N.T. 316

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

SOBRE AS EQUAÇÕES DE VERTOGEN E DE VRIES NO MODELO DE DICKE GENERALIZADO

TESE DE MESTRADO

LUIZ CARLOS JAFELICE

ORIENTADOR

WALTER F. WRESZINSKI

Walter F. W

SÃO PAULO

1976

À MINHA MÃE E

AO MEU PAI.

Agradecimentos

- Ao Walter Wreszinski pela orientação inestimável e pelo apoio em situações difíceis, que transcendeu de muito as suas obrigações como orientador.

- Aos meus pais pela abnegação e confiança com que me ajudaram sempre.

- Ao Normando Fernandes de quem recebi a primeira orientação científica

- À D.Carmen que me recebeu e orientou quando decidi mudar de área de pesquisa, e que sempre se mostrou preocupada com minha formação.

- À Heloisa pelo apoio psicológico com o qual ajudou-me a iniciar todo meu processo de reestruturação, sem o que tudo teria ficado pela metade.

- À D.Maria que pela arte do movimento faz-me descobrir a arte do equilíbrio: a vida.

- À Cilo, Dora, Miriam, Jéssica, Lúcia, Miriam, Michael e Sílvio, artistas do movimento, que, ao meu lado, ajudaram-me a suportar as consequências que uma mudança de consciência acarreta.

- Ao Pirulito, Heitor e Becker pelas discussões que lograram me fornecer uma visão mais crítica e madura da relação entre o homem e seu meio.

- Ao Becker pelo que fizemos juntos, e pela dedicação com que sempre me incentivou nos momentos de desânimo.

- Ao Pia e à Margot pelo que significaram sempre para mim , pelas experiências que vivemos juntos, e pelo exemplo de integridade admirável de posição perante a vida.

- Ao Walter, Tadeu, Plascak, Fátima, Engles e muitos outros colegas por repartirmos juntos os acontecimentos deste Instituto.

- Ao professor Fleming pela forma bonita e entusiasmadora de encarar a física, que resultou em belas visões unificadas das coisas, para mim.

- Ao professor Klaus pelas discussões frutíferas que tivemos e ensinamentos que me induziu a descobrir.

- Ao Sílvio, Paulo, Olivetti, Sé, Nicolau, Kohl, Oscar e Sérgio pelos momentos agradabilíssimos que passamos tocando juntos, e pelo que pude com eles descobrir através da música.

- Ao Vernili, Rubinho e grupo, com quem começo a rever o que me esqueci há milênios.

- Àquele meu eu, que com enorme otimismo foi sempre conseguindo transformar todo este amálgama de relações e experiências em algo dirigido à integração.

- A todas as minhas outras partes também, pela maravilha e riqueza que me vão mostrando ser o ser humano.

- A todos aqueles que, sem saberem, possibilitaram este trabalho, embora a eles nada darei como troca, em tendo-o terminado.

- Ao Perclides, Bruno e pessoal da gráfica pelo assessoramento sempre pronto que me ofereceram em sua especialidade, quando o necessitei.

- À Ronice, Helade e seu João pelo assessoramento perfeito e gentil que sempre tive com a parte bibliográfica.

- À Rita pela eficiência e simpatia, raras de se encontrar, com que sempre tratou meus assuntos.

- À Tamico, Sérgio, Ivone, Elza, por cederem-me os meios necessários para que eu pudesse fazer meus relatórios semestrais e esta minha dissertação.

- Aos guardas e demais funcionários que sempre facilitaram, dentro de suas possibilidades, meus trabalhos.

- A mim mesmo pelo, embora torturante, excelente trabalho de datilografia.

- A todos aqueles que não agradeço explicitamente aqui, mas de cujos serviços ou amizade usei, principalmente porque estes agradecimentos já ficaram desproporcionais, exagerados talvez.

- À F.A.P.E.S.P. pelo constante apoio financeiro.

- Ao I.F.U.S.P. por possibilitar-me materialmente a execução deste trabalho.

Sumário

Proporcionamos uma justificação rigorosa das equações propostas por De Vries eVertogen ([1]) para modelos de campo médio e aplicâmo-la ao modelo de Dicke generalizado ([5],[6] [7]), isto é, com termo antiressonante diferente de zero. OS / valores médios térmicos de certos operadores , no modelo de Dicke na aproximação "rotating-wave" (isto é, sem termo antiressonante), podem ser obtidos do sistema de equações por um processo limite, que é o de "quase-médias" ([11]). Este ponto é ilustrado pelo cálculo do valor médio térmico do mesmo operador considerado em [1]. Finalmente, faremos uma discussão das quase-médias nesse modelo.

Abstract

A rigorous justification of equations proposed by De Vries and Vertogen ([1]) is provided for mean field models/ and applied to the generalized Dicke model ([5],[6],[7]), that is, with nonzero counterrotating term. Thermal expectation values of certain operators in the Dicke model in the "rotating-wave" approximation (i.e., with zero counterrotating term) / may be obtained from the system of equations by a limiting process, which coincides with the method of "quasi-averages" ([11]) This point is illustrated by the calculation of the thermal expectation value of the same operator considered in [1]. Finally, a discussion of quasi-averages in this model is provided.

Índice

I. Introdução

Este trabalho visa dar uma justificação rigorosa/ ao método proposto por G. Vertogen e A.S.De Vries [1], para o/ cálculo das propriedades termodinâmicas do modelo do maser de Dicke [2]. Para tal devemos iniciar definindo o sistema físico que este modelo tenta explicar, assim como as suposições que / terão de ser feitas sobre este sistema para que êle possa ser/ resolvido. Devemos explicitar também os métodos matemáticos // que usaremos em tal justificação e sua ligação com a física // considerada, e ainda quais os limites em que as conclusões obtidas serão válidas.

Nosso sistema é de N átomos de dois níveis interagindo com o campo de radiação eletromagnética quantizado. O Hamiltoniano geral deste sistema é dado por ([3]):

$$H_N = \sum_{\mathbb{k},\lambda} |\mathbb{k}|\, a^*(\mathbb{k},\lambda)\, a(\mathbb{k},\lambda) + \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2m_i} \left(\mathbb{P}_i - \frac{e}{c} \mathbb{A}_N(\mathbb{x}_i) \right)^2 + V_i(\mathbb{x}_i) \right\} + \sum_{i<j} V_{ij}(\mathbb{x}_i - \mathbb{x}_j) \qquad \text{(I-1)}$$

onde $a^{\#}(\mathbb{k},\lambda)$ são os operadores de bosons de criação e aniquilação para os modos fotônicos com energias dadas por $|\mathbb{k}|$, // $V(\mathbb{x})$ é o potencial atômico, V_{ij} o potencial de interação entre os átomos e $\mathbb{A}(\mathbb{x})$ o potencial vetor do campo eletromagnético / quantizado

$$\mathbb{A}(\mathbb{x}) = \sum_{\lambda=1}^{2} \sum_{\mathbb{k}} \frac{1}{(V|\mathbb{k}|)^{1/2}}\, \mathbb{e}(\mathbb{k},\lambda) \left\{ a(\mathbb{k},\lambda) e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{x}} + a^*(\mathbb{k},\lambda) e^{-i\mathbb{k}\cdot\mathbb{x}} \right\} \qquad \text{(I-2)}$$

onde $V=L^3$ é o volume da cavidade, $\mathbb{k} \in \left\{ \frac{2\pi}{L} \mathbb{n}, \mathbb{n} \in \mathbb{Z}^3 \right\}$ (condi- /

ções periódicas), e os vetores de polarização $\mathbb{e}(\mathbb{k},\lambda)$ satisfazem a $\mathbb{k}\cdot\mathbb{e}(\mathbb{k},\lambda)=0$, o que corresponde a tomar o calibre ("gauge") de Coulomb, onde $\nabla\cdot\mathbb{A}(x)=0$ ([12]). O que nos interessará na verdade será o cálculo de grandezas físicas no limite termodinâmico, i.e., $N\to\infty, V\to\infty$ com N/V = constante; assim já colocamos acima N em substituição a V. Porem, para o modelo que vamos estudar não consideraremos um Hamiltoniano tão geral. Faremos em (I-1) as aproximações: (a) de desprezar o termo de interação entre os átomos (justificada pelo fato de que a densidade dos átomos ativos é a de um gas altamente rarefeito ([3], §5.3); (b) a aproximação dipolar (de que o comprimento de onda da radiação é muito maior do que as dimensões da cavidade , que pode tornar-se grosseira no limite termodinâmico); (c) de considerar um único modo de frequência do campo de radiação ; (d) de desprezar o termo $\mathbb{A}^2$ (vide [4] para os efeitos termodinâmicos desse termo).

Porém, contrariamente ao que é usualmente feito quando do estudo do modelo do maser de Dicke, não faremos aqui a aproximação "rotating-wave" (para justificação desse termo , vide [3]§8.5). Na verdade, além disso aumentar a generalidade do estudo feito, tem por objetivo principal a quebra de uma simetria do Hamiltoniano em questão, o que é necessário para a interpretação rigorosa dos resultados obtidos por Vertogen-De Vries [1] ,como veremos posteriormente.

Com tais considerações em mente, podemos escrever então o Hamiltoniano final que trataremos, já sob a forma proposta por Dicke [2] , qual seja(para uma conexão precisa entre o Hamiltoniano geral (I-1) e o abaixo, vide [4]) :

$$H_N = a^*a + \varepsilon \sum_{n=1}^{N} S_n^3 + \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{n=1}^{N} [\lambda(a S_n^+ + a^* S_n^-) +$$

$$+ \mu(a S_n^- + a^* S_n^+)] \qquad \text{(I-3)}$$

onde $\varepsilon > 0$ é a diferença de energia entre os dois níveis do átomo, $\lambda \geqslant 0$ e $\mu \geqslant 0$ (sem perda de generalidade) são as constantes de acoplamento entre o átomo e o campo de radiação, sendo/ λ o termo ressonante e μ o termo anti-ressonante[3]; $S_n^{\pm,3}$ são / operadores de spin-1/2 que descrevem o sistema de N átomos de/ dois níveis, sendo $S_n^{\pm} = S_n^1 \pm i S_n^2$ ($n \in [1,N]$). Estes operadores estão definidos sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_N^{sp} \otimes \mathcal{F}$, onde $\mathcal{H}_N^{sp} = \bigotimes_{i=1}^{N} \mathbb{C}^2(i)$ é o espaço de N átomos de dois níveis, e $\mathcal{F}$ é o espaço de Fock para um boson (foton). Chamemos:

$S_N^{\pm,3} = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^{\pm,3}$, com $\sigma_i^{\pm} = \sigma_i^1 \pm i \sigma_i^2$, sendo $\sigma_i^{1,2,3}$ matrizes de Pauli sobre $\mathbb{C}^2(i)$. Podemos escrever então:

$$H_N = a^*a + \varepsilon S_N^3 + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} (S_N^+ a + S_N^- a^*) +$$

$$+ \frac{\mu}{\sqrt{N}} (S_N^- a + S_N^+ a^*) \qquad \text{(I-4)}$$

Este é o Hamiltoniano que usaremos, e o chamamos/ Hamiltoniano de Dicke generalizado porque ele difere pelo termo anti-ressonante (em μ) do Hamiltoniano:

$$H_N' = a^*a + \varepsilon S_N^3 + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} (S_N^+ a + S_N^- a^*) \qquad \text{(I-5)}$$

que é o originalmente proposto por Dicke ([2]) e que só contém o termo ressonante (em λ). Outra nomenclatura é a de que H_N' é o Hamiltoniano de Dicke na aproximação "rotating-wave" (de onda girante), enquanto H_N contém termos anti-girantes ("counter rotating"). Referimo-nos a [3](§8.5) para a justificação desses termos e dos termos "ressonante" e "anti-ressonante"; e a [4] / para a influência dos termos anti-ressonantes nas propriedades termodinâmicas.

Vejamos algumas propriedades de H_N e H_N' relevantes para o que se segue. O Hamiltoniano H_N apresenta transição de fase superradiante (para esclarecimento desse termo, vide [3]) de segunda ordem, no sentido de que o calor específico / apresenta descontinuidade de segunda espécie a uma temperatura crítica $T_c(\mu)$, definida por:

$$\frac{\varepsilon}{(\lambda+\mu)^2} = tgh\left(\frac{1}{2}\beta_c\varepsilon\right) \tag{I-6}$$

onde $\beta_c = 1/kT_c(\mu)$ ([5] e [6], [7] e [8]).

