (2.31) usando as propriedades

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} |p\rangle \langle p| &= 1 & \int d^4x |x\rangle \langle x| &= 1 \\ \langle p|x\rangle &= e^{-ipx} & \langle p|p'\rangle &= (2\pi)^4 \delta^4(p-p') \\ \langle x|x'\rangle &= \delta^4(x-x') & \tilde{f}(p) &= \int d^4x e^{-ipx} f(x) \end{aligned} \quad (2.32).$$

Obtemos, então,

$$B_1 = \frac{\lambda}{2} \int d^4x \langle x | \frac{1}{-\partial^2 - \mu^2} | x' \rangle \langle x' | \phi_s^2 | x \rangle d^4x'$$

Notemos que $\langle x | (-\partial^2 - \mu^2)^{-1} | x' \rangle = \Delta(x-x')$ é o propagador do campo ϕ entre x e x' , e que $\langle x' | \phi_s^2 | x \rangle = \phi_s^2(x) \delta^4(x-x')$.

Isto implica

$$B_1 = \frac{\lambda}{2} \int d^4x d^4x' \Delta(x-x') \phi_s^2(x) \delta^4(x-x')$$

Usando a transformada de Fourier do propagador,

$$\Delta(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-x')} \tilde{\Delta}(p) \quad (2.33),$$

com

$$\tilde{\Delta}(p) = \frac{1}{p^2 - \mu^2}$$

obtemos

$$B_1 = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p) e^{-ip(x-x')} \phi_s^2(x) \delta^4(x-x') d^4x d^4x'$$

ou

$$B_1 = \left\{ \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p) \right\} \int \phi_s^2(x) d^4x \quad (2.34).$$

Seguindo as regras de Feynman para esta teoria (veja apêndice E), observamos que o termo entre chaves em (2.34) corresponde exatamente ao gráfico

$$\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - \mu^2} \equiv \bigcirc \quad (2.35)$$

ou

$$B_1 = \underline{\bigcirc} \quad (2.36)$$

onde as pernas externas representam formalmente os campos ϕ_s .

Manipulemos, agora o segundo termo da expansão (2.30), dado por

$$\begin{aligned} B_2 &= -\frac{1}{2} T_n \left[\left(\frac{1}{-\partial^2 - \mu^2} \right) \frac{\lambda \phi_s^2}{2} \right]^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4 x \langle x | \left(\frac{1}{-\partial^2 - \mu^2} \frac{\lambda \phi_s^2}{2} \right)^2 | x \rangle \end{aligned}$$

Usando as propriedades (2.32) obtemos

$$\begin{aligned} B_2 &= -\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y d^4 y' d^4 z \left[\langle x | \frac{1}{-\partial^2 - \mu^2} | y \rangle \cdot \langle y | \frac{\lambda \phi_s^2}{2} | y' \rangle \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \langle y' | \frac{1}{-\partial^2 - \mu^2} | z \rangle \langle z | \frac{\lambda \phi_s^2}{2} | x \rangle \right] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Seguindo o mesmo procedimento que levou a (2.34), temos

$$\begin{aligned} B_2 &= -\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y d^4 y' d^4 z \left[\Delta(x-y) \frac{\lambda}{2} \phi_s^2(y') \delta^4(y-y') \cdot \right. \\ &\quad \left. \Delta(y'-z) \frac{\lambda}{2} \phi_s^2(z) \delta^4(z-x) \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

Integrando em y' e z , obtemos

$$B_2 = -\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y \Delta(x-y) \frac{\lambda}{2} \phi_s^2(y) \Delta(y-x) \frac{\lambda}{2} \phi_s^2(x) \quad (2.39)$$

Esta expressão pode ser modificada se usarmos a transformada de Fourier de Δ , dada por (2.33). Ou seja:

$$B_2 = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \frac{\lambda^4}{4} \phi_s^2(y) \phi_s^2(x) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \tilde{\Delta}(p) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(y-x)} \tilde{\Delta}(k) \quad (2.40).$$

Notemos que (2.40) admite a transformação $(p, k) \rightarrow (q = p - k, k)$, cujo Jacobiano é igual a um. Com ela, (2.40) assume a forma

$$B_2 = \int d^4x d^4y \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iq(y-x)} \left[-\frac{\lambda^2}{8} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(q+k) \tilde{\Delta}(k) \right] \phi_s^2(y) \phi_s^2(x) \quad (2.41).$$

O termo dentro do colchete em (2.41) admite a forma gráfica

$$-\frac{\lambda^2}{8} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(q+k) \tilde{\Delta}(k) \equiv \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (2.42).$$

Como estamos trabalhando no limite de altas temperaturas, podemos aproximar o gráfico (2.42) pelo seu valor a momento externo nulo [3] ($q = 0$). Ou seja, faremos

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \sim \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \frac{\lambda^2}{-8} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}^2(k)$$

Este resultado faz com que (2.41) assumam a forma

$$B_2 = -\frac{1}{8} \int d^4x d^4y \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iq(y-x)} \lambda^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}^2(k) \phi_s^2(x) \phi_s^2(y) \quad (2.43).$$

Como

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iq(x-y)} = \delta^4(x-y) \quad (2.44).$$

resulta

$$B_2 = -\frac{\lambda^2}{8} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{k^2 - \mu^2} \right)^2 \int d^4 x [\phi_s^2(x)]^2 = \quad (2.45)$$

$$= \text{---} \bigcirc \text{---} \int d^4 x [\phi_s^2(x)]^2 \quad (2.46).$$

Graficamente podemos representar

$$B_2 = \text{---} \bigcirc \text{---} \quad (2.47).$$

onde as pernas externas novamente correspondem formalmente aos campos ϕ_s .

Os resultados (2.36) e (2.47) que encontramos para os dois primeiros termos de (2.30) podemos obter semelhantemente para os termos seguintes dessa expansão. Formalmente, então, escrevemos

$$B = \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \quad (2.48).$$

Levando este resultado a (2.29) obtemos uma expressão para $\text{Tr}(\ln O)$ que, substituída em (2.25), implica a seguinte energia livre da solução

$$\mathcal{F} = \frac{S[\phi_s]}{\beta V \hbar} + \frac{1}{2\beta V} \text{Tr} \ln (-\partial^2 - \mu^2) + \frac{1}{2\beta V} B \quad (2.49),$$

com B dado por (2.48).

Notemos que a expansão semi-clássica utilizada

resultou na energia livre expandida até "1-loop" [do inglês "loop":volta, laço ; 1-loop significa uma integral em cada gráfico de (2.48), no espaço dos momentos]. No limite de altas temperaturas, porém, há termos nesta expansão que contribuem mais do que os outros. Procuraremos determinar os termos relevantes com o seguinte procedimento.

Observemos que a dependência no momento dos gráficos de (2.48) pode ser determinada pela regra:

- cada loop contribui com p^4
 - cada propagador contribui com p^{-2} .
- (2.50)

Desta forma, o primeiro termo depende de p^2 , o segundo, de p^0 , o terceiro de p^2 , etc.

Se fazemos a mudança de variável $p \rightarrow p' = \beta p \rightarrow p = T p'$, obtemos que o primeiro termo de (2.48) é proporcional a T^2 o segundo a T^0 , o terceiro a T^2 , etc., de modo que, quando T é alta, o primeiro termo irá predominar sobre os demais.

Portanto, no limite de altas temperaturas podemos aproximar β , em (2.49), por β_1 , dado por (2.34). Isto implica, de (2.49), a energia livre

$$\mathcal{F} \sim \frac{S[\phi_s]}{\beta \hbar V} + \frac{1}{2\beta V} \text{Tr} \ln (-\partial^2 - \mu^2) + \frac{1}{2\beta V} \left\{ \frac{\lambda}{2\beta} \right. \\ \left. \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\left(\frac{2\pi k}{\beta}\right)^2 + \vec{p}^2 - \mu^2} \int \phi_s^2(x) d^4 x \right\} \quad (2.51).$$

Explicitamos aqui a integral em p no espaço euclidiano para podermos usar a fórmula

$$\frac{1}{\beta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{2\pi k}{\beta}\right)^2 + a^2} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{a(e^{\beta a} - 1)} \quad (2.52).$$

Com ela, o termo entre chaves de (2.51), que é o próprio B_1 , assume a forma

$$B_1 = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^2 - \mu^2}} + \frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2 - \mu^2}} [\exp(\beta\sqrt{\vec{p}^2 - \mu^2} - 1)]^{-1} \right\} \phi_s^2(x) d^4x \quad (2.53).$$

Prosseguiremos o cálculo de (2.51) resolvendo as integrais em \vec{p} . Com este fim, observemos que, no limite de altas temperaturas, $\beta\mu \ll 1$. Isto permite que aproximemos (2.53) por

$$\begin{aligned} B_1 &\sim \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2|\vec{p}|} + \frac{1}{|\vec{p}|(e^{\beta|\vec{p}|} - 1)} \right\} \int \phi_s^2(x) d^4x = \\ &= \frac{\lambda}{2(2\pi)^3} \left\{ \int_0^\infty 2\pi |\vec{p}| d|\vec{p}| + \int_0^\infty \frac{4\pi |\vec{p}|}{e^{\beta|\vec{p}|} - 1} d|\vec{p}| \right\} \int \phi_s^2(x) d^4x \end{aligned} \quad (2.54).$$

No cálculo acima usamos

$$\int d^3 \vec{p} = 4\pi \int_0^\infty |\vec{p}| d|\vec{p}| \quad (2.55).$$

A primeira integral dentro das chaves em (2.54) dá um termo divergente mas que podemos suprimir, pois ao renormalizarmos os gráficos de (2.48) adicionamos os termos (ou melhor, "contratermos") necessários para a eliminação desse tipo de divergência. (2.54) resulta, então, (chamemos $\beta|\vec{p}|$ de u) em

$$B_1 = \frac{\lambda}{2(2\pi)^3} \frac{4\pi}{\beta^2} \int_0^\infty \frac{u du}{e^u - 1} \int \phi_s^2(x) d^4x \quad (2.56).$$

Como

$$\int_0^{\infty} \frac{u du}{e^u - 1} = \frac{\pi^2}{6} \quad (2.57).$$

obtemos

$$B_1 = \frac{\lambda}{24\beta^2} \int \phi_s^2(x) d^4x \quad (2.58).$$

Portanto, usando a aproximação semi-clássica e no limite de altas temperaturas, obtemos a expressão que procurávamos para a energia livre de Gibbs da solução ϕ_s da teoria $\lambda\phi^4$:

$$\mathcal{F} = \frac{S[\phi_s]}{\beta\hbar V} + \frac{1}{2\beta V} T_h \ln(-\partial^2 - \mu^2) + \frac{1}{2\beta V} \frac{\lambda}{4!} T^2 \int \phi_s^2(x) d^4x \quad (2.59).$$

No próximo capítulo retornaremos a este resultado, considerando o caso específico do soliton (2.21).

O fato de termos efetuado cálculos para um campo escalar não impede a generalização quase direta para teorias com vários campos diferentes.

É interessante percebermos que nesta aproximação semi-clássica usamos ϕ_c como uma solução **global** clássica, em torno da qual fazemos correções quânticas em ordem mais baixa [eq. (2.9)]. Este ponto é fundamentalmente distinto do que acontece em teoria de perturbação usual, onde o problema é abordado a partir da solução do respectivo caso **livre**.

Com relação às soluções clássicas, notemos ainda o

seguinte. Fazendo, em (2.7), a mudança de variável $\tau \rightarrow \hbar \beta \tau$, encontramos

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\beta \int_0^1 d\tau \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{2(\hbar\beta)^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + V[\phi] \right] \right\} \quad (2.60).$$

No limite em que $\beta \rightarrow 0$ (**altas temperaturas**), vemos que as configurações de campo relevantes são aquelas que **não dependem do tempo euclidiano, τ** . Ou seja, são "estáticas"[4].

Como observação final a respeito do método semi-clássico, destacamos as duas exigências importantes:

- a) em geral, tem que existir um parâmetro de acoplamento (g) não-linear apropriado que seja **pequeno**;
- b) deve haver o conhecimento de uma ou mais soluções clássicas não-triviais. Ou seja, para o sistema em estudo, soluções clássicas localizadas, não-singulares, têm que estar disponíveis em forma analítica exata (ou, pelo menos, em boa aproximação), junto com suas características de estabilidade.

Nas duas próximas seções veremos se a QCD atende a estes requisitos.

2.2 - A Questão do Acoplamento

Um dos aspectos mais interessantes das interações fortes é que elas se dividem em duas regiões: uma de energias relativamente baixas, com ressonâncias e interações complicadas, e outra de altas energias, para a qual as curvas experimentais exibem um comportamento suave e onde desaparecem as ressonâncias.

A chave para se compreender esse aparente paradoxo reside na propriedade de **liberdade assintótica**[5], que só existe em teorias de gauge não-abelianas. Nesse contexto ela significa que a constante de acoplamento varia com a temperatura tornando-se (através de argumentos do grupo de renormalização) um "acoplamento efetivo". No limite de altas temperaturas, essa dependência é da forma[6]

$$\frac{g^2(T)}{4\pi} = \frac{1}{1 + b_0(\ln T)/S_T} \quad (2.61),$$

onde $b_0 = \left(\frac{11}{2} - \frac{N_F}{3}\right) \frac{1}{\pi}$ e S_T é um parâmetro associado ao ponto de renormalização. Vemos, assim, que para T suficientemente grande, $g^2(T)$ torna-se desprezivelmente pequeno.

Como estamos interessados em $g^2(T) \ll 1$ a fim de aplicarmos o método semi-clássico, necessitamos trabalhar em uma região onde $T \gg S_T \exp\left[\frac{(4\pi-1)\pi}{(11/2 - N_F/3)}\right]$. Como nossos cálculos serão efetuados no limite de altas temperaturas, podemos tomar este limite tal que T respeite a desigualdade anterior. Foi, inclusive, pensando dessa forma que, depois da descoberta da liberdade assintótica, aumentou muito o interesse na termodinâmica da teoria de Yang-Mills. Na verdade, antes desta descoberta não havia razão para esperar que se pudessem prever propriedades da matéria fortemente interagente a densidades $\rho \gtrsim 10^{15} \text{ g/cm}^3$ ou a temperaturas $T \gtrsim 150 \text{ MeV}$. Depois dela, contudo, muitos trabalhos foram feitos usando-se teoria de perturbação[7,8], chegando-se até a crer que a matéria superdensa, a temperaturas muito maiores que 100 Mev, comportava-se como um gás fracamente não-ideal, e que se poderiam facilmente

obter todas as propriedades deste gás usando esse método.

Todavia, em um artigo de 1980, Lindel[9] (e, independentemente Gross et.al.[7]) apontou restrições ao uso da teoria de perturbação na teoria de Yang-Mills não-massiva, basicamente devido a problemas infravermelhos. A conclusão foi que apenas se a teoria admitisse um parâmetro de corte ("cutoff") infravermelho, $m(T)$, da ordem de $Tg^2(T)$ (no limite de altas temperaturas), e que se poderia obter algum tipo de resultado - ainda assim, parcial - com o uso da teoria de perturbação (*). Esse cutoff pode ser entendido como uma massa efetiva dos campos não-abelianos "magnéticos" $H_i^a = \int_{ijk} (\partial_j A_k^a - \partial_k A_j^a)$.

O cálculo de $m(T)$ é complicado e, infelizmente, ainda não temos um valor à mão para sabermos exatamente nossas limitações. Essa indefinição, contudo, permite que assumamos o fato de que a termodinâmica do gás de Yang-Mills contém uma massa "magnética" $m(T) \sim Tg^2(T)$, de tal maneira que possamos efetuar cálculos consistentes em ordem mais baixa da teoria de perturbação a altas temperaturas e tirar algumas conclusões.

Como último ponto, notemos que o fato de termos que nos restringir ao limite de altas temperaturas reflete-se na escolha das soluções clássicas a serem usadas na aproximação semi-clássica. Como vimos no final da seção anterior, quando $\beta \rightarrow 0$ as configurações que mais contribuem são as estáticas. Portanto, dentre as possíveis soluções clássicas da teoria de Yang-Mills, voltaremos nossa atenção para aquelas que não dependem de γ .

(*) O potencial termodinâmico (que é o correspondente, em ensembles gran-canônicos, da função de partição), por exemplo, pode ser obtido até a ordem $g^6 T^4$.

2.3 - A Questão da Solução Clássica

A lagrangiana original da cromodinâmica quântica, sem os termos de fixação do gauge [eqs. (1.33)], nos leva às equações de movimento

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu^a} - \partial_\nu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu A_\mu^a} = \partial_\nu F_{\nu\mu}^a + g f^{abc} A_\nu^b F_{\nu\mu}^c + \bar{\psi} g \gamma_\mu \psi = 0 \quad (2.62)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \psi} = \bar{\psi} (g \not{A} - m) - 2i \not{\partial} \bar{\psi} = 0 \quad (2.63).$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \bar{\psi}} = \psi (g \not{A} - m) + 2i \not{\partial} \psi = 0$$

Os dois primeiros termos do primeiro membro de (2.62) correspondem às equações de movimento da lagrangiana euclidiana de Yang-Mills,

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 \quad (2.64).$$

Vemos que as equações (2.62)-(2.63) são satisfeitas pelos campos clássicos

$$A_\mu^a = \text{soluções das equações de movimento de Yang-Mills pura} \quad (2.65).$$

$$\psi_c = \bar{\psi}_c = 0$$

Diante de (2.65), encontrar soluções clássicas para as equações de movimento da QCD resume-se a obtermos as

soluções das equações de Yang-Mills pura. Apesar do grupo de gauge da QCD ser $SU(3)$, podemos trabalhar com mais simplicidade no subgrupo $SU(2)$ tomando

$$A_{\mu}^a \begin{cases} \neq 0 & , a = 1, 2, 3 \\ = 0 & , a = 4, 5, \dots, 8 \end{cases} \quad (2.66).$$

Como vimos na seção 2.1, porém, tais soluções têm que ser localizadas, não-singulares e ter forma analítica exata (ou bem próxima disto), acompanhadas das condições de estabilidade. Seguindo uma classificação feita por Gross et.al.[7], descreveremos abaixo um conjunto de três soluções possíveis. Elas são campos de gauge suaves, peribdicos, e de energia finita. A classificação topológica adotada baseia-se em três parâmetros ($\{\lambda^{\infty}\}$, a carga magnética q_{α} e o índice de Pontryagin, ν), cujo detalhamento não é relevante para o nosso estudo; o leitor que desejar maiores informações sobre eles pode obtê-las na ref.[7]. Estas três quantidades topológicas são invariantes por qualquer deformação local contínua do campo de gauge.

