

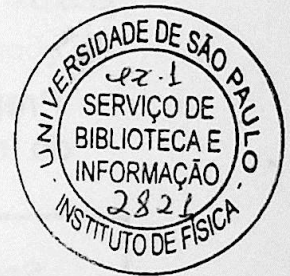
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA

SBI-IFUSP



305M810T2821

**RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA DE  
PONTO-ZERO E O SEU PAPEL NO  
ESCAPE DE BARREIRAS DE  
POTENCIAL**



Rodrigo Carvalho Sponchiado

---

Dissertação de Mestrado  
submetida ao Instituto de Física  
da Universidade de São Paulo

---

**Banca examinadora:**

**Orientador:** Prof. Dr. Humberto de Menezes França  
Prof. Dr. Valdir C. Aguilera Navarro  
Prof. Dr. Mauro S. D. Cattani

*Sylvio Cavuto*

São Paulo  
1998

537.6

S763r

M1

ex. 1

### FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Sponchiado, Rodrigo Carvalho

Radiação Eletromagnética de Ponto-zero e o seu Papel  
no Escape de Barreiras de Potencial. São Paulo 1998.

Dissertação (Mestrado) Universidade de São Paulo.  
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Humberto de Menezes França  
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares

Unitermos: 1. Eletrodinâmica Clássica;  
2. Movimento Browniano; 3. Processos Estocásticos;  
4. Fundamentos de Física.

USP/IF/SBI-039/98

## Resumo

É feita uma introdução à Eletrodinâmica Clássica Estocástica, com a apresentação de suas principais características e com particular destaque para a radiação aleatória de ponto-zero. Partindo-se do modelo do oscilador harmônico da Eletrodinâmica Estocástica, é possível reproduzir as características do tunelamento da Mecânica Quântica quando uma partícula está sujeita à ação de um potencial metaestável (poço com barreira finita) e à ação da radiação aleatória, térmica e de ponto-zero. O efeito semelhante ao tunelamento, evidenciado pelo não anulamento da taxa de escape da região metaestável quando a temperatura tende a zero, deve-se exclusivamente à ação da radiação de ponto-zero, através da qual a constante  $\hbar$  é introduzida na teoria. É feita a análise de um caso experimental, usualmente considerado de tunelamento, segundo esse modelo da Eletrodinâmica Estocástica.

## Abstract

An introduction to Classical Stochastic Electrodynamics (SED) is done, with the presentation of its main characteristics, namely the random zero-point radiation. Using only a simple modification of the SED harmonic oscillator model, it is possible to reproduce the tunneling properties, characteristics of Quantum Mechanics, observed when a particle is under the influence of a metastable potential (finite potential well). The influence of the random thermal radiation is also taken into account. The "tunneling" becomes evident by the non-zero of the escape rate of the metastable region when the temperature goes to zero. We show that it is due to the action of the zero-point radiation, which depends explicitly to the Planck's constant  $\hbar$ . One experimental case is analyzed theoretically using the SED model. This case is usually considered a typical example of quantum tunneling.

## Agradecimentos

Aos meus pais pelo incentivo.

Ao Humberto pela amizade.

À Denise, pela ajuda, paciência e participação.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Ao Kaled e ao Roberto por terem compartilhado comigo o interesse e a paixão pelo mundo físico.

# Prefácio

Essa dissertação é composta de quatro capítulos, que se iniciam com a introdução à notação tensorial da Relatividade Restrita e com a formulação relativística do Eletromagnetismo (capítulo 1). Em seguida, é feita uma introdução aos aspectos essenciais da Eletrodinâmica Clássica Estocástica, desenvolvendo-se alguns tópicos importantes da Eletrodinâmica Clássica e da teoria de Processos Estocásticos, com destaque das propriedades da radiação de ponto-zero aleatória (capítulo 2). No capítulo 3 faz-se um estudo do oscilador harmônico sujeito à ação da radiação aleatória, térmica e de ponto-zero. A teoria de Kramers para o cálculo de taxas de escape é apresentada e, a partir do modelo do oscilador harmônico, pode-se adaptá-la para a descrição do escape de uma partícula (sujeita a ação da radiação térmica e de ponto-zero) de um poço de potencial com barreira finita (capítulo 4).

1. Equações diferenciais para a descrição de processos estocásticos .....	25
1.1. Exemplos de Fokker-Planck (FP) .....	26
2. Oscilador harmônico na Eletrodinâmica Estocástica .....	33
2.1. Determinação do termo de Fokker-Planck para o Oscilador Harmônico com ruído de radiação de ponto-zero .....	35
2.2. O papel da radiação de ponto-zero no sistema do Oscilador Harmônico .....	41
3. Escape e levantamento de condensados .....	46
3.1. A taxa de Kramers .....	48
3.2. Taxa de radiação de ponto-zero no caso de escape .....	54
3.3. Análogo para o potencial Gravitacional .....	56
3.4. Conclusão .....	61
Referências .....	62

# Índice

1.	<i>Notação utilizada</i> .....	1
1.1.	Geometria do espaço-tempo.....	1
1.2.	Eletromagnetismo .....	3
1.3.	Interação do campo com a matéria.....	6
1.4.	Constantes e grandezas físicas.....	7
2.	<i>A Eletrodinâmica Estocástica</i> .....	8
2.1.	Invariância da densidade espectral da radiação de ponto-zero por transformação de Lorentz .....	10
2.2.	Campos gerados por cargas em movimento.....	16
2.3.	A reação da radiação.....	20
2.4.	A radiação eletromagnética de ponto-zero como um processo estocástico.....	25
2.5.	As equações diferenciais para a descrição de processos estocásticos .....	29
2.6.	As equações de Fokker-Planck (EFP).....	29
3.	<i>O oscilador harmônico na Eletrodinâmica Estocástica</i> .....	33
3.1.	Determinação da Equação de Fokker-Planck para o Oscilador Harmônico com Ruído da Radiação de Ponto-Zero .....	35
3.2.	O Papel da Radiação de Ponto-Zero na Dinâmica do Oscilador Harmônico.....	41
4.	<i>Escape e tunelamento de cavidades</i> .....	46
4.1.	A taxa de Kramers.....	48
4.2.	Efeito da radiação de ponto-zero na taxa de escape .....	56
4.3.	Analogia com a Mecânica Quântica.....	58
4.4.	Discussão .....	61
	<i>Referências</i> .....	63

## 1. Notação utilizada

### 1.1. Geometria do espaço-tempo

$x^0, x^1, x^2, x^3$  são as coordenadas espaço-temporais de um **evento** no espaço-tempo associado a um referencial inercial de Lorentz. O índice 0 está associado à coordenada temporal:  $x^0 = ct$  ( $c$  é a velocidade da luz no vácuo). Nas expressões do eletromagnetismo desta dissertação não se está fazendo  $c = 1$ , como se pode supor, mas  $c$  encontra-se "embutido" na variável temporal ( $x^0 = ct$ ). A menos que o contexto indique o contrário, o conjunto dessas quatro coordenadas será representado resumidamente por  $x$ ;

$\bar{x}^\alpha = L^\alpha_\beta x^\beta$  é uma transformação de Lorentz de um sistema de coordenadas  $x^\beta$  para um sistema de coordenadas  $\bar{x}^\alpha$ .

$\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  é a matriz da métrica de Minkovski em um sistema

de coordenadas cartesianas. Uma expressão do tipo  $\eta_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta$  representa o produto escalar entre os vetores  $A$  e  $B$  no espaço-tempo;

$F, J, p, u$  os tensores de ordem qualquer, nos quais se incluem os vetores, são representados em **negrito**;

$F$  é o tensor do campo eletromagnético (denominado tensor de Faraday), de componentes  $F^{\alpha\beta}$ ;

$J$  é o tensor de densidade de corrente. Suas componentes estão relacionadas com as densidades de carga ( $\rho$ ) e corrente ( $\vec{j}$ ) da formulação não-covariante do eletromagnetismo:  $J^0 = c\rho$ ,  $J^1 = j^1$ ,  $J^2 = j^2$  e  $J^3 = j^3$ ;

$z(\tau)$ ,  $z^\alpha(\tau)$  é uma curva no espaço-tempo (denominada linha de universo),  $z(\tau)$  está associada às posições no espaço-tempo de uma partícula como função do seu tempo próprio  $\tau$ ;

$u = \dot{z}(\tau)$ ,  $p = m_0 u$  são a velocidade e o momento linear quadridimensional no espaço-tempo, associados à uma partícula no seu tempo próprio  $\tau$ .  $m_0$  é a massa de repouso e a derivada refere-se ao parâmetro  $\tau$ . Esses vetores são tangentes à linha de universo da partícula. Pode-se mostrar que o seu módulo possui sempre o mesmo valor:  $\dot{z}^\alpha(\tau)\dot{z}_\alpha(\tau) = c^2$  e  $p^\alpha(\tau)p_\alpha(\tau) = m_0 c^2$ ;

$F_{\alpha\beta}$ ,  $J^\alpha$ ,  $p^\beta$ ,  $u^\alpha$ ,  $E_i$  os índices gregos indicam as quatro coordenadas espaço-temporais e os índices latinos, a menos que o contexto indique o contrário, representam apenas componentes espaciais;

$A^{\alpha\beta\gamma} B_\alpha = \sum_{\alpha=1}^4 A^{\alpha\beta\gamma} B_\alpha$  é usada a convenção de soma de Einstein: os componentes tensoriais cujos índices se repetem são somados, sem a necessidade de se escrever o símbolo de somatório;

$d\tau$  é um intervalo infinitesimal no espaço-tempo, em unidade de tempo. É um invariante que, em um sistema de coordenadas cartesianas, tem a seguinte forma:

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \frac{1}{c^2} \left[ (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \right]$$

$d\tau$  corresponde ao intervalo de **tempo próprio** entre dois eventos quando eles estiverem sobre a linha de universo de uma partícula;

$F_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}$  os símbolos seguidos de vírgula representam derivadas parciais com respeito a uma coordenada espaço-temporal;

$*F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\gamma\delta}$  essa é a dualidade de Hodge, uma operação sobre os tensores que pode ser feita por meio do símbolo  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$  (Tensor de Levi-Civita, cujas componentes em uma base ortonormal assumem os valores: zero quando algum dos índices é repetido, 1 quando os índices estão em alguma permutação cíclica de 0, 1, 2, 3 ou assume o valor -1, quando os índices estão em alguma permutação acíclica de 0, 1, 2, 3; veja p. 108, 195 de [1]);

$\delta(x)$  é a função delta de Dirac, com suas propriedades usuais.

$\delta^4(x-z)$  representa o produto  $\delta(x^0 - z^0) \delta(x^1 - z^1) \delta(x^2 - z^2) \delta(x^3 - z^3)$ .

## 1.2. Eletromagnetismo

A eletrodinâmica clássica descreve o movimento de corpos portadores de carga elétrica em campos eletromagnéticos. As diversas teorias eletrodinâmicas clássicas consistem:

1. nas equações de Maxwell para o campo eletromagnético;
2. em leis de interação da radiação com a matéria;
3. em condições de contorno para as equações diferenciais.

As equações de Maxwell podem ser expressas, na forma covariante, como:

$$(1.2.1) \quad F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0$$

$$(1.2.2) \quad F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = -\frac{4\pi}{c} J^\alpha$$

$F_{\alpha\beta}$  e  $F^{\alpha\beta}$  são componentes do tensor de Faraday e  $J^\alpha$  componentes da densidade de corrente elétrica em um sistema de coordenadas do espaço-tempo.

As equações de Maxwell podem ser escritas em termos de um vetor  $A$ , denominado **potencial vetor** (a componente  $A^0$  corresponde ao potencial escalar da notação não relativística):

$$(1.2.3) \quad F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}$$

Usando-se essa expressão, juntamente com as equações (1.2.1) e (1.2.2), obtém-se as equações de Maxwell em termos do potencial vetor:

$$(1.2.4) \quad A^{\beta,\alpha}{}_{,\beta} - A^{\alpha,\beta}{}_{,\beta} = -\frac{4\pi}{c} J^\alpha$$

A outra equação de Maxwell (1.2.1) fica automaticamente satisfeita pela forma matemática com que foi definido o campo em termos do potencial vetor (1.2.3).

O campo eletromagnético  $F$  não é determinado por um único vetor  $A$ . O acréscimo de um gradiente de uma função escalar  $\varphi$  no espaço-tempo, deixa o campo  $F$  inalterado:

$$A_\alpha = A'_\alpha + \varphi_{,\alpha}$$

Tanto  $A_\alpha$  como  $A'_\alpha$  na expressão acima correspondem ao mesmo campo eletromagnético. Desse modo, pode-se simplificar a forma da equação (1.2.4) somando à uma solução qualquer  $A'_\alpha$  um gradiente  $\varphi_{,\alpha}$ , tal que:

$$\varphi^{\beta}{}_{,\beta} = -A'^{\beta}{}_{,\beta}$$

Assim, o novo potencial vetor obtido da transformação obedece à condição de calibre de Lorentz,  $A^{\mu}{}_{,\beta} = 0$ , e a equação (1.2.4) é expressa de modo mais simplificado como:

$$(1.2.5) \quad A^{\alpha,\beta}{}_{,\beta} = \frac{4\pi}{c} J^{\alpha}$$

$$(1.2.6) \quad \text{com a condição de calibre de Lorentz:} \quad A^{\beta}{}_{,\beta} = 0$$

As soluções de (1.2.5) podem ser escritas, de modo geral, como sendo a solução da equação homogênea mais uma parte dependente da densidade de corrente, na qual faz-se uso de uma função de Green  $G(x; x')$ :

$$(1.2.7) \quad A^{\mu}(x) = A_{(0)}^{\mu}(x) + \frac{1}{c} \int G(x; x') J^{\mu}(x') d^4 x'$$

$x$  e  $x'$  são **eventos do espaço-tempo**,  $A_{(0)}^{\mu}(x)$  é solução da equação homogênea associada à (1.2.5) e  $J^{\mu}$  a densidade de corrente. A integração é feita em todo o espaço-tempo.

A função de Green do problema não é única, mas cada condição de contorno do potencial vetor está associada a uma expressão específica para  $G(x; x')$  e para a solução  $A_{(0)}^{\mu}(x)$  da equação homogênea [2].

Se o vetor  $A_{(0)}^{\mu}(x)$  e suas derivadas forem conhecidos em uma superfície do tipo espaço, todos os seus valores nos demais eventos ficam determinados. Quando se trata de uma superfície no passado distante do evento  $x$  (em uma região do espaço-tempo na qual  $t \rightarrow -\infty$ ), a função de Green utilizada é denominada **retardada**:

$$(1.2.8) \quad \text{(retardada)} \quad G_R(x; x') = \begin{cases} 2\delta(\eta_{\alpha\beta}(x^{\alpha} - x'^{\alpha})(x^{\beta} - x'^{\beta})) & \text{se } x^0 - x'^0 > 0 \\ 0 & \text{se } x^0 - x'^0 < 0 \end{cases}$$

A parte não-homogênea da solução fica determinada pela distribuição de corrente no cone de luz do passado do evento  $x$ . E a solução da equação (1.2.5) é escrita na forma:

$$(1.2.9) \quad A^\mu(x) = A_{in}^\mu(x) + \frac{1}{c} \int G_R(x; x') J^\mu(x') d^4x'$$

Por outro lado, se o vetor  $A_{(0)}^\mu(x)$  e suas derivadas forem conhecidos em uma superfície do tipo espaço no futuro distante do evento  $x$  (em uma região do espaço-tempo na qual  $t \rightarrow +\infty$ ), a função de Green utilizada é denominada **adiantada**:

$$(1.2.10) \text{ (adiantada)} \quad G_{,A}(x; x') = \begin{cases} 0 & \text{se } x^0 - x'^0 > 0 \\ 2\delta(\eta_{\alpha\beta}(x^\alpha - x'^\alpha)(x^\beta - x'^\beta)) & \text{se } x^0 - x'^0 < 0 \end{cases}$$

A parte não-homogênea da solução fica determinada pela distribuição de corrente do cone de luz do futuro do evento  $x$ . E a solução da equação (1.2.5) é escrita na forma:

$$(1.2.11) \quad A^\mu(x) = A_{out}^\mu(x) + \frac{1}{c} \int G_{,A}(x; x') J^\mu(x') d^4x'$$

Como a eletrodinâmica clássica é uma teoria causal, apresentando simetria por reversão na coordenada temporal, as duas formas de solução (adiantada ou retardada) são equivalentes [2]

### 1.3. Interação do campo com a matéria

A interação entre os campos eletromagnéticos e um ponto material, portador de carga elétrica  $e$ , de acordo com a dinâmica relativística, é dada por:

$$(1.3.1) \quad \frac{dp^\alpha}{d\tau} = \frac{e}{c} F^\alpha{}_\beta u^\beta$$

Nessa equação não está incluído o efeito do campo gerado pela própria carga (campo próprio) sobre ela mesma, mas apenas o efeito de um campo externo  $F$ . O

efeito do campo-próprio sobre o corpo, conhecido como reação da radiação, será analisado na seção 2.3.

Caso se tenha uma distribuição de carga, corrente elétrica e matéria, a interação entre o campo eletromagnético e a matéria é descrita com o tensor de densidade de energia e momento:

$$(1.3.2) \quad T_{em}^{\mu\nu}{}_{, \nu} = -\frac{1}{c} F^{\mu\alpha} J_{\alpha}$$

$T_{em}$  é o tensor de densidade de energia e momento do campo eletromagnético, dado por:

$$(1.3.3) \quad T_{em}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left( F^{\mu\alpha} F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$

A lei de conservação relativística de energia e momento é representada como:

$$(1.3.4) \quad T_{em}^{\mu\nu}{}_{, \nu} + T_m^{\mu\nu}{}_{, \nu} = 0$$

$T_m$  é o tensor de densidade de energia e momento mecânicos da distribuição de matéria.

