

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

**Universo Primordial Inflacionário
com Base em Teoria de Cordas**

Antônio Cândido Valença Veloso de Siqueira



Tese de Doutorado apresentada ao
Instituto de Física da Universidade
de São Paulo

Orientador: Prof. Dr. Élcio Abdalla

São Paulo
1993

SBI-IFUSP



305M810T2026

530.14
S618u
D
e.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Siqueira, Antonio Candido Valença Veloso de
Universo primordial inflacionário com base em teoria de cordas. São Paulo, 1993.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.
Área de Concentração: Partículas Elementares
Orientador: Profº Dr. Elcio Abdalla

Unitermos: 1. Teoria de campos; 2. Cordas; 3. Cosmologia.

USP/IF/SBI - 66/93

Dedico este trabalho

*À Graça, Ana, Alberto,
Ivone e Honório*

Agradecimentos

Ao Élcio Abdalla, pela orientação e amizade. Agradeço-lhe também a leitura crítica deste trabalho.

Ao Marcelo Schiffer pela ajuda em alguns tópicos da tese.

Ao Victor O. Rivelles pela amizade e influência na minha formação.

Ao Josif Frenkel pela amizade, solidariedade e pelos ensinamentos em Teoria Quântica de Campos.

À Maria Cristina B. Abdalla pelo estímulo e amizade.

Ao Humberto França e ao Antonio Lima Santos pelo estímulo e amizade.

Ao Henrique Fleming pelos ensinamentos em Relatividade Geral.

Ao Eugenio Carlos Ferrari pela grande ajuda e amizade.

Ao Marcelo Gomes pela influência na minha formação em Teoria Quântica de Campos.

Ao Nelson Alves e ao Jorge de Lyra pela ajuda na elaboração do programa para os cálculos numéricos deste trabalho e também pela amizade.

Aos colegas Vandenberg, Fernando Miguel, José Fernandes Lima, Marcelo Leite, Brunelli, Farnésio Rênio, Oswaldo Branco, Hatsumi, Cabral, Buffon, Trevisan, Francisco, Moacir, Socorro, Justo e muitos outros pela amizade e solidariedade nas horas difíceis.

Aos colegas Alex Mendes, José Antonio e Marcia pela digitação deste trabalho e pela amizade.

Aos colegas da UNICAP, em especial ao Pe. José N. Machado, Luiz Gonzaga S. Cabral pela amizade e empenho para que esse trabalho fosse realizado.

Ao Carlos Alberto Martins, Antonio Carlos Miranda, Arnaldo Sergio, Fernando Bertino, Sérgio, Augusto Otávio, Luiz Augusto e Reginaldo Lourenço pela amizade e pela confiança em mim depositada.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Homenagens

Existem pessoas que lutaram ou lutam por uma vida melhor para todos. Essas pessoas me fazem sentir uma esperança em um futuro melhor para a humanidade. Entre elas, tive a honra de conhecer Ivo Carneiro Valença, Anibal M. Albuquerque, Maria A. Albuquerque e Eugênio C. Ferrari.

Resumo

Nesta tese apresentamos rapidamente o Modelo Cosmológico Padrão, suas dificuldades e algumas tentativas de contorná-las com alguns Modelos Inflacionários conhecidos. Calculamos ainda soluções analíticas das funções β do gráviton, na aproximação de dois loops, soluções estas com temperatura de Hagedorn que admitem uma interpretação muito conveniente da parte compactificada do espaço-tempo. A nível de especulação essas soluções nos permitem identificar a tensão na corda com a constante cosmológica na fase de Planck.

Finalmente, partindo de uma ação efetiva para cordas, incluindo apenas o gráviton e o dÍlaton, obtemos um sistema de equações que, sob o Ansatz do tipo Robertson-Walker, descrevem, numericamente, um Universo Inflacionário na região de Planck que não depende de modo detalhado de uma auto-interação para o dÍlaton.

Abstract

In this thesis, we quickly present the Standard Cosmological Model, its difficulties and some attempts to overcome them with known Inflationary Models. We calculate in addition the analytical solutions of the graviton β -function, at the 2-loop level, in terms of Hagedorn's temperature, which admit a very convenient interpretation of compactified part of space-time. We speculate that these solutions allow us to identify the string tension with the cosmological constant in the Planck phase.

Finally, starting from an effective action for the strings, and including only the graviton and the dilaton, we find a system of equations which, under an Ansatz of Robertson-Walker type, describe numerically an Inflationary Universe in the Planck region, which is independent of the details of dilaton self-interaction.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Relação entre Cordas e as Funções Beta do Modelo Sigma Não Linear Bosônico	4
1.1.1	Modelo Sigma Não Linear com o termo de Wess-Zumino	5
1.2	Cordas Bosônicas	6
1.3	O Modelo Padrão do Universo	8
1.4	Dificuldades do Modelo Padrão	11
1.5	O Universo Inflacionário	15
1.5.1	Modelos Inflacionários de Universo	16
1.6	O Modelo Inflacionário de Guth	17
1.6.1	Universo Superfrio	18
1.7	Modelo Inflacionário de Universo com Potencial de Coleman-Weinberg	19
2	Algumas Soluções das Equações de Movimento do DÍlaton e do Gráviton e Suas Interpretações Físicas	21
2.1	Algumas Soluções das Equações (1.2.6) e (1.2.7).	21
2.2	Interpretação de algumas soluções.	37
2.3	Temperatura de Hagedorn	46
3	Inflação com Base em Teoria de Cordas	49
3.1	Introdução	49
3.2	Equações de Movimento e Universo Inflacionário	50
4	Conclusões	71
	Apêndice A	76

Apêndice B	81
Apêndice C	87
Apêndice D	93
Apêndice E	104
Bibliografia	110

Lista de Figuras

1.1	O potencial efetivo para o modelo de Guth	17
1.2	O potencial de Coleman-Weinberg para o novo cenário inflacionário	19
1.3	Evolução do campo escalar no novo cenário inflacionário com potencial de Coleman-Weinberg	20
3.1	a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 0, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 1, \dot{R} = 0,001, \ddot{R} = 0,001$	
	b) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 0, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 8, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$	59
3.2	a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 0, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 1, \dot{R} = 0,001, \ddot{R} = 0,001$	
	b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 0, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 8, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$	59
3.3	a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 15, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$	
	b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 15, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$	60
3.4	a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 50, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$	
	b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 50, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$	60
3.5	a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 200, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$	
	b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 200, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$	61

- 3.6 a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 1, \dot{\phi} = 0, 1, R = 1, \dot{R} = 0, 01, \ddot{R} = 0, 01$
- b) Curva de $R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 1, \dot{\phi} = 0, 1, R = 1, \dot{R} = 0, 01, \ddot{R} = 0, 01$ 61
- 3.7 a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 2, \dot{\phi} = 0, 1, R = 1, \dot{R} = 0, 01, \ddot{R} = 0, 01$
- b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 2, \dot{\phi} = 0, 1, R = 1, \dot{R} = 0, 01, \ddot{R} = 0, 01$ 62
- 3.8 a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 2, \dot{\phi} = 0, 1, R = 1, \dot{R} = 0, 01, \ddot{R} = 0, 01$
- b) Curva de $\dot{R} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 2, \dot{\phi} = 0, 1, R = 1, \dot{R} = 0, 01, \ddot{R} = 0, 01$ 62
- 3.9 a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 5, \dot{\phi} = 0, 1, R = 5, \dot{R} = 0, 01, \ddot{R} = 0, 01$
- b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 5, \dot{\phi} = 0, 1, R = 5, \dot{R} = 0, 01, \ddot{R} = 0, 01$ 63
- 3.10 a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 10, \dot{\phi} = 0, 1, R = 10, \dot{R} = 0, 01, \ddot{R} = 0, 01$
- b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 10, \dot{\phi} = 0, 1, R = 10, \dot{R} = 0, 01, \ddot{R} = 0, 01$ 63
- 3.11 a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 10, \dot{\phi} = 0, R = 100, \dot{R} = 0, 1, \ddot{R} = 0, 1$
- b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 10, \dot{\phi} = 0, R = 100, \dot{R} = 0, 1, \ddot{R} = 0, 1$ 64
- 3.12 a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 50, \dot{\phi} = 1, R = 10, \dot{R} = 0, 1, \ddot{R} = 0, 1$
- b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 50, \dot{\phi} = 1, R = 10, \dot{R} = 0, 1, \ddot{R} = 0, 1$ 64
- 3.13 a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = -10, \dot{\phi} = 0, R = 1, \dot{R} = 0, 1, \ddot{R} = 0, 1$
- b) Curva de $R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = -10, \dot{\phi} = 0, R = 1, \dot{R} = 0, 1, \ddot{R} = 0, 1$ 65

- 3.14 a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 100, \dot{\phi} = 1, R = 15, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$
 b) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 100, \dot{\phi} = 1, R = 15, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$ 65
- 3.15 a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 100, \dot{\phi} = 1, R = 15, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$
 b) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 100, \dot{\phi} = 1, R = 15, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$ 66
- 3.16 a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 100, \dot{\phi} = 1, R = 20, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$
 b) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 100, \dot{\phi} = 1, R = 20, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$ 66
- 3.17 a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 1, g = 1, \phi = 0,1, \dot{\phi} = 0,5, R = 1, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,01$
 b) Curva de $R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 1, g = 1, \phi = 0,1, \dot{\phi} = 0,5, R = 1, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,01$ 67
- 3.18 a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 0, M^2 = 1, g = -1, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 8, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$
 b) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 0, M^2 = 1, g = -1, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 8, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$ 67
- 3.19 a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 5, g = 5, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 15, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$
 b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 5, g = 5, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 15, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$ 68
- 3.20 a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 10, g = 10, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 20, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$
 b) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 10, g = 10, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 20, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$ 68

- 3.21 a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = -10, g = -10, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 50, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$
- b) Curva de $\dot{R} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = -10, g = -10, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 50, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$
- c) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = -10, g = -10, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 50, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$ 69
- 3.22 a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 100, g = 100, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 1, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$
- b) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 100, g = 100, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 1, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$ 70
- 3.23 a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 1, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 15, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$
- b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 1, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 15, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$ 70

Capítulo 1

Introdução

A unificação das forças conhecidas da Natureza é um antigo projeto humano. Esse projeto tem por base uma melhor compreensão das leis que governam os fenômenos naturais através da inter-relação das forças naturais, assumindo-se o menor número possível de princípios e parâmetros. A convicção de que compreender melhor só é possível unificando pode não ser comum a todos, porém a maior parte das pessoas trabalham e pensam nessa direção. Isto ocorre praticamente em todas as áreas do conhecimento, e talvez, conscientemente ou não, acredita-se que sempre existiu uma inter-relação entre tudo que compõe o nosso Universo. Observamos essa tendência até mesmo nas sociedades tecnologicamente primitivas onde a unificação entre as coisas da natureza baseia-se no princípio anímico.

Limitar-nos-emos a alguns exemplos de unificação que ocorreram na Física, sem contudo obedecer ordem cronológica e aspectos históricos.

As leis de Newton do movimento para referenciais inerciais (Relatividade de Newton) foi uma das primeiras unificações da Física, onde, opondo-se às hipóteses de Aristóteles, Newton mostrou que para referenciais inerciais que se relacionam por uma transformação de Galileu, as leis da mecânica são as mesmas (covariância das leis da mecânica de partículas).

A lei da Gravitação Universal unifica o problema de queda livre e o movimento dos corpos celestes, proporcionando uma melhor compreensão da gravitação.

A unificação da Eletricidade e do Magnetismo por Maxwell através de uma linguagem de campos e introduzindo a corrente de deslocamento como um elo

necessário à unificação, tornou transparente um conjunto de fenômenos anteriormente obscuros, entre eles a compreensão da luz como um fenômeno eletromagnético.

A unificação da Mecânica com o Eletromagnetismo, estendendo a Relatividade de Newton à Relatividade Especial provocou mudanças conceituais importantes. O advento da Mecânica Quântica para explicar os fenômenos microscópicos e a posterior unificação da Mecânica Quântica com a Relatividade Especial, segundo Klein-Gordon e Dirac, significou um grande avanço na compreensão da Natureza, e a previsão da existência de antipartículas; com a posterior detecção destas iniciou-se um caminho rumo à unificação.

O advento da Relatividade Geral, inicialmente uma tentativa clássica de unificar a nível macroscópico a Gravitação com os demais campos, foi uma extensão importante da Relatividade Especial, incorporando o princípio geral de covariância como um dos pilares da Física.

Einstein acreditava que suas equações eram provisórias, pois o segundo membro das mesmas tem um carácter dinâmico e, para ele, à semelhança da gravitação, todas as forças da Natureza deveriam ser geometrizadas no sentido de serem diferentes manifestações do espaço-tempo. O exemplo mais simples que conhecemos desse projeto é a Teoria Unificada da Gravitação e do Eletromagnetismo de Hermann Weyl, onde a quebra de invariância do produto escalar por transporte paralelo gera um campo vetorial que é identificado com o campo de gauge do Eletromagnetismo. Existem outras tentativas de unificação dentro desse projeto que envolveram o próprio Einstein e muitos outros como Schrödinger e Infeld; atualmente, existem grupos trabalhando intensamente nesse projeto.

Com o avanço do conhecimento da Física do mundo microscópico através da detecção de partículas em aceleradores, da detecção de raios cósmicos, da necessidade de explicar as forças nucleares e as novas partículas que foram sendo descobertas numa gama enorme de experimentos, houve uma crescente necessidade de explicar a dinâmica a elas associada. Entre as tentativas, a de maior sucesso foi sem dúvida a Eletrodinâmica Quântica, que é uma Teoria de Campos.

O sucesso da Eletrodinâmica Quântica reorientou a maior parte dos físicos na busca de uma Teoria Unificada, em moldes bem diferentes daqueles defendidos por Einstein, onde os campos seriam diferentes manifestações do espaço-tempo.

Na atual busca, as partículas são manifestações dos campos a elas associados e o espaço-tempo é a arena onde isso ocorre. De forma que as equações de Einstein permanecem na forma original. Esse projeto ganhou maior credibilidade com a recente comprovação experimental da unificação da interação eletromagnética com a fraca. Logo em seguida surgiram várias tentativas de unificação da interação eletrofraca com a interação forte, conhecidas como GUT's. Todas elas sugerem experiências que envolvem energias impossíveis de serem obtidas com a tecnologia dos atuais aceleradores. Por outro lado todas as tentativas de unificar a Gravitação com as demais interações apresentam inconsistências. Com a advento da Supersimetria na década de 70 foi desenvolvido um programa de unificação das quatro interações básicas, conhecido como Supergravidade. Existe uma outra tentativa de unificação através de uma Teoria de Campos de objetos estendidos, denominados Cordas, palco de uma intensa pesquisa. Este trabalho é um pequeno fragmento daquilo que se faz em Teoria de Cordas.

Com o avanço tecnológico e científico da Física de baixas energias, tornou-se possível construir satélites e computadores dotados de recursos capazes de obter informações mais precisas sobre o que ocorre no Universo Atual e sobre o que ocorreu no Universo Primordial, onde a escala de energia é de ordem igual ou maior que aquelas requeridas pelas Teorias Unificadas.

Sendo assim, surgiu nos últimos anos uma preocupação em explicar a evolução do Universo Primordial com base na Física de Partículas Elementares; e a comprovação da radiação de fundo de 2,7 K em 1964 por Pensias e Wilson, prevista muito antes por Gamow, suscitou um maior interesse de físicos de partículas por Cosmologia. O ponto de partida são as equações de Einstein, onde o espaço-tempo é a arena em que os campos se manifestam e interagem.

A melhor candidata para descrever o nosso Universo Atual em grande escala é a métrica de Friedman-Robertson-Walker. No entanto, ao fazer-se uma regressão no tempo, obtém-se um comportamento inaceitável da matéria, onde divergências físicas deveriam ocorrer. Hawking, Penrose, Geroch e outros mostraram que se $T_{ab}W^aW^b \geq 0$ (condição fraca de energia), ou $T_{ab}W^aW^b \geq 0$ e $T_{ab}W^a$ não é do tipo espaço (condição ddominante), então qualquer modelo cosmológico, com base nas equações clássicas de Einstein, é singular. Acredita-se que a descrição métrica do espaço-tempo seja válida para regiões maiores do que o comprimento de Planck.

Para regiões menores, as flutuações da métrica impediriam tal descrição métrica da Física.

Neste capítulo abordaremos ligeiramente o Modelo Padrão de Universo Quente e Adiabático, e as dificuldades de explicar problemas como natureza quase plana do Universo conhecido, Domínio de Paredes, Monopólos Magnéticos, Horizonte de Eventos e Radiação de Fundo quase Isotrópica. Também abordaremos ligeiramente o cenário Inflacionário.

No segundo capítulo abordaremos equações que são correções das equações de Einstein em dois “loops” devido a Cordas. Apresentaremos algumas soluções, uma delas já conhecida na literatura, as demais completamente novas. Analisaremos a natureza das mesmas e a transição de fase associada à Temperatura de Hagedorn.

O terceiro capítulo será dedicado à obtenção de um sistema de equações de movimento partindo de uma ação efetiva no espaço-tempo, onde apresentaremos as soluções numéricas das mesmas, analisando o carácter inflacionário das soluções, concluindo o trabalho no quarto capítulo.

1.1. Relação entre Cordas e as Funções Beta do Modelo Sigma Não Linear Bosônico

O modelo Sigma (σ) não linear bosônico é uma teoria de campos, onde campos escalares de fundo $\phi^i(x)$ são mapeados em um espaço-tempo de Minkowski bi-dimensional para uma variedade Riemanniana \mathcal{M} .

Partindo da densidade Lagrangiana cinética

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^k \partial^\mu \phi^k \quad (1.1.1)$$

com $\mu = 0, 1$; $k = 1, \dots, N + 1$, construímos a ação

$$S = \int d^2 x \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^k(x) \partial^\mu \phi^k(x). \quad (1.1.2)$$

Impondo o vínculo

$$\sum_{Q=1}^{N+1} \phi^Q \phi^Q = 1 \quad (1.1.3)$$

temos agora um modelo sigma não linear.

De (1.1.3) podemos construir um subespaço maximamente simétrico, imerso na variedade, construído pelos campos de fundo cuja métrica é dada por

$$g_{ij}(\phi) = \delta_{ij} + \frac{\phi_i \phi_j}{1 - \phi^k \phi^k} \quad (1.1.4)$$

onde $g_{ij}(\phi)$ é a métrica na esfera unitária S^N , e $i, j = 1, \dots, N$.

Construindo a ação

$$S(\sigma) = \int dx^2 \frac{1}{2} G_{ij}(\phi) \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j \quad (1.1.5)$$

temos que para o caso particular em que G_{ij} é dada por (1.1.4) a ação (1.1.5) equivale a (1.1.2) com o vínculo (1.1.3).

A ação (1.1.5) é a ação correspondente ao modelo sigma não linear; e $G_{ij}(\phi)$ será calculada em princípio achando-se os zeros das funções beta do grupo de renormalização para o modelo sigma não linear, para que tenhamos a invariância conforme da corda. Voltaremos a este ponto mais tarde.

1.1.1. Modelo Sigma Não Linear com o termo de Wess-Zumino

$$S_{W-Z} = \int d^2 x \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} B_{ij}(\phi) \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j \quad (1.1.6)$$

sendo $\epsilon^{\mu\nu}$ o tensor de Levi-Civita no espaço-tempo de Minkowski bidimensional:

$$\epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0;$$

$$\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = +1;$$

$$B_{ij}(\phi) = -B_{ji}(\phi).$$

A ação para o modelo sigma não linear com o termo de Wess-Zumino em coordenadas do cone de luz $x^\pm = \frac{1}{2}(x^0 \pm x^1)$ será dado pela expressão

$$I = \int dx^+ dx^- [G_{ij}(\phi) - B_{ij}(\phi)] \partial_+ \phi^i \partial_- \phi^j \quad (1.1.7)$$

1.2. Cordas Bosônicas

Representaremos as coordenadas da corda no espaço-tempo por $X^\mu(\sigma, \tau)$, sendo σ e τ parâmetros que descrevem a evolução da corda e definem uma superfície bidimensional denominada “folha mundo”.

Os vetores tangentes à folha mundo são definidos por $\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$ e $\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$.

A contração desses vetores tangentes define uma métrica na folha mundo dada por $g_{ab} = \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu$, onde a e b assumem os valores zero e um, tal que identificamos $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial \tau}$ e $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial \sigma}$.

Os índices do espaço-tempo assumem os valores $\mu = 0, 1, \dots, D - 1$.

Em analogia à ação de uma partícula livre, onde $S = m \int ds$, define-se a ação da corda como sendo proporcional à área da superfície da folha mundo onde o cálculo da área infinitesimal de uma superfície é dada por

$$d(\text{Área}) \sim \sqrt{\det|g_{ab}|} d\sigma d\tau = \sqrt{\left(\frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2} d\sigma d\tau$$

com a integral da área proporcional à ação S_{N-G} , definida por

$$S_{N-G} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau L(\sigma, \tau). \quad (1.2.1)$$

A constante α' é conhecida como o inverso da tensão da corda e (1.2.1) é conhecida como a ação de Nambu-Goto, com $\alpha' = 10^{-66} \text{ cm}^2$.

A ação de Polyakov

A ação de Polyakov é definida por

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu. \quad (1.2.2)$$

A um nível clássico, (1.2.2) é equivalente a (1.2.1).

Um dos métodos empregados de quantização consiste na fixação do gauge $g_{ab} = e^\phi \delta_{ab}$, conhecido como gauge conforme. O espectro da corda bosônica contém os campos do gráviton, do dílaton e do tensor anti-simétrico. Algumas coordenadas, todavia, deverão estar num espaço compactificado, eventualmente

com auto-interação e campos de fundo, de modo que podemos supor que a ação (1.2.2) se generalize para

$$S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dx^+ dx^- [G_{\mu\nu}(X) - B_{\mu\nu}(X)] \partial_+ X^\mu \partial_- X^\nu . \quad (1.2.3)$$

Comparando (1.2.3) com (1.1.7) vemos que a propagação da corda bosônica em campos de fundo é equivalente ao modelo sigma não linear com o termo de Wess-Zumino.

Com o propósito de calcular as funções β perturbativamente, introduz-se em (1.1.5) a constante de acoplamento tal que

$$S(\sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dx^2 \frac{1}{2} G_{ij}(\phi) \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j .$$

A função β para o modelo sigma não linear sem torção até a ordem de dois loops, é dada por [1]

$$\beta_{ij}(\phi) = \alpha' R_{ij}(\phi) + \frac{1}{2} \alpha'^2 R_{iklm}(\phi) R_j{}^{klm}(\phi) + \mathcal{O}(\alpha'^3) . \quad (1.2.4)$$

A ação de Polyakov passou a ser denominada de modelo sigma não linear da corda. Usando o método de quantização de campos de fundo, Friedan [3] também obteve, para a ordem de dois loops, a função $\beta_{\mu\nu}^G$ acima para a corda bosônica.

Posteriormente Callan, Klebanov e Perry [4] calcularam as funções β^ϕ do dílton e $\beta_{\mu\nu}^G$ do gráviton, em dois loops (sem considerar o campo anti-simétrico $B_{\mu\nu}(X)$) como sendo

$$\begin{aligned} \beta^\phi &= -R^\mu{}_\mu + 2\nabla^2\phi + (\nabla\phi)^2 - \frac{\alpha'}{4} R_{abcd} R^{abcd} = \mathcal{O}(\alpha'^2) \\ \beta_{\mu\nu}^G &= R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \frac{\alpha'}{2} R_{\mu\nu bc} R_\nu{}^{bc} = \mathcal{O}(\alpha'^2) . \end{aligned}$$

No entanto, para recobrar a invariância de Weyl na folha mundo, é necessário que $\beta^\phi = 0$; $\beta_{\mu\nu}^G = 0$. Por conveniência vamos redefinir o campo do dílton $\phi \rightarrow -2\phi$, de onde teremos

$$\beta^\phi = \nabla^2\phi - (\nabla\phi)^2 + \frac{R^\mu{}_\mu}{4} + \frac{\alpha'}{16} R_{abcd} R^{abcd} = 0 \quad (1.2.6)$$

$$\beta_{\mu\nu}^G = R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \frac{\alpha'}{2} R_{\mu\nu bc} R^{\nu bc} = 0. \quad (1.2.7)$$

1.3. O Modelo Padrão do Universo [5]

As equações de Einstein, com métrica de Robertson-Walker, para um fluido perfeito, são dadas por

$$3\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p)R \quad (1.3.1)$$

$$R\ddot{R} + 2(k + \dot{R}^2) = 4\pi G(\rho - p)R^2 \quad (1.3.2)$$

onde p é a pressão, ρ é a densidade do Universo, R é o raio do Universo e $k = 0, \pm 1$. A eliminação de \ddot{R} nos fornece

$$\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (1.3.3)$$

O tensor de energia e momento $T^{\mu\nu}$ é definido por

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu)$$

e sua conservação $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ é satisfeita trivialmente para $\nu = r, \theta, \phi$.

Para $\mu = t$ teremos a equação de conservação da energia

$$\dot{p}R^3 = \frac{d}{dt}[R^3(\rho + p)] \quad (1.3.4)$$

Dada uma equação de estado $p = p(\rho)$ para cada fase do Universo, poderemos determinar ρ em função de R em cada fase. Supõe-se ainda que a expansão do Universo seja adiabática, o que implica na conservação da entropia:

$$\frac{d}{dt}(sR^3) = 0 \quad (1.3.5)$$

onde s é a densidade de entropia, $s = \frac{S}{R^3}$.

Admitindo que $p = a\rho$, $a = \text{cte}$, e substituindo em (1.3.4) obtemos

$$\rho = \text{cte}R^{-3(1+a)} \quad (1.3.5)$$

Para a matéria fria não relativística, ou uma poeira não interagente, temos que $p = 0$, o que equivale a $a = 0$, ou seja

$$\rho \sim R^{-3} \quad (1.3.6)$$

Já para um gás quântico ideal $p = \frac{1}{3}\rho$, que implica em

$$\rho \sim R^{-4} \quad (1.3.7)$$

Quando R é muito pequeno, próximo ao big bang, temos que $\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \gg \frac{k}{R^2}$. Então (1.3.3) fornece

$$R \sim t^{\frac{2}{3(1+a)}},$$

enquanto que, para a matéria fria não relativística, com $a = 0$ a solução de (1.3.3) resulta em

$$R \sim t^{2/3} \quad (1.3.6.a).$$

Para o gás quântico relativístico, com $a = 1/3$, teremos um outro comportamento para a expansão, a saber:

$$R \sim t^{1/2} \quad (1.3.6.b)$$

De (1.3.6.b) vemos que, em $t = 0$, $R = 0$ e por (1.3.7) $\rho \rightarrow \infty$.

Na fase atual o raio do Universo varia como $R \sim t^{2/3}$, a distância física, ou seja, a parte do Universo observável será calculada da equação $ds^2 = 0$; e da métrica de Robertson-Walker (veja eq.(2.1.15)), teremos então o resultado

$$cdt = \frac{R(t)dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

(onde fizemos $d\theta = d\phi = 0$). Integrando a equação acima, obtemos para o tamanho do universo observável o seguinte resultado

$$d(t) = ct = R(t) \int_0^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = R(t) \int_0^t \frac{dt'}{R(t')} = t^{2/3} \int_0^t t'^{-2/3} dt' = t^{2/3} 3t^{1/3} \Big|_0^t$$

ou seja, $d(t) = 3t$.

Definindo a constante de Hubble H por $H = \frac{\dot{R}}{R}$ e derivando (1.3.6.a) teremos

$$\dot{R} = \frac{2}{3}t^{-1/3}$$

Logo $t = \frac{2}{3H}$ e lembrando que $d(t) = 3t$, obtemos

$$d(t) = \frac{2}{H(t)} \simeq \frac{0,9}{h} \cdot 10^{28} \text{ cm}$$

onde $\frac{1}{2} \leq h \leq 1$ está ligado à incerteza na medida de H . Substituindo o valor de H na expressão $t = \frac{2}{3H}$ teremos

$$t \sim \frac{2}{3h} \cdot 10^{10} \text{ anos}$$

com $H \sim h \cdot 10^{-10} (\text{anos})^{-1}$, com base nos dados observacionais.

Para $p > -\frac{2}{3}$ ($k = 1$) temos que a expressão do tempo de expansão de um gás quântico relativístico, em um processo adiabático é dado por [5]

$$t_{exp} = \left(\frac{32}{45\pi^2} \right)^{1/6} \frac{S^{2/3}}{M_p} \simeq S^{2/3} \times 10^{-43} \text{ s},$$

onde S é entropia e M_p a massa de Planck $\simeq 10^{19} \text{ GeV}$.

10^{-10} segundos após o big bang a teoria do Universo Primordial Quente admite que o mesmo era composto por um gás quântico relativístico de fótons, elétrons, pósitrons, etc; com um excesso de bárions sobre anti-bárions dado por uma fração da ordem de 10^{-9} do número total de partículas. A densidade de energia ρ era dada por

$$\rho = 3p = \frac{\pi^2}{30} N(T) T^4, \quad (1.3.8)$$

e a entropia dada pela expressão

$$S = \frac{\pi^2}{45} N(T) T^3, \quad (1.3.9)$$

com $N(T) = N_B(T) + \frac{7}{8} N_F(T)$, sendo $N_B(T)$ e $N_F(T)$ respectivamente o número de espécies de bósons e férmions com massas $m \ll T$.

A conservação da entropia juntamente com (1.3.8) implica em $RT = \text{cte}$. Substituindo (1.3.7) em (1.3.8) obtém-se $t = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{45}{\pi N(T)}} \frac{M_p}{T^2}$, onde usou-se (1.3.6b).

No processo de expansão, partículas e anti-partículas se aniquilam e o Universo torna-se transparente, provocando uma rápida expansão do gás de fótons, mantendo-se um pequeno excesso de bárions sobre anti-bárions devido à violação das simetrias C e CP (veja referências [5, 6]).

No modelo SU(5), em $T \geq 10^{15}$ GeV, não havia essencialmente nenhuma diferença entre interações fortes, fracas e eletromagnéticas, de forma que não existia conservação do número bariônico.

Com a expansão e o conseqüente esfriamento do Universo, a primeira quebra de simetria em SU(5) ocorreu em $T \sim 10^{14} - 10^{15}$ GeV. Estabelecida a separação entre as interações forte e eletrofraca, e entre léptons e quarks, iniciou-se um processo de decaimento de mésons superpesados culminando com a assimetria entre bárions e anti-bárions.

No processo de esfriamento houve uma segunda transição de fase quando a temperatura caiu para $T \sim 10^2$ GeV, com a quebra de simetria entre as interações eletromagnética e fraca. Em $T \sim 10^2$ MeV ocorreu a terceira transição de fase, com a formação de bárions e mésons por quarks e a quebra da invariância quiral das interações fortes [5].

1.4. Dificuldades do Modelo Padrão [5]

1. Natureza quase plana do Universo conhecido

Partindo da métrica do tipo Robertson-Walker e definindo $\Omega = \frac{\rho(t)}{\rho_{cr}}$, onde ρ_{cr} é o valor crítico da densidade do Universo tal que para $\Omega > 1$ o Universo é fechado ($k = 1$) e $\Omega \leq 1$ o Universo é aberto ($k = 0, -1$); teremos para (1.3.3)

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} \left(H^2 + \frac{k}{R^2} \right)$$

com ρ_{cr} definido por $\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}$.

Pela definição de $\Omega = \rho(t)/\rho_{cr}$, obtemos o seguinte resultado

$$\Omega - 1 = \frac{\rho(t)}{\rho_{cr}} - 1 \sim \frac{1}{H^2 R^2} \sim \frac{1}{\dot{R}^2}$$

ou seja

$$|\Omega - 1| \sim \frac{1}{\dot{R}^2} \quad (1.4.1)$$

Sabe-se que na fase atual do Universo, os dados observacionais situam Ω no intervalo $0,1 \leq \Omega \leq 2$. Precisamos então estimar \dot{R} ; de (1.3.6.b) temos

$$\frac{1}{\dot{R}^2} \sim t. \quad (1.4.2)$$

Usando agora (1.4.2) em $t = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{45}{\pi N(T)}} \frac{M_p}{T^2}$ obtém-se

$$|\Omega - 1| = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{45}{\pi N(T)}} \frac{M_p}{T^2} \quad (1.4.2)$$

Para que na fase atual Ω esteja no intervalo $0,1 \leq \Omega \leq 2$, seria necessário que nos primórdios $|\Omega - 1| \leq 10^{-16} \frac{M_p}{T^2}$, tal que para $T \sim M_p$

$$|\Omega - 1| < 10^{-59} \quad (1.4.3)$$

Isto significa que, se $\rho = \rho_{cr} + 10^{-55} \rho_{cr}$, o Universo seria fechado ($k = +1$) e o tempo crítico, onde a expansão pára e começa o colapso, seria tão pequeno que o tempo total $t = 2t_{cr}$ já teria acontecido há muito tempo.

Se $\rho = \rho_{cr} - 10^{-55} \rho_{cr}$, então o Universo seria aberto e na fase atual a densidade seria tão pequena, que o Universo que vemos não poderia existir.

2. Problema do Horizonte de Eventos

O tamanho do Universo observável é da ordem de 10^{28} cm na fase atual. Isto corresponde a aproximadamente 10^{10} anos, que é o tempo que a luz gasta para percorrer essa distância. A distância física (horizonte de partículas) $d(t)$ é dada, com $ds^2 = 0$, por

$$d(t) = R(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = R(t) \int_0^t \frac{dt'}{R(t')} \quad (1.4.4)$$

Para o gás quântico primordial onde $R \sim t^{1/2}$, teremos

$$d(t) = b't^{1/2} \int_0^t \frac{dt'}{bt'^{1/2}} = 2t \simeq 10^5 \text{ anos ou } 10^{22} \text{ cm}$$

ou seja, a radiação de fundo com base no Universo Quente e Adiabático alcançaria uma distância da ordem de 10^{22} cm.

Como a luz de objetos remotos e a radiação de fundo oriundos de uma região limite, além da qual nenhum sinal nos alcançará durante a expansão, estão chegando até nós com distribuição quase isotrópica, concluímos que existem em torno de 10^6 comprimentos causalmente desconectados, segundo o Modelo Padrão, dentro da região observável do Universo.

3. O Problema de Domínio de Paredes

Para muitos físicos, a quebra espontânea de simetria nos campos de gauge tornou-se um princípio da Física. Ocorrida a quebra de simetria o bóson ϕ pode assumir os valores $\phi = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ ou $\phi = -\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$, entre os 10^6 comprimentos observados, onde m é a massa do bóson e λ a constante de acoplamento de um potencial do tipo "Quebra de simetria" com dois estados fundamentais para $\phi \neq 0$. Porém, segundo o modelo Padrão, cada uma dessas regiões (vacuo) estaria desconectada e a densidade de energia nessas paredes seria tão alta que a existência das mesmas seria observada. Mesmo num processo de percolação onde essas regiões se contactariam, haveria um processo de termalização que causaria uma inhomogeneidade muito grande numa região

de 10^{28} cm. Mas, fundamentalmente, com base no Universo Padrão, deveríamos estar no interior de uma dessas regiões de 10^{22} cm, e não captando informação de uma região de comprimento 10^6 vezes maior.

4. O Problema dos Monopólos Magnéticos Primordiais

Em quase todas as G.U.Ts, quando ocorre a primeira transição de fase em $T \sim 10^{14} - 10^{15}$ GeV, ocorre um processo muito importante, que é a criação abundante de monopólos magnéticos de t'Hooft-Polyakov. O processo de aniquilação de monopólos é muito suave.

Como a massa de um monopólo é 10^{16} vezes a massa do próton, então a densidade do Universo seria 10^{16} vezes maior, de tal forma que $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cr}} = 10^{15} \gg 1$ [22]

5. O Problema do Vácuo

Segundo [5, 7] o tensor de momento-energia das partículas elementares, $T_{\mu\nu}^{matter}$, não conserva energia durante uma transição de fase. Como sabemos, o tensor de momento-energia dos campos clássicos, desde que construído corretamente, obedece, no espaço-tempo de Minkowski, a condição de conservação $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Uma generalização natural para um espaço-tempo curvo é feita através do acoplamento mínimo da Relatividade Geral, onde trocamos $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$ e ∂_α por ∇_α (derivada covariante), tal que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Para $n > 2$, $\nabla_\mu R^{\mu\nu} \neq 0$, só o tensor de Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ tem divergência nula.