Com base nesta classificação, podemos distinguir os seguintes tipos de soluções:

A) Campos de Vácuo:

As soluções clássicas mais simples são aquelas para as quais $F_{\mu\nu} = 0$. A temperatura finita, porém, elas não são equivalentes de gauge. Na verdade, os parâmetros $\{\lambda^{\infty}\}$ distinguem campos de vácuo não-equivalentes. Por exemplo, se σ for uma matriz constante, diagonal e de traço nulo, podemos ter

$$A_i^a(\vec{x}, r) = 0 \quad , \quad \beta A_4^a(\vec{x}, r) = \sigma \quad (2.67),$$

solução esta caracterizada por $\nu = q_\alpha = 0$ e $\lambda^\infty = e^r$.

B) Instantons Peribdicos:

Usando a solução proposta por 't Hooft[10]

$$A_\mu = \Pi \bar{\eta}_{\mu\nu}^a \left(\frac{\gamma^a}{2i} \partial_\nu \right) \Pi^{-1} \quad (2.68),$$

podemos obter o instanton peribdico[10]

$$\Pi(\vec{x}, r) = 1 + \frac{\pi \rho^2}{\beta r} \frac{\text{sh } \frac{2\pi r}{\beta}}{\beta} / \left(\text{ch } \frac{2\pi r}{\beta} - \cos \frac{2\pi r}{\beta} \right) \quad (2.69),$$

onde $r \equiv |\vec{x}|$ e ρ define o tamanho do instanton. E caracterizado por $\lambda^\infty = 1$, $q_\alpha = 0$ e $\nu \neq 0$, possuindo ação classica igual a $8\pi^2/g^2$.

c) Monopolos Magnéticos:

São soluções estáticas que, para terem energia finita, respeitam[11]

$$\bar{A}_\mu^a \bar{A}_\mu^a = C^2 \quad (2.70),$$

onde

$$\bar{A}_\mu^a = \lim_{r \rightarrow \infty} A_\mu^a(r) \quad (2.71).$$

Além disso, para serem topologicamente não-triviais, é necessário que $A_\mu^a(r)$ seja tal que não admita ser

deformado continuamente para $A_p^a(r) = \text{constante}$.

Dadas estas condições, podemos encontrar uma forma analítica para o monopolo A_p^a . Contudo, como essa solução é de nosso particular interesse por ser **estática**, dedicaremos a próxima seção para descrevê-la com mais detalhes.

2.4 - O Monopolo

2.4.a - O Modelo de 't Hooft

Em 1974, 'tHooft[12] mostrou que em todas as teorias de gauge onde o grupo eletromagnético $U(1)$ é tido como subgrupo de outro maior com suporte compacto [$SU(2)$, $SU(3)$, etc.], monopolos magnéticos podem ser criados como soluções regulares das equações de movimento. Como exemplo ele considerou o modelo (no espaço de Minkowski)

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{2} (D_\mu \phi^a) D^\mu \phi^a + V[\phi] \quad (2.72)$$

$$V[\phi] = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^a \phi^a - \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi^a)^2 \quad (2.73),$$

com $F_{\mu\nu}^a$ dado por (1.14) e $D_\mu = \partial_\mu - ig \vec{L} \cdot \vec{A}$ [\vec{L} são os geradores do grupo que, no caso, é $SU(2)$]. A_p^a e ϕ^a são tripletos de campo vetorial e escalar (Higgs), respectivamente, e $\mu^2 > 0$.

As soluções por ele apresentadas são independentes do tempo e esfericamente simétricas, na forma

$$\phi^a(t, \vec{x}) = \phi(r) r^a \quad (2.74)$$

$$A_{\mu}^a(t, \vec{x}) = \epsilon_{\mu ab} W(r) r^b \quad (2.75),$$

onde

$$(r^a)^2 = r^2, \quad r^a = (x, y, z) \quad (2.76).$$

Através da definição, invariante de gauge, do tensor

$$F_{\mu\nu}^{ab} = \frac{\phi^a}{|\phi|} F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{g|\phi|^3} \epsilon_{abc} \phi_a (D_{\mu}\phi_b) D_{\nu}\phi_c,$$

't Hooft encontrou um campo magnético

$$B_a = \frac{r_a}{gr^3}$$

cujo fluxo total vale $4\pi/g$. Ou seja, a solução apresenta-se, de fato, como um monopolo magnético.

Em 1975, Julia e Zee[13] apresentaram um tipo de solução para o modelo (2.72) que possuía tanto carga magnética quanto elétrica: o díon. A solução obtida neste caso foi

$$\begin{aligned} A_i^a(r) &= \epsilon^{abi} r^b \left[\frac{k(r)-1}{gr^2} \right] \\ A_0^a(r) &= r^a J(r) / gr^2 \\ \phi^a(r) &= r^a H(r) / gr^2 \end{aligned} \quad (2.77),$$

e satisfaz $\partial_i A^i = 0$. Eles mesmos observaram que esta solução

equivale à de 't Hooft, (2.74)-(2.76), ao se fazer $J(r)=0$. Notemos como a dependência espacial de $A_0^a(r)$ tem a mesma forma que a de ϕ^a . Como $F_{i0}^a = (D_i A_0)^a$, vemos que os A_0 são praticamente um outro isotripleto de Higgs (se não considerarmos o potencial $V[\phi]$ em (2.72)), a menos de sinais opostos entre $(F_{0i})^2$ e $(D_i \phi)^2$ na lagrangiana.

Enquanto o monopolo de 't Hooft é estável por argumentos topológicos, um estudo mais detalhado da estabilidade do díon (2.77) só é possível diante de sua expressão analítica.

Coube a Prasad e Sommerfield[14] apresentar uma primeira forma analítica para o díon, impondo a condição $\lambda \rightarrow 0$ com $C \equiv \mu g / \sqrt{\lambda}$ fixo. Isto permite satisfazer a condição $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi^2 = \text{cte}$.

Tomando as equações de movimento com $\lambda=0$, encontraram soluções com contornos regulares dadas por

$$\begin{aligned} K(r) &= Cr / \text{sh} Cr \\ J(r) &= 0 \\ H(r) &= Cr \text{eth} Cr - 1 \end{aligned} \quad (2.78),$$

que é uma solução exata do tipo (2.74)-(2.76) para o modelo, com $\lambda = \mu^2 = 0$ (ou seja, sem o potencial de Higgs).

Em sua forma mais geral, os valores de K , J e H para (2.77) são

$$\begin{aligned} K(r) &= Cr / \text{sh} Cr \\ J(r) &= \text{sh} \gamma (Cr \text{eth} Cr - 1) \\ H(r) &= \text{ch} \gamma (Cr \text{eth} Cr - 1) \end{aligned} \quad (2.79),$$

onde γ é uma constante arbitrária [$\gamma=0$ leva às equações (2.78)].

A massa associada a esta solução é dada por

$$M = \int d^3\vec{x} T^{00}(x) = \frac{4\pi C}{g^2} \kappa^2 \gamma \quad (2.80),$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor de momento-energia

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\sigma a} F_{\sigma}^{\nu a} + (D^{\mu}\phi^a) D^{\nu}\phi^a + g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Como C é o único parâmetro de massa da teoria, é ele quem impõe a escala de comprimento. Com isto, soluções com distintos valores de $C \neq 0$ são idênticas com respeito à escala adequada e podemos, então, considerá-las estáveis (pelo menos sob mudanças em C).

2.4.b - O Modelo de 't Hooft e a Teoria de Yang-Mills

Vejamos, agora, como o modelo de 't Hooft, dado pela lagrangiana (2.72), se conecta com a teoria de Yang-Mills em $SU(2)$ no espaço euclidiano, dada por

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 \quad (2.81).$$

Se definirmos o tensor de campo **dual**

$${}^*F_{\mu\nu}^a \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau}^a \quad (2.82)$$

($\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$ é um pseudotensor unitário, completamente anti-simétrico

em seus índices e $\epsilon_{1234} = 1$), obteremos que as equações de campo de Yang-Mills no espaço euclidiano são resolvidas por quaisquer campos de gauge que satisfaçam

$$F_{\mu\nu}^a = {}^*F_{\mu\nu}^a \quad (2.83).$$

Podemos escrever esta condição de auto-dualidade também sob a forma

$$F_{ij}^a = -\epsilon_{ijk} F_{k4}^a \quad (2.84).$$

Se supusermos que todos os campos A_μ do modelo de Yang-Mills são **independentes do tempo euclidiano**, obteremos

$$F_{k4}^a = \partial_k A_4 + g \epsilon_{abc} A_k^b A_4^c,$$

de modo que (2.84) se escreve

$$F_{ij}^a = -\epsilon_{ijk} \mathcal{D}_k A_4^a \quad (2.85).$$

Voltemo-nos agora para o modelo (2.72) com $\mu^2 = \lambda = 0$ (cujas soluções analíticas, como vimos, admitem a forma (2.78)). Neste caso, as equações de campo são resolvidas pelos campos estáticos que satisfazem[15]

$$F_{ij}^a = -\epsilon_{ijk} \mathcal{D}_k \phi^a \quad (2.86),$$

com $\mathbf{A}_0 = 0$ (Bogomolny[15] mostrou que a solução (2.78) satisfaz

esta condição).

Notemos que (2.85) é formalmente idêntica a (2.86), se substituirmos A_4^a por ϕ^a . Ou seja, qualquer solução estática do modelo de Yang-Mills euclidiano é solução do modelo minkowskiano de 'tHooft sem o potencial de Higgs, com A_4^a reinterpretado como campo de Higgs.

Desse modo, substituindo (2.78) em (2.77) e reinterpretando ϕ^a como A_4^a , chegamos a solução tipo monopolo magnético de Prasad e Sommerfield para a teoria de Yang-Mills em SU(2), no espaço euclidiano:

$$A_i^a(r) = \epsilon^{aib} \frac{r^b}{gr^2} \left(1 - \frac{Cr}{\sinh Cr} \right) \quad (2.87)$$

$$A_4^a(r) = \frac{r^a}{gr^2} (Cr \coth Cr - 1) \quad (2.88).$$

A ação relativa à lagrangiana de Yang-Mills no espaço euclidiano com campos estáticos é dada por

$$\frac{S}{\beta} = \int d^3\vec{x} \mathcal{L}_{YM} = \int d^3\vec{x} \frac{1}{4} (F_{ij}^a + \epsilon_{ijk} \partial_k A_4^a)^2 - \frac{4\pi N}{g} |A_4|_0 \quad (2.89),$$

onde

$$N = \frac{1}{8\pi} \int d^3\vec{x} \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} (\partial_i \hat{A}_4^a) (\partial_j \hat{A}_4^b) \partial_k \hat{A}_4^c \quad (2.90)$$

é inteiro e igual ao número quântico topológico. Aqui definimos

$$\hat{A}_4^a = \frac{A_4^a}{|A_4|} \quad \text{e} \quad |A_4|_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} |A_4| = \text{cte}.$$

De (2.87) concluímos que a ação euclidiana tem um limite inferior $S \geq 4\pi\beta |N| |A_4|_0 / g$.

Para o monopolo de Prasad e Sommerfield, que satisfaz (2.85), resulta $N = 1$ e $|A_4|_0 = C/g$, de modo que sua ação é mínima e vale

$$S = 4\pi C/g \quad (2.91).$$

Podemos mostrar[16] que o monopolo de Prasad e Sommerfield é uma **transformação de gauge do instanton periódico** (2.69) no limite $\rho \rightarrow \infty$ [que simplesmente elimina o 1 do segundo membro de (2.69)].

Segundo a classificação de Gross et.al., os parâmetros que caracterizam este monopolo são $\{\lambda^\alpha\} = \{e^{i\beta C/2}, e^{-i\beta C/2}\}$, $q_\alpha = \{+1, -1\}$ e $\nu = \beta C/2\pi$.

2.5 - Expansão para a QCD

Apresentaremos nesta seção a expansão semi-clássica da lagrangiana euclidiana da QCD, dada por (1.32), em torno da solução clássica das equações de movimento. Ou, equivalentemente, expandiremos

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \mathcal{L}_{QCD} = \\ &= \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \bar{\Psi} (\not{D} - im) \Psi + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 - \right. \\ &\quad \left. - (\partial_\mu \bar{C}_a) \partial_\mu C_a + g f_{abc} (\partial_\mu \bar{C}_a) C_b A_\mu^c \right] \end{aligned} \quad (2.92).$$

Como em (2.6), faremos

$$\begin{aligned}
 A_\mu^a &\rightarrow \mathcal{A}_\mu^a + a_\mu^a \\
 \psi &\rightarrow \psi_c + \eta \\
 \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}_c + \bar{\eta} \\
 c &\rightarrow b + \varepsilon \\
 \bar{c} &\rightarrow \bar{b} + \bar{\varepsilon}
 \end{aligned}
 \tag{2.93}$$

onde $A, \psi_c, \bar{\psi}_c, b$ e \bar{b} representam os campos clássicos e $a_\mu, \eta, \bar{\eta}, \varepsilon$ e $\bar{\varepsilon}$ representam as flutuações "pequenas".

De (2.65)-(2.66) temos os valores clássicos dos campos, aos quais adicionamos $b = \bar{b} = 0$. Já sabemos que, para o glúon, usaremos o campo do monopolo (2.87)-(2.88).

Substituindo (2.93) em (2.92) e fazendo a expansão(*) até a ordem mais baixa (quadrática nas flutuações, como em (2.9)), encontramos

$$\begin{aligned}
 S = S_{\text{YM}}[A(x)] + \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} a_\mu^k \left[g^2 (f_{akb} f_{ajl} (A_\rho^b A_\rho^l \delta_{\mu\nu} - A_\nu^b A_\mu^l) + \right. \right. \\
 + f_{akl} f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c) + g f_{akl} (2(\delta_{\mu\nu} A_\rho^a \partial_\rho - A_\nu^a \partial_\mu) + \\
 + \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \delta^{lk} (\partial_\nu \partial_\mu (1 - 1/\alpha) - \delta_{\mu\nu} \partial^2)) A_\nu^k - \\
 \left. \left. - \bar{\eta} (\not{D}_{cc} - im) \eta - \bar{\varepsilon}_a [\delta_{ab} (-\partial^2) + g f_{abc} A_\mu^c \partial_\mu] \varepsilon_b \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.94}$$

com

$$\not{D}_{cc} = \not{\partial}_\mu (\partial_\mu - ig \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a)$$

[Para chegarmos a esta expressão usamos o fato de que a solução

(*)Veja um exemplo de expansão no apêndice G.

classica \mathcal{A} respeita $\partial_\mu A_\mu^a = 0$, bem como o teorema da divergencia

$$\int d^4x (\partial_\mu \theta) \partial_\mu \theta = \int d^4x \partial_\mu (\theta \partial_\mu \theta) - \int d^4x \theta \partial_\mu \partial_\mu \theta \quad (2.95).$$

A primeira integral no segundo membro de (2.93) anula-se, considerando, como é usual, que os campos valem zero nos limites de integração.]

Referências do Capítulo Dois

- [1] K. Mahanthappa e J. Randa (editores), *Quantum Flavordynamics, Quantum Chromodynamics and Unified Theories*, Plenum, N.Y., 1979;
R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [2] Para revisão recente do assunto veja:
H. Satz, Bielefeld report BI-TP 85/01, 1985;
F. Karsh, UI preprint ILL-(TH)-86-#9, 1986;
B. Svetitsky, MIT preprint CTP#1374, 1986.
- [3] S. Weinberg, *Phys. Rev.* D9 (1974) 3357.
- [4] D. J. Gross, M. Perry e L. Yaffe, *Phys. Rev.* D25 (1982) 330.
- [5] H. D. Politzer, *Phys. Lett.* 30 (1973) 1346;
D. Gross e F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973) 1343.
- [6] T. P. Cheng, F. Eichten e L.-P. Li, *Phys. Rev.* D9 (1974) 2259;
B. L. Voronov e I. V. Tyutin, *Sov. J. Nucl. Phys.* 23 (1976) 664
- [7] D. J. Gross, R. D. Pisarski e L. G. Yaffe, *Rev. Mod. Phys.* 53 (1981) 43
- [8] J.C.Collins e M.J.Perry, *Phys.Rev.Lett.* 34 (1975) 1353;
M.B.Kislinger e P.D.Morley, *Phys.Rev.* D13 (1976) 2771;
B.A.Freedman e L.D.McLerran, *Phys.Rev.* D16 (1977) 1169;
V.Baluni, *Phys.Rev.* D17 (1978) 2092;
J.Kapusta, *Nucl.Phys.* B148 (1979) 461;
O.K.Kalashnikov e V.V. Klimov, *Phys.Lett.* 88B (1979) 328;
M.B.Kislinger e P.D.Morley, *Phys.Rept.* 51C (1979) 63;
E.V.Shuryak, *Phys.Rept.* 61C (1980) 71.
- [9] A.D.Linde, *Phys.Lett.* 96B (1980) 289
- [10] G. 't Hooft, *Phys.Rev.* D14 (1976) 3432 e D18 (1976) 2199(E);
B.Harrington e H.Shepard, *Phys.Rev.* D17 (1978) 2122.
- [11] Veja, por exemplo, M.P.Benjwal e D.C.Joshi, *Phys.Rev.* D36 (1987) 629
- [12] G. 't Hooft, *Nucl.Phys.* 79B (1974) 276.
- [13] B.Julia e A.Zee, *Phys.Rev.* D11 (1975) 2227.
- [14] M.K.Prasad e C.M.Sommerfield, *Phys.Rev.Lett.* 35 (1975) 760.
- [15] E.B.Bogomolny, *Sov.J.Nucl.Phys.* 24 (1976) 861.
- [16] P.Rossi, *Nucl.Phys.* B149 (1979) 170.