O modelo H_N' apresente o mesmo comportamento, sendo a temperatura crítica dada pela mesma expressão (I-6) com / $\mu=0$. Deste fato deduz-se que:

$$T_c(\mu) \geqslant T_c(0) \quad \text{se} \quad \mu \geqslant 0 \,. \tag{I-7}$$

Tanto H_N como H_N' comutam com $S_N^2 = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{N} S_i^{(j)}\right)^2$. Porém H_N' apresenta uma simetria adicional:

$$[C_N, H_N'] = 0 \quad , \text{ onde } C_N = a^*a + S_N^3 \,.$$

Como veremos logo mais, essa simetria adicional terá implicações fundamentais para o cálculo de valores médios térmicos. / Mais recentemente foi demonstrado que o modelo com o termo A^2 não apresenta transição de fase no caso $\lambda=\mu$ ([9]); no caso / $\lambda\neq\mu$, há transição de fase ([4]).

Para uma lista mais completa de referências sobre as propriedades desse Hamiltoniano, veja H.Nussenzveig [3].

O método que Vertogen-De Vries [1] propuseram consiste em obter um sistema de "equações do movimento" igualando os comutadores do Hamiltoniano de Dicke na aproximação "rotating-wave" ((I-5)) com os operadores "intensivos" $a^*/\sqrt{N}$, $a/\sqrt{N}$, S_N^3/N, S_N^+/N e S_N^-/N, a zero. OS operadores $S_N^{\pm,3}/N$, $a/\sqrt{N}$ e // $a^*/\sqrt{N}$ são ditos "intensivos" e serão nossas grandezas fundamentais. O nome "intensivo" tem um dos dois significados seguintes: (a) os operadores são somas de operadores locais sobre uma região de certo volume, divididos pelo volume, (caso de // $S_N^{\pm,3}/N$); (b) no limite termodinâmico, o número de modos do campo de radiação em qualquer intervalo de frequência é proporcional ao volume, isto é, o valor médio da energia $\langle a^*a\rangle$ é proporcional a N (ou V), logo $a/\sqrt{N}$ e $a^*/\sqrt{N}$ são "intensivos". O comutador do Hamiltoniano com qualquer desses operadores "intensi- / vos" é um polinômio nesses operadores.

Obtem-se então um sistema de equações para esses/ operadores, e interpretando-os vagamente como números-c ("valores médios" no limite termodinâmico, ou "térmicos"), foi possível aos autores, no caso do Hamiltoniano de Dicke (I-5), calcular o valor médio de S_N^3/N no limite termodinâmico sem determinar os valores médios dos outros operadores. Obtiveram desse / modo o resultado conhecido calculado por Hepp-Lieb ([5],[6])./ Esse método foi então aplicado por Pimentel e Zimerman [10] a outros modelos, tendo sido sempre reproduzidos os valores médios corretos já previamente calculados na literatura. Tendo / em vista que os autores não ofereceram nenhuma interpretação / teórica para esse procedimento, e a grande atração do método / pela simplicidade, propomo-nos neste trabalho preencher essa / falha.

Nesse sentido, iniciamos considerando (cap.II) estas equações como estando definidas "dentro" do estado de Gibbs

$$\rho_N^\beta(op.) = \frac{Tr_{\mathcal{H}_N}(e^{-\beta H_N'}\, op.)}{Tr_{\mathcal{H}_N}\, e^{-\beta H_N'}} \qquad (I-8)$$

Nesse caso é fácil verificar que $\rho_N^\beta([H_N,O_N])=0$, sendo O_N qualquer dos operadores intensivos $a^*/\sqrt{N}$, $a/\sqrt{N}$, S_N^3/N, S_N^+/N ou S_N^-/N.

Porém há um impasse no modelo proposto por eles: os valores médios térmicos dos operadores intensivos O_N, definidos como: $\lim_{N\to\infty}\langle O_N\rangle_{\beta N} \equiv \lim_{N\to\infty}\rho_N^\beta(O_N)$, no caso são:

$$\lim_{N\to\infty}\rho_N^\beta\left(\frac{a}{\sqrt{N}}\right) = \lim_{N\to\infty}\rho_N^\beta\left(\frac{a^*}{\sqrt{N}}\right) = \lim_{N\to\infty}\rho_N^\beta\left(\frac{S_N^+}{N}\right) = \lim_{N\to\infty}\rho_N^\beta\left(\frac{S_N^-}{N}\right) = 0 \qquad ,$$

devido à simetria $[C_N,H_N']=0$. E portanto essas equações ficam reduzidas a identidades tautológicas do tipo 0=0.

E mais: de acordo com essa interpretação dada, para a aplicabilidade dessas equações é necessário que: (a)

$$\lim_{N\to\infty}\rho_N^\beta(O_N^{(i)}\cdot O_N^{(j)}) = \lim_{N\to\infty}\rho_N^\beta(O_N^{(i)})\cdot\lim_{N\to\infty}\rho_N^\beta(O_N^{(j)}) \qquad (I-9)$$

para $O_N^{(i)}$ e $O_N^{(j)}$, dois operadores intensivos quaisquer $(i,j\in[1,5])$ e $\beta\in I$, sendo $I\subset\mathbb{R}^+\neq\emptyset$; (b) $\lim_{N\to\infty}\rho_N^\beta(O_N^{(i)})\neq 0$, $\forall i\in[1,5]$. (I-10)

O segundo passo para dar uma interpretação a esse sistema de equações, é o de considerar o Hamiltoniano mais geral H_N ((I-4)) (cap. II). Isto quebra a simetria existente anteriormente. Provaremos então (caps. II, III e IV) que nessas circunstâncias existe um intervalo de temperatura ($T<T_c$, sendo T_c a temperatura crítica do sistema) no qual os mencionados valores médios são diferentes de zero. Além disso, demonstraremos (cap. IV) que vale para certos operadores de interesse, a relação (I-8) acima. Por simplicidade de ilustração e também para comparar com os resultados de [1] no $\lim \mu\to 0_+$, faremos

(cap.III e IV) a mesma aplicação que esse autores, calculando/ o valor médio térmico de S_N^3/N.

Para esclarecer conceitos que surgem naturalmente dos argumentos usados para a justificação deste método, definimos e estudamos (cap.V) o conceito de quase-média, e problemas de derivabilidade da energia livre.

No capítulo VI apresentamos uma conclusão sucinta deste trabalho.

II. Valores Médios Térmicos — Equações de De Vries e Vertogen

Quanto aos valores médios térmicos, devemos enunciar claramente os procedimentos necessários para seus cálculos, assim como as implicações desses procedimentos.

Para calcularmos esses valores médios praticamente, definimos de forma genérica

$$P \equiv \left(\frac{S_N^+}{N}\right)^a \left(\frac{S_N^-}{N}\right)^b \left(\frac{S_N^3}{N}\right)^c \left(\frac{a}{\sqrt{N}}\right)^d \left(\frac{a^*}{\sqrt{N}}\right)^e \qquad \text{(II-1)}$$

com a,b,c,d,e $\in \mathbb{R}^+$, um polinômio em operadores intensivos.

Definamos também o Hamiltoniano:

$$H_N(\xi) = H_N + \xi N P \qquad \text{(II-2)}$$

sendo ξ um parâmetro arbitrário e pequeno.

Por definição de energia livre temos:

$$f_N^\beta(\xi) = -\frac{\beta^{-1}}{N} \log Tr_{\mathcal{H}_N} e^{-\beta H_N(\xi)} \qquad \text{(II-3)}$$

Nosentido de determinarmos $\lim_{N\to\infty} \langle P \rangle_{\beta,N}$, notamos que :/

$$\frac{\partial f_N^\beta(\xi)}{\partial \xi} = -\frac{\beta^{-1}}{N} \frac{Tr_{\mathcal{H}_N}\left(e^{-\beta H_N(\xi)}(-\beta N P)\right)}{Tr_{\mathcal{H}_N} e^{-\beta H_N(\xi)}} \qquad \text{(II-4)}$$

e portanto: $$\left.\frac{\partial f_N^\beta(\xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \langle P \rangle_{\beta,N} \qquad \text{(II-5)}$$

Ou seja: o $\lim_{N\to\infty} \langle P \rangle_{\beta,N}$, se existir, é o mesmo que / $\lim_{N\to\infty} \left.\frac{\partial f_N^\beta(\xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}$. E se para este último limite vale

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\partial f_N^\beta(\xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \lim_{N\to\infty} f_N^\beta(\xi)$$, então

$$\lim_{N\to\infty} \langle P \rangle_{\beta,N} = \frac{\partial}{\partial \xi} \lim_{N\to\infty} f_N^\beta(\xi) \qquad \text{(II-6)}$$

Mas isto é verdade se o $\lim_{N\to\infty} f_N^{\beta}(\xi)=f^{\beta}(\xi)$, for diferenciável em pois $\{f_N^{\beta}(\xi)\}$ é uma sequência de funções concavas de ξ em // $(-\infty,+\infty)$ (lema de Griffiths) (apêndice de [5] ; cap.V e apêndice B, deste trabalho).

Verificamos explicitamente, conforme apresentaremos no capítulo IV, que essas suposições acima são válidas no/ caso em que $P=S_N^3/N$, isto é, que $f^{\beta}(\xi)$ é diferenciável em ξ, e desta forma determinamos o $\lim_{N\to\infty} \langle P\rangle_{\beta,N}$. Porém, do ponto de vista teórico, existem certas condições a se considerar para que o / cálculo $\frac{\partial f^{\beta}(\xi)}{\partial \xi}$ possa ser realizado. Veremos quais sejam logo / mais em pormenores.

Explicitemos então agora o que foi proposto por / Vertogen e De Vries em seu trabalho ([1]).

Eles consideram, para o sistema físico definido n_ início, o Hamiltoniano do modelo do maser de Dicke, na aproximação "rotating-wave":

$$H_N^{\prime} = a^*a + \varepsilon S_N^3 + \frac{\lambda}{\sqrt{N}}\left(S_N^+ a + S_N^- a^*\right) \tag{I-5}$$

e obtêm as seguintes "equações de movimento", usando as relações de comutação para bosons e operadores de spin:

$$[H_N^{\prime}, a^*] = a^* + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} S_N^+ \tag{II-7a}$$

$$[H_N^{\prime}, a] = -a - \frac{\lambda}{\sqrt{N}} S_N^- \tag{II-7b}$$

$$[H_N^{\prime}, S_N^3] = -\frac{\lambda}{\sqrt{N}} a S_N^+ + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} a^* S_N^- \tag{II-7c}$$

$$[H_N^{\prime}, S_N^+] = \varepsilon S_N^+ - \frac{2\lambda}{\sqrt{N}} a^* S_N^3 \tag{II-7d}$$

$$[H_N^{\prime}, S_N^-] = -\varepsilon S_N^- + \frac{2\lambda}{\sqrt{N}} a S_N^3 \tag{II-7e}$$

Eles colocam então esses comutadores iguais a zero, o que transforma o sistema acima em um sistema linear , / para os operadores intensivos interpretados como números com - plexos; em diversos casos rapidamente solúvel, levando a resultados interessantes, como por exemplo determinação da temperatura crítica para diversos modelos ([10]).