As equações de Einstein, escritas com um termo cosmológico, tem historicamente como origem a tentativa de Einstein em descrever um Universo Estático.

Na Teoria Quântica o vácuo desempenha um papel muito importante, de forma que a energia do vácuo está associada à constante cosmológica pela relação $\Lambda = 8\pi G V(\phi)$, onde $V(\phi)$ é o potencial efetivo das teorias de gauge.

Nas nossas convenções as equações de Einstein com $\Lambda > 0$ são escritas como $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = (T_{\mu\nu}^{matter} + V(\phi)g_{\mu\nu})\frac{8\pi G}{c^2}$, onde $T_{\mu\nu}^{matter}$ é o tensor de momento-energia das partículas.

Para SU(5) em $T \geq 10^{17}$ GeV, $T_{\mu\nu}^{matter}$ só possui partículas de massa de repouso nulas. Quando $T \sim 10^{14} - 10^{15}$ GeV ocorre a primeira transição de fase e o vácuo transfere para a matéria uma quantidade de energia estimada em 10^{80} gr/cm³, de tal forma que na fase atual estima-se que a energia do vácuo não deva ultrapassar o valor de 10^{-29} gr/cm³, tal que $\rho_{v\u00e1cuo} \simeq \rho_{cr}$. O vácuo funciona como um reservatório de energia [5, 7].

Em cordas [2] foi introduzida a constante cosmol\u00f3gica na folha mundo atrav\u00e9s do termo $\Lambda \int d^2\sigma \sqrt{h}$ na a\u00e7\u00e3o da corda. Este termo quebra a invari\u00e2ncia de Weyl, a menos que $\Lambda = 0$. Existem outros autores que acham que o problema ainda permanece aberto em teoria de cordas [21].

1.5. O Universo Inflacion\u00e1rio [5]

Em alguns modelos de Universo Inflacion\u00e1rio \u00e9 assumido que $0 < \rho = -p = V(\phi)$, de forma que as equa\u00e7\u00f5es de Einstein t\u00eam como solu\u00e7\u00f5es de de Sitter, a saber

$$R(t) = H^{-1} \cosh Ht \quad \text{para } k = +1,$$

$$R(t) = H^{-1} \sinh Ht \quad \text{para } k = -1$$

e

$$R(t) = H^{-1} e^{Ht} \quad \text{para } k = 0$$

sendo $H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho} = \sqrt{\frac{8\pi\rho}{3M_p^2}}$ na fase inflacion\u00e1ria.

Durante esse processo de expans\u00e3o a energia do v\u00e1cuo \u00e9 "conservada". No entanto esse processo de expans\u00e3o \u00e9 inst\u00e1vel, uma vez que a condi\u00e7\u00e3o $\rho = -p$ n\u00e3o \u00e9 mantida. No entanto, essa fase de expans\u00e3o do Universo joga cada regi\u00e3o, causalmente conectada segundo o Modelo Padr\u00e3o de Universo, para muito al\u00e9m da regi\u00e3o observ\u00e1vel, de forma que a maioria dos problemas apresentados pelas

Teorias Unificadas das partículas elementares em um Universo Padrão Quente e Adiabático passam a inexistir.

1.5.1. Modelos Inflacionários de Universo [5]

Inicialmente apresentaremos modelos Inflacionários que fazem uso das equações de Einstein juntamente com os modelos convencionais de Teoria de Partículas, como SU(5) por exemplo.

No Modelo Cosmológico Padrão, o fator de expansão é dado por $R(t) \sim t^n$, onde o valor de n depende, como vimos, da fase em que se encontra o Universo.

No entanto, para contornar as dificuldades do Modelo Padrão, é necessário que haja uma fase inflacionária do Universo, onde $R(t)$ teria o comportamento aproximadamente dado por uma fase inicial dominada pela radiação, em seguida pela inflação e posteriormente pela radiação segundo (1.5.2)

$$R(t) = \begin{cases} R_0 \left(\frac{t}{t_1}\right)^{1/2} & 0 \leq t \leq t_1 \\ R_0 e^{H(t-t_1)} & t_1 \leq t \leq t_2 \\ R_0 \left[e^{H(t_2-t_1)} + \left(\frac{t-t_2}{a}\right)^{1/2} \right] & t \geq t_2 \end{cases} \quad (1.5.2)$$

onde H é a constante de Hubble.

De (1.4.4) temos que a distância observável será

$$d_H = e^{Ht} \int_0^t e^{-Ht'} dt' \sim \frac{1}{H} e^{Ht} \quad (t \geq H^{-1})$$

Então se $t \sim 60H^{-1}$ estima-se que estará garantido que a parte do Universo observável estará dentro de uma região causalmente conectada ainda em uma fase em que $T = 10^{17}$ GeV onde não houve nenhuma quebra de simetria nos modelos de G.U.Ts.

Na fase inflacionária, (1.3.3) fornece a seguinte equação

$$H^2 + ke^{-2Ht} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (1.5.3)$$

Logo (1.5.3) será dada aproximadamente por

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (1.5.4)$$

enquanto durar a fase inflacionária, uma vez que a parte exponencial rapidamente torna-se muito pequena e pode ser desprezada frente aos demais termos.

A eq. (1.5.4) é compatível com $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cr}} \simeq 1$, pois após a inflação é praticamente indistinguível se $k = 0$ ou $k = 1$. Isto resolve também o problema de Natureza quase plana do Universo atual.

1.6. O modelo Inflacionário de Guth [5, 8]

Em 1981, A. Guth sugeriu um modelo inflacionário de Universo com várias espécies de partículas em temperaturas da ordem de 10^{17} GeV. Os campos escalares de Higgs estavam sujeitos a potenciais efetivos segundo a figura 1.1.

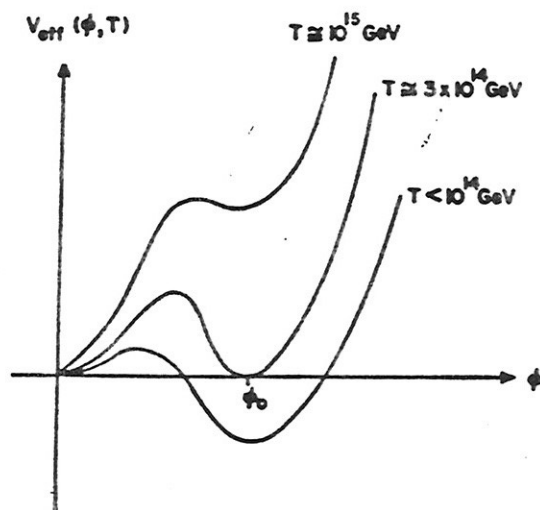


Figura 1.1 : O potencial efetivo para o modelo de Guth[5]

Em $T = 10^{17}$ GeV o mínimo do potencial efetivo ocorre em $\phi = 0$, e nenhuma transição de fase ocorre. Nesta fase (da radiação) $R \sim t^{1/2}$.

Quando a temperatura cai para aproximadamente 10^{15} GeV existem dois mínimos, um em $\phi = 0$ e outro em $\phi = \phi_0$; sendo $\phi = 0$ um mínimo que corresponde a um estado ligeiramente estável, onde a probabilidade de haver um tunelamento de $\phi = 0$ para $\phi = \phi_0$ é diferente de zero.

1.6.1. Universo Superfrio

Para $\phi = 0$ nenhuma transição de fase ocorre e as equações de Einstein fornecem

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} [\rho(\phi) + \rho_{matter}]$$

Segundo (1.3.7)

$$\rho_{matter} \sim R^{-4}$$

com $p(\phi = 0) = V(\phi = 0) = \epsilon_0$, sendo ϵ_0 a densidade de energia em $\phi = 0$.

Para $t \geq H^{-1}$ temos que $R \simeq R_0 e^{Ht}$, com $H^2 = \frac{8\pi G}{3} \epsilon_0$ estabelecendo a fase inflacionária e o conseqüente esfriamento do Universo.

O processo de tunelamento entre $\phi = 0$ e $\phi = \phi_0$ é aleatório, e quando ocorre forma bolhas devido à liberação de energia do vácuo com uma densidade ϵ_0 . As bolhas crescem rapidamente e suas paredes atingem uma velocidade próxima a da luz. Como a expansão é adiabática a relação entre temperatura da matéria e o raio do Universo é dada por

$$T(t) \simeq \frac{1}{R(t)} \sim e^{-Ht}$$

Terminada a fase inflacionária, deve haver um mecanismo de reaquecimento do Universo à temperatura da ordem de pelo menos 10^{14} GeV para que haja uma das transições de fase que leve à formação de bárions. Este mecanismo de reaquecimento ocorre com a colisão entre as paredes das bolhas. Duas bolhas que estejam separadas por uma distância física maior que $2H^{-1}$ no instante de suas criações jamais colidirão. O processo de colisão de bolhas não é suficiente para reaquecer o Universo após a fase inflacionária [5, 9].

Em resumo temos, no modelo de Guth, um Universo Quente, mas que, sob a ação dos potenciais efetivos dos escalares de Higgs, infla-se eliminando assim problemas, como monopólos magnéticos, etc., mas que para reaquecer-se e processar as transições de fase nas G.U.Ts, com $R \sim t^{1/2}$, não possui nenhum mecanismo adequado.

1.7. Modelo Inflacionário de Universo com Potencial de Coleman-Weinberg [5, 9]

Este modelo usa um potencial efetivo que provoca uma quebra de simetria dinâmica nos campos de gauge devido a correções radioativas.

Este potencial é dado por $V(\phi) = \frac{25}{16}a^2 \left[\phi^4 \ln \left(\frac{\phi^2}{\sigma^2} \right) + \frac{1}{2}(\sigma^4 - \phi^4) \right]$ com $a^2 \sim \frac{1}{45}$ e $\sigma \sim 1,2 \times 10^{15}$ GeV (veja figura 1.2). Estes dados foram extraídos da referência [5].

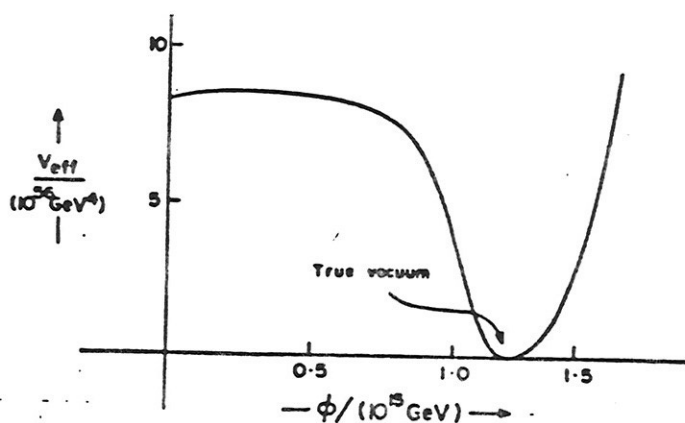


Figura 1.2 : O potencial de Coleman-Weinberg para o novo cenário inflacionário

Neste modelo o Universo é inicialmente quente, $R \sim t^{1/2}$, que caracteriza a fase dominada pela radiação com $T > 10^{15}$ GeV. Flutuações térmicas ou quânticas permitem o tunelamento do campo escalar de $\phi = 0$ para $\phi \sim \sigma$. A barreira de potencial é muito suave nas proximidades de $\phi = 0$ como mostra a figura. A equação que governa o deslocamento de $\phi = 0$ para $\phi \sim \sigma$ é dado por [5]

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{R}}{R}\dot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

cuja solução numérica é apresentada na figura 1.3.

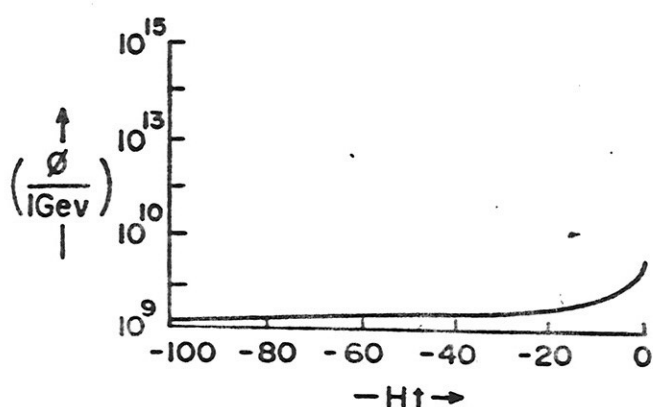


Figura 1.3 : Evolução do campo escalar no novo cenário inflacionário com potencial de Coleman-Weinberg

Este modelo contorna bem os problemas apresentados com o Modelo Padrão de Universo. No entanto ele produziria uma inhomogeneidade da ordem de 10^4 vezes maior que a observada experimentalmente. Em resumo, temos um modelo de Universo Quente, $R \sim t^{1/2}$, que devido a flutuações térmicas ou quânticas ϕ varia de zero a $\phi \sim \sigma$. No trecho onde V é suave ($V \sim V(\phi = 0)$) processa-se a inflação e o conseqüente esfriamento do Universo. Quando ϕ alcança a região $\phi \sim \sigma$, ele oscila em torno de $\phi = \sigma$, reaquentando o Universo, e o decaimento de ϕ em outras partículas freia o mecanismo de oscilação, voltando o Universo a comportar-se como no Modelo Padrão, livre dos problemas apresentados no parágrafo (1.4), porém com uma inhomogeneidade da ordem de 10^4 vezes maior que a observada experimentalmente.

Capítulo 2

Algumas Soluções das Equações de Movimento do DÍLATON e do GRÁVITON e Suas Interpretações Físicas

Introdução

Neste capítulo estudaremos soluções das equações (1.2.6) e (1.2.7) para algumas métricas bem conhecidas apresentadas logo adiante. Analisaremos a transição de fase de Hagedorn e faremos também considerações a respeito da constante cosmológica na região de Planck. Nos apêndices A,B,C e D, deste capítulo calcularemos algumas componentes dos tensores de Ricci e Riemann para as métricas que serão aqui utilizadas.

2.1. Algumas Soluções das Equações (1.2.6) e (1.2.7).

Neste parágrafo obteremos algumas soluções das equações de movimento (1.2.6) e (1.2.7). No entanto primeiro apresentaremos as métricas a serem utilizadas, bem como as componentes dos tensores de Riemann e Ricci para cada uma delas. As nossas convenções são as seguintes:

As componentes do tensor de Riemann são definidas por

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} \equiv \partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}_{\nu\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} \quad (2.1.1)$$

Para o tensor de Ricci temos a seguinte definição

$$R_{\nu\beta} \equiv R^{\mu}{}_{\nu\mu\beta} \quad (2.1.2)$$

com as conexões definidas por

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\beta} \equiv \frac{g^{\mu\rho}}{2} (\partial_{\nu} g_{\rho\beta} + \partial_{\beta} g_{\rho\nu} - \partial_{\rho} g_{\nu\beta})$$

e o elemento de linha dado por $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$, onde $ds^2 > 0$ é do tipo tempo.

Apresentaremos agora as métricas que serão utilizadas como Ansatz nas equações (1.2.6,7).

Métrica de Robertson-Walker

Robertson(1935 e 1936) e Walker(1936) provaram que o espaço-tempo isotrópico e homogêneo mais geral é o de Freedman(1922) [16] cujo elemento de linha é dado por

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{[1 + \frac{k}{4}(x^2 + y^2 + z^2)]^2}$$

com

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

onde

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2)]}{[1 + \frac{k\rho^2}{4\rho_0^2}]^2} \quad (2.1.4)$$

sendo ρ_0 uma constante que torna k adimensional com $k = 1, 0, -1$. Por uma transformação de coordenadas [16] é possível colocar (2.1.4) na forma

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.1.5)$$

com $r^2 \neq \rho^2$

A extensão natural ¹ de(2.1.4) para um espaço-tempo de $N + 1$ dimensões é feita como segue:

$$ds^2 = dt^2 - e^{g(t)+f(\rho)}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^N)^2]$$

ou em coordenadas esféricas

$$ds^2 = dt^2 - e^{g(t)+f(\rho)}\{d\rho^2 + \rho^2[d^2\phi_1 + \text{sen}^2\phi_1(d^2\phi_2 + \text{sen}^2\phi_2(\dots(d^2\phi_{N-2} + \text{sen}^2\phi_{N-2}(d^2\phi_{N-1}))))]\} \quad (2.1.4.a)$$

onde a métrica é dada por

$$g_{00} = \frac{1}{g^{00}} = 1$$

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = -e^{g(t)+f(\rho)}$$

$$g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}} = -\rho^2 e^{g(t)+f(\rho)} \text{sen}^2\phi_1 \text{sen}^2\phi_2 \dots \text{sen}^2\phi_{N-2}$$

com $2 \leq i \leq N$.

Observe que substituímos o fator: $\frac{R^2(t)}{[1 + \frac{k\rho^2}{4\rho_0^2}]^2}$ por $e^{g(t)+f(\rho)}$. Uma substituição mais geral seria dada por $R^2 e^{f(\rho)}$.

A extensão natural de (2.1.5) será dada pelo seguinte elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left\{\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2[d^2\phi_1 + \text{sen}^2\phi_1(d^2\phi_2 + \text{sen}^2\phi_2(\dots(d^2\phi_{N-2} + \text{sen}^2\phi_{N-2}(d^2\phi_{N-1}))))]\right\} \quad (2.1.5.a)$$

onde a métrica será dada por

$$g_{00} = \frac{1}{g^{00}} = 1$$

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = -\frac{R^2(t)}{1 - kr^2} \quad (2.1.5.b)$$

¹Nos apêndices faremos a maior parte dos cálculos extendendo não só (2.1.4a) mas também as demais métricas utilizadas neste capítulo.

$$g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}} = -r^2 R^2(t) \text{sen}^2 \phi_1 \text{sen}^2 \phi_2 \dots \text{sen}^2 \phi_{N-2}$$

com $2 \leq i \leq N$.

O espaço-tempo do tipo "Schwarzschild"

O espaço-tempo do tipo "Schwarzschild"², dado pelo seguinte elemento de linha

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d^2\theta + \text{sen}^2 \theta d^2\phi) \quad (2.1.6.a)$$

terá uma extensão natural dada pela seguinte expressão:

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 [d^2\phi_1 + \text{sen}^2 \phi_1 (d^2\phi_2 + \text{sen}^2 \phi_2 (\dots (d^2\phi_{N-2} + \text{sen}^2 \phi_{N-2} (d^2\phi_{N-1})))))] \quad (2.1.6.b)$$

A métrica deste elemento de linha é dada a seguir:

$$g_{00} = \frac{1}{g^{00}} = e^{\nu(r)}$$

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = -e^{\lambda(r)} \quad (2.1.6.c)$$

$$g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}} = -r^2 \text{sen}^2 \phi_1 \text{sen}^2 \phi_2 \dots \text{sen}^2 \phi_{N-2}$$

com $2 \leq i \leq N$

No entanto as equações de movimento imporão condições na métrica associada a esse elemento de linha, de forma a obtermos um espaço-tempo diferente daquele obtido por Schwarzschild para as equações de Einstein no vazio.

Os espaços-tempo associados com (2.1.4a), (2.1.5a) e (2.1.6b) são espaços-tempo com subespaços maximamente simétricos, cuja métrica em S^N e S^{N-1} é dado por

$$\bar{g}_{ij} = C_{ij} + \frac{k C_{il} z^l C_{j\sigma} z^\sigma}{1 - kz^2}$$

²Na verdade na obtenção do elemento de linha de Schwarzschild é utilizado um elemento de linha do tipo (2.1.6b).

com $z^2 = z^i C_{ij} z^j$ e $k = 1, 0, -1$, sendo $C_{ij} C^{jk} = \delta_i^k$

Numa extensão para um espaço-tempo maximamente simétrico, pseudo-riemanniano, a métrica pode assumir a forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{k\eta_{\mu\lambda} z^\lambda \eta_{\nu k} z^k}{1 - kz^2}$$

onde

$$z^2 = z^\mu \eta_{\mu\nu} z^\nu \text{ e } \eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1, \dots - 1)$$

As métricas (2.1.4a), (2.1.5a) e (2.1.6b) são casos particulares do espaço-tempo associado ao elemento de linha [5]

$$ds^2 = g(v)dv^2 - f(v)\left\{dz^2 + \frac{k(\vec{z}.d\vec{z})^2}{1 - k(\vec{z}.\vec{z})}\right\} \quad (2.1.7)$$

onde $g(v) > 0$ e $f(v) > 0$

Para obtermos (2.1.5a) partindo de (2.1.7) [10] definimos o seguinte sistema de transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned} z^1 &= r \cos \phi_1 \\ z^2 &= r \sin \phi_1 \cos \phi_2 \\ z^3 &= r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_3 \\ &\vdots \\ z^N &= r \sin \phi_1 \dots \sin \phi_{N-1} \cos \phi_N \\ z^{N+1} &= r \sin \phi_1 \dots \sin \phi_N \cos \phi_{N+1} \end{aligned} \quad (2.1.8.a)$$

Para restringirmos a parte espacial à esfera S^N , fazemos $\phi_N = 0$; o que implica em $Z^{N+1} = 0$ e $\cos \phi_N = 1$ em Z^N .

Então teremos o sistema na seguinte forma:

$$\begin{aligned} z^1 &= r \cos \phi_1 \\ z^2 &= r \sin \phi_1 \cos \phi_2 \\ &\vdots \\ z^{N-1} &= r \sin \phi_1 \dots \sin \phi_{N-2} \cos \phi_{N-1} \\ z^N &= r \sin \phi_1 \dots \sin \phi_{N-1} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Finalmente definimos as seguintes mudanças de variáveis dadas por:

$$R(t) = \sqrt{f(v)} \quad (2.1.9)$$

$$\int g^{\frac{1}{2}}(v)dv = t$$

A obtenção (2.1.4a) é mais simples ainda; basta definirmos as seguintes transformações de coordenadas

$$\begin{aligned} z^1 &= \rho \cos \phi_1 \\ z^2 &= \rho \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_2 \\ z^3 &= \rho \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_3 \\ &\vdots \\ z^{N-1} &= \rho \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \dots \operatorname{sen} \phi_{N-2} \cos \phi_{N-1} \\ z^{N+1} &= \rho \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \dots \operatorname{sen} \phi_{N-1} \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Já na obtenção de (2.1.6.b), devemos antes observar que em (2.1.6.a), $r^2(d^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta d^2\phi)$ é o elemento de arco em S^2 , medido em coordenadas esféricas em S^3 , com a restrição $dr = 0$. A construção de (2.1.6.b) se faz com o vínculo $dr = 0$ em S^N , tal que a variação infinitesimal do vetor $\vec{z} \in S^N$, se faça em S^{N-1} . Neste caso a expressão do produto escalar dada por:

$$\begin{aligned} (d\vec{z})^2 &= d\vec{z} \cdot d\vec{z} = dr^2 + r^2[d^2\phi_1 + \operatorname{sen}^2\phi_1(d^2\phi_2 \\ &+ \operatorname{sen}^2\phi_2(\dots(d^2\phi_{N-2} + \operatorname{sen}^2\phi_{N-2}(d^2\phi_{N-1}))))] \end{aligned}$$

(onde foi usado diretamente (2.1.8)) passa a ser dada pela seguinte expressão

$$(d\vec{z})^2 = r^2[d^2\phi_1 + \operatorname{sen}^2\phi_1(d^2\phi_2 + \operatorname{sen}^2\phi_2(\dots(d^2\phi_{N-2} + \operatorname{sen}^2\phi_{N-2}(d^2\phi_{N-1}))))]$$

onde $d\vec{z}$ está contido na "superfície" S^{N-1} , obtendo-se assim (2.1.6b).

Apresentaremos agora as componentes tensoriais para as métricas que serão usadas nas equações de movimento.

Para a expressão (2.1.4.a) teremos as seguintes componentes do tensor de Riemann

$$R^0_{i0i} = -\frac{1}{2}[\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}]g_{ii} \quad (i = 1 \dots N)$$

$$R^1_{i1i} = \frac{e^{-(g+f(\rho))}}{2} \left[f'' + \frac{f'}{\rho} - \frac{\dot{g}^2}{2} e^{g+f} \right] g_{ii} \quad (i = 2, \dots, N)$$

$$R^{(j)}_{i(j)i} = \frac{e^{-(g+f(\rho))}}{2} \left[\frac{f'^2}{2} + \frac{2f'}{\rho} - \frac{\dot{g}^2}{2} e^{g+f} \right] g_{ii} \quad (2 \leq j \leq N-1) \quad (j \leq i \leq N)$$

A notação (j) significa que não há soma em j. Usamos ainda a seguinte convenção $\dot{g} = \frac{dg(t)}{dt}$; $f' = \frac{df(\rho)}{d\rho}$.

Vamos agora apresentar as componentes do tensor de Ricci na métrica (2.1.4a).

Para $\mu = \nu = 0$ teremos

$$R_{00} = -\frac{g_{00}}{2} N \left[\tilde{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right].$$

Para $\mu = \nu = 1$ teremos

$$R_{11} = \frac{g_{11}}{2} \left\{ -\left[\tilde{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right] + (N-1) e^{-(g+f(\rho))} \left[f'' + \frac{f'}{\rho} - \frac{\dot{g}^2}{2} e^{g+f} \right] \right\}. \quad (2.1.12)$$

Finalmente para $\mu = \nu = i$ teremos

$$R_{ii} = \frac{g_{ii}}{2} \left\{ -\left[\tilde{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right] + e^{-(g+f(\rho))} \left[f'' + \frac{f'}{\rho} - \frac{\dot{g}^2}{2} e^{g+f} \right] \right. \\ \left. + (N-2) e^{-(g+f(\rho))} \left[\frac{f'^2}{2} + \frac{2f'}{\rho} - \frac{\dot{g}^2}{2} e^{g+f} \right] \right\}. \quad (i = 2 \dots N)$$

Temos ainda as seguintes contrações do tensor de Riemann nesta métrica:

$$R_{0abc} R_0^{abc} = -\frac{g_{00}}{2} N \left[\tilde{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right]^2$$

$$R_{1abc} R_1^{abc} = g_{11} \left\{ \frac{1}{2} \left[\tilde{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right]^2 + \frac{(N-1)}{2} e^{-2(g+f(\rho))} \left[f'' + \frac{f'}{\rho} - \frac{\dot{g}^2}{2} e^{g+f} \right]^2 \right\}$$

$$R_{iabc} R_i^{abc} = g_{ii} \left\{ \frac{1}{2} \left[\tilde{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right]^2 + \frac{1}{2} e^{-2(g+f(\rho))} \left[f'' + \frac{f'}{\rho} - \frac{\dot{g}^2}{2} e^{g+f} \right]^2 \right. \\ \left. + \frac{(N-2)}{2} e^{-2(g+f(\rho))} \left[\frac{f'^2}{2} + \frac{2f'}{\rho} - \frac{\dot{g}^2}{2} e^{g+f} \right]^2 \right\} \quad (i = 2, \dots, N) \quad (2.1.13)$$

com :

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \phi \quad (2.1.14)$$

assumindo as seguintes formas:

$$\begin{aligned}
 2\nabla_0\nabla_0\phi &= \frac{g_{00}}{2}\left(4\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right) \\
 2\nabla_1\nabla_1\phi &= \frac{g_{11}}{2}\left[2\dot{g}\frac{\partial\phi}{\partial t} + 4\left(\frac{f'}{2}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} - \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}\right)e^{-(g+f)}\right] \\
 2\nabla_i\nabla_i\phi &= \frac{g_{ii}}{2}\left[2\dot{g}\frac{\partial\phi}{\partial t} - 4\left(\frac{1}{\rho} + \frac{f'}{2}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\rho}e^{-(g+f)}\right] \quad (i = 2, \dots, N).
 \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Para as métricas consideradas neste trabalho temos que se $\mu \neq \nu$ então $R_{\mu\nu} = R_{\mu abc}R_{\nu}{}^{abc} = 0$, implicando em $\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = 0$, o que para a métrica (2.1.4a) equivale a

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\dot{g}}{2}\phi = F(t). \tag{2.1.16}$$

Equações (1.2.6) para métrica (2.1.4.a)

Para $\mu = \nu = 0$

$$-\left[\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right] + \frac{\alpha'}{2}\left[\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right]^2 + \frac{4}{N}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{2.1.17.a}$$

Usando (2.1.16) em (2.1.17.a) teremos:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\ddot{g}}{2}\phi + \frac{\dot{g}}{2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{dF(t)}{dt} = \left[\frac{\ddot{g}}{2} + \frac{\dot{g}^2}{4}\right]\phi + \frac{\dot{g}}{2}F + \frac{dF}{dt}$$

De forma que (2.1.17.a) assume a seguinte forma

$$-\left[\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right] + \frac{\alpha'}{2}\left[\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right]^2 + \frac{4}{N}\left[\left(\frac{\ddot{g}}{2} + \frac{\dot{g}^2}{4}\right)\phi + \frac{\dot{g}}{2}F + \frac{dF}{dt}\right] = 0 \tag{2.1.17.b}$$

Para $\mu = \nu = 1$ teremos a seguinte equação

$$\begin{aligned}
 &\left\{-\left[\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right] + \frac{\alpha'}{2}\left[\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right]^2 - (N-1)\frac{\dot{g}^2}{2} + \alpha'(N-1)\frac{\dot{g}^4}{8}\right. \\
 &\quad \left. + \dot{g}^2\phi + 2\dot{g}F(t)\right\} + \{(N-1)e^{-(g+f(\rho))}\left[f'' + \frac{f'}{\rho}\right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha'}{2}(N-1)e^{-2(g+f(\rho))}\left[f'' + \frac{f'}{\rho}\right]^2 + \\
& + \frac{\alpha'}{2}(N-1)e^{-(g+f(\rho))}\left[f'' + \frac{f'}{\rho}\right]\dot{g}^2 + 4\left(\frac{-\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{f'}{2}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)e^{-(g+f)}\} = 0 \quad (2.1.18)
\end{aligned}$$

Da equação (2.1.17.a) vemos que $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ é função apenas de t .

Logo,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = H(t) = \left(\frac{\ddot{g}}{2} + \frac{\dot{g}^2}{4}\right)\phi + \frac{\dot{g}}{2}F + \frac{dF}{dt} = L(t)\phi + G(t)$$

$$\phi = \frac{H(t) - G(t)}{L(t)} \rightarrow \phi = \phi(t) \quad (2.1.18')$$

Então (2.1.18) passa a ser dada por :

$$\begin{aligned}
& \left\{-\left[\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right] + \frac{\alpha'}{2}\left[\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right]^2 - (N-1)\frac{\dot{g}^2}{2} + \alpha'(N-1)\frac{\dot{g}^4}{8}\right. \\
& \left. + \dot{g}^2\phi + 2\dot{g}F(t)\right\} + \left\{(N-1)e^{-(g+f(\rho))}\left[f'' + \frac{f'}{\rho}\right]\right. \\
& \left. + \frac{\alpha'}{2}(N-1)e^{-2(g+f(\rho))}\left[f'' + \frac{f'}{\rho}\right]^2 + \frac{\alpha'}{2}(N-1)e^{-(g+f(\rho))}\left[f'' + \frac{f'}{\rho}\right]\dot{g}^2\right\} = 0 \quad (2.1.18'')
\end{aligned}$$

Para $\mu = \nu = i = 2, \dots, N$ teremos

$$\begin{aligned}
& \left\{-\left[\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right] - \frac{\dot{g}^2}{2} - \frac{(N-2)\dot{g}^2}{2} + \frac{\alpha'}{2}\left[\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right]^2 + \frac{\alpha'\dot{g}^4}{8}\right. \\
& \left. + \frac{\alpha'(N-2)\dot{g}^4}{8} + \dot{g}^2\phi + 2\dot{g}F(t)\right\} + \left\{e^{-(g+f(\rho))}\left[f'' + \frac{f'}{\rho}\right]\right. \\
& \left. + (N-2)e^{-(g+f(\rho))}\left[\frac{(f')^2}{2} + \frac{2f'}{\rho}\right] + \frac{\alpha'}{2}\left[\left(f'' + \frac{f'}{\rho}\right)^2 e^{-2(g+f(\rho))}\right.\right. \\
& \left. + \dot{g}^2\left(f'' + \frac{f'}{\rho}\right)e^{-(g+f(\rho))}\right] + \frac{\alpha'}{2}(N-2)\left[\left(\frac{(f')^2}{2} + \frac{2f'}{\rho}\right)^2 e^{-2(g+f(\rho))}\right. \\
& \left. - \dot{g}^2\left(\frac{(f')^2}{2} + \frac{2f'}{\rho}\right)e^{-(g+f(\rho))}\right] - 4e^{-(g+f)}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{f'}{2}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\} = 0 \quad (2.1.19)
\end{aligned}$$

com $\frac{\partial\phi}{\partial\rho} = 0$.

Cálculo com a métrica (2.1.5.a) de Robertson-Walker

De forma análoga ao que fizemos para (2.1.4.a) teremos para (2.1.5.a) as seguintes componentes do tensor de Riemann

$$\begin{aligned} R^0{}_{i0i} &= -\frac{\ddot{R}}{R}g_{ii} \quad (i = 1, \dots, N) \\ R^{(j)}{}_{i(j)i} &= -\frac{g_{ii}}{R^2}[k + \dot{R}^2] \quad (j = 1, \dots, N-1) \quad i > j \end{aligned}$$

Com as seguintes componentes do tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{N\ddot{R}}{R} = -g_{00}N\frac{\ddot{R}}{R} & (2.1.21) \\ R_{ii} &= -g_{ii}\left[\frac{\ddot{R}}{R} + (N-1)\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right)\right] \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

e as seguintes contrações do tensor de Riemann

$$\begin{aligned} R_{0abc}R_0{}^{abc} &= 2g_{00}N\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)^2 \\ R_{iabc}R_i{}^{abc} &= 2g_{ii}\left[\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)^2 + (N-1)\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right)^2\right] \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

Um cálculo simples fornece os seguintes resultados

$$\begin{aligned} 2\nabla_0\nabla_0\phi &= 2g_{00}\ddot{\phi} \\ 2\nabla_i\nabla_i\phi &= 2g_{ii}\frac{\dot{R}}{R}\dot{\phi} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

então as equações de movimento (1.2.6) passam a ser

Para $(\mu = \nu = 0)$

$$\frac{\ddot{R}}{R}\left[-1 + \alpha'\frac{\dot{R}}{R}\right] + \frac{2\ddot{\phi}}{N} = 0 \quad (2.1.23.a)$$

e para $(\mu = \nu = 1)$

$$\begin{aligned}
& -\left[\frac{\ddot{R}}{R} + (N-1)\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right] + \alpha' \left[\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)^2\right. \\
& \left. + (N-1)\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right)^2\right] + 2\dot{R}\dot{\phi} = 0
\end{aligned} \tag{2.1.23.b}$$

No caso do elemento de linha (2.1.6b) temos as seguintes componentes do tensor de Riemann

$$\begin{aligned}
R^0_{101} &= \frac{g_{11}}{2} e^{-\lambda} \left[\nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{2} \right] \\
R^0_{i0i} &= \frac{g_{ii}}{2} \frac{\nu' e^{-\lambda}}{r} \\
& \hspace{15em} (i = 2, \dots, N) \\
R^1_{i1i} &= \frac{g_{ii}}{2r} \frac{de^{-\lambda}}{dr} \\
R^{(j)}_{i(j)i} &= \frac{g_{ii}}{r^2} (e^{-\lambda} - 1) \quad (2 \leq j \leq N-1; i > j)
\end{aligned}$$

com os seguintes componentes do tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{g_{00}}{2} e^{-\lambda} \left[\nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{2} + (N-1) \frac{\nu'}{r} \right] \\
R_{11} &= \frac{g_{11}}{2} e^{-\lambda} \left[\nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{2} - (N-1) \frac{\lambda'}{r} \right] \\
R_{ii} &= \frac{g_{ii}}{2} \left\{ e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{2}{r^2} (N-2) (e^{-\lambda} - 1) \right\} \quad (i = 2, \dots, N)
\end{aligned} \tag{2.1.24}$$

e as seguintes componentes contraídas

$$\begin{aligned}
R_{0abc} R_0^{abc} &= g_{00} e^{-2\lambda} \left\{ \frac{1}{2} \left[\nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{2} \right]^2 + \left(\frac{N-1}{2} \right) \frac{(\nu')^2}{r^2} \right\} \\
R_{1abc} R_1^{abc} &= g_{11} e^{-2\lambda} \left\{ \frac{1}{2} \left[\nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{2} \right]^2 + \left(\frac{N-1}{2} \right) \frac{(\lambda')^2}{r^2} \right\} \\
R_{iabc} R_i^{abc} &= \frac{g_{ii}}{r^2} \left\{ \frac{e^{-2\lambda}}{2} \left((\nu')^2 + (\lambda')^2 \right) + \frac{2}{r^2} (N-2) (e^{-\lambda} - 1)^2 \right\} \quad (i = 2, 3, \dots, N)
\end{aligned} \tag{2.1.25}$$

Para o caso da métrica (2.1.6.b) as equações de movimento (1.2.6) assumem a forma

$$(\mu = \nu = 0)$$

$$\begin{aligned} \nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2} + (N-1)\frac{\nu'}{r} + \frac{\alpha'}{2}[\nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2}]^2 e^{-\lambda} \\ + \frac{\alpha'}{2}(N-1)\frac{\nu'^2}{r^2} e^{-\lambda} - 2\nu'\frac{d\phi}{dr} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.26.a)$$

$$(\mu = \nu = 1)$$

$$\begin{aligned} \nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2} - (N-1)\frac{\lambda'}{r} + \frac{\alpha'}{2}[\nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2}]^2 e^{-\lambda} \\ + \frac{\alpha'}{2}(N-1)\frac{(\lambda')^2}{r^2} e^{-\lambda} - 4\frac{d^2\phi}{dr^2} + 2\lambda'\frac{d\phi}{dr} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.26.b)$$

$$(\mu = \nu = i = 2, 3, \dots, N)$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\lambda}}{r}(\nu' - \lambda') + \frac{2}{r^2}(N-2)(e^{-\lambda} - 1) \\ + \frac{\alpha'}{r^2}[(\frac{(\nu')^2}{2} + \frac{(\lambda')^2}{2})e^{-2\lambda} + \frac{2(N-2)}{r^2}(e^{-\lambda} - 1)^2] - \frac{4}{r}\frac{d\phi}{dr} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.26.c)$$

E através de um cálculo simples obtemos:

$$\begin{aligned} 2\nabla_0\nabla_0\phi &= \frac{g_{00}}{2}e^{-\lambda}[-2\nu'\frac{d\phi}{dr}] \\ 2\nabla_1\nabla_1\phi &= \frac{g_{11}}{2}e^{-\lambda}[-4\frac{d^2\phi}{dr^2} + 2\lambda'\frac{d\phi}{dr}] \\ 2\nabla_i\nabla_i\phi &= \frac{g_{ii}}{2}e^{-\lambda}[-\frac{4}{r}\frac{d\phi}{dr}] \quad (i = 2, 3, \dots, N) \end{aligned}$$

É necessário saber se o Ansatz dado por um Espaço-tempo maximamente simétrico [5] fornece algum resultado físico interessante para as equações de movimento (1.2.6,7). Sendo assim apresentaremos os componentes dos tensores de Riemann e Ricci para posterior utilização

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = K(g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu} - g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma})$$

$$R_{\rho\nu} = (N-1)Kg_{\rho\nu} \quad (2.1.27)$$

Estamos agora em condições de apresentar algumas soluções das equações (1.2.6) correspondentes aos elementos de linha (2.1.4.b), (2.1.5.a) e (2.1.6.b).

