UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

SBI-IFUSP
305M810T1475

C. E. I. Carneiro

SOBREVIVÊNCIA DO MODELO INFLACIONÁRIO: NOVAS ESTRATÉGIAS

Paulo Bedaque

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1475
INSTITUTO DE FÍSICA

Dissertação de mestrado
apresentada ao
Instituto de Física
São Paulo - 1988

Defesa em 16/12/88

Rua: Santo A
CEP: 01315-
Tel: (

539.72
B399s

M
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Bedaque, Paulo Sergio Fortes
Sobrevivência do modelo inflacionário: novas estratégias. São Paulo, 1988.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares.
Orientador: Prof. Dr. Henrique Fleming

Unitermos: 1.Cosmologia; 2.Modelo inflacionário; 3.Física de partículas; 4.Análise numérica.

USP/IF/SBI - 49/88

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, sem os quais nada teria sido possível.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Henrique Fleming, pela paciência e interesse nos últimos anos.

À Yara Ridente e Sergio Cortizo, pela ajuda com o TEX.

À FAPESP pelo suporte financeiro.

Aos colegas do Departamento de Física Matemática pela colaboração e a todos que, direta ou indiretamente, contribuiram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Analisamos numericamente a evolução de um campo escalar sujeito a um potencial que leva à quebra de simetria em uma métrica de Robertson-Walker, para saber se o mecanismo da transição de fase leva a um estado inflacionário.

Nossos resultados , em concordancia com estimativas analíticas, sugerem que para constantes de acoplamento suficientemente pequenas a inflação pode ocorrer por causa de desvios do equilíbrio térmico gerados pela rápida expansão do Universo.

ABSTRACT

We have numerically analised the evolution of a scalar field with a double-well-shaped potencial on a Robertson-Walker background, aiming at deciding whether the phase transition mechanism can generate an inflationary state.

Our results, in agreement with analytical estimates, suggest that for small enough coupling constants the inflation can happen due to the high Universe expansion rate that drives the scalar field out of thermal equilibrium.

ÍNDICE

1. O Modêlo Inflacionário

O modêlo cosmológico padrão e seus problemas ____ 1

A Inflação ____ 14

A Nova Inflação ____ 20

Crítica ao uso do potencial efetivo no modêlo inflacionário ____ 21

O Modêlo ____ 24

2. Os Métodos Numéricos

Estabilidade ____ 27

Os nossos esquemas numéricos ____ 33

3. Os Resultados

Estimativas analíticas ____ 39

Os resultados numéricos ____ 44

CONVENÇÕES

A menos que se diga explicitamente o contrário, o sistema de unidades usado nesta dissertação é aquele para o qual $\hbar = c = G = k_B = 1$.

O símbolo ' $\sim$ ' significa " proporcional a " e o símbolo' $\approx$ ' significa " da mesma ordem de grandeza ".

A métrica do espaço tempo tem signatura $(+1, -1, -1, -1)$.

1. O MODELO INFLACIONÂRIO

— O modêlo cosmológico padrão e seus problemas

Ao longo deste século, o chamado modelo padrão (Weinberg(1)) se fixou como o mais promissor para a descrição do Universo em larga escala. Entre os seus principais sucessos estão a explicação natural da lei de Hubble de recessão das galáxias, a previsão da abundância primordial de núcleos leves (H^2, He^4) e a explicação da origem da radiação de fundo de $3\,^0K$.O modelo padrão prevê que o Universo em seus instantes iniciais tinha temperaturas elevadíssimas, maiores que as que podem ser obtidas em laboratórios ou mesmo as que existem no interior das estrêlas. Dessa maneira, o início do Universo fornece um laboratório único para o estudo da física de altas energias.

À medida que a física passa a especular sobre a constituição da matéria à energias mais altas, o modelo padrão é estendido a instantes mais próximos do "big-bang", onde essas energias eram comuns. Enquanto na década de 40 (Gamow(1)) estudava-se a formação de núcleos leves envolvendo energias da ordem de ≈ 0.1 Mev e ocorrida quando o Universo tinha ≈ 10s. de idade, hoje se fala sobre instantes da ordem de $\approx 10^{-37}$ e energias da

ordem daquelas envolvidas na grande unificação ($\approx 10^{15}$).