Para interpretar inicialmente este resultado (igualar os comutadores a zero), devemosconsiderar essas equa- / ções como estando definidas "dentro" do estado de Gibbs (I-8)/ acima.. Pois nesse caso verifica-se facilmente que : ///

$\rho_N^\beta(([H_N', O_N]))=0, \forall N, \beta$; onde O_N é qualquer operador intensivo E esse sistema deve ser escrito então como:

$$\lim_{N\to\infty} \rho_N^\beta([H_N', O_N^{(i)}]) = 0 \tag{II-8}$$

$i=1,2,\ldots,5$, $\forall \beta \in I$, onde,e.g.: $O_N^{(1)} = \frac{a^*}{\sqrt{N}}$, $O_N^{(2)} = \frac{a}{\sqrt{N}}$, $O_N^{(3)} = \frac{S_N^3}{N}$, $O_N^{(4)} = \frac{S_N^+}{N}$ e $O_N^{(5)} = \frac{S_N^-}{N}$, se esses limites em (II-8) existirem. /

Na verdade para que o sistema acima seja linear / para valores médios térmicos de operadores intensivos, quando, por exemplo, formos resolvê-lo para $\lim_{N\to\infty}\left\langle \frac{S_N^3}{N}\right\rangle_{\beta,N}$, vemos que é necessárioainda que valha o seguinte: (a)

$$\lim_{N\to\infty}\langle O_N^{(i)}\cdot O_N^{(j)}\rangle_{\beta,N} = \lim_{N\to\infty}\langle O_N^{(i)}\rangle_{\beta,N}\ \lim_{N\to\infty}\langle O_N^{(j)}\rangle_{\beta,N} \tag{I-9}$$

$\forall \beta \in I, \forall i,j \in [1,5]$; (b) $\lim_{N\to\infty}\langle O_N^{(i)}\rangle_{\beta,N} \neq 0$ $,\forall i \in [1,5]$. (I-10)

Porém o impasse maior surge do fato de que por H_N' comutar com o operador $C_N = a^*a + S_N^3$, isto é, devido à simetria / $[C_N, H_N'] = 0$, os valores médios térmicos dos operadores $a/\sqrt{N}$, $a^*/\sqrt{N}$, S_N^+/N , S_N^-/N , são todos nulos. Isto pode ser visto, / por exemplo para S_N^+/N ,onde colocamos:

$$\rho_N^\beta\left(\frac{S_N^+}{N}\right) = \frac{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_N}\, e^{-\beta H_N'}\,\frac{S_N^+}{N}}{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_N}\, e^{-\beta H_N'}}$$

E como $[C_N, S_N^+] = S_N^+$, teremos:

$$\rho_N^\beta\left(\frac{S_N^+}{N}\right) = \frac{Tr_{\mathcal{H}_N}\, e^{-\beta H_N'}[C_N, S_N^+]}{Tr_{\mathcal{H}_N}\, e^{-\beta H_N'}}$$

Como C_N e H_N' comutam, se escolhermos uma base de $\mathcal{H}_N$, de auto vetores comuns a ambos os operadores, para calcularmos este traço, vemos facilmente que $\rho_N^\beta\left(\frac{S_N^+}{N}\right)=0$. Da mesma forma vê-se que $\rho_N^\beta\left(\frac{a}{\sqrt{N}}\right) = \rho_N^\beta\left(\frac{a^*}{\sqrt{N}}\right) = \rho_N^\beta\left(\frac{S_N^-}{N}\right) = 0$, pois podemos escrever estes operadores como: $a = [C_N, -a]$, $a^* = [C_N, a^*]$ e $S_N^- = [C_N, S_N^-]$.

Considerando então estes resultados, as equações deste sistema (II-8) ficam reduzidas a identidades tautológicas do tipo 0=0.

Resolveremos isto quebrando essa simetria, considerando para tal o Hamiltoniano (I-4) (sem a aproximação "rotating-wave").

Assim, com estas interpretações e considerações, o nosso sistema será, finalmente:

$$\lim_{N\to\infty}\left\langle\left[H_N, \frac{a^*}{\sqrt{N}}\right]\right\rangle_{\beta,N,\mu} = \lim_{N\to\infty}\left\langle\frac{a^*}{\sqrt{N}}\right\rangle_{\beta,N,\mu} + \lambda \lim_{N\to\infty}\left\langle\frac{S_N^+}{N}\right\rangle_{\beta,N,\mu} + \mu \lim_{N\to\infty}\left\langle\frac{S_N^-}{N}\right\rangle_{\beta,N,\mu} = 0 \qquad \text{(II-9a)}$$

$$\lim_{N\to\infty}\left\langle\left[H_N, \frac{a}{\sqrt{N}}\right]\right\rangle_{\beta,N,\mu} = -\lim_{N\to\infty}\left\langle\frac{a}{\sqrt{N}}\right\rangle_{\beta,N,\mu} - \lambda \lim_{N\to\infty}\left\langle\frac{S_N^-}{N}\right\rangle_{\beta,N,\mu} - \mu \lim_{N\to\infty}\left\langle\frac{S_N^+}{N}\right\rangle_{\beta,N,\mu} = 0 \qquad \text{(II-9b)}$$

$$\lim_{N\to\infty}\left\langle\left[H_N, \frac{S_N^3}{N}\right]\right\rangle_{\beta,N,\mu} = -\lambda \lim_{N\to\infty}\left\langle\frac{S_N^+}{N}\frac{a}{\sqrt{N}}\right\rangle_{\beta,N,\mu} + \lambda \lim_{N\to\infty}\left\langle\frac{S_N^-}{N}\frac{a^*}{\sqrt{N}}\right\rangle_{\beta,N,\mu} -$$

$$-\mu \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{S_N^+}{N} \frac{a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} + \mu \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{S_N^-}{N} \frac{a}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} = 0 \quad \text{(II-9c)}$$

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \left[H_N, \frac{S_N^+}{N}\right] \right\rangle_{\beta,N,\mu} = \varepsilon \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{S_N^+}{N} \right\rangle_{\beta,N,\mu} - 2\lambda \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a^*}{\sqrt{N}} \frac{S_N^3}{N} \right\rangle_{\beta,N,\mu} -$$

$$-2\mu \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{S_N^3}{N} \frac{a}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} = 0 \quad \text{(II-9d)}$$

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \left[H_N, \frac{S_N^-}{N}\right] \right\rangle_{\beta,N,\mu} = -\varepsilon \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{S_N^-}{N} \right\rangle_{\beta,N,\mu} + 2\lambda \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a}{\sqrt{N}} \frac{S_N^3}{N} \right\rangle_{\beta,N,\mu} +$$

$$+2\mu \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{S_N^3}{N} \frac{a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} = 0 \quad \text{(II-9e)}$$

$\forall \beta \in I$.

Conforme é de nosso interesse neste trabalho, para futuros cálculos e comparações, vamos resolver o sistema acima para $\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{S_N^3}{N} \right\rangle_{\beta,N,\mu}$. Das equações (II-9a), (II-9b) e (II-9d), obtemos:

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{S_N^3}{N} \right\rangle_{\beta,N,\mu} = \frac{\varepsilon}{2(\lambda^2-\mu^2)} \left[\frac{\mu \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} - \lambda \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu}}{\lambda \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} + \mu \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu}} \right] \quad \text{(II-10)}$$

onde foi necessário supor que: (a)

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{S_N^3}{N} \frac{a}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} = \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{S_N^3}{N} \right\rangle_{\beta,N,\mu} \cdot \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} \quad \text{(II-11a)}$$

e

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{S_N^3}{N} \frac{a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} = \lim \left\langle \frac{S_N^3}{N} \right\rangle \cdot \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} \quad \text{(II-11b)}$$

(b) $\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} \neq 0$ e $\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} \neq 0$ (II-12)

$\forall N$ e $\forall \beta \in I$.

Porém não sabemos se esta suposição é válida neste caso. Mostraremos que sim, explicitamente, ao calcularmos (cap.IV) o $\lim_{N\to\infty} \left\langle S_N^3/N \right\rangle_{\beta,N,\mu}$ a partir da energia livre do nosso sistema físico. E desta forma, comparando o resultado obtido por (II-10), com o obtido em (IV-17)(cap.IV), poderemos justificar a validade deste sistema de equações considerado.

III. Cálculo dos Valores Médios Térmicos de $a/\sqrt{N}$ e $a^*/\sqrt{N}$

No sentido de calcularmos $\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{S_N^3}{N} \right\rangle_{\beta,N,\mu}$ a partir de (II-10), precisamos determinar os valores médios térmicos : $\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu}$ e $\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu}$. Segundo procedimento esclarecido no capítulo II, podemos calcular estes valores médios / acrescentando-se ao Hamiltoniano (I-4) o operador auto-adjunto extensivo $\xi\sqrt{N}(a+a^*)$. Por meio de derivação da energia livre , a ser calculada neste caso, determinaremos o $\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a+a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu}$. Com procedimento análogo para o cálculo do $\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a-a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu}$, e somando-se ou diminuindo-se os resultados, teremos respectivamente: $\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu}$ e $\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu}$. Assim, seja considerado o Hamiltoniano:

$$H_N(\xi) = a^*a + \varepsilon S_N^3 + \frac{\lambda}{\sqrt{N}}\left(S_N^+ a + S_N^- a^*\right) + \frac{\mu}{\sqrt{N}}\left(S_N^+ a^* + S_N^- a\right) + \xi\sqrt{N}(a+a^*) \tag{III-1}$$

Queremos a energia livre. Teremos então de calcular a função de partição do sistema, que é dada por:

$$Z_N^\beta(\xi) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_N}\, e^{-\beta H_N(\xi)} \tag{III-2}$$

Para tal o principal recurso utilizado é a formulação segundo os estados coerentes de fotons. Isto se deve ao fato que, segundo inicialmente demonstrado por Wang-Hioe [7] , estes estados formam uma base natural para o tratamento do sistema físico considerado, segundo o modelo de Dicke. Uma definição, e colocação das propriedades, destes estados, está apresentada suscintamente no apêndice A deste trabalho. Ainda: /

necessitamos também do método de Laplace para o cálculo das integrais que surgem quando da determinação explícita da função/ de partição desse sistema.

Usando então, para o cálculo desse traço (III-2)- os estados coerentes de fotons (fundamentalmente (A-10) e /_ (A-11) do apêndice A), mas dando ainda tratamento quântico às/ variaveis atômicas, podemos escrever:

$$Z_N^\beta(\varsigma) = \frac{1}{\pi}\int d\alpha \; Tr_{\mathcal{H}_N^{sp}} \; \langle\alpha| e^{-\beta H_N} |\alpha\rangle \tag{A-10}$$

Pelas desigualdades de Hepp-Lieb [6], do apêndice A ((A-11)) , pode-se provar que a função de partição "semi-clássica":

$$Z_N^{\beta,Cl}(\varsigma) = \frac{1}{\pi}\int d\alpha \; Tr_{\mathcal{H}_N^{sp}} \; e^{-\beta\langle\alpha| H_N |\alpha\rangle} \tag{III-3}$$

fornece a mesma energia livre no limite termodinâmico. Assim , usando-a para os cálculos seguintes, podemos escrevê-la explicitamente:

$$Z_N^\beta(\varsigma) = \sum_{S_1=\pm 1}\cdots\sum_{S_N=\pm 1}\int\frac{d\alpha}{\pi} \langle S_1\ldots S_N| e^{-\beta\langle\alpha| H_N(\varsigma)|\alpha\rangle} |S_1\ldots S_N\rangle \tag{III-4}$$

Onde no caso (vide apêndice A ((A-5))):

$$\langle\alpha| H_N(\varsigma|\alpha\rangle = \alpha^*\alpha + \varepsilon S_N^3 + \frac{\lambda}{\sqrt{N}}(S_N^+\alpha + S_N^-\alpha^*) +$$

$$+\frac{\mu}{\sqrt{N}}(S_N^+\alpha^* + S_N^-\alpha) + \varsigma\sqrt{N}(\alpha+\alpha^*) \tag{III-5}$$

Mas, lembrando que: $S_N^{\pm,3} = \sum_{i=1}^{N} S_i^{\pm,3}$, é conveniente definir:

$$h_N = \sum_{i=1}^{N} h_i \tag{III-6}$$

onde:
$$h_i = \varepsilon S_i^3 + \frac{\lambda}{\sqrt{N}}(S_i^+ \alpha + S_i^- \alpha^*) +$$
$$+ \frac{\mu}{\sqrt{N}}(S_i^+ \alpha^* + S_i^- \alpha) \qquad \text{(III-4)}$$