Para o elemento de linha (2.1.4.a) é fácil verificar que duas soluções das equações (2.1.17b), (2.1.18) e (2.1.19) são dadas por:

1. $e^f = \frac{\rho_0^{4k_1}}{\rho^{4k_1}}$, onde k_1 assume os valores 0 e 1, sendo ρ_0 uma constante, $\dot{g} = 0$ e $\phi = cte$ (ver comentários no apêndice D).

Neste caso (2.1.4a) assume a seguinte forma

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{4k_1} \{d\rho^2 + \rho^2[d^2\phi_1 + \text{sen}^2\phi_1(d^2\phi_2 + \text{sen}^2\phi_2(\dots(d^2\phi_{N-2} + \text{sen}^2\phi_{N-2}(d^2\phi_{N-1}))))]\} \quad (2.1.28)$$

2. $e^f = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{4k_1}$, onde k_1 assume os valores 0 e 1, onde $\dot{g} = \pm \frac{2}{\sqrt{\alpha'}}$ e $\phi = cte$.

com (2.1.4.a) assumindo a seguinte forma

$$ds^2 = dt^2 - e^{\pm \frac{2t}{\sqrt{\alpha'}}} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{4k_1} \{d\rho^2 + \rho^2[d^2\phi_1 + \text{sen}^2\phi_1(d^2\phi_2 + \text{sen}^2\phi_2(\dots(d^2\phi_{N-2} + \text{sen}^2\phi_{N-2}(d^2\phi_{N-1}))))]\} \quad (2.1.29)$$

As equações (1.2.6) assumem as formas (2.1.23a) e (2.1.23b) para a métrica de Robertson-Walker.

No caso do dÍlaton constante, as únicas soluções não triviais de (2.1.23.a) e (2.1.23.b) são as de de Sitter a saber

$$R = e^{\pm \frac{t}{\sqrt{\alpha'}}} \quad \text{com } k = 0 \quad (2.1.30.a)$$

$$R = \text{senh} \frac{t}{\sqrt{\alpha'}} \quad \text{com } k = -\frac{1}{\alpha'} \quad (2.1.30.b)$$

$$R = \text{cosh} \frac{t}{\sqrt{\alpha'}} \quad \text{com } k = \frac{1}{\alpha'} \quad (2.1.30.c)$$

Para $R = cte$ teremos

Se $k = 0$, $k = \frac{1}{\alpha'}$, então

$$\phi = at + b \quad (2.1.30.d)$$

com a e b constantes

O conjunto de soluções (2.1.30.a) à (2.1.30.d) é conhecido na literatura [11] embora as houvessemos obtido independentemente. Os elementos de linha associados a essas soluções são os seguintes

$$ds^2 = dt^2 - e^{\pm \frac{2t}{\sqrt{\alpha'}}} \{dr^2 + d\Omega_{S^{N-1}}\} \quad (2.3.31.a)$$

$$ds^2 = dt^2 - \sinh^2\left(\frac{t}{\sqrt{\alpha'}}\right) \left\{ \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{\alpha'}} + d\Omega_{S^{N-1}} \right\} \quad (2.3.31.b)$$

$$ds^2 = dt^2 - \cosh^2\left(\frac{t}{\sqrt{\alpha'}}\right) \left\{ \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{\alpha'}} + d\Omega_{S^{N-1}} \right\} \quad (2.3.31.c)$$

$$ds^2 = dt^2 - \{dr^2 + d\Omega_{S^{N-1}}\} \quad (2.3.31.d)$$

$$ds^2 = dt^2 - \left\{ \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{\alpha'}} + d\Omega_{S^{N-1}} \right\} \quad (2.3.31.e)$$

onde $d\Omega_{S^{N-1}}$ é o elemento de arco em S^N .

Veremos agora as soluções de (1.2.6) correspondentes a métrica do tipo "Schwarzschild" dado pelo elemento de linha (2.1.6b).

Na métrica correspondente a (2.1.6b), as equações (1.2.6) passam a ser dadas pelas equações (2.1.26a), (2.1.26b) e (2.1.26c). Estas equações fornecem as seguintes condições para $\frac{d\phi}{dr} = 0$,

$$(a) \quad \left(\frac{d\nu}{dr} + \frac{d\lambda}{dr} = 0 \right)$$

(massa inercial = massa gravitacional).

No limite clássico $g_{00} = e^{\nu(r)} \sim \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)$ com $\phi = -\frac{GM}{r^2}$, daí a associação de g_{00} com a massa gravitacional.

Analogamente g_{11} está associada a massa inercial (segunda lei de Newton).

$$(b) \quad \left(\frac{d\nu}{dr} = \frac{d\lambda}{dr} - \frac{2re^\lambda}{\alpha'} \right)$$

(massa inercial \neq massa gravitacional)

$$(c) \left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} = 0 \right)$$

o que implica em $e^\nu = e^\lambda = 1$

As equações (2.1.26c) assumem a mesma forma tanto para a condição (a) quanto para a (b). No entanto o sistema só tem solução sob a condição (a). Fazendo $y = e^{-\lambda}$ e $r = x$ e $\frac{dy}{dx} = p$; (2.1.26c) passa a ser

$$(N-2)y + xp - (N-2) + \frac{\alpha'}{2}p^2 + \frac{\alpha'(N-2)}{x^2} - \frac{2\alpha'(N-2)y}{x^2} + \frac{\alpha'(N-2)y^2}{x^2} = 0 \quad (2.1.32)$$

A equação (2.1.32) faz parte de um tipo de equação ordinária não linear bem conhecida [12]. Está estabelecido que o número de soluções é igual a potência de grau mais alto de p .

É possível verificar facilmente que as soluções de (2.1.32) são

$$y = e^{-\lambda} = e^\nu = 1 \quad (2.1.33)$$

que corresponde ao espaço-tempo de Minkowski, e

$$y = e^{-\lambda} = e^\nu = 1 - \frac{r^2}{\alpha'} \quad (2.1.34)$$

que corresponde ao espaço-tempo de de Sitter na forma estática [5, 13] onde

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{\alpha'}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{\alpha'}} - r^2 \left[d^2\phi_1 + \sin^2\phi_1 (d^2\phi_2 + \sin^2\phi_2 (\dots (d^2\phi_{N-2} + \sin^2\phi_{N-2} (d^2\phi_{N-1}))) \right] \quad (2.1.35)$$

Embora na página 24 deste capítulo tenhamos justificado a expressão do tipo "Schwarzschild", aproveitamos a oportunidade para tornarmos o fato mais transparente. Como é bem sabido o elemento de linha (2.1.6b) quando substituído nas equações de Einstein para uma região fora do fluido, onde $T_{\mu\nu} = 0$, fornece a solução de Schwarzschild. As equações de Einstein modificadas (1.2.6) impõem um número maior de simetrias, originando neste caso o elemento de arco (2.1.35).

Vejamos agora as soluções das equações de movimento (1.2.6) para o caso do espaço-tempo maximamente simétrico.

Se a métrica for diagonal, então a única solução será

$\phi = cte$ e $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, com $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, \dots, -1)$, então $K = 0$. Este resultado é muito simples, por isso omitimos os detalhes.

Se a métrica for não diagonal, então derivando covariantemente (1.2.6) e (1.2.7) teremos

$$\nabla_\alpha R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha (R_{\mu abc} R_\nu{}^{abc}) = \nabla_\alpha (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) = 0$$

onde usamos

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$$

diretamente em (2.1.27).

Então teremos

$$\nabla_\alpha (\nabla \phi)^2 = \partial_\alpha (\nabla \phi)^2 = 0$$

que implica em $(\nabla \phi)^2 = cte = a$, pois trata-se de derivar uma função escalar. Analogamente teremos

$$\nabla_\alpha (\nabla^2 \phi) = \partial_\alpha (\nabla^2 \phi) = 0$$

cuja solução é $\nabla^2 \phi = cte = b$.

Manipulando (1.2.6) e (1.2.7) teremos (com a mudança ϕ em $-\frac{\phi}{2}$)

$$R_\mu{}^\mu - \frac{\alpha'}{2} R_{abcd} R^{abcd} - \nabla^2 \phi = 0$$

$$\nabla^2 \phi + (\nabla \phi)^2 + \frac{\alpha'}{4} R_{abcd} R^{abcd} = 0$$

$$2(\nabla \phi)^2 - 3\nabla^2 \phi - R_\mu{}^\mu = 0$$

ou seja:

$$N(N-1)K + \frac{\alpha'}{2} K^2 N(N-1) - b = 0$$

$$b + a + \frac{\alpha'}{4} K^2 N(N - 1) = 0$$

$$N(N - 1)K + 2a - 3b = 0$$

cuja única solução do sistema é $K = 0 = a = b$.

Sendo assim teremos $(\nabla\phi)^2 = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi = 0$.

Seja

$$\nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi = A_\mu$$

Então temos $A_\mu A^\mu = 0$.

Logo $\partial_\mu\phi$ será na melhor das hipóteses do tipo luz. Concluimos assim que para um espaço-tempo maximamente simétrico não há gravitação e (1.2.6) reduz-se a $(\partial_\mu\partial_\nu\phi = 0)$, que equivale a $\phi = cte$.

Este espaço-tempo reduz-se ao de Minkowski.

2.2. Interpretação de algumas soluções.

Inicialmente apresentaremos as equações de Einstein clássicas com o termo cosmológico, pois surpreendentemente uma de suas soluções clássicas coincide com uma das nossas soluções obtidas a partir de correções quânticas das equações de Einstein.

As equações de Einstein com termo cosmológico são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^\alpha_\alpha = T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

com $\Lambda > 0$ pois no nosso caso $g_{00} > 0$.

Na região fora do fluido $T_{\mu\nu} = 0$, teremos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^\alpha_\alpha = \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.2.1.a)$$

Para o espaço-tempo de $N + 1$ dimensões; com $N \geq 3$ as equações (2.2.1a) fornecem

$$R^\mu{}_\mu - \frac{g^\mu{}_\mu}{2} R^\alpha{}_\alpha = g^\mu{}_\mu \Lambda$$

$$R^\mu{}_\mu - \frac{N+1}{2} R \rightarrow 2R^\mu{}_\mu - (N+1)R^\mu{}_\mu = (N+1)\Lambda(2)$$

de onde obtemos o escalar de curvatura

$$R^\mu{}_\mu = -2\left(\frac{N+1}{N-1}\right)\Lambda$$

Substituindo-o em (2.2.1a) teremos $R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{2\Lambda}{N-1}g_{\mu\nu}$, cuja solução será

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2\Lambda r^2}{N(N-1)}\right] dt^2 - \frac{dr^2}{\left[1 - \frac{2\Lambda r^2}{N(N-1)}\right]} - d\Omega_{S^{N-1}}. \quad (2.2.2)$$

Sendo de fácil verificação que (2.2.2) satisfaz a equação $R_{\mu\nu} = -\frac{2\Lambda}{N-1}g_{\mu\nu}$ em um espaço-tempo de $N+1$ dimensões.

A título de curiosidade, vemos que para $N=3$, o elemento de linha (2.2.2) recai no caso do espaço-tempo quadrimenssional $g_{00} = 1 - \frac{2\Lambda r^2}{N(N-1)} = 1 - \frac{\Lambda r^2}{3}$ em que teremos

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Essa métrica [12] é conhecida como métrica estática de de Sitter, para um espaço-tempo vazio.

Num terreno puramente especulativo vemos que a comparação de (2.2.2) com (2.1.35), fornece $\frac{2\Lambda}{N(N-1)} = \frac{1}{\alpha'}$ de onde teremos:

$$\Lambda = \frac{N(N-1)}{2\alpha'} \quad (2.2.3)$$

Logo a constante cosmológica é proporcional a tensão na corda. Sendo assim ainda a nível de especulações teremos:

A constante cosmológica é proporcional a tensão na corda, pelo menos na região de Planck.

O vácuo pode ser pensado como um mar de cordas que são objetos extensos em constante movimento. A energia do vácuo estaria na fase de Planck, em constante movimento, confinada em tubos de energia, que são as varreduras das cordas.

A hipótese do vácuo ter sido formado de cordas constitui-se em um fato interessante.

Um outro fato interessante que aparece é o seguinte: a equação (2.2.1.a) em duas dimensões nos leva a

$$R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} R^\mu{}_\mu = \Lambda_1 g_{\mu\nu} = 0$$

$$\Lambda_1 = 0$$

Coincidentemente na "folha mundo" a constante cosmológica tem que ser nula para manter a invariância de Weyl [2]. No entanto se considerarmos as equações de Einstein com termo cosmológico em duas dimensões teremos

$$T_{\alpha\beta} + \Lambda_1 h_{\alpha\beta} = T'_{\alpha\beta} \quad (2.2.4)$$

onde:

$$T^\beta{}_\beta + 2\Lambda_1 = T'^\beta{}_\beta = 0 \quad (2.2.4')$$

sendo o traço do tensor de movimento energia (total) $T'^\beta{}_\beta = 0$ com $T^\beta{}_\beta = -2\Lambda_1$. Pois o traço do tensor momento energia no espaço-tempo bidimensional, ou melhor na folha mundo, é nulo como consequência da simetria de Weyl [2]. O tensor de momento-energia da folha mundo [2], é dado por

$$T'_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\alpha'\beta'} \partial_{\alpha'} X^\mu \partial_{\beta'} X_\mu \quad (2.2.4'')$$

Ainda a nível de especulação, comparando as duas expressões (2.2.4') e (2.2.4'') temos que

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \quad (2.2.4.a)$$

$$\Lambda_1 = -\frac{1}{2} h^{\alpha'\beta'} \partial_{\alpha'} X^\mu \partial_{\beta'} X_\mu \quad (2.2.4.b)$$

onde teríamos dividido o tensor de momento energia de traço nulo, da folha mundo, em duas partes, uma delas contendo a constante cosmológica. Definindo [2]

$$G_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$$

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\alpha'\beta'} \partial_{\alpha'} X^\mu \partial_{\beta'} X_\mu = -\Lambda_1 h_{\alpha\beta}$$

com o determinante de $G_{\mu\nu}$ dado por:

$$G = \frac{1}{4} h (h^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta})^2 = h \Lambda_1^2$$

logo teremos

$$\frac{1}{2} \int \Sigma d^2 \sigma \sqrt{h} h_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = \int_\Sigma d^2 \sigma \sqrt{G} = \int \Sigma d^2 \sigma \Lambda_1 \sqrt{h} \quad (2.2.4.c)$$

que é a área da folha mundo Σ proposto por Nambu [2]. Então a constante cosmológica não seria em geral constante e estaria associada a tensão na corda já que na ação de Nambu aparece a tensão na corda explicitamente. Além do mais vemos de (2.2.4c) que a área varrida pela corda depende da constante cosmológica.

Especulações sobre compactificação

No modelo em que trabalhamos, $\beta^\phi = 0$, no entretanto, em geral podemos construir um espaço como produto de dois espaços M e L , onde para todo ponto $X \in M$ é associado uma "enupla" $X = (X^0, X^1, X^2, X^3)$ sendo M o espaço-tempo da Relatividade; e para todo ponto $Y \in L$ é associado uma "enupla" $Y = (X^4, \dots, X^l)$ sendo L a parte do espaço que deve permanecer compactada. Então um ponto $z \in (M \times L)$ é representado por uma "enupla" $z = (X, Y)$ e além do mais [14]

$$\phi(x, y) = \phi(x) + \tilde{\phi}(y)$$

e se

$$\beta_{ab}^g(g, \phi(x)) = 0; \quad a, b = 0, 1, 2, 3$$

$$\tilde{\beta}_{\tilde{a}\tilde{b}}^{\tilde{g}}(\tilde{g}, \tilde{\phi}(x)) = 0; \quad \tilde{a}, \tilde{b} = 4, \dots, N$$

então

$$g_{ab}(X, Y) = \begin{pmatrix} g_{ab}(X) & 0 \\ 0 & \tilde{g}_{\tilde{a}\tilde{b}}(Y) \end{pmatrix} \quad (2.2.5)$$

Sendo assim podemos escrever o elemento de linha do espaço $M \times L$ como sendo, por exemplo, dado por

$$ds^2 = dt^2 - d^2\sigma_{R-W} - d^2\tilde{\sigma}_{1-4}$$

ou seja

$$\begin{aligned} ds^2 = & dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 [d^2\phi_1 + \text{sen}^2 \phi_1 d^2\phi_2] \right\} \\ & - \tilde{R}^2(t) \left\{ \frac{d\tilde{r}^2}{1 - K\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 [d^2\phi_3 + \text{sen}^2 \phi_3 (\dots \text{sen}^2 \phi_{N-2} + \right. \\ & \left. + d^2\phi_{N-2}(d^2\phi_{N-1})) \right\} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Estamos interessados em investigar a existência de soluções expansivas para M e implasivas para L para as equações supersimplificadas $R_{\mu\nu} \frac{\alpha'}{2} R_{\mu abc} R_{\nu}{}^{abc} = 0$.

Vamos analisar inicialmente o caso em que $\phi(X) = \text{cte}$ e $\phi(Y) = \text{cte}$.

Calculemos inicialmente as conexões

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii}^0 &= -\frac{\dot{R}}{R} g_{ii} & (i = 1, 2, 3) \\ \Gamma_{kk}^0 &= -\frac{\dot{\tilde{R}}}{\tilde{R}} \tilde{g}_{kk} & (k = 4, \dots, N) \\ \Gamma_{(i)0}^{(i)} &= \frac{\dot{R}}{R} & (i = 1, 2, 3) \\ \Gamma_{(k)0}^{(k)} &= \frac{\dot{\tilde{R}}}{\tilde{R}} & (k = 4, \dots, N) \\ \Gamma_{11}^1 &= -\frac{kr}{1 - kr^2} \\ \Gamma_{(i)1}^{(i)} &= \frac{1}{r} & (i = 1, 2, 3) \\ \Gamma_{(k)4}^{(k)} &= \frac{1}{\tilde{r}} & (k = 5, \dots, N) \end{aligned}$$

O próximo passo será o cálculo das componentes do tensor de Riemann. Por um simples cálculo obtivemos os seguintes resultados

$$\begin{aligned}
 R^0_{i0i} &= -\frac{\dot{R}}{R}g_{ii} & (i = 1, 2, 3) \\
 R^0_{k0k} &= -\frac{\ddot{R}}{R}\bar{g}_{kk} & (k = 4, 5, \dots, N) \\
 R^1_{i1i} &= -\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right)g_{ii} & (i = 1, 2, 3) \\
 R^1_{414} &= -\frac{\dot{R}\ddot{R}}{R\ddot{R}}\bar{g}_{44} \\
 &\vdots \\
 R^1_{N1N} &= -\frac{\dot{R}\ddot{R}}{R\ddot{R}}\bar{g}_{NN}
 \end{aligned}$$

De forma análoga teremos

$$\begin{aligned}
 R^2_{424} &= -\frac{\dot{R}\ddot{R}}{R\ddot{R}}\bar{g}_{44} \\
 R^3_{434} &= -\frac{\dot{R}\ddot{R}}{R\ddot{R}}\bar{g}_{44} \\
 R^3_{535} &= -\frac{\dot{R}\ddot{R}}{R\ddot{R}}\bar{g}_{55} \\
 R^3_{N3N} &= \partial_3\Gamma^3_{NN} - \partial_N\Gamma^3_{N3} + \Gamma^{\mu}_{NN}\Gamma^3_{3\mu} - \Gamma^{\mu}_{N3}\Gamma^3_{N\mu} = \\
 &= \Gamma^0_{NN}\Gamma^3_{30} = -\frac{\dot{R}\ddot{R}}{R\ddot{R}}\bar{g}_{NN}
 \end{aligned}$$

Continuando obtemos os seguintes resultados

$$\begin{aligned}
 R^4_{545} &= -\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right)\bar{g}_{55} \\
 R^4_{k4k} &= -\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right)\bar{g}_{kk} & (k = 5, \dots, N)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R^5_{656} &= - \left(\frac{k + \dot{\bar{R}}^2}{\bar{R}^2} \right) \bar{g}_{66} \\
 R^5_{k5k} &= - \left(\frac{k + \dot{\bar{R}}^2}{\bar{R}^2} \right) \bar{g}_{kk} \quad (k = 5, \dots, N) \\
 R^j_{k(j)k} &= - \left(\frac{k + \dot{\bar{R}}^2}{\bar{R}^2} \right) \bar{g}_{kk} \quad (j = 4, \dots, N-1) \quad (j < k)
 \end{aligned}$$

que é a expressão geral para os valores de j e k acima.

Vamos agora calcular as componentes do tensor de Ricci.

Cálculo de R_{00}

A expressão para R_{00} é facilmente colocada na forma:

$$R_{00} = g_{00} [g^{11} R^0_{101} + g^{22} R^0_{202} + g^{33} R^0_{303} + \bar{g}^{44} R^0_{404} + \dots + \bar{g}^{NN} R^0_{N0N}]$$

Substituindo as expressões para as diversas componentes do tensor de Riemann obtemos

$$R_{00} = -g_{00} \left[\frac{3\ddot{\bar{R}}}{\bar{R}} + (N-3) \frac{\ddot{\bar{R}}}{\bar{R}} \right]$$

Cálculo de R_{11}

De forma análoga temos a expressão para R_{11}

$$R_{11} = R^0_{101} + g_{11} [g^{22} R^1_{212} + g^{33} R^1_{313} + \bar{g}^{44} R^1_{414} + \dots + \bar{g}^{NN} R^1_{N1N}]$$

Após substituirmos as expressões para as componentes do tensor de Riemann obtemos o seguinte resultado

$$R_{11} = - \left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{\dot{R}^2} \right) + (N-3) \frac{\ddot{R}}{R} \right]$$

Vamos agora calcular as seguintes contrações do tensor de Riemann $R_{0abc}R_0^{abc}$

Cálculo de $R_{0abc}R_0^{abc}$

A expressão $R_{0abc}R_0^{abc}$ pode ser posta facilmente da seguinte forma

$$R_{0abc}R_0^{abc} = 2g_{00} \{ (g^{11})^2 (R^0_{101})^2 + (g^{22})^2 (R^0_{202})^2 + (g^{33})^2 (R^0_{303})^2 + \\ + (\tilde{g}^{44})^2 (R^0_{404})^2 + \dots + (\tilde{g}^{NN})^2 (R^0_{N0N})^2 \}$$

Substituindo as componentes do tensor de Riemann teremos

$$R_{0abc}R_0^{abc} = 2g_{00} \left\{ 3 \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)^2 + (N-3) \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)^2 \right\}$$

Cálculo de $R_{1abc}R_1^{abc}$

De forma análoga à expressão anterior temos que $R_{1abc}R_1^{abc}$ pode ser expressa na seguinte forma

$$R_{1abc}R_1^{abc} = 2g_{11} \{ (g^{11})^2 (R^0_{101})^2 + (g^{22})^2 (R^1_{212})^2 + (g^{33})^2 (R^1_{313})^2 + \\ + (\tilde{g}^{44})^2 (R^1_{414})^2 + \dots + (g^{NN})^2 (R^1_{N1N})^2 \}$$

Após a substituição das componentes do tensor de Riemann

$$R_{1abc}R_1^{abc} = 2g_{11} \left\{ \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{\dot{R}^2} \right)^2 + (N-3) \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)^2 \right\}$$

Cálculo de $R_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{2}R_{\mu abc}R_{\nu}{}^{abc}$

Substituindo as expressões de R_{00} e $R_{0abc}R_0{}^{abc}$ teremos

$$g_{00} \left[-3\frac{\ddot{R}}{R} - (N-3)\frac{\ddot{\bar{R}}}{\bar{R}} \right] + \frac{\alpha'}{2}2g_{00} \left[-3\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)^2 - (N-3)\left(\frac{\ddot{\bar{R}}}{\bar{R}}\right)^2 \right] = 0$$

ou seja

$$3\frac{\ddot{R}}{R} \left[-1 + \alpha'\frac{\ddot{R}}{R} \right] + (N-3)\frac{\ddot{\bar{R}}}{\bar{R}} \left[-1 + \alpha'\frac{\ddot{\bar{R}}}{\bar{R}} \right] = 0 \quad (A)$$

Para $\mu = \nu = 1$ teremos

$$R_{11} + \frac{\alpha'}{2}R_{1abc}R_1{}^{abc} = 0$$

Substituindo R_{11} e $R_{1abc}R_1{}^{abc}$ teremos

$$\begin{aligned} & -g_{11} \left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right) + (N-3)\frac{\dot{R}\ddot{R}}{R\dot{R}} \right] + \\ & + \alpha'g_{11} \left\{ \left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right)^2 - (N-3)\left(\frac{\dot{R}\ddot{R}}{R\dot{R}}\right)^2 \right\} = 0 \end{aligned}$$

cuja expressão equivale a seguinte equação

$$\begin{aligned} & \frac{\ddot{R}}{R} \left[1 - \alpha'\frac{\ddot{R}}{R} \right] + 2\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right) \left[1 - \alpha'\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right) \right] + \\ & + (N-3)\frac{\dot{R}\ddot{R}}{R\dot{R}} \left[1 - \alpha'\frac{\dot{R}\ddot{R}}{R\dot{R}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (B)$$

Procurávamos soluções para R do tipo

$$R = \begin{cases} e^{\frac{t}{\sqrt{\alpha'}}}, & k = 0 \\ \cosh \frac{t}{\sqrt{\alpha'}}, & k = \frac{1}{\alpha'} \\ \sinh \frac{t}{\sqrt{\alpha'}}, & k = -\frac{1}{\alpha'} \end{cases} \quad (2.2.6')$$

e para \tilde{R} soluções do tipo $e^{-\frac{t}{\sqrt{\alpha'}}$, o que levaria a uma implosão do espaço L . A equação (A) admite essas soluções, mas o último termo da equação (B) só admite uma dessas soluções com a restrição $R = \tilde{R}$ ou $\tilde{R} = \text{cte}$. Concluímos que as nossas investigações no que tange a soluções que expandam o espaço-tempo M e provoquem uma implosão no espaço compactificado L não nos levaram a um resultado satisfatório.

2.3. Temperatura de Hagedorn [15]

Acreditava-se que a temperatura de Hagedorn, T_H , era a temperatura máxima obtida por um sistema a partir do qual a função de partição diverge. É conhecido que um observador em um espaço-tempo de Minkowsky, submetido a uma aceleração \vec{a} , sente um banho térmico cuja temperatura é $T = \frac{a}{2\pi}$. Foi mostrado por Fulling e Unruh que observadores inercial e acelerado definem operadores de criação e aniquilação de forma inequivalente. A temperatura crítica T_C , além da qual as variáveis termodinâmicas locais divergem, é dado por $T_C = \frac{T_H}{\pi}$, com $T_H = \frac{1}{4\pi\sqrt{\alpha'}}$. O fator $\frac{1}{\pi}$ é interpretado geometricamente em termos de "winding strings". No caso de cordas livres à temperatura T_c , "winding strings" tem a mesma aceleração independentemente do número n (número "winding") de cada corda. Para um sistema livre (no nosso caso, cordas) que sob uma rotação de Wick, $t \rightarrow it$, implica em uma compactificação do tempo imaginário, então diz-se que tal sistema tem temperatura de Hagedorn. Tem sido mostrado que a divergência na temperatura de Hagedorn pode ser interpretada como a temperatura onde uma corda que se retorce uma (ou mais) vez(es) em torno do eixo do tempo imaginário, torna-se sem massa e contribui para a divergência da função de partição (Veja R. Parentani e R. Potting [15]). Aplicando esta interpretação a sistemas acelerados, conclue-se que atingida a aceleração crítica (e conseqüentemente a temperatura crítica) as cordas que enovelam em torno da origem e passam pelo observador tornam-se sem massa. Especula-se que para um espaço-tempo de de Sitter, existe temperatura de Hagedorn porque a euclidianização do tempo torna-o periódico e portanto compacto. Sabemos que

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + d\Omega_{S^{N-1}} \right\} \quad (2.3.1)$$

com $R(t)$ como fator de de Sitter e

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{\alpha'}\right) dt^2 - \left\{ \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{\alpha'}} + d\Omega_{S^{N-1}} \right\} \quad (2.3.2)$$

são a mesma métrica de de Sitter para o espaço vazio. A equação (2.3.2) é conhecida como a forma estática de de Sitter. Pelos resultados (2.2.2) e (2.2.3), vemos que (2.3.2) representa um universo vazio com constante cosmológica $\Lambda = \frac{N(N-1)}{2\alpha'}$. Por outro lado, em Relatividade Geral, no limite Newtoniano teremos

$$R^i{}_{0(j)0} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^i \partial X^j} = -\frac{\partial F_i}{\partial X^j}$$

de forma que $R^i{}_{0(j)0}$ [15] mede a variação da “aceleração” em cada ponto do espaço-tempo em tal limite. É fácil ver que para (2.3.2)

$$R^1{}_{010} = -\frac{1}{\alpha'} \left(1 - \frac{r^2}{\alpha'}\right) \quad (2.3.3)$$

de forma que essa métrica exerce uma força repulsiva [13]. No espaço-tempo (2.3.2) existe uma variação da “força” repulsiva que exerce uma aceleração diferente em cada ponto de uma corda, supondo que estejam tais pontos da corda em distâncias r diferentes da origem de coordenadas, ou seja, diferentes valores de r para cada ponto da corda. Essa corda se retorce enovelando-se. Como o observador está em cada ponto do espaço-tempo o observador que está “dentro” desta corda a vê perder massa. Isto não é necessariamente verdadeiro para outros “fora” dela. O fato é que essas cordas sofrem repulsão para fora e se enovelam todas. É razoável que explodam o buraco negro (2.3.2).

Podemos especular que:

Todas as cordas em (2.3.2) já chegam sem massa (porque (2.3.2) é solução de $R_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{2} R_{\mu abc} R_{\nu}{}^{abc} = 0$ onde as cordas são fechadas e sem massa contendo somente uma excitação de grávitons) em $r = \sqrt{\alpha'}$ e são jogadas para fora, constituindo uma evaporação.

Para $ds^2 = 0$: $\frac{dr}{dt} = \pm(1 - \frac{r^2}{\alpha'})$. Essas cordas já estariam em $r = \sqrt{\alpha'}$ mas sofrendo uma repulsão, evaporando o buraco negro (2.3.2).

Assim poderíamos antever uma possibilidade de evaporação de buracos negros com horizonte em $\sqrt{\alpha'}$ para tais soluções.

Capítulo 3

Inflação com Base em Teoria de Cordas

3.1. Introdução

Como vimos no 1º capítulo o novo cenário inflacionário resolve importantes problemas que aparecem naturalmente no Modelo Cosmológico Padrão de Universo, que toma por base as equações de Einstein e as teorias de Grande Unificação, como por exemplo SU(5). O crescimento exponencial do raio do Universo durante um período relativamente longo é obtido com a introdução do potencial de Coleman-Weinberg que desenvolve um falso vácuo. O decaimento deste estado é lento o suficiente no modelo Coleman-Weinberg para provocar suficiente inflação de forma a contornar a maior parte das dificuldades do Modelo Cosmológico Padrão, onde finalmente o campo oscila em torno do mínimo do potencial de Coleman-Weinberg, reaquecendo o Universo e provocando uma quebra dinâmica de simetria nos campos de gauge, retornando a expansão do raio do Universo a variar proporcionalmente a $t^{1/2}$.

Neste capítulo consideramos uma corda bosônica partindo de uma Lagrangiana efetiva para os campos de gravitação e do dýlaton, contendo a gravitação de Einstein no limite de tensão infinita na corda.

As soluções numéricas do problema mostram um Universo Inflacionário no limite assintótico, e o tempo é medido pelo dýlaton como era de se esperar. As soluções mostram ainda que a fase inflacionária é obtida independentemente da introdução ad-hoc de uma auto-interação para o dýlaton.

3.2. Equações de Movimento e Universo Inflacionário

Existem equações modificadas de Einstein que podem levar o Universo a uma fase inflacionária [17]. No entanto, no contexto de cordas, o estudo de cordas movendo-se em um background, leva a novas equações para os campos gravitacionais, com correções quânticas para equações de Einstein como mostrado em [18].

É conveniente partirmos de uma ação efetiva obtida como uma consequência da imposição de invariância conforme da corda em um campo de fundo [14], que é dada pela integral da função β do dílaton a menos de termos superiores em α' .

Deste modo consideramos a ação:

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} [R^\mu{}_\mu + 4(\nabla\phi)^2 + \frac{\alpha}{4} R_{\mu abc} R^{\mu abc} + \frac{1}{3\alpha'} (D - 26)] \quad (3.2.1)$$

Para obtermos as equações de movimento a partir da ação (3.2.1) devemos primeiramente determinar a lei de variação dos termos que compõem a densidade Lagrangiana, devido a variações apenas nos campos.