Discussões interessantes sobre o significado e as aplicações do tensor de energia e momento podem ser encontradas em [3, 4, 5].

#### 1.4. Constantes e grandezas físicas

- $T$  é a temperatura absoluta;
- $K$  é a constante de Boltzman;
- $c$  é a velocidade da luz no vácuo;
- $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$ .

## 2. A Eletrodinâmica Estocástica

A Eletrodinâmica Estocástica supõe a existência de um campo eletromagnético clássico, estocástico, independente da temperatura, denominado radiação de ponto-zero. O aspecto estocástico da teoria é semelhante àquele da mecânica estatística clássica envolvendo médias sobre inúmeros graus de liberdade microscópicos e determinísticos. Essa teoria descreve, classicamente, inúmeros fenômenos que, usualmente, necessitam do formalismo da Mecânica Quântica

A suposição de tal campo de radiação surgiu em 1911, na segunda teoria do corpo negro de Planck [6]. Ao analisar o equilíbrio na interação entre radiação e matéria, Planck obteve a seguinte expressão para a densidade espectral da radiação:

$$(2.1) \quad \rho(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \left[ \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{KT}\right) - 1} + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2KT}\right)$$

A radiação de ponto-zero é a parcela da expressão (2.1) que possui uma densidade espectral na forma:

$$(2.2) \quad \rho_0(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}.$$

A radiação de ponto-zero dá origem a certos fenômenos, previstos pela Eletrodinâmica Estocástica, que sempre foram considerados de domínio exclusivo da Mecânica Quântica, como: a radiação de corpo negro [7]; o efeito Compton [8]; o paramagnetismo na matéria [9]; a lei de Debye para o calor específico de sólidos [10]; forças de van der Waals [11, 12], o oscilador harmônico [13], o estado fundamental do átomo de hidrogênio [14,15], e outros [16]. Na análise desses sistemas físicos segundo a Eletrodinâmica Estocástica, a constante de Planck provém exclusivamente da radiação

de ponto-zero, bem como o ruído responsável pelo caráter não determinístico dos fenômenos microscópicos.

A independência da radiação de ponto-zero com respeito à temperatura é fundamental, pois, para que seja universal, essa radiação não deve depender do estabelecimento de um equilíbrio com a matéria, como ocorre com a radiação térmica de Planck. Na verdade, se houver radiação em equilíbrio com uma cavidade na temperatura  $T$ , a parcela da radiação de ponto-zero é independente do tamanho, do estado de movimento e de variações de volume dessa cavidade. Qualquer variação infinitesimal quasi-estática,  $\delta V$ , desse volume corresponde a uma variação na densidade espectral total  $\delta\rho(\omega, T)$  [13], mas não há contribuição da radiação de ponto-zero para essa variação:

$$(2.3) \quad \delta\rho(\omega, T) = \left( \rho(\omega, T) - \frac{\omega}{3} \frac{\partial\rho(\omega, T)}{\partial\omega} \right) \delta V$$

Essa expressão é a **Lei de Deslocamento de Wien**. Nota-se que o termo entre parênteses é nulo para a parcela da densidade espectral (2.1) correspondente à radiação de ponto-zero.

Outra condição básica para a consistência física da Eletrodinâmica Estocástica é a de que a radiação de ponto-zero não gere forças de "fricção", embora possa produzir forças flutuantes, de média zero, em partículas carregadas. A força de resistência da radiação aleatória total é dada pela expressão [12]:

$$(2.4) \quad F = A \left( \rho(\omega, T) - \frac{\omega}{3} \frac{\partial\rho(\omega, T)}{\partial\omega} \right) v$$

$A$  é uma constante que depende da estrutura da partícula e  $v$  é a sua velocidade em relação à cavidade com a qual a radiação está em equilíbrio térmico.

A força de fricção na partícula não tem contribuição da parcela da radiação aleatória correspondente à radiação de ponto-zero. Esse efeito é esperado, pois supõe-se que não haja referencial privilegiado associado a essa radiação — como ocorre com o

espectro térmico, que é isotrópico e possui a forma apresentada por Planck somente no referencial da cavidade. Outros efeitos interessantes, como a "termalização da radiação de ponto-zero", surgem quando o observador está em um referencial acelerado (veja [17]).

### **2.1. Invariância da densidade espectral da radiação de ponto-zero por transformação de Lorentz**

Na Eletrodinâmica Estocástica a radiação de ponto-zero possui um papel fundamental nas características e na estabilidade dos sistemas microscópicos. É razoável esperar que ela possua uma densidade espectral independente do referencial inercial, da posição no espaço-tempo e da direção, uma vez que as características da matéria relacionadas com ela também não dependem desses elementos. Supõe-se, então, por princípio, que a densidade espectral da radiação seja [12]:

- *homogênea*, pois não existe uma posição privilegiada no espaço-tempo;
- *isotrópica*, já que não há uma direção privilegiada no espaço-tempo;
- *invariante por transformação de Lorentz*, pois não há um referencial inercial privilegiado em relação ao qual a Eletrodinâmica Estocástica seja válida.

Sem a propriedade da invariância, o conceito de éter e espaço absoluto estariam sendo introduzidos novamente na física, já que haveria um referencial "privilegiado" para a descrição dos fenômenos físicos. Uma demonstração resumida e simples da invariância de Lorentz da radiação de ponto-zero pode ser encontrada no trabalho de Boyer de 1969 [7], que contém alguns erros de impressão, fáceis de serem identificados.

A condição para que a densidade espectral da radiação de ponto-zero seja invariante é demonstrada a seguir, de modo análogo ao feito por Boyer [7], fazendo-se uso de um modelo comumente adotado na Eletrodinâmica Estocástica para essa radiação.

Representa-se o quadrivetor  $A$  (potencial vetor e potencial escalar) da radiação de ponto-zero em termos de uma soma de ondas planas, com fases aleatórias (veja também seção 2.4):

$$(2.1.1) \quad A^\mu(x) = \sum_{\lambda=1}^2 \int a^\mu(k, \lambda) \text{sen}[k^\alpha x_\alpha + \theta(k, \lambda)] d^3k$$

na qual:

- $\lambda$  é um índice de polarização que assume os valores 1 ou 2, de modo que:

$$(2.1.2) \quad a_\mu(k, \lambda_1) a^\mu(k, \lambda_2) = 0 \text{ se } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

- $k$  representa  $(k^0, k^1, k^2, k^3)$  e  $x$ ,  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ .  $d^3k$  é o elemento de volume  $d^3k = dk^1 dk^2 dk^3$ .
- $\theta(k, \lambda)$  assume um valor aleatório entre 0 e  $2\pi$  para cada  $k$  e cada  $\lambda$ .
- $A^\mu(x)$  é uma solução da equação (1.2.5) na forma homogênea ( $J^\mu = 0$ ), com a condição de calibre de Lorentz (1.2.6), o que conduz a:

$$(2.1.3) \quad \begin{aligned} k_\mu k^\mu &= 0 \\ a_\mu(k, \lambda) k^\mu &= 0 \end{aligned}$$

Usando (1.2.3) e (2.1.1) o campo  $F$  fica expresso como:

$$(2.1.4) \quad F^{\mu\nu}(x) = \sum_{\lambda=1}^2 \int (a^\nu(k, \lambda) k^\mu - a^\mu(k, \lambda) k^\nu) \cos[k^\alpha x_\alpha + \theta(k, \lambda)] d^3k$$

Substituindo-se a equação (2.1.4) na equação (1.3.3), obtém-se o tensor de energia e momento eletromagnético:

$$(2.1.5) \quad T_{em}^{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda_1=1}^2 \sum_{\lambda_2=1}^2 \int d^3k_1 \int d^3k_2 \cos[k_1^\alpha x_\alpha + \theta_1(k_1, \lambda_1)] \cos[k_2^\alpha x_\alpha + \theta_2(k_2, \lambda_2)] \\ \left\{ \left[ a''(k_1, \lambda_1) a'(k_2, \lambda_2) k_1^\alpha k_{2\alpha} + a''(k_1, \lambda_1) a_\alpha(k_2, \lambda_2) k_1^\mu k_2^\nu \right. \right. \\ \left. \left. - a''(k_1, \lambda_1) a_\alpha(k_2, \lambda_2) k_1^\alpha k_2^\nu - a''(k_1, \lambda_1) a'(k_2, \lambda_2) k_1^\mu k_{2\alpha} \right] \right. \\ \left. - \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} \left[ a''(k_1, \lambda_1) a_\alpha(k_2, \lambda_2) k_1^\beta k_{2\beta} - a''(k_1, \lambda_1) a_\beta(k_2, \lambda_2) k_1^\beta k_{2\alpha} \right] \right\}$$

Para se fazer o cálculo da média dessa expressão nas fases aleatórias faz-se a seguinte substituição indicada por Boyler [18]:

$$(2.1.6) \quad \langle \cos[k_1^\alpha x_\alpha + \theta_1(k_1, \lambda_1)] \cos[k_2^\alpha x_\alpha + \theta_2(k_2, \lambda_2)] \rangle \rightarrow \frac{1}{2} \delta^3(k_1^i - k_2^i) \delta_{\lambda_1 \lambda_2}$$

Então, a média de (2.1.5) fica:

$$(2.1.7) \quad \langle T_{em}^{\mu\nu} \rangle = -\frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k a''(k, \lambda) a_\nu(k, \lambda) k^\mu k^\nu$$

Note que o tensor de energia e momento médio é independente da posição e do instante, o que caracteriza a homogeneidade do espectro da radiação de ponto-zero.

Em um outro referencial,  $S'$ , o tensor de energia e momento médio poderá ser escrito repetindo-se todos os passos de (2.1.1) a (2.1.7), resultando em:

$$(2.1.8) \quad \langle T'_{em}{}^{\mu\nu} \rangle = -\frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k' a''(k', \lambda) a'_\nu(k', \lambda) k'^\mu k'^\nu$$

Para que o espectro da radiação seja invariante, um instrumento, medindo a densidade de energia e momento médios da radiação de ponto-zero em um intervalo de frequência  $a \leq k^0 \leq b$  em um certo referencial inercial  $S$ , deve obter o mesmo valor

que o mesmo instrumento, em outro referencial  $S'$ , medindo a densidade de energia e momento médios no mesmo intervalo de freqüência  $a \leq k'^0 \leq b$ :

$$(2.1.9) \quad \begin{aligned} \langle T_{em}^{\mu\nu} \rangle \Big|_{k^0=a}^b &= \langle T_{em}^{\mu\nu} \rangle \Big|_{k'^0=a}^b \\ \Rightarrow -\frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda=1}^2 \int_{k^0=a}^b d^3k a^\lambda(k, \lambda) a_\gamma(k, \lambda) k^\mu k^\nu &= \\ -\frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda=1}^2 \int_{k'^0=a}^b d^3k' a'^\lambda(k', \lambda) a'_\gamma(k', \lambda) k'^\mu k'^\nu & \end{aligned}$$

Essa igualdade deve ser válida em qualquer intervalo de freqüência arbitrário, idêntico na espaços dos  $k$  e dos  $k'$  ( $a$  e  $b > a$  arbitrários). Então, os termos que estão sendo integrados devem ser iguais para valores iguais de  $k$  e  $k'$ :

$$(2.1.10) \quad \begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^2 a'^\lambda(k', \lambda) a'_\gamma(k', \lambda) k'^\mu k'^\nu &= \sum_{\lambda=1}^2 a^\lambda(k=k', \lambda) a_\gamma(k=k', \lambda) k^\mu k^\nu \\ \Rightarrow \sum_{\lambda=1}^2 a'^\lambda(k', \lambda) a'_\gamma(k', \lambda) &= \sum_{\lambda=1}^2 a^\lambda(k', \lambda) a_\gamma(k', \lambda) \end{aligned}$$

O tensor de energia e momento médio, escrito nos sistemas de coordenadas dos dois referenciais, estão relacionados pelas transformações de Lorentz da maneira usual:

$$(2.1.11) \quad \langle T_{em}^{\mu\nu} \rangle = L_\alpha^\mu L_\beta^\nu \langle T_{em}^{\alpha\beta} \rangle$$

Substituindo a (2.1.7) na expressão (2.1.11), obtém-se:

$$(2.1.12) \quad \langle T_{em}^{\mu\nu} \rangle = -\frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k a^\lambda(k, \lambda) a_\gamma(k, \lambda) L_\alpha^\mu L_\beta^\nu k^\alpha k^\beta$$

Fazendo-se uma mudança nas variáveis de integração  $k^\mu$  para  $k'^\mu$  e considerando-se que os elementos de volume transformam-se de acordo com a expressão

$$d^3k = \frac{k^0}{k'^0} d^3k', \text{ tem-se:}$$

$$(2.1.13) \quad \langle T_{em}^{\mu\nu} \rangle = -\frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k' \frac{k^0}{k'^0} a^\gamma(k, \lambda) a_\gamma(k, \lambda) L_\alpha^\mu L_\beta^\nu k^\alpha k^\beta$$

Substituindo-se a equação (2.1.8) na equação (2.1.13) e integrando-se em um intervalo de frequência  $a \leq k'^0 \leq b$ :

$$(2.1.14) \quad -\frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda=1}^2 \int_{k'^0=a}^b d^3k' a'^\gamma(k', \lambda) a'_\gamma(k', \lambda) k'^\mu k'^\nu =$$

$$-\frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda=1}^2 \int_{k'^0=a}^b d^3k' \frac{k^0}{k'^0} a^\gamma(k, \lambda) a_\gamma(k, \lambda) L_\alpha^\mu L_\beta^\nu k^\alpha k^\beta$$

Essa igualdade deve ser válida em um intervalo arbitrário de frequência, assim os termos sob o sinal de integração também são iguais:

$$(2.1.15) \quad \sum_{\lambda=1}^2 a'^\gamma(k', \lambda) a'_\gamma(k', \lambda) k'^\mu k'^\nu = \sum_{\lambda=1}^2 \frac{k^0}{k'^0} a^\gamma(k, \lambda) a_\gamma(k, \lambda) \overbrace{L_\alpha^\mu L_\beta^\nu k^\alpha k^\beta}^{k'^\mu k'^\nu}$$

$$\Rightarrow \sum_{\lambda=1}^2 k'^0 a'^\gamma(k', \lambda) a'_\gamma(k', \lambda) = \sum_{\lambda=1}^2 k^0 a^\gamma(k, \lambda) a_\gamma(k, \lambda)$$

Substituindo-se a expressão (2.1.10) na expressão (2.1.15), obtém-se:

$$(2.1.16) \quad \sum_{\lambda=1}^2 k'^0 a'^\gamma(k', \lambda) a'_\gamma(k', \lambda) = \sum_{\lambda=1}^2 k^0 a^\gamma(k, \lambda) a_\gamma(k, \lambda)$$

Mas essa igualdade só pode ser válida se cada membro for independentes dos  $k$  e  $k'$ , o que acontece somente se forem iguais a uma constante:

$$(2.1.17) \quad \sum_{\lambda=1}^2 k^0 a^\lambda(k, \lambda) a_\lambda(k, \lambda) = -\alpha = \text{const.}$$

Na qual  $\alpha$  é uma constante positiva. Note que  $a^\lambda$  é um quadrivetor do tipo espaço.

Então, para que o tensor de energia e momento médio da radiação de ponto-zero tenha a mesma forma em qualquer referencial inercial em um intervalo de freqüência  $a \leq k^0 \leq b$ , ele deve ser do tipo:

$$(2.1.18) \quad \langle T_{em}^{\mu\nu} \rangle_{k^0=a}^b = \frac{1}{8\pi} \int_{k^0=a}^b d^3k \frac{\alpha}{k^0} k^\mu k^\nu$$

A componente  $\langle T_{em}^{00} \rangle_{k^0=a}^b = \frac{1}{8\pi} \int_{k^0=a}^b d^3k \alpha k^0 = \frac{1}{2} \int_{k^0=a}^b dk \alpha (k^0)^3$  corresponde à densidade

de energia média do campo de radiação de ponto-zero, no intervalo de freqüência  $a \leq k^0 \leq b$  e no referencial  $S$ . Usando a relação  $\omega = ck^0$ , obtém-se:

$$(2.1.19) \quad \langle T_{em}^{00} \rangle_{k^0=a}^b = \int_{k^0=a}^b d\omega \frac{\alpha \omega^3}{2c^4} = \int_{\omega=ca}^{cb} d\omega \rho_0(\omega)$$

Com  $\rho_0(\omega) = \frac{\alpha \omega^3}{2c^4}$ . A constante  $\alpha$  é um fator de escala a ser determinado experimentalmente. De acordo com a segunda teoria de Planck (1911), a radiação de corpo negro observada implica também:

$$(2.1.20) \quad \rho_0(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3}$$

o que faz com que  $\alpha$  seja igual à  $\frac{\hbar c}{\pi^2}$ . A equação (2.1.17) passa a ser escrita como:

$$(2.1.21) \quad \sum_{\lambda=1}^2 a^\lambda(k, \lambda) a_\lambda(k, \lambda) = -\frac{\hbar c}{\pi^2 k^0}$$

O tensor de energia e momento médio da radiação de ponto-zero (2.1.18) no intervalo de frequência  $a \leq k^0 \leq b$  fica:

$$(2.1.22) \quad \langle T_{em}^{\mu\nu} \rangle_{k^0=a}^b = \frac{\hbar c}{8\pi^3} \int_{k^0=a}^b d^3k \frac{1}{k^0} k^\mu k^\nu$$

Esse valor para  $\alpha$  corresponde, na Mecânica Quântica, a uma energia de  $\frac{1}{2}\hbar\omega$  e momento  $\frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{c}$  para cada modo normal da radiação. Note que estes resultados foram obtidos mais tarde (final da década de 20) com a "quantização" do campo eletromagnético (Dirac, Heisenberg, Fermi e outros) [6].