Assim, o integrando em (III-4) pode ser escrito , usando (III-5) e (III-6), como:

$$\langle S_1 \ldots S_N | e^{-\beta \langle \alpha | H_N(\varsigma) | \alpha \rangle} | S_1 \ldots S_N \rangle =$$

$$= e^{-\beta[|\alpha|^2 + \varsigma\sqrt{N}(\alpha+\alpha^*)]} \langle S_1 \ldots S_N | \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^{N} h_i\right) | S_1 \ldots S_N \rangle =$$

$$= e^{-\beta[|\alpha|^2 + \varsigma\sqrt{N}(\alpha+\alpha^*)]} \langle S_1 \ldots S_N | \prod_{i=1}^{N} e^{-\beta h_i} | S_1 \ldots S_N \rangle =$$

$$= e^{-\beta[|\alpha|^2 + \varsigma\sqrt{N}(\alpha+\alpha^*)]} \prod_{i=1}^{N} \langle S_i | e^{-\beta h_i} | S_i \rangle$$

Podemos então escrever (III-4) como:

$$Z_N^\beta(\varsigma) = \int \frac{d\alpha}{\pi} \sum_{S_1=\pm 1} \cdots \sum_{S_N=\pm 1} e^{-\beta[|\alpha|^2 + \varsigma\sqrt{N}(\alpha+\alpha^*)]} \left(\prod_{i=1}^{N} \langle S_i | e^{-\beta h_i} | S_i \rangle \right) =$$

$$= \int \frac{d\alpha}{\pi} e^{-\beta[|\alpha|^2 + \varsigma\sqrt{N}(\alpha+\alpha^*)]} \Big(\langle +1 | e^{-\beta h} | +1 \rangle +$$

$$+ \langle -1 | e^{-\beta h} | -1 \rangle \Big)^N =$$

$$= \int \frac{d\alpha}{\pi}\, e^{-\beta\left[|\alpha|^2 + \xi\sqrt{N}(\alpha+\alpha^*)\right]} \left(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_N}\, e^{-\beta h}\right)^N \qquad \text{(III-7)}$$

onde:
$$h = \varepsilon S_N^3 + \frac{\lambda}{\sqrt{N}}\left(S^+\alpha + S^-\alpha^*\right) +$$

$$+ \frac{\mu}{\sqrt{N}}\left(S^+\alpha^* + S^-\alpha\right) \qquad \text{(III-8)}$$

Chamando δ_1 e δ_2 os auto-valores deste operador/ h, se existirem, então podemos colocar:

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_N}\, e^{-\beta h} = e^{-\beta\delta_1} + e^{-\beta\delta_2} \qquad \text{(III-9)}$$

A existência destes auto-valores verificamos, cal culando-os. Então:

$$h = \begin{pmatrix} \varepsilon & \dfrac{2(\alpha\lambda + \alpha^*\mu)}{\sqrt{N}} \\ \dfrac{2(\alpha^*\lambda + \alpha\mu)}{\sqrt{N}} & -\varepsilon \end{pmatrix} \quad ; \text{ logo : /}$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon - \delta & \dfrac{2(\alpha\lambda + \alpha^*\lambda)}{\sqrt{N}} \\ \dfrac{2(\alpha^*\lambda + \alpha\mu)}{\sqrt{N}} & -\varepsilon - \delta \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(III-10)}$$

onde δ é auto-valor de h.

Resolvendo a equação dada por este determinante a cima, encontramos:

$$\delta = \pm \mathcal{E}\left(1 + \frac{4}{N\mathcal{E}^2}\left[|\alpha|^2(\lambda^2+\mu^2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda\mu\left(\alpha^2+\alpha^{*2}\right)\right]\right)^{1/2} \qquad \text{(III-11)}$$

Portanto, substituindo (III-9) e (III-11) em // (III-7), temos:

$$Z_N^{\beta}(\varphi) = \int \frac{d\alpha}{\pi}\, e^{-\beta\left[|\alpha|^2 + \varphi\sqrt{N}(\alpha+\alpha^*)\right]} \times$$

$$\times\left[e^{-\beta\mathcal{E}\left(1+\frac{4}{N\mathcal{E}^2}\left[|\alpha|^2(\lambda^2+\mu^2) + \lambda\mu\left(\alpha^2+\alpha^{*2}\right)\right]\right)^{\frac{1}{2}}} + \right.$$

$$\left. + e^{+\beta\mathcal{E}\left(1+\frac{4}{N\mathcal{E}^2}\left[|\alpha|^2(\lambda^2+\mu^2) + \lambda\mu\left(\alpha^2+\alpha^{*2}\right)\right]\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^N \qquad \text{(III-12)}$$

Mas como: $e^{-\beta|\delta|} + e^{\beta|\delta|} = 2\cosh(\beta|\delta|)$; então:

$$Z_N^{\beta}(\varphi) = \int \frac{d\alpha}{\pi}\, e^{-\beta\left[|\alpha|^2 + \varphi\sqrt{N}(\alpha+\alpha^*)\right]} \times$$

$$\times\left\{2\cosh\left[\beta\mathcal{E}\left(1+\frac{4}{N\mathcal{E}^2}\left[|\alpha|^2(\lambda^2+\mu^2)+\lambda\mu\left(\alpha^2+\alpha^{*2}\right)\right]\right)^{1/2}\right]\right\}^N$$

$$\text{(III-13)}$$

É conveniente que façamos a seguinte mudança de / variáveis: $\alpha = r\, e^{i\theta}$.

O que nos leva a:

$$Z_N^{\beta}(\wp) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} r\,dr\; e^{-\beta r^2} \int_0^{2\pi} d\theta\; e^{-\beta 2 \wp \sqrt{N}\, r \cos\theta} \quad \times$$

$$\times \left\{ 2\cosh\left[\beta\varepsilon\left(1 + \frac{4}{\varepsilon^2}\frac{r^2}{N}\left[(\lambda^2+\mu^2) + 2\lambda\mu\cos 2\theta\right]\right)^{1/2}\right]\right\}^N$$

(III-14)

Onde chamamos:

$$Z_{N,r}^{\beta}(\wp) = \int_0^{2\pi} d\theta\; \exp\left\{N\left[-2\beta\wp\frac{r\cos\theta}{\sqrt{N}} + \right.\right.$$

$$+ \log\left[2\cosh\left[\beta\varepsilon\left(1 + \frac{4}{\varepsilon^2}\frac{r^2}{N}\left[(\lambda^2+\mu^2) + \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.\left.+ 2\lambda\mu\cos 2\theta\right]\right)^{1/2}\right]\right]\right]\right\} = \int_0^{2\pi} d\theta\; e^{N f(\theta, r)} \qquad \text{(III-15)}$$

Para calcularmos $Z_{N,r}^{\beta}(\wp)$ acima para valor de N muito grande (i.e., tomando-se o limite termodinâmico), usando o método de Laplace, vejamos se certas condições estão satis - feitas. Assim, estudemos $f(\Theta, r)$, e comecemos por calcular sua variação em relação a Θ. Para simplificar chamemos: $\delta(\Theta) = \beta\delta$, sendo δ dado por (III-11). Então:

$$\frac{\partial f(\theta, \cdot)}{\partial\theta} = \frac{2\beta\wp r}{\sqrt{N}}\,\mathrm{sen}\,\theta + \delta'(\theta)\,\mathrm{tgh}\left[\delta(\theta)\right] \qquad \text{(III-16)}$$

sendo $\delta'(\theta) \equiv \dfrac{\partial\delta(\theta)}{\partial\theta}$; e:

$$\frac{\partial^2 f(\theta,r)}{\partial\theta^2} = \frac{2\beta\xi r}{\sqrt{N}}\cos\theta + \delta''(\theta)\,tgh[\delta(\theta)] +$$

$$+ [\delta'(\theta)]^2 sech^2[\delta(\theta)] \qquad \text{(III-17)}$$

Seja θ_0 o valor de θ que anula a derivada $\frac{\partial f(\theta,r)}{\partial\theta}$. Escrevendo explicitamente (III-16) como função de θ e resolvendo-a, obteremos para θ_0 os possíveis valores: $0, \pi, 2\pi, \ldots$ Porém, agora, para determinarmos, em função destes resultados para θ_0, qual é o sinal de $\frac{\partial^2 f(\theta,r)}{\partial\theta^2}$, vemos que não podemos assegurar nenhuma resposta independentemente do sinal de ξ. Por outro lado, esperamos (cap.V) ter como resultado final, que a energia livre seja diferenciável em relação a ξ, para $\xi=0$, i.e., suas derivadas à esquerda ($\xi<0$) e à direita ($\xi>0$) sejam iguais no ponto considerado ($\xi=0$). Mas isto é verdade, e a forma de o vermos é inicialmente considerarmos $\xi>0$, e para sermos consistentes com a expansão em Taylor que vamos fazer em torno de θ_0 para o intervalo $[0,2\pi]$, tomarmos $\theta_0=\pi$, o que nos dá // $\frac{\partial^2 f(\theta,r)}{\partial\theta^2} < 0$. E calculamos então a derivada à direita da energia livre em $\xi=0$. Depois, considerando $\xi<0$, e tomando o ponto $\theta_0=0$ (ou $\theta_0=2\pi$), pode-se calcular a derivada à esquerda / da energia livre em $\xi=0$, e vê-se que estas derivadas à esquerda e à direita são iguais , i.e., a energia livre é diferenciáv l em $\xi=0$. POrtanto, aqui no caso, sem perda de generalidade, suporemos $\xi>0$; e com $\theta_0=\pi$, resulta:

$$\frac{\partial^2 f(\theta,r)}{\partial\theta^2} = -\frac{2\beta\xi r}{\sqrt{N}} + \delta''(\theta)\,tgh[\delta(\theta)] < 0 \qquad \text{(III-18)}$$

Temos consequentemente um máximo em $\theta=\pi$, para / $f(\theta,r)$. Reescrevamos:

$$Z_{N,r}^{\beta}(\varphi)=\int_0^{2\pi} d\theta \; \exp\{N f(\theta,r)\} \qquad \text{(III-15)}$$

ou

$$Z_{N,r}^{\beta}(\varphi)=\int_0^{2\pi} d\theta \; \exp\Big[N f(\pi,r) + (\theta-\pi) f'(\pi,r) + $$

$$+ \frac{(\theta-\pi)^2}{2!} f''(\pi,r) + \frac{(\theta-\pi)^3}{3!} f'''(\pi,r) + \ldots\Big] .$$

$$Z_{N,r}^{\beta}(\varphi)=\int_0^{2\pi} d\theta \;\; e^{N f(\pi,r)} \; e^{N\left[\frac{(\theta-\pi)^2}{2!} f''(\pi,r) + \right.}$$

$$\left. + \frac{(\theta-\pi)^3}{3!} f'''(\pi,r) + \ldots\right]$$

(III-19)

Façamos a mudança de variável:

$N(\theta-\pi)^2 = \theta'^2$.