A lei de transformação das conexões afins é dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial X^\lambda}{\partial X'^\tau} \frac{\partial X'^\rho}{\partial X^\mu} \frac{\partial X'^\sigma}{\partial X^\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} + \frac{\partial X^\lambda}{\partial X'^\tau} \frac{\partial^2 X'^\tau}{\partial X^\mu \partial X^\nu} \quad (3.2.2)$$

$$\text{com } \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial X^\lambda}{\partial X'^\tau} \frac{\partial X'^\rho}{\partial X^\mu} \frac{\partial X'^\sigma}{\partial X^\nu} (\delta\Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}) \quad (3.2.3)$$

A variação de $R^\lambda{}_{\mu\nu\delta}$ será dada pela seguinte expressão:

$$\delta R^\lambda{}_{\mu\nu\delta} = \nabla_\nu (\delta\Gamma_{\mu\delta}^\lambda) - \nabla_\delta (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \quad (3.2.4)$$

onde estamos usando as seguintes convenções para os termos de curvatura, de Ricci, e os símbolos de Christoffel:

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\delta} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\delta}^\lambda - \partial_\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\delta}^\sigma - \Gamma_{\mu\delta}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\sigma$$

$$R_{\mu\delta} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\delta}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_{\mu}g_{\rho\nu} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} + \partial_{\rho}g_{\mu\nu})$$

Variando $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ e usando $\delta(g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma}) = 0$ teremos

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = & -\frac{1}{4}[\delta_{\alpha}^{\lambda}(g_{\nu\beta}\nabla_{\mu} + g_{\mu\beta}\nabla_{\nu}) + \delta_{\beta}^{\lambda}((g_{\nu\alpha}\nabla_{\mu} + g_{\mu\alpha}\nabla_{\nu}) \\ & - (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha})\nabla^{\lambda}]\delta g^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Substituindo (3.2.5) em (3.2.4) obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu}^{\lambda} = & -\frac{1}{4}[\delta_{\alpha}^{\lambda}(g_{\delta\beta}\nabla_{\nu}\nabla_{\mu} + g_{\mu\beta}\nabla_{\nu}\nabla_{\delta} - g_{\nu\beta}\nabla_{\delta}\nabla_{\mu} - g_{\mu\beta}\nabla_{\delta}\nabla_{\nu}) + \\ & \delta_{\beta}^{\lambda}(g_{\delta\alpha}\nabla_{\nu}\nabla_{\mu} + g_{\mu\alpha}\nabla_{\nu}\nabla_{\delta} - g_{\mu\alpha}\nabla_{\delta}\nabla_{\nu} - g_{\nu\alpha}\nabla_{\delta}\nabla_{\mu}) \\ & - (g_{\mu\alpha}g_{\delta\beta} + g_{\mu\beta}g_{\delta\alpha})\nabla_{\nu}\nabla^{\lambda} + (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha})\nabla_{\delta}\nabla^{\lambda}]\delta g^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Utilizando (3.2.6) obtemos

$$g^{\mu\delta}\delta R_{\mu\delta} = -\frac{1}{2}[\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta} + \nabla_{\beta}\nabla_{\alpha} - 2g_{\alpha\beta}\nabla^2]\delta g^{\alpha\beta} \quad (3.2.7)$$

A variação de $\sqrt{-g}$ é dada por

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \quad (3.2.8)$$

Vamos agora variar a ação (3.2.1)

Neste caso teremos que

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^D x \{ \delta\sqrt{-g}e^{-2\phi}[R_{\mu}^{\mu} + 4(\nabla\phi)^2 + \frac{\alpha'}{4}R_{abcd}R^{abcd}] + \\ & \delta\phi\sqrt{-g}e^{-2\phi}[-2R_{\mu}^{\mu} - 8(\nabla\phi)^2 + \frac{\alpha'}{2}R_{abcd}R^{abcd}] + \\ & + \sqrt{-g}e^{-2\phi}[\delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} + 4\delta g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\phi\nabla_{\beta}\phi + \\ & 4(g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\delta\phi\nabla_{\beta}\phi + g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\phi\nabla_{\beta}\delta\phi) + \frac{\alpha'}{4}\delta(R_{abcd}R^{abcd}) \} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Usando $\nabla_{\mu}g^{k\sigma} = 0$; $\nabla_{\mu}\sqrt{-g} = 0$, nos processos de integração, o fato de que os campos se anulam nos extremos e a identidade de Bianchi, obtemos a seguinte variação para a ação (3.2.1)

$$\begin{aligned}
\delta S = & \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left\{ [R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (R^\mu{}_\mu + 4(\nabla\phi)^2) + \frac{\alpha'}{4} R_{abcd} R^{abcd} + \right. \\
& + 4\nabla^2\phi - 8(\nabla\phi)^2) + 4\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi + 4\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi - 4\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi + \frac{\alpha'}{2} (R_{\alpha bcd} R_\beta{}^{bcd} + \\
& + 4\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi R_\alpha{}^{\mu\nu}{}_\beta - 8\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi R_\alpha{}^{\mu\nu}{}_\beta + 2\nabla_\mu\nabla_\nu\phi (R_\alpha{}^{\mu\nu}{}_\beta + R_\beta{}^{\mu\nu}{}_\alpha) + \\
& + 4\nabla_\mu\phi\nabla_\nu (R_\alpha{}^{\mu\nu}{}_\beta + R_\beta{}^{\mu\nu}{}_\alpha) - \nabla_\mu\nabla_\nu (R_\alpha{}^{\mu\nu}{}_\beta + R_\beta{}^{\mu\nu}{}_\alpha)] \delta g^{\alpha\beta} + \\
& \left. + [-2R^\mu{}_\mu - 8(\nabla\phi)^2 - \frac{\alpha'}{2} R_{abcd} R^{abcd} + 16(\nabla\phi)^2 - 8\nabla^2\phi] \delta\phi \right\} = 0
\end{aligned}$$

De onde obtemos as equações de movimento da teoria uma delas coincidente com a função β do dílaton do grupo de renormalização do modelo σ não linear da corda em dois loops. Em primeiro lugar consideramos o coeficiente de $\delta\phi$ em (3.1.9) que define a respectiva equação do movimento:

$$\nabla^2\phi - (\nabla\phi)^2 + \frac{R^\mu{}_\mu}{4} + \frac{\alpha'}{16} R_{abcd} R^{abcd} = 0 \quad (3.2.10)$$

que de fato coincide com β^ϕ

Analogamente, para o coeficiente de $\delta g^{\alpha\beta}$ obtemos as equações de movimento dadas pela expressão:

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta} + 2\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi + \lambda R_{\alpha bcd} R_\beta{}^{bcd} + \lambda [2\nabla_\mu\nabla_\nu\phi (R_\alpha{}^{\mu\nu}{}_\beta + R_\beta{}^{\mu\nu}{}_\alpha) - \\
- 4\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi (R_\alpha{}^{\mu\nu}{}_\beta + R_\beta{}^{\mu\nu}{}_\alpha) + 4\nabla_\mu\phi\nabla_\nu (R_\alpha{}^{\mu\nu}{}_\beta + R_\beta{}^{\mu\nu}{}_\alpha) - \\
- \nabla_\mu\nabla_\nu (R_\alpha{}^{\mu\nu}{}_\beta + R_\beta{}^{\mu\nu}{}_\alpha)] = 0
\end{aligned} \quad (3.2.11)$$

que é uma extensão da função beta do gráviton até dois loops. No cálculo acima não levamos em conta o termo cosmológico $\frac{D-26}{3\alpha'}$. Na verdade em [14] partiu-se de (3.2.1) e obteve-se (1.2.6) e (1.2.7) porque se estava interessado em linearizar o sistema, resolvendo-o analiticamente. Realmente, numa aproximação linear os demais termos em (3.2.11) que diferem de (1.2.7) não contribuem. Na obtenção de (3.2.11) usamos (3.2.10) para eliminarmos os termos com $g_{\alpha\beta}$.

Em seguida usaremos como Ansatz para resolver o sistema (3.2.10) e (3.2.11), a métrica tipo Robertson-Walker. Na métrica tipo Robertson-Walker o elemento de linha é dado por

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (3.2.12)$$

com $ds^2 > 0$ do tipo tempo.

Em métricas diagonais do tipo Robertson-Walker e Schwarzschild verificamos que $R_{\alpha\beta}$ e $R_{abcd}R_{\beta}{}^{bcd}$ são identicamente nulos para $\alpha \neq \beta$. Verificamos ainda que ocorre o mesmo fato para os demais termos em (3.2.11), o que implica em $\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\phi = 0$ para $\alpha \neq \beta$. Para o elemento de linha na forma (3.2.12) esta última condição implica em $\phi = \phi(t)$.

O sistema de equações (3.2.10) e (3.2.11) com Ansatz (3.2.12) assume a seguinte forma [18], primeiramente as equações para (3.2.10)

$$\ddot{\phi} + \frac{3\dot{R}}{R}\dot{\phi} - \dot{\phi}^2 - \frac{3\ddot{R}}{2R} - \frac{3}{2}\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right) + \frac{3\alpha'}{4}\left[\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)^2 + \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right)^2\right] = 0 \quad (3.2.13)$$

Em seguida as equações (3.2.11) para $(\mu = \nu = 0)$

$$\begin{aligned} \frac{3\ddot{R}}{R} - 2\ddot{\phi} - 3\alpha'\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)^2 - \frac{6\alpha'\dot{R}\ddot{R}\dot{\phi}}{R^2} - \\ - \frac{6\alpha'\dot{R}}{R}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right) + \frac{2\dot{R}}{R}\left[\frac{\ddot{R}}{R} - \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right)\right]\right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Finalmente das equações (3.2.11), para $(\mu = \nu = i = 1, 2, 3)$ obtem-se

$$\begin{aligned} - R\ddot{R} - 2(k + \dot{R}^2) + 2R\dot{R}\dot{\phi} + 2\alpha'\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right) + 2\alpha'R\ddot{\phi}\ddot{R} - \\ - 4\frac{\alpha'\dot{\phi}\dot{R}(k + \dot{R}^2)}{R} - 4\alpha'\dot{\phi}^2R\ddot{R} + 4\alpha'R\dot{\phi}\frac{d^3R}{dt^3} + 4\alpha'\dot{\phi}\dot{R}\ddot{R} - \alpha'R\frac{d^4R}{dt^4} - \\ - 2\alpha'\dot{R}\frac{d^3R}{dt^3} + \frac{2\alpha'k\ddot{R}}{R} - 2\alpha'\dot{R}^2\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right) + \frac{6\alpha'\dot{R}^2\ddot{R}}{R} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

As equações (3.2.13) e (3.2.14) serão calculadas com detalhes no apêndice A deste capítulo.

Este sistema foi calculado numericamente tomando como unidade $\alpha' = 1$, e com a inclusão de um termo $m^2\phi + g\phi^3$, correspondente a um potencial efetivo (modelo ϕ^4), onde atribuímos uma gama razoável de valores a m^2 e g .

Observamos que os resultados são assintoticamente estáveis e independentes das condições de contorno iniciais para uma gama razoável de valores iniciais para os campos, m^2 e g da ordem de até 100.

Invariavelmente o dilaton passa a ser proporcional ao tempo, como era de se esperar. O raio do Universo passa a evoluir exponencialmente, com a constante de Hubble, nessa fase, uma constante universal, e as equações de movimento se comportam de forma aproximada como $R_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{2}R_{\mu abc}R_{\nu}{}^{abc} = 0$

Comprova-se facilmente nos gráficos que este regime inflacionário inicia-se em geral para $\Delta t < \alpha' = 1$.

A escolha de t inicial igual a dois foi arbitrária, e excluimos $t = \dot{R} = 0$ para evitar dificuldades na computação numérica onde aparece um termo com $(\dot{R})^{-1}$.

Colocamos as condições de contorno iniciais, no instante $t = 2\alpha' = 2$, na parte inferior dos gráficos na seguinte ordem:

$$\alpha, k, M^2, g, \phi, \dot{\phi}, R, \dot{R}, \ddot{R}$$

As figuras 3.1, 3.2, 3.3, ..., 3.16, correspondem ao caso em que o potencial $V(\phi) = \frac{M^2}{2}\phi^2 + \frac{g}{4}\phi^4 = 0$ ($M^2 = 0$; $g = 0$)

As figuras 3.17, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22, 3.23 correspondem ao caso em que $V(\phi) \neq 0$.

Vamos em seguida analisar os gráficos nas figuras onde $V(\phi) = 0$, comecemos pelas figuras 3.1a e 3.2a. Na figura 3.1a temos $\dot{\phi}$ em função do tempo, e o seu comportamento é oscilatório. Na figura 3.2a temos o raio do universo medido em escala logarítmica em função do tempo. Observamos uma leve oscilação, mas uma tendência a uma reta caracterizando a tendência assintótica a uma expansão inflacionária. Ainda nestas duas figuras, observamos que as condições de contorno iniciais para ϕ , $\dot{\phi}$ e R assumem valores muito próximos entre si. No entanto k é igual a zero. Constatamos, ao observarmos outras figuras, que este é o principal motivo pelo comportamento oscilatório em $\dot{\phi}$ e suavemente oscilatório para $\ln R$, em 3.1a e 3.2a respectivamente. Realmente, para $k = 0$ as funções ϕ e $\ln R$

permanecem por um período mais longo fora da fase inflacionária onde R varia exponencialmente e ϕ é proporcional ao tempo. Esses fatos também ocorreram para as figuras 3.1b e 3.2b. Em 3.1b e 3.2b mudamos as condições de contorno iniciais, principalmente o valor inicial de R , que passou a ser igual a 8.

No entanto mantivemos $k = 0$, e notamos claramente o comportamento oscilatório das funções ϕ e $\ln R$. Já para as figuras 3.3a e 3.3b, que representam os gráficos de $\ln R$ e de ϕ respectivamente, observamos um comportamento interessante, onde rapidamente o raio do universo tende a uma fase inflacionária e ϕ ao limite assintótico de $-0,51$, caracterizando a tendência esperada do dilaton em ser proporcional ao tempo. É notável que praticamente dobramos o valor inicial do raio do universo em relação as figuras 3.1b e 3.2b, mantendo as demais condições de contorno iniciais, só que nesse último caso fizemos $k = +1$. Sempre que assumimos $k = 1$ e valores de ϕ , $\dot{\phi}$ e R muito próximos, temos um comportamento de R e ϕ tendendo rapidamente a fase inflacionária e ϕ ao limite assintótico de $-0,51$.

Outras duas figuras interessantes são as figuras 3.4a e 3.4b, com as mesmas condições de contorno mas representando os gráficos de $\ln R$ e ϕ respectivamente. No caso de 3.4a observamos uma tendência mais lenta porém bem definida em direção a fase inflacionária. Quanto a ϕ em 3.4b, a curva tem um comportamento linear em um trecho, atinge um máximo e depois decresce mudando sua inclinação, rumo ao limite assintótico, no intervalo dado aproximadamente por $-0,5 < \dot{\phi} < -0,3$. No entanto seria necessário prosseguir com o processo de computação numérica para intervalos maiores para nos certificarmos do comportamento final de ϕ . Nesses gráficos aumentamos consideravelmente os valores iniciais de R , \dot{R} e \ddot{R} . Apesar de termos escolhido $k = +1$, esses aumentos foram responsáveis por uma tendência mais lenta ao regime inflacionário de R . Já nas figuras 3.5a observamos uma tendência mais rápida de R ao regime inflacionário do que aquela observada em 3.4a. No entanto diminuímos os valores iniciais de \dot{R} e \ddot{R} e aumentamos abruptamente o valor inicial de R para 200. Concluimos que nessas duas figuras (3.4a e 3.5a) onde $k=+1$, os valores iniciais de \dot{R} e \ddot{R} desempenharam um papel importante, ou seja, menores valores de \dot{R} e \ddot{R} , embora R muito grande, implicou numa passagem mais rápida para o regime inflacionário. No caso das figuras 3.6a, 3.6b, 3.7a, 3.7b, 3.8a, 3.8b, 3.9a, 3.9b, 3.10a e 3.10b; onde \dot{R} e \ddot{R} iniciais são 0,01, observamos uma tendência de R ao regime inflacionário

e de $\dot{\phi}$ ao limite assintótico de $-0,51$ muito precocemente. Nessas figuras temos mantido $k = +1$ e variado ϕ , $\dot{\phi}$ e R . Em outras figuras como 3.12a, 3.12b, 3.13a, 3.13b, 3.14a, 3.14b, 3.15a, 3.15b, 3.16a e 3.16b; o crescimento das condições de contorno iniciais de \dot{R} e \ddot{R} (para essas figuras 0,1) é compensado pelo aumento nas condições de contorno iniciais em ϕ , ou $\dot{\phi}$, com aumento ou diminuição em R . É marcante a tendência assintótica de $\dot{\phi}$ para $-0,51$.

Comentemos ligeiramente as figuras em que $V(\phi) \neq 0$.

Por exemplo as figuras 3.17a e 3.17b, com condições de contorno iniciais $k = +1$, $M^2 = 1$, $g = 1$, $\phi = 0,1$, $\dot{\phi} = 0,5$, $R = 1$, $\dot{R} = 0,1$ e $\ddot{R} = 0,01$, notamos $\dot{\phi}$ tender ao limite assintótico $-0,51$ e R a fase inflacionária. O mesmo ocorre nas figuras 3.18a e 3.18b, com $k = 0$, $M^2 = 1$; $g = -1$. Situação semelhante ocorre nas figuras 3.19a; 3.19b; 3.20a; 3.20b; onde M^2 e g passam a assumir valores mais significativos. Um fato interessante acontece nas figuras 3.22a e 3.22b. Apesar de $M^2 = 100$, $g = 100$ o regime inflacionário é atingido rapidamente e $\dot{\phi}$ tende também rapidamente ao limite assintótico $-0,51$. Nessas figuras os valores iniciais de R , \dot{R} e \ddot{R} são respectivamente 1; 0,01 e 0,01. As figuras 3.23a e 3.23b são outros exemplos onde o regime inflacionário é atingido rapidamente.

Devido a dificuldades operacionais não estendemos o intervalo Δt nos gráficos, no entanto observamos analiticamente a tendência assintótica de $\dot{\phi}$ e R , caracterizando um processo de expansão Inflacionária do Universo Primordial, com o dýlaton proporcional ao tempo como era de se esperar. Os resultados se mostram independentes de uma auto-interação para o dýlaton, uma vez que a fase inflacionária e a medição do tempo pelo dýlaton é obtida para $\Delta t \ll \sqrt{\alpha'}$. Concluimos assim que as correções radioativas das equações de Einstein governam as transições de fase no modelo em que trabalhamos.

Alcançada a região assintótica onde ϕ é proporcional ao tempo e R varia exponencialmente não é difícil verificar que a constante de Hubble, definida por

$$R = R_0 e^{\chi t} \quad (3.2.16)$$

e a relação entre o tempo e o dýlaton

$$\dot{\phi} = \xi = \dot{\phi}(t = 0) \quad (3.2.17)$$

são unicamente determinadas em termos da constante da corda. Realmente, as equações (3.2.13) e (3.2.14), por exemplo, implicam (3.2.17) desde que (3.2.16) seja usada na região assintótica ($t \gg \frac{1}{\chi}$). As constantes χ e ξ são soluções das equações algébricas

$$\alpha' \chi^2 + 2\alpha' \xi \chi - 1 = 0 \quad (3.2.18)$$

$$\xi^2 - 3\chi\xi(1 - \alpha\chi^2) + \frac{2}{3}\chi^2 = 0$$

$$\text{com } \chi = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{\alpha}} \quad (3.2.18.a)$$

Em princípio é possível obtermos $\chi < 0$, no entanto esta solução é incompatível com as aproximações feitas (de fato, $\chi < 0$ descreveria um universo contraindo-se). Na verdade o nosso modelo supersimplificado (equações de Friedan)

$$R_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{2} R_{\mu abcd} R_{\nu}{}^{abcd} = 0 \quad (3.2.19)$$

tem como uma das soluções para o Ansatz de Robertson-Walker $R = R_0 e^{\chi t}$, com

$$\chi = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \quad (3.2.10)$$

e

$$\xi = \dot{\phi}(t=0)$$

no limite $\xi = 0$ em (3.2.18.a)

A solução compatível com as aproximações utilizadas é dado por $\chi = -\xi + \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{\alpha'}}$.

Podemos ainda, partindo de (3.2.18), escrever uma equação algébrica para ξ , a saber:

$$12\alpha'\xi^4 + 2\xi^2 - \frac{3}{2\alpha'} + 3(1 - 4\alpha'\xi^2)\xi\sqrt{\xi^2 + \frac{1}{\alpha'}} = 0$$

Definindo $\tilde{\xi}$ por $\tilde{\xi} = \frac{\xi}{\alpha'}$ teremos uma equação em $\tilde{\xi}$ independente de α' :

$$12\bar{\xi}^4 + 2\bar{\xi}^2 - \frac{3}{2} + 3(1 - 4\bar{\xi}^2)\bar{\xi}\sqrt{\bar{\xi}^2 + 1} = 0$$

Para uma corda com tensão nula ($\alpha' \rightarrow \infty$), $\xi \rightarrow 0$

Então de (3.2.18) teremos

$$\chi^2 + \frac{2\xi}{\alpha'}\chi - \frac{1}{\alpha'} = 0$$

$$\xi^2 - 3\chi\xi(1 - \alpha'\chi^2) + \frac{2}{3}\chi^2 = 0$$

Logo no limite de tensão nula $\chi \rightarrow 0$.

Concluimos que a solução com o crescimento exponencial sempre aparece como resultado da integração numérica de (3.2.10) e (3.2.11) com o Ansatz de Robertson-Walker, para $k = 1$. Os casos $k = 0, -1$ merecem um estudo mais aprofundado.

Não é claro se há soluções decrescentes. Tais soluções não são incompatíveis com o modelo simplificado (3.2.19), mas por outro lado não as obtivemos na integração numérica.

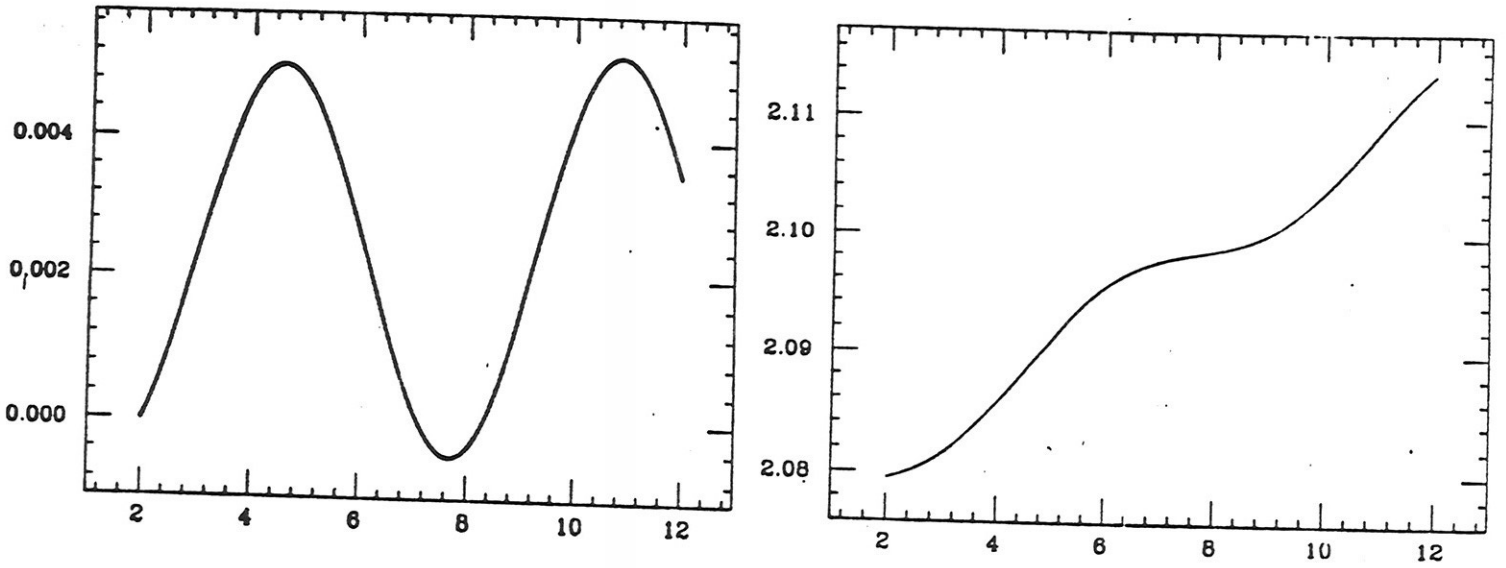


Figura 3.1 : a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 0, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 1, \dot{R} = 0,001, \ddot{R} = 0,001$

b) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 0, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 8, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$

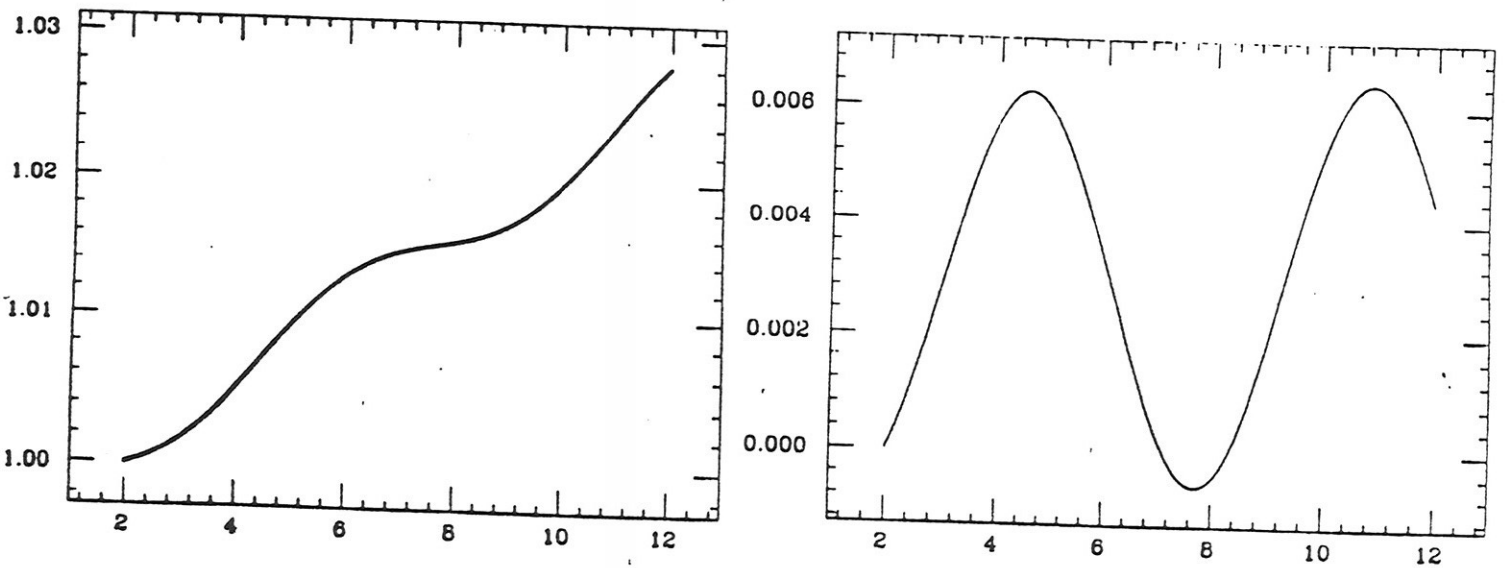


Figura 3.2 : a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 0, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 1, \dot{R} = 0,001, \ddot{R} = 0,001$

b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 0, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 8, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$

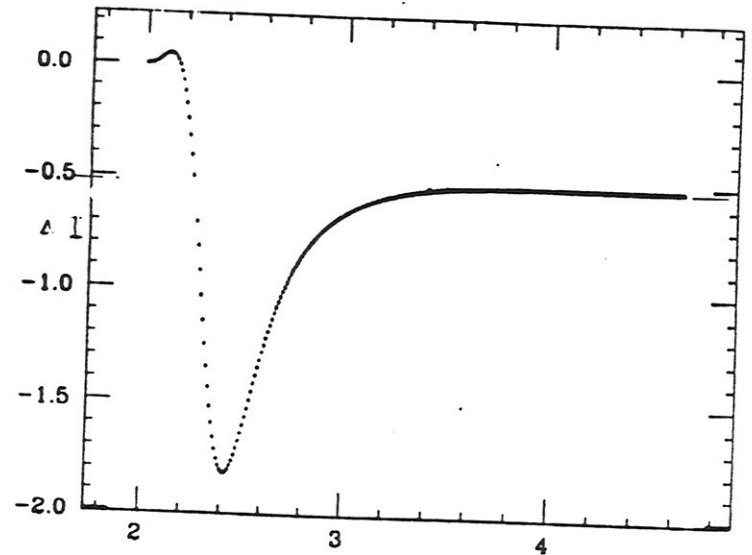
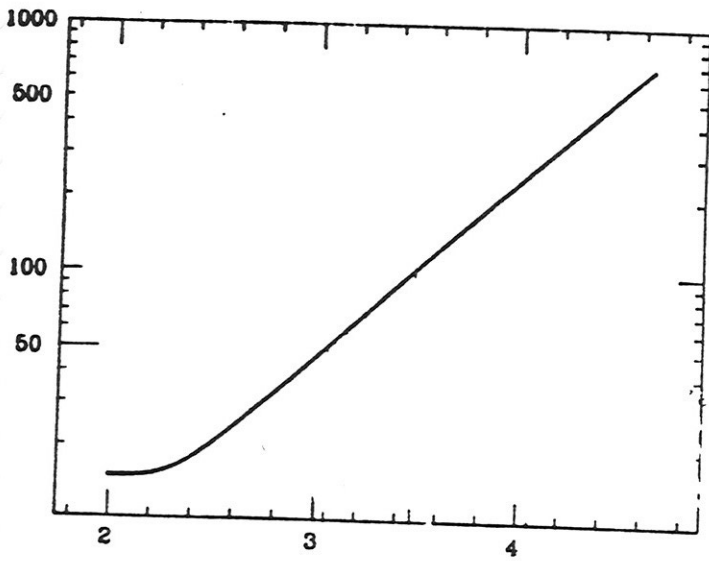


Figura 3.3 : a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 15, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$

b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 15, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$

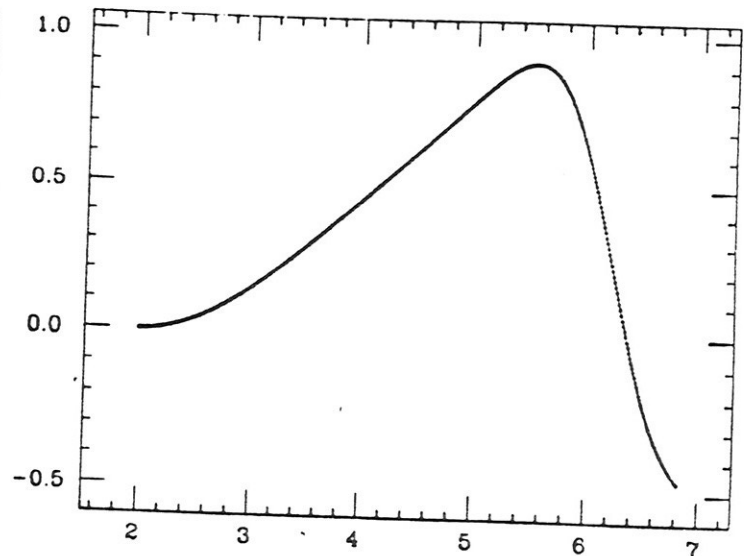
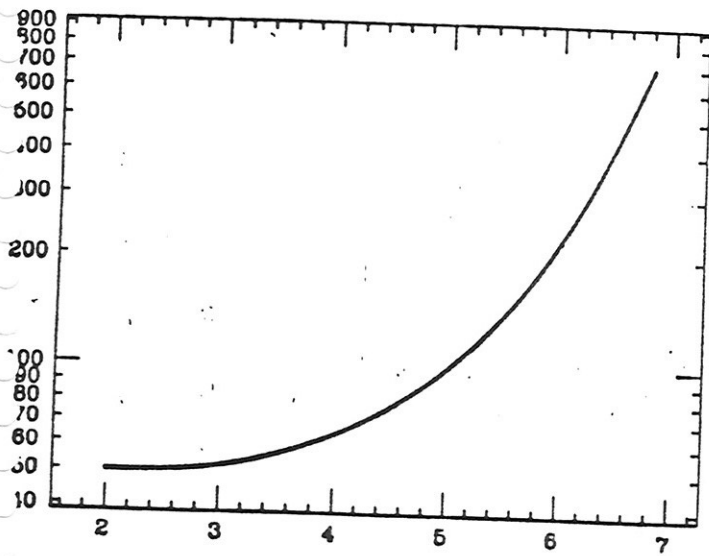


Figura 3.4 : a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 50, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$

b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 50, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$

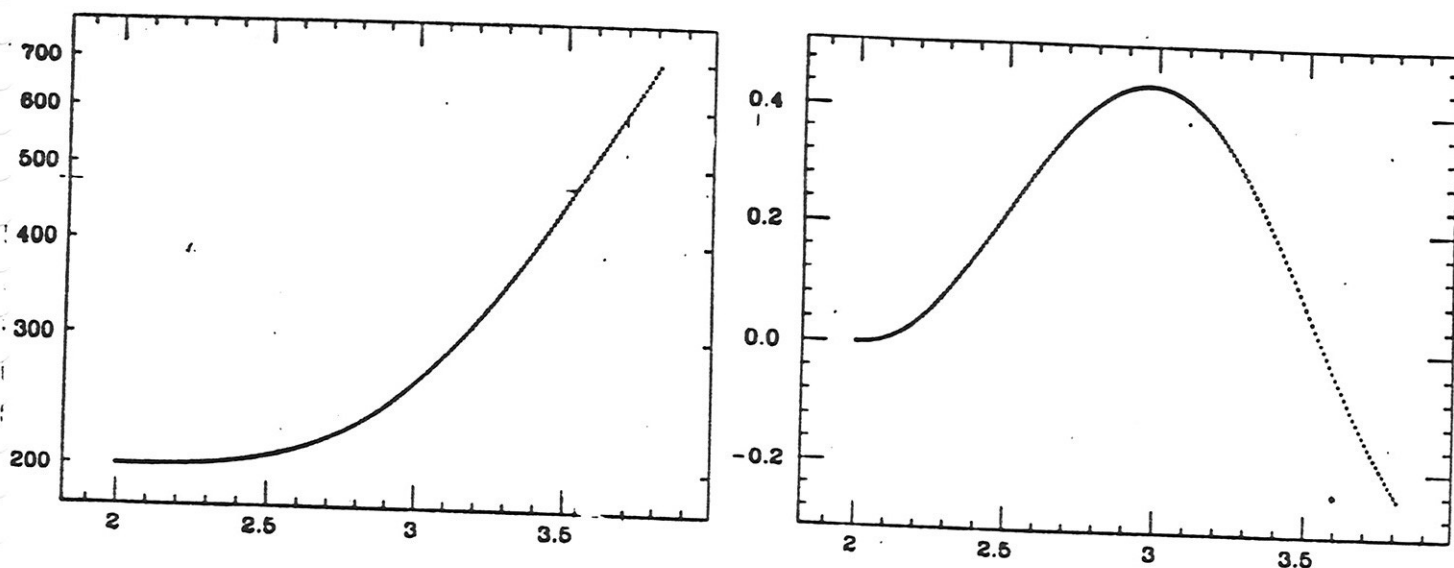


Figura 3.5 : a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 200, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$

b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 200, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$

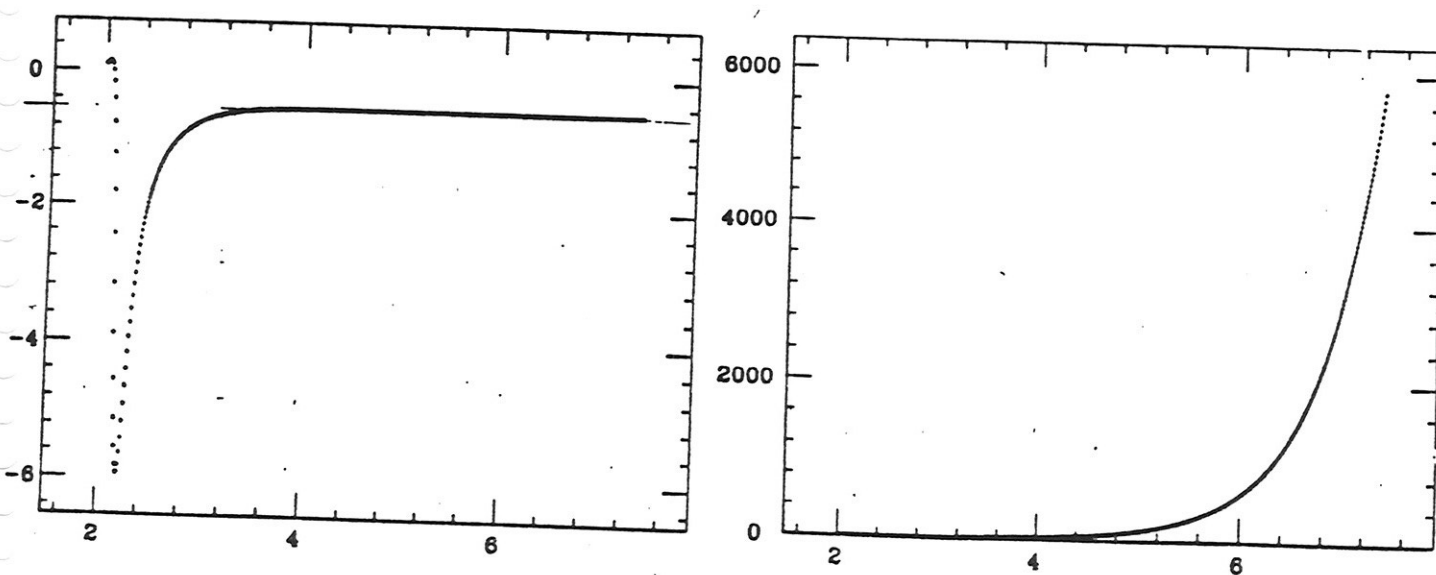


Figura 3.6 : a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 1, \dot{\phi} = 0,1, R = 1, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$

b) Curva de $R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 1, \dot{\phi} = 0,1, R = 1, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$

