

SBI-IFUSP



305M810T1311

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA

Cláudio Teufel

GRUPOS DE LIE E TEORIAS DE GRÃ-UNIFICAÇÃO

Dissertação elaborada por Marco Dimas Gubitoso no Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do grau de Mestre em Ciências sob a orientação do Prof. Dr. Gil da Costa Marques.



SÃO PAULO

1987

Defesa em 17/5/87

530.14  
G 921.9

M  
e. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Gubitoso, Marco Dimas  
Grupos de Lie e Teorias de Grã-unificação. São  
Paulo, 1987.

Dissertação (mestrado) - Universidade de São Pau-  
lo. Instituto de Física. Departamento de Física Mate-  
mática.

Área de Concentração: Física de Partículas Elemen-  
tares.

Orientador: Prof. Dr. Gil da Costa Marques

Unitermos: 1. Grupos de Lie; 2. Álgebras de Lie; 3.  
Teorias de calibre; 4. Diagramas de Dynkin.

USP/IF/SBI - 56/87

## RESUMO

Este trabalho apresenta alguns conceitos de grupos e álgebras de Lie e ao mesmo tempo mostra um método para estudar e trabalhar com grupos de Lie semisimples, com base nos diagramas de Dynkin.

A forma de apresentação não é completamente formal, mas apresenta os pontos fundamentais da elaboração do método, de modo que sua base matemática seja delineada com o propósito de tornar a leitura não muito cansativa para quem busca apenas uma visão geral do método de sua utilização.

No final, é apresentada uma revisão breve das teorias de calibre e dois exemplos de unificação baseados nos grupos  $SO(13)$  e  $E_7$ .

## ABSTRACT

This work presents some concepts in group theory and Lie algebras and, at same time, shows a method to study and work with semisimple Lie groups, based on Dynkin diagrams.

The aproach taken is not completely formal, but it presents the main points of the elaboration of the method, so its mathematical basis is designed with the purpose of making the reading not so cumbersome to those who are interested only in a general picture of the method and its usefulness.

At the end it is shown a brief review of gauge theories and two grand-unification models based on  $SO(13)$  and  $E_7$  gauge groups.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao interesse das várias pessoas que me auxiliaram na elaboração deste trabalho, através de incentivos e sugestões. Dentre elas gostaria de fazer um destaque para as seguintes:

- Gil da Costa Marques, pela orientação, incentivo e pela paciência.
- A todos os meus amigos da física, em particular ao Carlos, Jordão e à Sara, que acompanharam a evolução do trabalho desde o começo.
- Aos meus pais e meus irmãos, pelo incentivo constante.
- À minha esposa Edna, pelo carinho, apoio e pela bibliografia.
- À Cida, pela revisão e pelo incentivo.
- Ao Jajá e à Poliane, pela inspiração.
- Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

## ÍNDICE

0	Introdução .....	1
1	Álgebra de Lie .....	4
2	A divisão da álgebra de Lie .....	6
3	As raízes e suas propriedades .....	9
4	Os diagramas de Dynkin .....	20
5	A matriz de Cartan e a base de Dynkin .....	32
6	A restauração do sistema completo de raízes .....	35
7	As representações .....	38
8	Subálgebras .....	48
9	Álgebras de Lie e teorias de calibre .....	52
10	Quebra espontânea de simetria .....	60
11	Os modelos de grã-unificação .....	65
12	Exemplo de grã-unificação .....	70
13	Conclusão .....	75

## ERRATA

Apesar do cuidado na preparação deste trabalho, persistiram alguns erros. Queira por favor fazer as correções abaixo:

### página 4

Na equação 1.5 acrescente-se ' $= 0$ '.

Na última linha do antepenúltimo parágrafo, onde se lê: 'rotações em uma dimensão' leia-se 'translações em uma dimensão'.

### página 5

No final do primeiro parágrafo, acrescente-se:

'Uma álgebra é chamada de *simples* se não possuir nenhum ideal próprio. Se possuir um ideal próprio, mas este não for abeliano, então ela recebe a classificação de *semi-simples*.'

### página 7

Na equação 2.9, substituir ' $n$ ' por ' $n_i$ '. No penúltimo parágrafo, substituir ' $n = l$ ' por ' $n_0 = l$ '.

Na última linha, antes da eq. 2.12 acrescentar ' $H_i s$ '.

### página 9

Na equação 3.2, trocar ' $\alpha E_\alpha$ ' por ' $\alpha[H_i, E_\alpha]$ '.

### página 15

Na equação 3.41-c trocar ' $N_{\alpha\beta}$ ' por ' $N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}$ '.

### página 18

Na figura 6, o grupo é  $SU(3)$  e não  $SU(2)$ .

**página 34**

Onde se lê :

'-1 se  $|\alpha_i| \leq |\alpha_j|$  e se  $\alpha_i$  estiver unida a  $\alpha_j$ '

leia-se:

'-1 se  $|\alpha_i| > |\alpha_j|$  e se  $\alpha_i$  estiver unida a  $\alpha_j$ '

**página 39**

Na equação 7.5, trocar

$$\prod_k [\Gamma(\Lambda - M(k))]$$

por

$$\prod_k [(\Gamma, \Lambda - M(k))]$$

**página 49**

Ligar as bolinhas do diagrama do  $SU(5)$ .

**página 63**

No enunciado do segundo teorema de Michel, substituir  $s$  por  $\phi$ .

Não existe a página 64.

## 0. INTRODUÇÃO

O estudo das simetrias sempre teve uma grande ligação com a física. Uma boa parte das leis e modelos físicos são construídos com base em invariantes e portanto explorando as simetrias naturais dos sistemas estudados. Como exemplo, temos todas as leis de conservação, além de vários argumentos utilizados para simplificação e/ou solução de problemas.

Para descrevermos matematicamente uma simetria utilizamos o conceito de grupo. Cada transformação de simetria que fazemos num certo objeto corresponde a um elemento de um grupo, que é o grupo de simetria do objeto que está sendo transformado. Desta forma a teoria de grupos vem ganhando destaque no estudo de modelos físicos tanto como base na elaboração de teorias e como ferramenta de trabalho. Este interesse é reforçado pelo fato de que, sendo um objeto puramente matemático, sua aplicação não se restringe a uma área da física.

Basicamente podemos classificar as simetrias em discretas e contínuas. São simetrias discretas aquelas definidas por um conjunto finito de transformações, por exemplo reflexões e permutações, ou o conjunto de todas as transformações que podem ser feitas num quadrado, de modo que ele permaneça com a mesma forma. Quando a transformação é contínua, podemos parametrizá-la por um conjunto de parâmetros, digamos  $n$ , e neste caso ela pode ser descrita por um grupo contínuo de dimensão  $n$ . Por exemplo, uma rotação no  $R_3$  pode ser caracterizada por 3 ângulos e está associada ao grupo  $SO(3)$ . No caso do grupo de simetria ser contínuo e também ser uma variedade, ele é chamado de grupo de Lie.

Os grupos de Lie são de grande interesse às teorias de calibre [1],[4],[16],[32] por serem o ponto de partida na construção destas. Estas teorias são conhecidas pela sua elegância justamente por enquadrarem dentro de si o conceito de simetria de um modo fundamental, buscando construir as interações fundamentais entre as partículas a partir de transformações geradas por ações de um grupo de Lie. Tais teorias se mostraram excelentes para descrever forças fundamentais como interações eletro-fracas e a cromodinâmica quântica [31].

O sucesso deste tipo de teoria para estas interações logo sugeriu a idéia de se construir modelos mais gerais que levassem em conta todas as forças e partículas da natureza, obtendo-se assim uma teoria unificada e conseqüentemente satisfazer um dos maiores sonhos da física moderna [16]. As chamadas teorias de grã-unificação baseiam-se num subconjunto dos grupos de Lie chamados semisimples, e que serão analisados ao longo do

## INTRODUÇÃO

trabalho.

Muito embora o interesse nestes modelos ter diminuído em favor de teorias mais recentes (supersimetria e supercordas [35]), acredita-se que o enfoque e o trabalho desenvolvido aqui seja de utilidade para o interessado no estudo de partículas elementares. Além disto o estudo e o uso de grupos de Lie não diminuiu, pois a idéia de simetria continua na base dos novos modelos.

Com base nestes fatos, este trabalho pretende apresentar alguns conceitos de grupos e álgebras de Lie e ao mesmo tempo mostrar um método para estudar e trabalhar com grupos de Lie semisimples, com base nos diagramas de Dynkin [7],[32]. Pressupõe-se que o leitor tenha conhecimentos rudimentares de teoria de grupos e representações e procurou-se uma apresentação acessível e não muito formal, mas que apresentasse os pontos fundamentais da elaboração do método, de modo que delineasse sua base matemática sem entrar em detalhes que tornariam a leitura cansativa para quem busca apenas uma visão destas ferramentas e sua utilização, permitindo um desenvolvimento rápido e razoavelmente sólido ao pesquisador ou estudante que procura uma complementação nos seus conhecimentos nesta área.

De um modo geral, o trabalho pode ser dividido em duas partes:

Da seção 1 até a seção 8 são apresentados a teoria matemática e exemplos de utilização geral. Busca-se um enfoque didático, visando mais a estrutura global do que detalhes matemáticos, detendo-se em aplicações e em pontos que possam mostrar a linha de raciocínio utilizada nesta área. A bibliografia básica desta parte compõe-se das referências [4], [32] e [36]. Uma abordagem mais formal pode ser encontrada em [7] e [34].

Da seção 9 em diante mostra-se como aplicar estas técnicas a teorias de calibre, da seguinte forma:

- 9- Mostra o relacionamento entre o formalismo e a estrutura das teorias de calibre. Supõe-se um conhecimento básico das teorias de calibre, que pode ser adquirido através das referências [1],[8] e [24].
- 10- Apresenta uma discussão da quebra espontânea de simetria do ponto de vista da teoria de grupos, buscando complementar o que se encontra normalmente na literatura a respeito [26].
- 11- Mostra como pode ser aplicado o formalismo de Dynkin para se obter o conteúdo de partículas de uma teoria grã-unificada, conforme apresentado por Slansky em [32].
- 12- Aqui são vistos dois exemplos simples, utilizando-se os grupos  $SO(13)$  e  $E_7$  para

## INTRODUÇÃO

a construção de modelos de grã-unificação, partindo-se do conteúdo de partículas do modelo padrão e buscando-se colocar as várias famílias de férmions numa única representação .

Apesar do trabalho estar voltado para teorias de calibre, acredita-se que a apresentação das técnicas seja suficientemente geral para ser útil em outras áreas.

# ÁLGEBRA DE LIE

## 1. ÁLGEBRA DE LIE

Um grupo de Lie de dimensão  $r$  é um grupo contínuo cujos elementos são funções analíticas de  $r$  parâmetros:

$$g = g(a_1, a_2, \dots, a_r) \quad (1.1)$$

de forma que os elementos de  $g^{-1}$  sejam funções analíticas dos argumentos de  $g$ . Em outras palavras, podemos dizer que um grupo de Lie é um grupo e ao mesmo tempo uma variedade. Em geral associa-se o elemento  $g(0, 0, \dots, 0)$  à identidade.

A álgebra de Lie é definida como sendo o espaço varrido pelos vetores abaixo:

$$X_\mu = \frac{\partial g}{\partial a_\mu} \Big|_{(a_1, \dots, a_r)=0} \quad (1.2)$$

os quais devem satisfazer as duas condições que seguem :

i) relações de comutação

$$[X_\mu, X_\nu] = C_{\mu\nu}^\sigma X_\sigma \quad (1.3)$$

onde está implícita a soma sobre índices repetidos. Os símbolos  $C_{\mu\nu}^\sigma = -C_{\nu\mu}^\sigma$  são as chamadas constantes de estrutura do grupo.

ii) identidade de Jacobi

$$[[X_\mu, X_\nu], X_\sigma] + [[X_\sigma, X_\mu], X_\nu] + [[X_\nu, X_\sigma], X_\mu] = 0 \quad (1.4)$$

que também pode ser escrita em termos das constantes de estrutura :

$$C_{\mu\nu}^\rho C_{\rho\sigma}^\tau + C_{\sigma\mu}^\rho C_{\rho\nu}^\tau + C_{\nu\sigma}^\rho C_{\rho\mu}^\tau \quad (1.5)$$

Os vetores  $X_\mu$  são conhecidos como geradores da álgebra. Da equação (1.2) vemos que estes vetores varrem o espaço tangente à identidade do grupo, assim dada uma álgebra o grupo está definido a menos de um isomorfismo local, ou seja, dois grupos com a mesma álgebra diferem apenas em características globais (conexidade, etc.). Como exemplo temos o grupo de rotações em uma dimensão e o de rotações em duas.

Imaginemos agora um subgrupo  $\mathbf{H}$  de um grupo de Lie  $\mathbf{G}$  e seja  $\mathcal{L}$  a álgebra de  $\mathbf{G}$ . Se  $\mathbf{H}$  também for um grupo de Lie, então seus geradores formam uma subálgebra  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{L}$ .

$\mathbf{H}$  é um subgrupo invariante se para qualquer elemento  $h \in \mathbf{H}$  e  $g \in \mathbf{G}$ , tivermos  $ghg^{-1} \in \mathbf{H}$ . Neste caso a subálgebra  $\mathcal{M}$  também será invariante, no sentido em

## ÁLGEBRA DE LIE

que o comutador (definido em (1.3)) de qualquer elemento de  $\mathcal{M}$  com qualquer elemento de  $\mathcal{L}$  pertencer a  $\mathcal{M}$ . Matematicamente escreveríamos  $\forall m \in \mathcal{M}, l \in \mathcal{L}; [m, l] \in \mathcal{M}$ . As subálgebras invariantes são chamadas de ideais. Toda álgebra tem pelo menos dois ideais: a identidade e ela própria. Como estes ideais estão presentes em toda álgebra, eles são chamados de impróprios em contraposição à classe dos ideais próprios, formada por todos os outros.

Podemos definir uma métrica para a álgebra, conhecida como forma de Killing dada pela seguinte expressão:

$$g_{\mu\nu} = C_{\mu\sigma}^{\rho} C_{\nu\rho}^{\sigma} \quad (1.6)$$

Com o auxílio desta métrica é muito fácil determinar se uma álgebra é semi-simples ou não através do critério de Cartan: Uma álgebra de Lie é semi-simples se e somente se  $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ . Para demonstrarmos esta afirmação admitamos que  $\mathcal{L}$  tenha um ideal abeliano e indiquemos os índices correspondentes a esse ideal por uma linha, assim:

$$g_{\mu\nu'} = C_{\mu\sigma}^{\rho} C_{\nu'\rho}^{\sigma} = C_{\mu\sigma'}^{\rho} C_{\nu'\rho}^{\sigma'} \quad (1.7)$$

pois  $C_{\nu'\rho}^{\sigma} = 0$  se  $\sigma$  não pertencer ao ideal, pela própria definição.

Usando o mesmo raciocínio para  $\rho$  temos:

$$g_{\mu\nu'} = C_{\mu\sigma'}^{\rho'} C_{\nu'\rho'}^{\sigma'} \quad (1.8)$$

Mas  $C_{\nu'\rho'}^{\sigma'} = 0$  já que o ideal é abeliano. Consequentemente teremos uma coluna completa de  $g_{\mu\nu}$  nula e assim  $\det(g_{\mu\nu}) = 0$ .

A seguir vamos analisar a estrutura das álgebras semi-simples e ver como e identificar suas propriedades mais interessantes para o nosso estudo.

## 2. A DIVISÃO DA ÁLGEBRA DE LIE

Nesta seção vamos classificar as álgebras de Lie semi-simples de acordo com suas propriedades. Esta classificação será muito importante no futuro, tanto pelos métodos usados como pela classificação em si.

O procedimento a ser utilizado será o seguinte:

- i) Construiremos uma equação de autovalores de modo a subdividir a álgebra em subespaços invariantes.
- ii) Analizaremos as propriedades destes subespaços.
- iii) Por fim apresentaremos um esquema que permitirá trabalhar facilmente com as representações da álgebra, além de fornecer detalhes sobre a sua estrutura.

Começaremos escolhendo um elemento arbitrário da álgebra  $\mathcal{L}$ :

$$A = A_\mu X^\mu \quad (2.1)$$

e, considerando um vetor genérico  $X$  da álgebra dado por

$$X = B_\nu X^\nu \quad (2.2)$$

montamos a equação

$$[A, X] = \rho X \quad (2.3)$$

que, usando a equação (1.3) pode ser reescrita como

$$\bar{A}X = \rho X \quad (2.4)$$

onde  $\bar{A}$  é a matriz definida por

$$(\bar{A})_{ij} = a^\mu C_{\mu j}^i \quad (2.5)$$

A eq. (2.4) é a equação de autovalores que procurávamos cuja forma secular é a seguinte:

$$\det(\bar{A} - \rho \mathbf{I}) = 0 \quad (2.6)$$

Este determinante é um polinômio em  $\rho$  e conseqüentemente podemos reescrever (2.6)

como:

$$P(\rho) = \sum_{i=0}^r (-1)^i P_{r-i}(A) \rho^{r-i} = 0 \quad (2.7)$$

## A DIVISÃO DA ÁLGEBRA DE LIE

onde  $r$  é a dimensão da álgebra  $\mathcal{L}$  e  $P_i$  são polinômios nos diversos  $X_\mu$  definidos em (2.1). De (2.7) podemos observar que, como  $\rho = 0$  é sempre solução (basta tomar, por exemplo,  $X = A$ ) e seu termo de mais alto grau é  $(-\rho)^r$  e assim identificamos  $P_0$  e  $P_r$ :

$$P_0 = 0 \text{ e } P_r = (-1)^r \quad (2.8)$$

Claramente, para diferentes valores de  $A$  teremos diferentes valores para cada  $P_1, P_2, \dots, P_{r-1}$ ; procuraremos dentre todas as escolhas possíveis de  $A$ , aquelas em que a degenerescência da raiz nula seja mínima, isto é, procuraremos o menor  $l$  inteiro tal que  $P_l \neq 0$ . Neste caso  $l$  é chamado de posto da álgebra ('rank', em inglês).

Isto define uma classe de elementos "A"s chamados elementos regulares. Em outras palavras,  $A$  é regular se  $P_l(A) = 0$  e  $P_{l+1}(A) \neq 0$ . Doravante admitiremos  $A$  como sendo regular.

Resolvendo a equação (2.7) teremos :

$$P(\rho) = \prod_{i=0}^q (\rho - \alpha_i)^n \quad (2.9)$$

onde os  $\alpha_i$  são as raízes e  $n$  as suas degenerescências.

Tendo os autovalores de  $A$ , podemos diagonalizá-la e subdividir  $\mathcal{L}$  em subespaços  $\mathcal{L}_{\alpha_i}$  (formados pelos autovetores de autovalor  $\alpha_i$ ).

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_{\alpha_q} \quad (2.10)$$

As várias subálgebras de  $\mathcal{L}$  são invariantes por  $\bar{A}$ .

De (2.8) vemos que a subálgebra  $\mathcal{L}_0$  está sempre presente. Esta subálgebra é chamada de subálgebra de Cartan e é composta pelos elementos comutativos de  $\mathcal{L}$ , como veremos a seguir. Os elementos de  $\mathcal{L}_0$  serão denominados  $H_i$ s, (com índices latinos). Existem  $l$  desses elementos linearmente independentes, já que em (2.9)  $n = l$ . Substituindo  $H_i$  na equação (2.3) e usando o fato de seus autovalores serem nulos obtemos:

$$[A, H_i] = 0 \quad (2.11)$$

E conseqüentemente  $A$  pode ser escrito como uma combinação linear dos

$$A = \lambda_i H_i \quad (2.12)$$

## A DIVISÃO DA ÁLGEBRA DE LIE

Para uma álgebra semi-simples os  $L_{\alpha_i}$  são unidimensionais para  $n \neq 0$ , a demonstração deste fato, além de trabalhosa, não fornece informações mais interessantes e por isso será omitida aqui, os interessados poderão encontrá-la na referência [34].

Usando este fato podemos escrever a equação (2.3) para os elementos não pertencentes à subálgebra de Cartan, indexando-os pelos seus autovalores, uma vez que estes não são degenerados:

$$[A, E_{\alpha}] = \alpha E_{\alpha} \quad (2.13)$$

para estes elementos usaremos índices gregos e, em geral, a letra 'E'.

Um detalhe que vale a pena ser destacado é que o conjunto de vetores  $H_i$  e  $E_{\alpha}$  formam uma base completa de  $\mathcal{L}$ , chamada base de Cartan. O estudo da álgebra se resume no estudo das relações de comutação dos elementos desta base. Tal estudo pode ser feito através das equações (2.11) e (2.13) e se baseará nas raízes da equação (2.6), o que será feito na seção 3.

### 3. AS RAÍZES E SUAS PROPRIEDADES

Nesta seção vamos estudar as relações de comutação entre os elementos da base de Cartan, através da definição dos vetores raízes, os quais poderão classificar as álgebras e analisar suas representações.

Vamos determinar  $[H_i, E_\alpha]$ . Para tanto calculamos primeiro  $[A, [H_i, E_\alpha]]$ . Abrindo o comutador e utilizando (2.11) obtemos

$$\begin{aligned} [A, [H_i, E_\alpha]] &= [A, H_i E_\alpha] - [A, E_\alpha H_i] \\ &= [A, H_i] E_\alpha + H_i [A, E_\alpha] - [A, E_\alpha] H_i - E_\alpha [A, H_i] \\ &= H_i [A, E_\alpha] - [A, E_\alpha] H_i \end{aligned} \quad (3.1)$$

usando (2.13) segue que

$$[A, [H_i, E_\alpha]] = \alpha E_\alpha \quad (3.2)$$

E, uma vez que  $\alpha$  é não degenerada,  $[H_i, E_\alpha]$  é proporcional a  $E_\alpha$ , ou seja

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \quad (C_{i\alpha}^r = \alpha_i \delta_\alpha^r) \quad (3.3)$$

Desta forma, a cada  $E_\alpha$  podemos associar um vetor  $l$ -dimensional de componentes  $\alpha_i$ , uma vez que existem  $l$   $H_i$ s. Note-se que, olhando para (3.12) e (2.12), vemos que  $\alpha = \lambda^i \alpha_i$ , assim embora  $\alpha$  dependa da escolha de  $A$  em (2.1) os  $\lambda_i$  dependem apenas da escolha da base da subálgebra de Cartan (os  $\lambda_i$  são os mesmos de (2.12)). Outro ponto a ser notado em (3.3) é que, uma vez que cada termo de (2.10) é invariante sob a ação de  $\mathcal{L}$ , qualquer combinação linear de  $H_i$ s fornece a mesma divisão de subálgebras. Deste fato e da equação (2.11) vemos que a subálgebra de Cartan é abeliana.