CAPITULO TRÊS

TRANSIÇÕES DE FASE

Apresentaremos, neste capítulo, o método que utilizaremos para o estudo de fases de teorias de campos. Nas aplicações anteriores deste método (veja as referências da Introdução), o fenômeno da quebra espontânea de simetria desempenhou um importante papel na interpretação dos resultados obtidos e, por isto, destinamos as duas primeiras seções para sua exposição. Na última seção apresentamos formalmente o método, cuja extensão à QCD será objeto do próximo capítulo.

3.1 - Quebra Espontânea de Simetria

Existem simetrias na natureza que, ao contrário do que ocorre com a carga elétrica, não são simetrias exatas da matriz S . É o caso do isospin, da estranheza, de $SU(3)$. É comum as imaginarmos como resultado de uma lagrangiana que tem uma parte exatamente simétrica e outra, de certa forma "pequena", que viola as simetrias. Por outro lado, a conservação parcial da corrente axial (PCAC) é um tipo de simetria que não é simetria do espectro físico mesmo que a lagrangiana seja exatamente simétrica. Obtemos este último tipo de simetria quando o vácuo físico não é invariante sob o grupo de simetria da lagrangiana, e normalmente o chamamos de **simetria espontaneamente quebrada**.

Ilustremos esta situação considerando um sistema composto por dois campos escalares cuja densidade de lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \varphi_1) \partial^\mu \varphi_1 + (\partial_\mu \varphi_2) \partial^\mu \varphi_2] - V[\varphi_1^2 + \varphi_2^2] \quad (3.1),$$

onde

$$V = \frac{1}{2} \mu^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{\lambda}{4} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 \quad (3.2).$$

É fácil mostrar que (3.1) é invariante sob o grupo de rotações $O(2)$:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.3).$$

Veamos se o vácuo obedece a esta simetria. Na teoria dos campos, o vácuo corresponde ao estado fundamental do sistema, isto é, aquele de menor energia. Como a energia deste sistema é dada pela densidade de hamiltoniana \mathcal{H}_0 , o vácuo implica:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \varphi_1}\right)_{\text{vácuo}} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \varphi_2}\right)_{\text{vácuo}} = 0 \quad (3.4),$$

com

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \varphi_1) \partial^\mu \varphi_1 + (\partial_\mu \varphi_2) \partial^\mu \varphi_2] + v[\varphi_1^2 + \varphi_2^2] \quad (3.5).$$

Ou seja, o vácuo será descrito pela configuração de campo satisfazendo

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi_1}\right)_{\varphi_{1v}} = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi_2}\right)_{\varphi_{2v}} = 0 \quad (3.6),$$

com

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi_1^2}\right)_{\varphi_{1v}} > 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi_2^2}\right)_{\varphi_{2v}} > 0 \quad (3.7)$$

(o que garante que φ_{1v} e φ_{2v} são mínimos).

Por cálculo direto, (3.6) implica:

$$\varphi_{1v} [\mu^2 + \lambda(\varphi_{1v}^2 + \varphi_{2v}^2)] = 0 \quad (3.8)$$

e

$$\varphi_{2v} [\mu^2 + \lambda(\varphi_{2v}^2 + \varphi_{1v}^2)] = 0 \quad (3.9).$$

Para que v tenha limite inferior, necessitamos

$\lambda > 0$. Deste modo, (3.8) e (3.9) implicam:

$$1) \text{ se } \mu^2 > 0, \quad \varphi_{1V} = \varphi_{2V} = 0 \quad (3.10)$$

$$11) \text{ se } \mu^2 < 0, \quad \varphi_{1V} = 0 \quad (\text{m\`a x i m o}) \text{ ou } \varphi_{1V}^2 + \varphi_2^2 = |\mu^2| / \lambda \quad (\text{m i n i m o}); \text{ e}$$

$$\varphi_{2V} = 0 \quad (\text{m\`a x i m o}) \text{ ou } \varphi_{2V}^2 + \varphi_1^2 = |\mu^2| / \lambda \quad (\text{m i n i m o}) \quad (3.11).$$

Graficamente estas situa\c{c}o'es podem ser ilustradas na seguinte forma:

1) $\mu^2 > 0$:

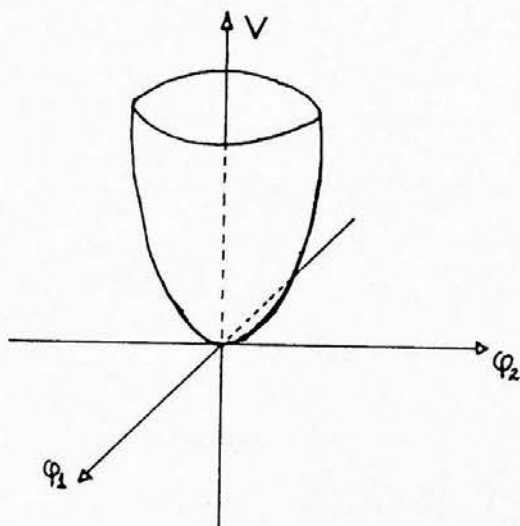


FIGURA 3.1 - Potencial para teoria sem quebra espont\u00e2nea de simetria

11) $\mu^2 < 0$:

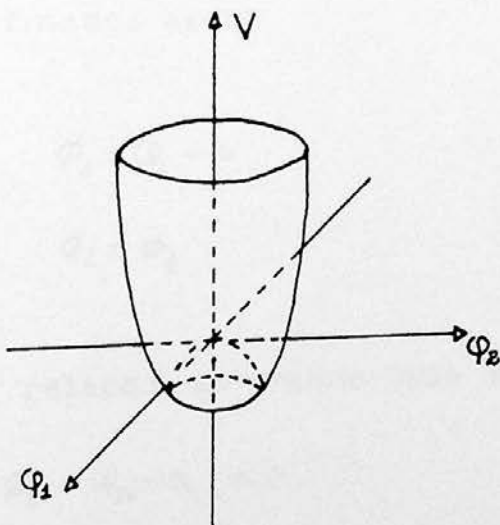


FIGURA 3.2 - Potencial para teoria com quebra espont\u00e2nea de simetria

Para o caso 1) não há quebra espontânea de simetria pois, usando (3.3), temos

$$\varphi'_{1v} = \cos \theta \cdot \varphi_{1v} + \sin \theta \cdot \varphi_{2v} = 0 = \varphi_{1v}$$

$$\varphi'_{2v} = -\sin \theta \cdot \varphi_{1v} + \cos \theta \cdot \varphi_{2v} = 0 = \varphi_{2v}$$

Ou seja, quando $\lambda > 0$ e $\mu^2 > 0$, o vácuo respeita a simetria da lagrangiana.

Para o caso 11), todavia, os estados de menor energia são os pontos do círculo $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = |\mu^2|/\lambda \equiv a$. Tomemos, por exemplo, o vácuo dado por

$$\varphi_{1v} = a \quad \varphi_{2v} = 0 \quad (3.12).$$

Por uma rotação (3.3), obtemos

$$\varphi'_{1v} = a \cdot \cos \theta \neq \varphi_{1v}$$

$$\varphi'_{2v} = -a \cdot \sin \theta \neq \varphi_{2v}$$

Definamos agora

$$\phi_1 = \varphi_1 - a \quad (3.13)$$

$$\phi_2 = \varphi_2 \quad (3.14).$$

Isto implica, com relação ao vácuo que escolhemos, (3.12),

$$\phi_{1v} = \varphi_{1v} - a = 0 \quad (3.15).$$

$$\phi_{2v} = \varphi_{2v} = 0$$

O fato de os valores esperados no vácuo dos campos ϕ_1 e ϕ_2 serem nulos permite que interpretemos ϕ_{1v} e ϕ_{2v} como campos físicos, além de podermos tomar os campos ϕ_1 e ϕ_2 como operadores e fazermos a segunda quantização.

Com a definição (3.13)-(3.14), (3.1) passa a ser dado por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [(\partial_\nu \phi_1)(\partial^\nu \phi_1) + (\partial_\nu \phi_2)(\partial^\nu \phi_2)] - |\mu^2| \phi_1^2 - \\
 & - \lambda a (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2
 \end{aligned} \tag{3.16},$$

o que nos permite associar aos campos ϕ_1 e ϕ_2 as massas

$$m_{\phi_1} = \sqrt{|\mu^2|} \qquad m_{\phi_2} = 0 \tag{3.17}.$$

Notemos que \mathcal{L} já não possui a simetria original.

O aparecimento do bóson não-massivo em (3.17) era previsível, pois pode-se mostrar[1] que se uma teoria possui uma simetria na lagrangiana que não é uma simetria do vácuo, então tem que haver bósons não-massivos na mesma (teorema de Goldstone).



3.2 - Mecanismo de Higgs^[2]

O teorema de Goldstone impediu, durante algum tempo, que considerássemos a quebra espontânea de simetria na teoria de partículas, já que ela implicaria a existência de bósons de Goldstone (partículas não-massivas de spin nulo), os quais não observamos.

Contudo, podemos obter exceções a esse teorema, se tomarmos lagrangianas com quebra espontânea de simetria que também possuam um certo tipo de **invariância local**. Isto faz com que os bósons de Goldstone desapareçam e os campos vetoriais tornem-se massivos, preservando os graus de liberdade (no sentido de partículas com polarizações fixas) da teoria.

Para entendermos melhor esta idéia, reescrevamos (3.1) em função de

$$\varphi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(x) + i \varphi_2(x)] \quad (3.18)$$

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(x) - i \varphi_2(x)] \quad (3.19).$$

Obtemos

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi) \partial^\mu \varphi - \mu^2 \varphi^* \varphi - \lambda (\varphi^* \varphi)^2 \quad (3.20).$$

Esta densidade de lagrangiana é invariante sob uma transformação global

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{i\alpha} \varphi(x) \quad (3.21).$$

Para fazermos (3.20) invariante sob uma transformação de gauge local

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{ig\theta(x)} \varphi(x) \quad (3.22),$$

devemos ter, de acordo com a seção 1.3.a,

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (\mathcal{D}_\mu \varphi) \mathcal{D}^\mu \varphi - \mu^2 \varphi^* \varphi - \lambda (\varphi^* \varphi)^2 \quad (3.23),$$

onde introduzimos

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad (3.24)$$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu(x) \quad (3.25)$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x) \quad (3.26).$$

Quando $\mu^2 > 0$, (3.23) nos descreve a eletrodinâmica escalar carregada; se $\mu^2 < 0$, precisamos rescalonar os campos a fim de escrevermos \mathcal{L}_0 em função daqueles que tenham valor esperado no vácuo igual a zero. Contudo, ao invés de modificarmos φ simplesmente por uma subtração de φ_v [como na eq. (3.13)], iremos parametrizá-lo exponencialmente, definindo novos campos reais σ, β da seguinte forma:

$$\varphi \equiv e^{i\sigma/v} \left(\frac{v+\beta}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v+\beta + i\sigma + \text{termos quadráticos e de ordens superiores} \right) \quad (3.27),$$

com

$$\varphi = \varphi_0 / \sqrt{2} \quad (3.28).$$

O campo σ associa-se com a simetria espontaneamente quebrada, $U(1)$. Na ausência do campo de gauge, A_μ , observamos que, ao reescrevermos (3.23) em termos de σ e ζ , o campo σ não tem massa. Porém, quando escrevemos essa equação em termos de A_μ , ζ e σ , obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \zeta) \partial^\mu \zeta + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} g^2 v^2 A_\mu A^\mu - \\ & - g v A_\mu \partial^\mu \sigma + \mu^2 \zeta^2 + \text{termos cúbicos e de ordem superiores} \end{aligned} \quad (3.29).$$

onde $v^2 = -\mu^2/\lambda$. O campo ζ tem massa $-\lambda\mu^2$, mas os campos A_μ e σ misturam-se de tal forma que se torna difícil interpretá-los de imediato. Para visualizarmos o espectro de partículas, lembremos que (3.23) é invariante por (3.22) e escolhamos a função de gauge como sendo $\theta(x) = \sigma(x)/v$. Obtemos, então, as seguintes leis de transformação:

$$\varphi \rightarrow \varphi' = e^{-i\sigma(x)/v} \varphi = (v + \zeta) / \sqrt{2} \quad (3.30)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{g v} \partial_\mu \sigma \quad (3.31).$$

Sob (3.30) e (3.31), \mathcal{L}_0 assume a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & -\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \zeta) \partial^\mu \zeta + \frac{1}{2} g^2 v^2 A'_\mu A'^\mu + g^2 A'^2_\mu \zeta (2v + \zeta) - \\ & - \frac{1}{2} \zeta^2 (3\lambda v^2 + \mu^2) - \lambda v \zeta^3 - \frac{1}{4} \lambda \zeta^4 \end{aligned} \quad (3.32).$$

Neste gauge não há termos acoplando as diferentes partículas, de modo que podemos obter o espectro "bare" (ou nu) pela observação dos termos quadráticos. Existe um méson-escalar, com massa $(3\lambda^2 v^2 + \mu^2)^{1/2}$, um vetor massivo A'_μ , de massa $g v$, e nenhuma partícula correspondente a σ (que desapareceu, foi "calibrado"). De (3.31) observamos que σ não é um campo físico não-massivo, mas é o responsável pela componente longitudinal do campo vetorial no novo gauge.

O número de graus de liberdade continua o mesmo que havia antes de redefinirmos os campos em (3.27). Inicialmente tínhamos dois campos escalares reais e um fóton não-massivo com duas polarizações possíveis. Para $\mu^2 > 0$, este é o conjunto correto de partículas. Quando $\mu^2 < 0$, vimos que a teoria descreve uma partícula escalar (um estado de helicidade) e uma partícula vetorial (3 estados de helicidade), mantendo, assim, o número total de graus de liberdade.

3.3 - Vácuo e Simetrias

No tratamento moderno, o vácuo de um sistema é definido como o **estado de menor energia** do mesmo, cujo quadrimomento p_μ é zero. Na maioria das teorias quânticas de

campos, se usamos o vácuo para construir matematicamente o espaço de Hilbert, que esperamos que descreva todo o universo. Deste ponto-de-vista, diferentes vácuos implicam diferentes espaços de Hilbert e, portanto, distintos universos.

A teoria dos "buracos", de Dirac, porém, mostra-nos que o vácuo, na verdade, é bem complicado. Em geral, podemos esperar que ele seja tão complicado quanto qualquer campo de spin nulo, $\phi(x)$, com $r_\mu = 0$. Como um campo de spin zero, é admissível que o vácuo possua números quânticos tais como o isospin \vec{I} , a paridade P , a estranheza S , etc.

Por outro lado, se tomarmos os números quânticos de simetria, \vec{I} , S , P , etc., de toda a matéria e os adicionarmos, perceberemos que eles estão continuamente mudando:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{I} \\ S \\ P \\ \vdots \end{pmatrix}_{\text{matéria}} \neq 0$$

Isto é perturbador, pois indica que a natureza estaria abandonando a "simetria perfeita". O destino desses números quânticos "perdidos" é justamente o vácuo, de tal modo que

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{I} \\ S \\ P \\ \vdots \end{pmatrix}_{\text{vácuo + matéria}} = 0$$

e a simetria está restaurada.

É sobre esta idéia que repousa o mecanismo da quebra espontânea de simetria, descrito na seção 3.1. O vácuo, que deixou de ser sinônimo de "vazio", apresenta-se como uma entidade física relevante, de tal maneira que se nele aplicarmos a transformação de simetria G que deixa a

lagrangiana do sistema (com quebra espontânea de simetria) invariante, originaremos outros estados degenerados com o vácuo.

Podemos excitar este vácuo, que possui valor esperado diferente de zero, sob condições adequadas e originar "domínios". Nesse estado excitado, existe um volume V cujo tamanho é muito maior que a dimensão microscópica relevante, dentro do qual encontramos um valor esperado $\langle \phi \rangle \neq \phi_{\text{vac}}$, enquanto que, fora de V , $\langle \phi \rangle = \phi_{\text{vac}}$ (fig. 3.3). As propriedades de simetria dentro e fora de V podem ser, então, bem diferentes.

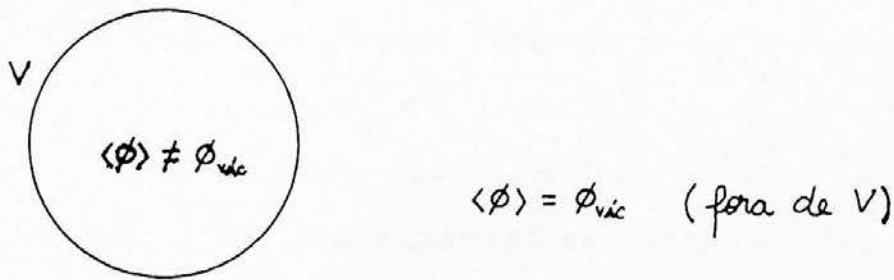


FIGURA 3.3 - Excitação do vácuo

Para trabalharmos com teorias com domínios (ou defeitos) obviamente necessitamos conhecer o seu vácuo. A cromodinâmica quântica, nesse sentido, possui um comportamento incômodo. Em geral, todas as teorias assintoticamente livres são instáveis[3], de modo que o vácuo perturbativo usual não é o estado estável mais baixo. Para a QCD isto foi mostrado primeiramente por Savidi e Matinyan[4]: o vácuo com campo magnético $B = 0$ é instável e tem energia maior que a energia de um estado com campo magnético constante. Este, por sua vez, é instável, como mostraram Nielsen e Olesen[5]; estes pesquisadores propuseram, então, um novo vácuo, com estrutura

mais complexa. Variantes deste vácuo são conhecidas por vácuo- Θ_3 e vácuo "espaguete"[6]. A pesquisa sobre a estabilidade do vácuo de Nielsen e Olesen é difícil devido a sua complexidade; ao que parece, este vácuo não é ainda o último passo no conjunto de vácuos instáveis no infra-vermelho.

Observamos que as tentativas de eliminar a instabilidade da teoria de perturbação apontam para a existência de campos de vácuo infra-vermelhos "não-perturbativos" do tipo $B \neq 0$.

O termo "vácuo não-perturbativo" tem sido usado amplamente, e sua compreensão varia segundo os diferentes modelos fenomenológicos. No trabalho da ref.[4], o vácuo é um campo magnético; nos trabalhos do grupo ITEP[7], sob médias do vácuo, entendem-se parâmetros de uma expansão em potências das funções de Green exatas do glúon e do quark; Lee[1,13] trata o vácuo como um meio dielétrico com diferentes propriedades dentro e fora do hádron, e os hádrons como ondas tipo soliton não-lineares nesse meio. (O modelo de Lee é a generalização dos modelos de "bag" mais populares de JINR[8], MIT[9] E SLAC[10]). Um aspecto comum a quase todos os modelos de vácuo da QCD é o uso de idéias, conceitos e terminologias das teorias de líquido quântico[11].