Passaremos agora a uma descrição sumária do modelo padrão. Assumimos que o Universo é homogêneo e isotrópico quando tomamos a média sobre distâncias da ordem de $\approx 10^3$ Mpc. Para distâncias menores, as observações astronômicas indicam uma hierarquia de estruturas(estrelas, galáxias, aglomerados, aglomerados de aglomerados, etc.). A métrica mais geral com as propriedades de homogeneidade e isotropia é a métrica de Robertson- Walker (Weinberg (1)):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right]$$

Uma secção espacial t =cte. é um espaço tridimensional de curvatura igual a k/a^2. Reescalando a função $a(t)$ e a coordenada r é possivel fazer com que o parâmetro k tenha um dos valores $1, 0$ ou -1, o que corresponde a secções espaciais com curvaturas positiva, nula e negativa, respectivamente. Suporemos sempre que este reescalonamento tenha sido feito.

Quando colocamos a métrica de Robertson-Walker nas equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

obtemos que o tensor momento-energia deve ter a forma:

$$T^{\mu}{}_{\nu} = diag(\rho, -p, -p, -p)$$

o que pode ser obtido como consequencia direta da homogeneidade e isotropia. A isotropia impede termos de tensão T_{ij}, com $i \neq j$ e implica em termo diagonais (pressão) iguais em qualquer direção.

As equações de Einstein escritas em termo de $a(t)$, ρ e p, depois de combinadas entre si fornecem:

(i) $$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

e

(ii) $$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p)$$

Como os processos dissipativos são desprezíveis assumimos que:

$$\frac{d}{dt}(sa^3) = 0$$

onde s é a densidade de entropia. A conservação da entropia nos permite relacionar p e ρ:

(iii) $$p = p(\rho)$$

As relações (i), (ii) e (iii) nos permitem, em princípio, obter as funções $a(t)$, $\rho(t)$ e $p(t)$.

A relação $T_{\mu\nu}{}^{;\mu} = 0$, que é uma consequência da equação de Einstein , pode ser escrita como:

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -3pa^2$$

Se a pressão p é não negativa, ρ deve, portanto, decrescer com uma potencia maior ou igual à 3. Dessa maneira a equação (i) fica:

(iv) $$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3a^2\alpha} - \frac{k}{a^2}, \qquad \text{com} \quad \alpha \geq 3$$

O comportamento qualitativo de $a(t)$ pode agora ser obtido conhecendo-se o sinal de k. Se $k = 1$, e assumindo que $\dot{a} \geq 0$ em algum instante(e, de fato, o Universo esta se expandindo atualmente), o lado direito da equação (iv) deve se anular em algim instante, porque o primeiro termo do lado direito diminue mais rapidamente que o segundo. A partir daí, o lado direito da equação seria negativo se $a(t)$ continuasse a crescer. Como o lado esquerdo é sempre positivo, concluimos que $a(t)$ deve passar a diminuir, isto é, o Universo atinge um tamanho máximo e a partir daíse contrai. Isto não acontece se $k = 1$ ou 0. O lado direito da equação (iv) é sempre positivo, o sinal de $\dot{a}$ é constante e o Universo se expande indefinidamente.

O sinal da curvatura espacial pode ser determinado através do conhecimento da constante de Hubble $H = \dot{a}/a$ e ρ:

$$\begin{aligned} \frac{8\pi}{3H^2}\rho > 1 \qquad & k = 1 \\ \frac{8\pi}{3H^2}\rho = 1 \qquad & k = 0 \\ \frac{8\pi}{3H^2}\rho < 1 \qquad & k = -1 \end{aligned}$$

Por isso costuma-se definir a densidade crítica $\rho_{cr} = 3H^2/8\pi$ e $\Omega = \rho/\rho_{cr}$. O fato de Ω ser maior, menor ou igual à um, define o sinal da curvatura espacial do Universo e, portanto, seu destino final. É bastante dificil estimar o valor de Ω atualmente e mesmo o valor de H é incerto por um fator 2. Observações atuais indicam um valor de H igual a h_0 100 Km/s/Mpc, onde $\frac{1}{2} \leq h_0 \leq 1$ (Tamman(1)) é o chamado fator de ignorância. Para Ω as observações atuais fornecem um valor $.01 \leq \Omega \leq 4$, portanto é uma questão em aberto o sinal de k.