## 2.2. Campos gerados por cargas em movimento

Essa seção tem por objetivo determinar as características do campo eletromagnético  $F$  gerado por uma carga puntiforme  $e$  em um movimento qualquer. As coordenadas de espaço-tempo da carga em função de seu tempo próprio serão representadas por  $z^\mu(\tau)$ . A derivada  $\dot{z}^\mu(\tau)$  é relativa ao tempo próprio  $\tau$ . Desse modo, pode-se escrever a densidade de corrente relativística da carga puntiforme da seguinte maneira:

$$(2.2.1) \quad J^\mu(x) = \int_{\text{linha de universo}} e c \delta^4(x - z(\tau)) \dot{z}^\mu(\tau) d\tau$$

A integração estende-se por toda a linha de universo  $z^\mu(\tau)$  da partícula. O delta de Dirac  $\delta^4(x - z)$  representa o produto  $\delta(x^0 - z^0)\delta(x^1 - z^1)\delta(x^2 - z^2)\delta(x^3 - z^3)$ .

Para se determinar o campo produzido apenas pela carga, considera-se a solução (1.2.7), mas fazendo-se o campo externo proveniente de outras fontes anular-se. Supõe-se  $A_{(0)}^{\mu}(x) = 0$  e usa-se a função de Green retardada (1.2.8).

Substituindo-se (1.2.8) e (2.2.1) em (1.2.7), obtém-se:

$$(2.2.2) \quad A_R^{\nu}(x) = e \int_{\text{linha de universo}} d^4x' \int d\tau G_R(x; x') \delta^4(x' - z(\tau)) \dot{z}^{\nu}(\tau)$$

Para se determinar  $F_R$  tem-se, antes, que calcular  $A_R$ :

$$(2.2.3) \quad A_R^{\nu, \mu}(x) = e \int \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} [G_R(x; z)] \dot{z}^{\nu} d\tau$$

Após uma série de cálculos [2], obtém-se:

$$(2.2.4) \quad A_R^{\nu, \mu}(x) = \left\{ \frac{e}{(x^{\alpha} - z^{\alpha})} \frac{d}{d\tau} \frac{(x^{\nu} - z^{\nu}) \dot{z}^{\mu}}{(x^{\beta} - z^{\beta}) \dot{z}^{\beta}} \right\} \Bigg|_{\tau=\tau_0^-}$$

A condição  $\tau = \tau_0^-$  significa que  $z(\tau_0^-)$  é a posição da interseção da linha de universo da partícula com o cone de luz correspondente ao passado do evento  $x$  (veja **Figura 1**), ou seja:

$$(2.2.5) \quad (x^{\mu} - z^{\mu}(\tau_0^-))(x_{\mu} - z_{\mu}(\tau_0^-)) = 0$$

$$(2.2.6) \quad (x^0 - z^0(\tau_0^-)) \geq 0$$

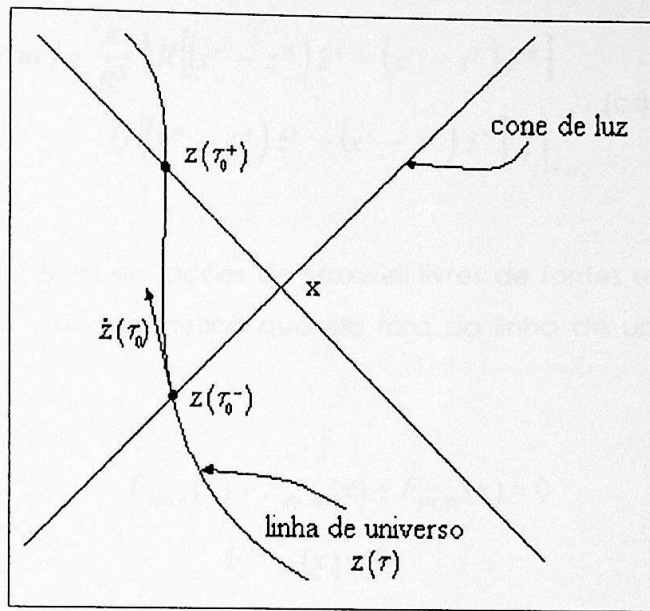


Figura 1: Linha de universo,  $z(\tau)$ , de uma partícula e as posições no espaço-tempo,  $z(\tau_0^+)$  e  $z(\tau_0^-)$ , que são fontes para os campos avançados e retardados [2]

Substituindo-se (2.2.4) em (1.2.3) e calculando-se a derivada, obtém-se:

$$(2.2.7) \quad F_R^{\mu\nu} = \frac{e}{R^3} \left\{ [(x^\mu - z^\mu) \dot{z}^\nu - (x^\nu - z^\nu) \dot{z}^\mu] (c^2 - Q) + R [(x^\mu - z^\mu) \ddot{z}^\nu - (x^\nu - z^\nu) \ddot{z}^\mu] \right\} \Big|_{\tau=\tau_0^-}$$

Com  $R = (x^\mu - z^\mu) \dot{z}_\mu \Big|_{\tau=\tau_0^-}$  e  $Q = (x^\mu - z^\mu) \ddot{z}_\mu \Big|_{\tau=\tau_0^-}$ .

Esse campo apresenta uma parte dependente da velocidade da partícula,  $\dot{z}(\tau_0^-)$ , denominada **campo próximo**, de alcance limitado, pois é proporcional a  $R^{-2}$ . A outra parte depende da aceleração,  $\ddot{z}(\tau_0^-)$ , denominada **campo de radiação**, de longo alcance, pois é proporcional a  $R^{-1}$  [2]:

$$(2.2.8) \quad F_R^{\mu\nu} (prox) = \frac{e}{R^3} c^2 [(x^\mu - z^\mu) \dot{z}^\nu - (x^\nu - z^\nu) \dot{z}^\mu] \Big|_{\tau=\tau_0^-} \quad (\text{campo próximo})$$

$$(2.2.9) \quad F_R^{\mu\nu} (rad) = \frac{e}{R^3} \left\{ R \left[ (x^\mu - z^\mu) \ddot{z}^\nu - (x^\nu - z^\nu) \ddot{z}^\mu \right] - Q \left[ (x^\mu - z^\mu) \dot{z}^\nu - (x^\nu - z^\nu) \dot{z}^\mu \right] \right\} \Big|_{\tau=\tau_0^-} \quad (\text{campo de radiação})$$

O campo (2.2.7) satisfaz as equações de Maxwell livres de fontes e a conservação de energia e momento eletromagnético quando fora da linha de universo da partícula (para  $x \neq z(\tau)$ ):

$$(2.2.10) \quad F_{\alpha\beta,\gamma}(x) + F_{\beta\gamma,\alpha}(x) + F_{\gamma\alpha,\beta}(x) = 0$$

$$(2.2.11) \quad F^{\alpha\beta}{}_{,\beta}(x) = 0$$

$$(2.2.12) \quad T_{em}^{\mu\nu}{}_{,\nu}(x) = 0$$

O campo eletromagnético apresenta algumas grandezas invariantes [2]:

$$(2.2.13) \quad F^{\mu\nu} * F_{\mu\nu} = 4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

$$(2.2.14) \quad F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2)$$

$$(2.2.15) \quad F_{\mu\nu}(x^\nu - z^\nu) = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{r} \times \mathbf{B} - r\mathbf{E})$$

$$(2.2.16) \quad *F_{\mu\nu}(x^\nu - z^\nu) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{r} \times \mathbf{E} + r\mathbf{B})$$

Na qual  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{z}(\tau_0^-)$  são as partes espaciais de  $x^\nu$  e  $z^\nu$ , e  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau_0^-)$ . O símbolo  $*$  representa o operador estrela de Hodge (veja p. 108, 195 de [18] ou a seção 1.1).

No caso do campo total (2.2.7):

$$(2.2.17) \quad \begin{aligned} F^{\mu\nu} * F_{\mu\nu} &= 0 \\ *F_{\mu\nu}(x^\nu - z^\nu) &= 0 \end{aligned}$$

o que significa que  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são ortogonais e  $\mathbf{B}$  é ortogonal à direção de  $\mathbf{r}$ .

Para a parte em  $R^{-2}$  (campo de radiação (2.2.9)):

$$(2.2.18) \quad \begin{aligned} F^{\mu\nu} {}^*F_{\mu\nu} &= 0 \\ F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= 0 \\ F_{\mu\nu} (x^\nu - z^\nu) &= 0 \\ {}^*F_{\mu\nu} (x^\nu - z^\nu) &= 0 \end{aligned}$$

Nesse caso o campo de radiação possui  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{r}$ , todos ortogonais entre si. Além disso,  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$ .

### 2.3. A reação da radiação

O campo de radiação emitido por uma partícula acelerada possui energia e momento. Essa emissão de radiação faz surgir uma força de reação que altera a aceleração da partícula e que, por sua vez, altera novamente a emissão. Esse efeito é denominado *reação da radiação*. Ele pode ser calculado a partir do balanço de energia na emissão de radiação, mas também pode ser interpretado como o resultado da interação entre a partícula e seu próprio campo, que se sobrepõe ao campo externo [2].

Em 1892 Lorentz [19] mostrou, por conservação de energia, que uma partícula de baixa velocidade ( $v \ll c$ ) que emite radiação em movimento quasiperiódico fica sujeita à uma força de reação de radiação ( $f_r$ ), proporcional à derivada temporal da aceleração:

$$(2.3.1) \quad f_r = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}}$$

Na qual  $\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3}$ .

A reação da radiação acaba sendo incluída nas equações de movimento da partícula como um termo de força adicional. Para a partícula em um campo eletromagnético

externo (caracterizado por  $E$  e  $B$ ), a equação de movimento na aproximação não relativística é:

$$(2.3.2) \quad m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B} + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{r}}$$

Em 1904 Abraham [19] generalizou o cálculo de Lorentz para sistemas de referência arbitrários, obtendo correções para (2.3.1) dadas por:

$$(2.3.3) \quad \mathbf{f}_r = \frac{2e^2}{3c^3} \left[ \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{1-\beta^2} + \frac{\dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})}{c^2(1-\beta^2)^2} + \frac{3\ddot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})}{c^2(1-\beta^2)^2} + \frac{3\dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})^2}{c^2(1-\beta^2)^3} \right]$$

na qual  $\beta = \frac{|\dot{\mathbf{r}}|}{c}$ .

Essa expressão é decorrência de uma transformação de Lorentz da expressão (2.3.1), como mostrado por Von Laue [19], mas foi obtida por conservação de energia e momento no processo de emissão de radiação. Posta na forma covariante, a equação (2.3.2), com os termos adicionais de (2.3.3) fica:

$$(2.3.4) \quad \dot{p}^\alpha = \frac{e}{c} F^\alpha{}_\beta u^\beta + \frac{2e^2}{3c^3} \left[ \ddot{u}^\alpha - \frac{1}{c^2} u^\alpha (\dot{u}_\beta \dot{u}^\beta) \right]$$

na qual o ponto é a derivada com relação ao tempo próprio  $\tau$ .

A obtenção da reação da radiação por balanço de energia e momento é feita pressupondo-se uma determinada trajetória para a partícula. Mas argumenta-se que essa abordagem não é consistente e que a aceleração da partícula fica alterada a medida que esta emite radiação e, conseqüentemente, os campos deveriam ser determinados simultaneamente com a trajetória [2].

Para se considerar consistente e simultaneamente o movimento da partícula e a evolução do campo eletromagnético, usa-se uma equação de movimento como em (1.3.1), mas decompõe-se o campo em uma parte gerada pela própria partícula

$(F_R^{\alpha\beta})$ , com a qual ela interage, e uma parte externa  $(F_{in}^{\alpha\beta})$ , gerada por outras fontes. Para tanto, considera-se o campo obtido das soluções das equações de Maxwell por meio do potencial vetor  $(A^\mu)$ , fazendo-se uso de (1.2.9) e (1.2.3). A equação de movimento pode ser expressa por:

$$(2.3.5) \quad \dot{p}^\alpha = \frac{e}{c} \left( F_{in}^{\alpha\beta}(z(\tau)) + F_R^{\alpha\beta}(z(\tau)) \right) \dot{z}^\beta(\tau)$$

$F_R^{\alpha\beta}$  é obtido da parte dependente da função de Green em (1.2.9).

Supõe-se que as fontes do campo externo estejam distantes, de modo que a equação de Maxwell (1.2.2) para esse campo fica:

$$(2.3.6) \quad F_{in}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}(x) = 0$$

e para o campo da partícula, usando-se (2.2.1):

$$(2.3.7) \quad F_R^{\alpha\beta}{}_{,\beta}(x) = 4\pi e \int_{\text{linha de universo}} \delta^4(x - z(\tau)) \dot{z}^\alpha(\tau) d\tau$$

$F_R^{\alpha\beta}$  é infinito sobre a linha de universo, como se pode ver pela sua expressão explícita em (2.2.7). No entanto, Dirac descobriu uma maneira de rescrever esse campo como a soma de uma parcela finita, que é responsável pelo termo de reação da radiação, e uma parcela infinita, que é responsável por um fator de renormalização da massa de repouso da partícula [20]:

$$(2.3.8) \quad F_R^{\alpha\beta} = \overbrace{\frac{1}{2} (F_R^{\alpha\beta} - F_A^{\alpha\beta})}^{\text{parte finita}} + \overbrace{\frac{1}{2} (F_R^{\alpha\beta} + F_A^{\alpha\beta})}^{\text{parte infinita}}$$

O termo  $F_A^{\alpha\beta}$  refere-se a um campo avançado, obtido por meio da parcela dependente da função de Green da solução (1.2.11) e calculado por meio de (1.2.3). O

termo  $\frac{1}{2}(F_R^{\alpha\beta} - F_A^{\alpha\beta})$  significa o acréscimo no campo externo  $(F_{in}^{\alpha\beta})$  devido à parte produzida pela partícula no passado do evento  $x$ , descontando-se a parte absorvida por ela no futuro do evento  $x$ . Ele pode ser calculado a partir de (1.2.9) e (1.2.11):

$$(2.3.9) \quad \frac{1}{2}[A_R^\mu(x) - A_A^\mu(x)] = \frac{1}{2c} \int [G_R(x, x') - G_A(x, x')] J^\mu(x') d^4 x'$$

Usando-se a densidade de corrente (2.2.1) e as funções de Green (1.2.8) e (1.2.10) na expressão anterior, pode-se obter o termo finito [2; 20]:

$$(2.3.10) \quad \frac{1}{2}[F_R^{\alpha\beta}(z(\tau)) - F_A^{\alpha\beta}(z(\tau))] = \frac{2e}{3c^4} (\dot{z}^\alpha(\tau) \ddot{z}^\beta(\tau) - \dot{z}^\beta(\tau) \ddot{z}^\alpha(\tau))$$

Essa expressão refere-se ao campo  $\frac{1}{2}(F_R^{\alpha\beta} - F_A^{\alpha\beta})$  sobre a linha de universo da partícula e possui um valor finito.

O termo  $\frac{1}{2}(F_R^{\alpha\beta} + F_A^{\alpha\beta})$  é infinito para uma carga puntiforme. Para "calculá-lo" parte-se dos potenciais  $\frac{1}{2}(A_R^\mu + A_A^\mu)$ , escritos em termos das funções de Green:

$$(2.3.11) \quad \frac{1}{2}[A_R^\mu(x) + A_A^\mu(x)] = \frac{1}{2c} \int [G_R(x, x') + G_A(x, x')] J^\mu(x') d^4 x'$$

Usando-se a expressão (2.2.1) e as funções de Green (1.2.8) e (1.2.10) na equação (2.3.11), pode-se deduzir a seguinte expressão para o campo em questão [2]:

$$(2.3.12) \quad \frac{1}{2}[F_R^{\alpha\beta}(z(\tau)) + F_A^{\alpha\beta}(z(\tau))] = -\frac{e}{2} (\ddot{z}^\alpha(\tau) \dot{z}^\beta - \dot{z}^\alpha(\tau) \ddot{z}^\beta(\tau)) \int_{-\infty}^{+\infty} du \delta(u^2)$$

Essa expressão refere-se ao campo  $\frac{1}{2}(F_R^{\alpha\beta} + F_A^{\alpha\beta})$  sobre a linha de universo da partícula.

Substituindo-se os resultados (2.3.10) e (2.3.12) na equação de movimento (2.3.5), usando-se a definição (2.3.8), obtém-se:

$$(2.3.13) \quad \dot{p}^\alpha = \frac{e}{c} F_{in}^{\alpha\beta}(z(\tau)) \dot{z}^\beta(\tau) + \frac{2e^2}{3c^5} \left( \dot{z}_\beta(\tau) \ddot{z}^\alpha(\tau) - \dot{z}^\alpha(\tau) \ddot{z}_\beta(\tau) \right) \dot{z}^\beta(\tau) - \frac{e^2 c}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} du \delta(u^2) \left( \ddot{z}^\alpha(\tau) \dot{z}_\beta(\tau) - \dot{z}^\alpha(\tau) \ddot{z}_\beta(\tau) \right) \dot{z}^\beta(\tau)$$

Com a propriedade da velocidade quadridimensional:  $\dot{z}^\beta \dot{z}_\beta = c^2$  e  $\ddot{z}^\beta \dot{z}_\beta = 0$ , obtém-se:

$$(2.3.14) \quad \dot{p}^\alpha = \frac{e}{c} F_{in}^{\alpha\beta}(z(\tau)) \dot{z}^\beta(\tau) + \frac{2e^2}{3c^3} \left( \ddot{z}^\alpha(\tau) - \frac{\dot{z}^\alpha}{c^2} (\ddot{z}_\beta(\tau) \dot{z}^\beta(\tau)) \right) - \frac{e^2 c}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} du \delta(u^2) \ddot{z}^\alpha$$

Substituindo-se  $\dot{p}^\alpha(\tau)$  por  $m_0 \ddot{z}^\alpha$ . A equação (2.3.14) pode ser expressa como:

$$(2.3.15) \quad \left( m_0 + \frac{e^2 c}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} du \delta(u^2) \right) \ddot{z}^\alpha(\tau) = \frac{e}{c} F_{in}^{\alpha\beta}(z(\tau)) \dot{z}^\beta(\tau) + \frac{2e^2}{3c^3} \left( \ddot{z}^\alpha(\tau) - \frac{\dot{z}^\alpha}{c^2} (\ddot{z}_\beta(\tau) \dot{z}^\beta(\tau)) \right)$$

O termo  $\frac{e^2 c}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} du \delta(u^2)$  é infinito para cargas puntiformes. Ele pode ser representado como um termo de correção para a massa  $\left( \delta m = \frac{e^2 c}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} du \delta(u^2) \right)$ , de modo que seja acrescentado à massa de repouso ( $m_0$ ), resultando em uma massa de repouso efetiva, a única acessível experimentalmente, representada por  $m = m_0 + \delta m$ .

