8/3/96

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Princípio de Hamilton para a Eletrodinâmica Dual

Saulo Carneiro de Souza Silva

Tese de Doutoramento
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

Banca Examinadora
Profa. Dra. Maria Carolina Nemes (UFMG)
Prof. Dr. José A. Helayel Neto (CBPF)
Prof. Dr. Abraham H. Zimerman (IFT-Unesp)
Prof. Dr. Carlos O. Escobar (USP)
Prof. Dr. Josif Frenkel (USP)

M. C. Nemes
Iberê Luiz Caldas

Orientadora: Profa. Dra. Maria Carolina Nemes

Prof. Iberê Luiz Caldas
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

São Paulo
1995

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Silva, Saulo Carneiro de Souza
Princípio de Hamilton para a eletrodinâmica dual
São Paulo, 1995.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Departamento de Física Matemática
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares
Orientador: Profa. Dra. Maria Carolina Nemes

Unitermos: 1.Simetria dual; 2. Monopolos magnéticos; 3. Formulação Lagrangiana e Hamiltoniana.

USP/IF/SBI- 68/95

Abstract

The present work discusses the classical electromagnetic theory in the presence of magnetic monopoles. We review the connection between such objects and the long standing problem of charge quantization and the main theoretical difficulties in formulating the classical dual electromagnetic theory in terms of an action principle. We show that a deeper understanding of the source of such difficulties leads naturally to the construction of a variational principle for a non-local lagrangean from which all the (local) dynamical equations for electric, magnetic charges and fields can be obtained.

Resumo

Esta tese trata da eletrodinâmica dual, cujas equações descrevem o eletromagnetismo em presença de monopolos magnéticos. Revemos a ligação direta dos monopolos com a solução do problema da quantização da carga e como eles surgem em modelos unificados tipo GUT ou Kaluza-Klein. Discutimos a dificuldade de formulação da teoria em termos de um princípio de mínima ação e descrevemos algumas tentativas de solução deste problema, através da introdução das funções de onda não-locais de Cabibbo e Ferrari, da corda de Dirac ou dos potenciais não-unívocos de Wu e Yang. Por fim, sugerimos uma lagrangiana não-local, baseada no tensor de campo generalizado de Cabibbo e Ferrari, a partir da qual obtemos todas as equações (locais) de movimento.

Dedicatória

Há oito anos, deixei minha querida Salvador, para prestar o vestibular da USP. Desde então, guardei uma saudade imensa daqueles de quem me separei; e um enorme carinho pelos que aqui me receberam. A eles – a meus pais, em especial – eu dedico esta tese.

E a Marcinha, minha companheira nesta aventura.

Agradecimentos

A Maria Carolina Nemes e Paulo Cardoso de Mello, amigos e colaboradores. Sem eles, esta tese não existiria.

A Alinka Lepine, Amélia Império, Carlos Escobar, Fernando Bunchaft, Frederique Grassi, Iberê Caldas, João Zanetic, Judite e Paulo Miranda, Luís Carlos Gomes II, Manoel Robilotta, Manoel Tiago, Nildon Pitombo, Olival Freire Jr., Paulo Leal Ferreira, Thereza Borello e Vito Vanin, pelas mais diversas razões.

Ao Departamento de Física-Matemática do IFUSP, pela infra-estrutura.

Ao CNPq e à CPG do IFUSP, pela bolsa de estudos.

À Fapesp, pelas viagens a Belo Horizonte.

"Serras que se vão saindo, para destapar outras serras. Tem de todas as coisas. Vivendo, se aprende; mas o que se aprende, mais, é só a fazer outras maiores perguntas."

João Guimarães Rosa, em *Grande Sertão: veredas.*

Índice

Capítulo 1

Introdução

Existem períodos da história da ciência em que encontramos determinada matéria em situação peculiar: atinge-se tal grau de desenvolvimento teórico, capacidade preditiva e acordo com a experiência que alguns chegam a se perguntar: "que mais podemos fazer?" Semelhante estado de coisas existia na física do final do século passado, quando restavam apenas pequenas "nuvens" em nosso horizonte.

Tais nuvens são também característica desses períodos singulares e trazem consigo o caráter inesgotável e intrinsecamente aberto da pesquisa científica. Representam, na terminologia de Kuhn, anomalias, que persistem sem solução às vezes por longo tempo e que levam, em determinadas situações, a mudanças de profundidade no cenário de idéias do período em questão. Aquelas "pequenas nuvens" nos levaram, com efeito, às grandes tempestades da primeira metade de nosso século.

Talvez a Física Moderna, mais precisamente a Física de Partículas, esteja passando por situação semelhante. Nunca uma teoria teve tamanho poder preditivo e tal acordo com a experiência como acontece com o chamado modelo padrão das interações fundamentais. Em que pese a gravitação de Einstein carecer de abundância e precisão observacionais e a Cromodinâmica Quântica só ter sido testada no regime perturbativo de altas energias, o modelo de interações eletro-fracas de Glashow, Salam e Weinberg (Glashow, 1961; Weinberg, 1967; Salam, 1968) obteve um grau de articulação e verificação extraordinário.

Felizmente, aqui temos também nossas "nuvens". Entre elas, podemos citar aquelas relacionadas com o setor de Higgs; a compreensão do processo de replicação das famílias fermiônicas; o problema da quantização do campo gravitacional; e o entendimento do mecanismo de confinamento, característico das interações fortes.

Porém, nenhum destes problemas é tão antigo quanto aquele relacionado à quantização da carga elétrica. Por quê as cargas elétricas de todas as partículas observadas são múltiplos inteiros de um valor fundamental? Esta pergunta, formulada desde os primórdios do século, a partir das experiências de Millikan, não encontra resposta nos marcos do modelo padrão.

A estrutura de grupo desse modelo,

$$G = SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \longrightarrow SU_C(3) \times U_Q(1) \tag{1.1}$$

é tal que o gerador associado à hipercarga admite um espectro contínuo de auto-valores, pois gera o grupo abeliano $U_Y(1)$, que entra como fator independente em G. Como carga e hipercarga se relacionam através de

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \tag{1.2}$$

para dado valor de T_3, Q também admite um espectro contínuo, e sua quantização permanece um mistério.

No entanto, a quantização da carga surge, natural e necessariamente, em diferentes extensões da atual física de partículas, permitindo-nos dizer que é um daqueles problemas que, não tendo explicação, admitem diversas.

A mais simples e natural consiste na introdução de correntes magnéticas nas equações de Maxwell. Sua naturalidade está em restaurar a simetria dual que essas equações apresentam na ausência de fontes. Sua simplicidade, no fato de operar exclusivamente sobre o setor eletromagnético do modelo padrão, deixando-o, no mais, inalterado (se bem que sua aplicação a outros setores pode se mostrar, como veremos, bastante frutífera e interessante).

Outras soluções para o problema surgem associadas às Teorias de Grande Unificação (GUT's), que unificam as interações forte e eletro-fraca em um grupo não-abeliano como $SU(5)$, E_6 ou $SO(10)$; e às Teorias de Kaluza-Klein, que unificam as interações fundamentais, descrevendo-as em um espaço-tempo de dimensão $N > 4$, com as dimensões extras compactificadas. Contudo, ainda aqui a quantização da carga mostra-se ligada à existência de monopolos magnéticos, pois essas teorias admitem soluções topológicas cujo campo, a grandes distâncias, é aquele de uma carga magnética.

Um dos grandes obstáculos ao desenvolvimento de uma eletrodinâmica com monopolos é a ausência de uma formulação lagrangiana adequada, relacionada à impossibilidade de definição de um 4-potencial regular em todo o espaço. A inexistência de um tal potencial torna, ainda, bastante delicada a descrição quântica da interação entre partículas carregadas e o campo eletromagnético.

Essa dificuldade foi contornada de maneiras diversas, como através da introdução da corda de Dirac; do potencial não-unívoco de Wu e Yang; do potencial singular de Bollini e Giambiagi; ou das funções de onda não-locais, utilizadas por Cabibbo e Ferrari. Entretanto, uma formulação completa e fechada ainda está por ser alcançada. De fato, a obtenção, a partir de uma lagrangiana, de todas as equações de movimento da teoria permanece como um problema em aberto.

Como veremos, não se trata apenas de uma questão física advinda da introdução de uma nova partícula. Trata-se antes de um problema matemático inerente ao eletromagnetismo, com ou sem monopolos. Com efeito, a lagrangiana de Maxwell fornece equações sem fontes magnéticas, as quais só são válidas para uma fixação conveniente do ângulo dual. Para um valor arbitrário desse ângulo, as equações de Maxwell não são obtidas de um princípio de mínima ação.

O principal objetivo desta tese é sugerir uma lagrangiana conveniente para a descrição da eletrodinâmica dual, ou seja, com cargas e correntes magnéticas. A partir dela, obteremos todas as equações desejadas: os dois grupos de equações de Maxwell e as equações de Lorentz para a carga e para o monopolo. Assim como as formulações anteriores, nossa lagrangiana mostrará ter caráter não-local. Essa não-localidade, no entanto, não se manifesta nas equações de movimento e, consequentemente, tão pouco nos observáveis da teoria.

Capítulo 2

Monopolos magnéticos e a quantização da carga elétrica

"...one would be surprised if Nature had made no use of it."

P.A.M. Dirac.

2.1 Invariância dual do eletromagnetismo

Quantos são os observáveis do campo eletromagnético? Uma análise cuidadosa mostra que todos os efeitos eletromagnéticos observáveis podem ser descritos em termos das componentes do tensor momento-energia do campo (Katz, 1965). E, devido às propriedades de simetria desse tensor, sabemos que suas componentes independentes são em número de cinco.

Tal conclusão, ausente em geral nos livros didáticos, pode nos deixar um tanto surpresos. Afinal, aprendemos sempre ser observável o tensor do campo, $F^{\mu\nu}$, cujas componentes independentes são em número de seis. A solução desta aparente contradição está no fato de que essas seis componentes não são realmente independentes. Com efeito, é fácil mostrar que o tensor momento-energia do campo fica inalterado se transformarmos $F^{\mu\nu}$ como

$$F^{\mu\nu} = F'^{\mu\nu} \cos\varphi + \tilde{F}'^{\mu\nu} \sin\varphi \tag{2.1}$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = -F'^{\mu\nu}\sin\varphi + \tilde{F}'^{\mu\nu}\cos\varphi \tag{2.2}$$

onde φ é um ângulo arbitrário, que denominamos ângulo dual, e

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \tag{2.3}$$

é o tensor dual do campo eletromagnético ($\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o 4-pseudotensor de quarta ordem totalmente anti-simétrico de Levi-Civita, com $\epsilon^{0123} = 1$).

Esta liberdade na definição dos campos nos permite escrever as equações de Maxwell em uma forma geral simétrica, dada (no sistema de unidades de Heaviside-Lorentz, com $c = 1$) por

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = -j^\alpha \tag{2.4}$$

$$\partial_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} = -g^\alpha \tag{2.5}$$

Nelas, introduzimos as 4-correntes elétrica e magnética, as quais, para uma partícula elementar, têm a forma

$$j^\alpha = e\,\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_o)\,\frac{dx^\alpha}{dt} \tag{2.6}$$

$$g^\alpha = g\,\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_o)\,\frac{dx^\alpha}{dt} \tag{2.7}$$

onde $\vec{r}_o$ é o 3-vetor posição da partícula, e e g representam suas cargas elétrica e magnética, e $\delta(x)$ é a função delta de Dirac.

Da mesma forma, podemos escrever a equação de Lorentz para uma partícula elementar de massa m como

$$m\frac{dU^\alpha}{d\tau} = (eF^{\alpha\beta} + g\tilde{F}^{\alpha\beta})\,U_\beta \tag{2.8}$$

onde τ é o tempo próprio da partícula, e U^α é sua 4-velocidade.

Escritas nesta forma, as equações de Maxwell e de Lorentz são invariantes pela transformação dual definida por (2.1) e (2.2), desde que transformemos também as 4-correntes como

$$j^\alpha = j'^\alpha\cos\varphi + g'^\alpha\sin\varphi \tag{2.9}$$

$$g^{\alpha} = -j'^{\alpha} \sin\varphi + g'^{\alpha} \cos\varphi \tag{2.10}$$

Se j'^{μ} e g'^{μ} forem proporcionais, podemos sempre fazer $g^{\mu} = 0$, bastando tomar, em (2.10), φ obedecendo a

$$g'^{\mu} = j'^{\mu} \tan\varphi \tag{2.11}$$

Neste caso, as equações (2.5) e (2.8) tomam a forma usual

$$\partial_{\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.12}$$

$$m\frac{dU^{\alpha}}{d\tau} = eF^{\alpha\beta}U_{\beta} \tag{2.13}$$

o que nos permite introduzir o 4-potencial A^{μ}, definido por

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} \tag{2.14}$$

De fato, nesta forma, $F^{\mu\nu}$ satisfaz a (2.12) identicamente, desde que A^{μ} satisfaça a condição de Euler

$$\partial_{\mu}\partial_{\nu}A^{\alpha} = \partial_{\nu}\partial_{\mu}A^{\alpha} \tag{2.15}$$

Para uma dada partícula elementar, a (2.11) pode ser escrita como

$$\varphi = \arctan\left(\frac{g'}{e'}\right) \tag{2.16}$$

onde e' e g' são as cargas elétrica e magnética da partícula para um valor arbitrário de φ. A expressão (2.16) nos permite ver o profundo significado físico contido na forma particular (2.12) do segundo grupo de equações de Maxwell. A validade geral de (2.12) só é possível se a razão g'/e' — que determina φ através de (2.16) — for a mesma para todas as partículas. É este o conteúdo físico preciso da afirmação "não existem cargas magnéticas". Se existir pelo menos uma partícula cuja razão entre g' e e' seja diferente das outras partículas, então não é possível reduzirmos sempre (2.5) à forma (2.12). Neste caso, teremos um monopolo magnético.

A experiência mostrou, até hoje, que a (2.12) é sempre válida[1]. Mas é muito difícil compreender por que g'/e' deva ser a mesma para todas as partículas. Não há, aparentemente, nenhuma razão dinâmica ou de simetria para que isso seja assim. É esta última observação que torna natural a introdução de monopolos, explorando suas consequências e procurando entender sua não observação.

2.2 A condição de quantização de Dirac

A quantização da carga elétrica pode ser entendida no contexto de uma eletrodinâmica com monopolos magnéticos, se considerarmos o movimento de uma carga no campo de um monopolo.

A equação de movimento da carga é dada pela lei de Lorentz (2.13), cuja componente espacial é

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\,(\vec{v} \times \vec{H} + \vec{E}) \tag{2.17}$$

Aqui, $\vec{p}$ e $\vec{v}$ são o 3-momento e a 3-velocidade da carga, e definimos os campos elétrico e magnético por

$$E_i = F_{0i} \tag{2.18}$$

$$H_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk} \tag{2.19}$$

(ϵ_{ijk} é o pseudo-tensor de terceira ordem totalmente anti-simétrico, com $\epsilon_{123} = 1$).