Mais à frente, em nosso trabalho, necessitaremos especificar um vácuo para a QCD a fim de calcularmos a energia livre de defeitos nessa teoria. Colocamo-nos, então, diante de uma dúvida: que vácuo escolher?

Como iremos trabalhar no limite de altas temperaturas, estaremos em uma região de energias onde o vácuo perturbativo usual não apresenta instabilidades. Acreditamos,

então, que poderemos usá-lo em nossos cálculos sem maiores problemas. É possível, contudo, que o vácuo real da QCD, mesmo a temperaturas elevadas, não corresponda ao vácuo que escolhemos.

3.4 - Transições de Fase na Teoria dos Campos

Em mecânica estatística podemos, em geral, dividir os vários fenômenos físicos em duas categorias. Na primeira, podemos considerar os constituintes microscópicos do sistema como praticamente não-interagentes. Isto faz com que as funções termodinâmicas do sistema macroscópico surjam do conhecimento dos níveis de energia dos constituintes microscópicos individuais, em uma forma normalmente suave e contínua. Como exemplo temos distribuição espectral da radiação do corpo negro, o paramagnetismo, etc.

Na segunda categoria, a maioria dos fenômenos apresenta descontinuidades analíticas ou singularidades nas funções termodinâmicas relativas ao sistema (como, por exemplo, a energia livre de Gibbs), o que corresponde à ocorrência de vários tipos de **transições de fase**. É o caso da condensação de gases, do ferro e anti-ferromagnetismo, etc. Neste caso, não podemos eliminar as interações entre as partículas por uma transformação de coordenadas do problema; também não podemos, de uma maneira simples, relacionar os níveis de energia do sistema total com os níveis de energia dos constituintes microscópicos. Na verdade, o que normalmente temos é que, sob condições favoráveis, um grande número de constituintes microscópicos do sistema possui a tendência de interagir um com o outro de uma

forma intensa e cooperativa. Este comportamento cooperativo assume importância macroscópica a uma dada temperatura, T_c , conhecida como temperatura de transição de fase ou **temperatura crítica** do sistema.

As transições de fase são muito estudadas também na teoria dos campos, tanto que um dos mais importantes problemas desta teoria consiste justamente da determinação do diagrama de fases de teorias de gauge. Por exemplo, um assunto que tem chamado muito a atenção dos pesquisadores nos últimos tempos refere-se às transições de fase no universo primordial. De acordo com o modelo cosmológico padrão[13] (que utiliza o mecanismo de quebra espontânea de simetria) e com a já aceita ideia de um universo primordial quente, o nosso universo experimentou transições de fase à medida que se expandia e resfriava. Estas transições devem ter um papel fundamental na sua evolução e podem dar indícios para uma possível unificação das teorias que acreditamos englobarem forças básicas da natureza: QCD (interações fortes) e o modelo de Weinberg-Salam-Glashow[12] (interações eletro-fracas). Teríamos, então, uma única teoria grã-unificada[14]. Os candidatos a essa teoria têm que sofrer uma quebra espontânea de simetria, a fim de reproduzirem a fenomenologia de baixas energias que observamos no laboratório.

É uma característica geral de teorias com simetria espontaneamente quebrada a temperatura zero que, para temperaturas acima de um valor crítico (T_c), essa simetria seja restaurada[14]. O sistema físico em estudo possivelmente existirá em uma das duas fases: na de simetria quebrada ou na não-quebrada.

3.4.a - O Potencial Efetivo[15]

Existem diversas abordagens possíveis ao estudo de transições de fase na teoria dos campos a temperatura finita. Uma delas consiste do **método do potencial efetivo**, que iremos apresentar nesta seção.

Em analogia[16] com a teoria dos campos usual, podemos obter funções de Green "térmicas" (a temperatura finita) a partir do funcional gerador

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int_0^{\beta} d\tau \int d^3\vec{x} (\mathcal{L}_e[\phi] + J\phi) \right\} \quad (3.33).$$

(Notemos que a função de partição é o funcional gerador na ausência de fontes externas $J(x)$; ou seja, é $Z[0]$).

As funções de Green são dadas por

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle \phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_n) \rangle = \left(\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \dots \delta J(x_n)} \right)_{J=0} \quad (3.34),$$

onde $x_i = (\vec{x}_i, \tau_i)$ e, no espaço dos momentos,

$$\tilde{G}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \left(\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(-p_1) \dots \delta J(-p_n)} \right)_{J=0} \quad (3.35).$$

Obtemos as funções de Green conexas a partir do gerador $W[J]$, definido por

$$W[J] = \ln Z[J] = -\beta F[J] \quad (3.36),$$

através da expressão

$$G_c^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \left(\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(-p_1) \dots \delta J(-p_n)} \right)_{J=0} \quad (3.37).$$

Como

$$G_c^{(1)}(p_1) = \langle \phi(p_1) \rangle = G^{(1)}(p_1) \quad (3.38),$$

obtemos

$$\langle \phi(p) \rangle \equiv \bar{\Phi}(p) = \left(\frac{\delta W[J]}{\delta J(-p)} \right)_{J=0} \quad (3.39).$$

E conveniente escrevermos o gerador $W[J]$ em função de $\bar{\Phi}$. Para isto, introduzimos a sua transformada de Legendre

$$\Gamma[\bar{\Phi}] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{\Phi}(k) J(k) - W[J] \quad (3.40),$$

que respeita

$$\frac{\delta \Gamma[\bar{\Phi}]}{\delta \bar{\Phi}(k)} = J(k) \quad (3.41).$$

$\Gamma[\bar{\Phi}]$ é conhecida como **ação efetiva**. Ela gera as funções irreduzíveis de uma partícula:

$$\Gamma^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = \left(\frac{\delta^n \Gamma[\bar{\Phi}]}{\delta \bar{\Phi}(k_1) \dots \delta \bar{\Phi}(k_n)} \right)_{J=0} \quad (3.42).$$

Para teorias com simetria espontaneamente quebrada, vimos que o valor esperado do campo no vácuo é

diferente de zero na ausência de fontes externas. Ou seja,

$$\lim_{J \rightarrow 0} \bar{\Phi}(k) = v \neq 0 \quad (3.43).$$

Em termos da ação efetiva [eq.(3.41)] isto implica

$$\left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Phi}(k)} \right)_{\bar{\Phi}=v} = 0 \quad (3.44).$$

Portanto, para sabermos se a teoria apresenta simetria espontaneamente quebrada, basta procurarmos soluções de (3.44); as que têm $\bar{\Phi} \neq 0$ correspondem à quebra da simetria.

Podemos expandir a ação efetiva em série de Taylor, resultando em

$$\Gamma[\Phi] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) [\Phi(x_1) - v] \dots [\Phi(x_n) - v] \quad (3.45),$$

ou, no espaço dos momentos,

$$\Gamma[\Phi] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4p_n}{(2\pi)^4} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) [\Phi(-p_1) - v] \dots [\Phi(-p_n) - v] \quad (3.46).$$

Esta expressão indica que podemos entender $\Gamma[\Phi]$ como uma expansão em loops. De (3.40) e de (3.36) vemos que podemos fazer o mesmo para Z .

Quando tomamos uma configuração de campo constante, ou seja

$$\Phi(k) = \text{const} = \Phi_0 \quad (3.47)$$

e impomos a invariância por translações [que implica a conservação do momento:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \rightarrow \bar{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots + p_n) \quad (3.48),$$

obtemos

$$\Gamma[\Phi_0] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \bar{\Gamma}^{(n)}(0, \dots, 0) (\Phi_0 - v)^n (2\pi)^4 \delta^4(0) \equiv (2\pi)^4 \delta^4(0) V[\Phi_0] \quad (3.49),$$

onde $(2\pi)^4 \delta^4(0)$ é o volume do sistema e $V[\Phi_0]$ é conhecido como o **potencial efetivo** da teoria. Este não é mais que a ação efetiva para uma configuração de campo constante (dividida pelo volume). Para $\Phi = \Phi_0 = \rho t i$, a condição de quebra espontânea de simetria (3.44) equivale a encontrarmos o mínimo de $V[\Phi_0]$; se este ocorrer para $\Phi_0 \neq 0$, então haverá a quebra.

Voltemo-nos, agora, à questão das transições de fase, observando o comportamento do potencial efetivo $V[\Phi_0]$ a temperatura finita [14], com base na propriedade que apresentamos parágrafo anterior. Para ilustrar, consideremos a figura 3.4, que exhibe o comportamento típico do potencial efetivo de uma teoria de gauge à medida que a temperatura é abaixada (no caso, a transição é de primeira ordem, ou seja, algumas propriedades do sistema, incluindo a simetria, variam continuamente; se a simetria variar de modo descontínuo, dizemos que a transição é de segunda ordem). A evolução do sistema dá-se assim:

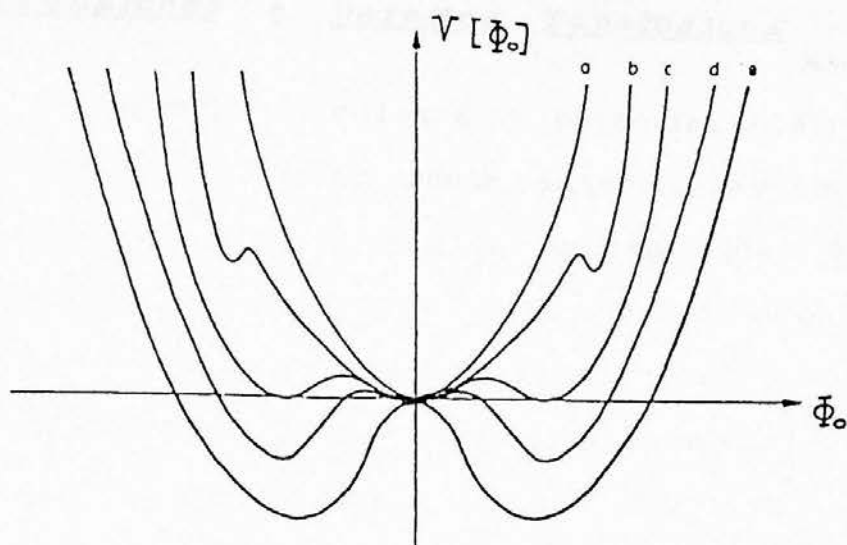


FIGURA 3.4 - Potencial efetivo de teoria de gauge com transição de primeira ordem

a altas temperaturas, a simetria não é quebrada (é o potencial efetivo da fig. 3.4.a ; notemos a semelhança com a fig. 3.1). À medida que baixamos a temperatura, o potencial adquire mínimos locais para valores do campo diferentes de zero (fig. 3.4.b). Haverá um valor crítico da temperatura para o qual esses mínimos locais vão se degenerar com o vácuo simétrico (fig 3.4.c) e, para temperaturas ainda menores, eles terão energia mais baixa, e deixarão o vácuo metaestável (fig. 3.4.e; veja a semelhança com a fig. 3.2).

3.4.B - Transições e Defeitos Topológicos

Quando calculamos o potencial efetivo da teoria $\lambda\phi^4$ da forma descrita na seção anterior, aparece uma parte imaginária em $V[\Phi_0]$ para Φ_0 contido em uma região $\Phi_0^2 < \Phi_{vac}^2/3$ [18], independentemente da temperatura e da ordem da expansão em loops. Lembrando que se costuma associar instabilidades ao aparecimento de partes imaginárias nos potenciais termodinâmicos[17], neste caso podemos entender que surge uma instabilidade nas configurações de campo **uniformes** como base da expansão [eq. (3.47)], de tal maneira que este método, para o modelo $\lambda\phi^4$, não permite que concluamos nada sobre a transição de fase[18].

Como já vimos, o potencial efetivo nos fornece a ação efetiva (3.40) como funcional do parâmetro de ordem (3.39), para o caso em que Φ independa de \vec{x} e de γ [eq. (3.47)]. Em uma situação mais geral, porém, necessitamos calcular o funcional gerador para configurações não constantes, o que implica, de (3.36) e (3.40), termos que determinar (3.45).

Nosso intuito, de fato, é determinar a função de partição ($Z[0]$) para configurações não constantes, a fim de calcularmos a energia livre destas. Na verdade, temos um interesse especial no cálculo desta energia livre. Em teorias de campos com simetria espontaneamente quebrada, por exemplo, surgem estruturas não-triviais (os defeitos, aos quais já nos referimos) que, a nível clássico, representam soluções topologicamente não-triviais das equações de Euler-Lagrange. Em 1984, Bricmont e Fröhlich[19] propuseram que a distinção entre as fases de teorias de gauge fosse feita analisando-se a energia livre desses

defeitos, ou seja, estudando-se a variação da energia quando se força o aparecimento de um defeito topológico no sistema através de contornos adequados. Comparando a energia livre do sistema diante dos diferentes contornos, podemos obter informações sobre o diagrama de fases; quando a energia livre torna-se insensível a determinado contorno, dizemos que o sistema atingiu uma nova "fase".

Consideremos um sistema que, a temperatura zero, encontra-se em uma determinada fase. Em seguida, o colocamos em contato com um reservatório térmico a temperatura T . A baixas temperaturas, defeitos com energia livre positiva (ou seja, para se formarem exigem um determinado consumo de energia por parte do sistema) são bastante raros; os que têm energia livre infinita certamente não existem. Porém, quando a temperatura torna-se suficientemente alta, efeitos quânticos cooperam de tal modo que a energia livre de um dado defeito topológico se anula [19,20]. [Podemos entender isto se lembrarmos que

$$\Delta F = \Delta E - T\Delta S \quad (3.50).$$

A temperatura para a qual $\Delta F=0$ é chamada de **temperatura de transição de fase**. Sob estas condições, não há gasto de energia ao introduzirmos um defeito topológico extra no sistema e este, então, atinge uma nova fase: a de um condensado desses defeitos.

Para teorias unificadas, por exemplo, há três tipos de defeitos relevantes: monopolos (que têm energia finita), vórtices (ou "strings", que têm energia finita por unidade de comprimento) e paredes (que têm energia finita por unidade de

area).

Conforme expusemos na introdução, este método, que permite o estudo de fases de teorias através de seus defeitos topológicos, já teve várias aplicações, e nosso objetivo é estendê-lo agora à cromodinâmica quântica. Esta teoria, em contraste com as usadas nas aplicações anteriores do método, não apresenta quebra espontânea de simetria. O seu diagrama de fases, na verdade, ainda está em estudo, mas sabemos que, a altas temperaturas, a matéria hadrônica deve transformar-se em um plasma de quarks e glúons[21]. Na figura 3.5 temos um diagrama de fases teórico. Calculando a energia livre de defeitos na QCD com este método, esperamos poder obter informações sobre as fases desta teoria no limite de altas temperaturas.

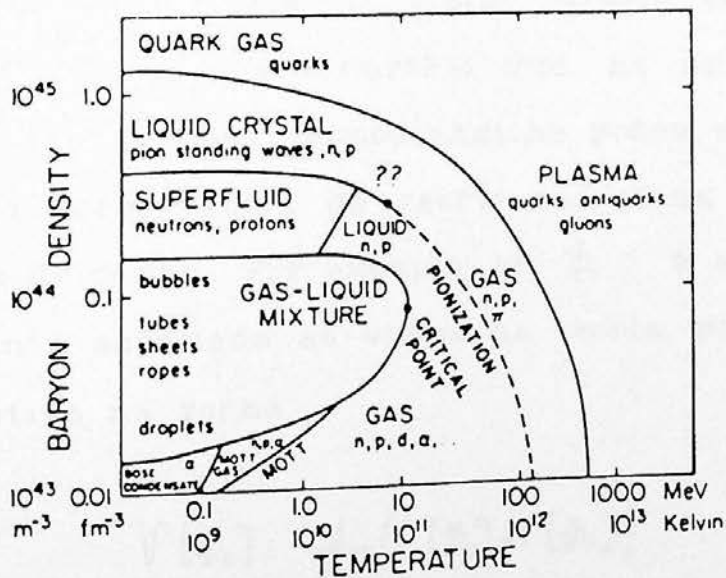


Figura 3.5 - Diagrama de fases teórico da matéria nuclear[22]

Iremos determinar a seguir a expressão formal geral para a energia livre de um defeito topológico ϕ_s

qualquer no limite de altas temperaturas segundo esse modo. No próximo capítulo apresentaremos os cálculos com a (51).

Com base na soma de seção 40 e na definição

$$E_0 = \frac{1}{\beta} \ln Z \tag{2.50}$$

podemos definir as energias livres de diferentes estados termodinâmicos através da expressão

$$F_{\alpha} = \frac{1}{\beta} \ln \frac{Z_{\alpha}}{Z} = F_{\alpha} - F_0 \tag{2.51}$$

onde Z_{α} é a função de partição do sistema com funcional de restrições α , Z é a função de partição e $\beta = 1/kT$ (para, respectivamente, ensembles, strings e paredes a saber Γ sabendo que β seja finita no limite termodinâmico).