Entretanto, é possível mostrar que, para cargas extensas, todos os resultados são finitos e não há violação de causalidade [5].

Como esse termo  $\delta m$  é de fato infinito, faz-se uma renormalização na massa, jogando-o fora, substituindo-se  $m_0$  por  $m$ :

$$(2.3.16) \quad m \ddot{z}^\alpha(\tau) = \frac{e}{c} F_m^{\alpha\beta}(z(\tau)) \dot{z}^\beta(\tau) + \frac{2e^2}{3c^3} \left( \ddot{z}^\alpha(\tau) - \frac{\dot{z}^\alpha}{c^2} (\dot{z}^\beta(\tau) \dot{z}^\beta(\tau)) \right)$$

#### 2.4. A radiação eletromagnética de ponto-zero como um processo estocástico

Os campos eletromagnéticos da radiação de ponto-zero na Eletrodinâmica Estocástica podem ser descritos por processos estocásticos. No início do século, Einstein e Hopf [6] introduziram um modelo matemático para a radiação clássica aleatória, gerada por um número muito grande de fontes emitindo incoerentemente, baseado em uma soma de ondas planas com fases aleatórias,  $\theta(k, \lambda)$ , como definido na seção 2.1:

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda=1}^2 \int a^\mu(k, \lambda) \text{sen}[k^\alpha x_\alpha + \theta(k, \lambda)] d^3k$$

Pode-se redefinir as amplitudes  $a_\mu(k, \lambda)$  respeitando a condição (2.1.21), de modo que a expansão em ondas planas esteja de acordo com a densidade espectral da radiação de ponto-zero (2.2):

$$(2.4.1) \quad a^\mu(k, \lambda) = \sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi^2 k^0}} e^\mu(k, \lambda)$$

Devido às condições (2.1.2), (2.1.3) e (2.1.21),  $e^\mu(k, \lambda)$  possui as seguintes propriedades:

$$(2.4.2) \quad \begin{aligned} k_\mu k^\mu &= 0 \\ e_\mu(k, \lambda) k^\mu &= 0 \\ e_\mu(k, \lambda_1) e^\mu(k, \lambda_2) &= -\delta_{\lambda_1 \lambda_2} \end{aligned}$$

O campo eletromagnético,  $F$ , da equação (2.1.4) fica:

$$(2.4.3) \quad F^{\mu\nu}(x) = \sum_{\lambda=1}^2 \int \sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi^2 k^0}} (e^\nu(k, \lambda) k^\mu - e^\mu(k, \lambda) k^\nu) \cos[k^\alpha x_\alpha + \theta(k, \lambda)] d^3 k$$

Pode-se retornar à forma não-covariante do eletromagnetismo lembrando que:

$$(2.4.4) \quad F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Representando-se a notação não-covariante a partir das componentes do tensor  $F$ :

$$(2.4.5) \quad \begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= (F^{10}, F^{20}, F^{30}) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= (F^{32}, F^{13}, F^{21}) \end{aligned}$$

Usando-se (2.4.3) em (2.4.5), obtém-se:

$$(2.4.6) \quad \begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3 k \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\pi^2}} \vec{\varepsilon}(k, \lambda) \cos[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \theta(k, \lambda)] \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3 k \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\pi^2}} \frac{\vec{\varepsilon}(k, \lambda) \wedge \vec{k}}{|\vec{k}|} \cos[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \theta(k, \lambda)] \end{aligned}$$

Na qual  $\vec{k} = (k^1, k^2, k^3)$ ,  $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3)$  e  $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c} = k^0$ . As fases  $\theta(k, \lambda)$ , como em (2.4.3), são variáveis aleatórias distribuídas uniformemente entre 0 e  $2\pi$ , e são estatisticamente independentes.  $\vec{\varepsilon}(k, \lambda)$  é o vetor unitário de polarização, que é definido como:

$$(2.4.7) \quad \vec{\varepsilon}(k, \lambda) = \frac{1}{|\vec{k}|} (e^0 k^1 - e^1 k^0, e^0 k^2 - e^2 k^0, e^0 k^3 - e^3 k^0)$$

Usando as equações (2.4.2), pode-se deduzir as seguintes propriedades para  $\vec{\varepsilon}(k, \lambda)$ :

$$\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}(k, \lambda) = 0$$

$$(2.4.8) \quad \vec{\varepsilon}(k, \lambda_1) \cdot \vec{\varepsilon}(k, \lambda_2) = \delta_{\lambda_1 \lambda_2}$$

$$(2.4.9) \quad \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_i(k, \lambda) \cdot \varepsilon_j(k, \lambda) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2}$$

Por meio da determinação das médias nas fases aleatórias dos campos (2.4.6), obtém-se as seguintes propriedades estatísticas desses campos estocásticos:

$$(2.4.10) \quad \langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle = \langle \vec{B}(\vec{r}, t) \rangle = 0$$

$$(2.4.11) \quad \langle E_i(\vec{r}', t') E_j(\vec{r}'', t'') \rangle = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \frac{\hbar \omega}{4\pi^2} \varepsilon_i(k, \lambda) \varepsilon_j(k, \lambda) \cos[\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}'') - \omega(t' - t'')]$$

Essa expressão nos leva a:

$$(2.4.12) \quad \begin{aligned} \langle E_x(\vec{r}, t') E_x(\vec{r}, t'') \rangle &= \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3} \cos[\omega(t' - t'')] \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty d\omega \rho_0(\omega) \cos[\omega(t' - t'')] \end{aligned}$$

A expressão acima revela que cada frequência contribui com um fator diferente ( $\rho(\omega)$ ) para a função de correlação do campo de radiação de ponto-zero, o que é chamado **ruído colorido** — em comparação com o ruído branco, quando cada frequência contribui igualmente para a função de correlação.

Caso a radiação aleatória apresente uma parcela devido ao equilíbrio térmico com alguma porção de matéria à temperatura  $T$ , as expressões dependentes da densidade espectral da radiação de ponto-zero devem conter um termo a mais devido à radiação de corpo negro (2.1). Pode-se simplesmente, substituir  $\rho_0(\omega)$  por  $\rho(\omega, T)$ .

Nesse caso, (2.4.12) fica:

$$(2.4.13) \quad \begin{aligned} \langle E_x(\vec{r}, t') E_x(\vec{r}, t'') \rangle &= \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty d\omega \rho(\omega, T) \cos[\omega(t' - t'')] \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2KT}\right) \cos[\omega(t' - t'')] \end{aligned}$$

Essas funções de correlação também podem ser apresentadas na forma relativística, tomando-se a expressão (1.3.3), representada em posições distintas  $x$  e  $x'$  [21]:

$$T_{em}^{\mu\nu}(x, x') = -\frac{1}{4\pi} \left( F^{\mu\alpha}(x) F^\nu{}_\alpha(x') - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta}(x) F^{\alpha\beta}(x') \right)$$

Usando-se (2.4.3), tem-se:

$$\begin{aligned} T_{em}^{\mu\nu}(x, x') &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda_1=1}^2 \sum_{\lambda_2=1}^2 \int d^3 k_1 \int d^3 k_2 \cos[k_1^\alpha x_\alpha + \theta_1(k_1, \lambda_1)] \cos[k_2^\alpha x'_\alpha + \theta_2(k_2, \lambda_2)] \\ &\quad \left\{ [a^\mu(k_1, \lambda_1) a^\nu(k_2, \lambda_2) k_1^\alpha k_{2\alpha} + a^\alpha(k_1, \lambda_1) a_\alpha(k_2, \lambda_2) k_1^\mu k_2^\nu \right. \\ &\quad \left. - a^\mu(k_1, \lambda_1) a_\alpha(k_2, \lambda_2) k_1^\alpha k_2^\nu - a^\alpha(k_1, \lambda_1) a^\nu(k_2, \lambda_2) k_1^\mu k_{2\alpha}] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} [a^\alpha(k_1, \lambda_1) a_\alpha(k_2, \lambda_2) k_1^\beta k_{2\beta} - a^\alpha(k_1, \lambda_1) a_\beta(k_2, \lambda_2) k_1^\beta k_{2\alpha}] \right\} \end{aligned}$$

Tomando-se a média nas fases aleatórias e fazendo-se a seguinte substituição [18]:

$$\langle \cos[k_1^\alpha x_\alpha + \theta_1(k_1, \lambda_1)] \cos[k_2^\alpha x'_\alpha + \theta_2(k_2, \lambda_2)] \rangle \rightarrow \cos[k_1^\alpha (x_\alpha - x'_\alpha)] \frac{1}{2} \delta^3(k_1^i - k_2^i) \delta_{\lambda_1 \lambda_2}$$

Obtém-se:

$$\langle T_{em}^{\mu\nu}(x, x') \rangle_{k^0=a}^b = \frac{\hbar c}{8\pi^3} \int_{k^0=a}^b d^3 k \cos[k^\alpha (x_\alpha - x'_\alpha)] \frac{1}{k^0} k^\mu k^\nu$$

A expressão (2.4.12) também pode ser obtida desse resultado.

### 2.5. As equações diferenciais para a descrição de processos estocásticos

O estudo de sistemas físicos cujas grandezas são representadas por processos estocásticos é feito por meio de duas abordagens distintas:

- o uso do *cálculo diferencial e integral estocástico*, no qual uma teoria matemática para diferenciação e integração de processos estocásticos (cálculo de Itô [22]) é utilizada. Nesse caso, as equações diferenciais tradicionais (determinísticas) são substituídas por equações diferenciais estocásticas (equações de Itô), cujas soluções são processos estocásticos. Uma abordagem matematicamente menos rigorosa utiliza equações de Langevin [23], sem o cálculo estocástico;
- o uso das equações para as densidades de probabilidades de processos estocásticos, como as equações de Fokker-Planck e as equações mestras (*master equations*).

Essas duas abordagens são, normalmente, utilizadas *em conjunto*, pois cada uma apresenta suas dificuldades matemáticas particulares, não sendo capazes de fornecerem, sozinhas e independentemente, todas as informações que dizem respeito a um determinado problema [24].

### 2.6. As equações de Fokker-Planck (EFP)

Suponha, por exemplo, que uma partícula esteja em movimento browniano devido às interações com um ambiente à temperatura  $T$ . O movimento dessa partícula está associado a equações estocásticas que se assemelham às equações de movimento da mecânica clássica (equações de Langevin), a não ser pelo fato das grandezas serem processos estocásticos. Considerando-se o movimento dessa partícula apenas em uma dimensão, a equação de Langevin associada a ele é [23]:

$$(2.6.1) \quad \dot{p} = -\gamma p + \Gamma(t)$$

$\Gamma(t)$  é um processo estocástico que representa os impactos que a partícula browniana sofre das moléculas do ambiente a sua volta. Um modelo matemático simplificado para  $\Gamma(t)$  é considerá-lo um **ruído branco**: um processo gaussiano, de média e função de correlação dadas por:

$$(2.6.2) \quad \begin{aligned} \langle \Gamma(t) \rangle &= 0 \\ \langle \Gamma(t_1) \Gamma(t_2) \rangle &= 2m\gamma KT \delta(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

Para o caso do movimento browniano considerado acima, a EFP associada à densidade de probabilidade condicional  $w(p, t | p_0, t_0)$  do momento da partícula é [27]:

$$(2.6.3) \quad \frac{\partial w(p, t | p_0, t_0)}{\partial t} = \left[ \frac{\partial}{\partial p} (\gamma p) + m\gamma KT \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right] w(p, t | p_0, t_0)$$

$\gamma$  é a constante de fricção,  $m$  a massa da partícula e  $T$  a temperatura do ambiente.

A solução para a equação (2.6.3) é a densidade de probabilidade condicional do processo estocástico de Ornstein-Uhlenbeck [25], dada por:

$$(2.6.4) \quad w(p, t | p_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mKT(1 - e^{-2\gamma(t-t_0)})}} \exp \left[ -\frac{(p - e^{-2\gamma(t-t_0)} p_0)^2}{2mKT(1 - e^{-2\gamma(t-t_0)})} \right]$$

Como  $p(t)$  é um processo estocástico markoviano, para se saber a densidade de probabilidade em qualquer instante,  $W(p, t)$ , é necessário saber a densidade de probabilidade em um instante inicial,  $W(p_0, t_0)$ , juntamente com a solução da EFP

(2.6.4), e integrá-las [26]:

$$(2.6.5) \quad W(p, t) = \int dp_0 w(p, t | p_0, t_0) W(p_0, t_0)$$

Pode-se mostrar que o processo de Ornstein-Uhlenbeck é um processo **markoviano gaussiano** [22], e que uma solução **estacionária** é possível, dada por:

$$(2.6.6) \quad W(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mKT}} \exp\left[-\frac{p^2}{2mKT}\right]$$

Uma equação de Fokker-Planck pode ser representada genericamente por [27]:

$$(2.6.7) \quad \frac{\partial w(\mathbf{x}, t | \mathbf{z}, t_0)}{\partial t} = \sum_i -\frac{\partial}{\partial x_i} [\Delta_i(\mathbf{x}, t) w(\mathbf{x}, t | \mathbf{z}, t_0)] + \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [D_{ij}(\mathbf{x}, t) w(\mathbf{x}, t | \mathbf{z}, t_0)]$$

com  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{z}$  representando n-uplas de variáveis aleatórias.

As equações de Fokker-Planck podem ser obtidas para processos estocásticos markovianos cujos limites abaixo existam ([26]; seção 3.5, página 51):

$$(2.6.8) \quad \text{i)} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} w(\mathbf{x}, t + \tau | \mathbf{z}, t) = 0$$

de convergência uniforme em  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{z}$  e  $t$ ;

$$(2.6.9) \quad \text{ii)} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} w(\mathbf{x}, t + \tau | \mathbf{z}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z})$$

$$(2.6.10) \quad \text{iii)} \quad \Delta_i(\mathbf{z}, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int d\mathbf{x} (x_i - z_i) w(\mathbf{x}, t + \tau | \mathbf{z}, t)$$

$$(2.6.11) \quad \text{iv)} \quad D_{ij}(\mathbf{z}, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\tau} \int d\mathbf{x} (x_i - z_i)(x_j - z_j) w(\mathbf{x}, t + \tau | \mathbf{z}, t)$$

Os limites iii) e iv) são denominados termos de **arrasto** e de **difusão**, respectivamente, e devem ser de convergência uniforme em  $z$  e  $t$ , [26].

O conjunto de valores aleatórios assumidos por um processo estocástico  $X(t)$  em um intervalo do parâmetro  $t$  é uma função  $x(t)$  denominada **realização**. O limite i) garante, com probabilidade 1, que a realização do processo estocástico descrito pela EFP (2.6.7) seja uma função contínua. As equações de Fokker-Planck, portanto, descrevem sempre processos estocásticos **contínuos** e **markovianos**.

### 3. O oscilador harmônico na Eletrodinâmica Estocástica

A Eletrodinâmica Estocástica trata o oscilador harmônico portador de carga elétrica como uma partícula clássica, sujeita ao potencial harmônico e às flutuações da radiação térmica e de ponto-zero, de acordo com a equação de Braffort-Marshall [12]:

$$(3.1) \quad m\ddot{x} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x} + m\omega_0^2 x = F(t) + eE_x(t)$$

Essa é uma aproximação não-relativística da equação (2.3.16), com um termo de força harmônica adicional e uma força determinística  $F(t)$ . A força flutuante  $eE_x(t)$  é um processo estocástico gaussiano no qual  $E_x(t)$  representa a componente  $x$  do campo elétrico da radiação térmica e de ponto-zero. A dependência em  $x$  desse campo é desprezada (aproximação de dipolo). As derivadas são referentes ao tempo de laboratório. O termo de derivada terceira é a reação da radiação na aproximação não-relativística — o termo de Lorentz (2.3.1).

Pode-se simplificar a derivada terceira de  $x$  considerando-se que a força harmônica da equação (3.1) é dominante, desse modo tem-se:

$$(3.2) \quad \ddot{x} \approx -\omega_0^2 x$$

Substituindo essa expressão na equação (3.1), obtém-se a equação aproximada:

$$(3.3) \quad m\ddot{x} + m\gamma \dot{x} + m\omega_0^2 x = eE_x(t) + F(t)$$

na qual  $\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{mc^3}$ .