Com tais definições, obtemos, de (2.4)–(2.7), para o campo de um monopolo em repouso na origem, a solução coulombiana

$$\vec{E} = 0 \tag{2.20}$$

[1] O *Particle Data Group* (Phys.Rev.D, 50 (1994), 1173) assinala, contudo, pelo menos 11 eventos não conclusivos atribuídos a monopolos magnéticos, dos quais o mais indicativo se deve a Cabrera (Cabrera, 1982).

$$\vec{H} = \frac{g}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{2.21}$$

Levando-a em (2.17), temos

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{eg}{4\pi}\,\vec{v} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{2.22}$$

Multiplicando vetorialmente por $\vec{r}$, obtemos

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{eg}{4\pi}\,\frac{\vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{r})}{r^3} \tag{2.23}$$

ou

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{eg}{4\pi}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \tag{2.24}$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r} \times \vec{p} - \frac{eg}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r}\right] = 0 \tag{2.25}$$

Deste último resultado, podemos identificar a conservação do momento angular total do sistema carga-campo-monopolo,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} - \frac{eg}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r} \tag{2.26}$$

Quantizando a componente de $\vec{L}$ na direção de $\vec{r}$, obtemos ($\hbar = 1$)

$$L_r = \frac{eg}{4\pi} = \frac{n}{2} \tag{2.27}$$

ou seja,

$$\frac{eg}{2\pi} = n \tag{2.28}$$

com n inteiro. Esta é a célebre condição de quantização de Dirac (Dirac, 1931). Para satisfazê-la, é necessário e suficiente que e e g sejam múltiplos inteiros de valores elementares e_o e g_o, ficando assim justificada a quantização da carga elétrica e também prevista a da carga magnética. Neste caso, teremos ainda

$$\frac{e_o g_o}{2\pi} = n_o \tag{2.29}$$

o inteiro n_o dependendo da determinação experimental de e_o e g_o.

Vemos que a quantização da carga é um efeito dinâmico, de natureza quântica, devendo-se à interação carga-monopolo. É interessante observar também que a condição de Dirac, (2.28), independe da distância entre as duas partículas, bem como do estado de movimento relativo entre elas. A existência de pelo menos um monopolo, em qualquer ponto do Universo, é suficiente para quantizar toda e qualquer carga elétrica.

A condição (2.29) nos dá

$$g_o = \frac{2\pi n_o}{e_o} \geq \frac{2\pi}{e_o} \tag{2.30}$$

Usando para e_o o valor da carga eletrônica, obtemos

$$g_o^2 \geq \frac{4\pi^2}{\alpha} \sim 10^4 \tag{2.31}$$

onde α é a constante de estrutura fina. Daqui vemos que a intensidade de acoplamento magnético é, no mínimo, cem vezes superior àquela característica das interações fortes. Esta é uma possível explicação para a não observação de cargas magnéticas: os pares monopolo-antimonopolo são tão fortemente acoplados que sua produção se torna bastante difícil.

Em que pese o caráter semi-clássico da argumentação acima utilizada, ela contém a essência física do problema. Teremos oportunidade, mais adiante, de reobter a condição de Dirac de maneira mais formal.

2.3 Monopolos de 't Hooft-Polyakov

Como já foi dito na Introdução, a quantização da carga é também inerente às chamadas Teorias Grande-Unificadas (Pati e Salam, 1974; Georgi e Glashow, 1974). Nesse caso, as interações eletromagnéticas aparecem associadas a uma quebra espontânea de simetria do tipo

$$G \longrightarrow SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \longrightarrow SU_C(3) \times U_Q(1) \tag{2.32}$$

onde G é um grupo mais amplo, que contém o grupo do modelo padrão como sub-grupo. O caráter não-abeliano de G implica na quantização dos auto-valores de todos os seus geradores, entre eles o gerador das interações eletromagnéticas. Daí a quantização da carga.

O mecanismo de quebra espontânea de simetria é, por outro lado, também responsável pela existência de configurações topológicas cujo campo, a grandes distâncias, é aquele de uma carga magnética (Polyakov, 1974; 't Hooft, 1974). Para entendermos como surgem tais soluções, analisaremos um modelo simples de interações eletrofracas (Georgi e Glashow, 1972), baseado no grupo de simetria $SO(3)$. Apesar de descartado após a descoberta das correntes fracas neutras, tal modelo ilustra bem os aspectos que desejamos ressaltar, presentes também em modelos mais realísticos, baseados em grupos como o $SU(5)$ ou o $SO(10)$, seja em sua forma original ou nas versões supersimétricas.

O modelo contém um fóton sem massa e dois bósons carregados que adquirem massa de um isotripleto de Higgs $\vec{\Phi}$. A lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\vec{F}^{\mu\nu}\vec{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D^{\mu}\vec{\Phi})(D_{\mu}\vec{\Phi}) - V(\vec{\Phi}) \tag{2.33}$$

onde

$$\vec{F}^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\vec{A}^{\nu} - \partial^{\nu}\vec{A}^{\mu} - e\,\vec{A}^{\mu}\times\vec{A}^{\nu} \tag{2.34}$$

$$D^{\mu}\vec{\Phi} = \partial^{\mu}\vec{\Phi} - e\,\vec{A}^{\mu}\times\vec{\Phi} \tag{2.35}$$

$$V(\vec{\Phi}) = \frac{\lambda}{4}(\vec{\Phi}\cdot\vec{\Phi} - v^2)^2 \tag{2.36}$$

com λ e v constantes. Os valores de $\vec{\Phi}$ que minimizam $V(\vec{\Phi})$, constituindo assim soluções estáveis, são aqueles para os quais

$$\vec{\Phi}\cdot\vec{\Phi} = v^2 \tag{2.37}$$

Além disso, para que tenhamos configurações com energia finita, é necessário que

$$D^{\mu}\vec{\Phi}(\vec{r}\to\infty) = 0 \tag{2.38}$$

Uma solução trivial para (2.37) e que respeita (2.38) é a solução estática

$$\vec{\Phi} = (0, 0, v) \tag{2.39}$$

com

$$D^{\mu}\vec{\Phi} = 0 \tag{2.40}$$

em todo o espaço. Levando-a em (2.35), vemos que A_{μ}^{3} é a única componente não-nula de $\vec{A}^{\mu}$. Assim, de (2.34), temos

$$F_{\mu\nu}^{1} = F_{\mu\nu}^{2} = 0 \tag{2.41}$$

$$F_{\mu\nu}^{3} = \partial_{\mu}A_{\nu}^{3} - \partial_{\nu}A_{\mu}^{3} \tag{2.42}$$

Comparando (2.42) com (2.14), podemos identificar $F_{\mu\nu}^{3}$ com o tensor do campo eletromagnético, fazendo então (cf. (2.18) e (2.19))

$$E_i = F_{0i}^{3} \tag{2.43}$$

$$H^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}^{3} \tag{2.44}$$

É claro que podemos tomar, em lugar de (2.39), qualquer solução constante e uniforme que aponte em uma direção arbitrária, dada pelo versor $\hat{e}$:

$$\vec{\Phi} = v\hat{e} \tag{2.45}$$

Neste caso, os campos elétrico e magnético são obtidos da generalização de (2.43) e (2.44) para uma direção qualquer

$$E_i = \frac{1}{v}\vec{\Phi} \cdot \vec{F}_{0i} \tag{2.46}$$

$$H^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\left(\frac{1}{v}\vec{\Phi} \cdot \vec{F}_{jk}\right) \tag{2.47}$$

Porém, a equação (2.37) admite ainda uma solução estática não-trivial, dada por

$$\vec{\Phi}(\vec{r}) = v\hat{r} \tag{2.48}$$

a qual representa um mapeamento das direções do espaço de isospin nas respectivas direções do espaço de coordenadas. Levando (2.48) em (2.35) e usando (2.38), obtemos, para $r \to \infty$,

$$\vec{A}^0 \times \hat{r} = 0 \tag{2.49}$$

$$\partial^i \hat{r} - e\,\vec{A}^i \times \hat{r} = 0 \tag{2.50}$$

o que nos leva a

$$\vec{A}^0 = A^0(\vec{r})\,\hat{r} \tag{2.51}$$

$$A_{ij}(\vec{r}) = \epsilon_{ijk}\frac{r^k}{er^2} \tag{2.52}$$

Fazendo $A^0(\vec{r}) = 0$ e usando (2.34), (2.46) e (2.47), temos

$$\vec{E} = 0 \tag{2.53}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{r}}{er^3} \tag{2.54}$$

que são precisamente os campos devidos a um monopolo na origem.

Comparando (2.54) com (2.21) vemos que a carga magnética é

$$g = \frac{4\pi}{e} \tag{2.55}$$

Como a menor carga presente no modelo (a de um isodubleto) é dada por

$$e_o = \frac{e}{2} \tag{2.56}$$

a (2.55) pode ser escrita como

$$g = \frac{2\pi}{e_o} \tag{2.57}$$

Ou seja, nossa solução respeita a condição de Dirac, (2.28), com $n = 1$. Pode-se mostrar que existem também soluções com $n = 2, 3...$

A energia de uma tal configuração de campos (ou seja, a massa do monopolo) é da ordem de

$$M \approx \frac{M_W}{\alpha} \tag{2.58}$$

onde M_W é a escala em que ocorre a quebra de simetria, e α, a constante característica das interações. Tomando a primeira como a escala de quebra de simetria das interações fracas e a segunda como a constante de estrutura fina, obtemos

$$M \sim 10^4 \; Gev \tag{2.59}$$

Se, em lugar desse modelo, considerarmos o modelo unificado $SU(5)$, teremos

$$M \approx \frac{M_X}{\alpha_5} \sim 10^{16} \; Gev \tag{2.60}$$

Este valor absurdamente alto para M pode ser, ao lado do forte acoplamento monopolo-antimonopolo, mais uma razão para a não produção de cargas magnéticas em laboratório, assim como para sua raridade no Universo.

Podemos, além disso, dar outra boa justificativa, de origem cosmológica, para sua raridade: a aparente homogeneidade e isotropia de nosso universo observável não nos faz esperar grande heterogeneidade na direção escolhida pelo campo de Higgs no espaço de isospin. Assim, a solução (2.48) deve ser altamente improvável, o que torna os monopolos de 't Hooft-Polyakov objetos raros. Aliás, estas considerações estão entre os principais motivos para a elaboração de modelos cosmológicos inflacionários (Guth, 1981).

Para finalizar, ressaltemos que a solução de 't Hooft-Polyakov só representa o campo de uma carga magnética para grandes distâncias da origem, pois, para $r \to 0$, a (2.52) diverge, e a energia da configuração torna-se infinita.

2.4 Monopolos de Kaluza-Klein

Talvez a explicação mais antiga para a quantização da carga elétrica tenha sido dada por Klein (Klein, 1926a), no contexto de uma teoria unificada das interações eletromagnéticas e gravitacionais, em um espaço-tempo 5-dimensional (Kaluza, 1921; Klein, 1926b), onde a quantização da carga surge relacionada à compactificação da dimensão extra. Esse processo de quantização é também característico de generalizações da idéia original, com dimensão $N > 5$.

Apesar de nenhum dos modelos tipo Kaluza-Klein ser uma boa representação da física de partículas realmente observada, "...[one] cannot help feeling that there is some truth in Kaluza's five-dimensional theory" (Einstein e Pauli, 1943). Sem dúvida, incorporar todas as interações fundamentais à geometria do espaço-tempo, unificando-as, é uma das mais fascinantes idéias da física teórica.

Consideremos um espaço-tempo 5-dimensional, com a dimensão espacial extra compactificada em um círculo de raio tão pequeno que se torna inobservável; e um elemento de linha nesse espaço dado por

$$ds^2 = (dx_4 + \beta A_\mu dx^\mu)^2 + g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \tag{2.61}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço-tempo usual de quatro dimensões, e A_μ é um 4-vetor covariante que identificaremos com o potencial eletromagnético.

A função de Lagrange de uma partícula que se move sobre uma geodésica nesse 5-espaço é

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 \tag{2.62}$$

onde τ é seu tempo próprio. Da maneira usual, definimos seu 5-momento como

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial(\frac{dx^a}{d\tau})} \tag{2.63}$$

com $a = 0, 1, 2, 3, 4$. De (2.62) e (2.61), calculamos as componentes

$$p_4 = m\left(\frac{dx_4}{d\tau} + \beta A_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau}\right) \tag{2.64}$$

$$p_\mu = m\left(\frac{dx_4}{d\tau} + \beta A_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}\right)\beta A_\mu + m\, g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{2.65}$$

Como a dimensão extra não é observável, L não depende de x_4, e, portanto, p_4 é constante ao longo da geodésica. Substituindo (2.64) em (2.65), obtemos

$$p_\mu = p_4\, \beta A_\mu + m\, g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{2.66}$$

Podemos identificar (2.66) com o momento generalizado de uma partícula de massa m e carga e, em presença de campos eletromagnético e gravitacional, desde que façamos

$$p_4\, \beta = e \tag{2.67}$$

Como a coordenada x_4 é compactificada em um círculo de raio R, ela é periódica, com período $2\pi R$. Logo, p_4 tem um espectro discreto, dado por

$$p_4 = \frac{N}{R} \tag{2.68}$$

com $N = 0, 1, 2...$ Levando em (2.67), temos então

$$e = \frac{N\beta}{R} \tag{2.69}$$

Ou seja, obtemos uma carga elétrica quantizada.

Ademais, podemos mostrar que a generalização 5-dimensional das equações de Einstein, com a métrica definida pelo elemento de linha (2.61), conduz às equações gravitacionais 4-dimensionais e às equações de Maxwell do eletromagnetismo, desde que tomemos

$$\beta = (2k)^{\frac{1}{2}} \tag{2.70}$$

onde k é a constante gravitacional. Com este valor para β, o valor da carga eletrônica para e e $N = 1$, a (2.69) dá

$$R = \frac{(2k)^{\frac{1}{2}}}{e} \sim 10^{-31}\ cm \tag{2.71}$$

Um valor realmente muito além de nossa capacidade de observação.

As equações de Einstein usuais, ou seja, no espaço-tempo 4-dimensional, não admitem, na ausência de matéria, soluções estáticas não-triviais com energia finita. O que já pode ser visto de sua invariância de escala: na ausência de matéria, não há como sequer fixar a escala característica de tais soluções (estamos supondo nula a constante cosmológica). Assim, a única solução estática possível, nesse caso, é a trivial: um espaço-tempo plano, com curvatura nula.

No espaço-tempo de Kaluza-Klein, no entanto, o mesmo já não acontece. A dimensão extra compactificada determina uma escala, qual seja a do período da coordenada x_4. Por esta razão, as equações de Einstein correspondentes admitem, na ausência de matéria, além da solução trivial, outras configurações estáticas com energia finita e diferente de zero.