Assim a cada álgebra associamos um conjunto de  $r$  vetores  $l$ -dimensionais, chamados vetores raízes sendo que  $l$  deles são nulos, correspondendo aos  $H_i$ s enquanto os  $r - l$  restantes representam os  $E_\alpha$ s. A relação (2.12) mostra que estes vetores são distintos.

É importante ter sempre em mente que os vetores raízes **não** estão na álgebra, eles apenas representam os elementos da base da álgebra num espaço euclidiano  $l$ -dimensional.

Resta o cálculo do comutador  $[E_\alpha, E_\beta]$ . Para tanto escrevemos a identidade de Jacobi (1.4) para  $[A, [E_\alpha, E_\beta]]$  e aplicamos a relação (2.13):

$$\begin{aligned} [A, [E_\alpha, E_\beta]] + [E_\beta, [A, E_\alpha]] + [E_\alpha, [E_\beta, A]] &= 0 \\ [A, [E_\alpha, E_\beta]] + \alpha [E_\alpha, E_\beta] - \beta [E_\beta, E_\alpha] &= 0 \end{aligned}$$

$$[A, [E_\alpha, E_\beta]] = (\alpha + \beta)[E_\alpha, E_\beta] \quad (3.4)$$

Temos dois casos:

i)  $\beta = -\alpha$ ; neste caso  $[A, [E_\alpha, E_\beta]] = 0$  e  $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$  é uma combinação linear dos  $H_i$ s.

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = C_{\alpha-\alpha}^i H_i \quad (3.5)$$

Os geradores da forma (3.5) são chamados de nós e podem ser usados para formar uma base na subálgebra de Cartan (base de Chevalley).

ii)  $\alpha + \beta \neq 0$ . Então  $[E_\alpha, E_\beta]$  é proporcional a  $E_{\alpha+\beta}$ :

$$[E_\alpha, E_\beta] = C_{\alpha\beta}^{\alpha+\beta} E_{\alpha+\beta} \quad (3.6)$$

De posse desta equação fica fácil provar que, para uma álgebra semi-simples, se  $\alpha$  for raiz, então  $-\alpha$  também é (a partir deste ponto usarei o nome raiz tanto para os autovalores de  $E_\alpha$  como para o vetor associado a ele, isto não deve causar confusão já que a identificação é direta).

Para podermos analisar as propriedades das raízes, vamos calcular as constantes de estrutura da álgebra, para esta nova base.

Usando a definição de métrica podemos escrever (3.7):

$$g_{\alpha\tau} E_\alpha = C_{\alpha\eta}^\mu C_{\tau\mu}^\eta E_\alpha = C_{\alpha\eta}^{\alpha+\eta} C_{\tau\mu}^{\alpha+\mu} E_\mu \quad (3.7)$$

Mas, como a álgebra é semi-simples devemos ter que

$$\tau + \mu = \eta \quad e \quad \alpha + \eta = \mu \quad (3.8)$$

Ou seja

$$\alpha = -\tau \quad (3.9)$$

caso contrário  $g_{\alpha\tau} = 0$  numa coluna inteira contrariando o critério de Cartan.

A parte da métrica que relaciona os  $H_i$ s pode ser usada como métrica no espaço dos vetores raízes, ou vice-versa, já que a base  $\{H_i\}$  é livre. Assim, partindo de (3.5) calculamos  $C_{\alpha-\alpha}^i$ :

$$C_{\alpha-\alpha}^i: \quad C_{\alpha-\alpha}^i = g^{ij} C_{\alpha-\alpha j} \quad (3.10)$$

onde  $g^{ij}$  é a inversa de  $g_{ij}$ . Como  $C_{\alpha-\alpha j}$  é totalmente antisimétrica segue que:

$$C_{\alpha-\alpha j} = C_{-\alpha j \alpha} \quad (3.11)$$

## AS RAÍZES E SUAS PROPRIEDADES

e daí podemos calcular, com o auxílio de (3.3):

$$C_{\alpha-\alpha}^i = g^{ij} C_{-\alpha j \alpha} = g^{ij} g_{\alpha r \alpha i} \delta_{\alpha}^r \quad (3.12)$$

deve-se notar que

$$C_{-\alpha j}^r = -C_{j-\alpha}^r = -(-\alpha_j) \delta_{\alpha}^r \quad (3.13)$$

Podemos impor  $g_{\alpha\alpha} = 1$ , uma vez que a normalização dos  $E_{\alpha}$ s é livre, e consequentemente

$$C_{\alpha-\alpha}^i = g^{ij} \alpha_j = \alpha^i \quad (3.14)$$

As relações (3.13) e (3.14) são bem interessantes pois mostram que numa normalização conveniente, as componentes dos vetores raízes são as constantes de estrutura da álgebra.

Outras propriedades das raízes são dadas pelos teoremas abaixo. Estas propriedades são fundamentais para os cálculos que se seguirão, principalmente aquela dada pelo teorema (3.1).

**Teorema 3.1.** *Se  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes e  $\alpha + \beta$  não é, então podemos escrever uma série de raízes da forma:*

$$\beta, \beta - \alpha, \beta - 2\alpha, \dots, \beta - m\alpha \quad (3.15)$$

onde

$$m = 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \quad (3.16)$$

e  $(\alpha, \beta)$  representa o produto escalar entre  $\alpha$  e  $\beta$ .

Uma sequência do tipo (3.15) será chamada de cordão- $\alpha$  ( $\alpha$ -string).

A demonstração deste teorema é um pouco longa mas não é complicada. Nas hipóteses do teorema, podemos escrever

$$[E_{-\alpha}, E_{\beta}] = N_{-\alpha\beta} E_{\beta-\alpha} \quad (3.17)$$

Calculando o comutador de  $E_{-\alpha}$  com o lado direito de (3.17), obtém-se

$$[E_{-\alpha}, N_{-\alpha\beta} E_{\beta-\alpha}] = E'_{\beta-2\alpha} \quad (3.18)$$

Com a finalidade de aliviar a notação, ignoramos a normalização e indicamos o fato com a linha em  $E'_{\beta-k\alpha}$ . Este procedimento será mantido até o final desta demonstração.

## AS RAÍZES E SUAS PROPRIEDADES

Podemos continuar o processo iniciado em (3.17) e (3.18) calculando comutadores sucessivos. De um modo geral, temos:

$$[E_{-\alpha}, E'_{\beta-j\alpha}] = E'_{\beta-(j+1)\alpha} \quad (3.19)$$

Mas, como existe um número finito de  $E_\gamma$ 's, para algum  $j$  (que fixaremos em  $m$ ) obteremos:

$$[E_{-\alpha}, E'_{\beta-m\alpha}] = 0 \quad (3.20)$$

Analogamente, comutando  $E_\beta$  com  $E'_{\beta-(j+1)\alpha}$ , conseguimos

$$[E_\beta, E'_{\beta-m\alpha}] = \mu_{j+1} E'_{\beta-j\alpha} \quad (3.21)$$

Usando (3.19) segue que

$$[E_\beta, [E_{-\alpha}, E'_{\beta-j\alpha}]] = \mu_{j+1} E'_{\beta-j\alpha} \quad (3.22)$$

e aplicando a identidade de Jacobi (1.4) ao primeiro membro, (3.22) se reescreve

$$-[E_{-\alpha}, [E'_{\beta-j\alpha}, E_\alpha]] - [E'_{\beta-j\alpha}, [E_\alpha, E_{-\alpha}]] = \mu_{j+1} E'_{\beta-j\alpha} \quad (3.23)$$

Aplicando (3.21) no primeiro membro e (3.14) no segundo, obtemos

$$\mu_j [E_{-\alpha}, E'_{\beta-(j-1)\alpha}] + \alpha^i [H_i, E'_{\beta-j\alpha}] = \mu_{j+1} E'_{\beta-j\alpha} \quad (3.24)$$

Finalmente, usando as relações (3.3) e (3.6) em (3.24) segue que

$$\mu_j E'_{\beta-j\alpha} + \alpha^i (\beta - j\alpha)_i E'_{\beta-j\alpha} = \mu_{j+1} E'_{\beta-j\alpha} \quad (3.25)$$

Esta equação pode ser escrita de uma forma mais adequada se colocarmos  $E'_{\beta-i\alpha}$  em evidência:

$$(\mu_j + \alpha^i \beta_i - j\alpha^i \alpha_i - \mu_{j+1}) E'_{\beta-j\alpha} = 0 \quad (3.26)$$

E assim, como  $E'_{\beta-j\alpha}$  é diferente de zero, conseguimos uma relação de recorrência para  $\mu_j$ .

$$\mu_j + (\alpha, \beta) - j(\alpha, \alpha) = \mu_{j+1} \quad (j \geq 1) \quad (3.27)$$

Para  $j = 0$  usamos (3.21) diretamente e obtemos

$$[E_\alpha, E_\beta] = \mu_0 E'_{\beta+\alpha} = 0 \quad (3.28)$$

## AS RAÍZES E SUAS PROPRIEDADES

uma vez que, por hipótese  $\alpha + \beta$  não é raiz. Impondo  $\mu_0 = 0$  segue que

$$\begin{aligned}\mu_{j+1} &= (\alpha, \beta) - j(\alpha, \alpha) + \mu_j \\ &= (\alpha, \beta) - j(\alpha, \alpha) + (\alpha, \beta) - (j-1)(\alpha, \alpha) + \mu_{j-1} \\ &= (j+1)(\alpha, \beta) - (j+j-1+j-2+\dots+1)(\alpha, \alpha)\end{aligned}\tag{3.29}$$

donde obtemos

$$\mu_j = j(\alpha, \beta) - j(j-1)\frac{(\alpha, \alpha)}{2}\tag{3.30}$$

Porém sabemos que  $\mu_{m+1} = 0$ , portanto quando  $j = m+1$  (3.30) toma a forma

$$0 = (m+1)(\alpha, \beta) - m(m+1)\frac{(\alpha, \alpha)}{2}\tag{3.31}$$

e conseqüentemente

$$m = 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\tag{3.32}$$

Esta relação demonstra que  $2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$  é inteiro. Este é um resultado bastante interessante e que será largamente utilizado, principalmente quando tratarmos de representações. De (3.19) nota-se facilmente que  $\beta, \beta - \alpha, \beta - 2\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta - 2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)$  são raízes, o que prova o teorema.

Para um cordão completo  $\beta + n\alpha, \beta + (n-1)\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta + n\alpha$  temos

$$2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = m - n\tag{3.33}$$

Para se verificar (3.33) basta substituir  $\beta + n\alpha$  por  $\beta'$  e  $m+n$  por  $m'$  com  $2(\alpha, \beta')/(\alpha, \alpha) = m'$ .

Os próximos dois teoremas são de demonstração imediata.

**Teorema 3.2.** *Se  $\alpha$  é raiz, os únicos múltiplos de  $\alpha$  são  $\alpha, 0$  e  $-\alpha$ .*

Isto é claro pois  $E_{2\alpha} = [E_\alpha, E_\alpha] = 0$ , assim  $2\alpha$  não é raiz e nenhum outro múltiplo, a partir daí, pode ser. Outra maneira de se verificar este fato é, partindo do teorema anterior, observar que  $m = 2$  para  $\beta = \alpha$ .

**Teorema 3.3.** *Um cordão- $\alpha$  contendo  $\beta$  possui no máximo 4 raízes, ou seja, os valores possíveis de  $m$  em (3.16) são:*

$$2\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\tag{3.34}$$

## AS RAÍZES E SUAS PROPRIEDADES

A demonstração é obtida por redução ao absurdo, desta forma suponhamos que o cordão possua 5 raízes. Este cordão sempre pode ser reescrito como  $\beta + 2\alpha, \beta + \alpha, \beta, \beta - \alpha, \beta - 2\alpha$ .

Por outro lado  $(\beta + 2\alpha) + \beta = 2(\beta + \alpha)$  que pelo teorema 3.2 não é raiz, o mesmo ocorre com  $(\beta + 2\alpha) - \beta = 2\alpha$ . Isto significa que o cordão- $\beta$  que contém  $\beta + 2\alpha$  só contém  $\beta + 2\alpha$ . O mesmo raciocínio pode ser aplicado a  $\beta - 2\alpha$ . Consequentemente:

$$2 \frac{(\beta + 2\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = 0 \quad (\beta + 2\alpha, \beta) = 0 \quad (3.35)$$

$$2 \frac{(\beta - 2\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = 0 \quad (\beta - 2\alpha, \beta) = 0 \quad (3.36)$$

Somando-se (3.35) e (3.36) obteremos que  $(\beta, \beta) = 0$  o que é incompatível com a afirmação de que  $\beta + 2\alpha$  (ou  $\beta - 2\alpha$ ) é raiz.

Este último teorema coloca sérias restrições sobre o tamanho relativo das raízes, como veremos. De posse das restrições impostas pelos três teoremas acima, poderemos encontrar os conjuntos de raízes de todas as álgebras de Lie semi-simples possíveis, analisando apenas configurações de vetores raízes num espaço euclidiano. Veremos agora as relações entre ângulo e tamanho para os vetores raízes e a seguir apresentaremos um sumário do que foi apresentado até aqui. Na seção seguinte veremos a classificação geral de todas as álgebras de Lie semi-simples.

O ângulo entre duas raízes é dado por:

$$\cos^2 \phi = \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} = \frac{(\alpha, \beta)(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} \quad (3.37)$$

Mas a equação (3.34) restringe os valores de  $(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$  aos seguintes:

$$\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2} \quad (3.38)$$

O mesmo ocorre com  $(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$ . Desta forma  $\cos^2 \phi$  só pode assumir os valores formados pelos produtos daqueles apresentados em (3.38), ou seja

$$\cos^2 \phi = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \text{ ou } 1 \quad (3.39)$$

que correspondem respectivamente a

$$\phi = \begin{cases} 90^\circ \\ 60^\circ \text{ ou } 120^\circ \\ 45^\circ \text{ ou } 135^\circ \\ 30^\circ \text{ ou } 150^\circ \\ 0^\circ \text{ ou } 180^\circ \end{cases} \quad (3.40)$$

## AS RAÍZES E SUAS PROPRIEDADES

Convém analisar cada um dos casos mais detalhadamente

$\phi = 0^\circ (180^\circ)$  Neste caso  $\alpha = \beta$  ou  $\alpha = -\beta$ .

$\phi = 30^\circ (150^\circ)$  Podemos ter 2 situações :

$$a) \left| \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \right| = \frac{1}{2} \text{ e } \left| \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \right| = \frac{3}{2} \text{ com } \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)} = \frac{1}{3}$$

$$b) \left| \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \right| = \frac{3}{2} \text{ e } \left| \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \right| = \frac{1}{2} \text{ com } \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)} = 3$$

dependendo de qual for a maior raiz  $\alpha$  ou  $\beta$ .

$\phi = 45^\circ (135^\circ)$  Valendo-se de um raciocínio similar, temos  $\frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)} = \frac{1}{2}$  ou 2.

$\phi = 60^\circ (120^\circ)$  Analogamente  $\frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)} = 1$ .

$\phi = 90^\circ$   $\frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)}$  é indeterminado, pois  $(\alpha, \beta) = 0$ .

Em resumo, nós vimos que:

Dada uma álgebra semi-simples, de dimensão  $r$ , podemos achar uma base  $H_i$  e  $r - l$  elementos  $E_\alpha$ , que satisfazem as seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0 & i, j = 1, 2, \dots, l & \quad (a) \\ [H_i, E_\alpha] &= \alpha_i E_\alpha & i = 1, 2, \dots, l & \quad (b) \\ [E_\alpha, E_\beta] &= N_{\alpha\beta} & \alpha + \beta \neq 0 & \quad (c) \\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= H_i & & \quad (d) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Vimos também que a cada elemento desta base podemos associar um vetor de componentes  $\alpha_i$  (dadas por (3.40a) e (3.40b)) e que para os  $E_\alpha$ s estes vetores são não degenerados.

A seguir vimos algumas propriedades destes vetores, as quais estão relacionadas abaixo

1. Se  $\alpha$  é raiz,  $-\alpha$  também é.
2. Se  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes, mas  $\alpha + \beta$  não é, podemos construir um cordão- $\alpha$  da forma

$$\alpha, \alpha - \beta, \dots, \alpha - 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta$$

com  $2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = 0, 1, 2$  ou 3.

3. Os únicos múltiplos da raiz  $\alpha$  são  $\alpha, 0$  e  $-\alpha$ .
4. O ângulo entre duas raízes e o tamanho relativo entre elas estão restritos aos valores abaixo, onde  $|\alpha| \geq |\beta|$  e  $\phi$  é o ângulo entre  $\alpha$  e  $\beta$  :

$$\begin{aligned} \phi = 0^\circ \text{ ou } 180^\circ & \quad \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)} = 1 & \quad (a) \\ \phi = 30^\circ \text{ ou } 150^\circ & \quad \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)} = 3 & \quad (b) \\ \phi = 45^\circ \text{ ou } 135^\circ & \quad \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)} = 2 & \quad (c) \\ \phi = 60^\circ \text{ ou } 120^\circ & \quad \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)} = 1 & \quad (d) \\ \phi = 90^\circ \text{ ou } 270^\circ & \quad \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)} = ? & \quad (e) \end{aligned} \quad (3.42)$$

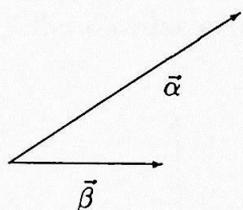
## AS RAÍZES E SUAS PROPRIEDADES

Estamos agora em condições de classificar as álgebras de Lie semi-simples, procurando os conjuntos de vetores raízes que satisfaçam estas propriedades. A cada conjunto destes, a que chamaremos de diagrama de raízes, corresponde uma álgebra ( como já foi dito, as componentes destes vetores são constantes de estrutura que ligam  $H_i$  a  $E_\alpha$ , como pode ser observado em (3.40), além disto o teorema 3.1 impõe restrições sobre as constantes  $N_{\alpha\beta}$  em (3.40d)).

Vamos ver os diagramas de raízes possíveis em duas dimensões ( $l = 2$ ):

Já sabemos que os ângulos permitidos entre duas raízes são dados por (3.41), vamos portanto iniciar com a álgebra que possui dois vetores raízes com  $30^\circ$  entre si.

Assim, para  $\phi = 30^\circ$  temos:



$$|\alpha| = \sqrt{3}|\beta|$$

fig. 1

Construimos agora um cordão- $\beta$  que passa por  $\alpha$ . Como, de (3.41b),  $2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = 3$ , encontramos as novas raízes da figura 2 (veja teorema 3.1):

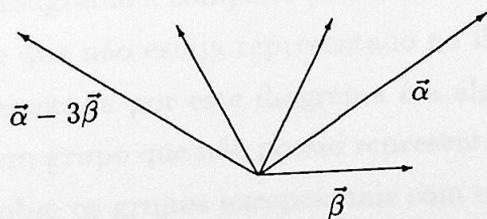


fig. 2

Podemos ainda fazer um cordão- $\alpha - \beta$  passando por  $(\alpha - 2\beta)$  e um cálculo simples

nos mostra que

$$2 \frac{(\alpha - 2\beta, \alpha - \beta)}{(\alpha - \beta, \alpha - \beta)} = 1$$

e a nova raiz é  $2\alpha - 3\beta$ .

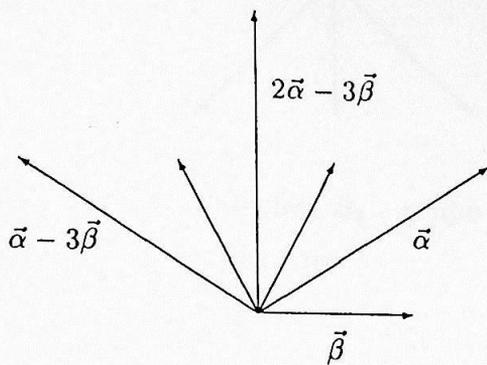
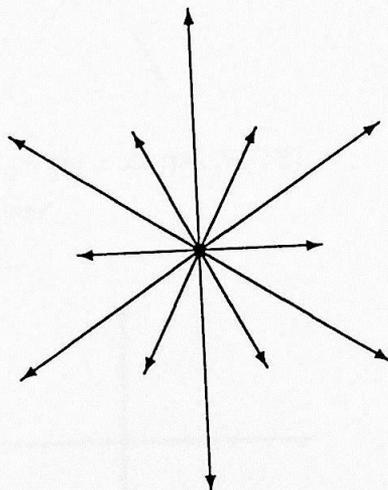


fig. 3

Usando o teorema 3.2, podemos refletir todas estas raízes obtendo o diagrama completo de 14 raízes (2 são nulas).



$G_2$

fig. 4

Sabemos que o diagrama é completo pois não existe nenhum outro vetor que satisfaça as restrições acima e que não esteja representado na figura 4.

A álgebra representada por este diagrama é a álgebra  $G_2$  e corresponde a um grupo excepcional, isto é, um grupo que não possui representação geométrica simples. Mais tarde voltaremos a falar sobre os grupos excepcionais com um pouco mais de detalhe.

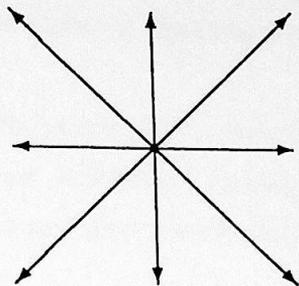
Vale a pena destacar que *qualquer* par de raízes da fig. 4 está separado por um ângulo permitido por (3.41).