Podemos mostrar que, na aproximação até 1-loop as diversas funções termodinâmicas podem ser escritas como diferenças de ação efetiva da teoria calculada em determinadas configurações de campo. Por exemplo, se $\bar{\phi}$ é a configuração de campo classicamente associada ao vácuo da teoria, podemos escrever o potencial efetivo na forma

$$V(\bar{\phi}) = \frac{1}{\beta} (\Gamma(\bar{\phi}) - \Gamma(\phi)) \tag{2.52}$$

análogamente, até 1-loop (32) equivale a

$$E_0 = \frac{1}{\beta} (\Gamma(\bar{\phi}) - \Gamma(\phi)) \tag{2.53}$$

Como a ação efetiva possui um papel central no estudo, reescrevamos (3.45) somente para o defeito Φ_0 :

$$\Gamma[\Phi_0] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n \int_0^{\beta} d\tau_j \int d^3\vec{x}_j \Phi_0(\vec{x}_j) \Gamma^{(n)}(\vec{x}_1, \tau_1; \dots; \vec{x}_n, \tau_n) \quad (3.55).$$

Se usarmos a transformada de Fourier de $\Gamma^{(n)}$,

$$\Gamma^{(n)}(\vec{x}_1, \tau_1; \dots; \vec{x}_n, \tau_n) = \frac{1}{\beta} \prod_{j=1}^n \int_{\eta_j=-\infty}^{\infty} \frac{d^3\vec{k}_j}{(2\pi)^3} \tilde{\Gamma}^{(n)}(\vec{k}_1, \omega_1; \dots; \vec{k}_n, \omega_n) e^{-i \sum_{m=1}^n (\omega_m \tau_m + \vec{k}_m \cdot \vec{x}_m)} \quad (3.56)$$

e lembrarmos que a simetria de translação implica

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(\vec{k}_1, \omega_1; \dots; \vec{k}_n, \omega_n) = \beta (2\pi)^3 \delta_{\omega_1 + \dots + \omega_n} \delta^3(\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_n) \bar{\Gamma}^{(n)}(\vec{k}_1, \omega_1; \dots; \vec{k}_n, \omega_n) \quad (3.57),$$

então (3.55), para configurações **estáticas** (que, no caso, são as que nos interessam), torna-se

$$\Gamma[\Phi_0] = \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n \int d^3\vec{k}_j \tilde{\Phi}_0(-\vec{k}_j) \bar{\Gamma}^{(n)}(\vec{k}_1, 0; \dots; \vec{k}_n, 0) \delta^3(\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_n) \quad (3.58).$$

Através do uso de identidades como a que foi aplicada à teoria $\lambda \phi^4$ [eq.(2.42)], podemos separar $\bar{\Gamma}^{(n)}(\vec{k}_1, 0; \dots; \vec{k}_n, 0)$ em duas partes:

$$\bar{\Gamma}^{(n)}(\vec{k}_1, 0; \dots; \vec{k}_n, 0) = \bar{\Gamma}_0^{(n)}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) + \bar{\Gamma}_T^{(n)}(\vec{k}_1, 0; \dots; \vec{k}_n, 0) \quad (3.59),$$

de modo que $\bar{\Gamma}_T^{(n)}$ absorve **toda** a dependência na temperatura. De um modo geral[24], conseguimos esta separação expressando a soma nas frequências em termos de integrais de contorno tais

como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \sum_n f(\omega_n^\pm) &= \frac{1}{4\pi} \int_C dz f(z) \left(\frac{e^{i\beta z/2} \pm e^{-i\beta z/2}}{e^{i\beta z/2} \mp e^{-i\beta z/2}} \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi} f(z) \mp \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \frac{dz}{2\pi} \left(\frac{f(z) + f(-z)}{e^{i\beta z} \mp 1} \right) \end{aligned} \quad (3.60).$$

(O contorno C envolve o eixo real no sentido horário). Esta fórmula é válida para qualquer função $f(z)$ que seja analítica numa vizinhança do eixo real. Aqui definimos $\omega_n^+ = 2\pi n/\beta$ (bosons) e $\omega_n^- = (2n+1)\pi/\beta$ (fermions).

Podemos inferir a estrutura geral da dependência de $\bar{\Gamma}_T^{(n)}$ na temperatura rescalonando $\vec{p} \rightarrow \vec{p}' = \beta \vec{p}$, de forma que uma análise dimensional nos leva a

$$\bar{\Gamma}_T^{(n)}(\vec{k}_1, 0; \dots; \vec{k}_n, 0) = \sum_{\gamma_n} T^{d(\gamma_n)} G_{\gamma_n} \left(\frac{\vec{k}_1}{T}, \dots, \frac{\vec{k}_n}{T}, \frac{m}{T} \right) \quad (3.61).$$

Nesta expressão, $d(\gamma_n)$ é o grau de divergência superficial do gráfico γ_n que contribui para $\bar{\Gamma}^{(n)}$, e G_{γ_n} é adimensional.

De (3.58), (3.59) e (3.61) obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma[\Phi_b] &= \Gamma_0[\Phi_b] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n \int d^3\vec{k}_j \tilde{\Phi}_b(-\vec{k}_j) \sum_{\gamma_n} T^{d(\gamma_n)} \\ &\quad \cdot G_{\gamma_n} \left(\frac{\vec{k}_1}{T}, \dots, \frac{\vec{k}_n}{T}, \frac{m}{T} \right) \delta^3(\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_n) \end{aligned} \quad (3.62).$$

onde $\Gamma_0[\Phi_b]$ é a ação efetiva calculada no defeito a temperatura zero.

Levando (3.62) em (3.54), a energia livre dos defeitos topológicos adquire o aspecto formal

$$\begin{aligned}
 F_3 = & \frac{1}{L^3} (\Gamma_0[\Phi_0] - \Gamma_0[\Phi_v]) + \frac{1}{L^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \prod_{j=1}^n \int d^3\vec{k}_j \tilde{\Phi}_0(-\vec{k}_j) \cdot \right. \\
 & \cdot \delta^3(\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_n) \sum_{\delta_n} T^{d(\delta_n)} G_{\delta_n} \left(\frac{\vec{k}_1}{T}, \dots, \frac{\vec{k}_n}{T}, \frac{m}{T} \right) - \\
 & \left. - \Phi_v^n \sum_{\delta_n} T^{d(\delta_n)} G_{\delta_n} \left(\vec{0}, \dots, \vec{0}, \frac{m}{T} \right) L^3 \right\}
 \end{aligned} \quad (3.63),$$

enquanto que o potencial efetivo (3.53) assume a forma

$$V[\Phi_0] = \frac{1}{V} (\Gamma_0[\Phi_0] - \Gamma_0[\Phi_v]) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Phi_0^n - \Phi_v^n) \sum_{\delta_n} T^{d(\delta_n)} G_{\delta_n} \left(\vec{0}, \dots, \vec{0}, \frac{m}{T} \right) \quad (3.64).$$

Embora usando definições diferentes, nós calculamos a energia livre (2.59) do defeito ϕ_s da teoria $\lambda\phi^4$ usando o procedimento que descrevemos acima. Podemos identificar, para este caso,

$$\Gamma[\phi_s] = V \mathcal{F} \quad (3.65),$$

onde \mathcal{F} é dado por (2.59).

Iremos determinar agora a temperatura de transição para o soliton (2.21) com base na definição (3.52). Para isto, necessitamos conhecer o vácuo da teoria.

Os valores de Φ que minimizam a ação euclidiana da teoria $\lambda\phi^4$ com quebra espontânea de simetria são dados por $\Phi = \pm \mu\sqrt{6/\lambda}$. Como vácuo escolheremos a configuração

$$\Phi_v = \sqrt{6\mu^2/\lambda} \quad (3.66).$$

Substituindo (3.65) em (3.63) resulta

$$F_3 = \mathcal{F}_{\phi_s} - \mathcal{F}_{\Phi_v} \quad (3.67).$$

onde Φ_v é dado por (3.66). Concluímos, então, que

$$F_s = \frac{S[\phi_s] - S[\Phi_v]}{\beta V \hbar} + \frac{T^3}{48V} \int d^4x (\phi_s^2 - \Phi_v^2)$$

Adotando $\hbar=1$ e sabendo que (no caso do sbliton, como vimos, v tem dimensão de área)

$$\int_0^\beta d\tau d^3\vec{x} (L[\phi_s] - L[\Phi_v]) = S[\phi_s] - S[\Phi_v] = \beta V 4\sqrt{2} \mu^3 / \lambda$$

obtemos (para $T \gg \mu$)

$$F_s = 4\sqrt{2} \frac{\mu^3}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\sqrt{2}}{4} \mu T^2 \quad (3.68).$$

A temperatura para a qual a energia livre do defeito (2.21) se anula vale

$$T_c = 4\mu / \sqrt{\lambda} \quad (3.69).$$

Quando calculamos, pelo método do potencial efetivo, a temperatura na qual $V[\Phi_0]$ passa a ter partes imaginárias, concluímos que esta é exatamente igual a T_c (veja Bazeia et al., ref[20]). Isto nos sugere que, acima de T_c , as configurações relevantes para o sistema passam a ser as do tipo (2.21), ou seja, temos uma nova fase, caracterizada pela condensação de sblitons.

REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO TRÊS

- [1] E.Abers e B.W.Lee, Phys.Rept. 9 (1973) 1
- [2] P.W.Higgs, Phys. Rev. Lett. 12 (1964) 132
- [3] A.A.Vladimirov e D.V.Shirkov, Sov. Phys. Usb. 22 (1979) 860
- [4] G.K.Savidi, Phys.Lett. B71 (1977) 133 ;
S.G.Matinyan e G.K.Savidi, Nucl.Phys. B134 (1978) 539
- [5] N.K.Nielsen e P.Olesen, Nucl.Phys. B144 (1976) 376
- [6] H.B.Nielsen: *Particle Physics* (Ed. por I.Andric et al., North-Holland, NY, 1980), pag. 67
- [7] M.A.Shifman, A.I.Vainshtein e V.I.Zakharov, Nucl. Phys. B147 (1979) 385 e 448
- [8] P.N.Bogolubov, Ann. Inst. Henri Poincaré 8 (1967) 163
- [9] A.Chodos, R.L.Yaffe, K.Johnson, C.B.Thorn e V.F.Weisskopf, Phys.Rev. D9 (1974) 3471
- [10] W.A.Bardeen, M.S.Chanowitz, S.D.Drell, M.Weinstein e T.-M.Yan, Phys.Rev.D11 (1975) 1094
- [11] F. London, Phys. Rev. 54 (1938) 947 ; L. D. Landau, J.Phys.(Moscow) 5 (1951) 71 ; N.N.Bogolubov, J.Phys. 9 (1947) 23
- [12] S. L. Glashow, Nucl. Phys. 22 (1961) 579 ; S.Weinberg, Phys.Rev.Lett. 19 (1967) 1264 ; A.Salam, *Proc. 8th. Nobel Symposium, Stockholm, 1968*, ed. N.Svartholm (Almqvist e Wicksell, Stockholm, 1968) pag. 367
- [13] Para uma revisão consulte P.Langacker, Phys.Rept. 72 (1981) 185
- [14] Uma revisão deste tema pode ser encontrada no artigo de A.D.Linde em Rept.Prog.Phys. 42 (1979) 389
- [15] S.Coleman e E.Weinberg, Phys.Rev. D7 (1973) 1888
- [16] Veja mais detalhes do que apresentamos a seguir, no livro de D.Amit: *Field theory, the renormalization group and critical phenomena* (McGraw-Hill, 1978)
- [17] J.S.Langer, Ann. of Phys. 41 (1967) 108; 54 (1969) 258
- [18] C.A. Aragão de Carvalho, G.C.Marques, A.J. da Silva, I.Ventura, Nucl. Phys. B265 (1986) 45

- [19] J.Bricmont e J.Fröhlich, Nucl. Phys. B230 (1984) 407
- [20] I. Ventura, Phys.Rev. B24 (1981) 2812 ; D.Bazeia, C.A.A. de Carvalho, O.J.P.Eboli, G.C.Marques, A.J. da Silva e I.Ventura, Phys.Rev. D31 (1985) 1411 ; R.J.Rivers, Z.Phys. C22 (1984) 137
- [21] A.M.Polyakov, Phys.Lett. 78B (1978) 552; L.Susskind, Phys. Rev.Lett. D20 (1979) 2610
- [22] M. Gyulassy, Proc. Part. Nucl. Phys. 15 (1985) 403. Este artigo contém uma revisão sobre a termodinâmica da QCD
- [23] D. Bazeia, O.J.P.Eboli, J.M.Guerra Jr. e G.C.Marques, preprint IFUSP/P-594, Julho/1986.
- [24] Veja, por exemplo, J.I.Kapusta, Nucl.Phys. B148 (1979) 461

ENERGIA LIVRE DE DEFEITOS NA QCD

Neste capítulo, exporemos a aplicação do método apresentado na seção 3.4.b à cromodinâmica quântica, determinando a expressão da energia livre para defeitos desta teoria. Como sabemos, nossos cálculos serão válidos no limite de altas temperaturas, no qual os defeitos que dão contribuição relevante são estáticos.

Na seção 2.4 expusemos em detalhe o defeito estático que conhecemos na QCD. Iremos, então, aplicar a expressão formal obtida no cálculo da energia livre do mesmo e, na última seção, faremos uma análise dos resultados.

4.1 - Cálculo da Expressão para a Energia Livre

Podemos reescrever a ação da QCD expandida semi-classicamente e no espaço euclidiano [eq. (2.94)] na forma

$$S = S_{YM}[A(x)] + \int d^4x \left[\frac{1}{2} a_\mu^k(x) M_{\mu\nu}^{kl}(x) a_\nu^l(x) + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\eta}_\alpha^f(x) N_{\alpha\beta}^f(x) \eta_\beta^f(x) + \bar{c}_a(x) O_{ab}(x) c_b(x) \right] \quad (4.1),$$

onde definimos

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}^{kl}(x) = & g^2 \left[f_{akb} f_{aoj} (A_\rho^b A_\rho^j \delta_{\mu\nu} - A_\nu^b A_\mu^j) + f_{ake} f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right] + \\ & + g f_{akl} \left[2(\delta_{\mu\nu} A_\rho^a \partial_\rho - A_\nu^a \partial_\mu) + \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right] + \\ & + \delta^{kl} \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu - \delta_{\mu\nu} \partial^2 \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$N_{\alpha\beta}^f(x) = \left(\partial_\mu \delta_{\alpha\beta} - ig A_\mu^a(x) \frac{\lambda_{\alpha\beta}^a}{2} \right) \gamma_\mu - i \delta_{\alpha\beta} m^f \quad (4.3)$$

$$O_{ab}(x) = - \left[\delta_{ab} (-\partial^2) + g f_{abc} A_\mu^c(x) \partial_\mu \right] \quad (4.4).$$

Com o uso de (4.1), a função de partição

$$Z = \int DA \, D\bar{\eta} \, D\eta \, D\bar{c} \, Dc \, e^{-S}$$

assume a forma

$$\begin{aligned} Z = & e^{-S_{YM}} \int DA \, e^{-\frac{1}{2} \int d^4x a_\mu^k(x) M_{\mu\nu}^{kl}(x) a_\nu^l(x)} \prod_{f=1}^{N_f} \int D\bar{\eta} \, D\eta \, e^{-\int d^4x \bar{\eta}_\alpha^f(x) N_{\alpha\beta}^f(x) \eta_\beta^f(x)} \\ & \cdot \int D\bar{c} \, Dc \, e^{-\int d^4x \bar{c}_a(x) O_{ab}(x) c_b(x)} \end{aligned} \quad (4.5).$$

Como as integrais nos campos são gaussianas, obtemos

$$Z = e^{-S_{\text{YM}}} [\det^{-1/2} M_{\mu\nu}^{kl}(x)] \prod_{f=1}^{N_f} [\det N_{\alpha\beta}^f(x)] [\det O_{ab}(x)]$$

Este resultado implica (entendamos $V = L^\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2$, que depende do tipo de defeito)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_A &= - (V\beta)^{-1} \ln Z_A = \\ &= - (V\beta)^{-1} \left[-S_{\text{YM}}[A(x)] + \ln \det^{-1/2} M_{\mu\nu}^{kl}(x) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{f=1}^{N_f} \ln \det N_{\alpha\beta}^f(x) + \ln \det O_{ab}(x) \right] \end{aligned} \quad (4.7).$$

Manipularemos separadamente, agora, cada logaritmo em (4.7). No primeiro deles, considerando que a matriz M é diagonalizável, podemos proceder como para a teoria $\lambda\phi^4$, usando (2.15) na definição

$$f_M \equiv \ln \det^{-1/2} M_{\mu\nu}^{kl}(x) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln M_{\mu\nu}^{kl}(x) \quad (4.8).$$

Podemos separar $M_{\mu\nu}^{kl}$ em dois termos (um que depende do campo clássico e outro, independente), que são dados por

$$M_{\mu\nu}^{kl}(x) = \bar{\Delta}_{\mu\nu}^{kl}(x) + \bar{M}_{\mu\nu}^{kl}(x) \quad (4.9),$$

onde

$$\bar{\Delta}_{\mu\nu}^{kl}(x) = \delta^{kl} [\delta_{\mu\nu} (-\partial^2) + (1-1/\alpha) \partial_\mu \partial_\nu] \quad (4.10)$$

e

$$\bar{M}_{\rho\nu}^{kl}(x) = M_{\rho\nu}^{kl}(x) - \bar{\Delta}_{\rho\nu}^{kl}(x) \quad (4.11).$$

Levando (4.9) a (4.8), obtemos

$$f_M = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln [\bar{\Delta}_{\rho\nu}^{kl}(x) + M_{\rho\nu}^{kl}(x)] = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left\{ \bar{\Delta}_{\rho\nu}^{kl}(x) \left[1 + \Delta_{\nu\rho}^{lk}(x) \bar{M}_{\rho\nu}^{kl}(x) \right] \right\} \quad (4.12),$$

onde $\Delta_{\rho\nu}^{kl}(x)$ é tal que $\Delta_{\rho\sigma}^{kj}(x) \bar{\Delta}_{\sigma\nu}^{jl}(x) = \bar{\Delta}_{\rho\sigma}^{kj}(x) \Delta_{\sigma\nu}^{jl}(x) = \delta^{kl} \delta_{\rho\nu} \delta^4(x)$ e é dado por

$$\Delta_{\rho\nu}^{kl}(x) = \delta^{kl} \left[\delta_{\rho\nu} - (1-\alpha) \frac{\partial_\rho \partial_\nu}{\partial^2} \right] \frac{1}{(-\partial^2)} \quad (4.13).$$

Notemos que $\Delta_{\rho\nu}^{kl}$ é justamente o propagador do glúon no gauge de Lorentz.

Usando uma propriedade do logaritmo, podemos colocar (4.12) sob a forma

$$f_M = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \bar{\Delta}_{\rho\nu}^{kl}(x) - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln [1 + \Delta_{\nu\rho}^{lk}(x) \bar{M}_{\rho\nu}^{kl}(x)] \quad (4.14).$$

Definindo

$$\bar{f}_M \equiv -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \bar{\Delta}_{\rho\nu}^{kl}(x) \quad (4.15)$$

e usando (2.28), obtemos

$$f_M = \bar{f}_M - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{Tr} [\Delta_{\nu\rho}^{lk}(x) \bar{M}_{\rho\nu}^{kl}(x)]^n \quad (4.16).$$

Seguindo um procedimento análogo ao que utilizamos

nos cálculos com a teoria $\lambda\phi^4$, podemos escrever (4.16), formalmente, da seguinte maneira:

$$t_M = \bar{t}_M - \frac{1}{2} \left[\text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \dots + \text{diagrama 3} + \text{diagrama 4} + \dots \right]$$

(onde as pernas externas denotam os campos A_μ).