Essa equação pode ser escrita nas variáveis  $x$  e  $p$  na forma:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \dot{p} &= -\gamma p - m\omega_0^2 x + eE_x(t) + F(t) \\ p &= m\dot{x} \end{aligned}$$

Essas são as equações estocásticas para o problema, cujas soluções podem ser representadas como uma soma da solução da parte homogênea das equações com a da parte não-homogênea, a qual inclui um termo dependente da força flutuante:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} x(x_0, p_0; t) &= x_h(x_0, p_0; t) + x_f(t) \\ p(x_0, p_0; t) &= p_h(x_0, p_0; t) + p_f(t) \end{aligned}$$

Com

$$(3.6) \quad \begin{aligned} x_h(x_0, p_0; t) &= \left( \frac{\gamma}{2\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t) + \cos(\omega_1 t) \right) e^{\left(\frac{\gamma t}{2}\right)} x_0 + \frac{1}{m\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t) e^{\left(\frac{\gamma t}{2}\right)} p_0 \\ x_f(t) &= \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t e^{\left[-\frac{\gamma}{2}(t-t')\right]} \text{sen}[\omega_1(t-t')] (eE_x(t') + F(t')) dt' \\ p_h(x_0, p_0; t) &= -\frac{m\omega_0^2}{\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t) e^{\left(\frac{\gamma t}{2}\right)} x_0 + \left( \cos(\omega_1 t) - \frac{\gamma}{2\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t) \right) e^{\left(\frac{\gamma t}{2}\right)} p_0 \\ p_f(t) &= \int_0^t e^{\left[-\frac{\gamma}{2}(t-t')\right]} \left[ \cos[\omega_1(t-t')] - \frac{\gamma}{2\omega_1} \text{sen}[\omega_1(t-t')] \right] (eE_x(t') + F(t')) dt' \end{aligned}$$

na qual  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$ . Usualmente  $\frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{2 e^2 \hbar \omega_0}{3 \hbar c m c^2} \ll 1$ .

### 3.1. Determinação da Equação de Fokker-Planck para o Oscilador Harmônico com Ruído da Radiação de Ponto-Zero

Para se obter a equação de Fokker-Planck associada ao problema do oscilador harmônico, deve-se determinar os seus coeficientes através dos limites (2.6.10) e (2.6.11) (veja seção 2.6), fazendo-se uso das soluções das equações (3.4):

$$\begin{aligned}\Delta_x(x, p, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int dx (x' - x) w(x', p', t + \Delta t | x, p, t) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle x(t + \Delta t) - x(t) \rangle \Big|_{x(t)=x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_p(x, p, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int dp (p' - p) w(x', p', t + \Delta t | x, p, t) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle p(t + \Delta t) - p(t) \rangle \Big|_{p(t)=p}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_{xx}(x, p, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \int dp (x' - x)^2 w(x', p', t + \Delta t | x, p, t) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \langle (x(t + \Delta t) - x(t))^2 \rangle \Big|_{x(t)=x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_{pp}(x, p, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \int dp (p' - p)^2 w(x', p', t + \Delta t | x, p, t) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \langle (p(t + \Delta t) - p(t))^2 \rangle \Big|_{p(t)=p}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_{xp}(x, p, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \int dx \int dp (x' - x)(p' - p) w(x', p', t + \Delta t | x, p, t) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \langle (p(t + \Delta t) - p(t))(x(t + \Delta t) - x(t)) \rangle \Big|_{\substack{x(t)=x \\ p(t)=p}}\end{aligned}$$

Esses limites são calculados em um conjunto de realizações dos processos estocásticos que assumem valores fixos  $x$  e  $p$  no instante  $t$ :  $x(t) = x$  e  $p(t) = p$ . Para determiná-los considera-se as equações (3.4) na forma de incrementos de tempo  $\Delta t$ :

$$(3.1.1) \quad \begin{aligned} p(t + \Delta t) - p(t) &\approx -\gamma p(t)\Delta t - m\omega_0^2 x(t)\Delta t + F(t)\Delta t + e \int_t^{t+\Delta t} E_x(t) dt \\ x(t + \Delta t) - x(t) &\approx \frac{1}{m} p(t)\Delta t \end{aligned}$$

As flutuações da força  $eE_x(t)$  são mais rápidas que as de  $x(t)$  e de  $p(t)$ , sendo necessário tomar sua integral ao longo do intervalo entre  $t$  e  $t + \Delta t$  na equação anterior.

Para a determinação dos termos de arrasto e de difusão substitui-se as expressões (3.1.1) nos limites acima:

$$\Delta_x(x, p, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\langle \frac{1}{m} p(t)\Delta t \right\rangle_{\substack{x(t)=x \\ p(t)=p}} = \frac{p}{m}$$

$$\begin{aligned} \Delta_p(x, p, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\langle -\gamma p(t)\Delta t - m\omega_0^2 x(t)\Delta t + F(t)\Delta t + e \int_t^{t+\Delta t} E_x(t) dt \right\rangle_{\substack{x(t)=x \\ p(t)=p}} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ -\gamma p - m\omega_0^2 x + F(t) + \frac{1}{\Delta t} e \int_t^{t+\Delta t} \langle E_x(t) \rangle_{\substack{x(t)=x \\ p(t)=p}} dt \right] \end{aligned}$$

$$D_{xx}(x, p, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \left\langle \left( \frac{1}{m} p(t)\Delta t \right)^2 \right\rangle_{x(t)=x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{2} \left\langle \left( \frac{1}{m} p(t) \right)^2 \right\rangle_{x(t)=x}$$

$$D_{xp}(x, p, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta t}{2} \left\langle \frac{p}{m} (-\gamma p(t) - m\omega_0^2 x(t) + F(t)) \right\rangle_{\substack{x(t)=x \\ p(t)=p}} + \frac{p}{2m} e \int_t^{t+\Delta t} \langle E_x(t) \rangle_{\substack{x(t)=x \\ p(t)=p}} dt \right]$$

$$D_{pp}(x, p, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta t}{2} \left\langle \left( -\gamma p(t) - m\omega_0^2 x(t) + F(t) \right)^2 \right\rangle \Bigg|_{\substack{x(t)=x \\ p(t)=p}} \right. \\ \left. + \left( -\gamma p(t) - m\omega_0^2 x(t) + F(t) \right) e \int_t^{t+\Delta t} \langle E_x(t') \rangle \Bigg|_{\substack{x(t')=x \\ p(t')=p}} dt + \frac{e^2}{2\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t+\Delta t} dt'' \langle E_x(t') E_x(t'') \rangle \Bigg|_{\substack{x(t)=x \\ p(t)=p}} \right]$$

Como a média do campo da radiação flutuante é nula (equação (2.4.10)), obtém-se:

$$(3.1.2) \quad \Delta_p(x, p, t) = -\gamma p - m\omega_0^2 x + F(t)$$

$$(3.1.3) \quad D_{xp}(x, p, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta t}{2} \left\langle \left( -\gamma p(t) - m\omega_0^2 x(t) + F(t) \right) \frac{p}{m} \right\rangle \Bigg|_{\substack{x(t)=x \\ p(t)=p}} \right. \\ \left. + \frac{p}{2m} e \int_t^{t+\Delta t} \langle E_x(t') \rangle dt \right] = 0$$

$$(3.1.4) \quad D_{xx}(x, p, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{2} \left\langle \left( \frac{1}{m} p(t) \right)^2 \right\rangle \Bigg|_{x(t)=x} = 0$$

$$(3.1.5) \quad D_{pp}(x, p, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} e^2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t+\Delta t} dt'' \langle E_x(t') E_x(t'') \rangle$$

Pode-se obter o coeficiente de difusão  $D_{pp}$  a partir da solução da equação de Fokker-Planck (2.6.7) fazendo-se uso dos coeficientes já determinados acima:

$$(3.1.6) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma w + \left[ \gamma p + m\omega_0^2 x - F(t) \right] \frac{\partial w}{\partial p} + D_{pp} \frac{\partial^2 w}{\partial p^2}$$

Os cálculos para a obtenção da solução dessa equação são feitos, em uma abordagem mais detalhada, em [13, 27]. Obtém-se, como solução, a probabilidade de transição  $w(x, p; t | x_0, p_0)$ :

$$(3.1.7) \quad w(x, p; t | x_0, p_0) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_p(1-\xi^2)^{1/2}} \times \exp\left[-\frac{1}{2(1-\xi^2)^{1/2}} \left( \frac{(x-x_c)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(p-p_c)^2}{\sigma_p^2} - \frac{2\xi(p-p_c)(x-x_c)}{\sigma_x\sigma_p} \right)\right]$$

com

$$(3.1.8) \quad \begin{aligned} \sigma_x^2(t) &= \frac{D_{pp}}{m^2\omega_0^2\gamma} \left\{ 1 - \left[ \omega_1^2 + \frac{\gamma^2}{2} \text{sen}^2(\omega_1 t) + \frac{\gamma\omega_1}{2} \text{sen}(2\omega_1 t) \right] \frac{\exp(-\gamma t)}{\omega_1^2} \right\} \\ \sigma_p^2(t) &= \frac{D_{pp}}{\gamma} \left\{ 1 - \left[ \omega_1^2 + \frac{\gamma^2}{2} \text{sen}^2(\omega_1 t) - \frac{\gamma\omega_1}{2} \text{sen}(2\omega_1 t) \right] \frac{\exp(-\gamma t)}{\omega_1^2} \right\} \\ \xi(t)\sigma_x(t)\sigma_p(t) &= \frac{D_{pp}}{m\omega_1^2} \text{sen}^2(\omega_1 t) \exp(-\gamma t) \\ \omega_1^2 &= \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \end{aligned}$$

na qual  $x_c$  e  $p_c$  são as soluções das equações determinísticas com  $\gamma/2 < \omega_0$ :

$$(3.1.9) \quad \begin{aligned} \dot{p}_c &= -\gamma p_c - m\omega_0^2 x_c + F(t) \\ p_c &= m\dot{x}_c \end{aligned}$$

Suas soluções têm a forma de (3.5) e (3.6), com o termo  $eE_x(t)$  nulo:

$$(3.1.10) \quad \begin{aligned} x_c(x_0, p_0; t) &= x_h(x_0, p_0; t) + x_F(t) \\ p_c(x_0, p_0; t) &= p_h(x_0, p_0; t) + p_F(t) \end{aligned}$$

Com

$$x_h(x_0, p_0; t) = \left( \frac{\gamma}{2\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t) + \cos(\omega_1 t) \right) e^{\left(\frac{-\gamma t}{2}\right)} x_0 + \frac{1}{m\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t) e^{\left(\frac{-\gamma t}{2}\right)} p_0$$

$$x_F(t) = \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t e^{\left[\frac{-\gamma}{2}(t-t')\right]} \text{sen}[\omega_1(t-t')] F(t') dt'$$

(3.1.11)

$$p_h(x_0, p_0; t) = -\frac{m\omega_0^2}{\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t) e^{\left(\frac{-\gamma t}{2}\right)} x_0 + \left( \cos(\omega_1 t) - \frac{\gamma}{2\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t) \right) e^{\left(\frac{-\gamma t}{2}\right)} p_0$$

$$p_F(t) = \int_0^t e^{\left[\frac{-\gamma}{2}(t-t')\right]} \left[ \cos[\omega_1(t-t')] - \frac{\gamma}{2\omega_1} \text{sen}[\omega_1(t-t')] \right] F(t') dt'$$

na qual  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$  e  $\frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{2 e^2 \hbar \omega_0}{3 \hbar c m c^2} \ll 1$ .

O termo  $\sigma_x^2(t)$  pode ser determinado a partir das soluções das equações de Braffort-Marshall, (3.5) e (3.6). Comparando-o com (3.1.8), pode-se determinar  $D_{pp}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(t) &= \left\langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle (x(t) - x_c(t))^2 \right\rangle \\ (3.1.12) \quad &= \frac{e^2}{m^2 \omega_1^2} \int_0^t dt'' \int_0^t dt' e^{\left[\frac{-\gamma}{2}(t-t'')\right]} e^{\left[\frac{-\gamma}{2}(t-t')\right]} \text{sen}[\omega_1(t-t'')] \text{sen}[\omega_1(t-t')] \langle E_x(t'') E_x(t') \rangle \end{aligned}$$

Usando-se a função de correlação da radiação (2.4.13), inclui-se radiação flutuante térmica e de ponto-zero:

(3.1.13)

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(t) &= \frac{4\pi e^2}{3m^2 \omega_1^2} \times \\ &\int_0^\infty d\omega \rho(\omega, T) \int_0^t dt'' \int_0^t dt' e^{\left[\frac{-\gamma}{2}(t-t'')\right]} e^{\left[\frac{-\gamma}{2}(t-t')\right]} \text{sen}[\omega_1(t-t'')] \text{sen}[\omega_1(t-t')] \cos[\omega(t''-t')] \end{aligned}$$

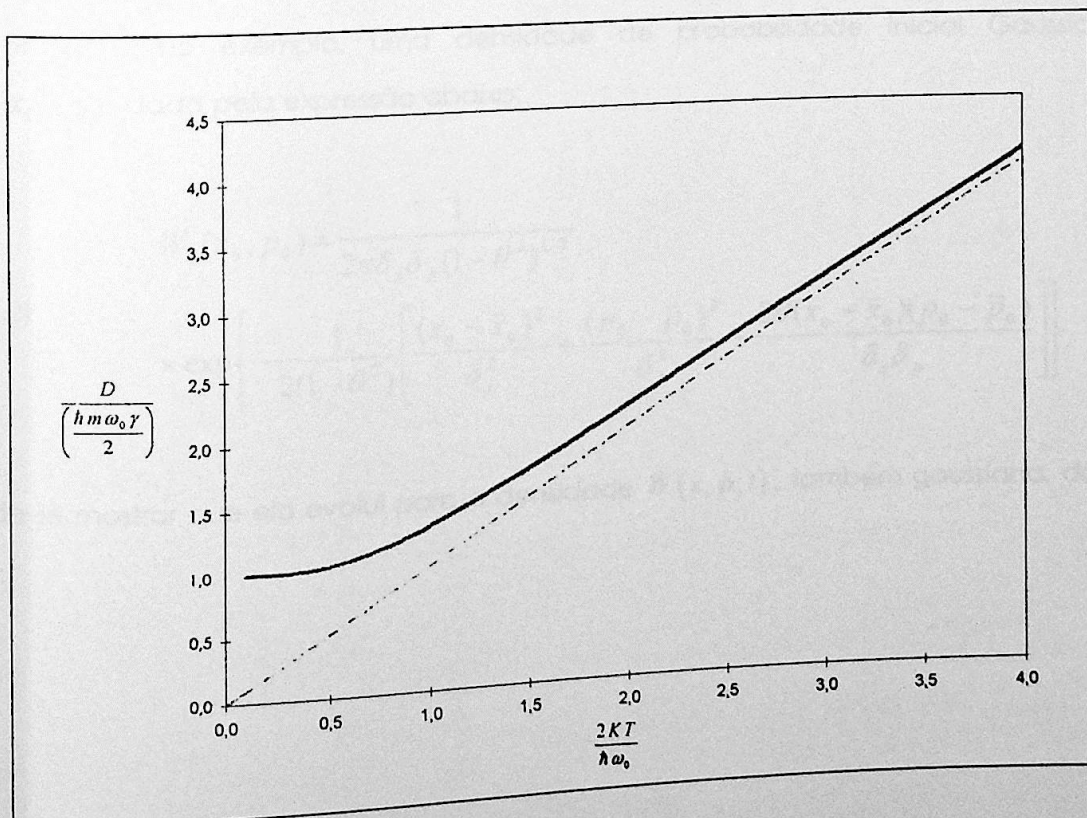
Essa expressão é resolvida com certa dificuldade, envolvendo aproximações e o uso de um fator de convergência  $e^{-\alpha\omega^2}$ , tomando-se o limite  $\alpha \rightarrow 0$  no final. Para cargas extensas [5] as dificuldades de convergência são mais facilmente resolvidas, quando comparadas com o caso da carga puntiforme. O resultado final é [13]:

$$\sigma_x^2(t) = \frac{1}{m^2 \omega_0^2 \gamma} \frac{\hbar m \omega_0 \gamma}{2} \coth\left(\frac{\hbar \omega_0}{2KT}\right) \left\{ 1 - \left[ \omega_1^2 + \frac{\gamma^2}{2} \text{sen}^2(\omega_1 t) + \frac{\gamma \omega_1}{2} \text{sen}(2\omega_1 t) \right] \frac{\exp(-\gamma t)}{\omega_1^2} \right\}$$

Comparando-se essa expressão com a (3.1.8), obtém-se:

$$(3.1.14) \quad D_{pp} = \frac{\hbar m \omega_0 \gamma}{2} \coth\left(\frac{\hbar \omega_0}{2KT}\right)$$

Esse coeficiente de difusão tende ao valor usual  $D_{pp} = m\gamma KT$  da teoria do movimento browniano no limite de altas temperaturas ( $T \rightarrow \infty$ ). No entanto, devido a presença da radiação de ponto-zero como fonte das flutuações, esse coeficiente não tende a zero no limite de baixas temperaturas ( $T \rightarrow 0$ ), mas para o valor  $\frac{\hbar m \omega_0 \gamma}{2}$  (veja **Figura 2**).



**Figura 2:** Gráfico do coeficiente de difusão  $D$  do oscilador harmônico em função da temperatura. A linha tracejada corresponde ao limite assintótico  $D = m\gamma KT$  para  $T \rightarrow \infty$ .

Dessa forma, a equação de Fokker-Planck (3.1.6) com os coeficientes (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4) e (3.1.14) descrevem o oscilador harmônico clássico sujeito à radiação aleatória, térmica e de ponto-zero.