Este mesmo procedimento pode ser repetido partindo-se dos outros ângulos possíveis,

## AS RAÍZES E SUAS PROPRIEDADES

obtendo-se:

para  $\phi = 45^\circ$  ou  $135^\circ$

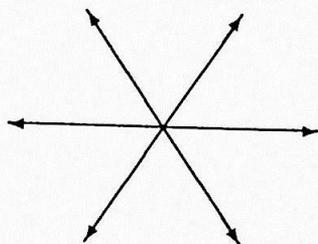


álgebra  $B_2$  - grupo  $SO(5)$

10 raízes

fig. 5

para  $\phi = 60^\circ$  ou  $120^\circ$

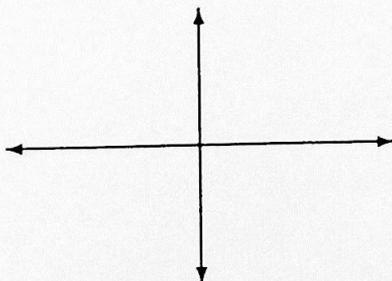


álgebra  $A_2$  - grupo  $SU(2)$

8 raízes

fig. 6

para  $\phi = 90^\circ$



álgebra  $D_2$  - grupo  $SO(4)$

6 raízes

fig. 7

Em duas dimensões foi realmente muito fácil de se encontrar os diagramas, porém a partir de três dimensões o problema fica cada vez mais complicado se mantivermos este método, pois é necessário encontrar todos os cordões possíveis em todas as raízes. Felizmente nem todas as raízes são necessárias para determinar o diagrama completo, uma

## AS RAÍZES E SUAS PROPRIEDADES

vez que existe uma simetria muito grande decorrente dos três teoremas acima. O grupo de simetria de um diagrama de raízes é discreto e conhecido como diagrama de Weyl, com veremos adiante.

A utilização desta simetria permitirá uma grande simplificação na representação das álgebras. Na verdade podemos substituir os diagramas de raízes por outros bem mais compactos, conhecidos como diagramas de Dynkin.

## 4. OS DIAGRAMAS DE DYNKIN

Neste item buscaremos a classificação de todas as álgebras de Lie semi-simples e para tanto definiremos os diagramas de Dynkin. Estes diagramas formam uma notação compacta de várias características da álgebra, fornecendo informações até mesmo sobre representações e subálgebras.

Vamos nos ater apenas àquelas raízes que são suficientes para definir o diagrama. Mas quais são elas?

O número delas deve ser igual ao posto da álgebra, pois devem gerar todo o diagrama e ser independentes (queremos uma base, na verdade). Mas isto não basta uma vez que as raízes, mesmo linearmente independentes, podem não gerar todos os cordões do diagrama, como exemplo podemos observar que o diagrama de  $A_2$  (fig. 6) está contido no diagrama de  $G_2$  (fig. 4) e que as raízes escolhidas para gerar  $A_2$  não conseguem gerar a raiz  $\beta - 3\alpha$ , por exemplo, da figura 4. O conjunto de raízes da figura 6 é completo no sentido que nenhum cordão leva a uma raiz não contida ali, ele forma um diagrama válido, mas não podemos nos esquecer que podem haver outros diagramas que contenham estas raízes, como acontece com  $G_2$ .

Para evitarmos este problema devemos fazer duas coisas:

Primeiro devemos observar que apenas metade das raízes são necessárias para a análise do diagrama, uma vez que a outra metade pode ser obtida por reflexão, veja as figuras 3 e 4 como exemplo. Um meio de se definir quais raízes devem ser tomadas é definir um sistema de coordenadas ortogonal no espaço das raízes e tomar aquelas que possuem a primeira coordenada não nula positiva, chamaremos estas raízes de positivas.

Segundo, dentre as raízes positivas, escolher aquelas que não estão contidas no meio de nenhum cordão (note que o fato de estar ou não no meio do cordão é fundamental). Isto é facilmente garantido tomando-se as raízes cuja diferença não pertence às raízes positivas, no exemplo de  $G_2$  tomaríamos as raízes  $\alpha - 3\beta$  e  $\alpha$ . Estas são chamadas de **raízes simples**. É fácil perceber que tais raízes formam uma base e que a partir delas formamos cordões completos. Desta forma são exatamente as raízes simples que procuramos!

Nosso problema inicial, que era achar todas os diagramas de raízes possíveis, agora ficou reduzido a achar todos os conjuntos de raízes simples possíveis e, embora não pareça à primeira vista, isto é realmente uma simplificação, pois estes vetores possuem propriedades adicionais, como veremos nos teoremas abaixo:

**Teorema 4.1.** Se  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes simples, então

$$2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = -p$$

onde  $p$  é um número natural.

Este teorema segue imediatamente do teorema 3.1 e da definição de raiz simples (como a diferença entre elas não é raiz,  $p$  tem que ser positivo).

**Teorema 4.2.** Os ângulos entre as raízes simples e a relação entre seus módulos estão restritos a:

$$\begin{array}{lll} \theta = 120^\circ & \text{---} & \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta\beta)} = 1 \\ \theta = 135^\circ & \text{---} & \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta\beta)} = 2 \\ \theta = 150^\circ & \text{---} & \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta\beta)} = 3 \\ \theta = 90^\circ & \text{---} & \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta\beta)} = ? \end{array} \quad (4.1)$$

sendo  $\beta$  a menor raiz.

Demonstra-se 4.2 valendo-se do mesmo raciocínio usado para se obter (3.41).

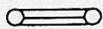
De posse das raízes simples e suas propriedades podemos definir os diagramas de Dynkin, que nada mais são do que uma forma de representá-las de uma maneira bastante eficaz.

Para se obter o diagrama de Dynkin segue-se a seguinte convenção :

- . Para cada raiz simples desenha-se uma bolinha. Desta forma, se  $l$  for o posto da álgebra, devemos ter  $l$  bolinhas desenhadas.
- . Desenam-se  $(\alpha, \alpha)/(\beta\beta)$  linhas ligando a bolinha correspondente à raiz  $\alpha$  àquela correspondente à raiz  $\beta$ , supondo-se  $\alpha \geq \beta$ , repetindo-se o processo para cada par de raízes.
- . Se  $\beta$  for ortogonal a  $\alpha$ , as bolinhas permanecem separadas.

Como exemplo, construamos o diagrama de Dynkin correspondente ao diagrama da fig. 4.

Neste diagramas temos duas raízes simples (portanto 2 bolinhas) formando um ângulo de  $150^\circ$ , de (4.1) vemos que uma é  $\sqrt{3}$  vezes menor que a outra, e obtemos o diagrama abaixo:



O problema da classificação das álgebras sofre uma nova redução : devemos encontrar os diagramas de Dynkin possíveis . Para saber quais são eles, precisamos saber quais as

restrições impostas pelos teoremas apresentados sobre a forma do diagrama. É isto que analizaremos agora para finalmente obtermos a classificação geral.

Para simplificar o que segue, é importante fixar algumas convenções :

$\alpha_i, i = 1, 2, \dots, l$  são as raízes simples (não confundir com suas componentes).

$u_i, v_i$  ou  $w_i = \alpha_i/|\alpha_i|$  são versores (vetores unitários) na direção de  $\alpha_i$ .

Novamente cometerei um abuso de linguagem e chamarei a bolinha do diagrama associada a uma raiz pelo nome desta raiz ou ainda pelo versor correspondente, conforme a conveniência. Observadas as convenções acima, este procedimento não deve causar confusão e por outro lado aliviará bastante a exposição .

Inicialmente vamos recrever as relações (4.1) para os versores:

Para cada ângulo permitido, temos:

$$\begin{array}{ll} \theta = 90^\circ & \text{--} \quad (u_i, u_j)^2 = 0 \quad (\text{nenhuma linha ligada}) \\ \theta = 120^\circ & \text{--} \quad (u_i, u_j)^2 = 1/4 \quad (\text{uma linha ligada}) \\ \theta = 135^\circ & \text{--} \quad (u_i, u_j)^2 = 2/4 \quad (\text{duas linhas ligadas}) \\ \theta = 150^\circ & \text{--} \quad (u_i, u_j)^2 = 3/4 \quad (\text{tres linhas ligadas}) \end{array} \quad (4.2)$$

E podemos ver facilmente que o número de linhas que liga  $u_i$  a  $u_j$  é dado por  $n$  na equação abaixo:

$$n = 4(u_i, u_j)^2 \quad (4.3)$$

Isto nos basta para obter as propriedades que os diagramas de Dynkin obedecem e finalmente eliminar diagramas cujas raízes violam os teoremas apresentados.

A independência linear das raízes simples implica em várias restrições quanto ao formato dos diagramas:

Definindo  $u = \sum_{i=1}^l u_i$ , temos que

$$0 < (u, u) = \sum_{i=1}^l (u_i, u_i) + 2 \sum_{i>j} (u_i, u_j) = l + 2 \sum_{i>j} (u_i, u_j) \quad (4.4)$$

Mas, se  $u_i$  for conectada a  $u_j$ , então  $2(u_i, u_j)$  é menor ou igual a  $-1$ , como pode ser visto de (4.2) ( $\theta > 90^\circ$ ), desta forma  $-2 \sum_{i>j} (u_i, u_j)$  majora o número de pares conectados. Por outro lado, a equação (4.4) implica que

$$l > -2 \sum_{i>j} (u_i, u_j) \quad (4.5)$$

Se lembrarmos que  $l$  é o número de bolinhas vemos que existem no máximo  $l - 1$  pares ligados (exatamente  $l - 1$  se o diagrama for conexo), desta forma não podem haver ciclos, ou seja, não existem diagramas do tipo:



fig. 8

Neste ponto vale uma discussão do caso dos diagramas desconexos. Imaginemos um diagrama composto de duas partes conexas, chamaremos estas partes de A e B. O fato de A não estar ligada a B quer dizer que todas as raízes simples de A são ortogonais a às raízes simples de B. Mas de (3.40) vemos que se duas raízes são ortogonais então a constante de estrutura associada a elas é nula, em outras palavras, estas raízes comutam. No caso presente, isto implica que A comuta com B, ou seja, A e B são ideais da álgebra representada pelo diagrama. Percebemos assim que um diagrama desconexo corresponde a uma álgebra semi-simples que não é simples. Daqui para frente trataremos apenas as álgebras simples, uma vez que cada parte de um diagrama desconexo pode ser tratada separadamente.

Prosseguindo, se  $u$  for uma bola do diagrama de Dynkin e estiver ligada a  $v_1, v_2, \dots, v_k$  então o número de linhas que sai de  $u$  é dado por

$$n = 4 \sum_{i=1}^k (u, v_i) \quad (4.6)$$

Como os  $v_i$ s são ortogonais entre si (do contrário haveriam ciclos) e as raízes são linearmente independentes, é impossível escrever  $u$  numa base formada pelos  $v_i$ s, e podemos dizer que:

$$\sum_{i=1}^k (u, v_i)^2 < 1 \quad \text{e} \quad n < 4 \quad (4.7)$$

Esta equação significa que saem no máximo 3 linhas de cada bolinha.

Desta forma excluem-se como os da figura 9.

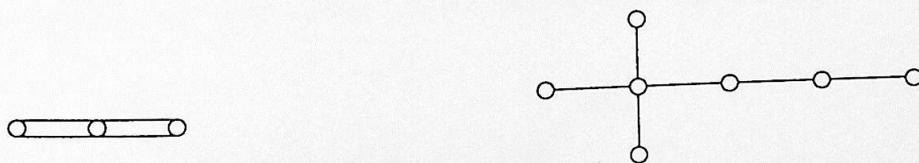


fig. 9

Consequentemente é o único diagrama de seu tipo. Como já dissemos este diagrama está relacionado a uma álgebra excepcional ( $G_2$ ). Veremos que podemos agrupar

## OS DIAGRAMAS DE DYNKIN

os diagramas em vários tipos e que as álgebras excepcionais estão ligadas a conjuntos finitos de diagramas, mostrando que os grupos associados estão ligados às propriedades específicas de algumas dimensões e não a uma forma genérica como por exemplo os  $SU(n)$ .

Analizemos agora os diagramas como o da figura abaixo:

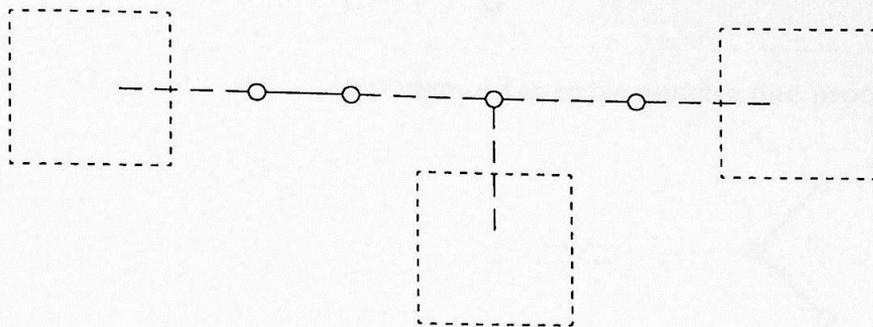


fig. 10

onde os balões representam outras partes do diagrama.

Se chamarmos de  $\alpha$  a somatória de todas as raízes pertencentes ao cordão central, teremos  $|\alpha|^2 = |\alpha_1|^2$ , pois

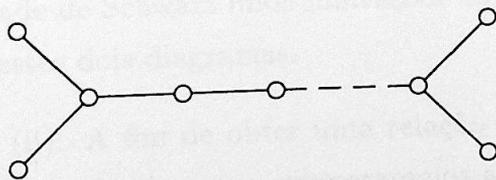
$$\begin{aligned} |\alpha|^2 &= \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 + 2 \sum_{i>j} (\alpha_i, \alpha_j) \\ &= k|\alpha_1|^2 - \sum_{j=1}^{k-1} |\alpha_1|^2 \delta_{j,i+1} \\ &= (k - (k - 1))|\alpha_1|^2 = |\alpha_1|^2 \end{aligned} \tag{4.8}$$

e conseqüentemente qualquer outra raiz  $\beta$  fora da cadeia multiplicada por  $\alpha$  fornece

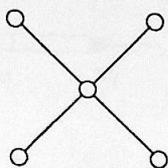
$$(\beta, \alpha) = (\beta, \alpha_i) \tag{4.9}$$

uma vez que não existem ciclos.

As equações (4.8) e (4.9) dizem que, algebricamente, a cadeia representada na figura 10 pode ser substituída por uma única bolinha significando que se existe um diagrama do tipo



então também existe o diagrama



Assim os diagramas abaixo não podem estar entre aqueles que procuramos



fig. 11

pois trocando-se as cadeias assinaladas cairíamos nos diagramas da figura 9.

Pelo que vimos até aqui os diagramas possíveis são:

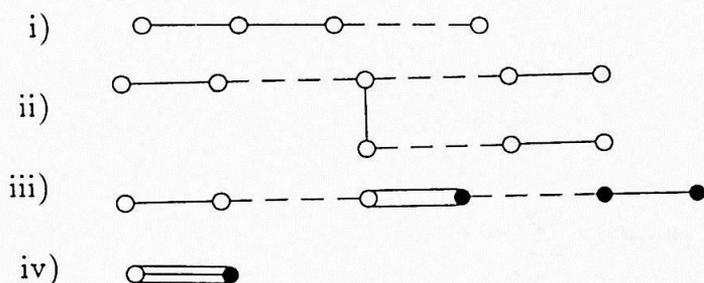


figura 12

Se olharmos para a eq. (4.1) e para a figura 12 percebemos que existem no máximo dois tamanhos de raízes em cada diagrama. As bolinhas correspondentes às raízes menores foram preenchidas. Esta notação será mantida daqui para frente.

Conforme já vimos, os diagramas dos tipos (i) e (iv) não fornecem problemas, mas algum cuidado adicional deve ser tomado com relação aos tipos (ii) e (iii). De fato, como veremos, a desigualdade de Schwarz impõe limitações no número de raízes em cada um dos ramos da cada um destes dois diagramas.

Começemos por (ii). A fim de obter uma relação que dependa do número de raízes nos dois ramos deste tipo de diagrama, numeraremos as bolinhas de acordo com a figura 13 e definiremos os vetores  $u$  e  $v$  dados por (4.10) e (4.11).

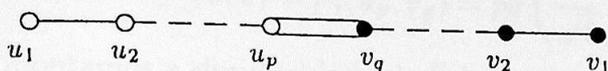


fig. 13

$$u = \sum_{i=1}^p i u_i \quad (4.10)$$

$$v = \sum_{i=1}^q i v_i \quad (4.11)$$

Isto feito montaremos a desigualdade de Schwarz para  $u$  e  $v$ . Para tanto precisamos calcular  $(u, u)$ ,  $(u, v)$  e  $(v, v)$ .

Da definição dos vetores  $u_i$  temos

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} \frac{-1}{2} \delta_{j, i+1} & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \quad (4.12)$$

pois  $u_i$  está ligada a  $u_j$  por apenas uma linha.

Com (4.12) podemos calcular  $(u, u)$

$$\begin{aligned} (u, u) &= \sum_{i, j=1}^p i j (u_i, u_j) \\ &= \sum_{i=1}^p i^2 + 2 \sum_{i>j} (u_i, u_j) \\ &= \sum_{i=1}^p i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) \\ &= \frac{1}{2} p(p+1) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Analogamente, para  $v$ :

$$(v, v) = \frac{1}{2} q(q+1) \quad (4.14)$$

O cálculo de  $(u, v)$  é direto, pois à exceção de  $u_p$ , todas as bolinhas que compõe  $u$  são perpendiculares a  $v$  e, reciprocamente, a única bolinha que compõe  $v$  que não é perpendicular a  $u$  é  $v_q$ , como pode ser observado da figura 13.

OS DIAGRAMAS DE DYNKIN

Desta forma:

$$(u, v) = pq(u_p, v_q) = pq \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.15)$$

Finalmente montamos a desigualdade de Schwarz:

$$(u, v)^2 < (u, u)(v, v) \quad (4.16)$$

ou seja:

$$\frac{p^2 q^2}{2} < \frac{1}{2} p(p+1) \frac{1}{2} q(q+1) \quad p, q > 0 \quad (4.17)$$

que, lembrando que  $q$  e  $p$  são estritamente positivos, pode ser reescrita como:

$$(p-1)(q-1) < 1 \quad (4.18)$$

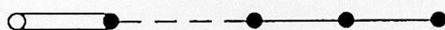
Uma vez que  $p$  e  $q$  são naturais as únicas soluções possíveis são as seguintes:

$$p = 1 \quad \text{e } q \text{ qualquer} \quad (4.19)$$

$$q = 1 \quad \text{e } p \text{ qualquer} \quad (4.20)$$

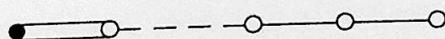
$$p = q = 2 \quad (4.21)$$

Substituindo estes valores no diagrama da figura 13, conseguimos os três tipos de diagrama:



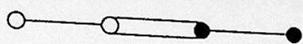
$$(p = 1, \forall q)$$

fig. 14



$$(q = 1, \forall p)$$

fig. 15



$$(p = q = 2)$$

fig. 16

Tendo encontrado todos os diagramas do tipo (ii), passemos aos do tipo (iii).

Partiremos de um raciocínio análogo, ou seja, montaremos uma desigualdade dependente do número de raízes em cada ramo do diagrama genérico da figura 12 (iii).

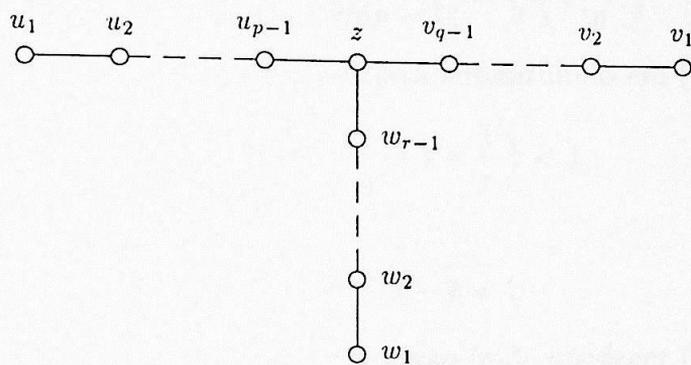


fig. 17

Designando as raízes como na figura 17, escrevemos tres vetores:

$$u = \sum_{i=1}^{p-1} i u_i \tag{4.22}$$

$$v = \sum_{i=1}^{q-1} i v_i \tag{4.23}$$

$$w = \sum_{i=1}^{r-1} i w_i \tag{4.24}$$

Estes vetores são perpendiculares entre si, pois cada componente de cada um deles é perpendicular a qualquer componente de qualquer um dos outros dois.

A desigualdade é montada a partir do fato que  $z$  não pode ser escrito como uma combinação linear de  $u$ ,  $v$  e  $w$ , caso contrário  $z$  não seria uma raiz simples como está representado na figura 17.

Se  $\theta_u$  for o ângulo entre  $u$  e  $z$ , então  $\cos \theta_u$  é a projeção de  $z$  sobre o eixo definido por  $u$ , chamando de  $\theta_v$  e  $\theta_w$  os ângulos entre  $z$  e  $v$  e entre  $z$  e  $w$  respectivamente, a desigualdade

se escreve

$$\cos^2 \theta_u + \cos^2 \theta_v + \cos^2 \theta_w < 1 \quad (4.25)$$

Mas é imediato da figura 17 que

$$(u, z) = \frac{-1}{2}(p-1) \quad (4.26)$$

e, de (4.13) sabemos que

$$(u, u) = \frac{1}{2}p(p+1) \quad (4.27)$$

e desta forma calculamos  $\cos^2 \theta_u$ :

$$\cos^2 \theta_u = \frac{(u, z)^2}{(u, u)} = \frac{(p-1)^2}{2p(p+1)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad (4.28)$$

Fazendo o mesmo cálculo para  $v$  e  $w$  e depois substituindo em (4.24) obtemos

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right) < 1 \quad (4.29)$$

ou, reescrevendo

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 3 - 2 = 1 \quad (4.30)$$

Supondo-se  $p \geq q \geq r \geq 2$ , temos que  $r = 3$  não pode obedecer (4.29), pois a soma do lado esquerdo seria no máximo igual a 1.