Para podermos determinar os gráficos relevantes no limite de altas temperaturas fazemos $p \rightarrow T p'_\mu$. Lembrando que:

- cada vértice com 3 linhas contribui com um momento p
- cada loop contribui com p^4 (4.17),
- cada propagador contribui com p^{-2}

concluimos que os gráficos que contribuem ("leading") são

$$t_M = \bar{t}_M - \frac{1}{2} \left[\text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} \right] \quad (4.18).$$

Examinemos, agora, o segundo logaritmo de (4.7),

dado por

$$t_M \equiv \sum_{f=1}^{N_F} \ln \det N_{e_j}^f(x) = \sum_{f=1}^{N_F} \text{Tr} \ln [\bar{S}_{e_j}^f(x) + \bar{N}_{e_j}(x)] \quad (4.19).$$

onde definimos

$$\bar{S}_{e_j}^f(x) = (\not{x} - i m^f) \delta_{e_j} \quad (4.20)$$

e

$$\bar{N}_{e_j}(x) = i g_c A^a(x) \frac{\lambda_{e_j}^a}{2} \quad (4.21).$$

Como fizemos para \bar{t}_M , podemos reescrever (4.19) sob a forma

$$t_M = \sum_f T_n \ln \bar{S}_{e_j}^f(x) + \sum_f T_n \ln [1 + S_{e_j}^f \bar{N}_{e_j}(x)] \quad (4.22),$$

onde $S^f(x)$ é tal que $\bar{S}_{e_k}^f(x) S_{e_j}^f(x) = S_{e_k}^f(x) \bar{S}_{e_j}^f(x) = \delta_{e_j} \delta^4(x)$ e é dado por

$$S_{e_j}^f(x) = \frac{\delta_{e_j}}{\not{x} - im^f} = -i \delta_{e_j} \frac{(i\not{x} - m^f)}{\not{x}^2 + m^2} \quad (4.23).$$

Vemos, então, que $S_{e_j}^f$ é o próprio propagador fermiônico.

Definindo

$$\bar{t}_M \equiv \sum_f T_n \ln \bar{S}_{e_j}^f(x) \quad (4.23)$$

e novamente usando (2.28), obtemos

$$t_M = \bar{t}_M + \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} T_n [S_{e_j}^f(x) \bar{N}_{e_j}(x)]^n$$

A representação gráfica é

$$t_M = \bar{t}_M + \sum_f \left[\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \right] \quad (4.24).$$

Observando que, em (4.24), além de cada loop contribuir com p^4 , cada propagador contribui com p^{-1} , temos que a contribuição relevante para (4.19), no limite de altas temperaturas, é dada por

$$t_M = \bar{t}_M + \sum_{f=1}^{N_f} \text{diagram 2} \quad (4.25).$$

Consideremos, agora, o terceiro logaritmo de (4.7), correspondente a

$$f_0 \equiv \ln \det O_{ab}(x) = \text{Tr} \ln O_{ab}(x) = \text{Tr} \ln [\bar{G}_{ab}(x) + \bar{O}_{ab}(x)] \quad (4.26),$$

onde definimos

$$\bar{G}_{ab}(x) = \delta_{ab} (-\partial^2) \quad (4.27)$$

e

$$\bar{O}_{ab}(x) = g f_{abc} A_\mu^c(x) \partial_\mu \quad (4.28).$$

Seguindo o mesmo procedimento adotado na manipulação de f_u e f_v , obtemos

$$f_0 = \text{Tr} \ln [-\bar{G}_{ab}(x)] + \text{Tr} \ln [1 + G_{ba}(x) \bar{O}_{ab}(x)] \quad (4.29),$$

onde $G_{ab}(x)$ é tal que $\bar{G}_{ac}(x) G_{cb}(x) = G_{ac}(x) \bar{G}_{cb}(x) = \delta_{ab} \delta^4(x)$ e é dado por

$$G_{ab}(x) = \delta_{ab} \frac{1}{(-\partial^2)} \quad (4.30).$$

$G_{ab}(x)$ é, pois, o propagador do ghost.

Definindo

$$\bar{f}_0 \equiv \text{Tr} \ln [-\bar{G}_{ab}(x)]$$

e mais uma vez fazendo uso de (2.28), podemos colocar (4.29) sob a forma

$$f_0 = \bar{f}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} T_n [G_{ba}(x) \bar{O}_{ab}(x)]^n \quad (4.31).$$

Graficamente, (4.31) equivale a

$$f_0 = \bar{f}_0 + \text{diagrama} + \text{diagrama} + \dots \quad (4.32).$$

No limite de altas temperaturas, a aplicação das regras (4.17) aos gráficos de (4.32) nos determina a contribuição relevante, dada por

$$f_0 = \bar{f}_0 + \text{diagrama} \quad (4.33).$$

Portanto, no limite de altas temperaturas, podemos escrever (4.7), com o auxílio de (4.18), (4.25) e (4.33), sob a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_A = & -(\beta V)^{-1} \left\{ S_{YM}[A(x)] + \bar{f}_M + \bar{f}_U + \bar{f}_0 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \text{diagrama} - \frac{1}{2} \text{diagrama} + \sum_{f=1}^{N_f} \text{diagrama} + \text{diagrama} \right\} \quad (4.34). \end{aligned}$$

Como estamos trabalhando a altas temperaturas, novamente usamos o resultado de Weinberg[2.3], isto é, que podemos igualar a zero os momentos externos dos gráficos em (4.34), e obtemos a seguinte energia livre para o defeito A :

$$\begin{aligned} F_A = \mathcal{F}_A - \mathcal{F}_V = & (\beta V)^{-1} \left\{ S_{YM}[A] - S_{YM}[V] + \left[-\frac{1}{2} \text{diagrama} - \frac{1}{2} \text{diagrama} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{f=1}^{N_f} \text{diagrama} + \text{diagrama} \right] \int d^4x (A_\mu^a A_\nu^a - V_\mu^a V_\nu^a) \right\} \quad (4.35). \end{aligned}$$

Observemos que[1]

$$\text{Diagram} = -\frac{1}{2} \text{Diagram} - \frac{1}{2} \text{Diagram} + \sum_{f=1}^{N_F} \text{Diagram} + \text{Diagram} = \Pi_{\mu\nu}(\omega_n=0, \vec{k} \rightarrow 0) \quad (4.36)$$

e justamente a auto-energia do glúon expandida até 1-loop, a momento externo nulo. Para uma teoria com N cores e N_F sabores temos que, a altas temperaturas, (no gauge de Feynman)[2.7]

$$\Pi_{\mu\nu}(\omega_n=0, \vec{k} \rightarrow 0) \sim \frac{1}{3} g^2 T^2 \left(N + \frac{N_F}{2} \right) \delta_{4\mu} \delta_{4\nu} \quad (4.37).$$

Levando (4.37) a (4.35), obtemos

$$F_{CA} = (\beta V)^{-1} S_{YM}[A] - S_{YM}[V] + \frac{1}{3} g^2 T^2 \left(N + \frac{N_F}{2} \right) \int d^4x \left[(A_4^a)^2 - (V_4^a)^2 \right] \quad (4.38).$$

4.2 - Energia Livre do Monopolo

Para calcularmos a energia livre de diferentes defeitos, basta-nos agora substituir em (4.38) a forma analítica deles. No caso do monopolo usaremos (2.87)-(2.88). O vácuo correspondente será dado por

$$V_i^a = 0 \quad (3.39)$$

$$V_4^a = C/g \quad (3.40)$$

[de modo que $\lim_{r \rightarrow \infty} (A_4^a)^2 = (V_4^a)^2 = C^2/g^2$; veja eq. (2.71)].

A integral em (4.38) resulta

$$\begin{aligned}
 I &\equiv \int d^4x [(A_4^a)^2 - (V_4^a)^2] = \\
 &= \int_0^\beta dr \int d^3x \left[\frac{1}{g^2 r^2} (C r \operatorname{th} C r - 1)^2 - \frac{C^2}{g^2} \right] = \\
 &= \beta \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty r^2 dr \left[\frac{1}{r^2} (C^2 r^2 \operatorname{th} C r - 2 C r \operatorname{th} C r + 1) - C^2 \right] = \\
 &= \frac{4\pi\beta}{g^2} \int_0^\infty [C^2 r^2 (\operatorname{th}^2 C r - 1) - 2 C r \operatorname{th} C r + 1] dr
 \end{aligned}$$

Através da mudança de variável $r' = C r$, obtemos

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{4\pi\beta}{g^2} \left[\frac{1}{C} \int_0^\infty \frac{r'^2 dr'}{\operatorname{sh}^2 r'} - \frac{2}{C} \int_0^\infty r' (\operatorname{th} r' - 1) dr' + \frac{1}{C} \int_0^\infty dr' \right] = \\
 &= \frac{4\pi\beta}{g^2} \left[\frac{1}{C} \frac{\pi^2}{6} - \frac{2}{C} \frac{\pi^2}{12} + \left(-\frac{2}{C} \frac{r'^2}{2} + \frac{r'}{C} \right) \Big|_0^\infty \right] = \\
 &= \frac{4\pi\beta}{g^2 C} (-r'^2 + r') \Big|_{r'=0}^\infty
 \end{aligned} \tag{4.41}.$$

O resultado acima substituído em (4.38) nos leva a surpreendente conclusão de que a energia livre do monopolo, a altas temperaturas, **diverge!** Contudo, esta não é a primeira vez que surge esse tipo de divergência.

No trabalho da ref. [2.7], Gross et al. calcularam a ação efetiva para configurações periódicas no tempo euclidiano e seu resultado, escrito na forma manifestamente invariante de

gauge foi

$$\Gamma[A_\mu] \sim \frac{1}{\beta} \int d^4x \hat{tr} \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} m_{cl}^2 T^2 (\Omega - 1)^2 \right] \quad (4.42),$$

onde

$$(\Omega - 1)^2 \sim \left[\int_0^\beta d\tau A_4(\vec{x}, \tau) \right]^2$$

Eles observaram que $(\Omega - 1)^2$ claramente faria a ação efetiva de qualquer campo com $\Omega(\omega) \neq 1$ divergir e concluíram, então, que, para temperaturas suficientemente altas, somente campos com $\Omega(\omega) = 1$ contribuiriam para a integral funcional.

Este é um tipo de interpretação possível para a divergência que obtivemos na energia livre do monopolo, ou seja, que a altas temperaturas esta configuração não seria relevante. Neste ponto é interessante lembrar que em diversos trabalhos[2] é indicada a relação de monopolos com confinamento. Por outro lado, muitos estudos[3] apontam para o deconfinamento da QCD a temperaturas e densidades altas. Estes dois resultados sugerem que o efeito de monopolos magnéticos, quando T é elevado, deve ser desprezível.

4.3 - Comentários sobre a Aproximação Usada

A fim de aprofundarmos a análise de nossos resultados, reveremos, nesta seção, o procedimento que adotamos para a obtenção dos mesmos.

Nosso primeiro passo foi fazer a aproximação semi-clássica, expandindo a ação em torno de soluções clássicas das equações de movimento. Isto foi possível i) porque havia configurações acessíveis e ii) porque a constante de acoplamento efetiva $g^2(T)$ é pequena para temperaturas suficientemente elevadas.

Após fazermos a expansão semi-clássica, tomamos os termos até a ordem quadrática nas flutuações. Para aprimorar nosso resultado, poderíamos tomar termos de ordens superiores, mas aqui valem duas ressalvas: i) como as flutuações são pequenas, o termo quadrático continuará dando maior contribuição ao resultado e ii) como as ordens superiores envolvem integrais não-gaussianas, os cálculos relativos a elas são bastante complexos.

Mesmo com a ação expandida até segunda ordem, porém, é possível melhorarmos os resultados, e de forma mais significativa do que procedendo conforme o parágrafo anterior. Ao calcularmos $\ln Z$, o escrevemos como uma expansão em 1-loop e vimos que, para T alto, as contribuições relevantes são dadas pelos primeiros gráficos da mesma. Entretanto, podemos tomar ainda mais termos dessa expansão, o que aumenta consideravelmente a complexidade dos cálculos.

Com relação ao monopolo, porém, mesmo considerando mais gráficos na expansão não poderíamos eliminar a divergência na sua energia livre, pois ela está no único termo que depende quadraticamente de T . Poderíamos perguntar se esta divergência não seria consequência de alguma limitação do cálculo perturbativo. Entretanto, a expressão geral que obtivemos para a

energia livre de defeitos na QCD, (4.38), admite um resultado finito se considerarmos outros tipos de soluções estáticas (e o caso, por exemplo, de qualquer solução com $A_4 = 0$, para a qual tomamos $V_4 = 0$).

Obtivemos a expressão (4.38) ao aproximarmos os gráficos (4.34) pelo seu valor a momento externo nulo, com base no argumento da ref.[2.3] (que vale quando T é elevada). Um cálculo completo dos gráficos pode, então, aperfeiçoar nosso resultado.

Observemos que a energia livre da configuração foi obtida sem considerarmos interações entre os monopolos. É possível que uma situação dinâmica modifique os resultados. Estes, porém, permanecem válidos no caso de um gás diluído de defeitos.

Como último ponto, é importante salientarmos a natureza complexa do vácuo da QCD, conforme expusemos na seção 3.3. Em nossos cálculos com o monopolo, optamos por um vácuo com energia zero, e nossos resultados referem-se a **esse** vácuo. Um estudo mais aprofundado em QCD exigiria o uso do verdadeiro vácuo da teoria (que ainda está sendo pesquisado). Não descartamos a possibilidade de que os cálculos feitos com o vácuo real da QCD possam dar um resultado diferente do que obtivemos.

REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO QUATRO

- [1] O.K.Kalashnikov, Fortschr. Phys. 32 (1984) 525
- [2] G. 'tHooft, Phys.Scr. 25 (1982) 133
V.P.Nair e C.Rosenzweig, Phys.Rev.D31 (1985) 401
- [3] Veja, por exemplo, S.A.Bonometto e A.Masiero, Riv.Nuovo Cim. 9 (1986) 1

C O N C L U S ã O

Este trabalho foi dedicado à determinação de uma expressão formal para a energia livre de defeitos topológicos da cromodinâmica quântica no limite de altas temperaturas. O principal motivo que nos moveu a este fim foi o interesse em aplicar, à QCD, um método que nos permite distinguir as fases de uma teoria de campos por meio da análise da energia livre de defeitos topológicos da mesma.

Em nossos cálculos utilizamos a aproximação semi-clássica e a expansão até 1-loop, associadas ao limite de altas temperaturas. Como vimos na seção 4.3, se quisermos efetuar cálculos em ordem superior à destas aproximações, teremos que trabalhar com expressões bem mais complexas, e cuja contribuição é inferior à da ordem que consideramos.

O método que utilizamos enfrentou duas dificuldades principais em sua aplicação à QCD. Primeira: devido a problemas infravermelhos, a expansão perturbativa é limitada[2.9] nesta teoria; porém, como nossa expansão foi somente até 1-loop, nossos resultados são consistentes. Segunda: o vácuo da QCD ainda não está definido e, devido a esta indefinição, tivemos a opção de utilizar o vácuo que nos era mais conveniente.

Através da expressão geral formal que obtivemos para a energia livre de defeitos estáticos da QCD, eq. (4.38), poderemos determinar a temperatura crítica relativa às diferentes soluções desta teoria fazendo $F_A = 0$. No momento, a solução estática conhecida que atende aos requisitos de estabilidade,

energia finita e topologia não-trivial é o monopolo de Prasad e Sommerfield[2.14]. A aplicação de (4.38) a esta configuração nos conduziu a uma energia livre divergente que, de acordo com Gross et. al[2.7], indicaria que este monopolo não deve possuir um papel relevante a altas temperaturas.

Esta interpretação encontra respaldo em outras pesquisas. Como vimos, a altas temperaturas a QCD encontra-se em uma fase deconfinada, o plasma de quarks e glúons[4.3]. Por outro lado, monopolos magnéticos têm sido associados ao fenômeno de confinamento em teorias de gauge[4.2]. Assim, é coerente esperarmos que, a altas temperaturas, estas configurações não dêem contribuição relevante. Em um trabalho recente(*), Laursen e Schierholz obtiverem um resultado na rede que indica que a densidade de monopolos na fase deconfinada deve ser, realmente, pequena.

Devido a generalidade da expressão (4.38), ela admite futuras aplicações, à medida que novos defeitos topológicos estáticos da QCD forem sendo descobertos.

(*) M.L. Laursen e G. Schierholz, Evidence for monopoles in the quantized $SU(2)$ lattice vacuum: a study at finite temperature, preprint DESY 87-061 (Junho, 1987).

A P P E N D I C E S

Notação

Usaremos no texto a convenção onde índices repetidos significam que estão somados, exceto quando indicarmos explicitamente o contrário. Os índices gregos ($\mu, \nu, \rho, \sigma, \lambda, \dots$) variarão sempre de 0 a 3 (para o espaço de Minkowski) ou de 1 a 4 (para o espaço euclidiano). Os índices (a, b, c, i, j, k, \dots) variarão de 1 a 3, exceto em casos especiais, que indicaremos no texto.