Entre elas está aquela cuja métrica é definida pelo elemento de linha (Sorkin, 1983; Gross e Perry, 1983)

$$\begin{aligned} ds^2 &= V\,[dx_4 + \beta\alpha(1-\cos\theta)d\phi]^2 + \\ &+ dt^2 - \frac{1}{V}\,(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2) \end{aligned} \tag{2.72}$$

com

$$\frac{1}{V} = 1 + \frac{\alpha}{r} \tag{2.73}$$

Para $r \to \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} ds^2 &= [dx_4 + \beta\alpha(1-\cos\theta)d\phi]^2 + \\ &+ dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2) \end{aligned} \tag{2.74}$$

Comparando com (2.61), vemos que o 4-potencial eletromagnético tem por única componente contravariante não-nula

$$A_\phi = \frac{\alpha\,(1-\cos\theta)}{r\sin\theta} \tag{2.75}$$

o que nos leva ao campo de um monopolo magnético (cf. (2.14) e (2.19))

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\alpha \vec{r}}{r^3} \tag{2.76}$$

exceto sobre a linha semi-infinita $\theta = \pi$, onde A_ϕ é singular.

A partir da transformação de coordenadas

$$x_4 = x_4' - 2\alpha\beta\phi \tag{2.77}$$

obtemos, de (2.74),

$$\begin{aligned} ds^2 &= [dx_4' - \beta\alpha(1 + \cos\theta)d\phi]^2 + \\ &\quad + dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2) \end{aligned} \tag{2.78}$$

na qual

$$A_\phi = -\frac{\alpha\,(1 + \cos\theta)}{r \sin\theta} \tag{2.79}$$

nos levando novamente à (2.76), exceto agora com a singularidade sobre a linha semi-infinita $\theta = 0$. Assim, podemos usar, no semi-espaço superior, a coordenada x_4 e o potencial (2.75); e no semi-espaço inferior, a coordenada x_4', com o potencial (2.79). Veremos, no próximo capítulo, que o surgimento de singularidades ou potenciais não-unívocos é característico dos formalismos correntes para a eletrodinâmica com monopolos.

Como x_4 tem período $2\pi R$, e ϕ o tem igual a 2π, de (2.77) devemos ter

$$(2\alpha\beta)\,(2\pi) = 2\pi R \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{R}{2\beta} \tag{2.80}$$

Por outro lado, comparando (2.76) com (2.21), vemos que

$$\alpha = \frac{g}{4\pi} \tag{2.81}$$

Igualando (2.80) e (2.81) e usando (2.69), obtemos então

$$g = \frac{2\pi R}{\beta} = \frac{2\pi N}{e} \tag{2.82}$$

De onde segue que os monopolos de Kaluza-Klein, como os de 't Hooft-Polyakov, obedecem à condição de quantização de Dirac.

A massa desses monopolos pode ser obtida, calculando-se a energia da configuração correspondente à (2.72). O valor obtido, usando-se R da ordem do comprimento de Planck (cf. (2.71)), é

$$M^2 \sim \frac{M_P^2}{\alpha} \tag{2.83}$$

onde $M_P \sim 10^{19}$ *Gev* é a massa de Planck, e α é a constante de estrutura fina. Vemos, então, tratarem-se de objetos ainda mais massivos que os da seção anterior.

2.5 Dyons

Até o momento, nos referimos unicamente a monopolos sem carga elétrica. Na verdade, os objetos descritos nas seções anteriores são casos particulares de soluções mais gerais, com carga elétrica e magnética, às quais denominamos dyons (Julia e Zee, 1975). Reconsideremos a obtenção da condição de Dirac feita na seção 2.2, só que agora com dyons de cargas e_1, g_1 e e_2, g_2.

Se tomarmos o segundo dyon em repouso na origem, seu campo será coulombiano, dado por

$$\vec{E} = \frac{e_2}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{2.84}$$

$$\vec{H} = \frac{g_2}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{2.85}$$

A equação de movimento para o primeiro é obtida de (2.8), (2.18) e (2.19),

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e_1\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H}) + g_1\,(\vec{H} - \vec{v} \times \vec{E}) \tag{2.86}$$

Levando (2.84) e (2.85) em (2.86), temos, em lugar de (2.22),

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{(e_1 e_2 + g_1 g_2)}{4\pi}\,\frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{(e_1 g_2 - e_2 g_1)}{4\pi}\,\vec{v} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{2.87}$$

Seguindo os mesmos passos da seção 2.2, chegamos à conservação do momento angular total

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} - \frac{(e_1 g_2 - e_2 g_1)}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r} \tag{2.88}$$

A quantização de sua componente na direção de $\vec{r}$ leva a uma generalização da condição de Dirac, à qual chamamos condição de Schwinger:

$$\frac{(e_1 g_2 - e_2 g_1)}{2\pi} = n \tag{2.89}$$

Consideremos um sistema formado por dois dyons de cargas magnéticas opostas, $g_2 = -g_1 = g$, e com carga total $e = e_1 + e_2$. De (2.89), temos

$$\frac{(e_1 + e_2)\, g}{2\pi} = \frac{eg}{2\pi} = n \tag{2.90}$$

o que mostra que o sistema, considerado como uma partícula com carga elétrica e e carga magnética nula, obedece à condição de quantização de Dirac. Portanto, a condição de Dirac não é incompatível com a existência de cargas fracionárias, desde que estas possuam também carga magnética e permaneçam confinadas em partículas compostas, com carga magnética total nula e carga elétrica total inteira. Não é difícil verificar que esta conclusão continua válida, se considerarmos mais que dois dyons.

O resultado aqui exposto é bastante curioso, especialmente quando lembramos (cf. (2.31)) que a intensidade de acoplamento magnético é da ordem, ou superior, àquela das interações fortes. Assim, os dyons apresentam características comuns aos quarks, constituintes da matéria hadrônica: possuem forte acoplamento e admitem carga fracionária, desde que confinados no interior de partículas compostas com carga elétrica total inteira. À carga de cor dos quarks corresponde a carga magnética dos dyons. E ao caráter branco dos hádrons, a carga magnética total nula dos compostos dyônicos. Tal semelhança pode nos levar a, de fato, tentar identificar dyons e quarks, sugerindo uma possível descrição das interações fortes baseada em uma eletrodinâmica com cargas magnéticas, unificando assim os dois tipos de interação (Schwinger, 1969; Faddeev, 1975)[2].

---

[2]Com o advento da Cromodinâmica Quântica, essa idéia pode parecer ingênua. Porém, como o mistério do confinamento permanece, é cada vez mais frequente, na Física de Hádrons, o uso de modelos baseados na formação de cargas magnéticas de cor (não-

Para evitar equívocos, ressaltemos, no entanto, que a hipótese de identificação entre dyons e quarks não nos é necessária para explicar as cargas destes últimos. Com efeito, estas podem ser facilmente compatibilizadas com a condição de Dirac, sendo suficiente tomarmos, como carga elementar, não a carga eletrônica, mas sim a do quark d, um terço daquela[3].

Seja novamente o sistema considerado na seção 2.2, formado por uma partícula com carga elétrica e e por outra com carga magnética g. Esse sistema pode ser tratado como uma partícula composta dualmente carregada, à qual denominamos dyon composto.

O momento angular intrínseco dessa partícula é dado pela expressão (2.26), onde, no primeiro termo,

$$\vec{L}_{orbital} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{2.91}$$

identificamos o momento angular orbital, associado ao movimento relativo entre os constituintes. Como sabemos, esta parte do momento angular total, após quantizada, admite apenas valores inteiros. Para compreendermos a origem do segundo termo em (2.26), calculemos o momento angular do campo eletromagnético associado ao par carga-monopolo, constituinte do dyon composto (Saha, 1936, 1949; Wilson, 1949).

O momento angular do campo é dado por

$$\vec{L}_{em} = \int d^3x' \, \vec{r'} \times (\vec{E} \times \vec{H}) \tag{2.92}$$

onde a integral é estendida a todo o espaço. Tomando a carga magnética na origem e a carga elétrica em $\vec{r}$, obtemos, para os campos elétrico e magnético, a expressão coulombiana

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi} \frac{\vec{r'} - \vec{r}}{|\vec{r'} - \vec{r}|^3} \tag{2.93}$$

$$\vec{H} = \frac{g}{4\pi} \frac{\vec{r'}}{r'^3} \tag{2.94}$$

abelianas) como condensados no vácuo da QCD (Mandelstam, 1976; Seiberg e Witten, 1994).

[3]No caso de modelos não-abelianos unificados, em que a constante de acoplamento é igual à carga eletrônica, as cargas dos quarks, considerados como partículas confinadas, podem ser compatibilizadas com a condição de Dirac, se levarmos em conta, além da carga magnética abeliana, a carga magnética de cor (Goddard e Olive, 1978).

Levando em (2.92), obtemos, após integração,

$$\vec{L}_{em} = -\frac{eg}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r} \tag{2.95}$$

donde vemos que o segundo termo em (2.26) é precisamente o momento angular armazenado no campo. Ele é dirigido da carga para o monopolo e é independente da distância entre eles.

Aqui surge uma importante questão: se L_r, em (2.27), é o momento angular associado a um campo eletromagnético, será lícito quantizá-lo por valores semi-inteiros? Ou será antes a condição de Dirac dada por

$$\frac{eg}{2\pi} = 2n \; ? \tag{2.96}$$

Acontece que a condição de Dirac, (2.28), pode ser obtida independentemente da quantização de L_r, como vimos nas seções 2.3 e 2.4, e conforme será visto no próximo capítulo. Donde concluímos que, de fato, o momento angular do campo de um sistema carga-monopolo admite valores semi-inteiros.

Esta conclusão pode parecer contrária àquilo que sabemos a respeito do campo eletromagnético. Não podemos esquecer, no entanto, que se trata de uma situação física jamais observada, pois que envolve a presença de cargas magnéticas. Lembremos, ainda, que nosso conhecido fóton, de spin inteiro, provém da quantização do campo A^μ, o qual só é bem definido na ausência de monopolos (cf. (2.14) e próximo capítulo).

A discussão acima nos leva a um resultado muito interessante e promissor, advindo da introdução de cargas magnéticas: a partir de dois bósons — a carga e o monopolo — podemos obter um sistema com spin semi-inteiro, ou seja, um férmion (Jackiw e Rebbi, 1976; Hasenfratz e 't Hooft, 1976). Realmente, é possível mostrar que o dyon composto assim obtido obedece à estatística de Fermi-Dirac (Goldhaber, 1976).

Capítulo 3

A ausência de um princípio de mínima ação

3.1 Introdução

Como vimos no capítulo anterior, a introdução de monopolos magnéticos é bastante natural, pois respeita a invariância dual do eletromagnetismo, e muito interessante no que diz respeito à elucidação da origem da quantização da carga elétrica. Vimos ainda seu aparecimento associado a outras teorias onde a carga é quantizada, como as teorias grande unificadas ou as de tipo Kaluza-Klein. Mostramos, ademais, a potencialidade de se estender a idéia de cargas magnéticas a outros setores, como o das interações fortes. E encontramos variadas justificativas para sua não observação.

Contudo, a eletrodinâmica com cargas e monopolos enfrenta um obstáculo fundamental: a ausência de um princípio de mínima ação, a partir do qual possam ser obtidas todas as equações da teoria, ou seja, as equações de campo generalizadas, (2.4) e (2.5), e a equação de Lorentz, (2.8), para a carga e para o monopolo.

A dificuldade reside, basicamente, na impossibilidade de introdução de um 4-potencial regular em todo o espaço, pois, como a (2.5) é inomogênea, o tensor de campo já não pode mais ser escrito na forma (2.14), a não ser que A^μ seja irregular, ou seja, não obedeça à (2.15). Como a lagrangiana do eletromagnetismo é descrita em termos do potencial eletromagnético, a formulação de uma teoria de campos fica seriamente prejudicada.

Além disso, sabemos que o 4-potencial A^μ, apesar de inobservável classicamente, desempenha papel essencial na descrição quântica da interação de partículas carregadas com o campo eletromagnético. Assim, tal descrição, em presença de monopolos, se faz bastante delicada.

Deixemos claro não se tratar apenas de um problema oriundo da introdução de uma nova partícula, mas sim inerente à eletrodinâmica, com ou sem monopolos. De fato, vimos que as equações de Maxwell e de Lorentz podem ser escritas nas formas gerais (2.4), (2.5) e (2.8), sem que isso implique em nenhum novo fato observacional. Podemos nos questionar, portanto, sobre que lagrangiana descreve a teoria para uma escolha arbitrária do ângulo dual. A lagrangiana usual só é adequada para o caso particular em que esse ângulo é dado pela (2.16), quando então a (2.5) se torna homogênea.

Neste capítulo veremos alguns procedimentos para se contornar essa dificuldade, permitindo-se a descrição da interação carga-monopolo. Antes porém, recordemos a formulação lagrangiana para o eletromagnetismo sem cargas magnéticas.

3.2 A lagrangiana do eletromagnetismo

As equações de Maxwell e de Lorentz, na ausência de correntes magnéticas, podem ser obtidas a partir de um princípio variacional de mínima ação

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L} \, d^4x = 0 \tag{3.1}$$

com a lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_o - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \tag{3.2}$$

Nesta expressão, $F^{\mu\nu}$ é definido, em termos de A^μ, por (2.14); j^μ, por (2.6); e $\mathcal{L}_o$ é a lagrangiana para a carga livre.

Calculando a equação de Euler-Lagrange para o campo A_μ,

$$\partial^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} \tag{3.3}$$

temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} = -j_\mu \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} = F_{\mu\nu} \tag{3.5}$$

Levando em (3.3), obtemos o primeiro grupo de equações de Maxwell, (2.4).

O segundo grupo é obtido, identicamente, da definição (2.14). De fato,

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\nu \left(\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}\right) = \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial_\nu\left(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\right) \tag{3.6}$$

E como $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é anti-simétrico com respeito à troca de qualquer par de índices, obtemos (2.12). Salientemos, mais uma vez, que tal resultado só é obtido se A^μ satisfaz a (2.15).

A variação da ação com respeito às coordenadas da carga elétrica nos dá (Landau e Lifshitz, 1972; Jackson, 1975)

$$m\frac{dU^\alpha}{d\tau} = e\left(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha\right) U_\beta \tag{3.7}$$

onde $\partial^\nu A^\mu$ é calculada ao longo da linha de universo da carga. Usando então a (2.14), encontramos a equação de Lorentz (2.13).

3.3 Funções de onda não-locais

A versão quântica da (3.2) é a lagrangiana da QED,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\partial_\mu\gamma^\mu - m\right)\psi - \left(e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{3.8}$$

onde ψ e γ^μ representam, respectivamente, o espinor e as matrizes de Dirac.

A equação de Euler-Lagrange para A^μ é novamente a (2.4), com a 4-corrente elétrica dada por

$$j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{3.9}$$

Calculando a equação para $\bar{\psi}$, temos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = \left(i\partial_\mu\gamma^\mu - m - e\gamma^\mu A_\mu\right)\psi \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\bar{\psi})} = 0 \tag{3.11}$$

Logo,

$$\partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\bar{\psi})} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} \tag{3.12}$$

nos leva à equação de Dirac

$$\left(i\partial_\mu\gamma^\mu - m - e\gamma^\mu A_\mu\right)\psi = 0 \tag{3.13}$$

Vemos assim que, diversamente da versão clássica (2.13), a equação de movimento para ψ não pode ser escrita diretamente em termos do tensor de campo $F^{\mu\nu}$, sendo imprescindível a introdução de A^μ. Como, então, descrever a interação da carga com o campo, em presença de monopolos?