Desta forma  $r = 2$ , o que implica

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 2 \quad (4.31)$$

cujas soluções são

$$q = 2 \text{ e } p \text{ qualquer} \quad (4.32)$$

$$q = 3 \text{ e } p = 4, 5 \text{ ou } 6 \quad (4.33)$$

Substituindo estes valores na fig. 17, obtemos os diagramas da figura 18 (para soluções (4.31)) e figura 19 (para (4.32))

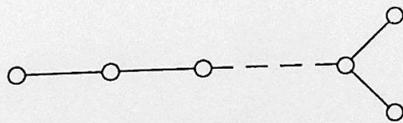


fig. 18

OS DIAGRAMAS DE DYNKIN

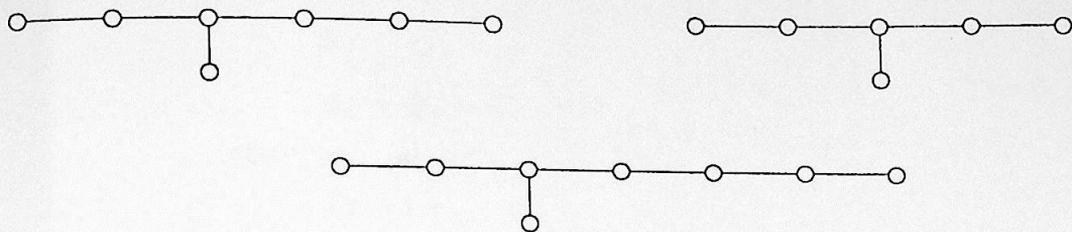


fig. 19

e assim, finalmente, completamos o conjunto de diagramas de Dynkin possíveis e consequentemente determinamos todas as álgebras simples existentes. Elas estão representadas na figura 20, juntamente com a nomenclatura dada por Cartan e com o nome do grupo associado a elas.

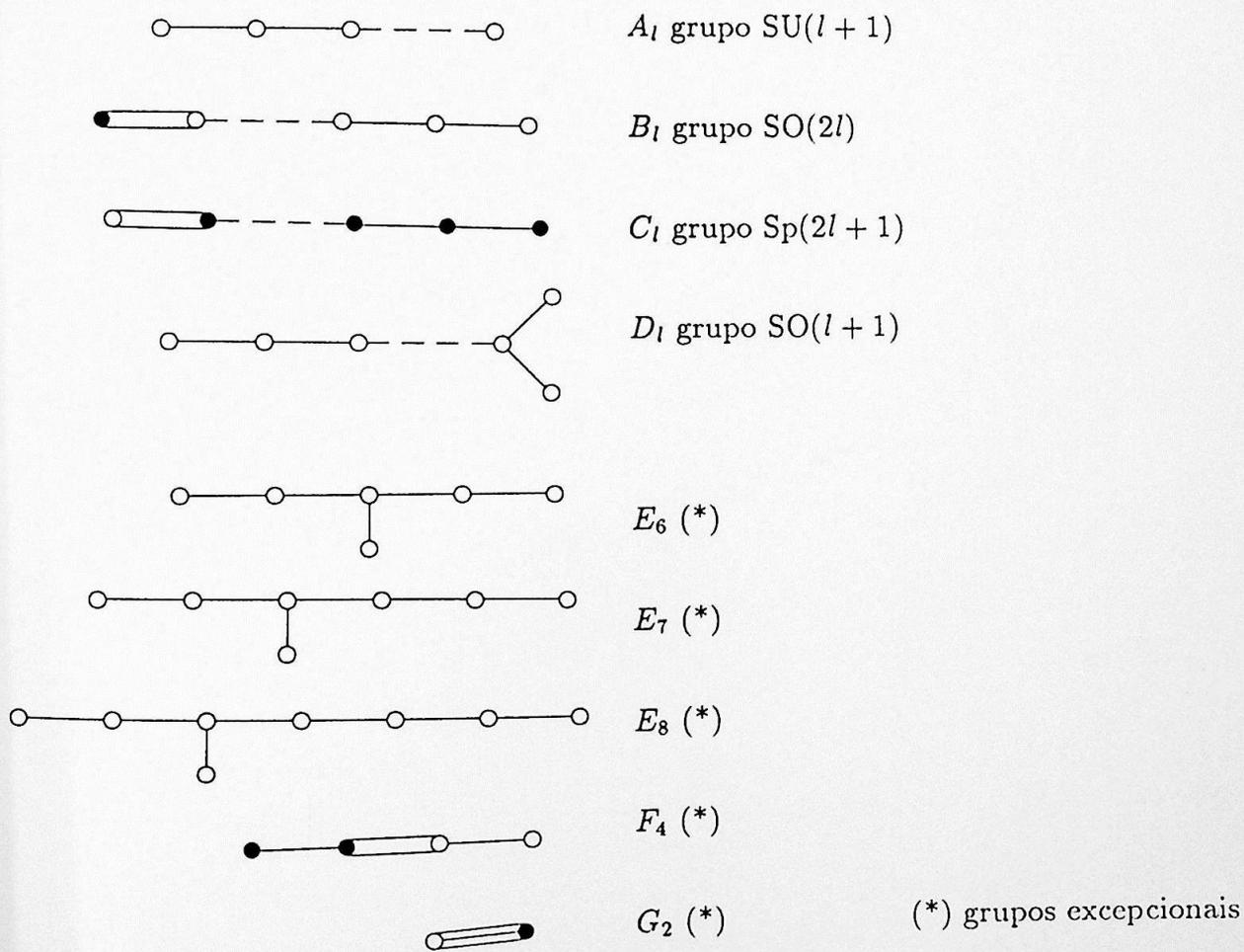


fig. 20

A figura 20 deixa claro os isomorfismos entre as álgebras simples:

OS DIAGRAMAS DE DYNKIN

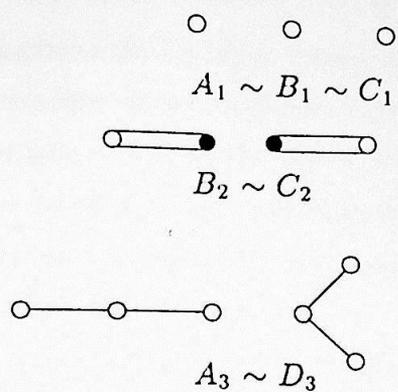


fig. 21

Nas próximas seções veremos como recuperar o conjunto de raízes a partir do diagrama de Dynkin e o cálculo das representações irredutíveis das álgebras de Lie simples.

## 5. A MATRIZ DE CARTAN E A BASE DE DYNKIN

Dado um diagrama de Dynkin, temos representadas as raízes simples correspondentes. No entanto precisamos de um método para recobrar todas as outras raízes.

Faremos isto com a ajuda dos cordões- $\alpha$  do teorema 3.1. Para se construir um cordão- $\alpha$  precisamos do cálculo dos produtos escalares entre as raízes, porém a base formada pelas raízes simples não é, em geral, ortogonal, de modo que devemos encontrar a base dual se quisermos usar o produto escalar.

A base dual é definida pela condição de ortogonalidade e pela normalização seguinte:

$$(r_i, \alpha_j) = \delta_{ij} \quad (5.1)$$

onde  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$  são as raízes simples e  $(r_1, r_2, \dots, r_l)$  são os vetores da base dual.

Deste modo a matriz de mudança de base é a própria métrica, dada por

$$B_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j) \quad (5.2)$$

e um vetor pode ser escrito em termos das duas bases, como segue

$$a_i \alpha_i = b_k r_k \quad (5.3)$$

onde os  $a_i$ s são as componentes da raiz na base das raízes simples e os  $b_k$ s são as componentes da mesma raiz na base dual.

Multiplicando-se escalarmente por  $\alpha_j$  obtém-se

$$a_i (\alpha_i, \alpha_j) = b_k (r_k, \alpha_j) \quad (5.4)$$

Esta equação permite descobrir a base dual. Mas como usaremos cordões- $\alpha$  uma mudança de normalização desta base é bastante conveniente. Definimos então a base de Dynkin, composta pelos vetores  $d_i$  abaixo:

$$d_i = \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} r_i \quad (\text{sem soma sobre } i) \quad (5.5)$$

A matriz de mudança de base da base das raízes simples para esta pode ser facilmente calculada substituindo-se (5.5) em (5.1) e em (5.4), obtendo-se

$$A_{ij} = 2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad (5.6)$$

## A MATRIZ DE CARTAN E A BASE DE DYNKIN

A matriz  $A_{ij}$  é chamada de matriz de Cartan e pode ser lida diretamente do diagrama de Dynkin, como veremos em breve.

Em geral damos a maior raiz norma 2, o que é conveniente para todas as álgebras com exceção de  $G_2$  (lembre-se das relações de ângulo e tamanho entre as raízes).

Para um vetor genérico:

$$V = k^i \alpha_i \quad (5.7)$$

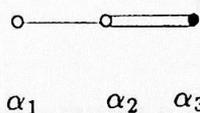
suas componentes na base de Dynkin são as seguintes

$$v_j = k^i 2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \quad (5.8)$$

Veja que se os  $k^i$  forem inteiros, de (5.8) e do teorema 3.1 os  $v_i$  também são inteiros. Isto mostra a conveniência da notação adotada em (5.5) pois desta forma as raízes na base de Dynkin apresentam coordenadas inteiras.

Vamos deixar de lado a base de Dynkin por um momento e, a título de exemplo, vamos escrever a matriz de Cartan para algumas álgebras e ver como se pode lê-la diretamente do diagrama:

Tomemos  $B_3$ , cujo diagrama de Dynkin é:



Usando as relações (4.1) conseguimos os seguintes produtos:

$$(\alpha_1, \alpha_2) = -1 \quad (\alpha_1, \alpha_3) = 0 \quad (\alpha_2, \alpha_3) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = -1$$

$$(\alpha_1, \alpha_1) = (\alpha_2, \alpha_2) = 2 \quad (\alpha_3, \alpha_3) = 1$$

(lembre-se da normalização da maior raiz).

Desta forma

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

## A MATRIZ DE CARTAN E A BASE DE DYNKIN

Existem duas regras práticas facilmente dedutíveis que permitem escrever rapidamente a matriz de Cartan.

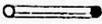
1)  $A_{ii} = 2$  (sem soma sobre  $i$ )

2)  $A_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } |\alpha_i| \leq |\alpha_j| \text{ e se } \alpha_i \text{ estiver unida a } \alpha_j \\ -\text{número de linhas unindo } \alpha_i \text{ a } \alpha_j, & \text{ caso contrário} \end{cases}$

Portanto, para

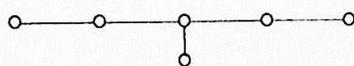
$SU(5)$  

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$G_2$  

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$E_6$



$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Uma última observação antes de restaurar o sistema completo de raízes partindo do diagrama de Dynkin. Uma vez na base das raízes simples estas se escrevem  $(1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 1, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, 0, \dots, 1)$  e que a matriz de Cartan é a matriz de mudança de base, suas colunas são as raízes simples na base de Dynkin.

## A RESTAURAÇÃO DO SISTEMA COMPLETO DE RAÍZES

### 6. A RESTAURAÇÃO DO SISTEMA COMPLETO DE RAÍZES

Como dissemos no início da seção anterior, para recobrar as raízes usaremos os cordões- $\alpha$ . Portanto imaginemos um cordão- $\alpha_i$  genérico:

$$\beta - r\alpha_i, \dots, \beta, \dots, \beta + q\alpha_i \quad (6.1)$$

de (3.3) podemos escrever

$$2 \frac{(\beta + q\alpha_i, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = q + r \quad (6.2)$$

ou, isolando-se  $q$ :

$$q = r - 2 \frac{(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad (6.3)$$

Deve-se notar que  $q$  é o número de vezes que podemos somar  $\alpha_i$  a  $\beta$  e que  $2 \frac{(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$  são as componentes de  $\beta$  na base de Dynkin.

Se as componentes de  $\beta$  na base das raízes simples forem  $(k^1, k^2, \dots, k^l)$ , isto é, se  $\beta$  se escrever

$$\beta = k^i \alpha_i \quad (6.4)$$

a equação (6.3) toma a forma

$$q = r - k^j A_{ij} \quad (6.5)$$

Mas da própria definição de raiz simples, se  $\beta$  for simples teremos  $r = 0$ , ou seja, a cada raiz simples  $\alpha_i$  somamos  $-A_{ij}$  vezes a raiz  $\alpha_j$ , conseguindo desta forma um conjunto inicial de cordões completos (olhando para o cordão (6.1), se  $r = 0$  então  $\beta$  pertence a uma das extremidades). A grande vantagem em se partir destes cordões reside no fato de que qualquer novo cordão que contenha novas raízes também possuirá  $r = 0$ .

A melhor maneira de entender o que foi exposto é através de um exemplo detalhado, sendo conveniente acompanhar o raciocínio num papel a parte.

Vejamos novamente  $B_3$ .

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

# A RESTAURAÇÃO DO SISTEMA COMPLETO DE RAÍZES

As raízes simples são, na sua própria base :

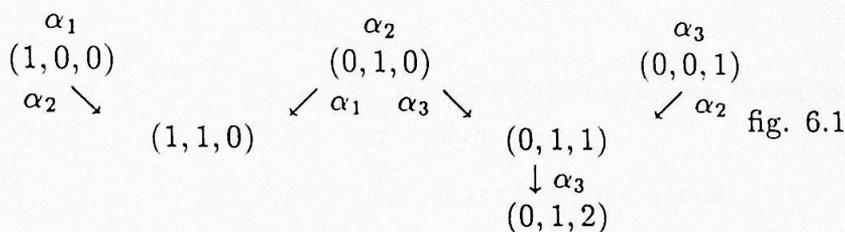
$$(1, 0, 0) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 0, 1)$$

Podemos somar  $-A_{12}$  vezes  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ , ou seja 1 vez, obtendo-se  $(1, 1, 0)$

Também podemos somar uma vez  $\alpha_2$  a  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  a  $\alpha_3$ , e ainda somamos 2 vezes  $\alpha_3$  a  $\alpha_2$ , conseguindo desta forma:

$$(1, 1, 0) \quad (0, 1, 1) \quad (0, 1, 1) \quad (0, 1, 2)$$

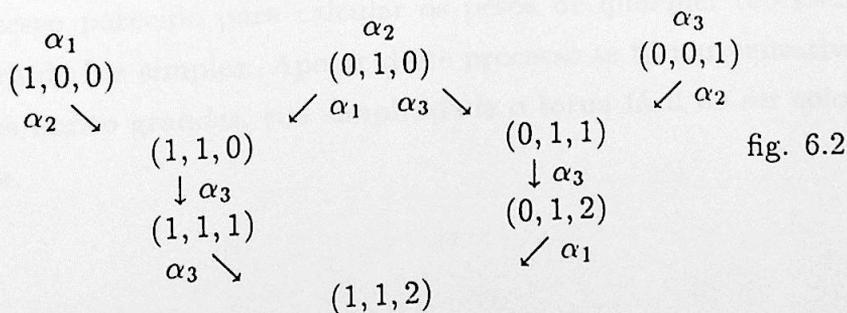
como pode ser visto na figura 6.1



Precisamos agora saber quais raízes podem ser somadas a  $(1, 1, 0)$ . Já sabemos que não somaremos nem  $\alpha_1$  nem  $\alpha_2$  como pode ser visto da matriz de Cartan ( $2-1 = -1+2 = 1 > 0$ ) ou ainda lembrar que tanto o cordão- $\alpha_1$  que contém  $\alpha_2$  como o cordão- $\alpha_2$  que contém  $\alpha_1$  já estão completos, assim só nos resta  $\alpha_3$  que somamos  $-(0 \times 1 - 2 \times 1) = 2$  vezes, conseguindo as novas raízes  $(1, 1, 1)$  e  $(1, 1, 2)$ .

Aplicando um raciocínio similar a  $(0, 1, 1)$  percebemos que podemos somar  $\alpha_1$  obtendo-se novamente  $(1, 1, 1)$ . Deve-se notar que pela matriz de Cartan não poderíamos somar  $\alpha_3$  mas no entanto a raiz  $(0, 1, 2)$  existe e já foi calculada no começo. Acontece que neste caso  $r$  não é zero, entretanto não devemos nos preocupar pois, como dissemos, o cordão já está completo.

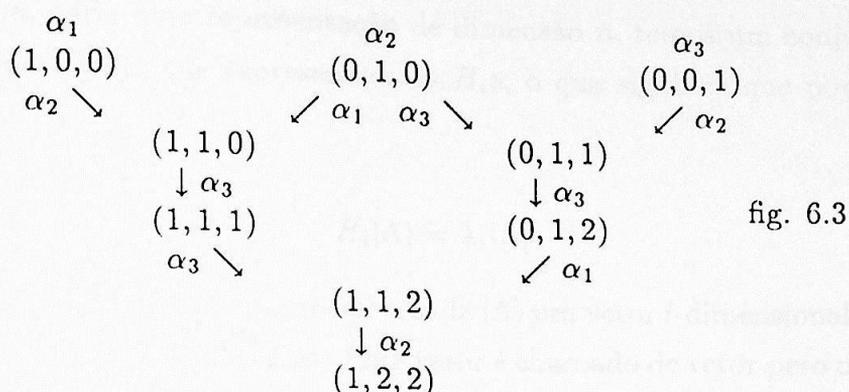
O conjunto de raízes obtido até agora está na figura 6.2.



## A RESTAURAÇÃO DO SISTEMA COMPLETO DE RAÍZES

Às novas raízes não podemos somar nenhuma outra, exceto a  $(1, 1, 2)$  que podemos somar  $\alpha_2$ . Desta forma obtemos todas as raízes positivas de  $B_3$ . Para se obter as negativas basta fazer a reflexão com relação à origem.

Assim as raízes positivas são



A estas somamos 3 raízes nulas ( $l = 3$ ) e as raízes negativas, fazendo um total de 21 como era esperado ( $B_3 = SO(7) \Rightarrow (7 \times 7 - 7)/2 = 21$ ).

Como ilustração final, vamos explicitar os cordões calculados:

$$\begin{aligned} & \alpha_1, (\alpha_1 + \alpha_2) \\ & \alpha_2, (\alpha_2 + \alpha_1) \\ & \alpha_3, (\alpha_3 + \alpha_2) \\ & \alpha_2, (\alpha_2 + \alpha_3), (\alpha_2 + 2\alpha_3) \\ & (\alpha_2 + \alpha_3), (\alpha_2 + 2\alpha_3) + \alpha_3 \\ & (\alpha_1 + \alpha_2), (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3, (\alpha_1 + \alpha_2) + 2\alpha_3 \\ & (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3), (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) + \alpha_2 \end{aligned}$$

Como vimos, conseguimos de uma forma simples e direta as raízes procuradas. Usaremos um processo parecido para calcular os pesos de qualquer representação finita de qualquer álgebra de Lie simples. Apesar deste processo se tornar cansativo para álgebras e representações muito grandes, sua simplicidade o torna fácil de ser colocado dentro de um computador.

## 7. AS REPRESENTAÇÕES

Podemos estudar as representações de uma álgebra de Lie através dos autovalores dos elementos da sub-álgebra de Cartan. Como a sub-álgebra de Cartan é comutativa, seus elementos possuem auto-vetores comuns.

Desta forma, dada uma representação de dimensão  $n$ , temos um conjunto de autovetores  $|\Lambda\rangle$  dos operadores que representam os  $H_i$ s, o que significa que podemos escrever, para cada  $H_i$ ,

$$H_i|\Lambda\rangle = \lambda_i|\Lambda\rangle \quad (7.1)$$

Consequentemente podemos associar a cada  $|\Lambda\rangle$  um vetor  $l$ -dimensional  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  exatamente como foi feito com os  $E_\alpha$ s. Este vetor é chamado de vetor peso ou simplesmente peso. Deve ser claro que os pesos se encontram no mesmo espaço das raízes. Para sabermos o efeito da ação de  $E_\alpha$  sobre  $|\Lambda\rangle$ , basta olhar para as relações de comutação (3.40)

$$\begin{aligned} H_i E_\alpha |\Lambda\rangle &= ([H_i, E_\alpha] + E_\alpha H_i) |\Lambda\rangle \\ &= (\alpha_i E_\alpha + \lambda_i E_\alpha) |\Lambda\rangle \\ &= (\alpha_i + \lambda_i) |\Lambda\rangle \end{aligned} \quad (7.2)$$

e percebemos que  $E_\alpha$  leva o autovetor  $|\Lambda\rangle$  no autovetor  $|\Lambda + \alpha\rangle$ , de modo que podemos passar de um peso a outro somando e subtraindo raízes. Na verdade existe um teorema que diz ser possível construir cordões- $\alpha$  de modo idêntico ao que fizemos com as raízes (teorema 3.1), bastando substituir  $\beta$  por  $\Lambda$  na equação (3.16). A demonstração deste fato segue de perto a do teorema 3.1 de modo que não vale a pena repeti-la aqui. Em resumo trata-se de trocar os comutadores por equações de autovalores repetindo-se a argumentação, e acaba-se por chegar às mesmas conclusões. Chamaremos este teorema de teorema de adição de raízes.

Antes de continuarmos o estudo de representações através de pesos vamos antes demonstrar dois teoremas que garantirão o que será dito.

**Teorema 7.1.** *Autovetores com pesos diferentes são linearmente independentes.*

A demonstração é obtida por redução ao absurdo.

Tentaremos escrever  $|\Lambda\rangle$  como uma combinação linear de autovetores  $|M(k)\rangle$ , com  $k$  sendo um índice variando de 1 até um inteiro qualquer e cada  $M(k)$  diferente de  $\Lambda$ . Expressando de outra forma:



$$|\Lambda\rangle = \sum_k a_k |M(k)\rangle \quad (7.3)$$

Para demonstrar este teorema basta construir um operador que anula cada  $|M(k)\rangle$  sem anular  $|\Lambda\rangle$ . Definindo  $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l)$  como sendo um vetor de  $l$  componentes não nulas quaisquer, construímos

$$W = \prod_k [\gamma^i H_i - (\Gamma, M(k))] \quad (7.4)$$

Aplicando  $W$  a  $|\Lambda\rangle$  obtemos

$$\begin{aligned} W|\Lambda\rangle &= \prod_k [(\Gamma, \Lambda) - (\Gamma, M(k))] \\ &= \prod_k [\Gamma(\Lambda - M(k))] \end{aligned} \quad (7.5)$$

que certamente não é nulo pois por hipótese todos os  $M(k)$  são diferentes de  $\Lambda$ .