Então (III-19) fica:

$$Z_{N,r}^{\beta}(\varphi)= \frac{e^{N f(\pi,r)}}{\sqrt{N}} \int_{-\pi\sqrt{N}}^{\pi\sqrt{N}} d\theta' \;\; e^{\left[\frac{\theta'^2}{2!} f''(\pi,r) + \right.}$$

$$\left. + \frac{\theta'^3}{3!} \cdot \frac{1}{N^{1/2}} f'''(\pi,r) + O\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right)\right]$$

(III-20)

Como estamos interessados nos resultados no limite termodinâmico, ou o que é equivalente aqui, para N muito / grande, tomemos o log $Z_{N,r}^{\beta}(\varphi)$ e vejamos seu comportamento para $N \to \infty$.

$$\log Z^{\beta}_{N,r}(\xi) = N f(\pi, r) + \log \frac{1}{N^{1/2}} \int_{-\pi\sqrt{N}}^{\pi\sqrt{N}} d\theta' \, e^{\left[\frac{\theta'^2}{2!} f''(\pi, r) + O\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right)\right]}$$

$$\lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{N} \log Z^{\beta}_{N,r}(\xi)\right] = f(\pi, r) \quad +$$

$$+ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \frac{1}{N^{1/2}} \int_{-\pi\sqrt{N}}^{\pi\sqrt{N}} d\theta' \, e^{\left[\frac{\theta'^2}{2} f''(\pi, r) + O\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right)\right]} \tag{III-21}$$

sendo que $f''(\pi, r) \equiv \left.\frac{\partial^2 f(\theta, r)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\pi} < 0$. Portanto, para N muito grande, podemos escrever:

$$Z^{\beta}_{N,r}(\xi) = e^{N f(\pi, r)} \tag{III-22}$$

Explicitamente:

$$Z^{\beta}_{N,r}(\xi) = \exp\left\{N\left[\frac{2\beta\xi r}{\sqrt{N}} + \log\left\{2\cosh\left[\beta\varepsilon\left(1 + \frac{4}{\varepsilon^2}\frac{r^2}{N}[\lambda + \mu]^2\right)^{1/2}\right]\right\}\right]\right\} \tag{III-23}$$

Substituindo-se agora (III-23) no cálculo de $Z^{\beta}_{N}(\xi)$ equação (III-14), obtemos:

$$Z^{\beta}_{N}(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dr \, r \, e^{-\beta r^2} \exp\left\{N\left[\frac{2\beta\xi r}{\sqrt{N}} + \right.\right.$$

$$+\log\left\{2\cosh\left[\beta\varepsilon\left(1+\frac{4}{\varepsilon^2}\frac{\pi^2}{N}[\lambda+\mu]^2\right)^{1/2}\right]\right\}\Bigg]\Bigg\} \qquad \text{(III-24)}$$

Façamos a seguinte mudança de variável:

$$\frac{\pi^2}{N} = y$$

Assim:

$$Z_N^{\beta}(\varsigma) = \frac{N}{2\pi}\int_0^{\infty} dy\ \exp\Bigg\{N\Bigg[-\beta y + 2\beta\varsigma\sqrt{y} +$$

$$+\log\left\{2\cosh\left[\beta\varepsilon\left(1+\frac{4}{\varepsilon^2}[\lambda+\mu]^2 y\right)^{1/2}\right]\right\}\Bigg]\Bigg\} \qquad \text{(III-25)}$$

Onde chamamos:

$$F(y,\varsigma) = -\beta y + 2\beta\varsigma y^{1/2} + \log\Bigg\{2\cosh\Bigg[\beta\varepsilon\Bigg(1+$$

$$+\frac{4}{\varepsilon^2}[\lambda+\mu]^2 y\Bigg)^{1/2}\Bigg]\Bigg\} \qquad \text{(III-26)}$$

Vejamos aqui também se condições são satisfeitas/ para que possamos resolver pelo método de Laplace a equação: /

$$Z_N^{\beta}(\varsigma) = \frac{N}{2\pi}\int_0^{\infty} dy\ e^{NF(y,\varsigma)} \qquad \text{(III-27)}$$

Estudando $F(y,\varsigma)$:

$$\frac{\partial F(y,\varsigma)}{\partial y} = -\beta + \beta\varsigma y^{-\frac{1}{2}} +$$

$$+\,tgh\left[\beta\varepsilon\left(1+\frac{4}{\varepsilon^2}[\lambda+\mu]^2 y\right)^{1/2}\right]\left[\frac{\beta\varepsilon}{2}\left(1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{4}{\varepsilon^2}[\lambda+\mu]^2 y\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{4}{\varepsilon^2}(\lambda+\mu)^2\right]$$

(III-28)

Se colocarmos $\frac{\partial F(y,\xi)}{\partial y}=0$, obtemos a equação que / nos dá o valor $y_0 \equiv y_0(\mu)$ de y, para o qual $F(y,\xi)$ é máximo / (pois, verificamos, $\left.\frac{\partial^2 F(y,\xi)}{\partial y^2}\right|_{y=y_0} < 0$). Então:

$$tgh\left[\beta\varepsilon\left(1+\frac{4}{\varepsilon^2}[\lambda+\mu]^2 y\right)^{\frac{1}{2}}\right]=$$

$$=\frac{\varepsilon\left(y^{1/2}-\xi\right)\left(1+\frac{4}{\varepsilon^2}[\lambda+\mu]^2 y\right)^{\frac{1}{2}}}{2(\lambda+\mu)^2 y^{1/2}} \qquad \text{(III-29)}$$

Com procedimento análogo ao desenvolvido acima para escrevermos $Z^{\beta}_{N,r}(\xi)$ como $e^{Nf(\pi)}$, para N grande (vide eq./ (III-22), podemos aqui escrever (para N grande), que:

$$Z^{\beta}_{N}(\xi,y_0)=\frac{N}{2\pi}\,e^{NF(y_0,\xi)} \qquad \text{(III-30)}$$

Como veremos agora, não é necessário determinar - mos explicitamente o valor de y_0 obtido da equação (III-29) a- cima, para calcularmos a derivada parcial da energia livre // $f_\beta(y_0,\xi)$ em relação a ξ, para $\xi=0$, cujo resultado nos dará e- xatamente o $\lim\limits_{N\to\infty}\left\langle\frac{a+a^{+}}{\sqrt{N}}\right\rangle_{\beta,N,\mu}$. Para tal escrevamos $f_\beta(y_0,\xi)$ como função de $F(y_0,\xi)$. Por definição, no limite termodinâmico temos: //

$$f_\beta(y_0,\xi) = -\beta^{-1} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log Z_N^\beta(\xi,y_0) \qquad \text{(III-31)}$$

Usando o resultado (III-30) em (III-31), obtemos:

$$f_\beta(y_0,\xi) = -\beta^{-1} F(y_0,\xi)$$

Queremos:

$$\left.\frac{\partial f_\beta(y_0,\xi)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} \Rightarrow \left.\frac{\partial f_\beta(y_0,\xi)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = -\beta^{-1}\left.\frac{\partial F(y_0,\xi)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} \qquad \text{(III-32)}$$

onde:

$$F(y_0,\xi) = -\beta y_0 + 2\beta\xi y_0^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \log\left\{2\cosh\left[\beta\varepsilon\left(1+\frac{4}{\varepsilon^2}[\lambda+\mu]^2 y_0\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$$

Então:

$$\frac{\partial F(y_0,\xi)}{\partial\xi} = -\beta y_0' + 2\beta y_0^{1/2} + \beta\xi y_0^{-1/2} y_0' +$$

$$+ \operatorname{tgh}\left[\beta\varepsilon\left(1+\frac{4}{\varepsilon^2}[\lambda+\mu]^2 y_0\right)^{1/2}\right]\frac{\beta\varepsilon}{2}\left(1+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{\varepsilon^2}[\lambda+\mu]^2 y_0\right)^{-1/2}\frac{4}{\varepsilon^2}(\lambda+\mu)^2 y_0' \qquad \text{(III-33)}$$

onde $y_0' \equiv \frac{\partial y_0}{\partial\xi}$. Substituindo em (III-33) acima, $\operatorname{tgh}\left[\beta\varepsilon\left(1+\frac{4}{\varepsilon^2}[\lambda+\mu]^2 y\right)^{1/2}\right]$

e simplificando c possível, resulta:

$$\frac{\partial F(y_0,\xi)}{\partial\xi} = -\beta y_0' + \beta\xi y_0' y_0^{-\frac{1}{2}} +$$

$$+\beta y_0' - \beta \xi y_0' y_0^{-\frac{1}{2}} + 2\beta y_0^{1/2} \Rightarrow \qquad \text{(III-34)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F(y_0,\xi)}{\partial \xi} = 2\beta y_0^{1/2} \qquad \text{(III-35)}$$

Finalmente, com (III-35) em (III-32), podemos escrever (para $0<T<T_c(\mu)$):

$$\left.\frac{\partial f_\beta(y_0,\xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a+a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} = -2\left[y_0(\mu)\right]^{\frac{1}{2}}\Big|_{\xi=0} \qquad \text{(III-36a)}$$

De modo totalmente análogo, calculamos //
$\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a-a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu}$, e chegamos ao resultado:

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a-a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} = 0 \qquad \text{(III-36b)}$$

De (III-36b) e do fato que:

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a\pm a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} = \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} \pm \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu}$$

segue que os valores médios térmicos $\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu}$ e $\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu}$ são reais, e explicitamente de (III-36a) e (III-36b), obtemos :

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} = -\left[y_0(\mu)\right]^{1/2}\Big|_{\xi=0} \qquad \text{(III-37)}$$

e

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta,N,\mu} = -\left[y_0(\mu)\right]^{1/2}\Big|_{\xi=0}$$

para $0<T<T_c(\mu)$.

Verificamos assim a condição (II-12) necessária / paraa justificação do resultado (II-10). As condições restan - tes verificaremos neste próximo capítulo.

IV. Cálculo dos Valores Médios Térmicos de $S_N^3 a/N\sqrt{N}$, $S_N^3 a^*/N\sqrt{N}$ e S_N^3/N

Para verificarmos se as condições (II-11a) e (II-11b) são satisfeitas, devemos calcular rigorosamente $\lim_{N\to\infty} \langle \frac{S_N^3}{N} \frac{a}{\sqrt{N}} \rangle_{\beta,N,\mu}$ e $\lim_{N\to\infty} \langle \frac{S_N^3}{N} \frac{a^*}{\sqrt{N}} \rangle_{\beta,N,\mu}$, para o que usaremos o mesmo método exposto no início do capítulo II e usado no capítulo anterior no caso dos operadores $a/\sqrt{N}$ e $a^*/\sqrt{N}$. Por isto, não seremos tão explícitos como anteriormente para estes cálculos, pois o procedimento é absolutamente análogo.

No caso nosso Hamiltoniano será:

$$H_N(\xi) = a^*a + \varepsilon S_N^3 + \frac{\lambda}{\sqrt{N}}(S_N^+ a + S_N^- a^*) + \frac{\mu}{\sqrt{N}}(S_N^+ a^* + S_N^- a) + \xi S_N^3 N^{-1/2}(a + a^*) \qquad \text{(IV-1)}$$

Onde acrescentamos ao Hamiltoniano (I-4) o operador auto-adjunto extensivo $\xi S_N^3 N^{-1/2}(a+a^*)$, sendo ξ um parâmetro arbitrário e pequeno.

Por passos análogos aos dados de (III-2) a (III-7) podemos escrever aqui:

$$Z_N^\beta(\xi) = \int \frac{d\alpha}{\pi}\, e^{-\beta|\alpha|^2}\left[Tr_{\mathcal{H}_N}(e^{-\beta h})\right]^N \qquad \text{(IV-2)}$$

como sendo a função de partição, onde:

$$h = \varepsilon S^3 + \frac{\lambda}{\sqrt{N}}(S^+\alpha + S^-\alpha^*) + \frac{\mu}{\sqrt{N}}(S^+\alpha^* + S^-\alpha) + \xi S^3 N^{-\frac{1}{2}}(\alpha + \alpha^*) \qquad \text{(IV-3)}$$

Para autovalores de h, encontramos:

$$\delta = \pm \mathcal{E}\left(1 + \frac{\xi^2}{\mathcal{E}^2}\,\frac{1}{N}(\alpha+\alpha^*)^2 + 2\frac{\xi}{\mathcal{E}}\,\frac{1}{N^{1/2}}(\alpha+\alpha^*) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\mathcal{E}^2}\,\frac{1}{N}\left[|\alpha|^2(\lambda^2+\mu^2) + \lambda\mu(\alpha^2+\alpha^{*2})\right]\right)^{1/2} \tag{IV-4}$$

Como em (III-13), temos:

$$Z_N^\beta(\xi) = \int \frac{d\alpha}{\pi}\, e^{-\beta|\alpha|^2}\left\{2\cosh\left[\beta\mathcal{E}\left(1 + \frac{\xi^2}{\mathcal{E}^2}\,\frac{1}{N}(\alpha+\alpha^*)^2 + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + 2\frac{\xi}{\mathcal{E}}\,\frac{1}{N^{1/2}}(\alpha+\alpha^*) + \frac{4}{\mathcal{E}^2}\,\frac{1}{N}\left[|\alpha|^2(\lambda^2+\mu^2) + \lambda\mu(\alpha^2+\alpha^{*2})\right]\right)^{1/2}\right]\right\}^N \tag{IV-5}$$