### 3.2. O Papel da Radiação de Ponto-Zero na Dinâmica do Oscilador Harmônico

Pode-se estudar o efeito da radiação aleatória na dinâmica do oscilador harmônico analisando-se a sua densidade de probabilidade  $W(x, p; t)$ , obtida a partir de uma densidade inicial  $W_0(x_0, p_0, t=0)$  e da densidade de probabilidade condicional  $w(x, p; t | x_0, p_0)$ , solução da equação de Fokker-Planck (3.1.6):

$$(3.2.1) \quad W(x, p; t) = \iint w(x, p; t | x_0, p_0) W_0(x_0, p_0) dx_0 dp_0$$

Supondo, como exemplo, uma densidade de probabilidade inicial Gaussiana,  $W_0(x_0, p_0)$ , dada pela expressão abaixo:

$$(3.2.2) \quad W_0(x_0, p_0) = \frac{1}{2\pi\delta_x\delta_p(1-\theta^2)^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\theta^2)}\left[\frac{(x_0 - \bar{x}_0)^2}{\delta_x^2} + \frac{(p_0 - \bar{p}_0)^2}{\delta_p^2} - \frac{2\theta(x_0 - \bar{x}_0)(p_0 - \bar{p}_0)}{\delta_x\delta_p}\right]\right\}$$

Pode-se mostrar que ela evolui para a densidade  $W(x, p; t)$ , também gaussiana, dada por:

$$(3.2.3) \quad W(x, p; t) = \frac{1}{2\pi\tau_x\tau_p(1-\eta^2)^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\eta^2)}\left[\frac{(x-\langle x \rangle_w)^2}{\tau_x^2} + \frac{(p-\langle p \rangle_w)^2}{\tau_p^2} - \frac{2\eta(x-\langle x \rangle_w)(p-\langle p \rangle_w)}{\tau_x\tau_p}\right]\right\}$$

Usando-se a equação (3.2.1), juntamente com (3.1.10) e (3.1.11), pode-se determinar a evolução temporal das médias:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_w &= \iint x W(x, p; t) dx dp = \iint dx dp x \iint dx_0 dp_0 W_0(x_0, p_0) w(x, p; t | x_0, p_0) \\ &= \iint dx_0 dp_0 W_0(x_0, p_0) \iint dx dp x w(x, p; t | x_0, p_0) \\ &= \iint dx_0 dp_0 x_c(x_0, p_0; t) W_0(x_0, p_0) \equiv \langle x_c(x_0, p_0; t) \rangle_{w_0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle x \rangle_w = \langle x_h(x_0, p_0; t) \rangle_{w_0} + x_F(t)$$

$$(3.2.4) \quad \begin{aligned} \Rightarrow \langle x \rangle_w &= \left( \frac{\gamma}{2\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t) + \cos(\omega_1 t) \right) e^{\left(\frac{\gamma t}{2}\right)} \bar{x}_0 + \frac{1}{m\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t) e^{\left(\frac{\gamma t}{2}\right)} \bar{p}_0 \\ &+ \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t e^{\left[\frac{\gamma}{2}(t-t')\right]} \text{sen}[\omega_1(t-t')] F(t') dt' \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\langle p \rangle_w = \langle p_c(x_0, p_0; t) \rangle_{w_0}$$

$$\Rightarrow \langle p \rangle_w = \langle p_h(x_0, p_0; t) \rangle_{w_0} + p_F(t)$$

$$(3.2.5) \quad \begin{aligned} \Rightarrow \langle p \rangle_w &= -\frac{m\omega_0^2}{\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t) e^{\left(\frac{\gamma t}{2}\right)} \bar{x}_0 + \left( \cos(\omega_1 t) - \frac{\gamma}{2\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t) \right) e^{\left(\frac{\gamma t}{2}\right)} \bar{p}_0 \\ &+ \int_0^t e^{\left[\frac{\gamma}{2}(t-t')\right]} \left[ \cos[\omega_1(t-t')] - \frac{\gamma}{2\omega_1} \text{sen}[\omega_1(t-t')] \right] F(t') dt' \end{aligned}$$

$$\tau_x^2(t) = \int (x - \langle x \rangle_w)^2 W(x, p; t) dx dp \equiv \langle (x - \langle x \rangle_w)^2 \rangle_w = \langle (x_c - \langle x_c \rangle_{w_0})^2 \rangle_{w_0}$$

$$\Rightarrow \tau_x^2(t) = \sigma_x^2(t) + \langle x_h^2(x_0, p_0; t) \rangle_{w_0} - \langle x_h(x_0, p_0; t) \rangle_{w_0}^2$$

(3.2.6)

$$\begin{aligned} \tau_x^2(t) &= \frac{D_{pp}}{m^2 \omega_0^2 \gamma} \left\{ 1 - \left[ \omega_1^2 + \frac{\gamma^2}{2} \text{sen}^2(\omega_1 t) + \frac{\gamma \omega_1}{2} \text{sen}(2\omega_1 t) \right] \frac{\exp(-\gamma t)}{\omega_1^2} \right\} \\ &+ \delta_x^2 \left[ \cos(\omega_1 t) + \frac{\gamma}{2\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t) \right]^2 \exp(-\gamma t) \\ &+ \delta_p^2 \frac{1}{m^2 \omega_1^2} \text{sen}^2(\omega_1 t) \exp(-\gamma t) \\ &+ \frac{2\theta \delta_x \delta_p}{m \omega_1} \left[ \text{sen}(\omega_1 t) \cos(\omega_1 t) + \frac{\gamma}{2\omega_1} \text{sen}^2(\omega_1 t) \right] \exp(-\gamma t) \end{aligned}$$

$$\tau_p^2(t) = \int (p - \langle p \rangle_w)^2 W(x, p; t) dx dp \equiv \langle (p - \langle p \rangle_w)^2 \rangle_w = \langle (p_c - \langle p_c \rangle_{w_0})^2 \rangle_{w_0}$$

$$\Rightarrow \tau_p^2(t) = \sigma_p^2(t) + \langle p_h^2(x_0, p_0; t) \rangle_{w_0} - \langle p_h(x_0, p_0; t) \rangle_{w_0}^2$$

(3.2.7)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau_p^2(t) &= \frac{D_{pp}}{\gamma} \left\{ 1 - \left[ \omega_1^2 + \frac{\gamma^2}{2} \text{sen}^2(\omega_1 t) - \frac{\gamma \omega_1}{2} \text{sen}(2\omega_1 t) \right] \frac{\exp(-\gamma t)}{\omega_1^2} \right\} \\ &+ \delta_p^2 \left[ \cos(\omega_1 t) + \frac{\gamma}{2\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t) \right]^2 \exp(-\gamma t) \\ &+ \delta_x^2 \frac{m^2 \omega_0^2}{\omega_1^2} \text{sen}^2(\omega_1 t) \exp(-\gamma t) \\ &- \frac{2\theta \delta_x \delta_p m \omega_0^2}{\omega_1} \left[ \text{sen}(\omega_1 t) \cos(\omega_1 t) - \frac{\gamma}{2\omega_1} \text{sen}^2(\omega_1 t) \right] \exp(-\gamma t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(t) \tau_x(t) \tau_p(t) &= \int (x - \langle x \rangle_w)(p - \langle p \rangle_w) W(x, p; t) dx dp \equiv \langle (x - \langle x \rangle_w)(p - \langle p \rangle_w) \rangle_w \\ &= \langle (x_c - \langle x_c \rangle_{w_0})(p_c - \langle p_c \rangle_{w_0}) \rangle_{w_0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \eta \tau_x \tau_p = \xi \sigma_x \sigma_p + \langle x_h(x_0, p_0; t) p_h(x_0, p_0; t) \rangle_{w_0} - \langle p_h(x_0, p_0; t) \rangle_{w_0} \langle x_h(x_0, p_0; t) \rangle_{w_0}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \eta(t) \tau_x(t) \tau_p(t) &= \frac{D_{pp}}{m\omega_1^2} \text{sen}^2(\omega_1 t) \exp(-\gamma t) \\ &+ \theta \delta_x \delta_p \left[ \cos^2(\omega_1 t) - \left( \frac{\gamma^2/4 + \omega_0^2}{\omega_1^2} \right) \text{sen}^2(\omega_1 t) \right] \exp(-\gamma t) \\ &+ \frac{\delta_p^2}{m\omega_1} \left[ \text{sen}(\omega_1 t) \cos(\omega_1 t) - \frac{\gamma}{2\omega_1} \text{sen}^2(\omega_1 t) \right] \exp(-\gamma t) \\ &- \frac{m\omega_0^2 \delta_x^2}{\omega_1} \left[ \text{sen}(\omega_1 t) \cos(\omega_1 t) + \frac{\gamma}{2\omega_1} \text{sen}^2(\omega_1 t) \right] \exp(-\gamma t) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

nas quais  $\sigma_x(t)$ ,  $\sigma_p(t)$  e  $\xi(t)$  já foram dados anteriormente em (3.1.7) e (3.1.8).

Observando-se os termos de (3.2.4) a (3.2.8), nota-se que a densidade de probabilidade no espaço de fase é gaussiana, centrada na trajetória determinística ( $\langle x \rangle_w$  e  $\langle p \rangle_w$  oscilam de acordo com as soluções determinísticas (3.1.11) e (3.1.12)). As variâncias são pulsantes e atenuadas até atingirem um valor mínimo. Em [13] há algumas figuras mostrando a oscilação das variâncias ao longo do tempo.

No exemplo dado acima (distribuição inicial gaussiana), quando o tempo decorrido é grande comparado com o tempo de relaxação ( $t \gg 1/\gamma$ ), obtém-se:

$$\tau_x^2 \rightarrow \frac{D_{pp}}{m^2 \omega_0^2 \gamma} = \frac{\hbar}{2m\omega_0} \coth\left(\frac{\hbar\omega_0}{2KT}\right)$$

$$(3.2.9) \quad \tau_p^2 \rightarrow \frac{D_{pp}}{\gamma} = \frac{\hbar m \omega_0}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega_0}{2KT}\right)$$

$$\eta \tau_x \tau_p \rightarrow 0$$

Independentemente da força externa  $F(t)$ , as variâncias acima oscilam inicialmente e tendem a constantes para um tempo muito maior que o tempo de relaxação ( $t \gg 1/\gamma$ ). Esse resultado também é obtido para o oscilador harmônico forçado da Mecânica Quântica. A constante  $\hbar$  dessas expressões provém da radiação de ponto-zero e não de quantização.

O papel da temperatura está em amplificar o ruído no sistema através do coeficiente de difusão, cujo valor é dado por (3.1.14) e a dependência com a temperatura é apresentada na **Figura 2**. A temperaturas baixas esses limites são os mesmos obtidos pela solução do problema do oscilador com a equação de Schrödinger:

$$\tau_x^2 \rightarrow \frac{\hbar}{2m\omega_0}$$

$$\tau_p^2 \rightarrow \frac{\hbar m \omega_0}{2}$$

$$\eta \tau_x \tau_p \rightarrow 0$$

## 4. Escape e tunelamento de cavidades

Uma das contribuições mais úteis da teoria de processos estocásticos é o estudo do escape de estados metaestáveis [28] ("reaction-rate theory"), com aplicações nas mais diversas áreas, como cinética química, teoria da difusão em sólidos, nucleação homogênea, teoria do transporte eletrônico e outras.

O conceito de taxa de escape surge quando se considera uma variável dinâmica  $x$  (não necessariamente posição), sujeita a uma força cujo potencial apresenta um estado metaestável (um poço com barreira finita, como na **Figura 3**) e o seu movimento é perturbado pela ação de uma força flutuante, que pode ser responsável pela ultrapassagem da barreira de potencial e o escape da cavidade.

A taxa de escape ( $\kappa$ ) é a razão entre o fluxo de probabilidade ( $S$ ) para fora da cavidade de potencial e a probabilidade ( $P$ ) do sistema encontrar-se nessa região:

$$(4.1) \quad \kappa = \frac{S}{P}$$

O estudo de taxas de escape teve seu início com a **lei de Van't Hoff-Arrhenius**, que explicava a velocidade de reações químicas em função da temperatura, pressupondo um estado intermediário da reação, correspondente à energia da barreira de potencial, denominada complexo ativado (a energia necessária para os reagentes atingirem esse estado é a energia de ativação) [28]. A expressão matemática dessa lei é:

$$\kappa = \nu e^{-\frac{E_b}{kT}}$$

na qual  $\kappa$  denota a taxa de escape (o estado metaestável corresponde ao estado dos reagentes),  $\nu$  é um pré-fator e  $E_b$  a energia de ativação.

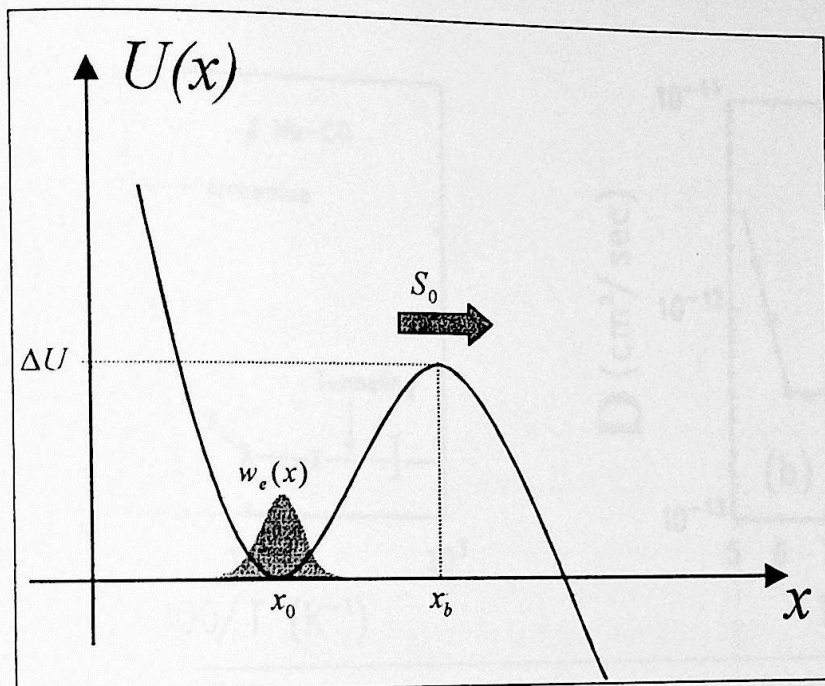


Figura 3: Potencial metaestável, com barreira de energia de ativação  $E_b$ .  $x_a$  é a coordenada do mínimo local do potencial na cavidade e  $x_b$  é a coordenada do máximo local da barreira de potencial.  $S$  é a corrente de probabilidade de escape da cavidade.

Na maioria das situações, a taxa de escape apresenta essa forma matemática, diferindo na forma com que o pré-fator depende dos parâmetros dinâmicos (coeficiente de amortecimento, curvatura da cavidade de potencial, etc.). A **Figura 4** exemplifica as taxas de escape para um certo intervalo de temperatura em situações diferentes.

A lei de Van't Hoff-Arrhenius aplica-se a situações diversas, mas falha em temperaturas baixas. A taxa de escape, ao invés de anular-se, atinge um valor finito não nulo. Nessa situação, considera-se que o escape da cavidade ocorre devido ao fenômeno de "tunelamento quântico", que fica mais evidente quando o ruído térmico no sistema é menor. Pela lei de Van't Hoff-Arrhenius, a taxa de escape anula-se a temperatura zero, mas a inclusão de flutuações da radiação de ponto-zero na descrição faz com que se obtenha uma taxa de escape não nula a zero kelvin.

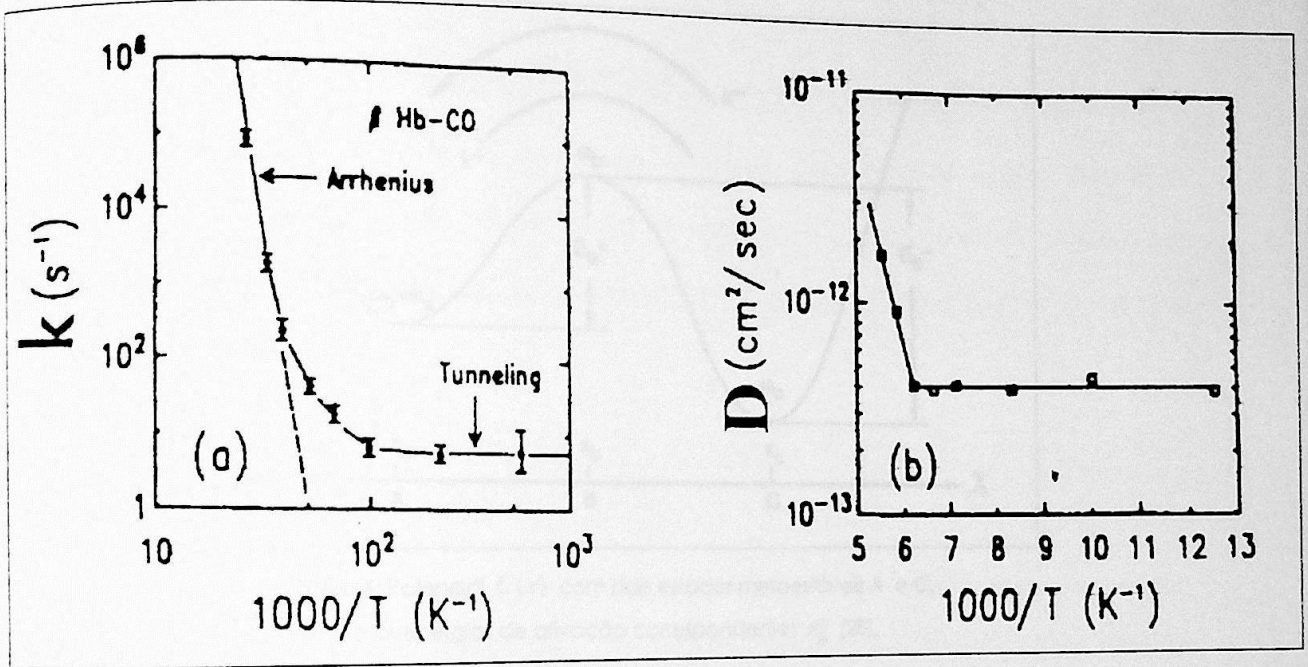


Figura 4: Gráficos de valores de taxas de escape (reaction-rates) de Van't Hoff-Arrhenius para dois sistemas físicos diferentes: (a) taxa de migração de CO para uma cadeia  $\beta$  de hemoglobina separada; (b) coeficiente de difusão  $D$  do hidrogênio atômico livre em um plano (110) de tungstênio. A difusão  $D$  é proporcional à taxa de escape  $\kappa$  [28].