Por outro lado, se aplicarmos  $W$  ao lado direito de (7.4) conseguiremos

$$\sum_i a_i W |M(i)\rangle = \sum_i a_i \left[ \prod_k (\Gamma, M(i) - M(k)) \right] = 0 \quad (7.6)$$

uma vez que os termos da série se anulam para cada  $i = k$ . Como as equações (7.5) e (7.6) são incompatíveis, o teorema está demonstrado.

Se  $\Lambda$  for um peso de uma representação, mas  $\Lambda + \alpha$  não for, para qualquer raiz  $\alpha$  simples, então  $\Lambda$  é chamado de *peso mais alto* desta representação. Com esta definição podemos enunciar o segundo teorema.

**Teorema 7.2.** *O peso mais alto de uma representação irredutível é não degenerado.*

Partindo-se de um autovetor  $|\Lambda\rangle$ , para conseguirmos uma representação irredutível construímos todos os produtos da forma

$$|M\rangle = \dots E_\gamma E_\beta E_\alpha |\Lambda\rangle \quad (7.7)$$

A equação (7.2) garante que todos os vetores obtidos deste modo são autovetores dos  $H_i$ s, e como varremos todos os produtos possíveis acabamos por conseguir uma r.i. (representação irredutível).

## AS REPRESENTAÇÕES

Supondo-se que  $\Lambda$  é o peso mais alto, para provar o teorema basta mostrar que todo autovetor de peso  $\Lambda$  é múltiplo de  $|\Lambda\rangle$ . Assim, tomando  $|M\rangle$  com peso  $\Lambda$  e usando (7.2) vemos que

$$M = \Lambda + \alpha + \beta + \gamma + \dots = \Lambda$$

Pelo menos uma das raízes  $\alpha, \beta, \dots$  é positiva (elas não são nulas), digamos que esta raiz seja  $\gamma$ . Comutando  $E_\gamma$  com  $E_\alpha$  e depois com  $E_\beta$  conseguimos

$$E_\gamma E_\beta E_\alpha = ([E_\gamma, E_\beta] + E_\beta E_\gamma) E_\alpha = E_{\beta+\gamma} E_\alpha + E_\beta E_{\gamma+\alpha} + E_\beta E_\alpha E_\gamma \quad (7.8)$$

O último termo em (7.8) aplicado em  $|\Lambda\rangle$  dá 0, pois  $\Lambda$  é o peso mais alto. Podemos repetir o processo até que não sobre mais nenhuma raiz positiva a ser somada. Como a soma das raízes deve se anular só irão sobrar operadores proporcionais aos  $H_i$ s multiplicando  $|\Lambda\rangle$ , mostrando que  $|M\rangle$  é múltiplo de  $|\Lambda\rangle$ .

Como os pesos estão no espaço das raízes, podemos escrevê-los como uma combinação linear das raízes simples:

$$\Lambda = \frac{2\lambda_i}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i \quad (7.9)$$

O fator de normalização é o mesmo de (5.5) e foi colocado por conveniência. Para escrevermos  $\Lambda$  na base de Dynkin, basta seguir (5.8) obtendo-se

$$\lambda_i = 2 \frac{(\Lambda, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \lambda_i \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i \quad (7.10)$$

Mas este valor é sempre inteiro graças ao teorema de adição de raízes.

Com a equação (7.10) podemos escrever uma métrica para os pesos, que nada mais é do que a matriz que leva as componentes de um peso na base dada raízes simples nas componentes na base de Dynkin. Como é claro de (7.10), escrevemos

$$G_{ij} = \frac{2}{(\alpha_j, \alpha_j)} A_{ji} = \frac{2}{(\alpha_j, \alpha_j)} (\alpha_j, \alpha_i) \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad (7.11)$$

Outra forma de se perceber que esta é realmente a métrica desejada é tomar  $B_{ij}$  de (5.2) e multiplicar pelo inverso da normalização usada em (7.9). Com a métrica podemos finalmente saber quantas vezes podemos subtrair a raiz  $\alpha_i$  de  $\Lambda$ :

$$r = 2 \frac{(\Lambda, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \lambda_i \quad (7.12)$$

## AS REPRESENTAÇÕES

Este é um resultado extremamente interessante, pois indica que o número de subtrações de cada raiz  $\alpha_i$  é dado pela  $i$ -ésima componente de  $\Lambda$  na base de Dynkin. Isto significa que o peso mais alto de uma representação não pode ter componentes negativas, portanto as representações irredutíveis são identificadas por  $l$ -uplas de números inteiros positivos!

O procedimento a seguir é tomar um peso  $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  e subtrair dele  $\lambda_1$  vezes  $\alpha_1$ ,  $\lambda_2$  vezes  $\alpha_2$ , e assim sucessivamente até  $\lambda_l$ , repetindo-se o processo para cada novo peso encontrado. Porém agora é fundamental tomar cuidado com degenerescências, pois o número de pesos encontrados é a dimensão da r.i. (teorema 7.1). Sabemos que as raízes são  $n$  ao degeneradas, mas o mesmo não acontece necessariamente com os pesos. Mais de um vetor no espaço da representação pode ter o mesmo conjunto de autovalores. No entanto sabemos que para uma r.i. o peso mais alto não é degenerado, o que já é um ponto de partida.

Para conseguirmos analisar a degenerescência de outros pesos vamos imaginar o conjunto completo de pesos de uma r.i., este diagrama de pesos possui uma simetria herdada das raízes, uma vez que foi montado a partir delas. Na verdade o diagrama de peso possui um grupo de reflexões que é o grupo de Weyl para ele. Pela ação deste grupo, um peso  $\Lambda$  tem sua norma mantida pela transformação :

$$\Lambda' = \Lambda - 2 \frac{(\Lambda, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i \quad (7.13)$$

esta propriedade pode ser verificada por um cálculo direto.

A transformação (7.13) é conhecida como reflexão de Weyl. Se pegarmos u peso junto com todas as suas reflexões, formamos o que se chama órbita deste peso. O conceito de órbita é mais geral e muito importante e será novamente tratado mais tarde. No caso presente sua aplicação é muito simples e útil, pois todos os pesos de uma dada órbita possuem a mesma degenerescência.

A ideia básica por trás disto é a seguinte: o que chamamos de raízes positivas foi uma convenção, na verdade poderíamos trocar todo o conjunto de raízes simples por um outro simétrico em relação ao que escolhemos. Como consequência, a argumentação quanto ao peso mais alto pode ser repetida para qualquer peso que esteja na mesma órbita, como por exemplo o peso mais baixo. Assim, pela simetria do diagrama de raízes, o diagrama de pesos pode ser construído a partir de qualquer peso pertencente à órbita do mais alto, provocando a mesma simetria nas órbitas internas.

Antes de alguns exemplos, mais uma definição e uma convenção :

## AS REPRESENTAÇÕES

Chama-se nível de um peso o número de raízes simples que devemos subtrair do peso mais alto para se atingí-lo.

Vamos identificar a representação pelo seu peso mais alto, escrevendo-o diretamente, ou colocando cada componente sobre uma bolinha do diagrama de Dynkin, pois desta forma identificamos também a álgebra.

Exemplos:

$SU(3) - A_2$        $\circ \text{---} \circ$

$$\text{matriz de Cartan} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tomando-se a representação de peso mais alto  $(1 \ 1)$ , a qual chamaremos, de acordo com a convenção acima de  $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \end{smallmatrix}$  ou  $(1 \ 1)$ , temos o seguinte diagrama de pesos:

nível 0		$1 \quad 1$	
nível 1	$\begin{matrix} -\alpha_1 \swarrow \\ -1 \quad 2 \end{matrix}$		$\begin{matrix} \searrow -\alpha_2 \\ 2 \quad -1 \end{matrix}$
nível 2	$\begin{matrix} \downarrow -\alpha_2 \\ 0 \quad 0 \end{matrix}$		$\begin{matrix} \downarrow -\alpha_1 \\ 0 \quad 0 \end{matrix}$
nível 3	$\begin{matrix} \downarrow -\alpha_2 \\ 1 \quad -2 \end{matrix}$		$\begin{matrix} \downarrow -\alpha_2 \\ -2 \quad 1 \end{matrix}$
nível 4	$\begin{matrix} -\alpha_1 \searrow \\ -1 \quad -1 \end{matrix}$		$\begin{matrix} \swarrow -\alpha_2 \\ -1 \quad -1 \end{matrix}$

Neste exemplo os únicos pesos que não estão na mesma órbita do peso mais alto são os dois  $(0 \ 0)$ . Um deles corresponde ao vetor

$$E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} | 1 \ 1 \rangle$$

enquanto que o outro corresponde a

$$E_{\alpha_2} E_{\alpha_1} | 1 \ 1 \rangle$$

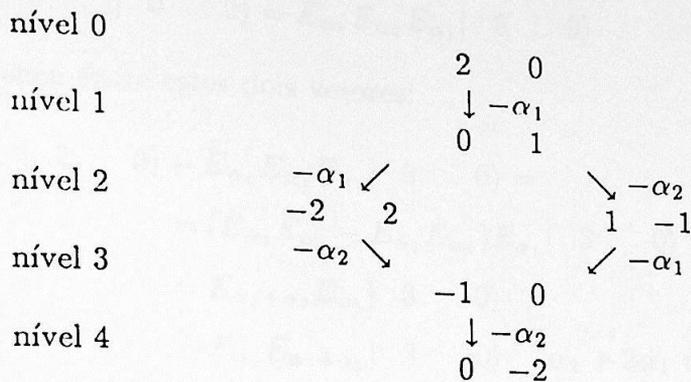
mas, como  $E_{\alpha_1}$  e  $E_{\alpha_2}$  não comutam, estes vetores são linearmente independentes, e portanto  $(0 \ 0)$  tem degenerescência 2.

Pela contagem dos pesos vemos que esta é a representação 8 do  $SU(3)$ .

De um modo geral, pode-se demonstrar que o número de pesos a cada nível é sempre maior ou igual que o do nível anterior, até o nível central, além disto o diagrama é simétrico em relação ao nível central (como era de se esperar, pela discussão sobre as órbitas).

# AS REPRESENTAÇÕES

Ainda no  $SU(3)$ , vejamos  $(2 \ 0)$ :



E vemos que  $(2 \ 0)$  tem dimensão 6. Note que a degenerescência do nível 3 é a mesma do nível 1.

As órbitas presentes aqui são duas: a composta por  $(2 \ 0)$ ,  $(-2 \ 2)$  e  $(0 \ -2)$  e a composta por  $(0 \ 1)$ ,  $(1 \ -1)$  e  $(-1 \ 0)$ . Em ambas não existe degenerescência.

No caso de representações maiores, talvez seja mais fácil calcular os pesos órbita a órbita, por exemplo a representação  $(3 \ 0)$  (isto é, a representação cujo peso mais alto é  $(3 \ 0)$ ):

Existe um único cordão saindo de  $(3 \ 0) - (3 \ 0)$ ,  $(1 \ 1)$ ,  $(-1 \ 2)$ ,  $(-3 \ 3)$ , analisando os pesos deste cordão vemos que existem duas órbitas presentes: a do próprio peso  $(3 \ 0)$  e a do peso  $(1 \ 1)$ :

$$(3 \ 0) - (3 \ 0), (-3 \ 3), (0 \ -3)$$

$$(1 \ 1) - (1 \ 1), (-1 \ 2), (2 \ -1), (1 \ -2), (-2 \ 1), (-1 \ -1)$$

Os pesos  $(-1 \ 2)$  e  $(2 \ -1)$ , levam a órbita do peso  $(0 \ 0)$ .

Precisamos agora calcular a degenerescência de cada órbita:

- . A órbita de  $(3 \ 0)$  é não degenerada, pois este é o peso mais alto.
- . A órbita de  $(1 \ 1)$  também é não degenerada, pois este peso só pode ser obtido de  $(3 \ 0)$ :

$$|1 \ 1\rangle = E_{\alpha_1} |3 \ 0\rangle$$

- . Poderíamos pensar que a degenerescência de  $(0 \ 0)$  é 2, dado o raciocínio do nosso primeiro exemplo, mas não poderemos esquecer que  $(0 \ 0)$  foi obtido de outras formas:

$$|0 \ 0\rangle = E_{\alpha_2} E_{\alpha_1} E_{\alpha_1} |3 \ 0\rangle$$

ou

$$| 0 \quad 0 \rangle = E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} E_{\alpha_1} | 3 \quad 0 \rangle$$

Vejam a diferença entre estes dois vetores:

$$\begin{aligned} E_{\alpha_2} E_{\alpha_1} E_{\alpha_1} | 3 \quad 0 \rangle - E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} E_{\alpha_1} | 3 \quad 0 \rangle &= \\ &= (E_{\alpha_2} E_{\alpha_1} - E_{\alpha_1} E_{\alpha_2}) E_{\alpha_1} | 3 \quad 0 \rangle \\ &= E_{\alpha_1 + \alpha_2} E_{\alpha_1} | 3 \quad 0 \rangle \\ &= E_{\alpha_1} E_{\alpha_1 + \alpha_2} | 3 \quad 0 \rangle \quad (\alpha_2 + 2\alpha_1 \text{ não é raiz}) \\ &= E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} E_{\alpha_1} | 3 \quad 0 \rangle - E_{\alpha_1} E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} | 3 \quad 0 \rangle \\ &= E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} E_{\alpha_1} | 3 \quad 0 \rangle \quad (E_{\alpha_2} | 3 \quad 0 \rangle \text{ é nulo}) \end{aligned}$$

E, como a diferença é proporcional a um deles, eles são proporcionais. Isto implica que a degenerescência de  $(0 \quad 0)$  é 1. E a dimensão desta representação é  $3+6+1 = 10$ .

Porém este tipo de análise não será necessária, pois existe uma fórmula recursiva que calcula a degenerescência de cada peso conhecendo a degenerescência dos pesos de nível superior (mais próximo do nível 0), esta fórmula é devida a Freudenthal. Se  $\Lambda$  é o peso mais alto e  $\Lambda'$  é o peso para o qual queremos saber a degenerescência, temos:

$$[(\Lambda + \delta, \Lambda + \delta) - (\Lambda' + \delta, \Lambda' + \delta)] n_{\Lambda'} = 2 \sum_{\alpha^+, k > 0} n_{\Lambda' + k\alpha} (\Lambda' + k\alpha, \alpha) \quad (7.14)$$

onde  $\delta = (1, 1, \dots, 1)$  na base de Dynkin,  $n_{\Lambda'}$  é a degenerescência procurada e a somatória se estende por todas as raízes positivas e todos os  $k$  inteiros positivos (conquanto que  $\Lambda' + k\alpha$  seja um peso da representação, é claro).

Existe também uma fórmula que fornece a dimensão de uma r.i. em termos de seu peso mais alto (fórmula de Weyl):

$$N = \prod_{\alpha^+} \frac{(\Lambda + \delta, \alpha)}{(\delta, \alpha)} \quad (7.15)$$

onde a produtória se estende por todas as raízes positivas.

Além da lista de pesos, existem outros dados importantes sobre as r.i.'s que podem ser obtidos diretamente dos pesos e/ou do diagrama de Dynkin.

Podemos saber facilmente se uma representação é auto-adjunta ou não, pois se conju-  
garmos as matrizes que representam os  $H_i$ s e os  $E_{\alpha}$ s, vemos tanto por (2.13) como por (2.3)

## AS REPRESENTAÇÕES

que os  $\alpha$ s são levados em  $-\alpha$ s (lembre-se que ao conjugar uma matriz nós a transpomos) e consequentemente os  $E_\alpha$ s são levados em  $-E_\alpha$ s. Com esta mudança de sinal, aquele que era o peso mais alto passa a ser o mais baixo e vice-versa. Em outras palavras, para se obter os pesos da representação conjugada trocamos o sinal de todos o pesos de uma r.i. Desta forma se  $(\ 2 \ 0)$  significa a representação  $\mathfrak{6}$  do  $SU(3)$ ,  $(\ 0 \ 2)$  significa  $\bar{\mathfrak{6}}$ , de acordo com o cálculo da página anterior. Por outro lado fica claro que  $(\ 1 \ 1)$  é auto-adjunta, uma vez que o peso mais baixo é  $(-1 \ -1)$ . De um modo geral para o  $SU(n)$ , o peso mais alto de uma representação conjugada é obtido escrevendo-se seu peso de trás para frente.

Será que existe uma relação bastante entre a existência de representações complexas e a forma do diagrama de Dynkin? A relação entre o peso mais alto e o peso mais baixo de uma r.i. está determinada pela matriz de Cartan e esta está totalmente representada no diagrama de Dynkin, o que sugere a relação acima que existe e é a seguinte:

Olhando-se para um diagrama pode-se notar ou não uma simetria no seu desenho, como por exemplo os diagramas da figura 7.1, para as álgebras cujos diagramas não possuem uma simetria deste tipo, então o peso mais baixo é sempre o oposto do peso mais alto e todas as representações são auto-adjuntas, caso contrário podem existir representações complexas. Na figura 7.2 encontram-se diagramas sem esta simetria.

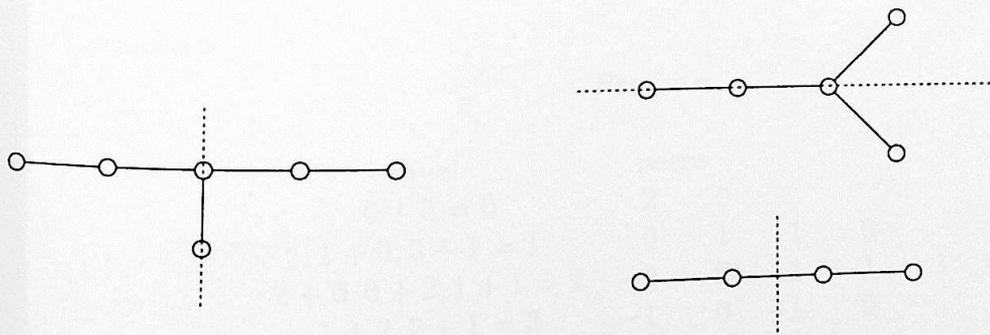


figura 7.1

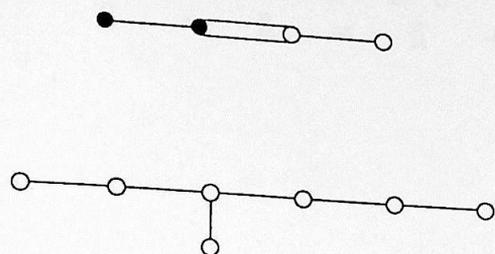


figura 7.2

Tendo-se em mãos o conjunto dos pesos de duas (ou mais) representações de uma certa álgebra, podemos calcular o produto das mesmas de um modo muito simples. Basta lembrarmos que os pesos do produto são obtidos através da soma dos pesos dos fatores. Assim somamos os pesos de todas as maneiras possíveis e buscamos nos pesos resultantes as r.i.s que aparecem. Vejamos com um exemplo.

Vamos calcular o produto  $\underline{3} \times \underline{3}$  do  $SU(3)$ . O peso mais alto de  $\underline{3}$  é  $(1 \ 0)$ . Assim queremos calcular

$$\begin{array}{c} 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ \circ \text{---} \circ \quad \times \quad \circ \text{---} \circ \end{array}$$

Os pesos de  $\underline{3}$  são  $(1 \ 0)$ ,  $(-1 \ 1)$  e  $(0 \ -1)$ . Então

nível	1	0	x	1	0
	o	o		o	o
0	(1	0)		(1	0)
1	(-1	1)		(-1	1)
2	(0	-1)		(0	-1)

Levando a

Produto

nível	pesos
$0 + 0 = 0$	2   0
$1 + 0, 0 + 1 = 1$	0   1   1   0
$2 + 0, 0 + 2, 1 + 1 = 2$	-2   2   1   -1   1   -1
$1 + 2, 2 + 1 = 3$	-1   0   -1   0
$2 + 2 = 4$	0   -2

onde identificamos  $\begin{array}{c} 2 \quad 0 \\ \circ \text{---} \circ \end{array}$  e  $\begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \circ \text{---} \circ \end{array}$ . Ou seja

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ \underline{3} & \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 & 0 \\ \underline{3} & \end{matrix} = \begin{matrix} 2 & 0 \\ \underline{6} & \end{matrix} + \begin{matrix} 0 & 1 \\ \underline{3} & \end{matrix}$$

8. SUBÁLGEBRAS

Os diagramas de Dynkin fornecem ainda informações sobre as chamadas subálgebras regulares. Existem dois tipos de sub-álgebras: regulares e especiais.

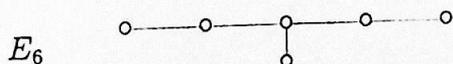
Uma subálgebra de  $L$  é chamada de regular se sua subálgebra de Cartan estiver contida na subálgebra de Cartan de  $L$ . É de se esperar que se tomarmos um subconjunto dos  $H_i$ s de  $L$ , possa existir um conjunto dos  $E_\alpha$ s que completem uma nova álgebra.

Quanto às subálgebras especiais pode-se dizer que elas ocorrem como que de maneira acidental, no sentido de que um subconjunto de operadores qualquer, favorecido por um particular valor das constantes de estrutura, causam sua existência. Neste caso a correspondência entre as subálgebras de Cartan não existe.

Deve ser claro que achar as subálgebras regulares é muito mais fácil do que as especiais, de fato, estas últimas só podem ser identificadas através de uma análise de representações da álgebra e da candidata a subálgebra. Assim vamos apenas nos deter nas regulares, e dentre estas nas maximais, isto é, aquelas subálgebras de  $L$  que não estão contidas em nenhuma outra subálgebra que também seja subálgebra de  $L$ .