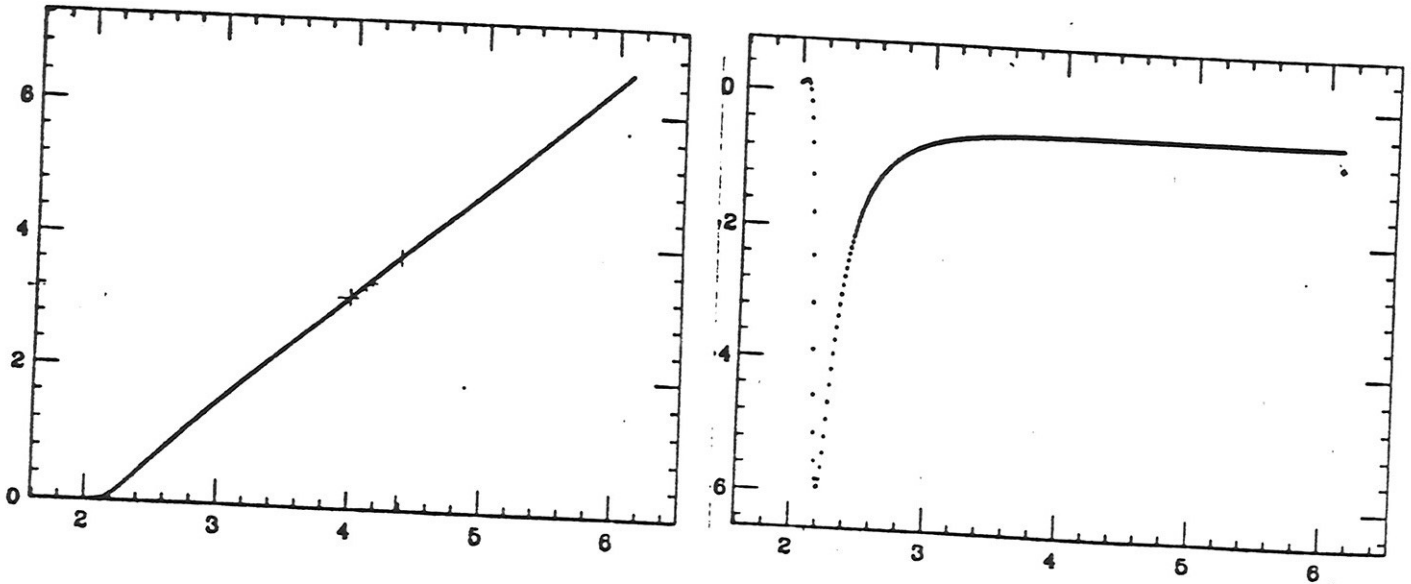


Figura 3.7 : a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 2, \dot{\phi} = 0,1, R = 1, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$
 b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 2, \dot{\phi} = 0,1, R = 1, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$

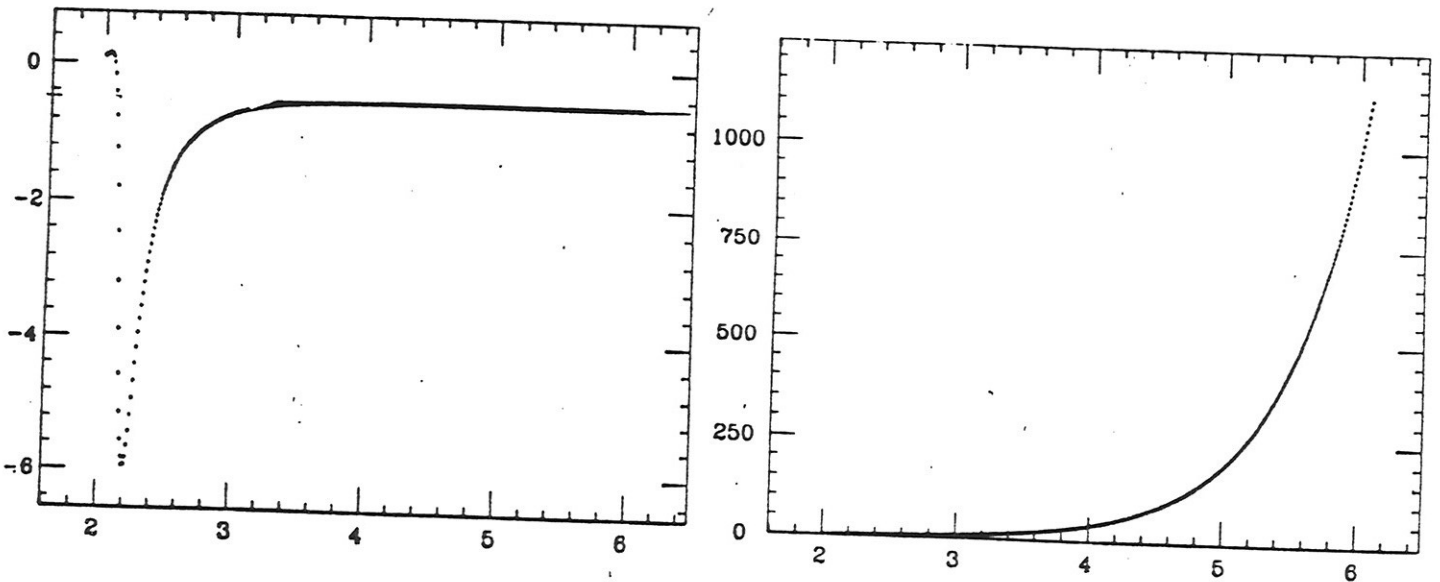


Figura 3.8 : a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 2, \dot{\phi} = 0,1, R = 1, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$
 b) Curva de $\dot{R} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 2, \dot{\phi} = 0,1, R = 1, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$

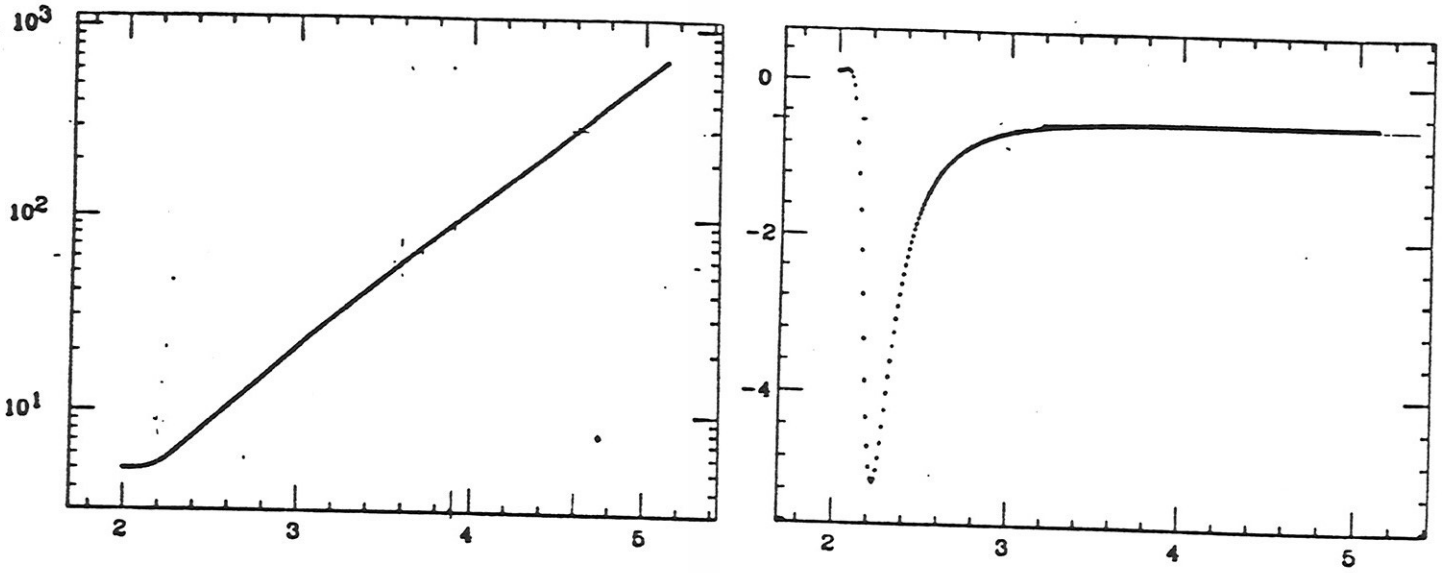


Figura 3.9 : a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 5, \dot{\phi} = 0,1, R = 5, \dot{R} = 0,01, \bar{R} = 0,01$

b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 5, \dot{\phi} = 0,1, R = 5, \dot{R} = 0,01, \bar{R} = 0,01$

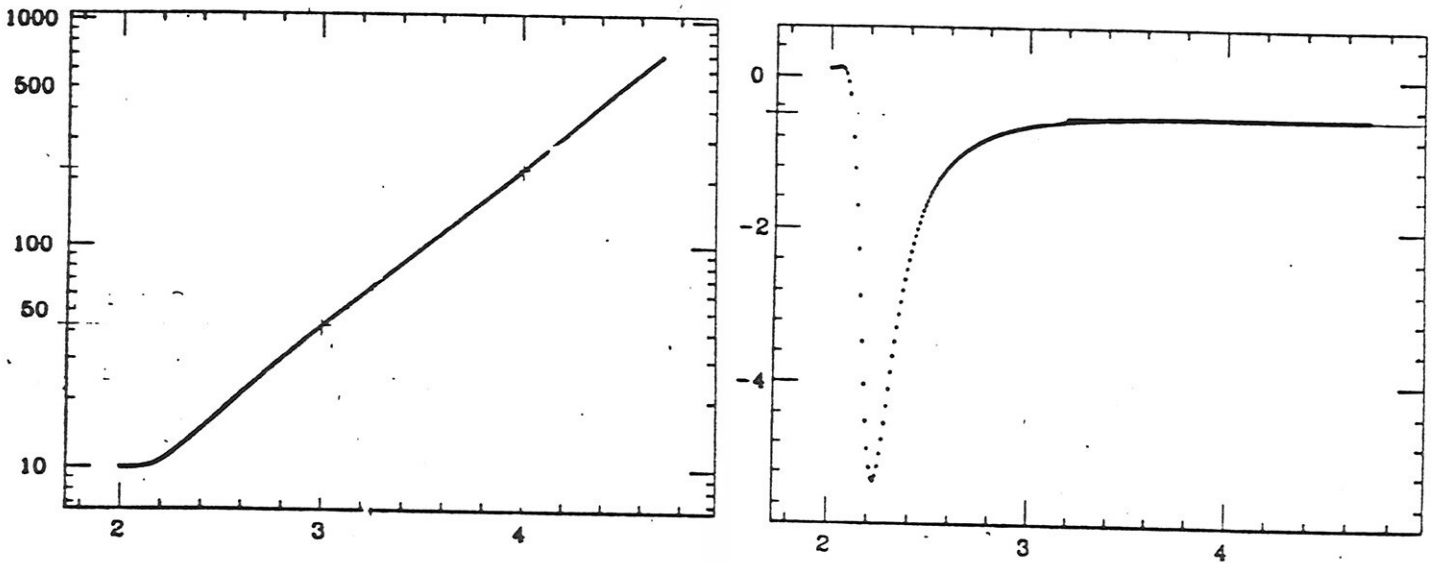


Figura 3.10 : a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 10, \dot{\phi} = 0,1, R = 10, \dot{R} = 0,01, \bar{R} = 0,01$

b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 10, \dot{\phi} = 0,1, R = 10, \dot{R} = 0,01, \bar{R} = 0,01$

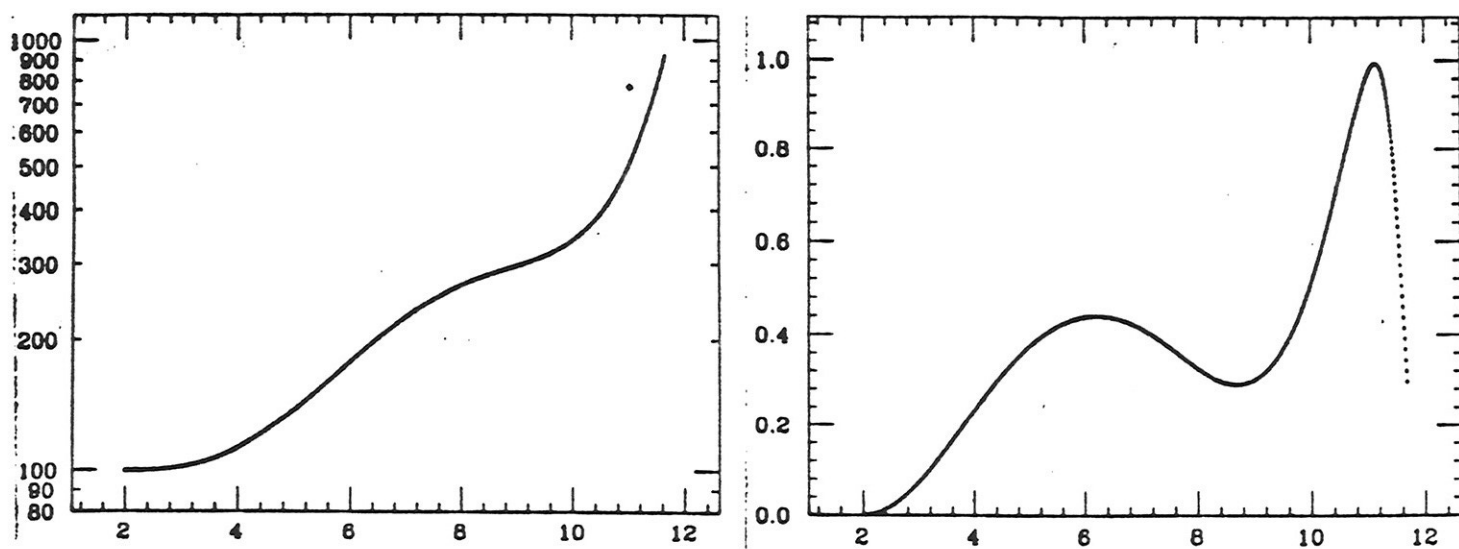


Figura 3.11 : a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 10, \dot{\phi} = 0, R = 100, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$
 b) Curva de $\phi \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 10, \dot{\phi} = 0, R = 100, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$

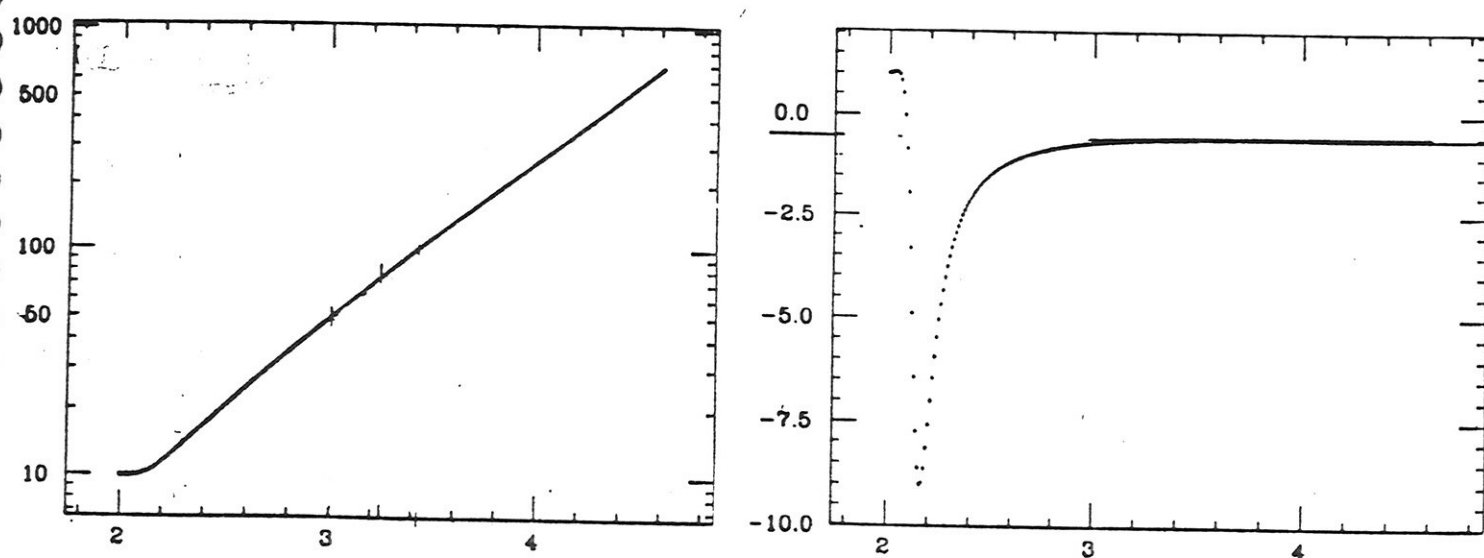


Figura 3.12 : a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 50, \dot{\phi} = 1, R = 10, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$
 b) Curva de $\phi \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 50, \dot{\phi} = 1, R = 10, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$

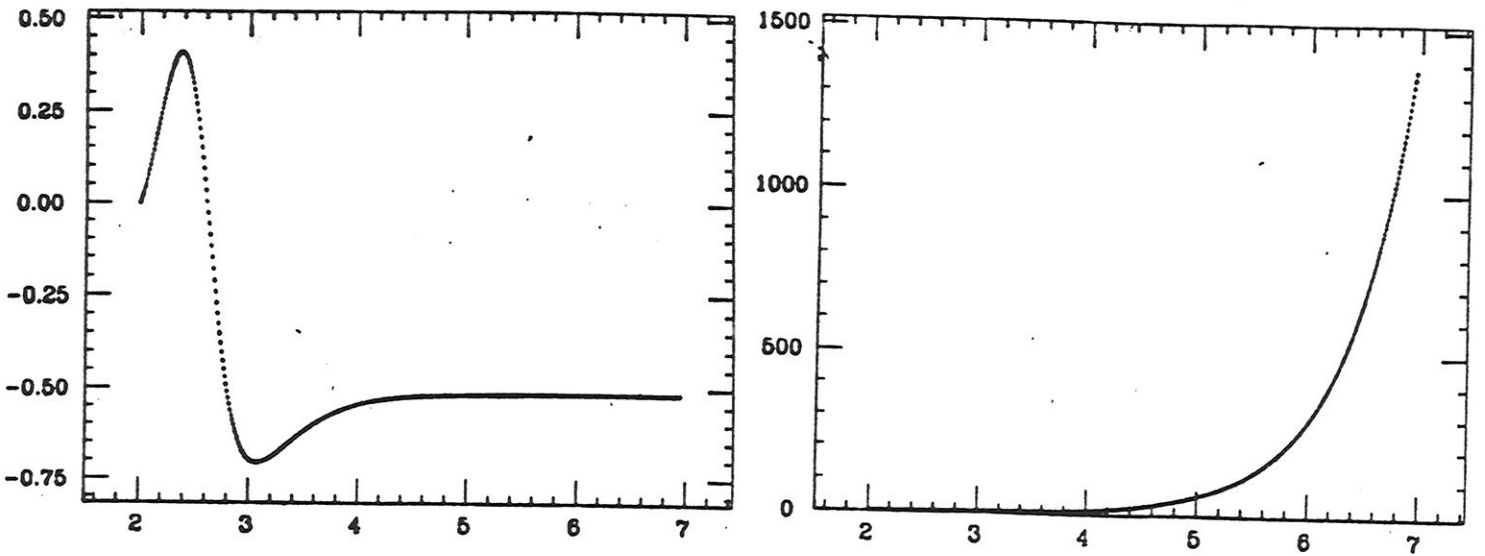


Figura 3.13 : a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = -10, \dot{\phi} = 0, R = 1, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$
 b) Curva de $R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = -10, \dot{\phi} = 0, R = 1, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$

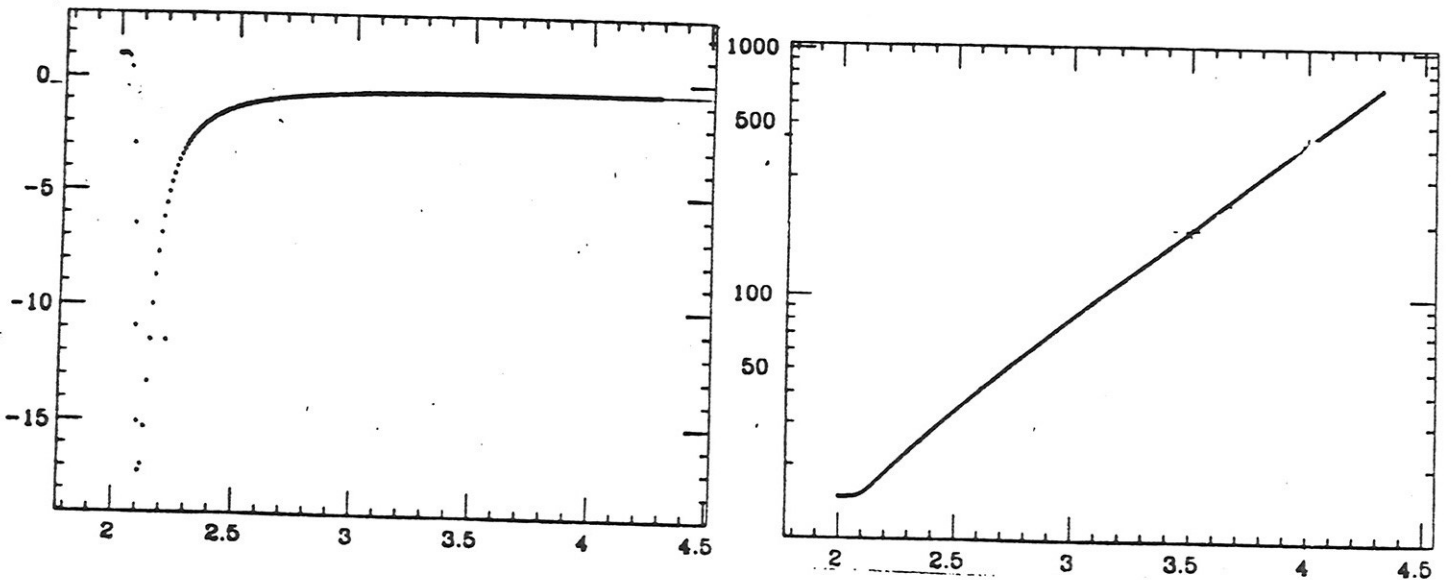


Figura 3.14 : a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 100, \dot{\phi} = 1, R = 15, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$
 b) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 100, \dot{\phi} = 1, R = 15, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,1$

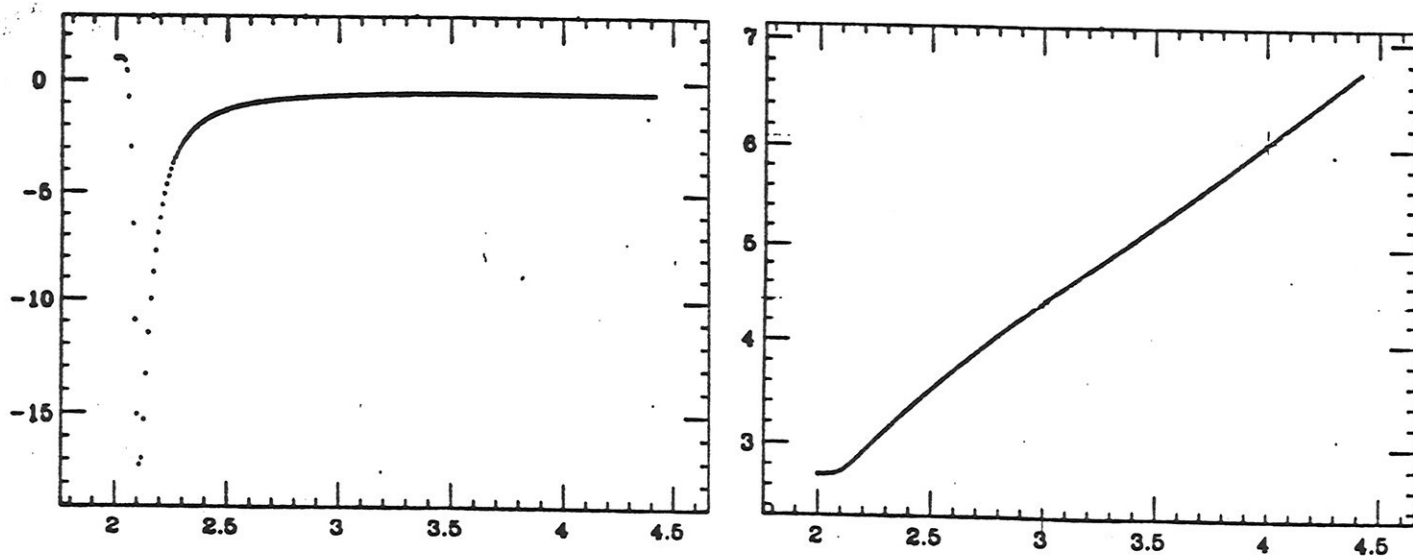


Figura 3.15 : a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 100, \dot{\phi} = 1, R = 15, \dot{R} = 0,1, \tilde{R} = 0,1$

b) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 100, \dot{\phi} = 1, R = 15, \dot{R} = 0,1, \tilde{R} = 0,1$

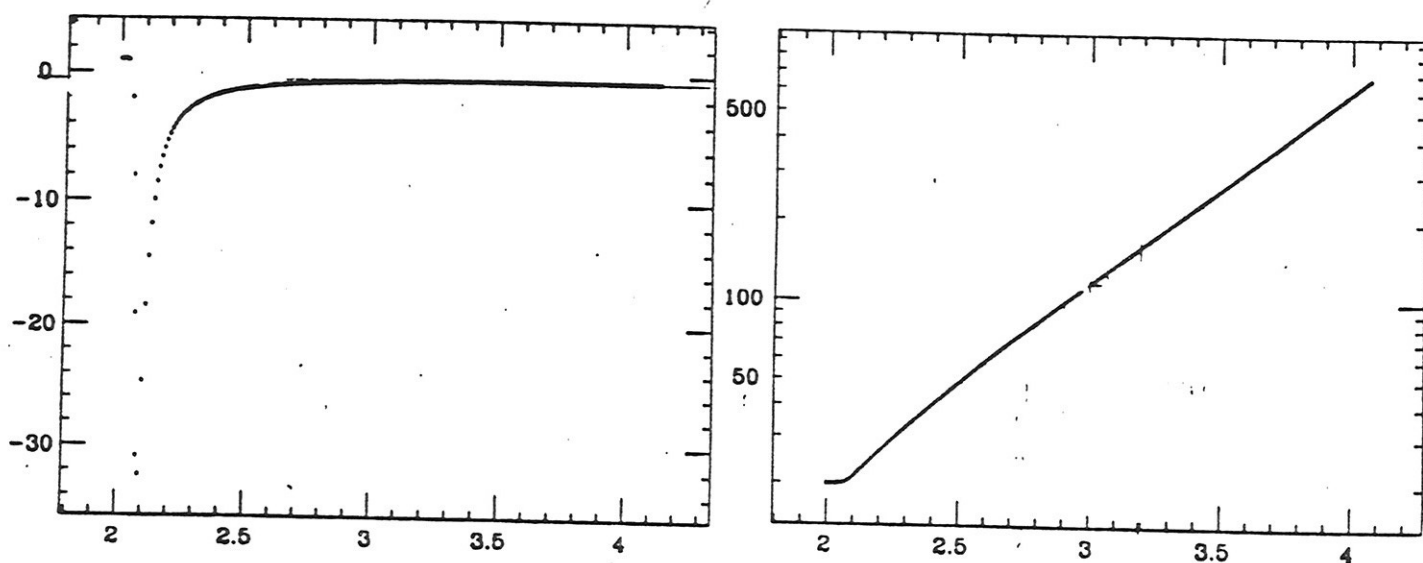


Figura 3.16 : a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 100, \dot{\phi} = 1, R = 20, \dot{R} = 0,1, \tilde{R} = 0,1$

b) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 0, \phi = 100, \dot{\phi} = 1, R = 20, \dot{R} = 0,1, \tilde{R} = 0,1$

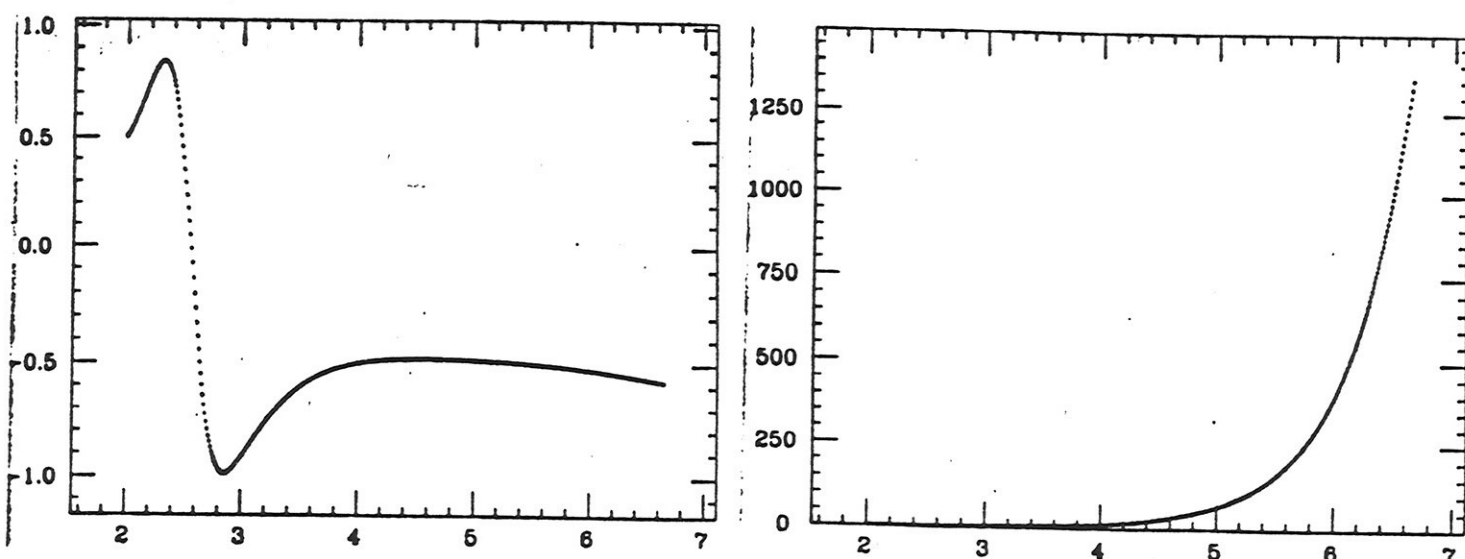


Figura 3.17 : a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 1, g = 1, \phi = 0,1, \dot{\phi} = 0,5, R = 1, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,01$

b) Curva de $R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 1, g = 1, \phi = 0,1, \dot{\phi} = 0,5, R = 1, \dot{R} = 0,1, \ddot{R} = 0,01$

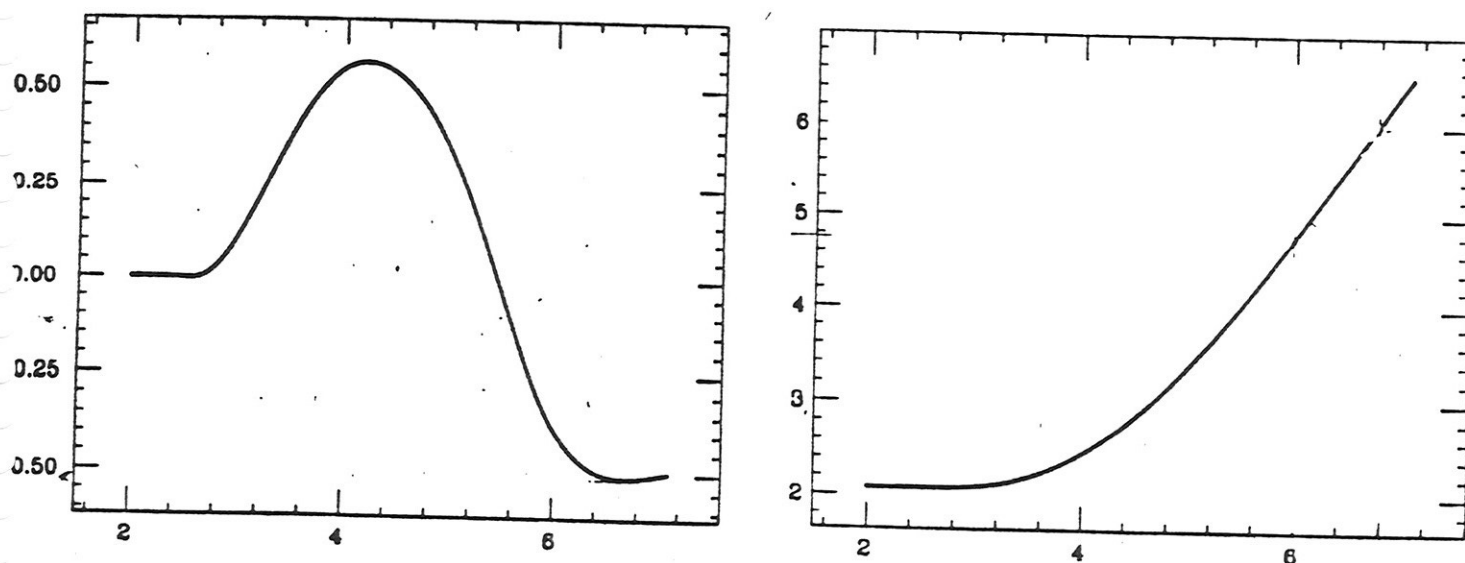


Figura 3.18 : a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 0, M^2 = 1, g = -1, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 8, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$

b) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 0, M^2 = 1, g = -1, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 8, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$

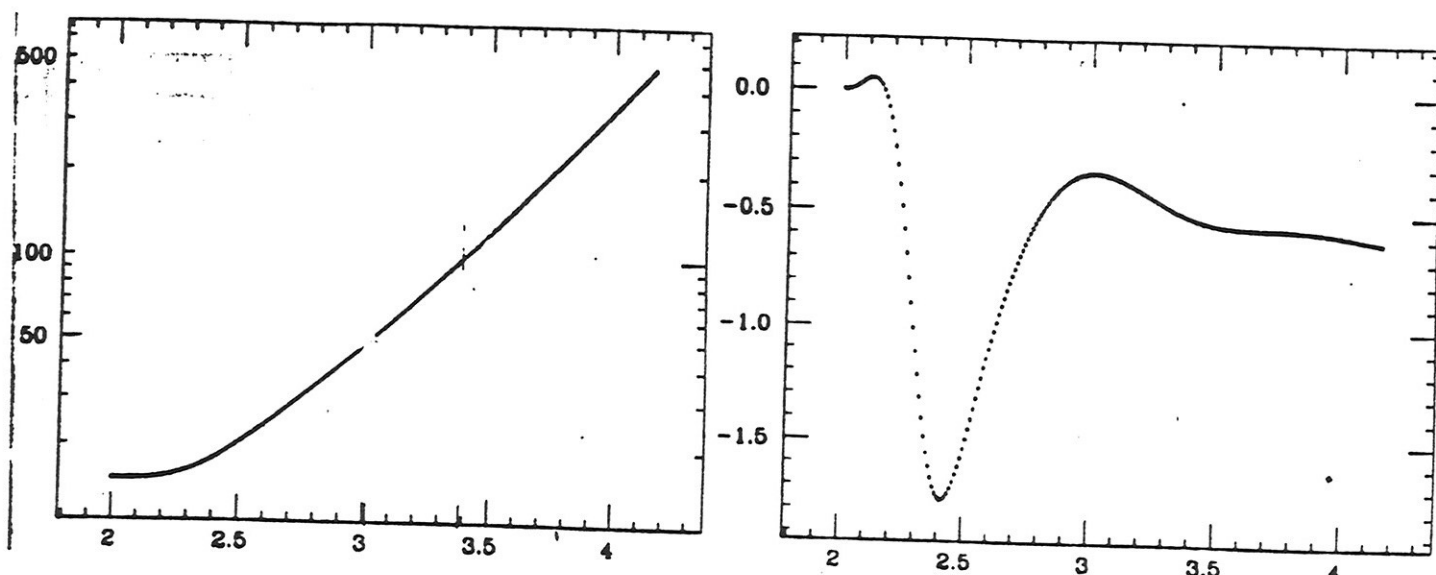


Figura 3.19 : a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 5, g = 5, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 15, \dot{R} = 0,01, \bar{R} = 0,01$

b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 5, g = 5, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 15, \dot{R} = 0,01, \bar{R} = 0,01$