Como já vimos, no caso de pressão não negativa a energia ρ é proporcional a $a(t)^{-\alpha}$, com $\alpha \geq 3$. Dessa maneira ρ deve ter sido enorme nos instantes iniciais do Universo, e isso implica também em temperaturas elevadas. Quando a temperatura era bem maior que a massa das partículas elementares, o Universo era preenchido por um plasma de partículas

relativísticas e as funções termodinâmicas eram, essencialmente aquelas de um gás ideal no limite ultra-relativístico. Assim temos:

$$\rho = 3p = \frac{\pi^2}{30} N(T) T^4$$
$$s = \frac{2\pi^2}{45} N(T) T^3 ,$$

onde $N(T) = N_b(T) + \frac{7}{8} N_f(T)$, com $N_b(T)$ = número de graus de liberdade dos bósons relativísticos e $N_f(T)$ = número de graus de liberdade dos férmions relativísticos a temperatura T.

A conservação da entropia $sa^3 = cte.$ implica que T é proporcional a $a^{-1}(t)$, e podemos escrever a equação (i) em função da temperatura:

$$(v) \qquad \left(\frac{\dot{T}}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^3}{45} N(T) T^4 - kT^2 \left[\frac{2\pi^2}{45} \frac{N(T)}{S}\right]^{2/3}$$

onde $S = s\,a^3$ é a entropia total de um volume $\sim a^3$. Como S é conservado, podemos estimá-lo a partir de observações atuais. Da equação (i) temos:

$$\frac{k}{a^2} = \left(\frac{\rho}{\rho_{cr}} - 1\right) H^2$$

Como $\rho < 10\rho_{cr}$ atualmente:

$$(vi) \qquad \left|\frac{k}{a^2}\right| < 9H^2$$

portanto $a_0 > \frac{1}{3} H_0^{-1} \approx 10^{10}$ anos. A entropia do Universo atual é dominada pela contribuição da radiação de fundo de fótons e neutrinos de $3\,^0K$, cuja origem, segundo o

modelo padrão, será explicada mais adiante. Supondo a existência de não muito mais que três espécies de neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ) com massa zero, temos:

$$S = sa^3 > 10^{87}$$

Supondo $N(T) \approx 10^2$ vemos que, enquanto $T \gg 10^3\ ^0K$, o termo de curvatura da equação (v) é desprezível:

$$\left(\frac{\dot{T}}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^3}{45} N(T) T^4$$

cuja solução é facilmente encontrada:

$$(vii) \qquad T(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{45}{\pi^3 N(T)}\right)^{\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{2}}$$

e portanto $a(t) \sim \sqrt{t}$. A relação (vii) nos permite saber qual a temperatura em cada instante e a partir disso concluirmos o que ocorria no Universo:

$t < 10^{-45}\ s.$ $(T > 10^{19}\ Gev)$- A temperatura é maior que a massa de Planck. Efeitos quânticos gravitacionais são esperados e portanto não sabemos nada sobre esta fase.

$t \approx 10^{-36}$ $(T \approx 10^{15}\ Gev)$- Ocorre a transição de fase da grande unificação.

$t \approx 10^{-11}\ s.$ $(T \approx 10^2\ Gev)$- Ocorre a transição de fase de Weinberg-Salam.

$t \approx 10^{-9}\ s.$ $(T \approx 1\ Gev)$- Prótons e nêutrons deixam de ser relativísticos e são suprimidos por um fator $e^{-M_N/T}$.

$t \approx 10^{-1} s.$ $(T \approx 1\ Mev)$- A intensidade das forças fracas é insuficiente para manter os neutrinos em equilíbrio com o resto da matéria A partir daíos neutrinos esfriam com $T_\nu \approx a^{-1}$. O número de elétrons, pósitrons e fótons é comparável e um pequeno número

de prótons também está presente. Com temperaturas abaixo de $\approx 10^{15}$ Gev o número de bárions é quase constante e assim, $\eta = n_B/n_\gamma$ é o mesmo de hoje ($\approx 10^{-10}$). Assim o número de prótons deve ter sido $\approx 10^{-10}\, n_\gamma$. Como o Universo é eletricamente neutro, havia um excesso de 10^{-10} elétrons sobre os pósitrons.