A primeira coisa que podemos fazer para identificar uma subálgebra regular maximal, é considerar uma combinação linear dos  $H_i$ s como sendo um gerador de um fator  $U_1$ . Os outros  $H_i$ s formarão a subálgebra de Cartan de uma álgebra semi-simples. Para se identificar esta última retira-se uma bolinha do diagrama de Dynkin (na verdade qualquer pedaço do diagrama de Dynkin é uma subálgebra regular, mas queremos apenas as maximais). A subálgebra assim obtida não é semi-simples devido ao fator  $U_1$ .

Por exemplo, as subálgebras maximais regulares e não semi-simples de  $E_6$  são:



- 1-  $\otimes U_1 \rightarrow SO(10) \otimes U_1$
- 2-  $\otimes U_1 \rightarrow SU(5) \otimes SU(2) \otimes U_1$
- 3-  $\otimes U_1 \rightarrow SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(2) \otimes U_1$
- 4-  $\otimes U_1 \rightarrow SU(6) \otimes U_1$

## SUBÁLGEBRAS

É bem fácil perceber que as subálgebras de  $SU(5)$  (o o o o) são  $SU(4) \otimes U_1$  e  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U_1$ .

Para acharmos as subálgebras semi-simples regulares, podemos procurar simetrias nos diagramas de raízes, por exemplo, se olharmos o diagrama de  $G_2$  (fig.3.4), notamos que as raízes maiores formam o hexágono de  $SU_3$ , isto sem dúvida quer dizer que a álgebra de  $SU(3)$  é uma subálgebra de  $G_2$ .

Na prática devemos encontrar um outro subconjunto de raízes que correspondam a um diagrama válido. Substituímos uma das raízes simples por uma outra raiz que possa preencher os requisitos necessários para formar um segundo diagrama. No caso da figura 3.4, substituímos por exemplo  $\alpha$  por  $-(2\alpha - 3\beta)$  e temos as raízes simples do  $SU(3)$ , claramente os cordões gerados por estas raízes não passarão pela órbita de  $\beta$ , mas isto é esperado, pois queremos uma subálgebra.

As raízes que compõe estes subdiagramas podem ser representadas no diagrama de Dynkin para cada uma das álgebras fornecendo os novos diagramas da figura 8.1. Para obtermos as subálgebras maximais, tiramos uma bolinha por vez, obtendo diagramas válidos de subálgebras semi-simples.

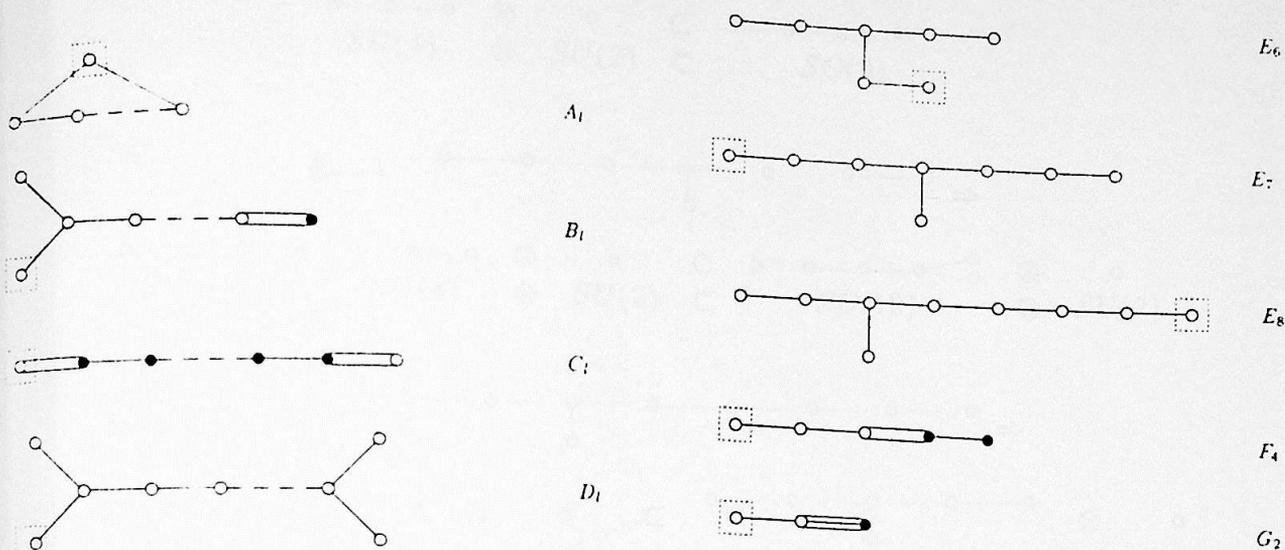
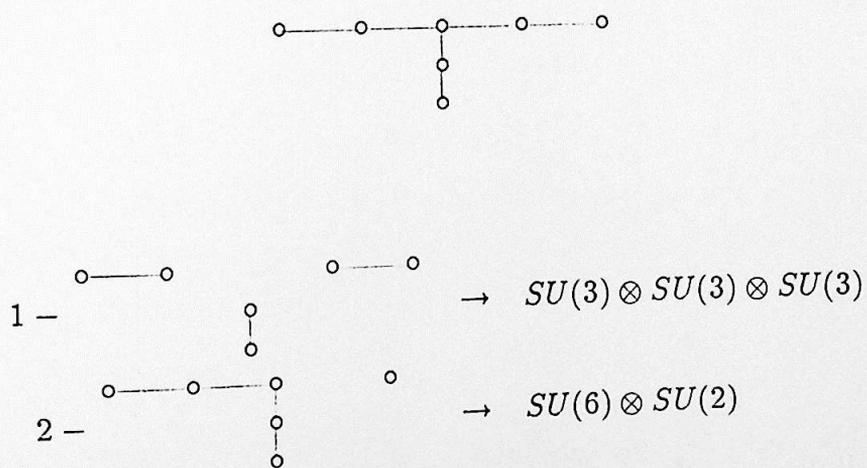
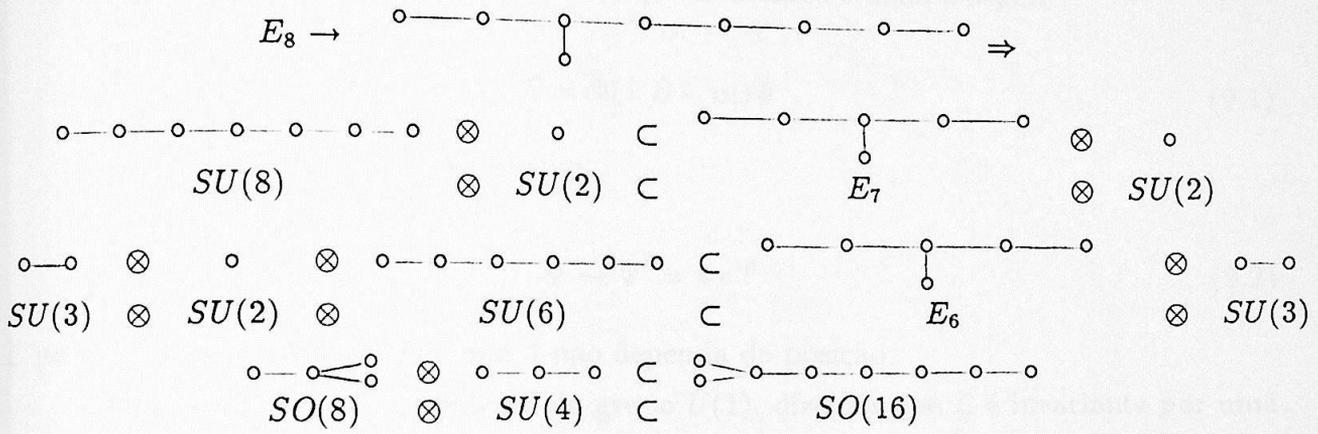
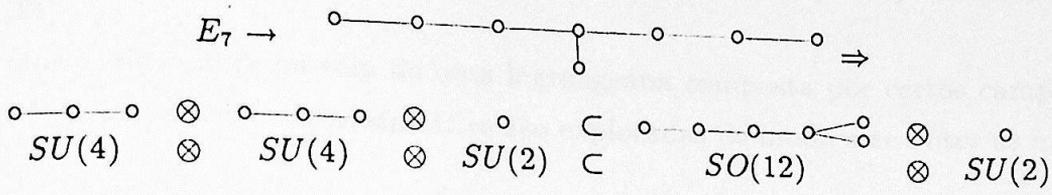
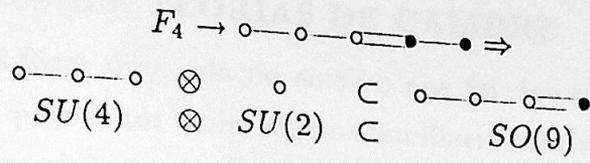


fig. 8.1

As subálgebras maximais regulares semi-simples de  $E_6$  são, portanto:



Existem alguns casos em que a subálgebra obtida não é maximal e estes estão listados a seguir:



## 9. ÁLGEBRAS DE LIE E TEORIAS DE CALIBRE

Neste capítulo iremos fazer uma relação entre o que foi descrito até aqui e as teorias de calibre. Iremos supor que o leitor tenha alguma familiaridade com estas teorias, mas mesmo assim faremos uma descrição breve delas. Um estudo mais completo pode ser obtido em [1],[8] e [24].

As teorias de calibre partem de uma lagrangeana composta por certos campos e que possuam alguma simetria, estas simetrias são exploradas de modo a se obter as interações entre os campos.

Por exemplo, a lagrangeana de um campo fermiônico é dada a seguir

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i \not{\partial} - m)\Psi \quad (9.1)$$

Se fizermos a transformação abaixo

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \Psi e^{i\beta} \quad (9.2)$$

$\mathcal{L}$  permanece invariante, desde que  $\beta$  não dependa da posição.

Uma vez que  $e^{i\beta}$  é um elemento do grupo  $U(1)$ , dizemos que  $\mathcal{L}$  é invariante por uma transformação do tipo  $U(1)$ , e como  $\beta$  é o mesmo em todo o espaço-tempo dizemos que esta é uma transformação global.

No entanto se imaginarmos  $\beta$  dependente de  $x$  esta invariância é perdida, como pode ser visto substituindo-se (9.2) em (9.1):

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \bar{\Psi} \not{\partial} \beta(x) \Psi \quad (9.3)$$

em outras palavras, apesar de  $\mathcal{L}$  possuir invariância global, ela não possui invariância local (isto é, com  $\beta = \beta(x)$ ), devido à presença do operador  $\partial_\mu$  em (9.1).

Entretanto podemos obter a invariância local se conseguirmos de alguma forma cancelar o termo extra em (9.3). Para isto devemos mudar o operador  $\partial_\mu$ . O que deve ser feito é similar ao que se faz na relatividade geral com a derivada covariante e com o campo afim.

Devemos somar um campo a  $\mathcal{L}$  com uma lei de transformação tal que consiga cancelar o termo indesejado. Assim definimos o novo operador

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu(x) \quad (9.4)$$

onde  $G$  é uma constante arbitrária e  $A_\mu(x)$  é o campo compensador ou de calibre. A lei de transformação deste operador deve ser dada por

$$D_\mu \Psi \rightarrow D'_\mu \Psi = e^{-i\beta(x)} D_\mu \Psi \quad (9.5)$$

de modo a manter a invariância de  $\mathcal{L}$ .

Para que (9.5) seja obedecida, devemos impor para  $A_\mu$  a seguinte lei de transformação:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \beta(x) \quad (9.6)$$

a qual pode ser obtida diretamente de (9.5).

Substituindo-se  $\partial_\mu$  por  $D_\mu$  em (9.1), vemos que  $\mathcal{L}$  fica invariante por (9.2) mesmo que  $\beta$  dependa da posição mas ganha um termo de interação dado por  $g\bar{\Psi}A\Psi$ .

Com a introdução do campo  $A_\mu$  devemos colocar o termo cinético correspondente, dado a seguir

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (9.7)$$

onde  $F_{\mu\nu}$  é dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (9.8)$$

Desta forma obtemos a lagrangeana dos campos interagentes:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi + g\bar{\Psi}A\Psi \quad (9.9)$$

O campo  $A_\mu$  faz o papel do campo mediador. Deve-se notar a ausência do termo de massa de  $A_\mu$ , pois este não é invariante por (9.4).

Com isto montamos a lagrangeana de uma teoria de calibre baseada no grupo  $U(1)$ . Como este é um grupo comutativo, dizemos que esta é uma teoria abeliana. Em particular, esta teoria descreve a eletrodinâmica dos férmions e o fato do campo  $A_\mu$  não ter massa concorda com o fato do fóton não ser massivo.

Vamos analisar melhor esta teoria em termos do grupo  $U(1)$ . A transformação (9.2) corresponde a uma rotação no espaço que contém as componentes real e imaginária de  $\Psi$ . Na verdade  $\Psi$  está numa representação do  $U(1)$ , mais rigorosamente existe neste espaço uma representação do  $U(1)$ . No entanto poderíamos pensar numa representação num espaço maior, contendo vários campos, por exemplo uma teoria de interações fracas

que envolva elétrons e neutrinos, ou quarks. Para fazer isto colocamos os vários campos no espaço de uma representação de um grupo  $G$ , que vai ser o grupo de simetria da lagrangeana. Assim temos  $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r)$ , onde  $r$  corresponde a uma representação de  $G$ . A transformação (9.2) é substituída por:

$$\Psi'_\mu = e^{(-i\beta^a X_a)} \Psi_\mu = U \psi_\mu \quad (9.10)$$

Onde  $a$  é um índice de  $G$ ,  $X^a$  são geradores de  $G$  e  $\mu$  é um índice da representação que contém os férmions. Analogamente ao caso abeliano  $\mathcal{L}$  é invariante por transformações do tipo (9.9), se  $\beta^a$  não depender da posição:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i \not{\partial} - m)\Psi = \bar{\Psi}U^{-1}(i \not{\partial} - m)U\Psi \quad (9.11)$$

Mas, se  $\beta = \beta(x)$  a invariância é novamente perdida e devemos definir a derivada covariante e introduzir campos de calibre. A diferença é que agora é necessário introduzir um campo compensador para cada gerador de  $G$ , e assim  $D_\mu$  assume a forma abaixo:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a X_a \quad (9.12)$$

e  $A_\mu^a$  transforma-se como segue:

$$A_\mu^a \rightarrow A'^a_\mu = UA_\mu^a U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \quad (9.13)$$

onde  $U$  é a matriz definida em (9.10). Desta forma vemos que  $D_\mu \Psi \rightarrow UD_\mu \Psi$  e a invariância de calibre é mantida.

Analogamente ao caso abeliano, o termo cinético dos  $A_a$  deve ser colocado, sendo dado por

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a \quad (9.14)$$

e  $F_{\mu\nu}$  é dado por

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gC^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (9.15)$$

onde  $C^{abc}$  são as constantes de estrutura de  $G$  e  $F_{\mu\nu}^a$  possuem a seguinte lei de transformação:

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow U F_{\mu\nu}^a U^{-1} \quad (9.16)$$

Como  $G$  é não abeliano, a teoria é chamada não abeliana, a qual consegue descrever interações com vários campos mediadores (ex. interações fortes e fracas).

O primeiro problema a ser destacado é que alguns campos de calibre são massivos, mas não existem os termos de massa correspondentes. Este problema foi resolvido pelo mecanismo de Higgs, baseado na quebra espontânea de simetria, este processo será visto mais adiante. Por enquanto vamos prestar atenção a alguns pontos de contato entre o que foi apresentado aqui e o apresentado nas seções anteriores.

Primeiramente vamos observar que os campos formam uma base no espaço da representação de  $G$  escolhida, como é claro de (9.10). Desta forma podemos associar um peso a cada  $\Psi$ , peso este que fornecerá os números quânticos relativos a simetria  $G$  da partícula descrita por  $\Psi$ , como por exemplo cor ou sabor.

Outro ponto a ser observado é que os campos  $A_\mu^a$  se encontram na representação adjunta, uma vez que (9.12) deve ser invariante por uma ação de  $G$ , ou seja, o termo  $A_\mu^a X^\mu$  deve ser um escalar com relação a  $G$ . Desta forma podemos associar a cada  $A^a$  uma raiz (lembre-se que as raízes são os pesos da representação adjunta). Com esta associação conseguimos identificar todos os campos de calibre da teoria e conseqüentemente todas as interações que respeitam a simetria da teoria.

Quando um férmion  $\Psi$  emite um boson de calibre  $A_\mu^a$ , podemos dizer que ele se transforma num outro férmion  $\Psi'$ . Olhando para as equações (7.1) e (7.2) e identificando  $\Psi$  com  $|\Lambda\rangle$  e  $\Psi'$  com  $E_a|\Lambda\rangle$ , vemos que a diferença entre os pesos de  $\Psi$  e  $\Psi'$  fornece a raiz associada a  $A_\mu^a$ . Esta identificação é válida porque o termo de interação entre os  $A_\mu^a$ s e os  $\Psi$ s é dado por  $g\Psi A_a X^a \Psi$ .

Para exemplificar estas idéias, vamos descrever o modelo padrão. Este modelo se compõe de duas teorias de calibre, a saber: a cromodinâmica quântica que trata das interações fortes e o modelo de Weinberg-Salam tratando das interações eletro-fracas.

O grupo de simetria de cromodinâmica é o  $SU(3)$ , enquanto o modelo de Weinberg-Salam utiliza o grupo  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Convém notar que temos um produto direto de grupos, portanto as interações são **independentes**, pois os geradores do  $SU(3)$  comutam com os geradores do  $SU(2)$  e do  $U(1)$ .

A cromodinâmica trata das interações entre os quarks e conseqüentemente os leptons são colocados em singletos (representações de dimensão 1) do  $SU(3)$ . Os quarks ficam na

# ÁLGEBRAS DE LIE E TEORIAS DE CALIBRE

representação  $\underline{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  e de acordo com o que foi dito, cada peso desta representação corresponde a uma cor, por exemplo:

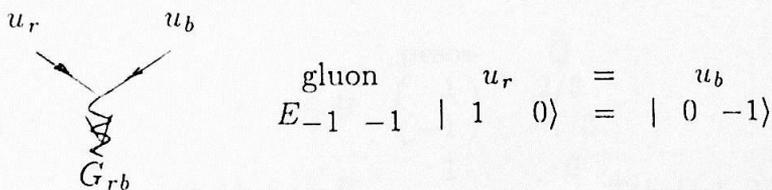
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\text{vermelho} & (r) \\ -\text{verde} & (g) \\ -\text{azul} & (b) \end{matrix}$$

Da mesma forma os anti-quarks são colocados na representação  $\bar{\underline{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Os bosons de calibre da CDQ (CromoDinâmica Quântica) são em número de 8, já que esta é a quantidade de geradores do  $SU(3)$ . Basta olhar para as raízes e vemos que existem 2 correntes neutras ( $l = 2$  para  $SU(3)$ ): as raízes na base de Dynkin são:

$$\begin{matrix} & & 1 & 1 & & & \\ -1 & 2 & & & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 & - \text{correntes neutras} \\ 1 & -2 & & & -2 & 1 & \\ & & -1 & -1 & & & \end{matrix}$$

Desta forma, uma interação em que transforma um quark  $r$  se transforma num quark  $b$ , em termos do grupo, pode ser vista como na figura abaixo:



donde se percebe a idéia de um fermion ser "rodado" em outro pela emissão de um boson de calibre.

As interações fracas apresentam problemas adicionais em relação à cromodinâmica, pois violam a paridade e, além disto, seus bosons são massivos. A violação de paridade pode ser implementada facilmente escolhendo-se representações diferentes para fermions de mão direita e de mão esquerda, como veremos a seguir.

O grupo do modelo de W.S. é  $SU(2) \times U(1)$ . Todos os fermions se transformam não trivialmente por  $U(1)$ , mas cada fermion de mão direita é colocado num singlete de  $SU(2)$ . Desta forma as partículas da primeira família são distribuídas como no quadro abaixo:

dubletos	singletos
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_E$	$u_D \quad d_D$
$\begin{pmatrix} \nu_{e^-} \\ e^- \end{pmatrix}_E$	$e^+$

# ÁLGEBRAS DE LIE E TEORIAS DE CALIBRE

onde  $D$  e  $E$  representam mão direita e mão esquerda, respectivamente. Note a ausência do neutrino de mão direita.

Como ilustração, vale a pena escrever a parte cinética fermiônica da lagrangeana de Weinberg-Salam para a primeira família:

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = (\bar{u} \quad \bar{d})_E i \not{D} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_E + (\bar{\nu}_{e^-} \quad e^+)_E i \not{D} \begin{pmatrix} \nu_{e^-} \\ e^+ \end{pmatrix}_E + \bar{u}_D i \not{D} u_D + \bar{d}_D i \not{D} d_D + e_D^+ \not{D} e_D^- \quad (9.17)$$

onde a derivada covariante é dada por

$$D_\mu = \partial_\mu - i I g^k A_\mu^k - i g' Y B_\mu \quad (9.18)$$

com  $I$  e  $Y$  sendo autovalores correspondentes ao peso mais alto da representação escolhida,  $k$  são geradores do  $SU(2)$ ,  $A_\mu^k$  os campos de calibre associados ao mesmo  $SU(2)$  e  $B_\mu$  o campo ligado ao  $U(1)$ .

Os valores de  $I$  e  $Y$  para as representações escolhidas são dados na tabela abaixo:

rep.	$I$	$Y$	$D$	pesos	$Q$
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	1/2	1/3	$-i \frac{g^k}{2} A^k - i \frac{g'}{6} B$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 2/3 \\ -1/3 \end{matrix}$
$\begin{pmatrix} \nu \\ e^- \end{pmatrix}$	1/2	-1	$-i \frac{g^k}{2} A^k + i \frac{g'}{6} B$	$\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}$
$u$	0	4/3	$-i \frac{g'}{3} B$	0	-2/3
$d$	0	-1/3	$-i \frac{g'}{3} B$	0	-2/3
$e^+$	0	-2	$-i g' B$	0	-2/3

Tabela 1. Valores de  $I$  e  $Y$

Como já sabemos os pesos são autovalores dos operadores diagonalizáveis do grupo em questão. Olhando para a tabela acima, vemos que o peso do  $SU(2)$  é dado pelo dobro do isospin ( $I$ ), enquanto que o peso do  $U(1)$  é dado pela hipercarga ( $Y$ ). Deve-se notar que não escolhemos uma normalização que fornecesse  $Y$  inteiros, pois  $U(1)$  não é semi-simples.