Uma possibilidade é a descrição dos estados da carga através da função de onda de fase não-integrável

$$\Phi(x,P) = \psi(x)\,\exp\left[ie\int_P^x A_\mu(\xi)\,d\xi^\mu\right] \tag{3.14}$$

onde P é um certo caminho de integração que, no limite clássico, corresponde à linha de universo da carga. Esta função obedece à equação de onda livre de Dirac

$$\left(i\partial_\mu\gamma^\mu - m\right)\Phi = 0 \tag{3.15}$$

De fato, a substituição de (3.14) em (3.15) conduz à equação (3.13) para ψ.[1]

Definida em função de outro caminho de integração, P', a função de onda de fase não-integrável pode ser escrita como

$$\Phi(x,P') = \Phi(x,P)\,\exp\left[ie\oint_{P'-P} A_\mu\,d\xi^\mu\right] \tag{3.16}$$

onde a integração se estende sobre o caminho fechado $P' - P$. Com ajuda do teorema de Stokes e usando (2.14), reescrevemos (3.16) na forma

[1]Cf. a nota da página 40.

$$
\begin{aligned}
\Phi(x, P') &= \Phi(x, P) \exp\left[\frac{ie}{2} \int_S (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\, d\sigma^{\mu\nu}\right] = \\
&= \Phi(x, P) \exp\left[\frac{ie}{2} \int_S F_{\mu\nu}\, d\sigma^{\mu\nu}\right] \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

onde S é qualquer superfície delimitada pelo contorno $P' - P$. Escrita assim, a função de onda de uma partícula carregada independe da introdução do 4-potencial A^μ, podendo ser usada mesmo em presença de monopolos (Mandelstam, 1962; Cabibbo e Ferrari, 1962).

Como S é uma superfície arbitrária, de (3.17) devemos ter

$$
\Phi(x, P) \exp\left[\frac{ie}{2} \int_S F_{\mu\nu}\, d\sigma^{\mu\nu}\right] = \Phi(x, P) \exp\left[\frac{ie}{2} \int_{S'} F_{\mu\nu}\, d\sigma^{\mu\nu}\right] \qquad (3.18)
$$

onde S' é outra superfície com mesmo contorno $P' - P$. Isto nos leva a

$$
\exp\left[\frac{ie}{2} \oint_{S-S'} F_{\mu\nu}\, d\sigma^{\mu\nu}\right] = 1 \qquad (3.19)
$$

com a integração estendida à superfície fechada $S - S'$. Usando aqui o teorema de Gauss, obtemos então

$$
\exp\left[ie \int_V \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}\, dV_\mu\right] = 1 \qquad (3.20)
$$

onde V é o 4-volume compreendido pela superfície $S - S'$.

A condição (3.20) é identicamente satisfeita na ausência de monopolos, pois, nesse caso, vale a (2.12). Em caso contrário, a substituição de (2.5) em (3.20) leva a

$$
\exp\left[-ie \int_V g^\mu\, dV_\mu\right] = 1 \qquad (3.21)
$$

a qual é satisfeita se, e somente se,

$$
Q_V \equiv \int_V g^\mu\, dV_\mu = \frac{2\pi n}{e} \qquad (3.22)
$$

com n inteiro.

À condição (3.22) chamamos condição de quantização de Cabibbo-Ferrari. Ela é mais geral que a condição de quantização de Dirac, pois não depende da forma particular da 4-corrente magnética, g^μ. Tomando, para esta, a forma vetorial (2.7) e calculando Q_V no referencial do monopolo, temos

$$Q_V = \int_V g\, \delta^3(\vec{r})\, dV_0 = \int_V g\, \delta^3(\vec{r})\, d^3x = g \tag{3.23}$$

Levando em (3.22), reobtemos a condição de Dirac, (2.28).

Para concluir esta seção, façamos uma observação importante. A função de onda generalizada (3.14) possui caráter não-local, pois depende não só do ponto de observação x como também do caminho de integração P. Essa não-localidade é, como veremos, inerente a qualquer formulação da eletrodinâmica em presença de cargas magnéticas, não se manifestando, todavia, nos observáveis da teoria.

3.4 A corda de Dirac

Em lugar de abrir mão da descrição usual em termos de potenciais, podemos introduzir um 4-potencial irregular, que não obedeça à (2.15), de modo que a (2.12) não valha identicamente.

Para entender como isso pode ser feito, consideremos um solenóide semi-infinito[2]. O fluxo de campo magnético em uma seção reta qualquer é dado por

$$\Phi_{int} = -g = BA \tag{3.24}$$

onde B é a intensidade do campo no interior do solenóide, e A é sua seção reta. Podemos tornar esse solenóide infinitamente delgado, fazendo, simultaneamente, $A \to 0$ e $B \to \infty$, de forma que o fluxo, $-g$, permaneça finito. Nesse caso, o solenóide pode ser visto como uma linha de dipolos magnéticos semi-infinita. O potencial vetor no ponto $\vec{r}$ pode então ser calculado, com ajuda da fórmula

[2] Em seu trabalho original, Dirac introduziu o potencial singular de maneira diversa, mais formal e elegante que a apresentada aqui, fazendo uso das funções de onda de fase não-integrável, apresentadas na seção anterior (Dirac, 1931). Optamos por uma forma de exposição mais simples, porém adequada aos nossos propósitos.

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{g}{4\pi}\int_L^{\vec{r}_o} d\vec{l} \times \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right) \tag{3.25}$$

na qual $g\, d\vec{l}$ é o momento de dipolo magnético associado a um certo elemento $d\vec{l}$ da linha, localizado sobre o ponto $\vec{r'}$, e onde a integral é tomada sobre a linha de dipolos, até sua extremidade $\vec{r}_o$.

Para calcularmos a integral (3.25), tomemos o solenóide sobre o eixo-z negativo, com a extremidade na origem. O resultado, em coordenadas esféricas, é

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi}\frac{(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\,\hat{e}_\phi \tag{3.26}$$

Este potencial apresenta uma singularidade sobre o eixo-z negativo, ou seja, sobre o solenóide. Tal fato pode ser inferido diretamente da expressão (3.25), na qual o integrando diverge sempre que $\vec{r} = \vec{r'}$, isto é, sempre que o ponto de observação estiver sobre o solenóide.

Calculando o rotacional de $\vec{A}$, obtemos (Felságer, 1981)

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{g}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} + g\,\delta(x)\,\delta(y)\,\Theta(-z)\,\hat{k} \tag{3.27}$$

onde introduzimos a função de Heaviside, $\Theta(z)$, nula para $z < 0$ e igual à unidade, para $z > 0$. Vemos daí que o rotacional de $\vec{A}$ nos dá o campo de um monopolo magnético, (2.21), em todo o espaço, exceto sobre o solenóide, onde há a contribuição de um campo singular. O que nos mostra que a introdução de cargas magnéticas é compatível com a (2.14), desde que excluamos uma linha semi-infinita, com extremidade no monopolo.

Com tal exclusão, o fluxo do campo sobre uma superfície fechada em torno da carga magnética é dado por

$$\Phi = \oint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \frac{g}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{s} = g \tag{3.28}$$

Evidentemente, o resultado seria nulo se considerássemos também o fluxo no interior do solenóide, devido ao segundo termo, singular, de (3.27), o qual (cf. (3.24)) é igual a $-g$, cancelando assim a contribuição de (3.28).

Assim, ao estudarmos o movimento de uma carga no campo de um monopolo, podemos utilizar o potencial vetor singular (3.26), desde que façamos uma hipótese drástica, conhecida por "veto de Dirac": *a singularidade de (3.26) é inobservável para a carga, sua função de onda se anulando sobre a linha semi-infinita.* A essa linha denominamos "corda de Dirac".

Se tomarmos a singularidade sobre outra linha semi-infinita L', o novo potencial $\vec{A}'$ diferirá de (3.25) por

$$\vec{A}'(\vec{r}) - \vec{A}(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi} \oint_{L-L'} d\vec{l} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{g}{4\pi} \vec{\nabla}\Omega(\vec{r}) \qquad (3.29)$$

onde $\Omega(\vec{r})$ é o ângulo sólido subentendido pelo contorno $L' - L$ no ponto de observação $\vec{r}$. Ou seja, os dois potenciais diferem pelo gradiente de uma função escalar, o que mostra que a posição da corda pode ser qualquer, sua alteração correspondendo apenas a uma transformação de calibre.

Como sabemos, esta transformação deve ser acompanhada de uma mudança de fase na função de onda da carga

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi \, e^{-ieg\Omega/4\pi} \qquad (3.30)$$

Consideremos a variação de fase de ψ' sobre um percurso fechado que atravessa a menor superfície de contorno $L' - L$. Neste caso, Ω variará de 4π, e, para que ψ' seja unívoca, devemos ter

$$\frac{eg}{4\pi} \, \delta\Omega = \frac{eg}{4\pi} \, 4\pi = 2\pi n \qquad (3.31)$$

com n inteiro, obtendo novamente a condição de quantização da carga, (2.28).

A corda de Dirac pode ser introduzida em notação 4-dimensional, definindo-se o tensor de campo na forma

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \tilde{G}^{\mu\nu} \qquad (3.32)$$

com

$$G_{\mu\nu}(x) \equiv g \int \int \left(\frac{\partial Y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial Y_\nu}{\partial \tau_1} - \frac{\partial Y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial Y_\nu}{\partial \tau_0} \right) \delta^4(x - Y) \, d\tau_0 \, d\tau_1 \qquad (3.33)$$

Nestas expressões,

$$Y_\mu = Y_\mu(\tau_0, \tau_1) \qquad (3.34)$$

representa a superfície de universo percorrida pela corda, e $\tilde{G}_{\mu\nu}$, dual de $G_{\mu\nu}$, se anula em todos os pontos, exceto sobre essa superfície. Assim, com esta excessão, a (3.32) se reduz à (2.14).

A existência de um termo adicional na definição do tensor de campo já pôde ser notada na expressão (2.34), utilizada quando construimos monopolos magnéticos em modelos não-abelianos. É possível mostrar (Boulware et al, 1976) que, com uma certa transformação singular de calibre, o termo adicional em (2.34) se reduz à forma $\tilde{G}_{\mu\nu}$.

Consideremos novamente a lagrangiana (3.2), onde agora $\mathcal{L}_o$ é a lagrangiana livre da carga e do monopolo, e $F_{\mu\nu}$ é dado por (3.32) e (3.33). Com tal lagrangiana, a variação da ação, com relação a A^μ e às coordenadas da carga e do monopolo, leva (Dirac, 1948) às equações de movimento (2.4), (3.7) e

$$M\frac{dV^\alpha}{d\tau} = g\tilde{F}^{\alpha\beta}V_\beta \tag{3.35}$$

M correspondendo à massa do monopolo, e V^μ, à sua 4-velocidade. Além disso, temos (2.5) satisfeita identicamente por (3.32) e (3.33), com g^μ dada por (2.7). E temos ainda

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial Y_\mu} = 0 \tag{3.36}$$

obtida quando variamos a ação com relação a Y^μ. Esta equação implica na independência de $F^{\mu\nu}$ com respeito aos graus de liberdade da corda, o que mostra que a posição desta, como vimos, pode ser qualquer.

As equações (2.4), (2.5) e (3.35) são esperadas equações de movimento para a eletrodinâmica com cargas e monopolos (cf. (2.8)). Contudo, (3.7) só corresponde à equação de Lorentz para a carga, (2.13), se esta não atravessa a corda, de modo que $\tilde{G}_{\mu\nu}$ se anule em (3.32). Da mesma forma, comparando (3.36) com (2.4), vemos que a primeira só é satisfeita se a 4-corrente elétrica, j^μ, se anula em $x_\mu = Y_\mu$.

Vemos assim que a lagrangiana (3.2), com as definições (3.32) e (3.33), nos leva a todas as equações de movimento desejadas, *desde que imponhamos o veto de Dirac, de que a carga elétrica nunca atravesse a corda.* Na necessidade de imposição de tal veto reside a insuficiência desta descrição. Na seção seguinte, veremos que é possível evitar tal hipótese, introduzindo um potencial não-unívoco.

Antes, porém, chamemos a atenção para o fato de que temos aqui, mais um vez, uma descrição não-local, pois assim é a definição de $F_{\mu\nu}$ em função dos graus de liberdade da corda (cf. (3.32) e (3.33)). Não-local é também o veto de Dirac, o qual anula a função de onda da carga elétrica sobre uma linha semi-infinita. Como no caso das funções de onda generalizadas da seção anterior, essa não-localidade não se manifesta nas equações de movimento.

3.5 A formulação de Wu e Yang

Como vimos na seção anterior, o potencial devido a um monopolo na origem, cuja corda se encontra sobre o eixo-z negativo, é (cf. (3.26))

$$\vec{A}^N(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi}\frac{(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\,\hat{e}_\phi \tag{3.37}$$

o qual apresenta uma singularidade em $\theta = \pi$, isto é, sobre a corda.

Se, por outro lado, tomarmos a corda sobre o eixo-z positivo, o potencial obtido de (3.25) será dado por

$$\vec{A}^S(\vec{r}) = -\frac{g}{4\pi}\frac{(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}\,\hat{e}_\phi \tag{3.38}$$

no qual, agora, a singularidade se encontra em $\theta = 0$. Calculando a diferença entre os potenciais (3.37) e (3.38), encontramos

$$\vec{A}^N - \vec{A}^S = \frac{g}{2\pi r\sin\theta}\,\hat{e}_\phi = \vec{\nabla}\left(\frac{g\phi}{2\pi}\right) \tag{3.39}$$

O que mostra que eles diferem apenas pelo gradiente de uma função escalar das coordenadas, ou seja, por uma transformação de calibre. O que já era sabido, pois um potencial é obtido do outro por uma mudança de posição da corda.

Este resultado nos permite evitar a necessidade de imposição do veto de Dirac (Wu e Yang, 1975). De fato, podemos utilizar o potencial (3.37) no semi-espaço superior, onde ele é sempre regular, e o (3.38) no semi-espaço inferior, no qual ele é, por sua vez, também regular. Isto equivale a adotar diferentes calibres em diferentes semi-espaços, de tal forma que o potencial seja regular em cada um deles, sendo assim desnecessário o veto de Dirac.

Calculando o fluxo do campo sobre uma esfera em torno do monopolo, temos

$$\Phi = \int_N (\vec{\nabla} \times \vec{A}^N) \cdot d\vec{s} + \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}^S) \cdot d\vec{s} \tag{3.40}$$

onde N indica hemisfério norte, e S, hemisfério sul. Usando o teorema de Stokes, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_{eq} \vec{A}^N \cdot d\vec{l} - \oint_{eq} \vec{A}^S \cdot d\vec{l} = \oint_{eq} (\vec{A}^N - \vec{A}^S) \cdot d\vec{l} = \\ &= \oint_{eq} \vec{\nabla} \left(\frac{g\phi}{2\pi} \right) \cdot d\vec{l} = \frac{g}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = g \end{aligned} \tag{3.41}$$

onde as integrais são calculadas ao longo do equador, e usamos a equação (3.39). Obtemos, portanto, o fluxo esperado para o campo do monopolo, já obtido em (3.28).