Façamos a mudança de variáveis:

$$\alpha = r\, e^{i\theta}.$$

Então:

$$Z_N^\beta(\xi) = \int_0^\infty \frac{dr}{\pi}\, r\, e^{-\beta r^2}\, Z_{N,r}^\beta(\xi) \tag{IV-6}$$

onde

$$Z_{N,r}^\beta(\xi) = \int_0^{2\pi} d\theta\, \exp\left\{N \operatorname{Log}\left[2\cosh\left(\beta\mathcal{E}\left[1 + \right.\right.\right.\right.$$

$$+ \frac{\xi^2}{\mathcal{E}^2}\,\frac{1}{N}\,4r^2\cos^2\theta + 4\frac{\xi}{\mathcal{E}}\,\frac{1}{N^{1/2}}\, r\cos\theta +$$

$$\left.\left.\left.\left. + \frac{4}{\mathcal{E}^2}\,\frac{r^2}{N}\left[(\lambda^2+\mu^2) + 2\lambda\mu\cos(2\theta)\right]\right]^{1/2}\right)\right]\right\} = \int_0^{2\pi} d\theta\; e^{N f(\theta, r)} \tag{IV-7}$$

Resolvendo (IV-7) pelo método de Laplace, ao determinarmos o ponto de máximo para $f(\theta,r)$ teremos, como antes, dependência do sinal de $\frac{\partial^2 f(\theta,r)}{\partial\theta^2}$ em relação ao sinal de ξ. Assim, teremos dois casos: (a) tomamos o valor $\theta_0=\pi$ que anula / $\frac{\partial f(\theta,r)}{\partial\theta}$ e $\xi<0$, e teremos $f(\pi,r)=\max\limits_{\substack{0\leq\theta\leq 2\pi \\ \xi<0}} f(\theta,r)$; (b) tomamos o / valor $\theta_0=0$ (ou $\theta_0=2\pi$) que também anula $\frac{\partial f(\theta,r)}{\partial\theta}$ e $\xi>0$, e teremos também $f(0,r)=\max\limits_{\substack{0\leq\theta\leq 2\pi \\ \xi>0}} f(\theta,r)$. Pode-se ver explicitamente / que tomando-se em (a) a derivada à esquerda da energia livre / em $\xi=0$ e em (b) a derivada à direita, elas serão iguais (em / $\xi=0$), ou seja, a energia livre é diferenciável em $\xi=0$. Assim, sem perda de generalidade, tomamos aqui $\xi<0$ e $\theta_0=\pi$. Portanto resulta:

$$Z^{\beta}_{N,r}(\xi)=\int_0^{2\pi}d\theta\ e^{Nf(\pi,r)}\,e^{N\left[\frac{(\theta-\pi)^2}{2!}f''(\pi,r)+\frac{(\theta-\pi)^3}{3!}f'''(\pi,r)+\cdots\right]}\qquad \text{(IV-8)}$$

Fazendo a mudança de variáveis:

$$N(\theta-\pi)^2=\theta'^2$$

e as mesmas considerações do capítulo anterior, para N muito / grande, podemos escrever:

$$Z^{\beta}_{N,r}(\xi)=e^{Nf(\pi,r)}\qquad \text{(IV-9)}$$

onde (de (IV-7) pondo $\theta=\pi$):

$$f(\pi,r)=\log\Big[2\cosh\Big(\beta\varepsilon\Big[\Big(1-\frac{2\xi}{\varepsilon}\frac{1}{N^{1/2}}r\Big)^2+$$

$$+ \frac{4}{\varepsilon^2}\frac{\pi^2}{N}(\lambda+\mu)^2\Big]^{1/2}\Big)\Big] \qquad \text{(IV-10)}$$

E podemos escrever (IV-6) como:

$$Z_N^{\beta}(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{d\pi}{\pi}\, \pi\, e^{-\beta\pi^2} e^{Nf(\pi,\pi)} \qquad \text{(IV-11)}$$

Fazendo a mudança de variáveis:

$$\frac{\pi^2}{N} = y$$

teremos finalmente:

$$Z_N^{\beta}(\xi) = \frac{N}{2\pi}\int_0^{\infty} dy\, \exp\Big\{N\Big[-\beta y + \log\Big[2\cosh\Big(\beta\varepsilon\Big[\Big(1 - 2\frac{\xi}{\varepsilon}y^{1/2}\Big)^2 + \frac{4}{\varepsilon^2}(\lambda+\mu)^2 y\Big]^{1/2}\Big)\Big]\Big]\Big\} =$$

$$= \frac{N}{2\pi}\int_0^{\infty} dy\, e^{NF(y,\xi)} \qquad \text{(IV-12)}$$

Ao resolvermos (IV-12) pelo método de Laplace, encontramos para equação que nos dá o valor $y_0 \equiv y_0(\mu)$, que anula $\frac{\partial F(y,\xi)}{\partial y}$, a seguinte:

$$\mathrm{tgh}\Big(\beta\varepsilon\Big[\Big(1 - 2\frac{\xi}{\varepsilon}y^{1/2}\Big)^2 + \frac{4}{\varepsilon^2}(\lambda+\mu)^2 y\Big]^{1/2}\Big) =$$

$$\frac{\left[\left(1-2\frac{\xi}{\varepsilon}y^{1/2}\right)^2+\frac{4}{\varepsilon^2}(\lambda+\mu)^2 y\right]^{1/2}}{\varepsilon\left[-\left(1-\frac{2\xi}{\varepsilon}y^{1/2}\right)\frac{\xi}{\varepsilon}y^{-1/2}+\frac{2}{\varepsilon^2}(\lambda+\mu)^2\right]} \qquad \text{(IV-13)}$$

Para N grande, (IV-12) pode ser escrita:

$$Z_N^{\beta}(\xi, y_0) = \frac{N}{2\pi}\, e^{NF(y_0,\xi)} \qquad \text{(IV-14)}$$

Colocando então a energia livre, como antes, da / forma:

$$f_{\beta}(y_0,\xi) = -\beta^{-1} F(y_0,\xi) \qquad \text{(IV-15)}$$

e calculando $\frac{\partial F(y_0,\xi)}{\partial \xi}$, podemos finalmente escrever (para / $0 < T < T_c(\mu)$):

$$\left.\frac{\partial f_{\beta}(y_0,\xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \lim_{N\to\infty}\left\langle \frac{S_N^3}{N}\frac{(a+a^*)}{\sqrt{N}}\right\rangle_{\beta,N,\mu} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{(\lambda+\mu)^2}\, y_0^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(IV-16)}$$

Antes de calcularmos $\lim_{N\to\infty}\left\langle \frac{S_N^3}{N}\frac{(a-a^*)}{\sqrt{N}}\right\rangle_{\beta,N,\mu}$ calcule-mos o $\lim_{N\to\infty}\left\langle \frac{S_N^3}{N}\right\rangle_{\beta,N,\mu}$ derivando a energia livre em relação a ε [6]. No caso o Hamiltoniano é (I-5) (sem a aproximação "rotating-wave"), e a energia livre será ([8] e [7]), para $0 < T < T_c(\mu)$

$$f_\beta(\mu) = -\beta^{-1}\log\left[2\cosh\left[\beta(\lambda+\mu)^2\sigma\right]\right] +$$

$$+ (\lambda+\mu)^2\sigma^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{4(\lambda+\mu)^2}$$

onde: $2\sigma = \frac{\mathcal{E}}{(\lambda+\mu)^2}\eta_o$,sendo $\eta_o = \left[1 + \frac{4(\lambda+\mu)^2}{\mathcal{E}^2} y_o\right]^{1/2}$.

~~Assim:~~

$$\frac{\partial f_\beta(\mu)}{\partial \mathcal{E}} = \lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{S_N^3}{N} \right\rangle_{\beta,N,\mu} = -\frac{\mathcal{E}}{2(\lambda+\mu)^2} \qquad \text{(IV-17)}$$

Porém este valor médio,calculado desta forma, é / exatamente o mesmo o obtido resolvendo-se o sistema ((II-9a) - (II-9e)) para $\lim_{N\to\infty}\left\langle \frac{S_N^3}{N}\right\rangle_{\beta,N,\mu}$ (vide eq. (II-10)), se substituirmos lá, os valores obtidos em (III-37), e admitindo-se válidas (II-11a) e (II-11b). Mas de (III-37) e (IV-17), e comparando - se com (IV-16) vemos imediatamente que (II-11a) e (II-11b) são satisfeitas neste caso, isto é:

$$\lim_{N\to\infty}\left\langle \frac{S_N^3}{N}\frac{(a+a^*)}{\sqrt{N}}\right\rangle_{\beta,N,\mu} = \lim_{N\to\infty}\left\langle \frac{S_N^3}{N}\right\rangle_{\beta,N,\mu} \lim_{N\to\infty}\left\langle \frac{a+a^*}{\sqrt{N}}\right\rangle_{\beta,N,\mu} \qquad \text{(IV-18)}$$

E de (III-37), vale a igualdade equivalente a (IV-18) se tivermos (a-a*) em (IV-16).

A identidade entre (IV-17) e (II-10), considerando-se as conclusões acima, confirma o resultado obtido pelas / equações ((II-9a)-(II-9e)), justificando definitivamente o método de Vertogen e De Vries [1].

Para os operadores intensivos outros que não os usados para a aplicação considerada, as relações equivalentes são análogas.

V. Quase-Médias

Estudemos agora mais profundamente o cálculo do / valor médio térmico de um operador intensivo, a partir do cálculo da energia livre do sistema físico em questão.

É conveniente demonstrarmos aqui uma importante / proposição com respeito à derivabilidade de $f^{\beta}(\xi)$ (em $\xi=0$). E/ que se refletiu nos resultados obtidos nos capítulos III e IV, e nas conclusões consequentes destes resultados. Colocamos: /

" Se $f^{\beta}(\xi)$ for diferenciável em $\xi=0$ então a quase média de O_N definida por ([11])

$$\lim_{\mu\to 0_+}\lim_{N\to\infty}\langle O_N\rangle_{\beta,N,\mu} \tag{V-1}$$

e o valor médio térmico de O_N coincidem, i.e., //

$$\lim_{\mu\to 0_+}\lim_{N\to\infty}\langle O_N\rangle_{\beta,N,\mu}=\lim_{N\to\infty}\lim_{\mu\to 0_+}\langle O_N\rangle_{\beta,N,\mu} \tag{V-2}$$

Sendo O_N um operador intensivo autoadjunto absolutamente arbitrário".

Demonstração: escrevendo

$$H_N(\mu)=H_N'(0)+\mu A_N \tag{V-3}$$

onde $A_N=NP_N$, sendo P_N um polinômio nos operadores intensivos ; e considerando a sequência de "energias livres": //

$$f_N^{\beta}(\xi,\mu)=-\frac{\beta^{-1}}{N}\log Z_N^{\beta}(\xi,\mu) \tag{II-3}$$

onde $$Z_N^{\beta}(\xi,\mu)\equiv Tr_{\mathcal{H}_N}\, e^{-\beta[H_N(\mu)+\xi N O_N]}$$

onde também $f^{\beta}(\xi)=\lim_{N\to\infty} f_N^{\beta}(\xi)$, sendo //

$$f_N^{\beta}(\xi)=-\frac{\beta^{-1}}{N}\log Tr_{\mathcal{H}_N}\, e^{-\beta(H_N'(0)+\xi N O_N)} \tag{II-4}$$

e pelo lema de Griffiths (proposição I do apêndice B), segue / que $\{f_N^\beta(\xi,\mu)\}$ é uma sequência de funções côncavas em $-\infty<\xi<+\infty$ e $-\infty<\mu<+\infty$. Portanto o limite

$$f^\beta(\xi,\mu) \equiv \lim_{N\to\infty} f_N^\beta(\xi,\mu) \qquad \text{(V-4)}$$

será, se existir, uma função côncava de ξ.