Os pesos contém todas as informações saber os números quânticos relativos ao grupo. De fato, basta escolher um sistema de coordenadas no espaço dos pesos para se obter estes números diretamente. O isospin é obtido de forma imediata (basta dividir o peso do  $SU(2)$  por 2) e a carga elétrica é dada por

$$Q = I + Y/2 \quad (9.19)$$

em outras palavras, a matriz que leva os pesos para os números quânticos usuais é a seguinte:

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{SU(2)} \\ Y \end{pmatrix} \quad (9.20)$$

O modelo padrão apresenta alguns problemas cuja solução segere uma teoria unificada. Inicialmente temos cor e sabor separados, levando a constantes de acoplamento diferentes e sem relação. A QCD é quirial (não apresenta quebra de paridade) ao passo que o modelo de W.S. não é. Ela não explica a quantização da carga e não apresenta nenhuma razão clara para a escolha das representações dos fermions.

Uma teoria grã-unificada nada mais é do que uma teoria de calibre não abeliana baseada num grupo de simetria  $G$  tal que  $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset G$ .

$G$  não deve conter subgrupos invariantes ou, se os tiver, devem ser todos iguais de modo que uma simetria de reflexão possa ser estabelecida entre os geradores dos subgrupos. Desta forma garantimos a existência de uma única constante de acoplamento. Tendo definido  $G$  retorna-se ao modelo padrão através de uma quebra espontânea de simetria. Desta forma obtém-se relações entre as teorias do modelo padrão.

O caso mais simples de grã-unificação é fornecido pelo grupo  $SU(5)$ , onde os fermions são colocados numa representação  $\bar{5} + 10$ .

O grupo  $SU(5)$  quebra para os grupos do modelo padrão e as representações  $\bar{5}$  e  $10$  são levadas nas seguintes representações de  $SU(3) \times SU(2)$ :

$$\begin{aligned} \bar{5} &\rightarrow (\bar{3}, 1) + (1, 2) && \text{antitripleto de cor + dubleto de sabor} \\ &\bar{d} + \begin{pmatrix} \nu \\ e^- \end{pmatrix} \\ 10 &\rightarrow (3, 2) + (\bar{3}, 1) + (1, 1) \\ &\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} + \bar{u} + e^+ \end{aligned}$$

Um outro exemplo simples de grã-unificação utiliza o grupo  $SO(10)$  que quebra para  $SU(5)$ . Neste caso toda uma família de fermions fica colocada na representação  $16$  que é levada para  $\bar{5} + 10 + 1$ , onde o singleto  $(1)$  representa o anti-neutrino.

Unificações com grupos ainda maiores podem ser feitas incluindo possibilidade da colocação de todas as famílias numa única representação irredutível e que quebre para o modelo padrão multiplicado por um grupo de simetria entre as famílias (simetria horizontal).

## ÁLGEBRAS DE LIE E TEORIAS DE CALIBRE

Em geral, ao se tomar um procedimento deste tipo, novas partículas são previstas, algumas delas com números quânticos diferentes dos habituais (partículas exóticas), e eventualmente pode-se prever um número muito grande de novas famílias trazendo problemas com o grupo de renormalização .

## 10. QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA

Do ponto de vista de teoria de grupos, uma quebra espontânea de simetria ocorre quando temos um problema invariante por um grupo  $G$  (tem simetria  $G$ , mas suas soluções não compartilham esta simetria. Esta situação ocorre com freqüência ao tratarmos com problemas variacionais.

Como a simetria do problema é maior do que a de uma solução, obtém-se um conjunto de soluções. A simetria *do conjunto* é necessariamente dada por  $G$ .

Se aplicarmos um elemento  $g$  de  $G$  sobre uma solução, podem acontecer duas coisas:

a) Se a solução permanecer invariante, então  $g$  pertence a um subgrupo  $H$  de  $G$ .  $H$  é chamado de 'little group' da solução.

b) caso contrário obtemos uma outra solução equivalente à primeira.

Dada uma solução  $\phi$  podemos encontrar todas as outras soluções equivalentes através da ação de  $G$  sobre ela. O conjunto de todas as soluções equivalentes é chamada de órbita. O conceito de órbita de pesos, analisado nas representações é o mesmo tratado aqui, pois lá fizemos a ação de todo o grupo de Weyl sobre um peso.

Matematicamente, escrevemos: se  $\phi$  é solução, então sua órbita é o conjunto definido abaixo:

$$\text{órbita de } \phi = \{x | x = g \cdot \phi, \forall g \in G\}$$

Por construção as órbitas são invariantes sob  $G$ .

Vejamos um exemplo para visualizar estes conceitos.

Imaginemos uma barra de metal cilíndrica pressionada em seus extremos. Se a pressão não for suficientemente forte, a barra é simétrica por rotações em torno de seu eixo e por reflexões em relação ao plano perpendicular à barra que passa pelo seu centro (fig. 1).

Quando a pressão aumentar o bastante, a barra se curva tomando a forma aproximada de um trecho de senoide (fig. 2). Nesta nova situação, a barra perde a simetria de rotação, mas ainda mantém a invariância por reflexão. Cada solução do problema é caracterizada pela distância entre o eixo original da barra e sua nova posição, mais um ângulo azimutal indicando a direção em que a barra se curvou.

Aplicando-se a rotação na barra curvada, vemos que a órbita das soluções é caracterizada por uma circunferência de raio  $a$  que passa pelo centro original da barra ( $o$ ) (fig. 2). A barra pode entortar em qualquer direção, mas terá de escolher 'espontaneamente' uma delas.

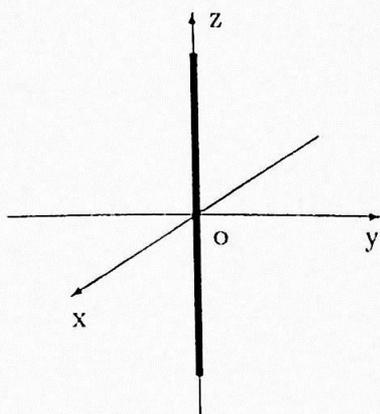


fig. 1

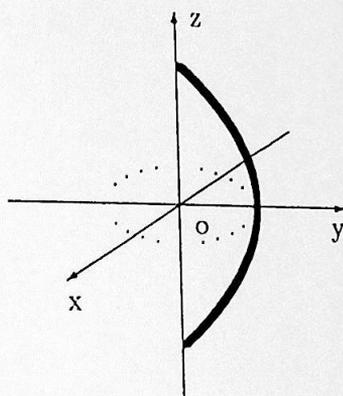


fig. 2

Neste exemplo o grupo de simetria é  $G = R_z \times SO(2)$ , onde  $R_z$  significa a reflexão em relação ao plano  $xy$ . Cada solução apresenta apenas a simetria  $R_z$ , ou seja  $H = R_z$  e  $G/H = SO(2)$ .

Podemos pensar que todas as soluções contidas na mesma órbita possuem a mesma simetria  $H$ , isto não é verdade. Pode-se verificar facilmente que elementos da mesma órbita possuem grupos de simetria conjugados entre si, pois se  $\phi_1 = g \cdot \phi$  e  $H_1$  for o grupo de simetria de  $\phi_1$ , então:

$$\begin{aligned}
 \phi &= h \cdot \phi, h \in H \\
 \phi_1 &= h_1 \cdot \phi_1, h_1 \in H_1 \\
 g \cdot \phi &= h_1 \cdot g \cdot \phi \\
 \phi &= g^{-1} \cdot h_1 \cdot g \cdot \phi \\
 H &= g^{-1} H_1 g
 \end{aligned}
 \tag{10.1}$$

A partir desta observação vemos que os tipos de solução para um problema com simetria  $G$  são dados pelas classes de conjugação dos subgrupos de  $G$ . Em outras palavras,

## QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA

os tipos de quebra de simetria para um dado problema, são definidos pelas classes de conjugação do grupo de simetria deste problema.

Voltemos para o espaço das soluções. Cada ponto deste espaço está associado a uma órbita. Se pegarmos todos os pontos que possuem o mesmo tipo de órbita, construímos o que se chama de estrato. Veremos em breve que as propriedades topológicas de um estrato fornecem informações muito interessantes sobre a quebra.

No exemplo da barra, se mudarmos ligeiramente a força exercida sobre ela, teremos como órbita de soluções uma outra circunferência, concêntrica à primeira, mas ainda pertencente ao mesmo estrato. O conjunto de todas as soluções se compõe de dois estratos: a origem e as outras (o conjunto dos pontos em que a barra permanece torta sem se quebrar).

Podemos pensar que ao mudarmos os parâmetros do problema original, a solução caminha sobre o 'espaço' formado por todas as soluções. Ao passar de um estrato para outro, naturalmente muda o grupo  $H$ . Este é o caso, por exemplo, das transições de fase. O 'caminho' percorrido pela solução em geral bifurca-se produzindo 'trilhas' simétricas com relação a  $G/H$ . Nos sistemas físicos, a natureza escolhe uma destas trilhas ou então cria vários domínios, cada um dependente das condições locais no momento da quebra. Cada domínio mantém correspondência com uma trilha. A simetria reinante no domínio é o 'little group' do ponto da órbita contido nesta trilha.

É plausível que órbitas menores correspondam a simetrias maiores, pois quanto maior a simetria de uma solução, menos ela se deslocará com a ação de  $G$ . No caso de grupos contínuos atuando em variedades de dimensão finita (que em geral é o caso nas teorias de calibre), pode-se ir mais longe:

Imaginemos  $\mathcal{M}$  como sendo o espaço das soluções.

Dado um ponto  $x$  genérico de  $\mathcal{M}$ , construímos sua órbita  $G \cdot x$ .

Pegamos uma métrica  $m$  qualquer de  $\mathcal{M}$  que seja invariante por  $G$  (qualquer métrica serve, se tomarmos sua média com respeito a  $G$ ).

Com isto construímos uma vizinhança  $\mathcal{V}$  de  $G \cdot x$  tal que para qualquer  $v \in \mathcal{V}$ , existe um único ponto  $r(v) \in G \cdot x$  mais próximo a ele.

Como  $r(v)$  pertence à órbita, ele é invariante por algum subgrupo de  $G$  e neste caso  $v$  não muda (a métrica é invariante por todo o  $G$ ). O inverso, porém, pode não ser verdade, pois nada impede que exista um  $v'$  à mesma distância de  $r(v)$ . Neste caso a simetria reinante em  $\mathcal{V}$  é menor do que a de  $G \cdot x$ . Isto significa que  $G \cdot x$  é fronteira com uma região de simetria maior ou então é uma órbita isolada.

## QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA

Em outras palavras : Se  $G \cdot x$  e  $\mathcal{V}$  estão no mesmo extrato, então eles possuem a mesma simetria, caso contrário  $G \cdot x$  é fronteira de um extrato fechado.

Assim cruzando uma fronteira de um extrato fechado em direção ao seu interior, encontramos regiões com simetria maior, o que nos leva a uma ordenação das simetrias.

Agora estamos em condições de enunciar o primeiro teorema de Michel-Radicatti:  
*Se  $H$  é um subgrupo maximal de  $G$ , e  $H$  for o 'little group' de  $\phi$ , então  $\phi$  pertence a um extrato fechado.*

Vamos imaginar uma função  $V(\phi)$  definida em  $M$  e invariante por  $G$ . Pela simetria  $V$  é constante em cada órbita, isto é, as órbitas são curvas de nível de  $V(\phi)$ . Consequentemente, o gradiente  $\vec{\nabla} V(\phi)$  de  $V$  no ponto  $\phi$  é perpendicular á órbita de  $\phi$ . Por outro lado  $\vec{\nabla} V$  pertence ao espaço tangente ao extrato.

Com base nestas afirmações, concluímos que se a órbita for isolada no estrato, então qualquer função  $V(\phi)$  tem esta órbita como crítica, uma vez que  $\vec{\nabla} V(\phi)$  é forçosamente nulo.

Como a inversa também é verdadeira, chegamos ao segundo teorema de Michel:

*Se  $\phi$  pertence a um extrato fechado, então  $s$  é ponto estacionário de alguma função real, suave e invariante por  $G$ .*

Assim um extrato fechado sempre possui uma órbita correspondente a uma solução variacional de algum  $V(\phi(r))$ .

$$dV(\phi(r))|_{\phi(r)=\langle\phi(v)\rangle} = 0$$

Com base nestes dois teoremas, Michel conjecturou que se tivermos algum  $V(\phi)$  invariante por  $G$  e com mínimo invariante por  $H \subset G$  então o mínimo de  $V(\phi)$  pertence a um extrato fechado e  $H$  é um subgrupo maximal.

Isto é o mesmo que dizer que simetrias quebradas por um processo de minimização levam a subgrupos maximais, que é o que ocorre nas teorias de grã-unificação.

Encontrou-se um contra exemplo desta conjectura, pertindo do ponto que, no caso de teorias de calibre, deve-se levar em conta a simetria do potencial de Higgs e não a da lagrangeana em si. O potencial de Higgs, em geral, apresenta a simetria  $O(n)$ , que é maior do que a simetria da teoria. No entanto a conjectura vale na maioria dos casos e pode ser utilizada como um chute inicial.

## 11. OS MODELOS DE GRÃ-UNIFICAÇÃO.

Uma teoria grã-unificada é obtida partindo-se de um grupo de simetria suficientemente grande para conter o grupo do modelo padrão dentro de si. Este tipo de construção foi proposto para que se possa colocar todas as interações dentro de um único modelo [13], [16].

Para que a teoria contenha apenas um tipo de interação, o grupo de simetria deve ser simples caso contrário o subgrupo invariante conterá números quânticos independentes do resto da teoria (veja o exemplo do modelo padrão).

Quando o grupo de simetria é simples qualquer partícula do modelo pode ser transformada em outra, sem separação de números quânticos como cor e sabor. Na verdade existe a possibilidade do grupo ser composto por um produto direto de grupos simples iguais. Neste caso deve ser adicionada uma simetria discreta de reflexão ligando os geradores de cada subgrupo, e conseqüentemente os números quânticos associados. Modelos usando esta possibilidade foram construídos, partindo do grupo  $SU(4) \times SU(4)$  [29].

Além desta restrição, o grupo deve ter alguma representação que comporte todos os férmions conhecidos. Não é necessário que esta representação seja irredutível.

Finalmente o modelo deve ser livre de anomalias.

Estas restrições não são suficientes para definir um único modelo, e normalmente é necessário incluir outros preceitos para restringir o número de grupos candidatos. Em geral proíbe-se a existência de férmions exóticos (aqueles que não se encaixam dentro dos padrões observados) ou o número excessivo de famílias. De qualquer forma o teste final é a comparação com a experiência.

Para se construir um modelo de unificação a partir de um dado grupo é necessário, antes de mais nada a obtenção do conteúdo de partículas em uma representação deste grupo. Em outras palavras precisamos saber a quais partículas correspondem os pesos da representação escolhida. Com o que foi visto na primeira parte deste trabalho, a identificação se torna bastante simples pois valendo-se da existência da quebra de simetria associamos os pesos do grupo de partida com os pesos de seus subgrupos até atingirmos uma representação na qual esta relação seja conhecida. Em última hipótese, para que o modelo seja realístico, precisamos atingir o modelo padrão onde temos a identificação completa.

Para ver como fazer esta associação, vamos admitir que o grupo de simetria total seja  $G$  e que  $H$  é um subgrupo a ser atingido via quebra de simetria. Imaginemos o espaço

## OS MODELOS DE GRÃ-UNIFICAÇÃO

dos pesos da álgebra de  $G$ . Como  $H$  é um subgrupo de  $G$ , então seus geradores são combinações lineares dos geradores de  $G$ , e conseqüentemente os pesos de  $H$  estão num subespaço dos pesos de  $G$ . Desta forma é possível montar uma matriz de projeção de  $G$  para  $H$ . Cabe dizer que esta matriz não é única devido à simetria dos diagramas de pesos (grupo de Weyl). Por exemplo, se um peso  $|\Lambda\rangle$  da representação de  $G$  estiver associado a um certo peso de uma representação de  $H$ , então qualquer outro peso da órbita de  $|\Lambda\rangle$  também pode ser associado ao mesmo peso de  $H$ , sem que as outras identificações percam o sentido. Esta liberdade decorre do mesmo fato que permite que se escolha arbitrariamente qual será o peso mais alto da representação, desde que este se localize sobre a órbita mais externa.

Como temos a simetria do grupo de Weyl no diagrama de pesos podemos dizer que dada uma matriz de projeção, obtém-se outra equivalente multiplicando-se à esquerda por um elemento do grupo de Weyl de  $G$  e à direita por um elemento do grupo de Weyl de  $H$ .

A existência de duas matrizes de projeção não equivalentes implica a existência de dois subgrupos de  $G$  isomorfos (a  $H$ ).

Para poder determinar uma matriz de projeção, precisamos conhecer as representações de  $H$  correspondentes a algumas representações de  $G$ . Sabemos por exemplo que a adjunta de  $G$  deve conter a adjunta de  $H$ , dada a correspondência entre os geradores.

Vamos ilustrar esta projeção usando o modelo  $SU(5)$  de grã-unificação, (veja-se Slansky). Inicialmente vamos descrever o conteúdo de cor e sabor para uma família do modelo padrão. A representação de  $SU(3) \times SU(2)$  usada é, como sabemos,  $2 \times (\bar{3}, 1) + (3, 2) + (1, 2) + (1, 1)$ , correspondente, respectivamente a 6 antiquarks, 6 quarks, um dubleto de leptons e um antilepton ( $e^+$ ). Em termos dos pesos, escrevemos:

$$(0\ 1)(0) + (0\ 1)(0) + (1\ 0)(1) + (0\ 0)(1) + (0\ 0)(0)$$

Uma família no modelo  $SU(5)$  é colocada numa representação  $\bar{5} + 10$ , que é a menor representação capaz de conter toda a família e ser livre de anomalias. Reescrevendo com os pesos, temos  $(0\ 0\ 0\ 1)(0\ 1\ 0\ 0)$ .

Para encontrarmos quais férmions estão em  $\bar{5}$  e quais em  $10$ , montamos a matriz de projeção  $P$ .

Precisamos de alguns dados iniciais, por exemplo, sabe-se que  $5$  quebra para  $(3, 1) + (1, 2)$ . Vamos identificar o peso mais alto de  $5$  com o peso mais alto de  $(3, 1) + (1, 2)$ :

$$(1\ 0\ 0\ 0) \leftrightarrow (1\ 0)(0) + (0\ 0)(1)$$

isto fornece a primeira coluna de  $P$  e se consideramos  $\bar{5}$  obteremos a quarta também ( $P$  deve ser uma matriz  $4 \times 3$ , dados os postos das duas álgebras. Conjugando-se os dois pesos obtemos:

$$(0\ 0\ 0\ 1) \leftrightarrow (0\ 1)(0) + (0\ 0)(1) \tag{11.1}$$

Um raciocínio similar pode ser aplicado à representação 10 do  $SU(5)$  que quebra para  $(3, 2) + (\bar{3}, 1) + (1, 1)$ . Escrevendo esta relação em termos dos pesos:

$$(0\ 1\ 0\ 0) \leftrightarrow (1\ 0)(1) + (0\ 1)(0) + (0\ 0)(0) \tag{11.2}$$

e assim podemos escrever as duas colunas centrais de  $P$ . No final obtemos a seguinte matriz de projeção :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.3}$$

Uma vez obtida esta matriz podemos obter o correspondente no  $SU(3) \times SU(2)$  a qualquer peso do  $SU(5)$ , em particular podemos descobrir imediatamente a quebra de qualquer representação do  $SU(5)$ . Através da identificação dos pesos podemos também descobrir os eixos de carga, isospin e outros números quânticos dentro do  $SU(5)$ .

No modelo  $SU(5)$  de unificação, coloca-se uma família de fermions na representação  $\bar{5} + 10$ . Vamos identificar o conteúdo e partículas da representação 5. Iniciamos com a identificação dos pesos:

$$\begin{array}{ll} (0\ 0\ 0\ 1) & - (0\ 1)(0) \quad \text{-antiquark} \\ (0\ 0\ 1\ -1) & - (0\ 0)(1) \quad \text{-lepton} \\ (0\ 1\ -1\ 0) & - (1\ -1)(0) \quad \text{-antiquark} \\ (1\ -1\ 0\ 0) & - (0\ 0)(-1) \quad \text{-lepton} \\ (-1\ 0\ 0\ 0) & - (-1\ 0)(0) \quad \text{-antiquark} \end{array}$$

A identificação com lepton ou antiquark foi feita de acordo com a representação do  $SU(3) \times SU(2)$  a qual o peso pertence.

Para fazermos a identificação dos números quânticos como isospin, devemos lembrar que os geradores destes pertencem ao grupo de simetria e que portanto são combinações lineares das raízes, desta forma o gerador do isospin e o da carga são representados por

## OS MODELOS DE GRÃ-UNIFICAÇÃO

vetores no espaço das raízes. Uma vez identificados estes eixos, para saber qual o isospin de um certo peso do  $SU(5)$  (ou do grupo em estudo) basta calcular o produto escalar deste peso com o eixo do isospin, pois o que procuramos é a componente deste peso naquele eixo.

No exemplo apresentado é fácil perceber qual o eixo do isospin, uma vez que este é proporcional ao peso do  $SU(2)$  e portanto proporcional à terceira linha de  $P$  (veja a eq. 11.4). Como as linhas de  $P$  correspondem a vetores na base dual à base de Dynkin (multiplicamos os pesos diretamente pela matriz) as componentes encontradas também se encontram nesta base. Desta forma podemos escrever

$$I = \frac{1}{2}(0 \ 1 \ 1 \ 0) \text{ base das raízes simples} \quad (11.4)$$

O fator  $1/2$  é encontrado na identificação dos leptons.