Sobre o plano equatorial podemos usar ambas as formas, (3.37) ou (3.38)[3]. Em cada caso, teremos, para uma carga elétrica, funções de onda que diferem por uma fase correspondente à transformação de calibre (3.39)

$$\psi^N = \psi^S \, e^{-ieg\phi/2\pi} \tag{3.42}$$

A variação da fase, para uma volta completa ao longo do equador, deve ser um múltiplo inteiro de 2π, se queremos funções de onda unívocas. Logo,

$$\frac{eg}{2\pi} \, \delta\phi = \frac{eg}{2\pi} \, 2\pi = 2\pi n \tag{3.43}$$

com n inteiro. Obtemos, mais uma vez, a condição de Dirac de quantização da carga.

Em termos dos potenciais vetores (3.37) e (3.38), o campo magnético é escrito como

$$\vec{H} = \Theta(z) \, \vec{\nabla} \times \vec{A}^N + \Theta(-z) \, \vec{\nabla} \times \vec{A}^S \tag{3.44}$$

Usando a relação

[3] A divergência na origem permanece, sendo ela inerente à eletrodinâmica com partículas puntiformes, sejam elas cargas elétricas ou magnéticas; sua razão reside em que alí se encontra o monopolo.

$$\Theta\, \vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\nabla} \times (\Theta\, \vec{u}) - \vec{\nabla}\Theta \times \vec{u} \tag{3.45}$$

e a equação (3.39), é possível mostrar (Bollini e Giambiagi, 1977) que a (3.44) pode ser escrita na forma

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{3.46}$$

onde

$$\vec{A} = \Theta(z)\, \vec{A}^N + \Theta(-z)\, \vec{A}^S + \frac{g}{2\pi}\, \delta(z)\, \phi\, \hat{k} \tag{3.47}$$

é o potencial vetor de Bollini-Giambiagi.

Vemos, mais uma vez, que a existência de cargas magnéticas é compatível com a (2.14), desde que A^μ seja não-regular. O potencial (3.47) descreve corretamente o campo magnético devido a um monopolo e pode ser usado para tratar a interação de cargas elétricas com esse campo, sem necessidade de introdução do veto de Dirac (Bollini e Leal Ferreira, 1978).

Não é difícil mostrar que a posição do plano equatorial, que separa os semi-espaços com diferentes escolhas de calibre, pode ser qualquer e que sua variação leva simplesmente a uma mudança de calibre em (3.47). Esta conclusão é evidente por si mesma, pois a variação desse plano corresponde, na formulação de Dirac, a uma alteração na posição das cordas em cada semi-espaço.

Os resultados desta seção podem ser formulados em notação 4-dimensional. O tensor de campo pode ser definido como em (2.14), com A_μ não-unívoco, seus valores sobre dois diferentes 4-hemisférios diferindo por uma transformação de calibre

$$A_\mu^N - A_\mu^S = \alpha_\mu \tag{3.48}$$

Seja a integral de linha calculada ao longo do equador

$$\oint_{eq} (A_\mu^N - A_\mu^S)\, d\xi^\mu = \oint_{eq} \alpha_\mu\, d\xi^\mu \tag{3.49}$$

Sendo ela um escalar de Lorentz, o resultado da integração é dado pela (3.41)

$$\oint_{eq} \alpha_\mu\, d\xi^\mu = g \tag{3.50}$$

Com $F_{\mu\nu}$ dado por (2.14), a lagrangiana do eletromagnetismo, (3.2) (com $\mathcal{L}_o$ representando agora a carga e o monopolo livres), leva às equações de Maxwell generalizadas, (2.4) e (2.5), e às equações de Lorentz para a carga, (2.13), e para o monopolo, (3.35), desde que A^μ seja não-unívoco, ***satisfazendo*** *às condições (3.48) e (3.50)* (Wu e Yang, 1976). A restrição (3.50) é imposta *ad hoc* e substitui o veto de Dirac, da seção anterior. Ela pode ser relaxada, pagando-se o preço de se considerar o segundo grupo de equações de Maxwell, (2.5), como uma equação cinemática, não advinda do princípio de mínima ação.

Ressaltemos, como no caso das formulações anteriores, o caráter não-local da condição (3.50), o qual, como das outras vezes, não afeta as equações de movimento.

Capítulo 4

Lagrangiana não-local para a eletrodinâmica dual

4.1 O tensor de Cabibbo-Ferrari

É bastante simples obter uma descrição lagrangiana para a interação entre monopolos e o campo, na ausência de cargas elétricas. Para isto, basta que façamos uma rotação dual de $\pi/2$ nas equações da eletrodinâmica sem monopolos. De (2.2) e (2.10), vemos que tal transformação leva

$$F^{\mu\nu} \to -\tilde{F}^{\mu\nu} \tag{4.1}$$

$$j^{\alpha} \to -g^{\alpha} \tag{4.2}$$

Assim, as equações (2.4), (2.13) e (2.12) tornam-se, respectivamente, (2.5), (3.35) e

$$\partial_{\nu} F^{\mu\nu} = 0 \tag{4.3}$$

A (4.3) nos permite introduzir o 4-potencial dual $\tilde{A}^{\mu}$, de forma que (cf. (2.14))

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \tilde{A}^\nu - \partial^\nu \tilde{A}^\mu \tag{4.4}$$

Por comparação com (3.2), vemos que, neste caso, a lagrangiana é dada simplesmente por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_o - \frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - g_\mu \tilde{A}^\mu \tag{4.5}$$

onde agora $\mathcal{L}_o$ é a lagrangiana livre do monopolo.

Devemos notar, no entanto, que (4.5) não é obtida diretamente de (3.2) pelas transformações duais (4.1) e (4.2). De fato, usando (2.14), temos

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A^\alpha) = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta \tag{4.6}$$

Comparando com (4.4), vemos que a rotação dual de $\pi/2$ não leva $A^\mu \to -\tilde{A}^\mu$. E que, portanto, as definições (2.14) e (4.4) não são invariantes duais. O que já era esperado, pois essas equações só valem, respectivamente, na ausência de cargas magnéticas e na ausência de cargas elétricas.

A equação (4.6) nos sugere definir o tensor de campo, em termos dos 4-potenciais A^μ e $\tilde{A}^\mu$, em uma forma invariante dual, dada por (Cabibbo e Ferrari, 1962)

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial_\alpha \tilde{A}_\beta \tag{4.7}$$

Calculando seu dual, obtemos

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \tilde{A}^\nu - \partial^\nu \tilde{A}^\mu + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial_\alpha A_\beta \tag{4.8}$$

Estas definições são invariantes pela transformação dual dada por (2.1) e (2.2), se, em termos dos 4-potenciais, ela for expressa por

$$A^\mu = A'^\mu \cos\varphi + \tilde{A}'^\mu \sin\varphi \tag{4.9}$$

$$\tilde{A}^\mu = -A'^\mu \sin\varphi + \tilde{A}'^\mu \cos\varphi \tag{4.10}$$

Para $\varphi = \pi/2$, temos $A^\mu \to -\tilde{A}^\mu$, como desejávamos.

As (4.7) e (4.8) são também invariantes pelas transformações de calibre

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda \tag{4.11}$$

$$\tilde{A}_\mu \to \tilde{A}_\mu + \partial_\mu \Gamma \tag{4.12}$$

onde Λ e Γ são funções escalares arbitrárias das coordenadas. Na verdade, estas transformações são casos particulares das transformações de calibre mais gerais

$$A_\mu \to A_\mu + A'_\mu \tag{4.13}$$

$$\tilde{A}_\mu \to \tilde{A}_\mu + \tilde{A}'_\mu \tag{4.14}$$

com A'_μ e $\tilde{A}'_\mu$ satisfazendo a condição de campo nulo

$$\partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu - \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha \tilde{A}'_\beta = 0 \tag{4.15}$$

Vemos, portanto, que a introdução de 4-potenciais adicionais leva a uma ampliação da liberdade de calibre usual, o que garante a manutenção do número de graus de liberdade independentes do campo eletromagnético.

Levando (4.7) e (4.8) nas equações de Maxwell generalizadas, (2.4) e (2.5), e usando o calibre de Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu \tilde{A}^\mu = 0 \tag{4.16}$$

obtemos

$$\Box A^\mu = j^\mu \tag{4.17}$$

$$\Box \tilde{A}^\mu = g^\mu \tag{4.18}$$

onde introduzimos o operador de d'Alembert

$$\Box \equiv \partial_\nu \partial^\nu \tag{4.19}$$

Assim, com as definições (4.7) e (4.8), as equações de Maxwell não se anulam identicamente. Ademais, vemos que o campo A^μ se acopla com a 4-corrente elétrica, enquanto que $\tilde{A}^\mu$ se acopla com a 4-corrente magnética.

Na ausência de 4-corrente magnética, podemos, ainda, usar a invariância de calibre para fazer $\tilde{A}^\mu = 0$, caso em que (4.7) se reduz à (2.14). E, na ausência de 4-corrente elétrica, fazendo $A^\mu = 0$, obtemos, de (4.8), a expressão (4.4).

Observemos, mais uma vez, a introdução de um termo adicional na definição de $F^{\mu\nu}$, como em (2.34) e (3.32).

4.2 O potencial não-local

Porém, ainda nos deparamos com a velha pergunta: como obter, com ajuda do tensor de Cabibbo-Ferrari, uma descrição lagrangiana adequada? Antes de procurar uma solução completa para o problema, busquemos uma lagrangiana que descreva a interação de uma carga elétrica com o campo, em presença de monopolos.

Uma análise ingênua pode nos levar a crer que essa deve ser dada na forma (3.2), com $F_{\mu\nu}$ dado por (4.7). De fato, calculando a equação de Euler-Lagrange para A^μ, obtemos, de (3.2) e (4.7), as (3.4) e (3.5). Logo, a (3.3) nos leva ao primeiro grupo de equações de Maxwell, (2.4).

Entretanto, a variação da ação com respeito às coordenadas da carga não depende do termo em $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, pouco importando, portanto, a definição (4.7). Assim, obtemos novamente a (3.7). Claramente, não podemos, através de (4.7), identificar (3.7) com a equação de Lorentz (2.13), a não ser no caso em que existam apenas cargas elétricas, quando então vale a (2.14). Este resultado torna evidente a impossibilidade de descrição da teoria — mesmo em sua versão clássica — em termos de uma lagrangiana local, sem qualquer condição suplementar (Rosenbaum, 1966; Carter e Cohen, 1973; para um argumento quântico a favor dessa impossibilidade, ver Rodrigues Jr. et al, 1989).

O primeiro passo para obtermos uma descrição completa consiste, portanto, em procurar uma transformação não-local que leve a equação (2.14), válida na ausência de cargas magnéticas, na expressão de Cabibbo-Ferrari, (4.7). Como mostraremos a seguir, a solução para este problema é dada pela transformação (Cardoso de Mello, 1993; et al, 1994)[1]

[1]Há cerca de três décadas, Rohrlich (1966) introduziu um potencial não-local semelhante, seguindo uma parametrização introduzida originalmente por DeWitt (1962) ao tratar com funções de onda invariantes de calibre, análogas àquelas descritas em nossa seção 3.3. No seguimento, contudo, ele chega a resultados e conclusões diversos dos nossos.

$$A^\mu \rightarrow \mathcal{A}^\mu = A^\mu + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\gamma\alpha\beta}\int_P^x \partial_\alpha \tilde{A}_\beta \, d\xi_\gamma \tag{4.20}$$

onde P é, por ora, qualquer caminho para o qual a integral seja bem definida.

Substituindo (4.20) em (2.14), temos[2]

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu} &= \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu = \\
&= \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\gamma\alpha\beta}\partial^\mu \int_P^x \partial_\alpha \tilde{A}_\beta d\xi_\gamma - \partial^\nu A^\mu - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\gamma\alpha\beta}\partial^\nu \int_P^x \partial_\alpha \tilde{A}_\beta d\xi_\gamma = \\
&= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{2}\left[\epsilon^{\nu\gamma\alpha\beta}\, \partial_\alpha \tilde{A}_\beta \, \delta^\mu_\gamma - \epsilon^{\mu\gamma\alpha\beta}\, \partial_\alpha \tilde{A}_\beta \, \delta^\nu_\gamma\right] = \\
&= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \partial_\alpha \tilde{A}_\beta
\end{aligned} \tag{4.23}$$

onde δ^μ_γ é o tensor de Kronecker. Donde vemos que (4.20) leva realmente (2.14) em (4.7).

Levando (4.20) em (3.2), obtemos a lagrangiana não-local

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_o - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu \mathcal{A}^\mu \tag{4.24}$$

onde definimos o tensor de campo de acordo com (4.7). Como, classicamente, a 4-corrente elétrica é dada por (2.6), vemos que o caminho de integração P é definido pela linha de universo da carga.

[2] A derivada covariante da integral de linha de um tensor $\Lambda^{\alpha\ldots\nu}$, em relação ao ponto de observação x^μ, extremo do caminho de integração P, ao longo deste caminho, é definida como (Mandelstam, 1962)

$$\partial^\mu \int_P^x \Lambda^{\alpha\ldots\nu}(\xi)\, d\xi_\nu \equiv \lim_{dx_\mu \to 0} \frac{\left[\int_{P'} \Lambda^{\alpha\ldots\nu}(\xi)\, d\xi_\nu - \int_P \Lambda^{\alpha\ldots\nu}(\xi)\, d\xi_\nu\right]}{dx_\mu} \tag{4.21}$$

onde P' é obtido de P acrescentando-se a este uma extensão dx^μ, na direção de x^μ. Assim, se a derivação se faz em uma direção ortogonal àquela de integração, a diferença entre colchetes se anula, e com ela a derivada. Por outro lado, se derivamos na mesma direção de integração, obtemos, conforme o teorema fundamental do cálculo, $\Lambda^{\alpha\ldots\mu}(x)$. Logo, temos

$$\partial^\mu \int_P^x \Lambda^{\alpha\ldots\nu}(\xi)\, d\xi_\nu = \Lambda^{\alpha\ldots\nu}(x)\, \delta^\mu_\nu = \Lambda^{\alpha\ldots\mu}(x) \tag{4.22}$$

A lagrangiana (4.24) é invariante pelas transformações de calibre (4.11) e (4.12). De fato, o tensor de Cabibbo-Ferrari é invariante por tais transformações, e o potencial não-local varia por

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^\mu \quad &\rightarrow \quad A^\mu + \partial^\mu \Lambda + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\gamma\alpha\beta} \int_P^x \partial_\alpha (\tilde{A}_\beta + \partial_\beta \Gamma)\, d\xi_\gamma = \\ &= \quad (A^\mu + \partial^\mu \Lambda) + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\gamma\alpha\beta} \int_P^x \partial_\alpha \tilde{A}_\beta \, d\xi_\gamma \qquad (4.25)\end{aligned}$$

Assim, sob uma transformação de calibre, o potencial não-local varia da mesma forma que os potenciais locais; e tal variação, como sabemos, não altera as equações de movimento, desde que acompanhada por uma mudança de fase adequada na função de onda da carga.