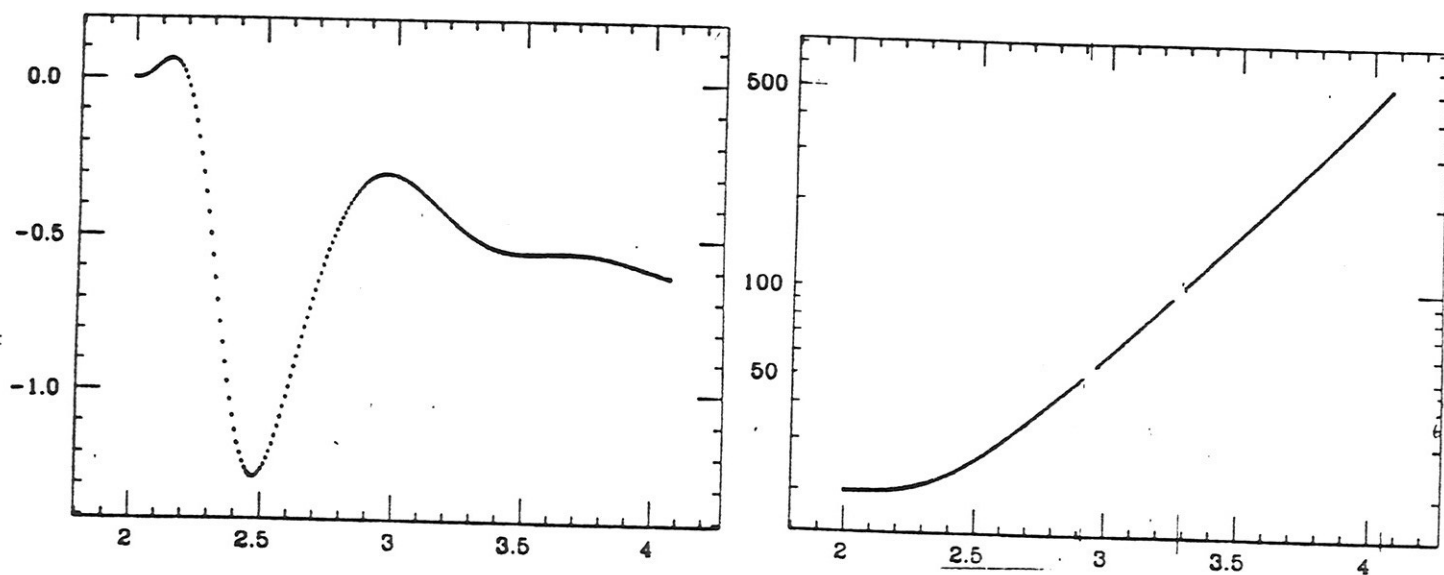


Figura 3.20 : a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 10, g = 10, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 20, \dot{R} = 0,01, \bar{R} = 0,01$

b) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 10, g = 10, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 20, \dot{R} = 0,01, \bar{R} = 0,01$

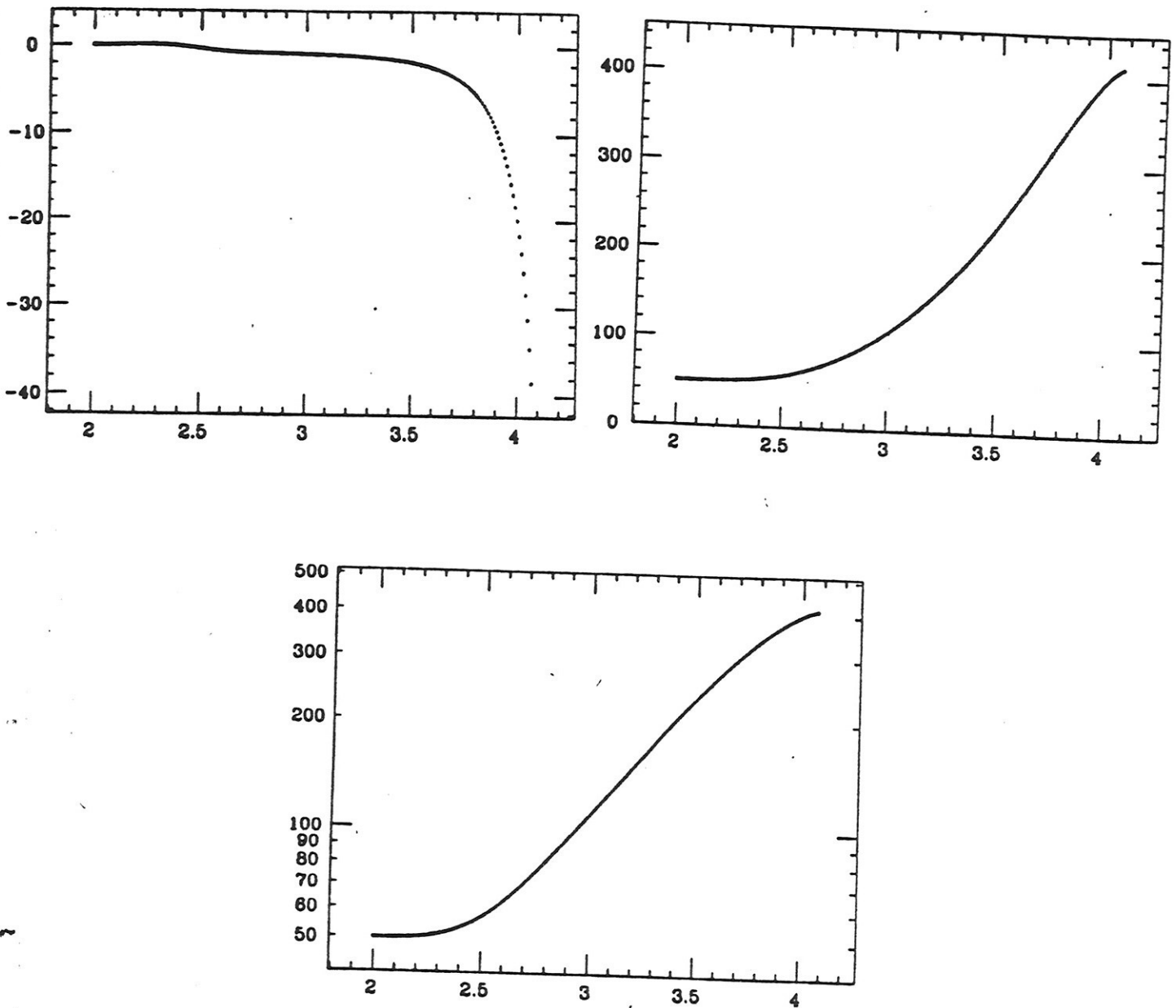


Figura 3.21 : a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = -10, g = -10, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 50, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$

b) Curva de $R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = -10, g = -10, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 50, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$

c) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = -10, g = -10, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 50, \dot{R} = 0,01, \ddot{R} = 0,01$

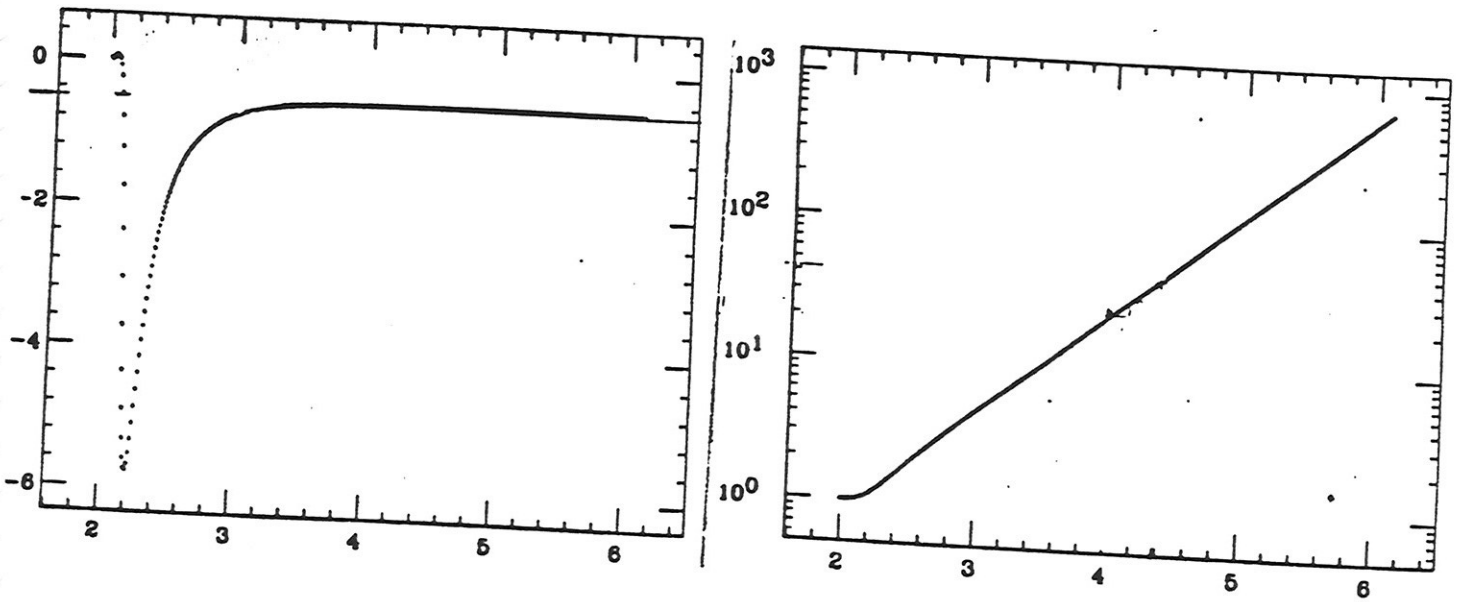


Figura 3.22 : a) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 100, g = 100, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 1, \dot{R} = 0,01, \bar{R} = 0,01$
 b) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 100, g = 100, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 1, \dot{R} = 0,01, \bar{R} = 0,01$

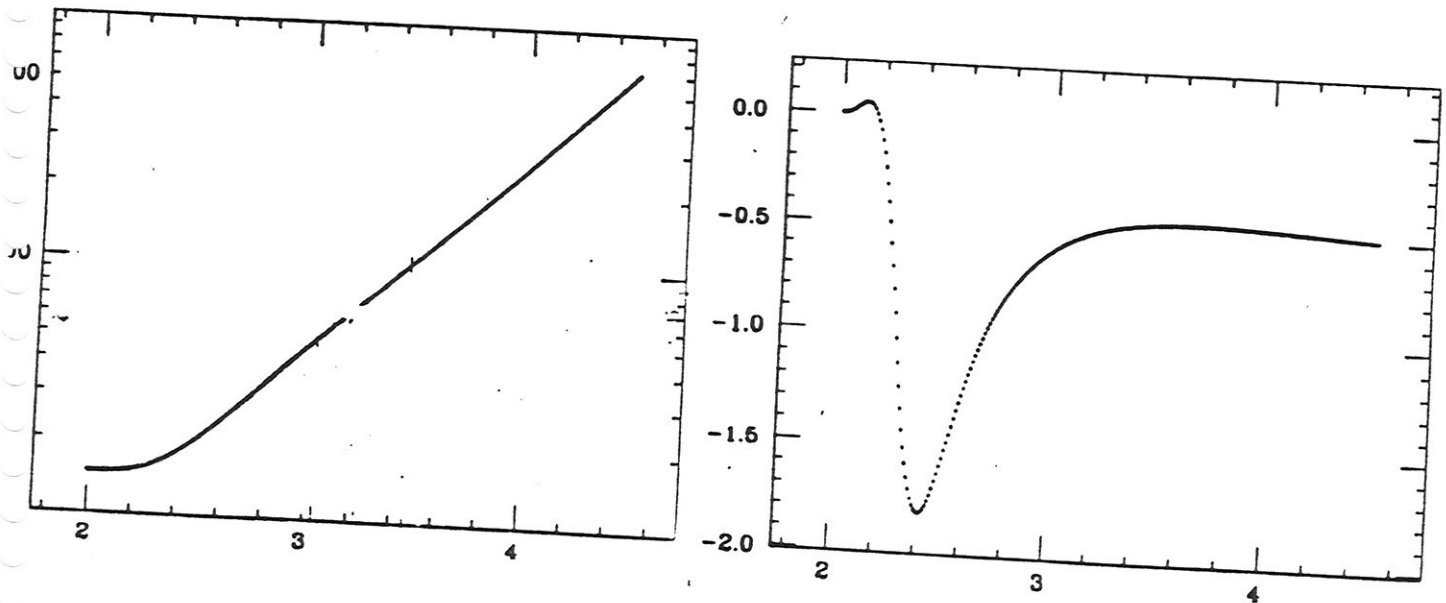


Figura 3.23 : a) Curva de $\ln R \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 1, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 15, \dot{R} = 0,01, \bar{R} = 0,01$
 b) Curva de $\dot{\phi} \times t$ para $\alpha = 1, k = 1, M^2 = 0, g = 1, \phi = 0, \dot{\phi} = 0, R = 15, \dot{R} = 0,01, \bar{R} = 0,01$

Capítulo 4

Conclusões

Progressos em teorias de cordas foram muito grandes. Consideradas de início como teorias efetivas de interações fortes – interpretação ainda válida e por encontrar métodos mais eficientes de cálculo nos dias de hoje, as teorias de cordas foram também usadas para se obter a unificação de todas as interações, incluindo a gravitação. Neste sentido, estamos estudando uma teoria quântica da gravitação.

Apesar dos progressos dentro da teoria, uma ligação direta com a experiência, através de alguma previsão crucial ainda está ausente. Fatores gerais tais como a quase unicidade pregada de tal teoria quântica da gravitação constitui um apelo muito forte, mas não é suficiente para definir univocamente a teoria, ou para que possamos prescindir da via experimental. Além de tudo, o fenômeno compactificação obscurece em grande parte as previsões da teoria, e não permite um cálculo de confiança para os acoplamentos de Yukawa.

Tal quadro seria bastante pessimista, não fosse a possibilidade de se estudar fenômenos de larga escala, já que efeitos de cordas (“stringy effects”) são importantes na escala de Planck, permitindo portanto um estudo do universo primordial em tal escala de temperatura.

Em tal escala, as previsões usuais da teoria de Einstein estarão necessariamente incompletas. E se as cordas forem a resposta para uma teoria quântica de gravitação devemos estudá-las nesta escala de energia para compreender o universo primordial.

Tseytlin e Vafa [19, 20] consideraram para isto a ação efetiva contendo a gravitação e o dilatón. A primeira pergunta a ser respondida refere-se ao fato

das cordas conterem um número infinito de outros estados massivos que poderiam contribuir para a ação efetiva; de fato, foi argumentado que uma das principais simetrias a serem mantidas é a simetria dual (correspondente à inversão do raio do universo), que é mantida para campos independentes da posição. Isto é verdadeiro para a maioria das soluções encontradas neste trabalho [19, 20], para campos dependentes apenas do tempo.

Além disto, a singularidade inicial das soluções das equações de Einstein também é um ponto difícil de ser entendido do ponto de vista físico, e que poderá ser reinterpretado à luz do presente aspecto da teoria.

Neste trabalho apresentamos vários tipos de soluções das equações modificadas. Em primeiro lugar consideramos a ausência do dÍlaton (e de sua equação do movimento) simplificando o problema para o estudo das soluções das equações:

$$R_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{2} R_{\mu\alpha\beta\gamma} R_{\nu}{}^{\alpha\beta\gamma} = 0$$

para a qual achamos soluções tanto inflacionárias, com crescimento exponencial do raio do universo, como de um universo em processo de encolhimento, isto é

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\rho_0^{4k_1}}{\rho^{4k_1}} e^{\pm 2t/\sqrt{\alpha'}} [d\rho^2 + d\Omega^2]$$

onde $k_1 = 0, 1$

O crescimento (ou decrescimento) exponencial do raio do universo parece ser uma característica constante em todas as soluções incluindo mesmo o caso em que o dÍlaton é tratado de modo não trivial.

Outrossim, obtivemos tais tipos de solução também da forma

$$ds^2 = dt^2 - R^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + d^2\Omega \right]$$

$$\text{com } \begin{cases} R = e^{\pm t/\sqrt{\alpha'}}, & k = 0 \\ R = \sinh \frac{t}{\sqrt{\alpha'}}, & k = -1/\alpha \\ R = \cosh \frac{t}{\sqrt{\alpha'}}, & k = +1/\alpha \end{cases}$$

Posteriormente um universo do tipo encontrado nas equações de Einstein com termo cosmológico foi encontrado, isto é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{\alpha'}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{\alpha'}} - d\Omega^2$$

de modo que podemos interpretar em tal caso a constante $1/\alpha'$ como um termo cosmológico. Em tal caso, temos um universo do tipo de Sitter, que pode ser interpretado também como uma temperatura de Hagedorn, e tal solução pode ser importante num tipo de universo primordial com grande simetria, mas com "forças" que impedem sua expansão inflacionária. No caso de considerarmos a presença de um termo cosmológico, tal como aquele gerado pelas próprias equações de invariância conforme para dimensão não crítica, a solução acima pode ser muito importante (carácter não perturbativo das soluções).

Contudo, preferimos, ao invés de considerar a solução na dimensão não crítica, voltar à dimensão crítica, e estudar a expansão geral do universo em 26 dimensões.

Finalmente, estudamos a solução numérica do problema completo, isto é, com a presença do dýlaton.

Introduzimos uma auto-interação efetiva para o dýlaton

$$V(\phi) = \frac{M^2}{2} \phi^2 + \frac{g}{4} \phi^4$$

No entanto os resultados não foram muito sensíveis às constantes M^2 e g . Em geral houve uma região transiente para pequenos intervalos de tempo onde as soluções dependiam das condições iniciais. No entanto, as soluções tendiam rapidamente para a região assintótica onde o raio do Universo crescia exponencialmente com o tempo e o dýlaton passava a ser linear com o tempo. Isto em geral ocorreu para o caso em que $k = 1$. Para o caso $k = 0$ a região transiente persistiu por um intervalo de tempo maior. Para $k = -1$ os resultados foram ruins.

Alcançada a região assintótica, vimos que constante de Hubble, definida por $R = R_0 e^{\chi t}$ e a relação entre o dýlaton e o tempo $\dot{\phi} = \xi = \dot{\phi}(t = 0)$ é unicamente determinada em termos da tensão da corda.

Na região $t \gg \frac{1}{\chi}$ as constantes χ e ξ são soluções das equações algébricas

$$\begin{aligned} \alpha\chi^2 + 2\xi\alpha\chi - 1 &= 0 \\ \xi^2 - 3\chi\xi(1 - \alpha\chi^2) + \frac{3}{2}\chi^2 &= 0 \end{aligned}$$

com $\chi = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{\alpha'}}$ sendo $\chi = -\xi + \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{\alpha'}}$ a solução compatível com as aproximações utilizadas.

A equação algébrica para ξ é dada por

$$12\alpha'\xi^2 + 2\xi^2 - \frac{3}{2\alpha'} + 3(1 - 4\alpha'\xi^2)\xi\sqrt{\xi^2 + \frac{1}{\alpha'}} = 0$$

Para $\xi = \frac{\tilde{\xi}}{\alpha'}$ obtemos uma equação independente de α' dada por:

$$12\tilde{\xi}^4 + 2\tilde{\xi}^2 - \frac{3}{2} + 3(1 - 4\tilde{\xi}^2)\tilde{\xi}\sqrt{\tilde{\xi}^2 + 1} = 0$$

Para a tensão nula ($\alpha' \rightarrow \infty$) $\xi \rightarrow 0$.

Verificamos ainda que as equações de movimento supersimplificadas, equações para o gráviton, a saber:

$$R_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{2}R_{\mu abc}R_{\nu}{}^{abc} = 0$$

têm entre suas soluções $R = e^{\chi t}$ com $\chi = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$.

Realmente é interessante notar que para o congelamento do dÍlton (onde $\dot{\phi} = \xi = 0$) a solução algébrica $\chi = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{\alpha'}}$ recai em $\chi = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$.

De fato, para grandes distâncias o comportamento é governado pela equação acima. O duplo sinal evidencia que temos não unicamente o caso de um universo inflacionário, mas também uma compactificação dimensional. Vemos assim toda a riqueza de propriedades procuradas e desejadas em teorias de cordas contida nesse modelo supersimplificado.

Em geral os resultados são independentes dos parâmetros M^2 e g , a menos que eles sejam maiores que 100, o que evidencia que os resultados são muito estáveis. Observamos ainda que para congelar o dÍlton é necessário que M^2 e g sejam da ordem de 200. Contudo, para $k = 1$ os resultados são bastantes regulares. (Veja por exemplo figuras 3.3a, 3.3b, 3.6a, 3.6b, 3.7a, 3.7b, 3.8a, 3.8b, 3.9a, 3.9b, 3.12a, 3.12b, 3.13a, 3.13b, 3.14a, 3.14b, 3.15a, 3.15b, 3.16a, 3.16b, 3.19a, 3.19a, 3.20a, 3.20b, 3.23a, 3.23b). Eles fornecem o limite assintótico para $\xi \sim -0,51$ e $\chi \sim 1,5$. No entanto para $k = 0$ os resultados são instáveis em geral, com exceção da figura 3.18a e 3.18b (Veja por exemplo figuras 3.1a, 3.1b, 3.2a, 3.2b)

Em geral verificamos que o comportamento assintótico independe de uma auto-interação para o dilaton, e tem um carácter inflacionário na região de Planck (Veja por exemplo figuras 3.3a, 3.3b, 3.6b, 3.7a, 3.7b, 3.8a, 3.8b, 3.9a, 3.9b, 3.12a, 3.12b, 3.13a, 3.13b, 3.14a, 3.14b, 3.15a, 3.15b, 3.16a, 3.16b, 3.17a, 3.17b, 3.18a, 3.18b, 3.19a, 3.19a, 3.20a, 3.20b, 3.22a, 3.22b, 3.23a, 3.23b). Este fato foi enfatizado no terceiro capítulo.

Esses resultados juntamente com outros que vêm surgindo frequentemente nos leva a acreditar que uma Teoria Conforme de Cordas venha a preencher futuramente os “gaps” existentes para uma melhor e mais completa compreensão da Natureza.

Apêndice A

No cálculo das integrais de Dirichlet, $\int dz_1 \dots dz_n$, $\int dz_1^2 \dots dz_n$, na esfera unitária, são usadas as transformações de coordenadas (2.1.8.a) como generalização natural das coordenadas polares esféricas em $(N + 1)$ dimensões, com $\phi_N = 0$ definindo as N transformações para coordenadas esféricas em N dimensões [10]

$$\begin{aligned}\bar{x}^3 &= z_1 = r \cos \phi_1 \\ \bar{x}^2 &= z_2 = r \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_2 \\ \bar{x}^1 &= z_3 = r \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_3 \\ &\vdots \\ \bar{x}^N &= z_N = r \operatorname{sen} \phi_1 \dots \cos \phi_{N-1}\end{aligned}\tag{A.1}$$

sendo \bar{x}_i as coordenadas cartesianas usuais.

As coordenadas polares esféricas serão:

$$\bar{x}^1 = r, \bar{x}^2 = \phi, \bar{x}^3 = \phi_2 \dots, \bar{x}^N = \phi_{N-1}\tag{A.2}$$

Para o espaço-tempo quadridimensional, a métrica de Robertson-Walker é obtida facilmente de (2.1.7). Façamos o cálculo explícito para $N = 4$, em um espaço-tempo pentadimensional. Para isto é necessário que $\phi_4 = 0$.

Logo teremos:

$$\begin{aligned}z_1 &= r \cos \phi_1 \\ z_2 &= r \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_2 \\ z_3 &= r \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_3 \\ z_4 &= r \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3\end{aligned}\tag{A.3}$$

com

$$\begin{aligned}
dz_1 &= dr \cos \phi_1 - r \operatorname{sen} \phi_1 d\phi_1 \\
dz_2 &= dr \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_1 + r(\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 d\phi_2) \\
dz_3 &= dr \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_3 + r(\cos \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_3 d\phi_1 + \\
&\quad + \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 d\phi_2 - \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3 d\phi_3) \\
dz_4 &= dr \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3 + r(\cos \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3 d\phi_1 + \\
&\quad + \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3 d\phi_2 + \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_3 d\phi_3)
\end{aligned} \tag{A.4}$$

(A.3) fornecerá

$$\begin{aligned}
z^2 = \vec{z} \cdot \vec{z} &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = r^2 \{ \cos^2 \phi_1 + \operatorname{sen}^2 \phi_1 \cos^2 \phi_2 + \\
&\quad \operatorname{sen}^2 \phi_1 \operatorname{sen}^2 \phi_2 \cos^2 \phi_3 + \operatorname{sen}^2 \phi_1 \operatorname{sen}^2 \phi_2 \operatorname{sen}^2 \phi_3 \} = r^2
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\text{com } \vec{z} = z_1 \hat{e}_1 + z_2 \hat{e}_2 + z_3 \hat{e}_3 + z_4 \hat{e}_4 \quad \text{e } g_{ij} = \delta_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$$

de forma que (2.1.7) passa a ser

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dz^2 - kz^2 dz^2 + k(\vec{z} \cdot d\vec{z})^2}{1 - kz^2} \right\} \tag{A.6}$$

(A.5) fornecerá

$$1 - kz^2 = 1 - kr^2 \tag{A.7}$$

Temos ainda o seguinte produto escalar:

$$\begin{aligned}
dz^2 &= d\vec{z} \cdot d\vec{z} = dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 + dz_4^2 \\
dz_1^2 &= dr^2 \cos^2 \phi_1 + r^2 \operatorname{sen}^2 \phi_1 d\phi_1^2 - 2rdr d\phi_1 \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_1 \\
dz_2^2 &= dr^2 \operatorname{sen}^2 \phi_1 \cos^2 \phi_2 + r^2 (\cos^2 \phi_1 \cos^2 \phi_2 d\phi_1^2 + \operatorname{sen}^2 \phi_1 \operatorname{sen}^2 \phi_2 d\phi_2^2 - \\
&\quad - 2 \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_2 d\phi_1 d\phi_2) \\
dz_3^2 &= dr^2 \operatorname{sen}^2 \phi_1 \operatorname{sen}^2 \phi_2 \cos^2 \phi_3 + r^2 \{ \cos^2 \phi_1 \operatorname{sen}^2 \phi_2 \cos^2 \phi_3 d\phi_1^2 + \\
&\quad + \operatorname{sen}^2 \phi_1 \cos^2 \phi_2 \cos^2 \phi_3 d\phi_2^2 - \operatorname{sen}^2 \phi_1 \operatorname{sen}^2 \phi_2 \operatorname{sen}^2 \phi_3 d^2 \phi_3 - \\
&\quad - 2 \operatorname{sen}^2 \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3 \cos \phi_3 d\phi_2 d\phi_3 + \\
&\quad + 2 \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_2 \cos^2 \phi_3 d\phi_1 d\phi_2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_1 \operatorname{sen}^2 \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3 \cos \phi_3 d\phi_1 d\phi_3 \} + \\
& + 2rdrd\phi_1 \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_1 \operatorname{sen}^2 \phi_2 \cos^2 \phi_3 + \\
& + 2rdrd\phi_2 \operatorname{sen}^2 \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_2 \cos^2 \phi_3 - \\
& - 2rdrd\phi_3 \operatorname{sen}^2 \phi_1 \operatorname{sen}^2 \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3 \cos \phi_3 \\
dz_4^2 = & dr^2 \operatorname{sen}^2 \phi_1 \operatorname{sen}^2 \phi_2 \operatorname{sen}^2 \phi_3 + r^2 \{ \cos^2 \phi_1 \operatorname{sen}^2 \phi_2 \operatorname{sen}^2 \phi_3 d\phi_1^2 + \\
& + \operatorname{sen}^2 \phi_1 \cos^2 \phi_2 \operatorname{sen}^2 \phi_3 d\phi_2^2 + \operatorname{sen}^2 \phi_1 \operatorname{sen}^2 \phi_2 \cos^2 \phi_3 d\phi_3^2 + \\
& + 2 \operatorname{sen}^2 \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3 d\phi_2 d\phi_3 + \\
& + 2 \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_2 \operatorname{sen}^2 \phi_3 d\phi_1 d\phi_2 + \\
& + 2 \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_1 \operatorname{sen}^2 \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3 \cos \phi_3 d\phi_1 d\phi_3 \} + \\
& + 2rdrd\phi_1 \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_1 \operatorname{sen}^2 \phi_2 \operatorname{sen}^2 \phi_3 + \\
& + 2rdrd\phi_2 \operatorname{sen}^2 \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_2 \operatorname{sen}^2 \phi_3 + \\
& + 2rdrd\phi_3 \operatorname{sen}^2 \phi_1 \operatorname{sen}^2 \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3 \cos \phi_3
\end{aligned}$$

Reunindo esses resultados teremos

$$dz^2 = dr^2 + r^2 \{ d\phi_1^2 + \operatorname{sen}^2 \phi_1 [d\phi_2^2 + \operatorname{sen}^2 \phi_2 d\phi_3^2] \} \quad (\text{A.8})$$

De (A.5) e (A.8) obtemos

$$-kz^2 dz^2 = -kr^2 dr^2 + kr^4 \{ d\phi_1^2 + \operatorname{sen}^2 \phi_1 [d\phi_2^2 + \operatorname{sen}^2 \phi_2 d\phi_3^2] \} \quad (\text{A.9})$$

De forma análoga teremos

$$\begin{aligned}
\vec{z} \cdot d\vec{z} &= z_1 dz_1 + z_2 dz_2 + z_3 dz_3 + z_4 dz_4 = \\
&= r \cos \phi_1 (dr \cos \phi_1 - r \operatorname{sen} \phi_1 d\phi_1) + r \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_2 (dr \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_2 + \\
&+ r \cos \phi_1 \cos \phi_2 d\phi_1 - r \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 d\phi_2) + \\
&+ r \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_3 (dr \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_3 + r \cos \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_3 d\phi_1 + \\
&+ r \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 d\phi_2 - r \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3 d\phi_3) + \\
&+ r \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3 (dr \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3 + r \cos \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3 d\phi_1 + \\
&+ r \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3 d\phi_2 + r \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_3 d\phi_3)
\end{aligned}$$

Após abrir a expressão e usar sucessivamente $\text{sen}^2 \phi_i + \text{cos}^2 \phi_i = 1$ obtemos $\vec{z} \cdot d\vec{z} = r dr$.

Quadrando essa expressão teremos

$$(\vec{z} \cdot d\vec{z})^2 = r^2 dr^2 \quad (\text{A.10})$$

Substituindo-as em (A.6) teremos

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - \frac{R^2(t)}{1-kr^2} \{ dr^2 + r^2 [d\phi_2^2 + \text{sen}^2 \phi_1 (d\phi_2^2 + \text{sen}^2 \phi_2 d\phi_3^2)] - \\ &\quad kr^2 dr^2 - kr^4 [d\phi_1^2 + \text{sen}^2 \phi_1 (d\phi_2^2 + \text{sen}^2 \phi_2 d\phi_3^2)] + kr^2 dr^2 \} = \\ &= dt^2 - \frac{R^2(t)}{1-kr^2} \{ dr^2 + r^2 (1 - kr^2) [d\phi_2^2 + \text{sen}^2 \phi_1 (d\phi_2^2 + \text{sen}^2 \phi_2 d\phi_3^2)] \} \end{aligned}$$

de onde obtemos o espaço-tempo de Robertson-Walker pentadimensional

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 [d\phi_2^2 + \text{sen}^2 \phi_1 (d\phi_2^2 + \text{sen}^2 \phi_2 d\phi_3^2)] \right\} \quad (\text{A.11})$$

Repetimos os cálculos para $N = 5$ e $N = 6$ e obtemos a mesma forma (A.11). Em geral, para a parte espacial de dimensão N teremos:

$$\begin{aligned} z_1 &= r \cos \phi_1 \\ z_2 &= r \text{sen} \phi_1 \cos \phi_2 \\ z_3 &= r \text{sen} \phi_1 \text{sen} \phi_2 \cos \phi_3 \\ z_4 &= r \text{sen} \phi_1 \text{sen} \phi_2 \text{sen} \phi_3 \cos \phi_4 \\ z_5 &= r \text{sen} \phi_1 \text{sen} \phi_2 \text{sen} \phi_3 \text{sen} \phi_4 \cos \phi_5 \\ z_6 &= r \text{sen} \phi_1 \text{sen} \phi_2 \text{sen} \phi_3 \text{sen} \phi_4 \text{sen} \phi_5 \\ &\vdots \\ z_{N-1} &= r \text{sen} \phi_1 \dots \text{sen} \phi_{N-2} \cos \phi_{N-1} \\ z_N &= r \text{sen} \phi_1 \dots \text{sen} \phi_{N-2} \text{sen} \phi_{N-1} \end{aligned}$$

Observando a transformação acima vemos que aparecem pares $\text{sen} \phi_{N-1}$ e $\text{cos} \phi_{N-1}$ respectivamente em z_n e z_{n-1} . É assim sucessivamente, $\text{sen} \phi_5$ e $\text{cos} \phi_5$ respectivamente em z_5 e z_4 (obviamente, para $\phi_3 = 0$ recairemos nas transformações usuais de coordenadas polares esféricas). O aparecimento aos pares do seno e

coseno nos garante passarmos de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais para um sistema de coordenadas polares esféricas ortogonais com

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 [d\phi_1^2 + \text{sen}^2 \phi_1 (d\phi_2^2 + \text{sen}^2 \phi_2 (d\phi_3^2 + \text{sen}^2 \phi_3 (\dots (d^2 \phi_{N-2} + \text{sen}^2 \phi_{N-2} (d^2 \phi_{N-1})))) \dots)] \right\} \quad (\text{A.12})$$

que é o elemento de linha (2.1.5.a) para a métrica tipo Robertson-Walker em um espaço-tempo de dimensão $(N + 1)$, dado por (2.1.5.b).

A obtenção de (2.1.4.a) e (2.1.4.b) é imediata após a substituição de r por ρ em (A.8).

Quanto ao espaço-tempo (2.1.6.b), do tipo "Schwarzschild", foi argumentado no texto que a maneira mais simples é impor o vínculo em (A.8) (extendida para $(N + 1)$ dimensões), $dr = 0$, tal que $d\vec{z} \in S^{N-1}$, pois este espaço-tempo é isotrópico mas não é homogêneo.

Apêndice B

A seguir apresentaremos alguns cálculos para a métrica de Robertson-Walker na forma (2.1.5.b).

Para a forma (2.1.4.a) e para o elemento de linha (2.1.6.b) o procedimento é idêntico.

Cálculo das componentes da conexão afim.