#### 4.1. A taxa de Kramers

Para se incluir as flutuações eletromagnéticas de ponto-zero na taxa de escape de um potencial metaestável, utiliza-se a teoria de Kramers [29] descrita nessa seção.

Na elaboração de um modelo de reação química, Kramers considerou uma situação em que uma partícula (de coordenada  $x$ ) move-se em um campo de forças externo: um potencial assimétrico, de poço duplo  $U(x)$  (esboçado na Figura 5.), que apresenta mínimos locais  $x_a$  e  $x_c$ . A partícula está sujeita à ação do meio: um banho térmico à temperatura  $T$ , cujo efeito sobre a partícula é a produção de uma força flutuante  $\Gamma(t)$  e um amortecimento linear  $-m\gamma\dot{x}$  ( $\gamma$  constante). A partícula, inicialmente na cavidade em torno da posição  $x_a$ , pode escapar através da barreira de potencial (de máximo local em  $x_b$ ) sob a ação de  $\Gamma(t)$ .

A força flutuante  $\Gamma(t)$  é considerada um ruído branco e gaussiano, de média zero, cuja função de correlação é dada por (2.6.2).

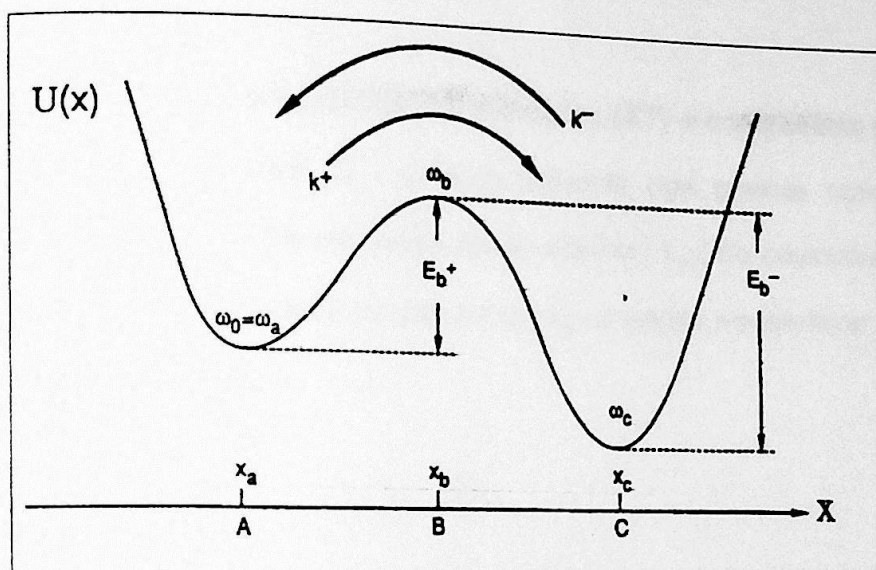


Figura 5: Potencial  $U(x)$  com dois estados metaestáveis A e C, e as energias de ativação correspondentes  $E_b^\pm$  [28].

A equações de Langevin para o problema são:

$$(4.1.1) \quad \begin{aligned} \dot{p} &= -U'(x) - \gamma p + \Gamma(t) \\ p &= m\dot{x} \end{aligned}$$

Usando procedimento análogo ao das seções 2.6 e 3.1, pode-se mostrar que a equação de Fokker-Planck correspondente para esse problema é dada por [27]:

$$(4.1.2) \quad \frac{\partial w(x, p, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial p} (\gamma p + U'(x)) + m\gamma KT \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right] w(x, p, t)$$

Nessa descrição, a partícula está, inicialmente, na cavidade metaestável do potencial. Supõe-se que o tempo médio das interações ( $\tau_{\text{flutuações}}$ ) com as variáveis dinâmicas responsáveis pelas flutuações seja muito menor que o tempo médio ( $\tau_{\text{os}}$ ) do movimento determinístico (oscilação) do sistema na cavidade

$$\tau_{\text{flutuações}} \ll \tau_{\text{os}}$$

Dessa forma, o ruído branco é apropriado para a descrição, com uma função de correlação dada por um delta de Dirac.

Se a energia associada à intensidade das flutuações ( $KT$ ) é considerada muito menor que a barreira de potencial  $E_b^+$ , a força flutuante age apenas como pequena perturbação e o tempo médio de oscilação do sistema ( $\tau_{os}$ ) na cavidade passa a ser muito menor que o tempo médio de permanência no estado metaestável ( $\tau_e$ , que é o inverso da taxa de escape):

$$\tau_{os} \ll \tau_e$$

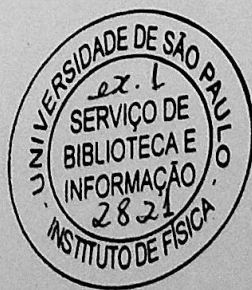
Dessa forma, a partícula move-se na cavidade metaestável praticamente sem sofrer influência da barreira de potencial, que ocorre apenas quando uma ação mais intensa da força flutuante lança a partícula para fora. Embora raros, tais eventos ocorrem em tempo finito ( $\tau_e$ ).

Pode-se distinguir dois regimes limites de acordo com a intensidade da interação da partícula com os graus de liberdade do banho térmico. Um de **alto amortecimento** (também chamado de **difusão espacial**); outro de **baixo amortecimento** (regime de **difusão de energia**).

Para regimes de difusão espacial (alto amortecimento ou pequenas acelerações) o momento,  $p$ , pode ser eliminado adiabaticamente da equação (4.1.2), tomando uma equação de Langevin do tipo:

$$(4.1.3) \quad \dot{x} = -\frac{1}{m\gamma} U'(x) + \frac{1}{m\gamma} \Gamma(t)$$

Essa equação é obtida de (4.1.1) desprezando-se o termo  $\dot{p}$  em comparação com os demais. Uma explicação mais detalhada e melhor justificada encontra-se na seção 4 da referência [27].



Com isso, a equação de Fokker-Planck associada é dada por:

$$(4.1.4) \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \left[ \frac{1}{m\gamma} \frac{\partial}{\partial x} U'(x) + \frac{KT}{m\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] w(x,t)$$

denominada, também, equação de Smoluchovski, de coeficientes de arrasto e difusão dados por:

$$(4.1.5) \quad F(x) = -\frac{U'(x)}{m\gamma}$$

$$(4.1.6) \quad D = \frac{KT}{m\gamma}$$

$-U'(x)$  é a força determinística

Representando a equação (4.1.4) na forma de uma equação de continuidade, com uma corrente de probabilidade  $S(x,t)$ :

$$(4.1.7) \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} S(x,t)$$

$S(x,t)$ , é dada por:

$$(4.1.8) \quad \begin{aligned} S(x,t) &= \left[ F(x) - \frac{\partial}{\partial x} D \right] w(x,t) \\ \Rightarrow S(x,t) &= \left[ -\frac{1}{m\gamma} U'(x) - \frac{KT}{m\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \right] w(x,t) \end{aligned}$$

Nesse caso, supõe-se os coeficientes de arrasto,  $F(x)$ , e difusão,  $D(x)$ , independentes do tempo, dados por (4.1.5) e (4.1.6).

Para uma solução estacionária,  $w_e(x)$ , a corrente de probabilidade em (4.1.8) deve ser constante. Para um caso em que  $S(x;t) \equiv 0$ , a equação (4.1.8) fica:

$$(4.1.9) \quad -\frac{U'(x)}{m\gamma} w_e^{(1)}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{KT}{m\gamma} w_e^{(1)}(x)$$

$$\Rightarrow -\frac{U'(x)}{KT} \left[ \frac{KT}{m\gamma} w_e^{(1)}(x) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{KT}{m\gamma} w_e^{(1)}(x) \right]$$

Integrando-se a expressão acima, obtém-se:

$$(4.1.10) \quad w_e^{(1)}(x) = \frac{N_0}{\left( \frac{KT}{m\gamma} \right)} \exp\left( -\int_{x_0}^x \frac{U'(\bar{x})}{KT} d\bar{x} \right)$$

$N_0$  é uma constante de normalização para  $w_e^{(1)}(x)$ .

A partir da (4.1.10), a solução estacionária para  $S \equiv 0$  pode ser escrita como:

$$(4.1.11) \quad w_e^{(1)}(x) = N e^{-U(x)/KT}$$

Pode-se rescrever a corrente de probabilidade (4.1.8),  $S(x;t)$ , como:

$$(4.1.12) \quad S(x;t) = -\frac{KT}{m\gamma} e^{-U(x)/KT} \frac{\partial}{\partial x} \left[ e^{U(x)/KT} w(x;t) \right]$$

Usando-se (4.1.12) pode-se determinar o estado estacionário,  $w_e^{(2)}(x)$ , na a situação em que a corrente de probabilidade é uma constante diferente de zero,  $S(x,t) \equiv S_0 \neq 0$ :

$$(4.1.13) \quad S_0 = -\frac{KT}{m\gamma} e^{-U(x)/KT} \frac{\partial}{\partial x} \left[ e^{U(x)/KT} w_e^{(2)}(x) \right]$$

$$\Rightarrow w_e^{(2)}(x) = -S_0 e^{-U(x)/KT} \int_{x_0}^x \frac{e^{U(x')/KT}}{\left(\frac{KT}{m\gamma}\right)} dx'$$

Uma solução mais geral para a densidade de probabilidade estacionária pode ser obtida adicionando-se a solução (4.1.11) à (4.1.13):

$$(4.1.14) \quad w_e(x) = w_e^{(1)}(x) + w_e^{(2)}(x)$$

$$w_e(x) = N e^{-U(x)/KT} - S_0 e^{-U(x)/KT} \int_{x_0}^x \frac{e^{U(x')/KT}}{\left(\frac{KT}{m\gamma}\right)} dx'$$

Uma das constantes em (4.1.14) é determinada pela normalização, a outra por condições de contorno.

Supondo-se que  $U(x)$  seja um potencial do tipo da Figura 3, impondo-se que o ruído seja de baixa intensidade comparado com a barreira de potencial ( $E_b \gg KT$ ) e que a equação de Smoluchovski seja válida, a corrente de probabilidade  $S(x,t)$  no topo da barreira de potencial, próximo à  $x_b$ , e a variação temporal da densidade de probabilidade  $w(x,t)$  são pequenas. Nessa situação quasi-estacionária  $S(x,t)$  é aproximadamente constante:

$$S(x,t) \approx S_0 = \text{constante}$$

Tomando (4.1.12) nessas condições:

$$(4.1.15) \quad S_0 = -\frac{KT}{m\gamma} e^{-U(x)/KT} \frac{\partial}{\partial x} \left[ e^{U(x)/KT} w(x;t) \right]$$

e integrando entre  $x_a$  e  $x_c$  obtém-se:

$$(4.1.16) \quad S_0 \int_{x_a}^{x_c} e^{U(x)/KT} dx = \frac{KT}{m\gamma} \left[ e^{U(x_a)/KT} w_e(x_a;t) - e^{U(x_c)/KT} w_e(x_c;t) \right]$$

Supondo que a densidade de probabilidade em  $x_c$ ,  $w_e(x_c;t)$ , é aproximadamente zero, então a corrente de probabilidade fica:

$$(4.1.17) \quad S_0 = \frac{KT}{m\gamma} e^{U(x_a)/KT} w_e(x_a;t) \int_{x_a}^{x_c} e^{U(x)/KT} dx$$

Como a barreira é alta, a densidade de probabilidade é aproximadamente a densidade estacionária. Desprezando-se o segundo termo em (4.1.14):

$$(4.1.18) \quad w_e(x) \approx w_e(x_a) e^{-[U(x)-U(x_a)]/KT}$$

Integrando  $w_e(x)$  em uma região em torno de  $x_a$  ( $x_1 \leq x_a \leq x_2$ ) tem-se a probabilidade de encontrar a partícula no poço de potencial:

$$(4.1.19) \quad P = \int_{x_1}^{x_2} w_e(x) dx = w_e(x_a) e^{U(x_a)/KT} \int_{x_1}^{x_2} e^{-U(x)/KT} dx$$

Supondo a energia  $KT$  pequena ( $E_b \gg KT$ ), a densidade de probabilidade (4.1.18) é muito pequena para  $x$  distante de  $x_a$ , então  $x_1$  e  $x_2$  não precisam ser especificados em detalhe (tomaremos  $x_1 = -\infty$  e  $x_2 = \infty$  mais adiante).

A corrente de probabilidade  $S_0$  é, a partir da definição da taxa de escape ( $\kappa$ ):

$$(4.1.20) \quad S_0 = \kappa P$$

Substituindo (4.1.17) e (4.1.19) em (4.1.20):

$$(4.1.21) \quad \frac{1}{\kappa} = \frac{P}{S_0} = \frac{KT}{m\gamma} \int_{x_1}^{x_2} e^{-U(x)/KT} dx \int_{x_a}^{x_b} e^{U(x)/KT} dx$$

Novamente, como  $KT$  é pequeno faz sentido usar as seguintes aproximações:

$$(4.1.22) \quad \begin{aligned} U(x) &\approx U(x_a) + \frac{1}{2}U''(x_a)(x-x_a)^2 \\ U(x) &\approx U(x_b) - \frac{1}{2}|U''(x_b)|(x-x_b)^2 \end{aligned}$$

e estender as duas integrais em (4.1.21) a  $\pm\infty$ , obtendo a taxa de Kramers [23]:

$$(4.1.23) \quad \kappa = \frac{1}{2\pi m\gamma} \sqrt{U''(x_a)|U''(x_b)|} e^{-[U(x_b)-U(x_a)]/KT}$$

Obtém-se, então uma taxa de escape na forma:

$$(4.1.24) \quad \kappa = \frac{\omega_a \omega_b}{2\pi\gamma} e^{-\frac{E_b}{KT}}$$

Na qual  $U''(x_a) = m\omega_a^2$  e  $|U''(x_b)| = m\omega_b^2$ .

Esse resultado é obtido para  $\gamma$  grande (regime de alto amortecimento), caso em que a equação de Smoluchovski é válida.

Kramers também obteve um resultado válido para valores de  $\gamma$  pequenos, considerando ainda  $KT \ll E_b$  [29]:

$$(4.1.25) \quad \kappa = \left( \frac{\left[ \gamma^2/4 + \omega_b^2 \right]^{1/2} - \gamma/2}{\omega_b} \right) \frac{\omega_a}{2\pi} e^{-\frac{E_b}{KT}}$$

Observa-se que para  $\gamma \gg \omega_b$  recobra-se o resultado (4.1.24).

## 4.2. Efeito da radiação de ponto-zero na taxa de escape

Na seção anterior, considerou-se o movimento de um corpo sujeito à ação de uma força não linear responsável pela existência de um estado metaestável. Uma força flutuante é capaz de lançar o corpo para fora desse estado, ultrapassando a barreira de potencial. A taxa de escape dessa cavidade apresenta a forma geral:

$$(4.2.1) \quad \kappa = \nu e^{-\frac{\Delta\varphi}{D}}$$

$\varphi$  está associado ao potencial, de modo que o coeficiente de arrasto da equação de Fokker-Planck seja  $F(x) = -\varphi'(x)$  (veja(4.1.5)).  $\Delta\varphi$  é a altura da barreira de potencial e  $D$  o coeficiente de difusão (4.1.6).

Pode-se usar esse resultado, juntamente com o estudo realizado sobre o oscilador harmônico (capítulo 3), e obter uma descrição do escape de cavidades metaestáveis no contexto da Eletrodinâmica Estocástica.

Considera-se uma partícula movendo-se sob a ação de uma força, cujo potencial é do tipo da **Figura 3**, e uma força devido a ação da radiação flutuante, de ponto-zero e térmica. Supondo-se que na região metaestável o potencial seja aproximadamente quadrático (potencial do oscilador harmônico nessa região), a equação de movimento

dessa partícula é semelhante a equação (3.3), mas com a força harmônica substituída pela força mais genérica  $(-U'(x))$ :

$$(4.2.2) \quad m\ddot{x} + m\gamma \dot{x} + U'(x) = eE_x(t)$$

Se a força flutuante tiver baixa intensidade, o escape através da barreira de potencial é um evento raro quando comparado com a escala de tempo do movimento na cavidade e a distribuição de probabilidade é aproximadamente a mesma que a do oscilador harmônico em torno do mínimo local do potencial. Essa distribuição permanece praticamente inalterada, a não ser pelo pequeno fluxo de probabilidade através da barreira de potencial.

Nessas condições, a taxa de escape da barreira de potencial é semelhante à calculada por Kramers [29]. No entanto, devido à interação da partícula com a radiação aleatória, o coeficiente de difusão é diferente do valor obtido pela teoria do movimento Browniano tradicional:  $D = \frac{\hbar m \omega_0 \gamma}{2} \coth\left(\frac{\hbar \omega_0}{2KT}\right)$  ao invés de  $D = m\gamma KT$ .

Dessa forma, a taxa de escape da cavidade, devido a ação da radiação de ponto-zero, fica:

$$(4.2.3) \quad \kappa = \nu \exp\left(-\frac{\Delta U}{\frac{\hbar \omega_0}{2} \coth\left(\frac{\hbar \omega_0}{2KT}\right)}\right)$$

O termo  $\Delta U$  é a energia de ativação devido a barreira de potencial e  $\nu$  um pré-fator, que depende das características do amortecimento ( $\gamma$ ) e da forma do potencial.