Para identificarmos o eixo de carga precisamos saber a carga de alguns pesos do  $SU(5)$ . Como ponto de partida sabemos que a carga total de cada representação deve ser nula, pois o gerador da carga pertence ao  $SU(5)$  (uma vez que ele representa a simetria total da teoria) e portanto deve ter traço nulo. Olhando para a representação  $\bar{5}$  e sabendo que o dubleto de leptons deve ter carga  $-1$  consistentemente com o modelo padrão, o antiquark contido nesta representação deve ter carga  $1/3$ .

Assim podemos montar um sistema de equações lineares que fornecem as componentes do eixo de carga. Supondo que este eixo tenha a forma  $(a \ b \ c \ d)$  escrevemos as equações abaixo de acordo com as identificações feitas:

$$\begin{aligned} d &= 1/3 \\ c - d &= 0 \\ b - c &= 1/3 \\ a - b &= 0 \\ -a &= 1/3 \end{aligned} \quad (11.5)$$

cuja solução é :

$$\begin{aligned} a &= -1/3 \\ b &= 2/3 \\ c &= 1/3 \\ d &= 1/3 \end{aligned} \quad (11.6)$$

De forma que o eixo de carga na base dual tem a forma :

$$Q = \frac{1}{3}(-1 \quad 2 \quad 1 \quad 1) \tag{11.7}$$

Se calcularmos as componentes deste eixo na base de Dynkin obteremos

$$Q_{Dynkin} = \frac{1}{3}(-4 \quad 4 \quad -1 \quad 1)$$

e vemos que multiplicando-se este vetor pelas duas primeiras linhas de  $P$  verificamos que o eixo de carga é perpendicular aos geradores do  $SU(3)$  como deveríamos esperar, uma vez que estes são os eixos de cor.

Estudos deste tipo permitem descobrir de antemão se um grupo contém representações que possuam o conteúdo de partículas desejáveis. Além disto, como vimos, o conhecimento da matriz de projecção permite conhecer o padrão de quebra de qualquer representação.

## 12. EXEMPLO DE UNIFICAÇÃO.

Para ilustrarmos uma das aplicações do método, vamos montar a estrutura de um modelo de unificação a partir do modelo padrão.

Conhecendo-se o conteúdo de partículas das representações usadas no modelo padrão e usando as matrizes de projeção, podemos saber quais representações do grupo de unificação possuem o mesmo conteúdo. A partir deste fato, vamos procurar uma representação de algum grupo de forma que consigamos colocar dentro dela todas as três famílias de fermions com um número mínimo de fermions adicionais.

As representações de  $SU(3) \times SU(2)$  usadas no modelo padrão são:

$$3(3, 2) \text{ com cargas } 2/3 \text{ e } -1/3$$

$$6(\bar{3}, 1) \text{ 2 com carga } -2/3 \text{ e 2 com carga } 1/3$$

$$3(1, 2) \text{ com cargas } 0 \text{ e } -1$$

$$3(1, 1) \text{ com carga } +1$$

Para ter exatamente este conteúdo precisaríamos ter uma representação complexa de dimensão 42 quebrando para  $2(3, 2) + (3, 1) + 5(\bar{3}, 1) + 3(2, 1) + 6(1, 1)$ . Esta é uma restrição muito forte e conseqüentemente os modelos de unificação geralmente tem que propor fermions adicionais.

Para se escolher um grupo de simetria não basta fixar o conteúdo das representações, e em geral foram apresentados vários modelos, cada um baseado em preceitos adicionais e que levavam a cada particular escolha. O  $SU(5)$ , por exemplo foi escolhido inicialmente por ser o mais simples possível enquanto que o  $SO(10)$  possui uma representação capaz de conter uma família completa de fermions. Outros modelos foram criados com base no número máximo de fermions ou evitando-se que fossem previstos fermions exóticos [5],[9],[11],[13],[15],[20],[23],[27].

Esta ausência de critérios naturais para fixar a simetria total das partículas foi um dos motivos que acabaram por apagar o interesse em modelos de grã-unificação conforme propostos por Georgi e Glashow. Por outro lado um dos pontos de interesse em supercordas é justamente o fato do grupo de simetria total da teoria estar restrito a dois candidatos apenas :  $E_8$  e  $SO(32)$  [6],[35].

No nosso caso, apresentaremos a estrutura de um modelo baseado no grupo  $SO(13)$  e outro no  $E_7$ , os quais não possuem representações complexas e que portanto não são bons candidatos a construções realísticas e o critério para a escolhas destes grupos é apenas a

## EXEMPLO DE UNIFICAÇÃO

existência de alguns detalhes interessantes que serão apresentados abaixo.

Tomando inicialmente o  $SO(13)$  e olhando seu diagrama em busca de todas as subálgebras, vemos que ele pode ser quebrado maximalmente para  $SU(4) \times SO(7)$ , sendo esta uma subálgebra especial (fig. 12.1).

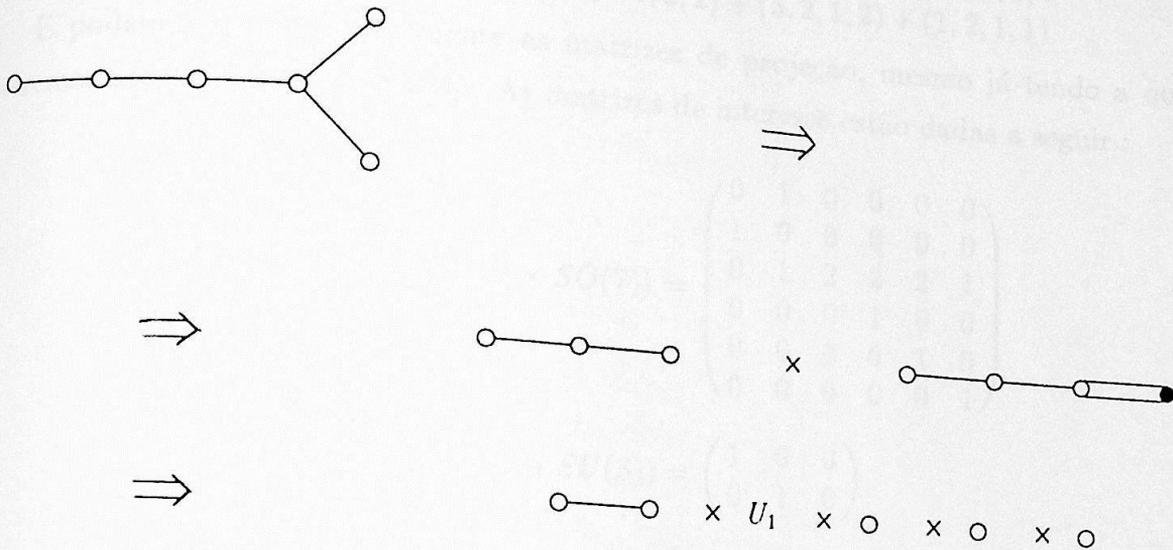


fig 12.1

Esta quebra é particularmente interessante pois que  $SU(4)$  contém maximalmente  $SU(3) \times U(1)$  enquanto  $SO(7)$  contém  $SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$ , também maximalmente. Em outras palavras, com duas quebras de simetria teríamos como grupo final  $SU(3) \times U(1) \times SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$ , o qual é bastante semelhante ao modelo padrão, em particular a quebra total do  $SO(7)$  nos forneceria a simetria observada na nossa escala de energia (cromodinâmica + eletromagnetismo).  $SO(7)$  seria portanto um grupo de sabor.

O que faz o  $SO(13)$  duplamente curioso é a existência de uma representação irredutível de dimensão 64, portanto do tamanho exato para se colocar 4 famílias de fermions completas. Por outro lado, o que o invalida como um bom candidato é que duas destas famílias são 'espelhadas', isto é, possuem chiralidade trocada com relação às duas primeiras. Na prática, temos 3 famílias observadas, todas de mão esquerda.

De qualquer forma vamos analisar esta representação com detalhe e observar o conteúdo de partículas admitindo a quebra descrita acima.

Efetuada a quebra da representação 64, obtemos:

## EXEMPLO DE UNIFICAÇÃO

$$SO(13) \rightarrow I$$

$$\rightarrow II \quad SU(3) \times U(1) \times SU(4) \times SO(7)$$

$$64 \rightarrow I$$

$$\rightarrow II \quad (3, 1, 2, 2) + (1, 1, 2, 2) + (4, 8) + (\bar{4}, 8) + (3, 2, 1, 2) + (1, 2, 1, 2) + (\bar{3}, 1, 2, 2) + (1, 1, 2, 2) + (\bar{3}, 2, 1, 2) + (1, 2, 1, 1)$$

E podemos escrever facilmente as matrizes de projeção, mesmo já tendo a quebra queremos identificar seu conteúdo. As matrizes de interesse estão dadas a seguir :

$$P(SO(13) \rightarrow SU(4) \times SO(7)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(SU(4) \rightarrow SU(3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(SO(7) \rightarrow SU(2) \times SU(2) \times SU(2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Identificando alguns fermions em representações adequadas, podemos construir o eixo de carga, que toma a forma abaixo:

$$Q = \frac{1}{3} [1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 0]$$

Com estas informações podemos identificar os outros fermions que compõe a representação 64 do  $SO(13)$  e associar os grupos da fase quebrada da seguinte forma:

$$SU(3)_{cor} \times U(1) \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_{hor}$$

onde os índices indicam, respectivamente:

cor - grupo da cromodinâmica.

L - grupo de sabor, chiralidade esquerda.

R - grupo de sabor, chiralidade direita.

hor - grupo de simetria entre as famílias.

Vamos estudar o efeito da ação dos grupos  $SU(2)_L$ ,  $SU(2)_R$  e horizontal nos diferentes fermions da teoria.

## EXEMPLO DE UNIFICAÇÃO

Considerando as famílias dos quarks *up* e *charm* como sendo de mão esquerda temos que colocar a família do *top* como sendo de mão direita juntamente com uma quarta (*top'*).

É interessante notar que o  $SU(2)_R$  atua nos fermions de mão direita da mesma forma que o  $SU(2)_L$  atua nos fermions normais (de mão esquerda). Assim temos as seguintes correspondências de interações e grupos :

<i>up</i>	↔	<i>down</i>	$SU(2)_L$
$e^-$	↔	$\nu_e$	$SU(2)_L$
<i>charm</i>	↔	<i>strange</i>	$SU(2)_L$
$\mu^-$	↔	$\nu_\mu$	$SU(2)_L$
<i>top</i>	↔	<i>bottom</i>	$SU(2)_R$
$\tau^-$	↔	$\nu_\tau$	$SU(2)_R$
<i>top'</i>	↔	<i>down'</i>	$SU(2)_R$
$\tau'^-$	↔	$\nu'_\tau$	$SU(2)_R$
<i>up</i>	↔	<i>charm</i>	$SU(2)_{hor}$
<i>down</i>	↔	<i>strange</i>	$SU(2)_{hor}$
$e^-$	↔	$\mu$	$SU(2)_{hor}$
$\nu_e$	↔	$\nu_\mu$	$SU(2)_{hor}$
<i>top</i>	↔	<i>top'</i>	$SU(2)_{hor}$
<i>bottom</i>	↔	<i>bottom'</i>	$SU(2)_{hor}$
$\tau$	↔	$\tau'$	$SU(2)_{hor}$
$\nu_\tau$	↔	$\nu'_\tau$	$SU(2)_{hor}$

Que torna clara a simetria horizontal. Se considerarmos os férmions espelhados como normais, veremos que não existem partículas exóticas, em outras palavras, se existir um mecanismo externo que torne o comportamento de pelo menos uma das duas últimas famílias como de 'mão-esquerda' este seria um candidato bastante interessante para unificação.

As dificuldades em se encontrar o quark 'top' sugeriram a tentativa de construção de um modelo que não apresentasse esta partícula (modelo *topless*).

O primeiro passo foi procurar um grupo que tivesse o modelo padrão como subgrupo, verificando os padrões de quebra. Para restringir a busca inicial, procurou-se grupos com a menor representação que pudesse ser viável.

O grupo escolhido foi o  $E_7$  que possui uma representação 56, além de de possuir  $SO_{10}$  como subgrupo. Infelizmente, este grupo apresenta o mesmo problema do  $SO(13)$ , i. é, só possui representações reais.

O que torna este grupo interessante é a quebra da representação 56 em termos de  $SO(10)$ , dada na sequência abaixo:

## EXEMPLO DE UNIFICAÇÃO

$$\begin{array}{lcl}
 E_7 & \rightarrow & SO(12) \times U(1) \rightarrow SO(10) \times SU(2) \times U(1) \\
 56 & \rightarrow & 32 + 12 + 12 \rightarrow 16 + \bar{16} + 2(10 + 1 + 1)
 \end{array}$$

A segunda família está em  $\bar{16}$ , que é o espelho da primeira e aparece um grupo  $SU(2) \times U(1)$  de simetria horizontal. Porém o mais interessante é o conteúdo, em termos do modelo padrão, da representação 10 do  $SO(10)$ . Seus pesos, juntamente com o isospin e a carga associada, estão dados na tabela abaixo:

PESO					I	Q
( 1	0	0	0	0)	0	-1/3
(-1	1	0	0	0)	1/2	1
( 0	-1	1	0	0)	0	1/3
( 0	0	-1	1	1)	0	-1/3
( 0	0	0	-1	1)	-1/2	0
( 0	0	0	1	-1)	1/2	0
( 0	0	1	-1	-1)	0	1/3
( 0	-1	1	0	0)	0	-1/3
( 1	-1	0	0	0)	-1/2	-1
(-1	0	0	0	0)	0	1/3

Estes dados mostram a existência de dois quarks, singletos de  $SU(2)$  ( $I = 0$ ), com cargas  $1/3$  e  $-1/3$ , exatamente da forma do quark bottom, acompanhados de um dublete de leptons ( $\tau$  e  $\nu_\tau$ ). É notável a ausência do top e de fermions exóticos.

Desta forma o modelo apresenta duas famílias completas (apesar de espelhadas) e duas famílias sem o quark top correspondente (também espelhadas) além disto não existem fermions exóticos.

Como no  $SO(13)$ , se existisse um mecanismo para tratar as famílias espelhadas como 'normais', este seria um modelo bastante interessante para uma tentativa de unificação, por ser econômico e, particularmente neste caso, 'top-less'.

## 13. CONCLUSÃO

Os diagramas de Dynkin conseguem representar de um modo bastante completo as álgebras de Lie, codificando suas principais características. Isto se deve às propriedades geométricas associadas às constantes de estrutura desses grupos e ao grupo de Weyl. Desta forma tornam-se uma excelente ferramenta para cálculos de representações, subálgebras e das próprias constantes de estrutura dos grupos semi-simples.

Por outro lado as teorias de calibre tem como base simetrias internas, em geral dadas por um grupo de Lie semi-simples, o que torna a técnica dos diagramas de Dynkin uma ferramenta natural para trabalhar nesta área, sendo mais geral e, ao meu ver, mais prática que os tradicionais 'Tableaux de Young', utilizados para  $SU(n)$  e mais recentemente para  $SO(n)$ .

O trabalho direto com os pesos das representações permite uma construção clara dos modelos de calibre, com a identificação praticamente imediata das partículas envolvidas e das interações entre elas, conseguindo-se montar com relativa facilidade a estrutura de qualquer teoria de calibre, em particular aquelas de grã-unificação.

Propriedades gerais dos modelos de unificação podem conseqüentemente ser obtidos diretamente do diagrama do grupo de simetria, permitindo uma análise a priori ampla e segura.

Generalizando, podemos dizer que sempre que uma teoria for baseada em simetria de um modo fundamental, uma codificação eficiente das propriedades do grupo de simetria permite um acesso direto às propriedades fundamentais do modelo. Em particular a codificação descrita e utilizada aqui é elegante, prática e bastante eficiente, dada a naturalidade da construção obtida por Dynkin.

Os modelos de unificação apresentados foram tratados apenas a nível de estrutura, sendo analisados apenas o conteúdo de partículas e a seqüência de quebras de simetria para se obter o modelo padrão. O teste final sempre é dado com previsões mais completas e subseqüente confirmação experimental. O objetivo deste estudo, no entanto, é o de se obter candidatos a partir das técnicas descritas na primeira parte do trabalho, em particular para modelos 'top-less', colocando-se um mínimo de restrições possível.

Ambos os modelos apresentados são bastante curiosos e se existisse um mecanismo que mascarasse o efeito de 'espelhamento' dos fermions, estes seriam interessantes dado que são econômicos e não apresentam fermions exóticos, além de não possuírem anomalias, uma vez que são usadas representações reais, embora seja exatamente este fato que provoque o

CONCLUSÃO

espelhamento. De qualquer forma acredito que eles formem um bom exemplo didático.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] ABERS, E.S. & LEE, B.W. *Gauge theories*. Physics Reports C, 9: 1-59, 1973.
- [2] ACHIMAN, Y. *Topless bottom decays and  $E_6$*  Physics Letters, 97B (314): 376-82, dec. 1980.
- [3] BARS, I. Kac-Dynkin diagrams and supertableaux. Geneva, CERN, 1982. (Preprint TH.333-CERN)
- [4] BIEDENHARN, L.C. *The Algebras of Lie groups and their representations in Group Theory and its Applications*. New York, Academic Press, 1968.
- [5] BORDI, F et al. *Symmetry breaking mass scales and fermions mass relations in  $SU(8)$  grand unification*. Physical Review D, 26 (11): 3195-211, dec. 1982.
- [6] CANDELAS, P. et al. *Vacuum configurations for superstrings*. Nuclear Physics B, 258: 46-74, 1985.
- [7] DYNKIN, E.B. American Mathematical Society Translations, 3 (6), 111, 1957.
- [8] ELLIS, J. Phenomenology of unified gauge theories. Geneva, CERN, 1981. (Preprint LAPP-TH-48)
- [9] FRAMPTON, P.H. *No-go theorem for  $SU(N)$  unification of extra strong interactions*. Physical Review Letters, 43(26): 1912-4, dec. 1979.
- [10] FRAMPTON, P.H. *Unification of flavor*. Physics Letters, 89B, (314): 352-4, jan. 1980.
- [11] FUJIMOTO, Y.  *$SO(18)$  unification*. Physical Review D, 26 (11): 3183-94, dec. 1980.
- [12] GELL-MANN, M. et al. *Color embeddings, charge assignments and proton stability in unified gauge theories*. Reviews of Modern Physics, 50 (4): 721-44, oct. 1978.
- [13] GEORGI, H. Grand Unification. Cambridge, Harvard University, 1982. (Preprint HUTP-821A049)
- [14] GEORGI, H. & GLASHOW, S.L. *Making do without the t quark*. Nuclear Physics B, 167: 173-80, 1980.
- [15] GEORGI, H. *Towards a grand unified theory of flavor*. Nuclear Physics B, 156: 126-34, 1979.
- [16] GEORGI, H. & GLASHOW, S.L. *Unity of all elementary particle forces*. Physical Review Letters, 32 (8): 438-41, feb. 1974.

- [17] HARVEY, J.A. Patterns of symmetry breaking in the exceptional groups. Pasadena, California Institute of Technology, 1979. (Preprint CALT-68-737)
- [18] KARADAYI, H.R. Anatomy of grand unifying groups. Trieste, International Centre for Theoretical Physics, 1981. (Preprint IC/81/213)
- [19] KARADAYI, H.R. Anatomy of grand unifying groups II. Trieste, International Centre for Theoretical Physics, 1981. (Preprint IC/81/213)
- [20] KARADAYI, H.R. SO(14) unification of 3 + 1 families. Trieste, International Centre for Theoretical Physics, 1982. (Preprint IC/82/15)
- [21] KIM, J.S. SO<sub>N</sub> Higgs problems with adjoint + vector representation. Pasadena, California Institute of Technology, s.d. (Preprint CALT-68-877)
- [22] KIM, J.S. Orbit spaces of low dimensional representation of simple compact connected Lie groups and extrema of a group invariant escalar potential. Pasadena, California Institute of Technology, s.d. (Preprint CALT-68-1017)
- [23] KUGO, T. et al. Unification of families based on coset space  $E_7/SU(5) \times SU(3) \times U(1)$ . Munich, Institut für Physik und Astrophysik, 1983, (Preprint MPI-PEA/PTh 67/83)
- [24] LANGACKER, P. *Grand unified theories and proton decay*. Physics Reports, **72** (4): 185-385, 1981.
- [25] LING, Fong Li. *Group theory of the spontaneously broken gauge symmetry*. Physical Review D, **9** (6): 1723-39, mar. 1974.
- [26] MICHEL, L. *Symmetry defects and broken symmetry: configurations hidden symmetries*. Review of Modern Physics, **52**(3): 617-51, jul. 1980.
- [27] MOHAPATRA, R.N. et al. *Maximal grand unification, gauge hierarchies, and baryon nonconservation*. Physical Review D, **25** (11): 3112-26, jun. 1982.
- [28] PAKVASA, S. The fourth generation. Honolulu, University of Hawaii at Manoa, 1985. (Preprint UH-511-564-85)
- [29] RAJPOOT, S. et al. *SU(3) × U(1) low energy symmetry within the unifying SU(4)<sub>F</sub> × SU(4)<sub>c</sub> gauge group*. Journal of Physics G, **5**(7): 871-83, 1983.
- [30] RAYCHAUDURI, A. et al. *Low energy restoration of parity and maximal symmetry*. Physical Review D, **26**(11): 3212-20, dec. 1982.
- [31] SALAM, A. *Gauge unification of fundamental forces*. Reviews of Modern Physics, **52** (3): 525-43, jul. 1980.
- [32] SLANSKY, R. *Group theory for unified model building*. Physics Reports C, **79** (1):

1-128, 1981.

- [33] SLANSKY, R. Symmetries of theories in higher dimensions. s.L.p., Les Houches Summer School, 1985.
- [34] VARADARAJAN, V.S. Lie groups, Lie algebras and their representations New Jersey, Englewood Cliffs, 1974.
- [35] WITTEN, E. *Symmetry breaking patterns in superstrings models*. Nuclear Physics B, 258: 75-100, 1985.
- [36] WYBOURNE, B.G. Classical groups for physicists. New York, Wiley, 1974.