$t \approx 10^{11}$ *s*. ($T \approx 0.1$ *Mev*)- Elétrons e pósitrons são suprimidos por um fator e^{m} $^{/T}$ através do processo $e^+ + e^- \Rightarrow 2\gamma$ que aquece os fótons em relação aos neutrinos. Prótons e nêutrons se unem para formar núcleos leves. A porcentagem de He^4 que se calcula tenha sido produzida nesta época concorda com as observações.

$t \approx 10^{11}$ *s*. ($T_\gamma 10^{-9}$ *Gev* $\approx 10^{3\,0} K$) - A densidade de energia passa a a ser dominada pela massa de repouso dos bárions. A pressão cai a zero e por isso a lei de evolução do fator de escala $a(t)$ muda. O termo de curvatura da equação (i) é desprezível e assim temos:

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0 a^{-3}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi\rho_0}{3a^3}$$

e

$$\rho_B \approx \rho_\gamma \Rightarrow T_\gamma^d = m_B \eta$$

Assim $a \sim t^{\frac{2}{3}}$. O instante em que a massa de repouso dos bárions domina a densidade de energia do Universo pode ser determinado conhecendo-se η que se mantém o mesmo até hoje:

$$\rho_B \approx \rho_\gamma \Rightarrow T_\gamma^d = m_B\, \eta$$

A conservação da entropia implica que $T_\gamma \sim a^{-1}$, logo:

$$T_\gamma^d = T_\gamma^0 \frac{a_0}{a(t_d)} = T_\gamma^0 \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Assim:

$$t \approx t_0 (T_\gamma^0 / m_B \eta)^{\frac{1}{2}} \approx 10^{11} s.$$

Aproximadamente ao mesmo tempo os elétrons se combinam com os núcleos leves formando átomos eletricamente neutros. Esse fenômeno é usualmente conhecido por recombinação, apesar de elétrons e núcleos nunca estarem ligados antes. A recombinação acontece quando a temperatura dos fótons é da ordem do potencial de ionização do hidrogênio. Como a matéria passa a ser eletricamente neutra, ela interage muito fracamente com os fótons. Isso faz com que os fótons percam o contato térmico com a matéria. A distribuição das energias dos fótons continua a ser a de Planck , não porque o espalhamento fóton-fóton termalize a radiação, mas porque cada comprimento de onda sofre, proporcionalmente, o mesmo desvio para o vermelho, mantendo assim a forma do espectro. Estes fótons podem ser observados hoje e formam a radiação de fundo de $3\,^0K$ que é uma das principais previsões confirmadas do modelo.

$t > 10^{11}\ s\ (\approx 10^5\ anos)$- Planetas, estrêlas, galáxias e aglomerados se formam. Os elementos pesados ($Z > 8$) são formados no interior das estrêlas.

Apesar dos seus grandes sucessos, o modelo padrão apresenta algumas dificuldades importantes. Vamos discutir três delas.

O problema do "flatness" - Como já vimos, o termo de curvatura da equação (i) é desprezível no inicio do Universo. Entretanto, a medida que o tempo passa, este termo cresce de importância (lembre que ρ decresce, pelo menos, como a^{-3}). O tempo necessário para que isso aconteça depende da razão $\Omega = \rho/\rho_{cr}$. Isto porque o valor $\Omega = 1$ é instável. Qualquer pequeno desvio desse valor aumenta com o tempo. Como a importância da

curvatura na equação (i) está ligada com o desvio de Ω do valor 1 (eq.(vi)) temos que só um ajuste fino das condições iniciais pode manter a curvatura desprezível por muito tempo. Mas quanto é muito tempo ? Uma estimativa de ordem de grandeza pode ser obtida lembrando que em um Universo dominado pela radiação o único parâmetro com dimensão de tempo é o tempo de Planck ($t_{\text{Planck}} \approx 10^{-44}\ s.$). Portanto o Universo já dura $\approx 10^{61}$ tempos de Planck e ainda não é dominado pela curvatura. Este é o problema do "flatness": o Universo é plano demais e isto implica em um ajuste fino das condições iniciais. No modelo padrão estas condições iniciais, apesar de muito particulares, são assumidas sem explicação (Dicke(1)).