Da definição dos componentes da conexão afim temos:

$$\Gamma_{ii}^o = -\frac{1}{2}\partial_o g_{ij}$$

como a métrica é diagonal teremos

$$\Gamma_{ii}^o = -\frac{\dot{R}}{R}g_{ii} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{g^{ii}}{2}\partial_o g_{ij}$$

$$\text{Logo} \quad \Gamma_{o(i)}^{(i)} = \frac{\dot{R}}{R} \quad (i = 1, \dots, N)$$

O símbolo (i) significa que não está havendo soma em (i) .
Sumarizando teremos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii}^o &= -\frac{\dot{R}}{R}g_{ii} & (i = 1, \dots, N) \\ \Gamma_{o(i)}^{(i)} &= \frac{\dot{R}}{R} & (i = 1, \dots, N) \\ \Gamma_{11}^1 &= -\frac{kr}{1 - kr^2} & \text{(B.1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{(i)1}^{(i)} &= \frac{1}{r} & (i = 2, 3, \dots, N) \\ \Gamma_{(i)j}^{(i)} &= \frac{g^{(i)(j)}}{2} g_{(i)(i)} & ((j = 1, \dots, N); i > j) \\ \Gamma_{ii}^j &= -\frac{g^{(j)(j)}}{2} g_{ii} & ((j = 1, \dots, N-1); i > j)\end{aligned}$$

Como não aparecem nas componentes das conexões não nulas, mais do que dois índices diferentes, isto nos garante que só existem componentes do tensor de Riemann da forma

$$R_{\alpha\beta\alpha\beta}$$

B.1 - Cálculo dos componentes do tensor de Riemann para a métrica tipo Robertson-Walker

Da definição dos componentes do tensor de Riemann:

$$\begin{aligned}R^0_{101} &= \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^\mu \Gamma_{0\mu}^0 - \Gamma_{10}^\mu \Gamma_{1\mu}^0 = \\ &= \frac{R\ddot{R}}{1 - kr^2} = -\frac{\ddot{R}}{R} g_{11}\end{aligned}$$

$$R^0_{202} = \partial_0 \Gamma_{22}^0 - \partial_2 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{22}^\mu \Gamma_{0\mu}^0 - \Gamma_{20}^\mu \Gamma_{2\mu}^0 = -\frac{\ddot{R}}{R} g_{22}$$

Após calcularmos várias componentes obtivemos o comportamento geral

$$R^0_{i0i} = -\frac{\ddot{R}}{R} g_{ii}$$

Na verdade um cálculo direto fornece esse resultado. Usando a definição das componentes e as correções obtidas, teremos:

$$\begin{aligned}R^0_{i0i} &= \partial_0 \Gamma_{ii}^0 - \partial_i \Gamma_{i0}^0 + \Gamma_{ii}^\mu \Gamma_{0\mu}^0 - \Gamma_{i0}^\mu \Gamma_{i\mu}^0 = \\ &= \partial_0 \left[-\frac{\dot{R}}{R} g_{ii} \right] - \Gamma_{(i)0}^{(i)} \Gamma_{(i)(i)}^0 =\end{aligned}$$

$$= \partial_0 \left[-\frac{\dot{R}}{R}(-R^2) \right] \left(-\frac{g_{ii}}{R^2} \right) + \frac{\dot{R}^2}{R^2} g_{ii}$$

onde $\frac{g_{ii}}{R^2}$ não depende de t .

Logo

$$R^0_{i0i} = -\frac{\ddot{R}}{R} g_{ii} \quad (i = 1, \dots, N)$$

Analogamente teremos:

$$\begin{aligned} R^1_{i1i} &= \partial_r \Gamma_{ii}^1 - \partial_r \Gamma_{i1}^1 + \Gamma_{ii}^\mu \Gamma_{1\mu}^1 - \Gamma_{i1}^\mu \Gamma_{i\mu}^1 = \\ &= \partial_r \left[-\frac{g^{11}}{2} \partial_r g_{ii} \right] + \Gamma_{ii}^0 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{ii}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{(i)1}^{(i)} \Gamma_{(i)(i)}^1 = \\ &\partial_r \left\{ \left(\frac{1 - kr^2}{2R^2} \right) (+2r) \right\} \frac{g_{ii}}{r^2} - \frac{\dot{R}}{R} g_{ii} \frac{\dot{R}}{R} + \left(\frac{1 - kr^2}{2R^2} \right) 2r \frac{g_{ii}}{r^2} \left[\frac{kr}{1 - kr^2} - \frac{1}{r} \right] \end{aligned}$$

de onde

$$R^1_{i1i} = -\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) g_{ii} \quad (B.2)$$

Para $i = 3, 4, \dots, N$

De forma análoga teremos:

$$\begin{aligned} R^2_{i2i} &= \partial_2 \Gamma_{ii}^2 - \partial_i \Gamma_{i2}^2 + \Gamma_{ii}^\mu \Gamma_{2\mu}^2 - \Gamma_{i2}^\mu \Gamma_{i\mu}^2 = \\ &= \frac{\partial}{\partial \phi_1} \left(\frac{1}{2r^2 R^2} \frac{\partial}{\partial \phi_1} g_{ii} \right) + \left[\left(\frac{1 - kr^2}{2R^2} \right) \partial_r g_{ii} \right] \frac{1}{r} - \frac{\dot{R}}{R} g_{ii} \frac{\dot{R}}{R} - \Gamma_{(i)2}^{(i)} \Gamma_{(i)(i)}^2 = \\ &= \frac{\partial}{\partial \phi_1} \left(\frac{2 \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_1}{2r^2 R^2} \frac{g_{ii}}{\operatorname{sen}^2 \phi_1} \right) + \left(\frac{1 - kr^2}{2R^2} \right) \cdot 2r \frac{g_{ii}}{r^2} \frac{1}{r} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} r^2 \frac{g_{ii}}{r^2} - \Gamma_{(i)2}^{(i)} \Gamma_{(i)(i)}^2 \end{aligned}$$

com $\frac{g_{ii}}{\operatorname{sen}^2 \phi_1}$ sem depender de ϕ_1 , e $\frac{g_{ii}}{r^2}$ também sem depender de r , para $i = 3, 4, \dots, N$.

Então teremos

$$R^2_{i2i} = -\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) g_{ii} \quad (i = 3, 4, \dots, N) \quad (B.3)$$

Por processo análogo calculamos

$$R^3_{i3i} = - \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) g_{ii} \quad (i = 4, 5, \dots, N) \quad (B.4)$$

$$R^4_{i4i} = - \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) g_{ii}$$

e observamos que o aparecimento de

$$\frac{\partial}{\partial \phi_{j-1}} \left(\frac{\text{sen } \phi_{j-1} \cos \phi_{j-1}}{r^2 R^2} \frac{g_{ii}}{\text{sen}^2 \phi_{j-1}} \right)$$

e de $\frac{g_{ii}}{r^2}$ é comum para $R^{(j)}_{i(j)i}$, com

$$R^{(j)}_{i(j)i} = - \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) g_{ii} \quad (i > j = 1, \dots, N-1)$$

Sumarizando teremos

$$R^0_{i0i} = - \frac{R}{R} g_{ii} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (B.5)$$

$$R^{(j)}_{i(j)i} = - \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) g_{ii} \quad (j = 1, \dots, N-1); j < i \dots N \quad (B.6)$$

Cálculo dos componentes do tensor de Ricci.

Vamos agora calcular as componentes do tensor de Ricci.

Usando a definição $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ teremos:

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^1_{010} + R^2_{020} + \dots + R^N_{0N0} = \\ &= g_{00} g^{11} R^0_{101} + g_{00} g^{22} R^0_{202} + \dots + g_{00} g^{NN} R^0_{N0N} = \\ &= g_{00} \left[-g^{11} \frac{\ddot{R}}{R} g_{11} - g^{22} \frac{\ddot{R}}{R} g_{22} + \dots - g^{NN} \frac{\ddot{R}}{R} g_{NN} \right] = \\ &= -g_{00} N \frac{\ddot{R}}{R} \\ R^{00} &= -N \frac{\ddot{R}}{R} \end{aligned} \quad (B.7)$$

Analogamente, com $(\lambda \neq i)$,

$$\begin{aligned}
 R_{ii} &= R^\lambda{}_{i\lambda i} = R^0{}_{i0i} + R^1{}_{i1i} + \dots = \\
 &= R^0{}_{i0i} + (N-1)R^{(j)}{}_{i(j)i} = \\
 &= -\frac{\ddot{R}}{R}g_{ii} + (N-1)(-g_{ii})\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right) \\
 R_{ii} &= -\left[\frac{\ddot{R}}{R} + (N-1)\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right)\right]g_{ii}
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Com $R_{\mu\nu} = 0$ e $R_{\mu abc}R_\nu{}^{abc} = 0$ para $\mu \neq \nu$ como consequência da forma diagonal da métrica.

Cálculo de $R_{\mu abc}R_\nu{}^{abc}$.

Para qualquer métrica diagonal, teremos as seguintes contrações:

$$R_{0abc}R_0{}^{abc} = 2g_{00}\{(g^{11})^2(R^0{}_{101})^2 + (g^{22})^2(R^0{}_{202})^2 + \dots + (g^{NN})^2(R^0{}_{N0N})^2\} \tag{B.9}$$

Para o caso que estamos tratando, métrica (2.1.5.b), teremos

$$R_{0abc}R_0{}^{abc} = 2g_{00}N\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)^2 \tag{B.9'}$$

Com

$$R_{1abc}R_1{}^{abc} = 2g_{11}\{(g^{11})^2(R^0{}_{101})^2 + (g^{22})^2(R^1{}_{212})^2 + \dots + (g^{NN})^2(R^1{}_{N1N})^2\}$$

de onde teremos

$$R_{1abc}R_1{}^{abc} = 2g_{11}\left[\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)^2 + (N-1)\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right)^2\right] \tag{B.10}$$

De forma análoga:

$$\begin{aligned}
R_{2abc}R_2^{abc} &= 2g_{22}\{(g^{22})^2(R_{202}^0)^2 + (g^{22})^2(R_{212}^1)^2 + \\
&\quad + (g^{33})^2(R_{323}^2)^2 + \dots + (g^{NN})^2(R_{N2N}^2)^2\} = \\
&= R_{2abc}R_2^{abc} = 2g_{22}\left\{\left(\frac{\ddot{R}^2}{R^2}\right) + (N-1)\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right)^2\right\} \quad (B.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{iabc}R_i^{abc} &= 2g_{ii}\left[\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)^2 + (N-1)\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right)^2\right] \quad (B.12) \\
&\quad (i = 1, 2, 3, \dots, N)
\end{aligned}$$

Apêndice C

C.1 - Cálculos com a métrica do tipo “Schwarzschild”.

Do elemento de linha (2.1.6b), a saber:

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 [d\phi_1^2 + \text{sen}^2 \phi_1 (d\phi_1^2 + \text{sen}^2 \phi_1 (d\phi_2^2 + \text{sen}^2 \phi_2 (\dots (d\phi_{N-2}^2 + \text{sen}^2 \phi_{N-2} (d\phi_{N-1}^2)) \dots))]]$$

Temos os seguintes componentes do tensor métrico

$$g_{00} = \frac{1}{g_{00}} = e^{\nu(r)}$$
$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = -e^{\lambda(r)} \quad (C.1)$$

$$g_{ii} = -r^2 \text{sen}^2 \phi_1 \text{sen}^2 \phi_2 \dots \text{sen}^2 \phi_{N-2} \quad (2 \leq i \leq N)$$

Usando a definição

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{g^{\alpha\rho}}{2} (\partial_{\mu} g_{\rho\nu} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu})$$

obteremos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^0 &= \frac{\nu'}{2} & (\Gamma_{0j}^0 &= 0, \quad 2 \leq j \leq N) \\
\Gamma_{ij}^0 &= 0 & (\forall i, j) \\
\Gamma_{00}^j &= 0 & (2 \leq j \leq N) \\
\Gamma_{00}^1 &= \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2} \\
\Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda} \\
\Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \phi_1 e^{-\lambda} \\
\Gamma_{(i)1}^{(i)} &= \frac{1}{r} & (i = 2, 3, \dots, N) \\
\Gamma_{(i)j}^{(i)} &= \frac{g^{(i)(i)}}{2} \partial_j g^{(i)(i)} & (\text{sem soma em } (i)) \quad (i > j; \quad i = 3, \dots, N) \\
\Gamma_{ii}^j &= -\frac{g^{(j)(j)}}{2} \partial_{(j)} g_{ii} & (\text{sem soma em } (j)) \quad (1, \dots, j, \dots, N-1 \quad i > j)
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Cálculo das componentes do tensor de Riemann

Usando a definição das componentes do tensor de Riemann e (C.2) teremos:

$$\begin{aligned}
R^0_{101} &= \partial_0 \Gamma^0_{11} - \partial_r \Gamma^0_{10} + \Gamma^0_{\sigma 0} \Gamma^\sigma_{11} - \Gamma^0_{\sigma 1} \Gamma^\sigma_{10} = \\
&= -\frac{\nu''}{2} + \Gamma^0_{10} \Gamma^1_{11} - (\Gamma^0_{01})^2 = -\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda' \nu'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} = \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{2} (-e^\lambda) \left[\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{2} \right]
\end{aligned}$$

$$R^0_{101} = \frac{e^{-\lambda}}{2} \left[\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{2} \right] g_{11} \tag{C.3}$$

Para $2 \leq i \leq N$

$$\begin{aligned}
R^0_{i0i} &= \partial_0 \Gamma^0_{ii} - \partial_i \Gamma^0_{i0} + \Gamma^0_{\sigma 0} \Gamma^\sigma_{ii} - \Gamma^0_{\sigma i} \Gamma^\sigma_{i0} = \Gamma^0_{10} \Gamma^1_{ii} = \\
&= \frac{\nu'}{2} \left(-\frac{g^{11}}{2} \right) \partial_r \left(r^2 \frac{g_{ii}}{r^2} \right) = \frac{\nu' e^{-\lambda}}{2r} g_{ii}
\end{aligned}$$

pois $\frac{g_{ii}}{r^2}$ não depende de r para $2 \leq i \leq N$.

Logo

$$R^0_{i0i} = \frac{\nu' e^{-\lambda}}{2r} g_{ii} \quad (C.4)$$

Para $(i = 2, \dots, N)$

$$\begin{aligned} R^1_{i1i} &= \partial_r \Gamma_{ii}^1 - \partial_i \Gamma_{i1}^1 + \Gamma_{\sigma 1}^1 \Gamma_{ii}^\sigma - \Gamma_{\sigma i}^1 \Gamma_{i1}^\sigma = \\ &= \partial_r \left[-\frac{g^{11}}{2} \partial_r \left(r^2 \frac{g_{ii}}{r^2} \right) \right] + \left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{1}{r} \right) \left(-\frac{g^{11}}{2} \right) \partial_r \left(r^2 \frac{g_{ii}}{r^2} \right) = \\ &= \partial_r \left[e^{-\lambda} r \right] \frac{g_{ii}}{r^2} + e^{-\lambda} r \left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{1}{r} \right) \frac{g_{ii}}{r^2} = \frac{g_{ii}}{r^2} \left[-\lambda' r e^{-\lambda} + e^{-\lambda} + \frac{r \lambda' e^{-\lambda}}{2} - e^{-\lambda} \right] = \\ &= \frac{g_{ii}}{r^2} \left(-\frac{r \lambda' e^{-\lambda}}{2} \right) = \frac{1}{2r} \frac{d e^{-\lambda}}{dr} g_{ii} \dots R^1_{i1i} = \frac{1}{2r} \frac{d e^{-\lambda}}{dr} g_{ii} \end{aligned} \quad (C.5)$$

Analogamente teremos:

$$\begin{aligned} R^2_{i2i} &= \partial_{\phi_1} \Gamma_{ii}^2 - \partial_i \Gamma_{i2}^2 + \Gamma_{\sigma 2}^2 \Gamma_{ii}^\sigma - \Gamma_{\sigma i}^2 \Gamma_{i2}^\sigma = \\ &= \partial_{\phi_1} \left(-\frac{g^{22}}{2} \partial_{\phi_1} g_{ii} \right) + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{ii}^1 - \Gamma_{(i)(i)}^2 \Gamma_{(i)2}^{(i)} = \\ &= -\frac{g^{22}}{2} \partial_{\phi_1} \left(\text{sen}^2 \phi_1 \frac{g_{ii}}{\text{sen}^2 \phi_1} \right) \frac{g^{(i)(i)}}{2} \partial_{\phi_1} \left(\text{sen}^2 \phi_1 \frac{g_{ii}}{\text{sen}^2 \phi_1} \right) = \\ &= -\frac{g^{22}}{2} \frac{g_{ii}}{\text{sen}^2 \phi_1} \partial_{\phi_1}^2 (\text{sen}^2 \phi_1) + \frac{e^{-\lambda}}{2r^3} g_{ii} \partial_r (r^2) \\ &+ \frac{g^{22}}{2} [\partial_{\phi_1} (\text{sen}^2 \phi_1)]^2 \left[\frac{g^{(i)(i)}}{\text{sen}^2 \phi_1} \right]^2 \frac{g^{(i)(i)}}{2} = \\ &= -\frac{g^{22}}{2} \frac{g_{ii}}{\text{sen}^2 \phi_1} \partial_{\phi_1} (2 \text{sen} \phi_1 \cos \phi_1) + \frac{e^{-\lambda}}{r^2} g_{ii} + \frac{g^{22} g_{ii} (4 \text{sen}^2 \phi_1 \cos^2 \phi_1)}{4 \text{sen}^4 \phi_1} = \\ &= \frac{g_{ii}}{r^2 \text{sen}^2 \phi_1} [\cos^2 \phi_1 - \text{sen}^2 \phi_1] + \frac{e^{-\lambda}}{r^2} g_{ii} - \frac{g_{ii}}{r^2} \cot^2 \phi_1 = \\ &= \frac{1}{r^2} (e^{-\lambda} - 1) g_{ii} \end{aligned}$$

$$R^2_{i2i} = \frac{1}{r^2} (e^{-\lambda} - 1) g_{ii} \quad (i = 3, \dots, N) \quad (C.6)$$

De forma análoga obtemos:

$$R^3_{i3i} = \left(\frac{1}{r^2} \right) (e^{-\lambda} - 1) g_{ii} \quad (i = 4, \dots, N) \quad (C.7)$$

$$R^{(j)}_{i(j)i} = \frac{1}{r^2}(e^{-\lambda} - 1)g_{ii} \quad (j = 2, \dots, N-1; j < i < N) \quad (C.8)$$

Cálculo das componentes do tensor de Ricci

Usando a definição $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ e resultados anteriormente obtidos neste apêndice teremos:

$$\begin{aligned} R_{00} &= g_{00}[g^{11}R^0_{101} + g^{22}R^0_{202} + \dots + g^{NN}R^0_{N0N}] = \\ &= g_{00}[g^{11}\frac{e^{-\lambda}}{2}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2})g_{11} + g^{ii}R^0_{i0i}] = \\ &= g_{00}[\frac{e^{-\lambda}}{2}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2}) + \frac{\nu'e^{-\lambda}}{2r}g^{ii}g_{ii}] = \\ &= \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}[\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2} + (N-1)\frac{\nu'}{r}] \end{aligned}$$

$$R_{00} = \frac{g_{00}}{2}e^{-\lambda}[\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2} + (N-1)\frac{\nu'}{r}] \quad (i = 2, \dots, N) \text{ (N-1 valores)} \quad (C.9)$$

De forma análoga:

$$\begin{aligned} R_{11} &= R^0_{101} + R^2_{121} + \dots + R^N_{1N1} = \\ &= R^0_{101} + g_{11}[g^{22}R^1_{212} + \dots + g^{NN}R^1_{N1N}] = \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2}[\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2}]g_{11} + g_{11}g^{ii}R^1_{i1i} = \\ &= g_{11}[\frac{e^{-\lambda}}{2}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2}) + g^{ii}g_{ii}\frac{1}{2r}\frac{de^{-\lambda}}{dr}] = \\ &= g_{11}\frac{e^{-\lambda}}{2}[\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2} - (N-1)\frac{\lambda'}{r}] \end{aligned}$$

$$R_{11} = g_{11}\frac{e^{-\lambda}}{2}[\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2} - (N-1)\frac{\lambda'}{r}] \quad (i = 2, \dots, N) \quad (C.10)$$

Calcularemos agora R_{ii} com $2 \leq i \leq N$, $R_{ii} = R_{i\lambda i}^\lambda$, e $\lambda \neq i$, tal que:

$$\begin{aligned} R_{ii} &= R_{i0i}^0 + R_{i1i}^1 + (N-2)R_{i(j)i}^{(j)} = \\ &= \frac{g_{ii}\nu'}{2r}e^{-\lambda} - \frac{g_{ii}\lambda'}{2r}e^{-\lambda} + (N-2)\frac{g_{ii}}{r^2}(e^{-\lambda} - 1) \\ R_{ii} &= \frac{g_{ii}}{2}\left[e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} - \frac{\lambda'}{r}\right) + 2\frac{(N-2)}{r^2}(e^{-\lambda} - 1)\right] \end{aligned} \quad (C.11)$$

Cálculo das contrações $R_{\mu abc}R_\nu^{abc}$

para $\mu = \nu = 0$ teremos

$$\begin{aligned} R_{0abc}R_0^{abc} &= 2g_{00}\{(g^{11})^2(R_{101}^0)^2 + \dots + (g^{NN})^2(R_{N0N}^0)^2\} = \\ &= 2g_{00}\{(g^{11}g_{11})^2\frac{e^{-2\lambda}}{4}[\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2}]^2 + \\ &+ (N-1)(g^{(i)(i)}g_{(i)(i)})^2(R_{i0i}^0)^2\} = \\ &= 2g_{00}\left\{\frac{e^{-2\lambda}}{4}[\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2}]^2 + \frac{(N-1)\nu'^2 e^{-2\lambda}}{4r^2}\right\} \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$R_{0abc}R_0^{abc} = g_{00}e^{-2\lambda}\left\{\frac{1}{2}[\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2}]^2 + \left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{\nu'^2}{r^2}\right\} \quad (C.12)$$

Para $\mu = \nu = 1$

$$\begin{aligned} R_{1abc}R_1^{abc} &= 2g_{11}\{(g^{11})^2(R_{101}^0)^2 + (g^{22})^2(R_{212}^1)^2 + \dots + (g^{NN})^2(R_{N1N}^1)^2\} = \\ &= 2g_{11}\{(g^{11}g_{11})^2\frac{e^{-2\lambda}}{4}[\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2}]^2 + (N-1)(g^{(i)(i)}g_{(i)(i)})^2\left(\frac{1}{2r}\frac{de^{-\lambda}}{dr}\right)^2\}R_{1abc}R_1^{abc} = \\ &= g_{11}e^{-2\lambda}\left\{\frac{1}{2}[\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2}]^2 + \left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{\lambda'^2}{r^2}\right\} \end{aligned} \quad (C.13)$$

Para $\mu = \nu = i$ com $2 \leq i \leq N$ teremos

$$R_{iabc}R_i{}^{abc} = \frac{g_{ii}}{r^2} \left\{ \frac{e^{-2\lambda}}{2} (\nu'^2 + \lambda'^2) + \frac{2}{r^2} (N-2)(e^{-\lambda} - 1)^2 \right\} \quad (C.14)$$

Calcularemos explicitamente (C.14) para $i = N$ a título de transparência, uma vez que algumas passagens foram omitidas

$$\begin{aligned} R_{Nabc}R_N{}^{abc} &= 2\{R_{N0N0}R_N{}^{0N0} + R_{N1N1}R_N{}^{1N1} + \dots + R_{N,N-1,N,N-1}R_N{}^{N-1,N,N-1}\} = \\ &= 2g_{NN}\{(g^{NN})^2[(R^0_{N0N})^2 + (R^1_{N1N})^2 + (R^1_{N1N})^2 + \dots + (R^{N-1}_{N,N-1,N})^2]\} = \\ &= 2g_{NN}\left\{\left(\frac{\nu'e^{-\lambda}}{2r}g_{NN}\right)^2(g^{NN})^2 + \left(\frac{1}{2r}\frac{de^{-\lambda}}{dr}g_{NN}\right)^2(g^{NN})^2 + \right. \\ &\left. + (N-2)(g^{NN})^2\left[\frac{g_{NN}}{r^2}(e^{-\lambda} - 1)\right]^2\right\} = \frac{g_{NN}}{r^2}\left\{\frac{e^{-2\lambda}}{2}(\nu'^2 + \lambda'^2) + \frac{2(N-2)}{r^2}(e^{-\lambda} - 1)^2\right\} \end{aligned}$$

Apêndice D

Cálculo das componentes do tensor de Riemman para o elemento da linha (2.1.4.a).

O elemento da linha (2.1.4.a) é dado por:

$$ds^2 = dt^2 - e^{g(t)+f(\rho)} \{ d\rho^2 + \rho^2 [d\phi_1^2 + \text{sen}^2 \phi_1 (d\phi_2^2 + \text{sen}^2 \phi_2 (\dots (d\phi_{N-2}^2 + \text{sen}^2 \phi_{N-2} (d\phi_{N-2}^2))) \dots)] \}$$

e a métrica dada por (2.1.4.b)

$$g_{\infty} = \frac{1}{g^{\infty}} = 1; \quad g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = -e^{g(t)+f(\rho)};$$

$$g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}} = -\rho^2 e^{g(t)+f(\rho)} \cdot \text{sen}^2 \phi_1 \dots \text{sen}^2 \phi_{i-2} \quad 2 \leq i \leq N$$

Após um cálculo simples as conexões são dadas por

$$\Gamma_{\ddot{ii}}^{\circ} = -\frac{\dot{g}(t)}{2} g_{ii} \quad (i = 1, \dots, N)$$

$$\Gamma_{(i)0}^{(i)} = \frac{\dot{g}(t)}{2} \quad (i = 1, \dots, N)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{f'}{2}$$

$$\Gamma_{(i)1}^{(i)} = \frac{g^{(i)(i)}}{2} \partial_{\rho} \left(\rho^2 e^f \cdot \frac{g_{ii} e^{-f}}{\rho^2} \right) = \frac{g^{(i)(i)}}{2} [2\rho e^f + \rho^2 f' e^f] \frac{g^{(i)(i)} e^{-f}}{\rho^2}$$

$$\Gamma_{(i)1}^{(i)} = \frac{1}{2\rho^2} [2\rho + \rho^2 f'] = \left(\frac{1}{\rho} + \frac{f'}{2} \right) \quad (i = 2, \dots, N)$$

$$\Gamma_{(i)j}^{(i)} = \frac{g^{(i)(i)}}{2} \partial_j g^{(i)(i)} \quad (2 \leq j \leq N-1, i > j)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{(i)j}^{(i)} &= \frac{g^{(i)(i)}}{2} \partial_{\phi_{j-1}} \left(\text{sen}^2 \phi_{j-1} \cdot \frac{g^{(i)(i)}}{\text{sen}^2 \phi_{j-1}} \right) = \cot \phi_{j-1} \\
\Gamma_{ii}^1 &= -\frac{g^{11}}{2} \partial_{\rho} g_{ii} = -\frac{g^{11}}{2} \partial_{\rho} \left(\rho^2 \cdot \frac{g_{ii} e^{f-f}}{\rho^2} \right) \\
\Gamma_{ii}^1 &= e^{-(g(t)+f(\rho))} g_{ii} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{f'}{2} \right) \\
\Gamma_{ii}^j &= -\frac{g^{(j)(j)}}{2} \partial_{(j)} g_{ii} \quad (2 \leq j \leq N-1, j < i) \\
\Gamma_{ii}^j &= -\frac{g^{(j)(j)}}{2} \cdot \partial_{\phi_{j-1}} \left(\text{sen}^2 \phi_{j-1} \cdot \frac{g_{ii}}{\text{sen}^2 \phi_{j-1}} \right) = \\
&= -\frac{g^{(j)(j)}}{2} \cdot 2 \text{sen} \phi_{j-1} \cos \phi_{j-1} \frac{g_{ii}}{\text{sen}^2 \phi_{j-1}} = -g^{(j)(j)} \cot \phi_{j-1} g_{ii} \\
\Gamma_{ii}^j &= -g^{(j)(j)} \cot \phi_{j-1} g_{ii} \quad (j \leq N-1; i > j)
\end{aligned}$$

Sumarizando teremos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{f'}{2} \\
\Gamma_{ii}^o &= -\frac{\dot{g}(t)}{2} g_{ii} \quad (i = 1, \dots, N) \\
\Gamma_{(i)o}^{(i)} &= \frac{\dot{g}(t)}{2} \quad (i = 1, \dots, N) \\
\Gamma_{(i)1}^{(i)} &= \left(\frac{1}{\rho} + \frac{f'}{2} \right) \quad (i = 2, \dots, N) \\
\Gamma_{(i)j}^{(i)} &= \cot \phi_{j-1} \quad (2 \leq j \leq N-1, i > j) \\
\Gamma_{ii}^1 &= e^{-(g(t)+f(\rho))} g_{ii} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{f'}{2} \right) \quad (i = 2, \dots, N) \\
\Gamma_{ii}^j &= -g^{(j)(j)} \cot \phi_{j-1} g_{ii}; \quad \phi_{j-1} \quad (2 \leq j \leq N-1; i > j)
\end{aligned} \tag{D.1}$$

Então, usando as definições de $R_{\mu\alpha\nu}^{\lambda}$ e (D.1) teremos

$$\begin{aligned}
R_{ioi}^o &= \partial_o \Gamma_{ii}^o - \partial_i \Gamma_{io}^o + \Gamma_{\sigma o}^o \Gamma_{ii}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma i}^o \Gamma_{io}^{\sigma} = \partial_o \Gamma_{ii}^o - \Gamma_{(i)(i)}^o \Gamma_{(i)o}^{(i)} = \\
&= \partial_o \left[-\frac{\dot{g}}{2} (g_{ii} e^{-g}) e^g \right] + \frac{\dot{g}^2}{4} g_{ii}
\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$R^{\circ}_{i0i} = -\frac{1}{2} \left[\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right] g_{ii} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (D.2)$$

Utilizando o mesmo procedimento para R^1_{i1i} teremos

$$\begin{aligned} R^1_{i1i} &= \partial_1 \Gamma^1_{ii} - (\partial_i \Gamma^1_{ii}) + \Gamma^1_{\sigma 1} \Gamma^{\sigma}_{ii} - \Gamma^1_{\sigma i} \Gamma^{\sigma}_{i1} = \\ &= \partial_1 \Gamma^1_{ii} + \Gamma^1_{\sigma 1} \Gamma^{\sigma}_{ii} + \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{ii} - \Gamma^1_{(i)(i)} \Gamma^1_{(i)1} = \\ &= \partial_{\rho} \left[\left(\frac{1}{\rho} + \frac{f'}{2} \right) \rho^2 \left(\frac{g_{ii}}{\rho^2} e^{-f} \right) e^{-f} \right] - \frac{\dot{g}^2}{4} g_{ii} + \frac{f'}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{f'}{2} \right) g_{ii} e^{-(g+f)} - \left(\frac{1}{\rho} + \frac{f'}{2} \right) e^{(g+f)} g_{ii} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{f'}{2} \right) = \\ &= \partial_{\rho} \left[\rho + \frac{\rho^2 f'}{2} \right] \frac{g_{ii}}{\rho^2} e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{4} g_{ii} + \left(\frac{f'}{2\rho} + \frac{f'^2}{4} \right) g_{ii} e^{-(g+f)} - \\ &\quad - g_{ii} e^{-(g+f)} \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{f'^2}{4} + \frac{f'}{\rho} \right) g_{ii} = \\ &= \left[\left(\frac{f''}{2} + \frac{f'}{2\rho} \right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{4} \right] g_{ii} \end{aligned}$$

de onde

$$R^1_{i1i} = \frac{g_{ii}}{2} \left[\left(f'' + \frac{f'}{\rho} \right) e^{-(\rho+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2} \right] \quad (D.3)$$

Dando prosseguimento ao cálculo teremos que

$$R^{(j)}_{i(j)i} = \frac{e^{-(g+f)}}{2} \left[\frac{f'^2}{2} + \frac{2f'}{\rho} - \frac{\dot{g}^2}{2} e^{(\rho+f)} \right] g_{ii} \quad (j = 2, \dots, N-1; i > j) \quad (D.4)$$

Cálculo das componentes do tensor de Ricci.

Vamos agora calcular as componentes do tensor de Ricci, partindo da definição $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$ e das componentes do tensor de Riemann já calculadas.