Verifiquemos que a lagrangiana proposta nos leva às esperadas equações de movimento. Estas, na verdade, já estão calculadas, bastando substituir, em (2.4) e (3.7), $A^\mu \rightarrow \mathcal{A}^\mu$. Assim, obtemos o primeiro grupo de equações de Maxwell e a equação

$$m\frac{dU^\alpha}{d\tau} = e\,(\partial^\alpha \mathcal{A}^\beta - \partial^\beta \mathcal{A}^\alpha)\, U_\beta \qquad (4.26)$$

Como, nesta última, $\partial^\nu \mathcal{A}^\mu$ é calculada ao longo da linha de universo da carga — ou seja, ao longo do caminho de integração P — com ajuda de (4.23) obtemos a desejada equação de Lorentz, (2.13).

Ressaltemos que as equações obtidas são locais, a não-localidade da lagrangiana sendo, portanto, inobservável. Veremos, a seguir, que a mudança do caminho de integração em (4.20) representa, simplesmente, uma transformação de calibre no potencial não-local.

Para verificá-lo, consideremos um monopolo magnético em repouso, na origem de um certo sistema inercial de coordenadas (a distribuição de carga elétrica pode ser qualquer). A equação (4.18) terá por solução

$$\vec{\tilde{A}} = 0 \qquad (4.27)$$

$$\tilde{A}^0 = \frac{g}{4\pi r} \qquad (4.28)$$

a qual nada mais é que o potencial escalar coulombiano. Levando esta solução em (4.20), obtemos

$$\mathcal{A}^0 = A^0 \tag{4.29}$$

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) - \frac{g}{8\pi}\int_P^{\vec{r}} \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r'}\right) \times d\vec{r}' \tag{4.30}$$

Se tomarmos um outro caminho de integração P', o novo potencial vetor $\vec{\mathcal{A}}'$ diferirá de (4.30) por

$$\vec{\mathcal{A}}'(\vec{r}) - \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{g}{8\pi}\oint_{P-P'} \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r'}\right) \times d\vec{r}' = \frac{g}{8\pi}\vec{\nabla}\Omega_o(\vec{r}) \tag{4.31}$$

onde $\Omega_o(\vec{r})$ é o ângulo sólido subentendido pelo contorno $P-P'$ na origem do sistema de coordenadas. Ou seja, os dois potenciais diferem pelo gradiente de uma função escalar. Usando a covariância e a linearidade de (4.17), (4.18) e (4.20), vemos que os 4-potenciais $\mathcal{A}'^{\mu}$ e $\mathcal{A}^{\mu}$ diferem por uma mudança de calibre, em qualquer referencial e qualquer que seja a distribuição de cargas e monopolos, como desejávamos mostrar.

Como, classicamente, o caminho de integração em (4.20) é definido pela linha de universo da carga, vemos que diferentes trajetórias desta última definem diferentes calibres para o potencial não-local. Este resultado (obtido apenas com ajuda da equação de campo (4.18)) torna desnecessário, para obtermos a equação de movimento da carga, variar a ação com respeito ao caminho de integração P.

É interessante notar que o potencial não-local $\mathcal{A}^{\mu}$, que se acopla com a 4-corrente elétrica na lagrangiana (4.24), é não-regular, no sentido de não respeitar a condição de Euler, (2.15). Com efeito, usando-se (4.20), é fácil verificar que

$$\left(\partial^{\mu}\partial^{\nu} - \partial^{\nu}\partial^{\mu}\right)\mathcal{A}^{\alpha} \neq 0 \tag{4.32}$$

É esta circunstância que nos permite escrever (4.23), sem que isso implique na homogeneidade do segundo grupo de equações de Maxwell, (2.5).

A irregularidade de $\mathcal{A}^{\mu}$, como função de x e P, fica evidente se examinarmos a expressão (4.30), que define o potencial vetor $\vec{\mathcal{A}}$ devido a um monopolo em repouso na origem. Qualquer caminho de integração que passe pela origem torna a integral divergente sobre toda uma linha semi-infinita. Tal singularidade é essencial, pois advém da intersecção das linhas de universo da carga e do monopolo, e já está contida na equação de movimento da carga.

De fato, a (2.22) permite que esta se aproxime indefinidamente do monopolo, sobre o segmento de reta que os une; porém, quando ocorre a superposição, o segundo membro dessa equação se torna singular, a não ser que a velocidade relativa entre a carga e o monopolo se anule. Observemos contudo que, qualquer que seja a trajetória da carga, a singularidade de $\mathcal{A}^\mu$ estará sempre em um 4-hemisfério oposto àquele em que ela se movimenta.

Notemos que a equação de movimento obtida de (4.24), no caso quântico, quando (cf. (3.8))

$$\mathcal{L}_o = \bar{\psi}\left(i\partial_\mu\gamma^\mu - m\right)\psi \tag{4.33}$$

e j^μ é dada por (3.9), é (cf. (3.13))

$$\left(i\partial_\mu\gamma^\mu - m - e\mathcal{A}_\mu\gamma^\mu\right)\psi = 0 \tag{4.34}$$

O que mostra que, quanticamente, o potencial não-local é o potencial espalhador de cargas. Salientemos ainda que sua introdução nos permite justificar a utilização das funções de onda generalizadas na forma (3.17), as quais nos levam à condição de Cabibbo e Ferrari, (3.22). A (3.17) é obtida diretamente de (3.14), se, em lugar de A^μ e (2.14), usarmos o potencial não-local $\mathcal{A}^\mu$ e a (4.23).

4.3 A lagrangiana dual

Para que a simetria dual seja completamente realizada, devemos encontrar também uma transformação que leve (4.4) em (4.8). Em analogia com (4.20), temos a transformação não-local

$$\tilde{A}^\mu \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}^\mu = \tilde{A}^\mu - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\gamma\alpha\beta}\int_{\bar{P}}^{x}\partial_\alpha A_\beta\, d\xi_\gamma \tag{4.35}$$

Substituindo-a em (4.4), obtemos, de fato,

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{\mu\nu} &= \partial^\mu\tilde{\mathcal{A}}^\nu - \partial^\nu\tilde{\mathcal{A}}^\mu = \\ &= \partial^\mu\tilde{A}^\nu - \partial^\nu\tilde{A}^\mu + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial_\alpha A_\beta \end{aligned} \tag{4.36}$$

Sob as transformações de calibre (4.11) e (4.12), $\tilde{\mathcal{A}}^\mu$ se transforma como $\tilde{A}^\mu$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{A}}^\mu \quad &\rightarrow \quad \tilde{A}^\mu + \partial^\mu \Gamma - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\gamma\alpha\beta} \int_{\tilde{P}}^{x} \partial_\alpha (A_\beta + \partial_\beta \Lambda)\, d\xi_\gamma = \\
&= \quad (\tilde{A}^\mu + \partial^\mu \Gamma) - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\gamma\alpha\beta} \int_{\tilde{P}}^{x} \partial_\alpha A_\beta \, d\xi_\gamma
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Pode-se verificar também, usando-se a (4.17), que, da mesma forma que com $\mathcal{A}^\mu$ (cf. (4.31)), diferentes caminhos de integração em (4.35) correspondem a diferentes escolhas de calibre para $\tilde{\mathcal{A}}^\mu$. E que este potencial, assim como $\mathcal{A}^\mu$, é irregular, não obedecendo à condição de Euler (2.15), permitindo desta forma a inomogeneidade de (2.4). Quanticamente, é ele que desempenhará o papel de potencial espalhador de monopolos, através da equação de Dirac (cf. (4.34))

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - M - g\tilde{\mathcal{A}}_\mu \gamma^\mu)\, \psi = 0 \tag{4.38}$$

Antes, porém, de fazermos uso deste novo potencial para obter uma descrição lagrangiana completa, necessitamos analisar um aspecto fundamental de tal descrição.

A ação para o campo eletromagnético livre é

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \; F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{4.39}$$

onde o tensor de campo, em termos dos potenciais, é dado por (4.23). O sinal negativo em (4.39) garante a existência de um mínimo local para a ação, quando a variamos com respeito a $\mathcal{A}^\mu$ (ou A^μ).

Se, contudo, expressarmos a ação em termos do tensor dual (2.3), teremos

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x \; \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \tag{4.40}$$

obtida de (4.39), se usarmos a identidade

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \tag{4.41}$$

Escrevendo então o tensor dual, em termos dos potenciais, na forma (4.36) e comparando com (4.23), vemos que a ação (4.40) não possui ponto de mínimo com relação à variação de $\tilde{\mathcal{A}}^\mu$ (ou $\tilde{A}^\mu$), apresentando neste caso, ao contrário, um ponto de máximo.

Esta constatação nos leva a postular um princípio variacional para a eletrodinâmica dual que desempenhará papel essencial na obtenção de uma descrição lagrangiana correta: *o movimento real do sistema carga-campo-monopolo é tal que a ação apresenta um ponto de sela, mínimo com relação à variação dos graus de liberdade usuais e máximo com respeito à variação dos graus de liberdade duais.*

Seguindo tal prescrição, a extensão natural da lagrangiana (4.24) é

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^e_o + \mathcal{L}^g_o - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu \mathcal{A}^\mu + g_\mu \tilde{\mathcal{A}}^\mu \tag{4.42}$$

onde j_μ e g_μ são dadas por (2.6) e (2.7), e definimos $F_{\mu\nu}$, $\mathcal{A}^\mu$ e $\tilde{\mathcal{A}}^\mu$ através de (4.7), (4.20) e (4.35), com os caminhos de integração definidos, respectivamente, pelas linhas de universo da carga e do monopolo.

As lagrangianas livres são tais que

$$L^e_o \equiv \int d^3x\, \mathcal{L}^e_o = -m(1-u^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.43}$$

$$L^g_o \equiv \int d^3x\, \mathcal{L}^g_o = M(1-v^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.44}$$

(aqui, $\vec{u}$ é a velocidade da carga, enquanto $\vec{v}$ se refere ao monopolo). Como sabemos, o sinal negativo em (4.43) garante um mínimo para a ação livre da carga. De (4.44), por outro lado, vemos que a ação livre do monopolo possui um ponto de máximo.

Na ausência de monopolos, fazendo-se $\tilde{A}^\mu = 0$ em (4.7), a (4.42) se reduz à lagrangiana do eletromagnetismo, (3.2). E, na ausência de cargas elétricas, tomando $A^\mu = 0$ em (4.8), obtemos, a menos de um sinal global, a lagrangiana dual (4.5). A diferença de sinal está associada à existência, aqui, de um ponto de máximo, enquanto que lá era de mínimo.

Obtenhamos, a partir de (4.42), todas as equações de movimento desejadas. Estas constituem as usuais equações de Euler-Lagrange, obtidas quando igualamos a zero a primeira variação da ação (cf. (3.1)), independentemente de se tratar de um ponto de máximo ou de mínimo.

A variação dos potenciais locais A^μ e $\tilde{A}^\mu$ — fixas as linhas de universo das partículas — leva, através das transformações de variáveis (4.20) e (4.35), a uma variação correspondente nos potenciais não-locais $\mathcal{A}^\mu$ e $\tilde{\mathcal{A}}^\mu$. Consideremos a variação da ação com respeito a estes últimos. De (4.42), usando (4.23), (4.41) e (4.36), obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}^\mu} = -j_\mu \tag{4.45}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \mathcal{A}^\mu)} = F_{\mu\nu} \tag{4.46}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\mathcal{A}}^\mu} = g_\mu \tag{4.47}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \tilde{\mathcal{A}}^\mu)} = -\tilde{F}_{\mu\nu} \tag{4.48}$$

Assim, as equações de Euler-Lagrange

$$\partial^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \mathcal{A}^\mu)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}^\mu} \tag{4.49}$$

$$\partial^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \tilde{\mathcal{A}}^\mu)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\mathcal{A}}^\mu} \tag{4.50}$$

nos levam às equações de Maxwell generalizadas, (2.4) e (2.5).

Variando a ação com respeito às coordenadas da carga e do monopolo, obtemos, por outro lado, as equações (4.26) e

$$M \frac{dV^\alpha}{d\tau} = g \left(\partial^\alpha \tilde{\mathcal{A}}^\beta - \partial^\beta \tilde{\mathcal{A}}^\alpha \right) V_\beta \tag{4.51}$$

O sinal trocado no último termo de (4.42) é cancelado pela troca de sinal em (4.44), de forma que obtemos duas equações formalmente idênticas. Usando então os resultados (4.23) e (4.36), chegamos às equações de Lorentz (2.13) e (3.35).

Vemos, portanto, que a lagrangiana (4.42), com as definições (2.6), (2.7), (4.7), (4.20) e (4.35), nos leva a todas as equações da teoria, sem necessidade de nenhuma condição suplementar.

Em termos dos potenciais não-locais (4.20) e (4.35), a rotação dual, dada por (4.9) e (4.10), se escreve na forma análoga

$$\mathcal{A}^{\mu} = \mathcal{A}'^{\mu} \cos\varphi + \tilde{\mathcal{A}}'^{\mu} \sin\varphi \tag{4.52}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}^{\mu} = -\mathcal{A}'^{\mu} \sin\varphi + \tilde{\mathcal{A}}'^{\mu} \cos\varphi \tag{4.53}$$

É muito importante, no entanto, observarmos que a lagrangiana (4.42) *não é* invariante sob a rotação dual definida por (2.9), (2.10), (4.52) e (4.53), para um ângulo dual arbitrário. Assim, a simetria dual contínua, que até agora tem-se mostrado um poderoso guia para nossas investigações, parece ter-se perdido irremediavelmente. Esta quebra de simetria se deve à impossibilidade de uma mesma partícula, a um só tempo, maximizar e minimizar a ação. Em outras palavras, a lagrangiana obtida não é adequada para a descrição dos dyons, partículas elementares dualmente carrregadas.

Consideremos, entretanto, a transformação discreta definida por

$$\mathcal{A}^{\mu} \to -\tilde{\mathcal{A}}^{\mu} \tag{4.54}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}^{\mu} \to \mathcal{A}^{\mu} \tag{4.55}$$

$$j^{\mu} \to -g^{\mu} \tag{4.56}$$

$$g^{\mu} \to j^{\mu} \tag{4.57}$$

juntamente com $m \leftrightarrow M$. Ela constitui um caso particular da rotação dual dada por (2.9), (2.10), (4.52) e (4.53), quando tomamos o ângulo dual igual a $\pi/2$. A lagrangiana (4.42) se transformará como

$$\mathcal{L} \to -\mathcal{L} \tag{4.58}$$

e para a ação temos, portanto,

$$S \to -S \tag{4.59}$$

Como as equações de movimento são obtidas da anulação da primeira variação da ação, (3.1), elas não se alteram sob a troca do sinal global de $\mathcal{L}$ ou S. Podemos, pois, afirmar que a teoria permanece invariante sob essa transformação discreta.