No limite de altas temperaturas ( $T \rightarrow \infty$ ), essa taxa de escape tende à expressão usual da teoria do movimento Browniano, com coeficiente de difusão  $D = m\gamma KT$ :

$$(4.2.4) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \kappa = \nu \exp\left(-\frac{\Delta U}{KT}\right)$$

Essa concordância não ocorre a baixas temperaturas ( $T \rightarrow 0$ ) devido à interação com a radiação de ponto-zero. Ao invés da taxa de escape anular-se, ela passa a ter um valor constante, mas não nulo:

$$(4.2.5) \quad \lim_{T \rightarrow 0} \kappa = \nu \exp \left( - \frac{\Delta U}{\frac{\hbar \omega_0}{2}} \right)$$

Nesse limite, a taxa de escape torna-se independente da temperatura, fato que geralmente é considerado de característica exclusiva da Mecânica Quântica, pois o banho térmico cessaria de promover o escape da partícula através da barreira de potencial e o fenômeno de "tunelamento quântico" seria a única explicação possível [28, 30].

### 4.3. Analogia com a Mecânica Quântica

O efeito de escape de partículas microscópicas da região metaestável em baixas temperaturas é interpretado, dentro do formalismo da Mecânica Quântica, como tunelamento através da barreira de potencial [28, 30]. No caso da Eletrodinâmica Estocástica, a energia da partícula está sujeita a flutuações devido às interações com a radiação aleatória, permitindo o escape de partículas com energias médias menores que  $E_b$ . Essa situação é considerada impossível no contexto da física clássica, caso não se tome em conta essas flutuações.

Juntamente com o não anulamento da taxa de escape, a presença de  $\hbar$  na expressão (4.2.5) deve-se exclusivamente à radiação de ponto-zero, não sendo necessária a hipótese de quantização e dualidade onda-partícula. O resultado clássico tradicional (taxa de escape nula quando  $T \rightarrow 0$ ) é recuperado se for tomado o limite  $\hbar \rightarrow 0$  nessa expressão (situação em que não há radiação de ponto-zero).

Para ilustrar melhor essa analogia com o tunelamento da teoria quântica pode-se analisar uma situação experimental: a cadeia beta-hemoglobina ( $\beta Hb$ ) liga-se ao monóxido de carbono ( $CO$ ), do qual pode ser dissociada opticamente com um LASER e analisada experimentalmente a taxa de recombinação entre eles [30]. Mede-se a fração,  $N(t)$ , de moléculas de hemoglobina que não se recombinau ao monóxido de carbono em função do tempo. Determina-se o tempo necessário para  $N(t)$  reduzir-se de 1 para 0,75 ( $t_{0.75}$ ). Atribui-se a essa recombinação a passagem por uma barreira de potencial e uma taxa de escape média pode ser determinada fazendo-se  $k_{0.75} = \frac{1}{t_{0.75}}$ .

Esse procedimento pode ser repetido em diversas temperaturas de modo a obter-se uma dependência de  $k_{0.75}$  com a temperatura. Para os dados referentes a esse experimento, as taxas de escape determinadas estão representadas no gráfico da **Figura 6**, no qual também está representado a curva correspondente à expressão (4.2.3).

A curva da **Figura 6** foi feita variando-se os parâmetros desconhecidos  $\nu$ ,  $\omega_0$  e  $\Delta U$  da equação (4.2.3). Um bom ajuste foi obtido para os valores:

$$(4.3.1) \quad \begin{aligned} \nu &= 1,76 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1} \\ \frac{\hbar\omega_0}{2} &= 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ eV} \\ \Delta U &= 8,36 \cdot 10^{-2} \text{ eV} \end{aligned}$$

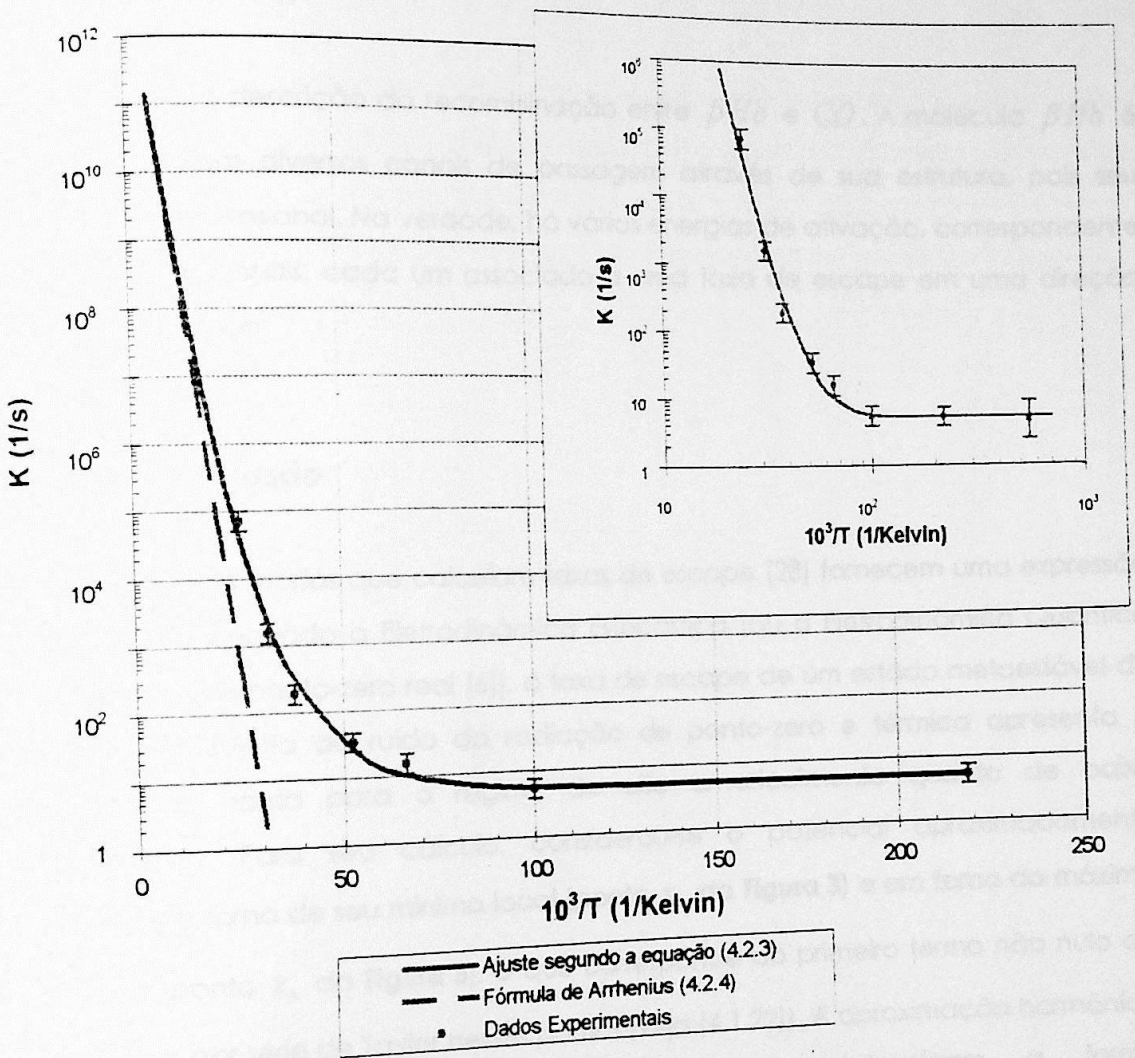


Figura 6: Valores experimentais da taxa de escape de recombinação da molécula da cadeia beta-hemoglobina com monóxido de carbono em função da temperatura [30]. A linha contínua corresponde às taxas de escape levando-se em conta a radiação de ponto-zero (veja também Figura 4). A linha tracejada corresponde à Lei de Van't Hoff-Arrhenius, sem levar em conta a radiação de ponto-zero.

Note que, à temperatura próxima de zero, mesmo que a energia média de oscilação no poço de potencial seja pequena comparada com a altura da barreira ( $\frac{\Delta U}{\hbar\omega_0/2} \approx 30$ ), a taxa de escape não é nula. Para uma partícula de carga  $q$ , o potencial real é  $U(x, t) = U(x) - qx E_x(t)$ , na qual  $E_x(t)$  é o campo flutuante, térmico e de ponto-zero. Dessa forma, o potencial efetivo é sempre flutuante (barreira flutuante), permitindo o escape de partículas com energia menor que  $E_b$  (veja Figura 3).

A expressão (4.2.3) representa bem as características normalmente associadas ao tunelamento a baixas temperaturas. No entanto, essa expressão não é um modelo

completo para a descrição da recombinação entre  $\beta Hb$  e  $CO$ . A molécula  $\beta Hb$  é complexa, existem diversos canais de passagem através de sua estrutura, pois seu potencial é tridimensional. Na verdade, há várias energias de ativação, correspondente a esses diversos canais, cada um associado a uma taxa de escape em uma direção diferente no espaço.

#### 4.4. Discussão

Grande parte das teorias que calculam taxas de escape [28] fornecem uma expressão como a (4.2.1). Segundo a Eletrodinâmica Estocástica (ou a Eletrodinâmica Quântica com radiação de ponto-zero real [6]), a taxa de escape de um estado metaestável de uma partícula sujeita ao ruído da radiação de ponto-zero e térmica apresenta a mesma forma, tanto para o regime de alto amortecimento quanto de baixo amortecimento. Para seu cálculo, considerou-se o potencial aproximadamente harmônico em torno de seu mínimo local (ponto  $x_a$  da **Figura 3**) e em torno do máximo da barreira (ponto  $x_b$  da **Figura 3**), o que corresponde ao primeiro termo não nulo da aproximação por série de Taylor nesses pontos (veja (4.1.22)). A aproximação harmônica e a contribuição da radiação de ponto-zero determinam a forma

$$D = \frac{\hbar m \omega_0 \gamma}{2} \coth\left(\frac{\hbar \omega_0}{2KT}\right)$$

do coeficiente de difusão e as características do escape semelhantes às do tunelamento e não se faz outra restrição às características do potencial. Essa aproximação é melhor em temperaturas baixas, quando a partícula na cavidade metaestável permanece a maior parte do tempo em uma região mais concentrada em torno do mínimo local do potencial. Como o tunelamento é considerado característico de baixas temperaturas [30], essa descrição não fica prejudicada com o resfriamento do sistema.

Nessa descrição, o análogo ao que era considerado "limite clássico" no contexto da Mecânica Quântica corresponde ao limite para altas temperaturas da taxa de escape da partícula: a lei de Van't Hoff-Arrhenius (veja capítulo 4).

A partícula sujeita ao potencial metaestável e à radiação flutuante não é um sistema isolado. Ela pode ultrapassar a barreira de potencial e terminar o processo com energia igual, maior ou menor que a energia correspondente à altura da barreira de potencial, dependendo de suas interações aleatórias com a radiação flutuante sempre presente.

1. "Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles", Dover Publishing, New York, 1978.
2. "The Quantum Theory of Fields", Vol. 1, "Foundations", Cambridge University Press, 1995.
3. "Gravitation", R. M. Wald, John Wiley & Sons, 1984.
4. "The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics", Academic Press, Inc., 1994.
5. "Derivation of the Blackbody Radiation Spectrum without Quantum Mechanics", Phys. Rev. 182 (1), 1374, 1969.
6. "Stochastic Electrodynamics and Classical Electrodynamics", Phys. Scripta 2, 33 (1970) e Found. Phys. Lett., 5, 25, 1992.
7. "Spin and Stochastic Electrodynamics", Phys. Rev. A 39, 4492, 1989.
8. "Classical Interpretation of the Debye Specific Heat of Solids", Phys. Rev. A 42, 693, 1991.
9. "Classical Interpretation of Long-Range van der Waals Potentials", Phys. Rev. 182, 19, 1969.
10. "The Quantum Dice: An Introduction to Stochastic Electrodynamics", Kluwer Academic Publishers, 1998.
11. "Relações Eletromagnéticas de Ponto-Zero: Resposta da Radiação e os efeitos Cometais da Dissipação", Obra de Memória submetida ao Conselho de Físicos do CNPQ, 1992, ver referências 24-30 contidas.
12. "Ground State of Hydrogen or Zero Point Fluctuation - Determined by the Casimir Effect", Phys. Rev. D 30, 2246, 1984; Franco, H. M., et al. "A Stochastic Description of Spontaneous Emission in the Hydrogen Atom", Eur. J. Phys. 18, 343, 1997.
13. "Casimir's and the Zero-Point Fluctuations", Found. Phys. 29, 1039, 1999.
14. "Spontaneous Emission in a Confined Space", Phys. Rev. A 48, 4136, 1993.
15. "The Effect of Fluctuation of a Casimir Dipole Oscillator in a Confined Space", Phys. Rev. D 24, 1231, 1981.
16. "The Theory of Classical Electrodynamics", Phys. Rev. D 11, 970, 1975.

## Referências

- 1 BISHOP, R. L.; GOLDBERG, S. I.; "Tensor analysis on manifolds"; Dover Publ., 1980;
- 2 BARUT, A. O.; "Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles"; Dover Publ., 1980;
- 3 COMAY, E.; "Exposing 'hidden momentum'"; Am. J. Phys. **64** (8), Aug. 1996;
- 4 MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A.; "Gravitation"; H. Freeman and Company; 1973;
- 5 FRANÇA, H. M.; SANTOS, G. C.; "The extended Charge in Stochastic Electrodynamics"; Il Nuovo Cimento; **86** B, N. 1; 1985;
- 6 MILONNI, P. W.; "The Quantum Vacuum. An Introduction to Quantum Electrodynamics"; Academic Press, Inc.; 1994;
- 7 BOYER, T. H.; "Derivation of the Blackbody Radiation Spectrum without Quantum Assumptions"; Phys. Rev.; **182**; n. 5; 1374; 1969;
- 8 BARRANCO, A. V. and FRANÇA, H. M., "Stochastic Electrodynamics and Compton Effect"; Phys. Essays **3**; 53 (1990) e Found. Phys. Lett.; **5**; 25; 1992;
- 9 BARRANCO, A. V., BRUNINI, S. A. and FRANÇA, H. M.; "Spin and Paramagnetism in Classical Stochastic Electrodynamics", Phys. Rev. A **39**., 5492; 1989;
- 10 BLANCO, R., FRANÇA, H. M. and SANTOS, E., "Classical Interpretation of the Debye Law for the Specific Heat of Solids"; Phys. Rev. A **42**; 693; 1991;
- 11 BOYER, T. H.; "Recalculations of Long-Range van der Waals Potentials"; Phys. Rev. **180**, 19; 1969;
- 12 DE LA PEÑA, L; CETTO, A. M.; "The Quantum Dice. An Introduction to Stochastic Electrodynamics"; Kluwer Academic Publishers, 1996;
- 13 DECHOUM, K.; "Flutuações Eletromagnéticas de Ponto-Zero, Reação da Radiação e os Estados Coerentes do Oscilador"; Dissertação de Mestrado submetido ao Instituto de Física da USP, 1992, ver referências 2-5 lá contidas;
- 14 PUTHOFF, H. E.; "Ground State of Hydrogen as Zero Point Fluctuation - Determined State"; Phys. Rev. D **35**; 3266; 1987; França, H. M., et al; "A stochastic electrodynamics of spontaneous transitions in the hydrogen atom"; Eur. J. Phys.; **18**; 343 (1997)
- 15 FRANÇA, H. M.; MAIA Jr., A., MALTA, C. P.; "Maxwell Electromagnetic Theory, Planck's Radiation Law, and Bose-Einstein Statistics"; Found. of Phys **26**; 1055; 1996;
- 16 FRANÇA, H. M.; MARSHALL; SANTOS E.; "Spontaneous emission in confined space according to stochastic electrocdynamics"; Phys. Rev. A; **45**; 6436; 1992
- 17 BOYER, T. H.; "Thermal Effects of Acceleration for a Classical Dipole Oscillator in Classical Stochastic Electromagnetic Zero-point Radiation"; Phys. Rev. D **29**, p.1089, 1984;
- 18 BOYER, T. H.; Random electrodynamics: "The theory of classical electrodynamics with classical electromagnetic zero-point radiation"; Phys. Rev. D **11**, p.790, 1975;

## Referências

---

- 19 KLEPIKOV, N. P.; "Radiation damping forces and radiation from charged particles"; Sov. Phys. Usp. **28** (6), June 1985;
- 20 DIRAC; P. M.; "Classical Theory of Radiating Electrons"; Proc. Roy. Soc.; A**167**; 148; 1938;
- 21 MARSHALL, T. W.; "Statistical electrodynamics"; Proc. Camb. Phil. Soc.; **61**, 537; 1965
- 22 SOBCZYK, Kazimierz; "Stochastic differential equations: with applications to physics and engineering"; Kluwer Academic Publishers; 1990;
- 23 RISKEN, H.; "The Fokker-Planck Equation"; Springer-Verlag; 1984;
- 24 VAN KAMPEN, N. G.; "Stochastic Processes in Physics and Chemistry"; North-Holland; 1992;
- 25 WAX, N.; "Selected Papers on Noise and Stochastic Processes"; Dover Publications; N. York; 1954;
- 26 GARDINER, C. W.; "Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences"; Springer-Verlag; 1983;
- 27 CHANDRASEKHAR, "Stochastic Problems in Physics and Astronomy", Rev. Mod. Phys.; **15**, 1 (1943)
- 28 HÄNGGI, P.; TALKNER, P.; BORKOVEC, MICHAL; "Reaction-rate theory: fifty years after Kramers"; Rev. Mod. Phys.; **62**; N° 2; 1990;
- 29 KRAMERS; H. A.; "Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions"; Physica **7**; N° 4; p. 284; 1940;
- 30 ALBERDING, N.; "Tunneling in Ligand Binding to Heme Proteins"; Science; **192**; p. 1002; 4 Jun 1976;