No espaço de Minkowski, a métrica que adotamos é

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1}).$$

Sejam x^μ o vetor **contravariante**, definido, nesse espaço, por

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) \quad (\text{A.2}),$$

e x_μ o vetor **covariante**, dado por

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (\text{A.3}).$$

Definimos, então, o **produto escalar**

$$x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu = x_0^2 - \vec{x}^2 \quad (\text{A.4})$$

e introduzimos a **derivada**

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \quad (\text{A.5}).$$

que nos permite definir o operador d'Ambertiano

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \partial^\mu \partial_\mu \quad (\text{A.6}).$$

As matrizes de Dirac são dadas por

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) \quad (\text{A.7})$$

que, na representação padrão, assumem a forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8}).$$

"I" representa a matriz unidade de dimensão 2×2 , e $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$, com os σ^i dados pelas matrizes de Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9}),$$

que são hermitianas [$\sigma^i = (\sigma^i)^\dagger$] e obedecem

$$\sigma^k \sigma^j = i \epsilon^{kjl} \sigma^l \quad (\text{A.10}).$$

ϵ^{kjl} é o pseudotensor de Levi-Civita, dado por

$$\epsilon^{kjl} = \begin{cases} 1, & \text{se } k,j,l \text{ é permutação par de } 1,2,3 \\ -1, & \text{se } k,j,l \text{ é permutação ímpar de } 1,2,3 \\ 0, & \text{outros} \end{cases} \quad (\text{A.11}).$$

Sugerimos a leitura do apêndice G, onde há informações sobre os espaços euclidiano e de Minkowski.

Exceto quando afirmarmos o contrário, usaremos

unidades onde $\hbar = c = k_B = 1$.

(\hbar : constante de Planck dividida por $2\pi = 4,14 \times 10^{-15} / 2\pi \text{ eV.s}$;

c : velocidade da luz no vácuo = 3×10^8 m/s;

k_e : constante de Boltzmann = $8,36 \times 10^{-5}$ eV/molec.K).

Referências localizadas em capítulos diferentes daquele onde as citamos estarão sempre acompanhadas do número do seu capítulo de origem.

Teoria dos Campos

Nosso objetivo, neste apêndice, certamente não é apresentar a teoria dos campos, o que podemos encontrar em livros-texto (veja, por exemplo, as refs. [1.11] e [1.13]), mas apenas recordar alguns conceitos fundamentais.

Um **campo** é uma função ou um conjunto de funções da posição e do tempo [por exemplo, $\phi(x)$] e podemos encontrar diversos exemplos a nível clássico, como é o caso do campo eletromagnético. Se a função que define um campo tem o mesmo valor em cada ponto, quaisquer que sejam as coordenadas que escolhermos, dizemos que o campo é **escalar**. Se o conjunto de funções forma as componentes de um vetor ou tensor, nos referimos a campos **vetoriais** ou **tensoriais**. Analogamente podemos ter um campo espinorial, um campo espinio-vetorial, etc.

A amplitude do campo em cada ponto x do espaço-tempo define um grau de liberdade do mesmo, de forma que qualquer campo pode ser entendido como um sistema que possui infinitos graus de liberdade. Esta propriedade dos campos permite que estendamos o procedimento da teoria de partículas para a teoria dos campos, definindo, para os campos, uma lagrangiana, equações de movimento, momentos canonicamente conjugados a cada campo, etc.

Na mecânica quântica não-relativística (MQNR), o tempo aparece como um parâmetro das grandezas observáveis, enquanto que as coordenadas da posição são operadores. Na

relativística, porém, ao invés de o tempo tornar-se um operador, fazemos com que as coordenadas da posição tornem-se parâmetros, juntamente com o tempo, de campos. O campo serviria de "meio" para transportar as interações entre as partículas, que são os quanta dos campos.

Fazemos a quantização (canônica) dos campos em estreita analogia com os métodos utilizados na teoria das partículas, seguindo, em geral este procedimento: passamos a representar o campo, que classicamente é uma função, por um **operador** dependente das coordenadas, que satisfaz as mesmas equações do campo clássico correspondente. Construímos, então, os operadores que representam as grandezas fundamentais, como a energia e o momento, e encontramos seus autovalores e autofunções. Com a equação de movimento podemos determinar a evolução dos operadores de campo a partir dos dados iniciais e, impondo as relações de comutação (no caso de bósons) ou anti-comutação (no caso de férmions) determinamos por completo a estrutura quântica.

TEORIA DOS GRUPOS. SU(3), SU(2), SU(N)

Um grupo é um conjunto $G = \{g_0, g_1, \dots, g_i, \dots\}$ de elementos arbitrários g_i tal que entre os elementos definimos uma regra de composição (\circ) com as seguintes propriedades:

- 1) a composição é sempre realizável, resultando novamente em um elemento do grupo: se $g_i \in G$ e $g_k \in G$, então $g_i \circ g_k = g_j \in G$;
- 2) a composição é **associativa**: $g_i \circ (g_k \circ g_j) = (g_i \circ g_k) \circ g_j$;
- 3) existe um **elemento unidade**, g_0 , em G tal que, para qualquer $g_i \in G$ temos $g_0 \circ g_i = g_i \circ g_0 = g_i$;
- 4) para um elemento g_i em G existe em G outro elemento $g_s = g_i^{-1}$, chamado **inverso** de g_i , tal que $g_i \circ g_i^{-1} = g_i^{-1} \circ g_i = g_0$.

Além disso, se a composição obedece a regra de comutação $g_i \circ g_j = g_j \circ g_i$ para quaisquer $g_i, g_j \in G$, então referimo-nos a um grupo comutativo ou **abeliano** (do contrário, o grupo será **não-abeliano**).

O número de elementos do grupo é chamado **ordem** do grupo. Podemos nos referir a grupos finitos ou infinitos. Grupos infinitos de interesse especial são os chamados grupos contínuos ou **grupos de Lie**; seus elementos g_α são indexados unicamente por um conjunto de parâmetros $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \equiv \alpha$, que podem variar continuamente, originando assim elementos "infinitesimalmente próximos" a qualquer outro (ou seja, g_α é uma função contínua e de valor único dos parâmetros α).

Os grupos que mais nos interessam são aqueles cujos elementos são transformações geométricas ou físicas, os

Fizemos uso, acima, da propriedade **produto escalar** entre dois elementos, a qual obedece as regras (z^* simboliza o complexo conjugado de z):

- a) $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$
 b) $\langle a|(b+c)\rangle = \langle a|b\rangle + \langle a|c\rangle$
 c) $\langle a|(\lambda b)\rangle = \lambda \langle a|b\rangle$, $\forall \lambda$

Podemos verificar que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ e, em geral, podemos rearranjar ciclicamente operadores submetidos a essa operação.

E muitas vezes conveniente usarmos a **forma matricial** do operador, ou seja, representá-lo por elementos de matriz (com relação a uma certa base) e organizar estes últimos na seguinte forma quadrada:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \dots & \Omega_{1n} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \dots & \Omega_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Omega_{n1} & \Omega_{n2} & \dots & \Omega_{nn} \end{pmatrix}$$

Chamamos, então, o operador de **matriz**, e as regras de soma e multiplicação de operadores tornam-se as de matrizes.

As vezes necessitamos passar de uma base a outra, $|e\rangle \rightarrow |e'\rangle$. A esta mudança de base denominamos transformação de \mathbb{R}_n em si mesmo. Podemos efetua-la por meio de um operador S não singular, ou seja,

$$|e\rangle \rightarrow |e'\rangle = S|e\rangle \quad , \quad |e\rangle = S^{-1}|e'\rangle$$

Uma mudança de base induz a mudança $\Omega \rightarrow \Omega' = S^{-1} \Omega S$ nos operadores, a qual chamamos de operação de semelhança. Em geral dizemos que uma mudança na base equivale a uma mudança para uma nova **representação** dos operadores, efetuada por uma

transformação de semelhança.

O traço de um operador é invariante por uma transformação de semelhança, isto é,

$$T_{\Lambda} \Omega' = T_{\Lambda} (S^{-1} \Omega S) = T_{\Lambda} (\Omega S S^{-1}) = T_{\Lambda} \Omega$$

O mesmo vale para o determinante de uma matriz:

$$\det \Omega' = \det (S^{-1} \Omega S) = (\det S^{-1})(\det \Omega)(\det S) = \det \Omega$$

Portanto, dizemos que o traço e o determinante são **invariantes** de um operador.

Apresentaremos agora alguns grupos de nosso interesse particular (mais detalhes sobre a teoria dos grupos podem ser obtidos no livro de P. Roman, *Theory of Elementary Particles* (North-Holland, Amsterdam, 1960), ou em outros livros do assunto).

O grupo $SU(3)(*)$ é composto por todas as matrizes unitárias $\{v\}$ 3×3 e com determinante igual a 1. Ou seja v^{\dagger} é a matriz transposta da conjugada complexa de v : $v^{\dagger} = (v^*)^T$,

$$v v^{\dagger} = 1, \quad \det v = 1 \quad (C.1).$$

Podemos escrever a matriz v na forma

$$v = (v^a_b) = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 \end{pmatrix} \quad (C.2),$$

de modo que os elementos da matriz conjugada hermitiana (v^{\dagger}) são

(*) $SU(3)$: Special Unitary, 3×3 . 'Special' significa que as matrizes têm determinante igual a 1.

$$v_a^{\dagger b} = (v_b^a)^* \quad (C.3).$$

Podemos colocar a transformação realizada pelos elementos de $SU(3)$ sob a forma

$$q \rightarrow vq \quad (C.4)$$

ou

$$q^a \rightarrow v_b^a q^b \quad (C.5),$$

onde

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (C.6).$$

Definiremos agora **tensor**: $T_{a_1 a_2 \dots a_m}^{i_1 i_2 \dots i_n}$ é a componente de um tensor T de ordem (n, m) se sua lei de transformação é

$$T_{a_1 \dots a_m}^{i_1 \dots i_n} \longrightarrow v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n} v_{a_1 \dots a_m}^{\dagger b_1 \dots b_m} T_{b_1 \dots b_m}^{j_1 \dots j_n} \quad (C.9).$$

Um tensor T de ordem (n, m) é **reduzível** se, por uma contração dos índices, um novo tensor não-nulo T' de ordem (n', m') puder ser formado, com $n' + m' < n + m$; do contrário, ele será **irreduzível**.

Consideremos um tensor de ordem (n, m) . Seja d o número de suas componentes linearmente independentes (o que define a **dimensão** do tensor). Podemos selecionar estas d componentes e escrever

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_d \end{pmatrix} \quad (C.8).$$

Usando (C.4), podemos escrever a transformação (C.7), em termos de ϕ , sob a forma

$$\phi \rightarrow V\phi$$

onde V é uma matriz $d \times d$. Como as V 's satisfazem a mesma álgebra que as v 's, consideramos $\{V\}$ uma **representação**, denotada por (d) , do grupo $SU(3)$, $\{v\}$. Além disso, a representação será **irredutível** se o tensor ϕ for; senão, será **reduzível**.

Uma transformação infinitesimal de $SU(3)$ contém, por causa de $\det v = 1$, $3^2 - 1 = 8$ quantidades infinitesimais reais independentes $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_8$:

$$v = \mathbb{1} + \frac{i}{2} \epsilon_a \lambda_a \sim e^{i\epsilon_a \lambda_a / 2} \quad (C.9),$$

onde as λ_a 's são oito matrizes hermitianas 3×3 , e $\mathbb{1}$ denota a matriz unidade.

Estas 8 matrizes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8$ são chamadas de **geradores** do grupo $SU(3)$, e normalmente são dadas por

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & & & (C.10). \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

O grupo $SU(2)$ é análogo ao grupo $SU(3)$. Ele é

composto pelos elementos $\{s\}$, que são matrizes unitárias 2×2 com determinante igual a 1, e é também conhecido como grupo de isospin. Suas propriedades são as do grupo de rotações tridimensionais usual (com espinores), exceto pela substituição do espaço ordinário pelo espaço de isospin. Os geradores de $SU(2)$ são as matrizes de Pauli, (A.9).

Os grupos $SU(2)$ e $SU(3)$ são particularizações do que conhecemos por grupo $SU(N)$. Este consiste de todas as matrizes $N \times N$ unitárias, $\{u\}$, com determinante igual a um. Possui $M = N^2 - 1$ geradores T_λ que satisfazem

$$T^\lambda = T^{\dagger\lambda}, \quad T_\lambda (T^\lambda T^m) = \frac{1}{2} \delta^{\lambda m},$$

$$[T^\lambda, T^m] = i f^{\lambda mn} T^n \quad (C.11).$$

Podemos identificar

$$T_\lambda = \sigma^\lambda / 2 \quad \text{para } SU(2), \text{ e } \lambda^\lambda / 2 \quad \text{para } SU(3)$$

($\{\sigma^\lambda\}$ são as matrizes de Pauli).

$f^{\lambda mn}$ são as constantes de estrutura anti-simétricas da álgebra do grupo. Para $SU(2)$, $f^{\lambda mn} = \epsilon^{\lambda mn}$ e dado por (A.11); no caso de $SU(3)$, temos os seguintes valores:

lmn	$f^{\lambda mn}$
	1
123	1/2
147	-1/2
156	1/2
246	1/2
257	1/2
345	-1/2
367	$\sqrt{3}/2$
458	$\sqrt{3}/2$
678	

(C.12).

Sob uma transformação infinitesimal, a matriz u pode ser escrita na forma

$$u = \mathbb{1} - i\theta^a T^a$$

onde os θ^a são reais e infinitesimais.

INTEGRAIS GAUSSIANAS

Consideremos o conjunto de funções escalares de quadrado integrável (ou seja, elas e seus módulos ao quadrado são integráveis) dado por $\{U_i(x) ; i = 1, 2, \dots, \infty\}$, cujos elementos respeitam

$$\int dx U_i(x) U_j(x) = \delta_{ij} \quad (D.1).$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} U_i(x) U_i(y) = \delta(x-y)$$

Isto implica que $\{U_i(x)\}$ forma uma base ortonormal completa, de modo que qualquer função escalar real $\phi = \phi(x)$ pode ser escrita sob a forma

$$\phi(x) = \sum_i a_i U_i(x) \quad (D.2).$$

Seja $F[\phi]$ um funcional de ϕ tal que

$$I = \int D\phi F[\phi] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} da_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} da_n F[a_1, \dots, a_n] \quad (D.3)$$

define a integração funcional de $F[\phi]$, e assumamos que ele possui a forma **gaussiana**

$$F[\phi] = \exp\left[-\frac{1}{2} \int dx \phi^2(x)\right] \quad (D.4).$$

Escrevendo $\phi(x)$ na forma (D.2), obtemos

$$F[\phi] = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right) \quad (\text{D.5}),$$

de modo que podemos reescrever (D.3) como

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} da_j \left(\exp -\frac{1}{2} a_j^2\right) \quad (\text{D.6}).$$

Sabemos, porém, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = 1 \quad (\text{D.7}),$$

de maneira que (D.6) resulta em

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{n/2} \quad (\text{D.8}).$$

Notemos que, se redefinirmos adequadamente a medida de integração funcional ($D\phi$), podemos obter um resultado normalizado para integrandos gaussianos. Assim, adotamos a normalização

$$\int D\phi \exp\left[-\frac{1}{2} \int dx \phi^2(x)\right] \equiv 1 \quad (\text{D.9}).$$

Se tivermos um núcleo real simétrico $\hat{O}(x,y)$ tal que

$$\int dy \hat{O}(x,y) U_i(y) = \lambda_i U_i(x) \quad , \quad \lambda > 0 \quad (\text{D.10}),$$

obtemos

$$\int D\phi \exp\left\{-\frac{1}{2} \int dx dy \phi(x) \hat{O}(x,y) \phi(y)\right\} = \det^{-1/2} \hat{O}(x,y) \quad (\text{D.11}).$$

Nesta expressão formal, "det" ou determinante representa o produto dos autovalores do operador \hat{O} na base $\{U_i(x)\}$, que o diagonaliza. E por este motivo que vale a identidade

$$\det \hat{O} = \exp(\text{Tr} \ln \hat{O}) \quad (\text{D.12}),$$

onde "tr" significa traço.

Podemos obter uma expressão análoga a (D.11) para campos fermiônicos decompondo

$$\psi(x) = \sum_i c_i U_i(x) \quad , \quad \bar{\psi}(x) = \sum_i \bar{c}_i U_i^*(x) \quad (\text{D.13}).$$

As quantidades $\{c_i\}$ e $\{\bar{c}_i\}$ que introduzimos contêm o caráter anti-comutante desses campos e formam uma **álgebra de Grassman**, para a qual

$$c_i^2 = \bar{c}_i^2 = 0 \quad (\text{D.14}),$$

e a operação de integração é definida por

$$\int dc_i = \int d\bar{c}_i = 0 \quad (\text{D.15}).$$

$$\int c_i dc_i = \int \bar{c}_i d\bar{c}_i = 1$$

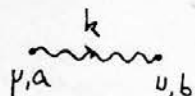
De (D.13) e das propriedades acima resulta

$$\int D\bar{\psi} D\psi \exp\left[-\int dx \bar{\psi}(x) \psi(x)\right] = 1 \quad (\text{D.16})$$

e

$$\int D\psi D\bar{\psi} \exp\left[-\int dx dy \bar{\psi}(x) \hat{O}(x,y) \psi(y)\right] = \det^{+1} \hat{O}(x,y) \quad (\text{D.17}).$$

gluon



$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{\delta^{ab}}{k^2} \left[\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]$$

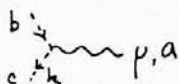
Vertices:

fermion-gluon



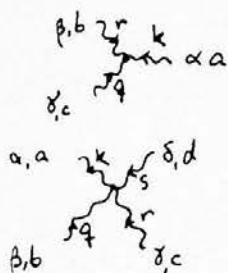
$$-g \gamma_\mu \lambda_{\mu j}^a / 2i$$

ghost-gluon



$$-ig f_{abc} k_\mu$$

gluon-gluon



$$-ig f_{abc} [\delta_{\beta\gamma} (r-q)_\alpha + \delta_{\alpha\gamma} (k-r)_\beta + \delta_{\alpha\beta} (q-k)_\gamma]$$

$$-g^2 [f_{ade} f_{ebc} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\gamma} - \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\delta\beta}) + f_{abe} f_{edc} (\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\delta\beta}) + f_{ace} f_{edb} (\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\delta\beta})]$$

Como ilustração, obteremos a forma gráfica da dos dois primeiros termos da somatória em (4.31), dada por

$$\Gamma \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{Tr}(G_{ba} \bar{O}_{ab})^n \quad (\text{E.1}).$$

Para $n = 1$, obtemos

$$\Gamma_1 = \text{Tr}(G_{ba} \bar{O}_{ab}) = \text{Tr} \left[\left(\frac{\delta_{ba}}{-\partial^2} \right) (g f_{abc} A_\mu^c \partial_\mu) \right] = \text{Tr} \left(g \frac{f_{aac}}{-\partial^2} A_\mu^c \partial_\mu \right) = 0$$