4.4 Formulação hamiltoniana

A diferença de sinal entre as lagrangianas livres da carga elétrica e do monopolo (cf. (4.43) e (4.44)) pode nos levar à suspeita de que este último se apresenta como uma partícula de energia negativa (Rohrlich, 1966); o que, a nível clássico, não pode ser, de modo algum, aceitável. Trata-se, no entanto, de uma suspeita infundada, o que se conclui da análise das equações de movimento provenientes da lagrangiana (4.42).

As componentes vetoriais das equações de campo (2.4) e (2.5) se escrevem como

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \tag{4.60}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{g} \tag{4.61}$$

onde $\vec{j}$ e $\vec{g}$ são as densidades de corrente elétrica e de corrente magnética.

As equações de Lorentz (2.13) e (3.35) têm, por sua vez, as componentes espaciais (cf. (2.17))

$$\frac{d\vec{p}_e}{dt} = e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{H}) \tag{4.62}$$

$$\frac{d\vec{p}_g}{dt} = g(\vec{H} - \vec{v} \times \vec{E}) \tag{4.63}$$

onde $\vec{p}_e$ e $\vec{p}_g$ representam os 3-momentos da carga e do monopolo, definidos por

$$\vec{p}_e \equiv \frac{m\vec{u}}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{4.64}$$

$$\vec{p}_g \equiv \frac{M\vec{v}}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{4.65}$$

Multiplicando escalarmente por $\vec{E}$ a equação (4.60), por $\vec{H}$ a (4.61) e subtraindo a segunda da primeira, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(E^2 + H^2) = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \vec{g} \cdot \vec{H} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \tag{4.66}$$

Integrando esta equação em todo o espaço, a integral do último termo se reduz a uma integral de superfície no infinito, a qual se anula se supomos nulos, alí, os campos físicos. Ficamos então com

$$\frac{d}{dt}\int \frac{1}{2}(E^2 + H^2)\, d^3x = -\int (\vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{g} \cdot \vec{H})\, d^3x \tag{4.67}$$

Usando, para as correntes, as expressões (2.6) e (2.7), obtemos

$$\frac{d}{dt}\int \frac{1}{2}(E^2 + H^2)\, d^3x = -(e\, \vec{u} \cdot \vec{E} + g\, \vec{v} \cdot \vec{H}) \tag{4.68}$$

Por outro lado, multiplicando escalarmente (4.62) e (4.63), respectivamente, por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e fazendo uso de (4.64) e (4.65), temos

$$e\, \vec{u} \cdot \vec{E} = \vec{u} \cdot \frac{d\vec{p}_e}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{4.69}$$

$$g\, \vec{v} \cdot \vec{H} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}_g}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{M}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{4.70}$$

Levando à (4.68), obtemos a lei de conservação da energia, em uma forma definida positiva:

$$\frac{d}{dt}\left[\int \frac{1}{2}(E^2 + H^2)\, d^3x + \frac{m}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{M}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = 0 \tag{4.71}$$

O primeiro termo dentro dos colchetes é, como sabemos, a energia armazenada no campo eletromagnético. O segundo diz respeito à energia relativística da carga. No derradeiro, podemos identificar a energia do monopolo, a qual, como vemos, é positiva. Este resultado, aparentemente paradoxal, está associado à formulação hamiltoniana da teoria, diversa conforme tratemos com cargas elétricas ou magnéticas. É o que veremos agora.

Integrando a lagrangiana (4.42) em todo o espaço e usando (2.6) e (2.7), obtemos a função de Lagrange

$$L = L_e + L_g + L_{Maxwell} \tag{4.72}$$

onde

$$L_e = -m\,(1-u^2)^{\frac{1}{2}} + e\,\vec{u}\cdot\vec{\mathcal{A}} - e\,\mathcal{A}_0 \tag{4.73}$$

$$L_g = M\,(1-v^2)^{\frac{1}{2}} - g\,\vec{v}\cdot\vec{\tilde{\mathcal{A}}} + g\,\tilde{\mathcal{A}}_0 \tag{4.74}$$

$$L_{Maxwell} = -\frac{1}{4}\int d^3x\; F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{4.75}$$

Da maneira usual, definimos o momento generalizado e a função de Hamilton da carga elétrica como

$$\vec{p}_e \equiv \frac{\partial L_e}{\partial \vec{u}} \tag{4.76}$$

$$\mathcal{H}_e \equiv \frac{\partial L_e}{\partial \vec{u}}\cdot\vec{u} - L_e \tag{4.77}$$

Assim, de (4.73), obtemos

$$\vec{p}_e = \frac{m\vec{u}}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}} + e\vec{\mathcal{A}} \tag{4.78}$$

$$\mathcal{H}_e = \frac{m}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}} + e\mathcal{A}_0 = [m^2 + (\vec{p}_e - e\vec{\mathcal{A}})^2]^{\frac{1}{2}} + e\mathcal{A}_0 \tag{4.79}$$

Em função da ação, essas grandezas se escrevem, como sabemos, conforme

$$\vec{p}_e = \frac{\partial S_e}{\partial \vec{r}} \tag{4.80}$$

$$\mathcal{H}_e = -\frac{\partial S_e}{\partial t} \tag{4.81}$$

As expressões correspondentes para o momento generalizado e a função de Hamilton do monopolo são obtidas das expressões acima com ajuda da rotação dual de $\pi/2$, equações (4.54)-(4.57). Como já vimos (cf. (4.58) e (4.59)), tal rotação leva $L_e \to -L_g$ e $S_e \to -S_g$, e vice-versa. Logo, de (4.76) e (4.77), obtemos

$$\vec{p}_g \equiv -\frac{\partial L_g}{\partial \vec{v}} \tag{4.82}$$

$$\mathcal{H}_g \equiv -\left(\frac{\partial L_g}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{v} - L_g\right) \tag{4.83}$$

E, de (4.80) e (4.81), temos

$$\vec{p}_g = -\frac{\partial S_g}{\partial \vec{r}} \tag{4.84}$$

$$\mathcal{H}_g = \frac{\partial S_g}{\partial t} \tag{4.85}$$

Com a função de Lagrange (4.74), essas expressões nos levam a

$$\vec{p}_g = \frac{M\vec{v}}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}} + g\vec{\tilde{\mathcal{A}}} \tag{4.86}$$

$$\mathcal{H}_g = \frac{M}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}} + g\tilde{\mathcal{A}}_0 = [M^2 + (\vec{p}_g - g\vec{\tilde{\mathcal{A}}})^2]^{\frac{1}{2}} + g\tilde{\mathcal{A}}_0 \tag{4.87}$$

Na ausência de campo, o momento generalizado se reduz à (4.65), e a função de Hamilton, à energia livre relativística, definida positiva.

As (4.82) e (4.83) respeitam a forma canônica das equações de Hamilton, pois estas permanecem invariantes quando trocamos, simultaneamente, os sinais de $\vec{p}$ e $\mathcal{H}$. Para verificá-lo, escrevamos a diferencial total de $\mathcal{H}_g$, como função de $\vec{r}$ e $\vec{p}_g$,

$$d\mathcal{H}_g = \frac{\partial \mathcal{H}_g}{\partial \vec{p}_g} \cdot d\vec{p}_g + \frac{\partial \mathcal{H}_g}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r} \tag{4.88}$$

Por outro lado, de (4.83) e (4.82), temos

$$d\mathcal{H}_g = \vec{v} \cdot d\vec{p}_g + \frac{\partial L_g}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r} \tag{4.89}$$

Usando a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_g}{\partial \vec{v}}\right) = \frac{\partial L_g}{\partial \vec{r}} \tag{4.90}$$

e a (4.82), obtemos

$$d\mathcal{H}_g = \vec{v} \cdot d\vec{p}_g - \dot{\vec{p}}_g \cdot d\vec{r} \tag{4.91}$$

Comparando com (4.88), obtemos as equações de Hamilton usuais

$$\frac{\partial \mathcal{H}_g}{\partial \vec{p}_g} = \dot{\vec{r}} \tag{4.92}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_g}{\partial \vec{r}} = -\dot{\vec{p}}_g \tag{4.93}$$

A diferença de sinais entre as definições (4.76) e (4.77), de um lado, e as (4.82) e (4.83), de outro, está associada às diferentes concavidades de $\mathcal{L}$ (e, portanto, de S) com respeito às velocidades da carga e do monopolo. Em relação a $\vec{u}$, essas funções são convexas, possuindo um mínimo. Já com respeito a $\vec{v}$, elas são côncavas, apresentando um ponto de máximo. Como a transformada de Legendre conserva a concavidade, é necessário, para obtermos a forma convexa (4.87), definir a função de Hamilton do monopolo como *menos* a transformada de Legendre da função de Lagrange.

Verifiquemos que a função de Hamilton assim definida coincide com o limite clássico do operador quântico de evolução temporal, o hamiltoniano, quando tratamos com partículas de ação côncava. Para isto, lembremos como é obtido tal limite, no caso de uma partícula cuja ação é convexa.

A trajetória clássica da partícula ocupa, em mecânica, papel análogo ao raio luminoso na ótica geométrica. Esta é obtida como caso limite da propagação de ondas eletromagnéticas, quando consideramos grandes variações de fase em pequenas regiões do espaço. Ou seja, qualquer componente do campo pode ser escrita como

$$u = ae^{i\phi} \tag{4.94}$$

com a variando muito lentamente em comparação com ϕ. A trajetória do raio é então obtida a partir do Princípio de Fermat, segundo o qual a variação da fase ϕ é mínima, entre os extremos da trajetória.

Seguindo a analogia indicada acima e lembrando que o movimento real é aquele que minimiza a ação, obtemos o limite semi-clássico da função de onda da partícula na forma

$$\psi = ae^{iS} \tag{4.95}$$

Levando-o à equação de Schröedinger

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}\psi \tag{4.96}$$

e considerando a constante, obtemos

$$-\frac{\partial S}{\partial t}\psi = \hat{\mathcal{H}}\psi \tag{4.97}$$

De onde vemos que, no limite clássico, o operador hamiltoniano se reduz à multiplicação por $-\partial S/\partial t$, estando de acordo com (4.81).

Consideremos agora uma partícula dual. Sua ação sendo côncava, não possui mínimo, mas um máximo e, portanto, para realizarmos a analogia com o Princípio de Fermat, devemos tomar sua função de onda semi-clássica como

$$\psi = ae^{-iS} \tag{4.98}$$

Este resultado pode também ser obtido diretamente, aplicando-se, à (4.95), a rotação dual de $\pi/2$, a qual leva $S \to -S$ (cf. (4.59)).

Levando (4.98) em (4.96), temos

$$\frac{\partial S}{\partial t}\psi = \hat{\mathcal{H}}\psi \tag{4.99}$$

Ou seja, o operador hamiltoniano, no caso de partículas com ação côncava, se reduz, classicamente, à multiplicação por $\partial S/\partial t$, concordando, portanto, com a definição (4.85).

O operador quântico de translação espacial é definido como

$$\hat{\vec{p}}\psi = -i\frac{\partial\psi}{\partial\vec{r}} \tag{4.100}$$

Substituindo aqui a função de onda semi-clássica de ação convexa, (4.95), chegamos a

$$\hat{\vec{p}}\psi = \frac{\partial S}{\partial\vec{r}}\psi \tag{4.101}$$

Assim, no limite clássico, esse operador corresponde ao momento definido por (4.80). Se tratamos, contudo, com uma partícula de ação côncava, a substituição de (4.98) em (4.100) nos leva a

$$\hat{\vec{p}}\psi = -\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\psi \qquad (4.102)$$

O que mostra que, classicamente, o operador de translação espacial de uma partícula dual corresponde à definição de momento dada por (4.84).

Para concluir, observemos que a formulação hamiltoniana aqui obtida é invariante dual, pois a rotação dual de $\pi/2$, devido a (4.58) e (4.59), leva (4.76), (4.77), (4.80) e (4.81), respectivamente, em (4.82), (4.83), (4.84) e (4.85); e vice-versa. O mesmo se pode dizer das funções de onda semi-clássicas (4.95) e (4.98), as quais, sob tal rotação, se transformam uma na outra. Estes resultados se relacionam com o fato dessa transformação inverter a concavidade das ações da carga e do monopolo.

4.5 Simetrias P, T e C

A introdução de monopolos de Dirac no eletromagnetismo viola simetrias fundamentais dessa teoria, quais sejam as invariâncias por inversão temporal, inversão espacial ou conjugação de carga. Isto pode ser visto diretamente da lagrangiana (4.42) e das definições (4.7) e (4.35). Como $F^{\mu\nu}$ é um tensor verdadeiro, e $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é um pseudo-tensor, o 4-potencial $\tilde{A}^{\mu}$ deve ser um vetor axial, o mesmo valendo para $\tilde{\mathcal{A}}^{\mu}$. E como, na lagrangiana, é este 4-vetor que se acopla com a 4-corrente magnética, o termo de interação é um pseudo-escalar, que muda de sinal sob as transformações P, T e C. A violação destas simetrias fica também evidente nas equações de movimento (2.5), (3.35) e (4.38), que não são invariantes pelas transformações consideradas.

Sob o ponto de vista quântico, podemos considerar o potencial $\tilde{A}^{\mu}$ como um fóton axial, em tudo semelhante ao fóton A^{μ}, mas com números quânticos P, T e C opostos. A violação de simetria advém do acoplamento desse fóton com a 4-corrente magnética (cf. (4.18)), a qual constitui um vetor polar, podendo ser dada, por exemplo, por

$$g^{\mu} = g\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \qquad (4.103)$$

A violação de simetrias tão caras à eletrodinâmica não constitui, *per si*, um sério problema, dado que ocorre em um setor ainda não observado do eletromagnetismo. Todavia, do ponto de vista teórico, é interessante explorar as consequências de sua restauração. Uma forma bastante natural de o fazer é considerar, em lugar da 4-corrente magnética vetorial, uma 4-corrente axial (ou seja, um 4-pseudovetor), dada por (Carneiro e Nemes, 1993; Galvão e Mignaco, 1994)

$$g^{\mu} = g\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\psi \tag{4.104}$$

onde γ_5 é a matriz de Dirac

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{4.105}$$

Em termos das 4-correntes vetorial e axial, a lagrangiana (4.42) é escrita como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_o - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \left(e\bar{\psi}_e\gamma_\mu\psi_e\right)\mathcal{A}^{\mu} + \left(g\bar{\psi}_g\gamma_\mu\gamma_5\psi_g\right)\tilde{\mathcal{A}}^{\mu} \tag{4.106}$$

onde $\mathcal{L}_o$ é a lagrangiana livre (cf. (4.33))

$$\mathcal{L}_o = \bar{\psi}_e\left(i\partial_\mu\gamma^{\mu} - m\right)\psi_e - \bar{\psi}_g\left(i\partial_\mu\gamma^{\mu} - M\right)\psi_g \tag{4.107}$$

A (4.106) leva às equações de Euler-Lagrange

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^{\mu} = -e\bar{\psi}_e\gamma^{\mu}\psi_e \tag{4.108}$$

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = -g^{\mu} = -g\bar{\psi}_g\gamma^{\mu}\gamma_5\psi_g \tag{4.109}$$

$$\left(i\partial_\mu\gamma^{\mu} - m - e\mathcal{A}_\mu\gamma^{\mu}\right)\psi_e = 0 \tag{4.110}$$

$$\left(i\partial_\mu\gamma^{\mu} - M - g\tilde{\mathcal{A}}_\mu\gamma^{\mu}\gamma_5\right)\psi_g = 0 \tag{4.111}$$

Usando (4.7) e a condição de Lorenz, (4.16), podemos reescrever (4.108) e (4.109) como equações de onda

$$\Box A^{\mu} = e\bar{\psi}_e\gamma^{\mu}\psi_e \tag{4.112}$$

$$\Box \tilde{A}^{\mu} = g\bar{\psi}_g\gamma^{\mu}\gamma_5\psi_g \tag{4.113}$$

Ou seja, o fóton vetorial A^μ se acopla com a 4-corrente vetorial, enquanto que o fóton axial $\tilde{A}^\mu$ se acopla com a 4-corrente axial, ficando então preservada a invariância destas equações sob transformações P, T e C. A invariância de (4.111) é, por sua vez, garantida pela presença do fator γ_5.