Para $\mu = \nu = 0$ teremos

$$R_{00} = g_{00}[g^{11}R^0_{101} + g^{22}R^0_{202} + \dots + g^{NN}R^0_{N0N}] = -\frac{N}{2} \left(\bar{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right)$$

de onde

$$R_{00} = -\frac{N}{2} \left(\bar{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right) \quad (D.5)$$

Para $\mu = \nu = 1$ teremos

$$\begin{aligned} R_{11} &= R^0_{101} + R^2_{121} + \dots + R^N_{1N1} = \\ &= R^0_{101} + g_{11}[g^{22}R^1_{212} + g^{33}R^1_{313} + \dots + g^{NN}R^1_{N1N}] = \\ &= -\frac{g_{11}}{2} \left(\bar{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right) + \frac{g_{11}}{2}(N-1) \left[\left(f'' + \frac{f'}{\rho} \right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2} \right] \end{aligned}$$

de onde

$$R_{11} = \frac{g_{11}}{2} \left\{ - \left(\bar{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right) + (N-1) \left[\left(f'' + \frac{f'}{\rho} \right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2} \right] \right\} \quad (D.6)$$

Finalmente, para $\mu = \nu = i$ teremos

$$\begin{aligned} R_{ii} &= R^0_{i0i} + R^1_{i1i} + \dots + R^{(j)}_{i(j)i} = -\frac{1}{2} \left(\bar{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right) + \\ &+ \frac{g_{ii}}{2} \left[\left(f'' + \frac{f'}{\rho} \right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2} \right] + \left(\frac{N-2}{2} \right) g_{ii} \left[\left(\frac{f'^2}{2} + \frac{2f'}{\rho} \right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2} \right] \end{aligned}$$

onde, após algumas simplificações teremos

$$\begin{aligned} R_{ii} &= \frac{g_{ii}}{2} \left\{ - \left(\bar{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right) + \left[\left(f'' + \frac{f'}{\rho} \right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2} \right] + \right. \\ &\left. + (N-2) \left[\left(\frac{f'^2}{2} + \frac{2f'}{\rho} \right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2} \right] \right\} \quad (i = 2, \dots, N) \quad (D.7) \end{aligned}$$

Construção das contrações do tensor de Riemann do tipo $R_{\mu abc} R_{\nu}{}^{abc}$

Para $\mu \neq \nu$, $R_{\mu abc} R_{\nu}{}^{abc} = 0$

Para $\mu = \nu = 0$ teremos

$$\begin{aligned} R_{0abc} R_0{}^{abc} &= 2g_{00} \{ (g^{11})^2 (R^0{}_{101})^2 + (g^{22})^2 (R^0{}_{202})^2 + \dots + (g^{NN})^2 (R^0{}_{N0N})^2 \} = \\ &= 2 \left\{ \frac{N}{4} \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

de onde

$$R_{0abc} R_0{}^{abc} = \frac{N}{2} \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right)^2 \quad (D.8)$$

Para $\mu = \nu = 1$ teremos:

$$\begin{aligned} R_{1abc} R_1{}^{abc} &= 2g_{11} \{ (g^{11})^2 (R^0{}_{101})^2 + (g^{22})^2 (R^1{}_{212})^2 + \dots + (g^{NN})^2 (R^1{}_{N1N})^2 \} = \\ &= 2g_{11} \left\{ \frac{1}{4} \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{N-1}{4} \right) \left[\left(f'' + \frac{f'}{\rho} \right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2} \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

com $R_{1abc} R_1{}^{abc}$ dado por

$$R_{1abc} R_1{}^{abc} = \frac{g_{11}}{2} \left\{ \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right)^2 + (N-1) \left[\left(f'' + \frac{f'}{\rho} \right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2} \right]^2 \right\} \quad (D.9)$$

De forma análoga teremos

$$\begin{aligned} R_{iabc} R_i{}^{abc} &= 2g_{ii} \{ (g^{ii})^2 [(R^0{}_{i0i})^2 + (R^1{}_{i1i})^2 + \dots + R^j{}_{iji}]^2 \} = \\ &= 2g_{ii} \left\{ \frac{1}{4} \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \left[\left(f'' + \frac{f'}{\rho} \right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2} \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{N-2}{4} \right) \left[\left(\frac{f'^2}{2} + \frac{2f'}{\rho} \right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2} \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

com $R_{iabc}R_i{}^{abc}$ dado por

$$R_{iabc}R_i{}^{abc} = \frac{g_{ii}}{2} \left\{ \left(\bar{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right)^2 + \left[\left(f'' + \frac{f'}{\rho} \right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2} \right]^2 + \right. \\ \left. (N-2) \left[\left(\frac{f'^2}{2} + \frac{2f'}{\rho} \right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2} \right]^2 \right\} \quad (D.10)$$

$$(i = 2, \dots, N)$$

O cálculo de $\nabla_\mu \nabla_\nu \phi$ é bastante simples, com $\nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^\mu \partial X^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \phi$, de onde teremos

$$2\nabla_0 \nabla_0 \phi = 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2};$$

$$2\nabla_1 \nabla_1 \phi = 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} - \Gamma_{11}^0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \Gamma_{11}^1 \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)$$

então

$$2\nabla_1 \nabla_1 \phi = 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} - \frac{\dot{g}^2}{2} g_{11} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{f'}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)$$

Analogamente teremos:

$$2\nabla_i \nabla_i \phi = 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial (X^i)^2} - \Gamma_{ii}^0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \Gamma_{ii}^1 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) =$$

$$= 2 \left(\frac{\dot{g}}{2} g_{ii} \frac{\partial \phi}{\partial t} - e^{-(g+f)} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{f'}{2} \right) g_{ii} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) \quad (i = 2, \dots, N)$$

Sumarizando teremos:

$$2\nabla_0 \nabla_0 \phi = 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

$$2\nabla_1 \nabla_1 \phi = \frac{g_{11}}{2} \left\{ 2 \frac{\dot{g}}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t} - 4e^{-(g+f)} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} - \frac{f'}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right] \right\} \quad (D.11)$$

$$2\nabla_i \nabla_i \phi = 2g_{ii} \left\{ \frac{\dot{g}}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t} - e^{-(g+f)} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{f'}{2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right\}$$

Equações de movimento (2.1.6)

Neste apêndice estamos estudando o elemento de linha (2.1.4.a), então as equações (2.1.6) serão:

Para $\mu = \nu = 0$

$$R_{00} + \frac{\alpha'}{2} R_{0abc} R_0{}^{abc} + 2\nabla_0 \nabla_0 \phi = 0$$

o que equivale a

$$-\frac{N}{2} g_{00} \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right) + \frac{\alpha'}{2} N \frac{g_{00}}{2} \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right)^2 + 2g_{00} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

de onde teremos

$$-\left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right) + \frac{\alpha'}{2} \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right)^2 + \frac{4}{N} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

para $\mu = \nu = 1$

$$R_{11} + \frac{\alpha'}{2} R_{1abc} R_1{}^{abc} + 2\nabla_1 \nabla_1 \phi = 0$$

o que equivale a

$$\frac{g_{11}}{2} \left\{ -\left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right) + (N-1) \left[\left(f'' + \frac{f'}{\rho} \right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2} \right] \right\} + \frac{\alpha'}{2} \frac{g_{11}}{2} \left\{ \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right)^2 + (N-1) \left[\left(f'' + \frac{f'}{\rho} \right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2} \right]^2 \right\} + \frac{g_{11}}{2} \left\{ 2\dot{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + 4e^{-(g+f)} \left[-\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{f'}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right] \right\} = 0$$

de onde teremos

$$\left\{ -\left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right) + \frac{\alpha'}{2} \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right)^2 - (N-1) \frac{\dot{g}^2}{2} + \alpha'(N-1) \frac{\dot{g}^4}{8} + 2\dot{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} + \left\{ (N-1) \left(f'' + \frac{f'}{\rho} \right) e^{-(g+f)} + \frac{\alpha'(N-1)}{2} \left(f'' + \frac{f'}{\rho} \right)^2 e^{-2(g+f)} - \frac{\alpha'(N-1)}{2} \dot{g}^2 \left(f'' + \frac{f'}{\rho} \right) e^{-(g+f)} + 4e^{-(g+f)} \left[-\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{f'}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right] \right\} \quad (2.1.18)$$

para $\mu = \nu = i$ ($i = 2, \dots, N$) teremos

$$\begin{aligned} & \frac{g_{ii}}{2} \left\{ -\left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right) + \left[\left(f'' + \frac{f'}{\rho}\right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2}\right] + (N-2) \left[\left(\frac{f'^2}{2} + \frac{2f'}{\rho}\right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2}\right] \right\} + \\ & \quad + \frac{\alpha' g_{ii}}{2} \left\{ \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right)^2 + \left[\left(f'' + \frac{f'}{\rho}\right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2}\right]^2 + \right. \\ & \quad \left. + (N-2) \left[\left(\frac{f'^2}{2} + \frac{2f'}{\rho}\right) e^{-(g+f)} - \frac{\dot{g}^2}{2}\right]^2 \right\} + \frac{g_{ii}}{2} \left\{ 2\dot{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} - 4e^{-(g+f)} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{f'}{2}\right) \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right\} = 0 \end{aligned}$$

com a parte puramente temporal separada das demais

$$\begin{aligned} & \left\{ -\left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right) - \frac{\dot{g}^2}{2} - (N-2) \frac{\dot{g}^2}{2} + \frac{\alpha'}{2} \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right)^2 + 2\dot{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\alpha'}{8} \dot{g}^4 + (N-2) \frac{\dot{g}^4}{8} \alpha' \right\} \\ & \quad \left\{ \left(f'' + \frac{f'}{\rho}\right) e^{-(g+f)} + (N-2) \left(\frac{f'^2}{2} + \frac{2f'}{\rho}\right) e^{-(g+f)} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\alpha'}{2} \left(f'' + \frac{f'}{\rho}\right)^2 e^{-2(g+f)} - \frac{\alpha'}{2} \dot{g}^2 \left(f'' + \frac{f'}{\rho}\right) e^{-(g+f)} + \frac{\alpha'}{2} (N-2) \left(\frac{f'^2}{2} + \frac{2f'}{\rho}\right)^2 e^{-2(g+f)} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\alpha'}{2} (N-2) \dot{g}^2 \left(\frac{f'^2}{2} + \frac{2f'}{\rho}\right) e^{-(g+f)} - 4e^{-(g+f)} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{f'}{2}\right) \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right\} \end{aligned}$$

A condição (2.1.18) $\phi = \phi(t)$ implica em $f'' + \frac{f'}{\rho} = \frac{f'^2}{2} + \frac{2f'}{\rho} = 0$, cuja solução é $f = -\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{4k_1}$, com $k_1 = 0, 1$ e $e^f = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{4k_1}$. Logo (2.1.17.a) (com $\mu = \nu = 0$) será

$$-\left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right) + \frac{\alpha'}{2} \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right)^2 + \frac{4}{N} \ddot{\phi} = 0$$

(2.1.18) (com $\mu = \nu = 1$) será

$$-\left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right) + \frac{\alpha'}{2} \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right)^2 - (N-1) \frac{\dot{g}^2}{2} + \alpha' (N-1) \frac{\dot{g}^4}{8} + 2\dot{g} \dot{\phi} = 0$$

e (2.1.19) (com $\mu = \nu = i = 2, 3, \dots, N$) será

$$-\left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right) + \frac{\alpha'}{2} \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2}\right)^2 - \frac{(N-2)}{2} \dot{g}^2 + \frac{\alpha' (N-2)}{8} \dot{g}^4 - \frac{\dot{g}^2}{2} + \alpha' \frac{\dot{g}^4}{8} + 2\dot{g} \frac{d\phi}{dt} = 0$$

Admitindo um Ansatz mais geral do que aqueles utilizados, tal que $R^2 = e^{g(t)}$, teremos $2R\dot{R} = \dot{g}e^g = \dot{g}R^2$, de onde obtemos os seguintes resultados

$$\dot{R} = \frac{\dot{g}}{2} R$$



com

$$\ddot{R} = \frac{\ddot{g}}{2}R + \frac{\dot{g}}{2}\dot{R} = \left(\frac{\ddot{g}}{2} + \frac{\dot{g}^2}{4}\right)R$$

Logo

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{1}{2} \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}^2}{2} \right)$$

Então (2.1.17) passa a ser

$$-2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\alpha'}{2}4 \left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)^2 + \frac{4\ddot{\phi}}{N} = 0$$

a equação (2.1.18) passa a ser

$$-2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\alpha'}{2}4 \left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)^2 - 2(N-1)\frac{\dot{R}^2}{R^2} + 2\alpha'(N-1)\frac{\dot{R}^4}{R^4} + \frac{4\dot{R}}{R}\dot{\phi} = 0$$

enquanto (2.1.19) torna-se

$$-2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\alpha'}{2}4 \left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)^2 - 2(N-2)\frac{\dot{R}^2}{R^2} + 2\alpha'(N-2)\frac{\dot{R}^4}{R^4} + 2\alpha'\frac{\dot{R}^4}{R^4} - 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{4\dot{R}}{R}\dot{\phi} = 0$$

A equação (2.1.19) pode ser simplificada (somando os termos)

$$-2\frac{\ddot{R}}{R} + 2\alpha' \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + 2(N-1)\frac{\dot{R}^2}{R^2} \left[1 - \alpha'\frac{\dot{R}^2}{R^2}\right] + \frac{4\dot{R}}{R}\dot{\phi} = 0$$

assim como (2.1.18):

$$-2\frac{\ddot{R}}{R} + 2\alpha' \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + 2(N-1)\frac{\dot{R}^2}{R^2} \left[1 - \alpha'\frac{\dot{R}^2}{R^2}\right] + \frac{4\dot{R}}{R}\dot{\phi} = 0$$

de onde vemos que (2.1.18) e (2.1.19) são idênticas.

Substituindo (2.1.17) em (2.1.18) ou (2.1.19):

$$-\frac{4\ddot{\phi}}{N} - 2(N-1)\frac{\dot{R}^2}{R^2} \left[1 - \alpha'\frac{\dot{R}^2}{R^2}\right] + \frac{4\dot{R}}{R}\dot{\phi} = 0$$

ou ainda

$$+\ddot{\phi} + \frac{N}{2}(N-1)\frac{\dot{R}^2}{R^2} \left[1 - \alpha' \frac{\dot{R}^2}{R^2}\right] + \frac{N\dot{R}}{R}\dot{\phi} = 0 \quad (D.12)$$

com

$$R^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\phi}}{R^N} \right) = R^N \left(\frac{\ddot{\phi}}{R^N} - \frac{N\dot{R}\dot{\phi}}{R^{N+1}} \right) = \ddot{\phi} - \frac{N\dot{R}}{R}\dot{\phi}$$

de onde (D.12) passa a ser

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\phi}}{R^N} \right) + \frac{N}{2} R^N (N-1) \frac{\dot{R}^2}{R^{2(N+1)}} \left[1 - \alpha' \frac{\dot{R}^2}{R^2}\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\phi}}{R^N} \right) + \frac{N}{2} R^N (N-1) \left[-\frac{1}{N} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R^N} \right) \right]^2 \left[1 - \alpha' \left(\frac{d}{dt} \ln R \right)^2\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\phi}}{R^N} \right) + \frac{NR^N}{2N} (N-1) \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R^N} \right) \right]^2 \left[1 - \alpha' \left(\frac{d}{dt} \ln R \right)^2\right] = 0$$

No limite assintótico $\dot{\phi} = \text{cte} = a$, pois o dilaon deve ser proporcional ao tempo, teremos

$$a \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R^N} \right) + \frac{R^N}{2} (N-1) \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R^N} \right) \right]^2 \left[1 - \alpha' \left(\frac{d}{dt} \ln R \right)^2\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R^N} \right) \left\{ a + \frac{R^N}{2} (N-1) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R^N} \right) \left[1 - \alpha' \left(\frac{d}{dt} \ln R \right)^2\right] \right\} = 0$$

$$a - \frac{R^N}{2} (N-1) \frac{N\dot{R}}{R^{N+1}} \left[1 - \alpha' \left(\frac{d}{dt} \ln R \right)^2\right] = 0$$

$$a - \frac{N}{2} (N-1) \frac{\dot{R}}{R} \left[1 - \alpha' \left(\frac{d}{dt} \ln R \right)^2\right] = 0$$

ou seja

$$\frac{2a}{N(N-1)} - \frac{d}{dt} (\ln R) - \alpha' \left[\frac{d}{dt} (\ln R) \right]^3 = 0 \quad (D.13)$$

Temos uma equação algébrica em $\frac{d}{dt}(\ln R)$ do 3º grau. Se existir solução da equação será da forma $\frac{d}{dt}(\ln R) = F[\frac{2a}{N(N-1)}, \alpha']$

Logo $R = ce^{Ft}$.

Substituindo em (2.1.17), concluímos que no limite assintótico, com $\dot{\phi} = a$, teremos

$$-F^2 + \alpha' F^4 = 0$$

Fatorando-a teremos

$$F^2[-1 + \alpha' F^2] = 0$$

com $F = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}, 0$.

Portanto a solução que nos interessa é

$$R = e^{\pm \frac{t}{\sqrt{\alpha'}}} \quad (D.14)$$

Substituindo (D.14) em (D.13) teremos

$$\frac{2a}{N(N-1)} = 0$$

ou seja $a = \dot{\phi} = 0$, de onde $\phi = \text{cte}$.

Logo a solução assintótica com $\phi = at + b$ não existe para o sistema de equações (2.1.17.a), (2.1.18) e (2.1.19).

A solução cujo elemento de linha é dado por

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)^{4k_1} e^{\pm \frac{2t}{\sqrt{\alpha'}}} [d\rho^2 + d\Omega_{S_{N-1}}^2]$$

implica em $\phi = \text{cte}$.

Apêndice E

Cálculo das equações 3.2.10 e 3.2.11.

Para calcularmos (3.2.13) e (3.2.14) precisamos utilizar alguns resultados anteriormente obtidos. Do apêndice B do 1º capítulo extraímos os seguintes resultados

$$R_{\infty} = -N \frac{\ddot{R}}{R}$$

$$R_{ii} = - \left[\frac{\ddot{R}}{R} + (N-1) \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right)^2 \right] g_{ii} \quad (i = 1, \dots, N)$$

$$R_{oabc} R_o{}^{abc} = 2g_{\infty} N \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)^2$$

$$R_{iabc} R_i{}^{abc} = 2g_{ii} \left[\left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)^2 + (N-1) \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right)^2 \right] \quad (i = 1, \dots, N)$$

O elemento de linha é dado por (2.1.5), onde

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (E.1)$$

com as componentes do tensor métrico dadas por

$$g_{\infty} = \frac{1}{g_{\infty}} = 1;$$

$$g^{11} = \frac{1}{g^{11}} = -\frac{R^2}{1 - kr^2};$$

$$g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = -r^2 R^2(t);$$

$$g_{33} = \frac{1}{g^{33}} = -r^2 \text{sen}^2 \theta R^2(t)$$

Fazendo $N = 3$ nas expressões acima obteremos:

$$R_{\infty} = -3 \frac{\ddot{R}}{R} \quad (E.3)$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{R^2}{1 - kr^2} \left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) \right] \\ R_{22} &= r^2 R^2 \left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) \right] \\ R_{33} &= r^2 \text{sen}^2 \theta R^2 \left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) \right] \\ R_{oabc} R_o^{abc} &= 6 \left[\left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)^2 \right] \\ R_{1abc} R_1^{abc} &= -\frac{2R^2}{1 - kr^2} \left[\left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right)^2 \right] \\ R_{2abc} R_2^{abc} &= -2r^2 R^2 \left[\left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right)^2 \right] \\ R_{3abc} R_3^{abc} &= -2r^2 \text{sen}^2 \theta R^2 \left[\left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (E.4)$$

Cálculo de $R^\mu{}_\mu$

$$\begin{aligned} R^\mu{}_\mu &= R^0{}_0 + R^1{}_1 + R^2{}_2 + R^3{}_3 = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} = \\ &= -3 \frac{\ddot{R}}{R} - \left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) \right] - \left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) \right] - \left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Logo } R^\mu{}_\mu = -6 \left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) \right] \quad (E.5)$$

Cálculo de $R_{abcd} R^{abcd}$

Temos que

$$\begin{aligned}
R_{abcd}R^{abcd} &= R_{obcd}R^{obcd} + R_{1bcd}R^{1bcd} + R_{2bcd}R^{2bcd} + R_{3bcd}R^{3bcd} = \\
&= g^{oo}R_{obcd}R_o{}^{bcd} + g^{11}R_{1bcd}R_1{}^{bcd} + g^{22}R_{2bcd}R_2{}^{bcd} + g^{33}R_{3bcd}R_3{}^{bcd} = \\
&= 6 \left[\left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)^2 \right] + 2 \left[\left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right)^2 \right] \\
&+ 2 \left[\left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right)^2 \right] + 2 \left[\left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

De onde

$$R_{abcd}R^{abcd} = 12 \left[\left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right)^2 \right] \quad (E.6)$$

Precisamos ainda calcularmos $\nabla_\alpha \nabla_\beta \phi$, $\nabla^2 \phi$ e $(\nabla \phi)^2$. Como ϕ é função apenas do tempo, esses cálculos simplificam-se bastante.

Cálculo de $\nabla_\alpha \nabla_\beta \phi$ para $\alpha = \beta$

Para $\alpha = \beta = 0$ temos que $\nabla_o \nabla_o \phi = \ddot{\phi} - \Gamma_{oo}^o \dot{\phi} = \ddot{\phi}$

Para $\alpha = \beta = 1$ temos que $\nabla_1 \nabla_1 \phi = -\Gamma_{11}^o \dot{\phi} = -\frac{R\dot{R}}{1 - kr^2} \dot{\phi}$

Para $\alpha = \beta = 2$ temos que $\nabla_2 \nabla_2 \phi = -\Gamma_{22}^o \dot{\phi} = -r^2 R \dot{R} \dot{\phi}$ (E.7)

Para $\alpha = \beta = 3$ temos que $\nabla_3 \nabla_3 \phi = -\Gamma_{33}^o \dot{\phi} = -r^2 \sin^2 \theta R \dot{R} \dot{\phi}$

Então teremos:

$$\nabla^2 \phi = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \phi = g^{oo} \nabla_o \nabla_o \phi + g^{11} \nabla_1 \nabla_1 \phi + g^{22} \nabla_2 \nabla_2 \phi + g^{33} \nabla_3 \nabla_3 \phi$$

$$\text{De onde obtivemos } \nabla^2 \phi = \ddot{\phi} + \frac{3\dot{R}}{R} \dot{\phi} \quad (E.8)$$

Cálculo de $(\nabla\phi)^2$

$$(\nabla\phi)^2 = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi = g^{\infty\infty}\partial_\infty\phi\partial_\infty\phi + g^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi$$

Como $\partial_i\phi = \partial_j\phi = 0$ onde $i, j = 1, 2, 3$, teremos:

$$(\nabla\phi)^2 = g^{\infty\infty}\dot{\phi}^2 = \dot{\phi}^2 \quad (E.9)$$

Cálculo de (3.2.13)

Escrevendo explicitamente (3.2.13) através de (3.2.10) teremos:

$$\nabla^2\phi - (\nabla\phi)^2 + \frac{R^\mu{}_\mu}{4} + \frac{\lambda}{8}R_{abcd}R^{abcd} = 0$$

De onde teremos

$$\ddot{\phi} + \frac{3\dot{R}}{R}\dot{\phi} - \dot{\phi}^2 - \frac{6}{4}\left[\frac{\ddot{R}}{2R} - \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right)\right] + \frac{\lambda}{8}12\left[\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)^2 + \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right)\right] = 0$$

ou seja:

$$\ddot{\phi} + \frac{3\dot{R}}{R}\dot{\phi} - \dot{\phi}^2 - \frac{3\ddot{R}}{2R} - \frac{3}{2}\left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right) + \frac{3\lambda}{2}\left[\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)^2 + \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2}\right)\right] = 0 \quad (3.1.13)$$

Para calcularmos (3.2.14) precisamos ainda do cálculo de alguns termos da mesma.

De (3.2.11) temos que para $\mu = \nu = 0$

$$R_{\infty\infty} + 2\nabla_\infty\nabla_\infty\phi + \lambda R_{obcd}R_o{}^{bcd} + \lambda[4\nabla_\mu\nabla_\nu\phi R_o{}^{\mu\nu} - 8\nabla_\mu\nabla_\nu\phi R_o{}^{\mu\nu} - 8\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi R_o{}^{\mu\nu} - 2\nabla_\mu\nabla_\nu\phi R_o{}^{\mu\nu}] = 0 \quad (E.10)$$

Cálculo de $\nabla_\mu \nabla_\nu \phi R_o^{\mu\nu}$

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \phi R_o^{\mu\nu} = \nabla_1 \nabla_1 \phi R_o^{11} + \nabla_2 \nabla_2 \phi R_o^{22} + \nabla_3 \nabla_3 \phi R_o^{33}$$

Usando os resultados anteriormente obtidos e lembrando que $\phi = \phi(t)$,

$$\begin{aligned} & \nabla_1 \nabla_1 \phi R_o^{11} + \nabla_2 \nabla_2 \phi R_o^{22} + \nabla_3 \nabla_3 \phi R_o^{33} = \\ & -\frac{R\dot{R}\dot{\phi}}{1-kr^2} (g^{11})^2 g_{oo} R^o_{110} - r^2 R\dot{R}\dot{\phi} (g^{22})^2 g_{oo} R^o_{220} - r^2 \text{sen}^2 \theta R\dot{R}\dot{\phi} (g^{33})^2 g_{oo} R^o_{330} = \\ & \frac{R\dot{R}\dot{\phi}}{1-kr^2} \cdot \frac{(1-kr^2)^2}{R^4} R^o_{101} + r^2 R\dot{R}\dot{\phi} \frac{1}{r^4 R^4} R^o_{202} + r^2 \text{sen}^2 \theta R\dot{R}\dot{\phi} \frac{1}{r^4 \text{sen}^4 \theta R^4} R^o_{303} = \\ & \frac{R\dot{R}\dot{\phi}}{1-kr^2} \cdot \frac{(1-kr^2)^2}{R^4} \frac{R^2}{1-kr^2} \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{r^2 R\dot{R}\dot{\phi}}{r^4 R^4} r^2 R^2 \frac{\ddot{R}}{R^2} + \frac{r^2 \text{sen}^2 \theta R\dot{R}\dot{\phi}}{r^4 \text{sen}^4 \theta R^4} r^2 R^2 \text{sen}^2 \theta \frac{\ddot{R}}{R} = \frac{3\dot{R}\ddot{R}\dot{\phi}}{R^2} \end{aligned}$$

$$\text{ou seja } \nabla_\mu \nabla_\nu \phi R_o^{\mu\nu} = \frac{3\dot{R}\ddot{R}\dot{\phi}}{R^2}$$

A obtenção de $\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi R_o^{\mu\nu}$ e $\nabla_\mu \phi \nabla_\nu R_o^{\mu\nu}$

$$\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi R_o^{\mu\nu} = \nabla_o \phi \nabla_o \phi R_o^{\infty} = 0$$

Analogamente teremos $\nabla_\mu \phi \nabla_\nu R_o^{\mu\nu} = \nabla_o \phi \nabla_\nu R_o^{\infty} = 0$

Cálculo de $\nabla_\mu \nabla_\nu R_o^{\mu\nu}$

A expressão da derivada covariante segunda das componentes do tensor de Riemann é dada por

$$\nabla_k \nabla_\rho R_\alpha^{\sigma\mu}{}_\beta = \partial_k \nabla_\rho R_\alpha^{\sigma\mu}{}_\beta - \Gamma_{k\rho}^\lambda \nabla_\lambda R_\alpha^{\sigma\mu}{}_\beta - \Gamma_{k\alpha}^\lambda \nabla_\rho R_\lambda^{\sigma\mu}{}_\beta + \Gamma_{k\lambda}^\sigma \nabla_\rho R_\alpha^{\lambda\mu}{}_\beta + \Gamma_{k\lambda}^\mu \nabla_\rho R_\alpha^{\sigma\lambda}{}_\beta$$

de forma análoga teremos que

$$\nabla_\rho R_\alpha^{\sigma\mu}{}_\beta = \partial_\rho R_\alpha^{\sigma\mu}{}_\beta - \Gamma_{\rho\alpha}^\lambda R_\lambda^{\sigma\mu}{}_\beta + \Gamma_{\rho\lambda}^\sigma R_\alpha^{\lambda\mu}{}_\beta + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu R_\alpha^{\sigma\lambda}{}_\beta - \Gamma_{\rho\beta}^\lambda R_\alpha^{\sigma\mu}{}_\lambda$$

Para o caso particular em que $k = \sigma = \mu$; $\rho = \mu = \nu$ e $\alpha = \beta = 0$ e o uso das expressões deste apêndice obtemos

$$\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} R_{\circ}^{\mu\nu} = \frac{3\dot{R}}{R} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right) + \frac{2\dot{R}}{R} \left[\frac{\ddot{R}}{R} - \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) \right] \right\}$$

Substituindo as diversas expressões em (E.10)

$$-\frac{3\ddot{R}}{R} + 2\ddot{\phi} + 6\lambda \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)^2 + \lambda \left\{ \frac{12\dot{R}\ddot{R}\dot{\phi}}{R^2} - \frac{6\dot{R}}{R} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right) + \frac{2\dot{R}}{R} \left[\frac{\ddot{R}}{R} - \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) \right] \right] \right\} = 0$$

$$\frac{3\ddot{R}}{R} - 2\ddot{\phi} - 6\lambda \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right)^2 - \frac{12\lambda\dot{R}\ddot{R}\dot{\phi}}{R^2} - \frac{6\lambda\dot{R}}{R} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right) + \frac{2\dot{R}}{R} \left[\frac{\ddot{R}}{R} - \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) \right] \right\} = 0$$

que é a (3.2.14)

Bibliografia

- [1] S. Mukhi - *Non-linear σ Models, Scale Invariance and Strings Theory* TIFR/TH/86-24
- [2] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten - *Superstring Theory* - vol. 1.
- [3] D.H. Friedan - *Ann. Phys.* 163, 318-419(1985)
- [4] C.G. Callan, I.R. Klebanov and M.J. Perry - *Nucl. Phys.* B278(1986) 78-90.
- [5] S. Weinberg - *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* - 1072, John Wiley & Sons, Inc.
Y.B. Zel'dovich - *General Relativity, An Einstein Centenary Survey* - Edited by S.W. Hawking & W. Israel - Cambridge University Press 1979.
A. Linde - *Particle Physics and Inflationary Cosmology* - Harwood Acad. Pub., 1991.
J.V. Naligar and T. Padmanobhan - *Gravity, Gauge Theories and Quantum Cosmology*, 1986 - Published by D. Reidel Pub. Co.
- [6] A.D. Sakharov - *JETP Lett.* 5, 24(1967)
W. Kolb and S. Wolfram - *Nucl. Phys.* B172, 224(1980)
- [7] A.D.Linde - *Rep. Prog. Phys.*, vol 42, (1979)389 - 437
A.D. Linde - *JETP Lett.* 34, 77(1975)
J. Dreitlein - *Phys. Rev. Lett.* 33, 1243(1975)
- [8] A.H. Guth - *Phys Rev. D*, 23(1981) 347-356
- [9] S. Coleman and E. Weinberg - *Phys Rev. D*, 7(1973) 1988-1910
A.D. Linde - *Phys Rev. Lett.* (1982), 389-393 A.D. Linde - *Rep. Prog. Phys.* 42, (1979) 389-437

-
- [10] H. Cramer - *Metodos Matematicos de Estadistica* - Aguilar, S.A de Ediciones - Madrid, 1963, pag. 140
- [11] A.A. Tseylin - Proceeding of the International Workshop on String, Quantum Gravity and Physics at the Planck Energy Scale, Eric, 1992, DAMTP-92-36.
- [12] G.M. Murphy - *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*, 1960, D. Van Nostrand Company, Inc.
- [13] E. Schrödinger - *Expanding Universes*, 1956, Camb. Univ. Press.
S.W. Hawking and G.F.R. Ellis - *The Large Scale Structure of Space-Time*, 1973
G.W. Gibbons and S.W. Hawking - *Phys. Rev. D*, 15(1977), 2738 - 2751
- [14] R. Myers - *Nucl. Phys.* B289(1987) 701-716
C.G. Callan, R.C. Myers and M.J. Perry - *Nucl. Phys.* B311 (1988/89) 673 - 698
- [15] R. Hagedorn - *Suplemento Al Nuovo Cimento*, III, 1965
W. Troost and H. Van Darn - *Nucl. Phys* B152(1979) 442-460
Bo Sundborg - *Nucl. Phys* B254(1985) 583-592
K.H. O'Brien and C. Itan - *Phys. Rev. D*, 36(1987) 1184-1192
H.J. De Vega and N. Sanchez - *Nucl. Phys.* B299(1988) 818-846
J.J Atick and E. Witten - *Nucl. Phys.* B310(1988) 291-334
R. Parentani and R. Potting - *Phys. Rev. Lett* 63, (1989) 945-948
- [16] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler - *Gravitation* - 1973 - W.H. Freeman and Company
- [17] A. Starobinski - *Phys. Lett.* 91B (1980) 99-102
- [18] E. Abdalla and A.C.V.V. de Siqueira - IFUSP/P-1028 - Instituto de Física, Universidade de São Paulo - Janeiro - 1993.
- [19] R. Brandenberger and C. Vafa - *Nucl. Phys.* B316(1989) 391 - 410
- [20] A.A. Tseytlin and C. Vafa - *Nucl. Phys.* B372(1992) 443 - 466

-
- [21] Mikio Kaku - *Introduction to Superstring* - Springer-Verlag - New York Inc - 1988.
- [22] Ya, B. Zeldovich and M. Yu. Khlopov, *Phys. Lett.* 79B, 239(1978)
J.P. Preskill, *Phys. Rev. Lett.* 43, 1365(1979)
- [23] R. Adler, M. Bazin and M. Schiffer - *Introduction to General Relativity* - New York - McGraw - Hill

```
C YVAR(1) --> PHI PONTO (FP)
C YVAR(2) --> R (R)
C YVAR(3) --> R PONTO (RP)
C YVAR(4) --> RP PONTO (RPP)
C PHI 2 PONTOS = SIGMA
```

```
C CKPAR --> K
C ALPHA --> ALFA
C
```

```
C This program solves a set of differential equations.
*
```

```
PROGRAM SOLVEQS
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
```

```
* Common block for parameters.
*
```

```
common/params/delta,alpha,ckpar,RM,RCHI
dimension yvar(0:4),ytmp(0:4),yfunc(0:4)
```

```
* OPEN(UNIT=8,FILE='FINAL.OUT',status='new')
```

```
C contains phi
```

```
open(unit=10,file='FINAL0.top',status='new')
```

```
C contains phi ponto
```

```
open(unit=11,file='FINAL1.top',status='new')
```

```
C contains R
```

```
open(unit=12,file='FINAL2.top',status='new')
```

```
C contains RP
```

```
open(unit=13,file='FINAL3.top',status='new')
```

```
C contains RPP
```

```
open(unit=14,file='FINAL4.top',status='new')
```

```
C contains Log R
```

```
open(unit=15,file='FINAL5.top',status='new')
```

```
C contains Log RP
```

```
open(unit=16,file='FINAL6.top',status='new')
```

```
* Define fixed constants : accept values of parameters.
*
```

```
type '(1x,''Enter delta [ 0.001 ]: '',$)'
```

```
accept*, delta
```

```
write(8,1000)delta
```

```
1000 format(1X,'delta equal to',3X,f10.5)
```

```
* type '(1x,''Enter alpha [ -1, 0, 1 ]: '',$)'
```

```
accept*, alpha
```

```
write(8,1001)alpha
```

```
1001 format(1X,'alpha equal to',3X,f10.5)
```

```
* type '(1x,''Enter ckpar [ -1, 0, 1 ]: '',$)'
```

```
accept*, ckpar
```

```
write(8,1002)ckpar
```

```
1002 format(1X,'k equal to',3X,f10.5)
```

```
* type '(1x,''Enter RM [ 0.0 ]: '',$)'
```

```
accept*, RM
```

```
write(8,1010)RM
```

```
1010 format(1X,'RM equal to',3X,f10.5)
```

```

do ic=1,999
  call ysub(yvar,yfunc)
  YTMP(0)=YVAR(0)+YFUNC(0)*DELTA
  ytmp(1)=yvar(1)+yfunc(1)*delta
  ytmp(2)=yvar(2)+yfunc(2)*delta
  ytmp(3)=yvar(3)+yfunc(3)*delta
  YTMP(4)=YVAR(4)+YFUNC(4)*DELTA
  iters=iters+1
  time=time+delta
  YVAR(0)=YTMP(0)
  yvar(1)=ytmp(1)
  yvar(2)=ytmp(2)
  yvar(3)=ytmp(3)
  YVAR(4)=YTMP(4)
  type '(1x,i3,5g13.4)',iters,time,yvar(1),yvar(2),yvar(3)
*
  ,YVAR(4)

write(10,*) time, yvar(0)
write(11,*) time, yvar(1)
write(12,*) time, yvar(2)
write(13,*) time, yvar(3)
write(14,*) time, yvar(4)
write(15,*) time, DLOG(yvar(2))
write(16,*) time, DLOG(yvar(3))
write(8,1003)iters,time,yvar(0),yvar(1),yvar(2),yvar(3),yvar(4)
end do

do iures=10,16
write(iures,*) 'join 1'
end do
close(8)
close(10)
close(11)
close(12)
close(13)
close(14)
close(15)
close(16)
stop
END

```

* These are the propagating functions for the variable FPP.

```

subroutine YSUB (yvar,yfunc)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
common/params/delta,alpha,ckpar,RM,RCHI
dimension yvar(0:4),yfunc(0:4)

D23=2./3.
yinv2=1.0/yvar(2)**2
ytemp=yvar(3)*yinv2

sigma=-3.0*yvar(3)*yvar(1)/yvar(2)+1.5*(ckpar+yvar(3)**2)
& /yvar(2)**2 *(1.0 +0.5*(-1)*alpha*(ckpar+yvar(3)**2)/yvar(2)
& **2)+ .75*(-1)*ALPHA*YINV2*YVAR(4)**2
& +1.5*YVAR(4)/YVAR(2)+YVAR(1)**2-(RM+RCHI*YVAR(0)**2)*YVAR(0)

yfunc(0)=yvar(1)

```

```

type '(1x, ''Enter RCHI [ 0.0 ]: '', $)'
accept*, RCHI
write(8,1011)RCHI
.011 format(1X, 'RCHI equal to', 3X, f10.5)
-----

type '(1x, ''Enter initial time [ 2.0 ]: '', $)'
accept*, time
-----

type '(1x, ''Enter initial yvar0 [ -1.5 ]: '', $)'
accept*, yvar(0)
-----

type '(1x, ''Enter initial yvar1 [ -1.5 ]: '', $)'
accept*, yvar(1)
-----

type '(1x, ''Enter initial yvar2 [ 1.0 ]: '', $)'
accept*, yvar(2)
-----

type '(1x, ''Enter initial yvar3 [ -1.2 ]: '', $)'
accept*, yvar(3)
-----

type '(1x, ''Enter initial yvar4 [ -1.2 ]: '', $)'
accept*, yvar(4)
-----

* Initialize counter and type out initial condition.
-----

iters=0
type *, ' # ', 'time '
*      ', 'yvar0 ', 'yvar1 ', 'yvar2 '
*      ', 'YVAR3 '
type '(1x, i3, 5g13.4)', iters, time, yvar(0), yvar(1), yvar(2)
*      , YVAR(3)

do iures=10,16
write(iures,*) 'SET FONT DUPLEX'
write(iures,99) ALPHA,CKPAR,RM,
* RCHI, YVAR(0), YVAR(1), YVAR(2), YVAR(3), YVAR(4)
99 FORMAT(1X, 'TITLE TOP', 1X, 1H', 9F7.3, 1H')
write(iures,*) 'SET ORDER X Y'
end do
write(15,*) 'SET SCALE Y LOGARITHMIC'
write(16,*) 'SET SCALE Y LOGARITHMIC'

write(10,*) time, yvar(0)
write(11,*) time, yvar(1)
write(12,*) time, yvar(2)
write(13,*) time, yvar(3)
write(14,*) time, yvar(4)
write(15,*) time, DLOG(yvar(2))
write(16,*) time, DLOG(yvar(3))
write(8,1003) iters, time, yvar(0), yvar(1), yvar(2), yvar(3), yvar(4)
1003 format(I3, 1x, 'T=', f6.3, 1x, 'F=', f9.3, 1x, 'FP=' f9.3, 1x,
* 'R=', f9.3, 1x, 'RP=', f7.3, 1x, 'RPP=' f8.3)
-----

* Start iterating.
-----

```

```
yfunc(1)=sigma
yfunc(2)=yvar(3)
yfunc(3)=yvar(4)
YFUNC(4)=YVAR(2)*YVAR(4)/((-1)*ALPHA*YVAR(3))+YVAR(4)*YVAR(4)/
& YVAR(3)-D23*YVAR(2)*YVAR(2)*SIGMA/((-1)*ALPHA*YVAR(3))-YVAR(3)*
& YVAR(4)/YVAR(2)+2.*YVAR(1)*YVAR(4)+2.*YTEMP*(CKPAR+YVAR(3)**2)
```

```
return
END
```

```
*****
```