A sequência $f^\beta(\xi,\mu)$ em μ (pondo e.g. $\mu=1/n$ e / tomando $n\to\infty$) é portanto uma sequência de funções côncavas de ξ e pelo lema de Griffiths

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\lim_{\mu\to 0_+} f^\beta(\xi,\mu)\Big|_{\xi=0} = \lim_{\mu\to 0_+}\frac{\partial}{\partial\xi} f^\beta(\xi,\mu)\Big|_{\xi=0} \qquad \text{(V-5)}$$

se o $\lim_{\mu\to 0_+} f^\beta(\xi,\mu)$ (que existe porque $f^\beta(\xi,\mu)$ é função cônca va, e portanto contínua, de μ) for diferenciável em $\xi=0$. Mas

$$\lim_{\mu\to 0_+} f^\beta(\xi,\mu) = \lim_{\mu\to 0_+}\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{\beta^{-1}}{N}\log Z_N^\beta(\xi,\mu)\right] =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\lim_{\mu\to 0_+} -\frac{\beta^{-1}}{N}\log Z_N^\beta(\xi,\mu) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} f_N^\beta(\xi) = f^\beta(\xi) \qquad \text{(V-6)}$$

se a sequência $\{f_N^\beta(\xi,\mu)\}$ for uniformemente contínua em μ para μ em alguma vizinhança da origem. Isto é verdade se $\dfrac{\partial f_N^\beta(\xi,\mu)}{\partial\mu}$ for uniformemente limitada (em N) em módulo para μ em uma vi- zinhança da origem, o que, por sua vez, de (V-3), é verdade se e somente se

$$\langle A_N\rangle_{\beta,N,\xi,\mu} \equiv \frac{Tr_{\mathcal{H}_N}\left[A_N\, e^{-\beta[H_N(\mu)+\xi N O_N]}\right]}{Z_N^\beta(\xi,\mu)} \qquad \text{(V-7)}$$

for uniformemente limitado (em N) em módulo para μ em alguma/ vizinhança da origem.* A derivabilidade de $\lim_{\mu\to 0_+} f^{\beta}(\xi,\mu)$ em / $\xi=0$ equivale portanto à derivabilidade em $\xi=0$ do limite à / direita de (V-6). O resultado (V-2) segue então pelo lema de / Griffiths.

Sendo então $f^{\beta}(\xi)$ a energia livre do sistema no limite termodinâmico, para o cálculo de $\frac{\partial f^{\beta}(\xi)}{\partial \xi}$ existem certas / condições a serem consideradas. Vejamos então algo a respeito/ da derivabilidade de $f^{\beta}(\xi)$. Para maior clareza, dividamos o / assunto em dois casos: (a) Quando existe simetria(i.e.$[C_N,H_N]=0$)

(b) Quando não há simetria

(a) Com simetria:

Neste caso então:

$$H_N' = a^*a + \varepsilon S_N^3 + \frac{\lambda}{\sqrt{N}}(S_N^+ a + S_N^- a^*) \tag{I-5}$$

e para $C_N=a^*a+S_N^3$, $[C_N,H_N']=0$.

Isto nos permite definir um grupo de transforma - ção, segundo o qual o Hamiltoniano se transforma como:

$$e^{i\tau C_N} H_N' e^{-i\tau C_N} = H_N' \tag{V-8}$$

i.e., ela é invariante por esta transformação. Para os operado res a, a*, S_N^- e S_N^+, teremos:

$$e^{i\tau C_N} a\, e^{-i\tau C_N} = a\, e^{-i\tau}$$
$$e^{i\tau C_N} a^* e^{-i\tau C_N} = a^* e^{i\tau}$$
$$e^{i\tau C_N} S_N^- e^{-i\tau C_N} = S_N^- e^{-i\tau}$$
$$e^{i\tau C_N} S_N^+ e^{-i\tau C_N} = S_N^+ e^{i\tau}$$

---

* Para $A_N=NP_N$ isto pode ser provado explicitamente em todos os modelos de campo médio.

Ao calcularmos a função de partição, teremos de / calcular um traço sobre $\mathcal{H}_N$ em relação a alguma base, mas o traço também não se altera por uma transformação unitária.

Portanto, se tivermos um mínimo, pelo método de / Laplace, para $Z_N^{\beta}(\xi)$ em algum ponto, como (V-8) vale para todo ponto, vale para o mínimo também. Porém, como há mapeamento / sem mudar o módulo, pois $|a^* e^{i\tau}| = |a^*|$, então o mínimo será para $|\alpha| = \text{cte}$, i.e., será uma região e não um ponto apenas; onde: $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, sendo $|\alpha\rangle$ um estado coerente (vide apênd. A)

Para calcular o valor médio térmico de O_N, usamos o lema de Griffiths (proposição I apend. B): //

$$\lim_{N\to\infty} \inf \langle O_N \rangle_{\beta,N} \geqslant \xi^{-1}[f^{\beta}(\xi) - f^{\beta}(0)] \tag{V-9}$$

$$\lim_{N\to\infty} \sup \langle O_N \rangle_{\beta,N} \leqslant \xi^{-1}[f^{\beta}(0) - f^{\beta}(-\xi)] \tag{V-10}$$

Para isto é necessário que os membros direitos de (V-9) e // (V-10) sejam iguais.

Se O_N é invariante por transformação de simetria/ (ou de calibre), quando $\xi \to 0$, os membros direitos de (V-9) e (V-10) são iguais (apêndice de [6]). No nosso caso onde o operador invariante é S_N^3/N, pode-se provar isto explicitamente pelo mesmo método usado para provar a asserção análoga no caso / $\mu \neq 0$, feito no capítulo IV. Mas em geral isto não é verdade/ se o operador não for invariante por tal transformação, e isto pode-se provar explicitamente no caso dos operadores $a/\sqrt{N}$ e / $a^*/\sqrt{N}$ (apênd. de [6]).

Assim para o cálculo de valores médios térmicos / de operadores intensivos, por derivação da energia livre, no caso em que há simetria, se o operador considerado for invariante pela transformação de simetria , pode-se visualizar o que ocorre da seguinte forma: para $\xi \neq 0$, o mínimo da energia livre/ é atingido em círculos "mínimos" $|\alpha|$ =const.(ξ) e para / $\xi \to 0$ por valores positivos e negativos o círculo mínimo "tende" a um círculo cujos pontos dão o mesmo valor para as derivadas à esquerda e à direita da energia livre em $\xi=0$. Ou seja , existe a derivada da energia livre (em $\xi=0$) e podemos calcular o valor médio térmico derivando-a em relação a ξ. Se o operador não for invariante por essa transformação, o mínimo da energia livre é atingido em certa região (que não é um círculo), mas, para $\xi \to 0$ por valores positivos e negativos, são atingidos pontos distintos do círculo "mínimo" para $\xi=0$, dando valores distintos para as derivadas à esquerda e à direita da/ energia livre. Ou seja, não existe a derivada da energia livre em $\xi=0$, e não podemos calcular valores médios térmicos / por este procedimento.

(b) Sem simetria:

Conforme já colocamos anteriormente, quebraremos/ esta simetria considerando o Hamiltoniano mais geral sem a aproximação "rotating-wave", i.e., com $\mu \neq 0$, qual seja: /

$$H_N = a^* a + \varepsilon S_N^3 + \frac{\lambda}{\sqrt{N}}\left(S_N^+ a + S_N^- a^*\right) + \frac{\mu}{\sqrt{N}}\left(S_N^+ a^* + S_N^- a\right) \qquad \text{(I-4)}$$

Neste caso, para calcularmos os valores médios térmicos de operadores intensivos, somos levados naturalmente à / definição de quase-média ([11]):

$$\langle P \rangle = \lim_{\mu \to 0_+} \lim_{N \to \infty} \langle P \rangle_{\beta, N, \mu} \qquad \text{(V-1)}$$

Covém observar que há várias outras formas de se/ quebrar a simetria, e nada garante que as quase-médias obtidas deste outro modo sejam as mesmas.

As mesmas idéias do ítem (a) acima, nos levam a / esperar que em geral para operadores invariantes pela transformação de simetria do Hamiltoniano com $\mu=0$, os limites $\mu \to 0_+$ e $N \to \infty$ podem ser intervertidos; e para operadores não invariantes por tal transformação, em geral estes limites não podem / ser intervertidos.

Isto podemos verificar explicitamente no nosso caso. Considerando os resultados (III-37) vemos que:

$$\lim_{\mu \to 0_+} \lim_{N \to \infty} \left\langle \frac{a}{\sqrt{N}} \right\rangle = - \left[y_o(o) \right]^{1/2} \neq 0 \qquad \text{(V-11)}$$

para $0<T<T_c(0)$, pois (III-37) vale para $0<T<T_c(\mu)$ mas de // (I-7) temos $0<T_c(0)<T_c(\mu)$. Portanto para $0<T<T_c(0)$, a quase-- média de $a/\sqrt{N}$ não coincide com a média, pois sabemos [6]:

$$(\text{se } \mu=0) \qquad \lim_{N \to \infty} \left\langle \frac{a}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta, N} = \lim_{N \to \infty} \left\langle \frac{a^*}{\sqrt{N}} \right\rangle_{\beta, N} = 0 \qquad \text{(V-12)}$$

$(0<T<T_c(0))$. De (III-37), as mesmas observações valem para $a^*/\sqrt{N}$.

Por outro lado, de (V-11) e (II-10):

$$\lim_{\mu \to 0_+} \lim_{N \to \infty} \left\langle \frac{S_N^3}{N} \right\rangle_{\beta, N, \mu} = - \frac{\mathcal{E}}{2\lambda^2}$$

$(0<T<T_c(0))$; mas sabemos ([1],[5]):

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{\mu\to 0_+}\left\langle\frac{S_N^3}{N}\right\rangle_{\beta,N,\mu} = -\frac{\mathcal{E}}{2\lambda^2}$$

$(0<T<T_c(0))$. Isto justifica que os limites $\mu\to 0_+$ e $N\to\infty$ podem ser intervertidos no caso do operador S_N^3/N (que é no caso o operador invariante pela transformação considerada). Isto é, aqui, a quase-média e a média são iguais. E os resultados (V-11) e (V-12), isto é, que:

$$\lim_{\mu\to 0_+}\lim_{N\to\infty}\left\langle\frac{a}{\sqrt{N}}\right\rangle_{\beta,N,\mu} \neq \lim_{N\to\infty}\lim_{\mu\to 0_+}\left\langle\frac{a}{\sqrt{N}}\right\rangle_{\beta,N,\mu} = 0 \qquad \text{(V-13)}$$

devem-se à existência de uma transição de fase no modelo (como no caso de haver magnetização expontânea em um modelo ferromagnético). Tanto para $\mu=0$ como para $\mu\neq 0$ existe uma temperatura crítica $T_c(\mu)$ (I-6), tal que [7]:

$$\lim_{N\to\infty}\left\langle\frac{a^*a}{N}\right\rangle_{\beta,N} = \begin{cases} 0 & \text{se } T>T_c(\mu) \\ \gamma(\mu)>0 & \text{se } T<T_c(\mu) \end{cases} \qquad \text{(V-14)}$$

isto é, abaixo de $T_c(\mu)$ há emissão expontânea de fotons. Para o modelo com $\mu\neq 0$ vale a propriedade (I-9) e além disso para / $T<T_c(0)$, $\lim_{\mu\to 0_+}\gamma(\mu)\neq 0$. O resultado (V-13) segue essencialmente/ desses fatos.

Convém ainda ressaltar que, contrariamente aos resultados (III-37), calculando-se os valores médios térmicos de $a/\sqrt{N}$ e $a^*/\sqrt{N}$ para o Hamiltoniano (I-4) ($\mu\neq 0$) pelo método heurístico proposto por Wang-Hioe[7], obter-se-ia imediatamente o valor zero, para qualquer que seja μ. Ao passo que pelo método rigoroso de Hepp-Lieb ([5] e [6]) obtem-se valores diferentes de zero (vide seção anterior). O que é uma indicação da absoluta necessidade de se calcular os valores médios térmicos por derivação da energia livre utilizando o lema de Griffiths (apênd. B) e os resultados rigorosos de [5] e [6], conforme expusemos nas seções anteriores.

VI. Conclusão

Neste trabalho, demos uma interpretação matematicamente rigorosa das equações de De Vries e Vertogen ([1]) e aplicamô-la ao Hamiltoniano de Dicke (I-4) com termos antirressonantes. Para este fim foi necessário demonstrar diversas propriedades dos valores médios térmicos ((I-9),(I-10)), propriedades estas que mostramos não serem válidas para o Hamiltoniano de Dicke na aproximação "rotating-wave" (I-5) considerado / em [1]. Na obtenção de valores médios térmicos para H'_N ((I-5)) por um processo limite a partir das equações deduzidas para H_N ((I-4)), fomos levados naturalmente ao conceito de "quase-médias" ([11]), cujas propriedades, neste modelo, discutimos no capítulo V.