Para $n = 2$, temos

$$\Gamma_2 = -\frac{1}{2} (-1)^2 \text{Tr}(G_{ab} \bar{O}_{bc} G_{cd} \bar{O}_{da}) \quad (\text{E.2}).$$

Substituindo a expressão de \bar{O}_{ab} , resulta

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= -\frac{1}{2}(-1)^2 \text{Tr} (G_{ab} g_{f_{bc}} A_\mu^b \partial_\mu G_{cd} g_{f_{das}} A_\nu^d \partial_\nu) = \\ &= \frac{(-1)^2}{-2} g^2 f_{bc} f_{das} \text{Tr} (G_{ab} A_\mu^b \partial_\mu G_{cd} A_\nu^d \partial_\nu) \end{aligned}$$

Como o traço é uma operação cíclica, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \frac{(-1)^2}{2} g^2 f_{bc} f_{das} \text{Tr} (\partial_\nu G_{ab} A_\mu^b \partial_\mu G_{cd} A_\nu^d) = \\ &= \frac{(-1)^2}{2} g^2 f_{bc} f_{das} \int \langle x | \partial_\nu G_{ab} A_\mu^b \partial_\mu G_{cd} A_\nu^d | x \rangle d^4x \end{aligned}$$

Usando as propriedades (2.32), obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \frac{(-1)^2}{2} g^2 f_{bc} f_{das} \int \langle x | \partial_\nu G_{ab} | p \rangle \langle p | A_\mu^b | y \rangle \langle y | \partial_\mu G_{cd} | q \rangle \langle q | A_\nu^d | x \rangle d^4x. \\ \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4y}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} &= \frac{(-1)^2}{-2} g^2 f_{bc} f_{das} \int (-i p_\nu) \tilde{G}_{ab}(p) \langle x | p \rangle A_\mu^b(y) \langle p | y \rangle \cdot \\ &\cdot (-i q_\mu) \tilde{G}_{cd}(q) \langle y | q \rangle A_\nu^d(x) \langle q | x \rangle d^4x \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4y}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} = \\ &= \frac{(-1)^2}{2} g^2 f_{bc} f_{das} (-i)^2 \int p_\nu \tilde{G}_{ab}(p) e^{ipx} A_\mu^b(y) e^{-iqy} q_\mu \tilde{G}_{cd}(q) e^{iqx} A_\nu^d(x) e^{-iqx} d^4x \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4y}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \end{aligned}$$

Usando a transformação $(p, q) \rightarrow (k = p - q, q)$, cujo jacobiano é igual a um, podemos reescrever a expressão de Γ_2 na forma

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \frac{(-1)^2}{-2} (-i)^2 f_{bc} f_{das} g^2 \int d^4x d^4y A_\mu^b(y) A_\nu^d(x) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} \\ &\cdot \left[\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (k+q)_\nu \tilde{G}_{ab}(k+q) q_\mu \tilde{G}_{cd}(q) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.3}).$$

Notemos que, nesta expressão, a parte definida por

$$\mathcal{Z} \equiv -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ig f_{bc} q_\mu) [-ig f_{das} (k+q)_\nu] \tilde{G}_{ab}(k+q) \tilde{G}_{cd}(q) \quad (\text{E.4})$$

admite ser colocada na forma gráfica, de acordo com as regras de Feynman que apresentamos, e corresponde a

$$\} = \text{diagram} \quad (E.5).$$

No limite de altas temperaturas, porém, este gráfico pode ser aproximado [2.3] pelo seu valor a momento externo nulo ($k = 0$). Ou seja,

$$\} \underset{dt.}{\sim} \text{diagram} = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (-ig f_{bce} t_p^c) (-ig f_{das} t_p^d) \tilde{G}_{ab}(q) \tilde{G}_{cd}(q) \quad (E.6)$$

Levando este resultado a (E.3), obtemos

$$\Gamma_2 \sim \text{diagram} \int d^4 x d^4 y A_\mu^a(y) A_\nu^b(x) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)}$$

Lembrando que

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} = \delta^4(x-y) \quad (E.7),$$

resulta

$$\Gamma_2 \sim \text{diagram} \int d^4 x A_\mu^a(x) A_\nu^b(x) \quad [\text{T alto}] \quad (E.8).$$

Atribuindo, formalmente, aos campos de gauge A a correspondência com "pernas" externas no gráfico (E.8), encontramos

$$\Gamma_2 \sim \text{diagram}$$

que é justamente o que temos em (4.33).

Espaço Euclidiano

O espaço euclidiano em 4 dimensões é obtido do espaço de Minkowski por uma rotação, no sentido horário, do eixo real no plano de z_0 complexo, em direção ao eixo imaginário negativo (veja fig. F.1).

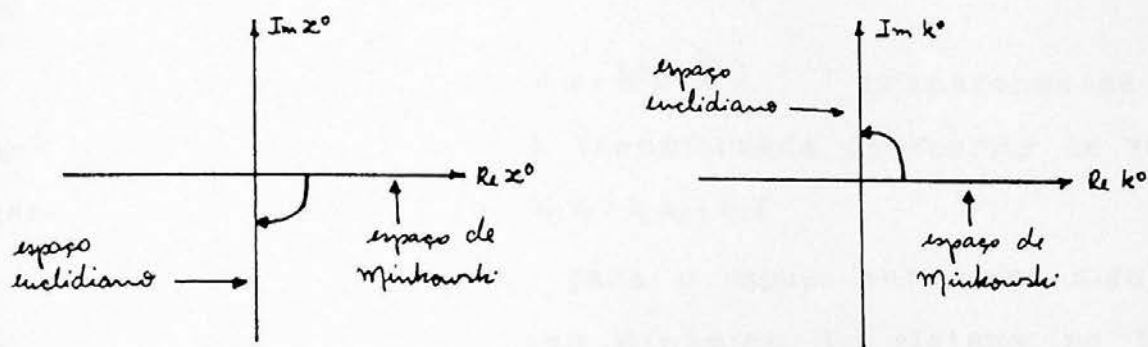


Figura F.1 - Como fazer a continuação do espaço de Minkowski para o euclidiano

Um ponto, no espaço euclidiano, é denotado por x_E , e relaciona-se com o ponto correspondente $x = (x_0, \vec{x})$ do espaço de Minkowski de acordo com as seguintes relações:

$$\begin{aligned} x_E &= (x, x_4) \\ x_4 &= i x_0 \text{ (real)} \\ d^4 x_E &= i d^4 x \\ x_E^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -x^2 \end{aligned} \tag{F.1}.$$

Definimos o espaço dos momentos euclidiano tal que $k_4 x_4 = k^0 x^0$. Escolhemos esta convenção de modo a que, na propagação de uma onda plana, um sentido positivo de x^0 corresponda a um sentido positivo de x_4 . Assim, giramos o

eixo k^0 no sentido anti-horário, em direção ao eixo imaginário positivo (fig. F.1), o que corresponde as transformações

$$k_\epsilon = (\vec{k}, k_4)$$

$$k_4 = -ik_0 \text{ (real)}$$

$$d^4k_\epsilon = -i d^4k$$

(F.2).

$$k_\epsilon^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = -k^2$$

Notemos que $k \cdot x = k^0 x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x}$ transforma-se em $k_\epsilon \cdot x_\epsilon = k_4 x_4 - \vec{k} \cdot \vec{x}$, mas, ao tomarmos a transformada de Fourier de $f(k^2)$, podemos substituir $k \cdot x$ por $k_\epsilon \cdot x_\epsilon = k_4 x_4 + \vec{k} \cdot \vec{x}$.

A continuação para o espaço euclidiano significa que consideramos a evolução dinâmica do sistema no tempo imaginário. Ou seja, em princípio precisamos resolver as equações de movimento onde o tempo x^0 é substituído por $-ix_4$, onde x_4 é um parâmetro real. Substituímos a invariância de Lorentz da densidade de lagrangiana pela invariância com respeito a rotações $O(4)$ no espaço euclidiano.

Substituímos um campo escalar real $\phi(x)$, definido no espaço de Minkowski, por um campo escalar real $\phi(x_\epsilon)$ invariante por $O(4)$, no espaço euclidiano.

Um campo vetorial massivo $A^\mu(x)$, de componentes reais, substituímos por um campo vetorial $A^\nu(x_\epsilon)$, de componentes reais, segundo a regra

$$A^k(x) \longrightarrow A^k(x_\epsilon)$$

$$A^0(x) \longrightarrow iA^4(x_\epsilon)$$

(F.3).

Observemos que A^0 continua para A^4 com sinal oposto ao de x^0 porque tem que transformar-se como $\partial/\partial x^0$. Substituímos a condição $\partial_\mu A^\mu = 0$ por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4} = 0 \quad (\text{F.4}).$$

Para vetores euclidianos, não há distinção entre índices superiores e inferiores.

As matrizes de Dirac, no espaço euclidiano, tornam-se

$$\vec{\gamma}_E = \vec{\gamma} \quad , \quad \gamma_4 = i\gamma_0 \quad , \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu} \quad , \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \quad .$$

A integral funcional para a amplitude vácuo-vácuo na forma euclidiana é dada por

$$\langle 0^+ | 0^- \rangle_J = \exp \frac{i}{\hbar} W[J] = \mathcal{N} \int D\phi \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \{ S_E[\phi] - (J, \phi)_E \} \right] \quad (\text{F.5}),$$

onde

$$S_E[\phi] = \int d^4 x_E \mathcal{L}_0(x_E) = i S[\phi] \quad (\text{F.6})$$

$$(J, \phi)_E = \int d^4 x_E J(x_E) \phi(x_E) \quad (\text{F.7}).$$

Nesta forma, o funcional gerador é, formalmente, a função de partição de um sistema clássico em 4 dimensões, a temperatura \hbar . De (F.1) e (F.2), podemos ainda ter as regras

$$\int d^4x = -i \int d^4x_E = -i \int_0^\beta dx_4 \int_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{x}$$

$$k_0 = ik_4 = i\omega_n = \begin{cases} i \frac{2\pi n}{\beta}, & \text{para bósons e ghosts} \\ i \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, & \text{para férmions} \end{cases} \quad (\text{F.8}).$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} = \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad ; \quad (2\pi)^4 \delta^4(k_1+k_2+\dots) = \\ = -i(2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\dots) \beta \delta_{\omega_1+\omega_2+\dots}$$

Para ilustrar as regras expostas, obteremos a expressão da lagrangiana (1.22), dada por

$$\mathcal{L}_{F,ix} = - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^{\mu\alpha})^2, \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

no espaço euclidiano. Temos que

$$S_E = -iS = -i \int d^3\vec{x} dx_0 \left[- \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^{\mu\alpha})^2 \right]$$

Usando (A.3) e a métrica (A.1), obtemos

$$S_E = \frac{i}{2\alpha} \int d^3\vec{x} dx_0 (\partial_0 A_0^\alpha - \partial_i A_i^\alpha)^2$$

A aplicação das regras (F.1) e (F.3) nos leva a

$$S_E = \frac{i}{2\alpha} \int d^3\vec{x} d(-ix_4) (i\partial_4 A_4 - \partial_j A_j)^2 = \\ = \frac{1}{2\alpha} \int d^3\vec{x} dx_4 (-\partial_4 A_4 - \partial_j A_j)^2 = \int d^4x_E \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2$$

Portanto,

$$L_{\text{fixe}} = \frac{1}{2\alpha} (\partial_p A_p^a)^2$$

Expansão Semi-clássica da Ação de Yang-Mills

Ilustraremos, neste apêndice, a maneira de se efetuar uma expansão semi-clássica, tomando como exemplo a ação de Yang-Mills, que é dada por

$$S_{YM} = \int d^4x \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 \quad (G.1)$$

e que, em termos dos campos A , adquire a forma

$$\begin{aligned} S_{YM}[A] = & \frac{1}{4} \int d^4x \left[(\partial_\mu A_\nu^a)^2 - (\partial_\mu A_\nu^a) \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} (\partial_\mu A_\nu^c) A_\mu^b A_\nu^c + (\partial_\nu A_\mu^a)^2 - \right. \\ & - g f_{abc} (\partial_\nu A_\mu^a) A_\mu^b A_\nu^c + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \partial_\mu A_\nu^a - g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \partial_\nu A_\mu^a + \\ & \left. + g^2 f_{abc} f_{amn} A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^m A_\nu^n \right] \quad (G.2). \end{aligned}$$

Formalmente, a expansão semi-clássica consiste em tomarmos

$$S[A_\mu + Q_\mu] = S[A_\mu] + \delta S + \frac{\delta^2 S}{2!} + \dots \quad (G.3),$$

onde os termos do segundo membro serão definidos a seguir. $S[A_\mu]$ é simplesmente a ação calculada no campo clássico A_μ , em torno do qual a expansão está sendo feita. Deste modo, podemos escrever

$$S[A_\mu] = S_{YM}[A_\mu] \quad (G.4).$$

O termo seguinte, δS , é dado por

$$\delta S = \left(\frac{\delta S_{\text{YM}}}{\delta A_\mu^a} \right)_A a_\mu^a + \left(\frac{\delta S_{\text{YM}}}{\delta \partial_\mu A_\nu^a} \right)_A \partial_\mu a_\nu^a = \int d^4x \left[\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu^a} \right)_A a_\mu^a + \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu A_\nu^a} \right)_A \partial_\mu a_\nu^a \right] \quad (\text{G.5}).$$

Usando a integração por partes, obtemos

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu^a} \right)_A + \partial_\mu \left[\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu A_\nu^a} \right)_A a_\nu^a \right] - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu A_\nu^a} \right)_A a_\nu^a \right\}$$

Admitindo que os campos se anulam no infinito, a aplicação do teorema da divergência no segundo termo do segundo membro da expressão anterior o anula, conduzindo-nos ao resultado

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu^a} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu A_\nu^a} \right)_A a_\nu^a$$

Como A é solução da equação de Euler-Lagrange, obtemos que $\delta S = 0$.

Consideremos, agora, o termo

$$\begin{aligned} \delta^2 S = & \int \left\{ \left[\left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta A_\mu^a \delta A_\nu^b} \right)_A a_\nu^b + \left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta A_\mu^b \delta \partial_\lambda A_\nu^a} \right)_A \partial_\lambda a_\nu^b \right] a_\mu^a + \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu^a} \right)_A \delta a_\mu^a + \right. \\ & \left. + \left[\left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu A_\nu^a \delta A_\lambda^b} \right)_A a_\lambda^b + \left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu A_\nu^a \delta \partial_\sigma A_\lambda^b} \right)_A \partial_\sigma a_\lambda^b \right] \partial_\mu a_\nu^a + \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu A_\nu^a} \right)_A \delta (\partial_\mu a_\nu^a) \right\} d^4x \end{aligned}$$

Integrando por partes e usando o teorema da divergência, obtemos

$$\begin{aligned} \delta^2 S = & \int d^4x \left[\left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta A_\mu^a \delta A_\nu^b} \right)_A a_\nu^b a_\mu^a + 2 \left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta A_\mu^a \delta \partial_\lambda A_\nu^b} \right)_A (\partial_\lambda a_\nu^b) a_\mu^a + \left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu A_\nu^a \delta \partial_\sigma A_\lambda^b} \right)_A \right. \\ & \left. (\partial_\sigma a_\lambda^b) \partial_\mu a_\nu^a + \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu^a} - \partial_\nu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu A_\mu^a} \right) \delta a_\mu^a \right] \end{aligned}$$

amos, também, $\delta \partial_\mu = \partial_\mu \delta$).

O ultimo termo desta integral anula-se, pois A e solução da equação de movimento. Da integração por partes resulta

$$\delta^2 S = \int d^4x A_\mu^a \left\{ \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta A_\mu^a \delta A_\nu^b} + 2 \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta A_\mu^a \delta \partial_\lambda A_\nu^b} \partial_\lambda - \partial_\sigma \left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \partial_\lambda A_\nu^b \delta \partial_\sigma A_\mu^a} \right) \partial_\lambda - \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \partial_\lambda A_\nu^b \delta \partial_\sigma A_\mu^a} \partial_\sigma \partial_\lambda \right\} A_\nu^b \quad (G.6)$$

De (G.2) obtemos as expressões

$$\left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta A_\mu^a \delta A_\nu^b} \right)_A = g^2 [f_{akb} f_{ajl} (A_\nu^b A_\mu^j \delta_{\rho\sigma} - A_\sigma^b A_\rho^j) + \frac{f_{alk}}{g} (\partial_\sigma A_\rho^a - \partial_\rho A_\sigma^a + g f_{abc} A_\sigma^b A_\rho^c)]$$

$$\left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta A_\mu^a \delta \partial_\lambda A_\nu^b} \right)_A = g f_{akb} (\delta_{\rho\lambda} A_\sigma^b - \delta_{\rho\sigma} A_\lambda^b)$$

$$\left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \partial_\lambda A_\nu^b \delta \partial_\rho A_\mu^a} \right)_A = \delta^{kl} (\delta_{\lambda\rho} \delta_{\sigma\alpha} - \delta_{\lambda\alpha} \delta_{\rho\sigma}) \quad \rightarrow \quad \left(\partial_\rho \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \partial_\lambda A_\nu^b \delta \partial_\rho A_\mu^a} \right)_A = 0$$

que, substituídas em (G.6) nos conduzem a

$$\delta^2 S = \int d^4x A_\mu^k \left\{ g^2 f_{akb} f_{ajl} (A_\rho^b A_\mu^j \delta_{\rho\nu} - A_\nu^b A_\rho^j) + f_{ajk} f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right\} + g f_{akl} [2(\delta_{\rho\nu} A_\lambda^a \partial_\lambda - A_\nu^a \partial_\mu) + \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a] + \delta^{lk} (\partial_\nu \partial_\mu - \delta_{\rho\nu} \partial^2) \} A_\nu^l \quad (G.7).$$

Seguindo este procedimento, podemos calcular também $\delta^3 S$, $\delta^4 S$, etc. Como necessitamos apenas dos termos até segunda ordem nas flutuações, limitamo-nos ao cálculo de $\delta^2 S$. Portanto (G.3) equivale, nesta aproximação, a

$$S_{YM}[A_\mu + a_\mu] = S_{YM}[A_\mu] + \frac{1}{2!} \delta^2 S,$$

com $\delta^2 S$ dado por (G.7).