Se calcularmos a 4-divergência das equações (4.108) e (4.109), temos

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = -\partial_\mu j^\mu \tag{4.114}$$

$$\partial_\mu \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = -\partial_\mu g^\mu \tag{4.115}$$

Como $F^{\mu\nu}$ e $\tilde{F}^{\mu\nu}$ são anti-simétricos com respeito à troca de μ e ν, os primeiros membros se anulam identicamente, e, portanto,

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{4.116}$$

$$\partial_\mu g^\mu = 0 \tag{4.117}$$

Vemos assim que j^μ e g^μ são correntes conservadas identicamente, independente de seu caráter vetorial ou axial.

A conservação da corrente vetorial está, como sabemos, associada à invariância da lagrangiana (4.106) sob a transformação global de calibre

$$U_V(1): \; \psi_e \to e^{-ie\alpha} \; \psi_e \tag{4.118}$$

onde α é uma constante. Sabemos, ademais, que $\mathcal{L}$ é ainda invariante sob a transformação local

$$\psi_e \to e^{-ie\alpha(x)} \psi_e \tag{4.119}$$

$$\mathcal{A}_\mu \to \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \alpha \tag{4.120}$$

com α, agora, função de x. A transformação de $\mathcal{A}^\mu$ corresponde, como já mostramos (cf. (4.25)), a uma transformação análoga de A^μ.

A conservação da corrente axial, por sua vez, está associada à invariância de $\mathcal{L}$ sob a transformação axial

$$U_A(1): \; \psi_g \to e^{-ig\beta\gamma_5} \; \psi_g \tag{4.121}$$

a qual possui também a versão local

$$\psi_g \to e^{-ig\beta(x)\gamma_5}\,\psi_g \tag{4.122}$$

$$\tilde{A}_\mu \to \tilde{A}_\mu + \partial_\mu\beta \tag{4.123}$$

a (4.123) correspondendo a transformação análoga de $\tilde{A}^\mu$ (cf. (4.37)).

Aqui, porém, surge uma forte restrição: a conservação da corrente axial implica em que a massa do monopolo é necessariamente nula; o que pode ser verificado, calculando-se diretamente a 4-divergência de g^μ, com ajuda de (4.111), quando encontramos

$$\partial_\mu g^\mu = 2igM\bar{\psi}_g\gamma_5\psi_g \tag{4.124}$$

A anulação de (4.124) implica em $M = 0$. Pode-se verificar também que $\mathcal{L}$ só é invariante sob (4.121) se a lagrangiana livre do monopolo não apresentar termo de massa.

Como sabemos, a função de onda de uma partícula de massa nula tem quiralidade bem definida, ou seja, é auto-função de γ_5. Segue daí que

$$g^\mu = g\bar{\psi}_g\gamma^\mu\gamma_5\psi_g = \pm\, g\bar{\psi}_g\gamma^\mu\psi_g \tag{4.125}$$

e nosso monopolo axial se comporta, a menos das transformações P, T e C, como um monopolo magnético (vetorial) de massa nula. Isto tem uma implicação bastante importante: a condição de Dirac permanece válida, o que resulta na quantização das cargas elétrica e axial.

Entretanto, partículas de massa nula e com forte acoplamento com o campo eletromagnético são descartadas do ponto de vista observacional, a não ser que permaneçam confinadas em partículas compostas, com carga axial total nula. O que nos sugere introduzir um mecanismo de geração de massa, com quebra espontânea da simetria axial. Contudo, no caso de monopolos axiais massivos, sua interação com o campo eletromagnético será qualitativamente diversa daquela referente aos monopolos vetoriais, dependendo, em particular, das condições de polarização. Como consequência, a obtenção da condição de Dirac de quantização das cargas necessita, nesse caso, de ser melhor investigada.

Capítulo 5

Conclusões

Com mais de 60 anos de existência teórica, a idéia de monopolos magnéticos sobrevive, à espera de confirmação experimental. A seu lado, um fato observacional ainda mais antigo, a quantização da carga elétrica, também sobrevive, à espera de compreensão teórica. Sobrevivem e esperam, desafiando o método científico. Pois mutuamente se alentam e sustentam, mas não se completam.

Neste trabalho, mostramos como a existência de cargas magnéticas, sejam como partículas puntiformes em uma eletrodinâmica com simetria dual, sejam como soluções topológicas em teorias unificadas ou tipo Kaluza-Klein, se encontra associada à quantização da carga elétrica[1]. Apresentamos também algumas possíveis razões que dificultam sua observação, como forte acoplamento, grande massa e raridade no Universo. E indicamos outras interessantes características, como a possibilidade de identificação (ao menos qualitativa) com os constituintes da matéria hadrônica; ou de obtenção de férmions a partir de campos bosônicos.

Entretanto, os monopolos de Dirac não são apenas um desafio à física experimental, mas trazem também consigo importantes problemas teóricos,

[1] Em trabalhos recentes, foi proposta uma explicação para a quantização da carga que, aparentemente, prescinde da idéia de monopolos, mas que necessita da introdução, no modelo padrão, de neutrinos de mão-direita. A invariância de calibre do setor de Yukawa, associada à exigência de cancelamento de anomalias, fixaria a hipercarga — e, portanto, a carga — de todas as partículas do modelo, nos valores conhecidos experimentalmente (He et al, 1989; Babu e Mohapatra, 1989).

entre os quais a descrição da teoria em termos de um princípio de ação. Esperamos ter convencido o leitor de que se trata de uma dificuldade relacionada à formulação da eletrodinâmica clássica dual, ou seja, com ângulo dual arbitrário, independentemente da existência de uma nova partícula.

Examinamos algumas tentativas de se abordar esse problema, como através de funções de onda não-locais, potenciais não-regulares ou da introdução de potenciais adicionais. E sugerimos uma solução baseada em uma lagrangiana não-local, a qual se reduz, na ausência de correntes magnéticas, à lagrangiana usual do eletromagnetismo. A lagrangiana proposta, além de levar a todas as equações (locais) da eletrodinâmica dual, estabelece uma relação entre o tensor generalizado de Cabibbo e Ferrari e as funções de onda de fase não-integrável.

Os resultados apresentados abrem interessantes perspectivas de pesquisa, entre as quais podemos citar a construção de uma teoria quântica de campos com cargas e monopolos, baseada na lagrangiana obtida.

Outro possível seguimento é aquele relacionado a extensões não-abelianas da lagrangiana dual (4.42). Pois, da mesma forma que monopolos magnéticos podem ser obtidos como sólitons em teorias não-abelianas (seção 2.3), podemos pensar em cargas elétricas como soluções topológicas de teorias duais às primeiras (Goddard et al, 1977; Montonen e Olive, 1977; Seiberg, 1994). Tal possibilidade sugere uma descrição unificada de cargas elétricas e magnéticas como configurações de campos bosônicos escalares e vetoriais. A dificuldade reside, porém, na inexistência de uma lagrangiana auto-dual, que contenha, a um só tempo, os campos bosônicos e seus respectivos duais, à maneira da (4.42). A introdução de potenciais não-locais (não-abelianos) pode ser um caminho viável para a construção de uma formulação baseada em um princípio variacional de sela.

E há ainda um estimulante problema a ser investigado, qual seja o da interação do monopolo magnético com o campo gravitacional.

Usualmente, a ação para uma partícula de massa m, sujeita a esse campo, é dada por

$$S = -m \int ds \tag{5.1}$$

onde o intervalo ds é definido como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \tag{5.2}$$

No caso de uma carga magnética, no entanto, devemos considerar a ação na forma

$$S = M \int ds \tag{5.3}$$

para que a mesma apresente, ao contrário de (5.1), um máximo, e a função de Lagrange livre se reduza, na ausência de campo, à (4.44).

A diferença de sinais entre (5.1) e (5.3) não leva a nenhuma modificação nas equações de movimento das partículas no campo gravitacional, pois estas são obtidas da condição $\delta S = 0$, independentemente de se tratar de uma condição de máximo ou de mínimo. O que está de acordo com o Princípio da Equivalência. Além disso, o caráter positivo definido da energia livre do monopolo (cf. seção 4.4) nos garante que este desempenhará, através do tensor momento-energia da matéria, presente na equação gravitacional de Einstein, o mesmo papel que qualquer partícula, no que se refere à geração de campo.

Contudo, para obter uma ação completa para as partículas e o campo gravitacional, podemos pensar em ampliar os graus de liberdade referentes a este último, de maneira análoga ao que fizemos no caso eletromagnético (cf. (4.7)), de tal forma que o campo obedeça a um princípio de mínima ou de máxima ação, conforme tratemos com os graus de liberdade usuais ou duais. Esta possível ampliação dos graus de liberdade do campo traz consigo uma perspectiva promissora: a extensão dos graus de liberdade duais a um espaço-tempo com dimensão $N > 4$ pode nos permitir obter teorias de Kaluza-Klein duais àquelas referidas na seção 2.4, com o potencial eletromagnético dual incorporado à métrica espaço-temporal. E, mais que isso, obter cargas elétricas como soluções topológicas de tais teorias, de forma análoga à obtenção de monopolos em teorias de Kaluza-Klein usuais. Em outras palavras, as considerações acima nos sugerem a possibilidade de uma descrição unificada das cargas elétricas e magnéticas — e de suas interações — como configurações não-triviais de uma métrica N-dimensional.

Bibliografia

Babu KS and Mohapatra RN, 1989, Phys.Rev.Lett. 63, 938.
Bollini CG and Giambiagi JJ, 1977, Nucl.Phys. B123, 311.
Bollini CG and Leal Ferreira P, 1978, Nucl.Phys. B137, 351.
Boulware DG, Brown LS, Cahn RN, Ellis SD and Lee C, 1976, Phys.Rev. D14, 2708.
Cabibbo N and Ferrari E, 1962, Nuovo Cimento 23, 1147.
Cabrera B, 1982, Phys.Rev.Lett. 48, 1378.
Cardoso de Mello PCR, 1993, Dissertação de Mestrado, UFMG.
Cardoso de Mello PCR, Carneiro S e Nemes MC, 1994, In *XV Encontro Nacional de Partículas e Campos*, SBF, São Paulo.
Carneiro S e Nemes MC, 1993, In *XIV Encontro Nacional de Partículas e Campos*, SBF, São Paulo.
Carter EF and Cohen HA, 1973, Am.J.Phys. 41, 994.
DeWitt BS, 1962, Phys.Rev. 125, 2189.
Dirac PAM, 1931, Proc.Roy.Soc. A133, 60.
Dirac PAM, 1948, Phys.Rev. 74, 817.
Einstein A and Pauli W, 1943, Ann.Math. 44, 131.
Faddeev LD, 1975, JETP Lett. 21, 64.
Felságer B, 1981, *Geometry, Particles and Fields*, Odense University Press.
Galvão CAP e Mignaco JA, 1994, In *XV Encontro Nacional de Partículas e Campos*, SBF, São Paulo.
Georgi H and Glashow SL, 1972, Phys.Rev.Lett. 28, 1494.
Georgi H and Glashow SL, 1974, Phys.Rev.Lett. 32, 438.
Glashow SL, 1961, Nucl.Phys. 22, 579.
Goddard P, Nuyts J and Olive D, 1977, Nucl.Phys. B125, 1.
Goddard P and Olive DI, 1978, Rep.Prog.Phys. 41, 1357.
Goldhaber AS, 1976, Phys.Rev.Lett. 36, 1122.

Gross DJ and Perry MJ, 1983, Nucl.Phys. B226, 29.
Guth A, 1981, Phys.Rev. D23, 347.
Hasenfratz P and 't Hooft G, 1976, Phys.Rev.Lett. 36, 1119.
He XG, Joshi GC and McKellar BH, 1989, Europhys.Lett. 10, 709.
't Hooft G, 1974, Nucl.Phys. B79, 276.
Jackiw R and Rebbi C, 1976, Phys.Rev.Lett. 36, 1116.
Jackson JD, 1975, *Classical Electrodynamics*, 2nd edition, John Wiley and Sons, New York.
Julia B and Zee A, 1975, Phys.Rev. D11, 2227.
Kaluza Th., 1921, Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Math.Phys., 966.
Katz E, 1965, Am.J.Phys. 31, 249.
Klein O, 1926a, Nature 118, 516.
Klein O, 1926b, Z.Phys. 37, 895.
Landau LD e Lifshitz E, 1972, *Teoria do Campo*, sexta edição, Mir, Moscou.
Mandelstam S, 1962, Annals of Physics 19, 1.
Mandelstam S, 1976, Phys.Rep. 23, 245.
Montonen C and Olive D, 1977, Phys.Lett. B72, 117.
Pati JC and Salam A, 1974, Phys.Rev. D10, 275.
Polyakov AM, 1974, JETP Lett. 20, 194.
Rodrigues Jr. WA, Recami E, Maia Jr. A and Rosa MAF, 1986, Phys.Lett. B220, 195.
Rohrlich F, 1966, Phys.Rev. 150, 1104.
Rosenbaum D, 1966, Phys.Rev. 147, 891.
Saha MN, 1936, Ind.J.Phys. 10, 145.
Saha MN, 1949, Phys.Rev. 75, 1968.
Salam A, 1968, In *Elementary Particle Theory*, ed. Svartholm W, Almquist and Wiskell, Stockholm.
Schwinger J, 1969, Science 165, 757.
Seiberg N, 1994, preprint IASSNS-HEP-94/98, RU-94-82, Rutgers U.
Seiberg N and Witten E, 1994, Nucl.Phys. B426, 19; B431, 484.
Sorkin RD, 1983, Phys.Rev.Lett. 51, 87.
Weinberg S, 1967, Phys.Rev.Lett. 19, 1264.
Wilson HA, 1949, Phys.Rev. 75, 309.
Wu TT and Yang CN, 1975, Phys.Rev. D12, 3845.
Wu TT and Yang CN, 1976, Phys.Rev. D14, 437.