Apêndice A

I. Estados Coerentes de Fotons

Os estados coerentes de fotons foram introduzidos pela primeira vez por Glauber [13]. A formulação dos problemas de óptica quântica segundo estes estados, principalmente no / que diz respeito a fenômenos de coerência óptica, mostrou-se / extremamente conveniente e útil.

Podemos definir os estados coerentes fotônicos, / como sendo os autoestados do operador de bosons de aniquilação

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{A-1}$$

Onde definimos os estados quânticos do oscilador harmônico, conhecidos também como estados de Fock, por ([14]):

$$|n\rangle = \frac{a^{*}}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad \text{e} \quad \langle n|n\rangle = 1$$

$$a|0\rangle = 0 \quad \text{e} \quad a^{*}a|n\rangle = n|n\rangle \tag{A-2}$$

Estas colocações se devem ao fato bem conhecido// de que podemos descrever um único modo do campo de radiação, como um sistema dinâmico equivalente a um oscilador harmônico / ([14],[3],[15]).

Assim, podemos expandir estes estados como segue/ (para exposições em pormenores, vide [3]ou [16]):

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^{2}\right)\sum_{n}\frac{\alpha^{n}}{n!}|n\rangle \tag{A-3}$$

Desta última expressão vemos que os estados $|\alpha\rangle$, podem ser obtidos atraves de uma translação no vãcuo:

$$|\alpha\rangle \equiv T_\alpha|0\rangle = e^{\alpha a^* - \alpha a}|0\rangle \qquad \text{(A-4)}$$

De (A-1) temos diretamente que:

$$\langle\alpha|a|\alpha\rangle = \alpha \qquad \text{e} \qquad \langle\alpha|a^*a|\alpha\rangle = |\alpha|^2 \qquad \text{(A-5)}$$

Usando os estados coerentes como base, pode-se escrever formalmente o operador unidade como:

$$\mathbb{1} = \frac{1}{\pi}\int d\alpha\, |\alpha\rangle\langle\alpha| \qquad \text{onde} \qquad d\alpha = d(\mathrm{Re}\,\alpha)\, d(\mathrm{Im}\,\alpha) \qquad \text{(A-6)}$$

E o produto interno:

$$\langle\gamma|\beta\rangle = \frac{1}{\pi}\int d\alpha\, \langle\gamma|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle$$

$$\text{(A-7)}$$

e

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_N} A = \frac{1}{\pi}\int d\alpha\, \langle\alpha|A|\alpha\rangle$$

desde que o $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_N} A$ exista.

Um operador arbitrãrio pode ser representado em / termos dos estados coerentes, em particular:

$$a = \frac{1}{\pi}\int d\alpha\, \alpha\, |\alpha\rangle\langle\alpha|$$

$$\text{(A-8)}$$

$$a^*a = a\,a^* - 1 = \int d\alpha\, (|\alpha|^2 - 1)|\alpha\rangle\langle\alpha|$$

Referimo-nos ao apêndice de [6], para o esboço de uma demonstração rigorosa das propriedades enunciadas ((A-6)--(A-8)).

Apesar de os estádos coerentes de fotons apresentarem inũmeras propriedades (vide por exemplo [3], [16], [15]), ressaltamos aqui somente o fato de que os estados coerentes /

são o análogo quântico mais próximo da descrição clássica para um modo do campo de radiação (clássico).

Convém salientar aqui que, embora neste trabalho, por motivos de conveniência, não necessitamos da formulação segundo os estados coerentes atômicos, ou de Bloch, esta formulação e a de Glauber, foi demonstrado ([17], [3]), são absolutamente equivalentes.

II. Utilização dos estados coerentes de Glauber no / modelo de Dicke——Desigualdades de Hepp-Lieb

Utilizando-se (A-6) pode-se escrever a função de partição quântica exata para um Hamiltoniano H_N como o (I-4), i.e.:

$$Z_N^Q = Tr_{\mathcal{F}}\, Tr_{\mathcal{H}_N^{sp}}\, e^{-\beta H_N} \tag{A-9}$$

como

$$Z_N^Q = \frac{1}{\pi}\int d\alpha\; Tr_{\mathcal{H}_N^{sp}} \langle\alpha| e^{-\beta H_N}|\alpha\rangle \tag{A-10}$$

Dadas as propriedades (A-5), se pudéssemos substituir em (A-10) $\langle\alpha| e^{-\beta H_N}|\alpha\rangle$ por $e^{-\beta\langle\alpha|H_N|\alpha\rangle}$, o traço sobre $\mathcal{H}_N^{sp}$ seria o de uma exponencial linear nos operadores // $S_N^{\pm,3}$, explicitamente calculável. Embora, e.g., $\langle\alpha| e^{-\beta H_N}|\alpha\rangle \neq e^{-\beta\langle\alpha|H_N|\alpha\rangle}$, as desigualdades de Hepp-Lieb [6]

$$Z_N^{Cl} \leq Z_N^Q \leq \exp\Big[\beta\sum_{m=1}^{M} \nu_m\Big]\, Z_N^{Cl} \tag{A-11}$$

onde

$$Z_N^{Cl} = \frac{1}{\pi}\int d\alpha\; Tr_{\mathcal{H}_N^{sp}}\, e^{-\beta\langle\alpha|H_N|\alpha\rangle} \tag{A-12}$$

podem ser utilizadas para demonstrar que no limite termodinâmi co $$f^{Q} = -\beta^{-1} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log Z_N^{Q} =$$

$$= -\beta^{-1} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log Z_N^{Cl}$$

que é o resultado usado por nós nos capítulos III e IV.

A desigualdade à esquerda em (A-11) é corolário / da desigualdade de Peierls-Bogoliubov:

$$\langle \Psi | e^{X} | \Psi \rangle \geqslant e^{\langle \Psi | X | \Psi \rangle}.$$

A desigualdade à direita é de obtenção mais difícil, e utiliza a propriedade (A-8) juntamente com a desigualdade de Golden- / -Thompson: $$\left| \mathrm{Tr}\, (AB)^{2m} \right| \leqslant \mathrm{Tr}\, (A^{2m} B^{2m})$$

e a representação: $$\mathrm{Tr}\; e^{-\beta H} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Tr}\, (1 - \beta n^{-1} H)^{n}$$

Para as relações e desigualdades correspondentes/ no caso de considerar-se a formulação dos estados coerentes a-tômicos, vide H.Lieb [12].

Apêndice B

Convexidade: definições e algumas propriedades

Definição 1 : Seja f uma função numérica finita / definida sobre um intervalo de $\mathbb{R}$. Diz-se que f é convexa se , para todos $x_1, x_2 \in I$, todo ponto M(x) do gráfico Γ de f tal que $x \in [x_1, x_2]$ está abaixo do segmento $M(x_1)M(x_2)$:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0 \tag{B-1}$$

tal que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Esta definição implica que dizer que f é convexa, equivale a dizer que o conjunto de pontos A(f) de $\mathbb{R}^2$ situados acima do gráfico de f, é convexo.

Obs.: Pode-se definir convexidade de forma ligeiramente diferente ([18]) em vez de (B-1), tem-se:

$$f(\tfrac{1}{2} x_1 + \tfrac{1}{2} x_2) \leqslant \tfrac{1}{2} f(x_1) + \tfrac{1}{2} f(x_2) \tag{B-2}$$

Uma função f satisfazendo apenas (B-2) em I aberto, não é necessàriamente contínua em I, mas o é se f for limitada em I.

Definição 2 : Diz-se que f definida sobre um intervalo I de $\mathbb{R}$ é côncava se (-f) é convexa.

Propriedade 1 : Toda função f convexa em um aberto I admite em todo ponto uma derivada à esquerda e à direita/ (portanto é contínua) e se a<b tem-se :

$$f_e'(a) \leqslant f_d'(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant$$

$$\leqslant f_e'(b) \leqslant f_d'(b) \tag{B-3}$$

A demonstração é simples, e a omitimos por ser dispensável para o que necessitamos.

Propriedade 2 : (lema de Griffths) ([6]) Seja $\{g_n(x)\}$ uma sequência de funções convexas em $x\in(a,b)\equiv I\subset\mathbb{R}$, com um limite pontual $g(x)$ que é, naturalmente, convexo. Então $\forall x\in I$

$$g'_e(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf g'_{ne}(x) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \sup g'_{nd}(x) \leqslant g'_d(x) \qquad \text{(B-4)}$$

Em particular, se todos os g_n e g são diferenciáveis em algum $x\in I$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d g_n(x)}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} \qquad \text{(B-5)}$$

Demonstração: Fixe $x\in I$. Para $y>0$, e $x\pm y\in I$, $g_n(x+y)\geqslant g_n(x)+yg'_{nd}(x)$ da propriedade 1 acima, e $g_n(x-y)\geqslant g_n(x)-yg'_{ne}(x)$ também da propriedade 1. Fixe y e tome $n\to\infty$ então $\lim\limits_{n\to\infty}\sup g'_{nd}(x)\leqslant y^{-1}(g(x+y)-g(y))$ e $\lim\limits_{n\to\infty}\inf g'_{ne}(x)\geqslant y^{-1}(g_n(x)-g_n(x-y))$. Tome-se agora $y\to 0_+$ obtendo (B-4).

Propriedade 3 : Sejam A e B operadores em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ tais que:

(a) $B=B^*\in B(\mathcal{H})$, onde $B(\mathcal{H})$ é o conjunto dos operadores limitados em $\mathcal{H}$.

(b) A é autoadjunto e limitado inferiormente.

(c) $Tr_{\mathcal{H}}\, e^{-A}<\infty$.

Então:

$$F(x) = -\beta^{-1} \log Tr_{\mathcal{H}}\, e^{-\beta(A+xB)} \qquad \text{(B-6)}$$

é uma função côncava de $x\in(-\infty,\infty)$.

Para uma demonstração rigorosa vide Mary Beth Ruskai [19].

Referências

[1]-G.Vertogen e A.S.De Vries-Phys.Lett. 48A,451, (1974).

[2]-R.H.Dicke-Phys. Rev. 93, 99 (1954).

[3'] e [3] - vide errata na página seguinte.

[4]-A.A.S.Brito-Tese de Mestrado IFUSP 1976, e A. A.S.Brito e W.F.Wreszinski-"Phase Transition in the Dicke Model with A^2 Term"preprint 1976

[5]-K.Hepp e E.H.Lieb-Ann.Phys.76,360 (1973).

[6]-K.Hepp e E.H.Lieb-Phys.Rev.A 8,2517 (1973).

[7]-Y.K.Wang e F.T.Hioe-Phys.Rev.A 7,831 (1973).

[8]-F.T.Hioe-Phys.Rev.A 8,1440 (1973).

[9]-K.Rzazewski,K.Wodkiewicz e W.Zakowicz-Phys. Rev. Lett. 35, 432 (1975).

[10]-B.M.Pimentel e A.H.Zimerman-"Phase Transition in a generalized Dicke Model of Superradiance"-preprint 1976.

[11]-N.N.Bogoliubov Jr.-"A Method for Studying Model Hamiltonians"-Clarendon Press Oxford 1972

[12]-E.H.Lieb-Comm.Math.Phys. 31,327 (1973).

[13]-R.J.Glauber-Phys.Rev. 130,2529 (1963)

[14]-A.Messiah-"Mécanique Quantique",vol.II-Dunod Paris (1959).

[15]-M.Sargent III,M.O.Scully e W.E.Lamb Jr.-"Laser Physics"-Addison-Wesley (1974).

[16]-J.Klauder e E.C.G.Sudarshan-"Fundamentals of Quantum Optics"-W.A.Benjamin-N.Y. 1968.

[17]-F.T.Arecchi, E.Courtens, R.Gilmore e H.Thomas-Phys.Rev. A 6,2211 (1972).

[18]-Hardy,Littlewood e Polya-"Inequalities"-Cambridge (1934).

[19]-M.B.Ruskai-Comm.Math.Phys. 26,280 (1972).

Errata

Página 1 :

Onde se lê:

...deste sistema é dado por ([3]):

Leia-se:

...deste sistema é dado por ([3']):

Sendo:

[3'] -J.J.Sakurai-"Advanced Quantum Mechanics" - Addison-Wesley (1967).

E agora:

[3] -H.M.Nussenzveig-"Introduction to Quantum Optics"- Gordon and Breach Science Publishers (1973).