Podemos quantificar o problema do "flatness" da seguinte maneira. Da equação (i) temos:

$$(viii) \qquad \frac{\Omega - 1}{\Omega} = \frac{\rho - \rho_{cr}}{\rho} = \frac{3k}{8\pi a^2 \rho}$$

Assim:

$$(ix) \qquad \frac{\Omega - 1}{\Omega} \sim a^2 \sim t \text{ em um Universo dominado pela radiação}$$

$$(x) \qquad \frac{\Omega - 1}{\Omega} \sim t^{\frac{2}{3}} \text{ em um Universo dominado pela matéria}$$

O valor atual de $\frac{\Omega - 1}{\Omega}$ é:

$$-100 < \left(\frac{\Omega - 1}{\Omega}\right)_0 < 1$$

Portanto, no momento em que a densidade de energia da radiação igualou-se a de matéria ($t \approx 10^{11}\ s.$) :

$$\left(\frac{\Omega - 1}{\Omega}\right)_t = \left(\frac{\Omega - 1}{\Omega}\right)_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} 10^{-5} \\ -10^{-3} \end{cases}$$

Para instantes anteriores o Universo era dominado por radiação e devemos usar a relação (ix) :

$$\left(\frac{\Omega - 1}{\Omega}\right)_t = \left(\frac{t}{10^{11}\ s.}\right) \begin{cases} 10^{-5} \\ -10^{-3} \end{cases}$$

Assim, se tomarmos como "instante inicial" do modelo padrão à época da grande unificação ($t \approx 10^{-37}\ s.$ e $T \approx 10^{15}\ Gev$) :

$$-10^{-51} < \left(\frac{\Omega - 1}{\Omega}\right)_{GUT} < 10^{-53}$$

Esse é o ajuste fino das condições iniciais de que falamos. É bastante incômodo aceitar isso como resultado do acaso. Obviamente que efeitos quânticos ocorridos na era de Planck podem ter gerado esse ajuste, porém uma explicação que use apenas a física da qual temos algum conhecimento seria bem vinda.

O problema do horizonte - A distância que a luz pode atravessar desde o "big-bang" até um determinado instante t é chamado horizonte. Ele estabelece a distância máxima em que pode haver relação causal. Ela não é simplesmente t, porque as distâncias já percorridas pelo sinal luminoso continuam a se expandir com o Universo, mas é dada, na métrica de Robertson-Walker por:

$$h(t) = a(t) \int_0^t a^{-1}(t')\, dt'$$

Em um Universo dominado por radiação:

$$h(t) = t^{\frac{1}{2}} \int_0^t t'^{-\frac{1}{2}}\, dt' = 2t$$

A radiação de fundo é bastante isótropica em sua temperatura ($\delta T/T \approx 10^3$) mesmo quando tomamos direções diametralmente opostas. É, portanto, razoável supor que os pontos que a emitiram puderam travar contato para termalizar. Porém o horizonte na época da recombinação era da ordem de 10^{11} $s.$ e a distância entre eles de $\approx$ 10^{10} anos $(3\,^0K/4000\,^0K) \approx 10^{13}$ $s.$

O problema do horizonte é explicar como pontos separados por $\approx$ 100 horizontes podiam estar a uma mesma temperatura com um grau tão alto de precisão (Rindler(1)).

A situação fica mais complicada quando lembramos que o modelo padrão assume homogeneidade desde tempos da ordem de $t \approx 10^{-43}$ $s.$ com $T \approx 10^{17}$ $Gev.$ Usando novamente a conservação da entropia, determinamos o tamanho do Universo observável naquele instante:

$$L(t) = \left(\frac{s_0}{s_t}\right)^{\frac{1}{3}} L_0 \approx \left(\frac{T_\gamma^3}{N(T)T^3}\right)^{\frac{1}{3}} 10^{10}\text{anos} \approx 10^{-2}\text{cm}$$

Assim temos que:

$$\frac{h(t)}{L(t)} \approx 10^{-29}$$

Abundância de monopolos – Acredita-se que as forças fortes e eletrofacas sejam unificadas em escalas de energia acima de $\approx$ 10^{16} $Gev.$ Provavelmente a teoria que descreve esse fenômeno é uma teoria de gauge sobre um grupo G , ainda não conhecido mas que contém $SU(3)_c \otimes SU(2) \otimes U(1)_{Weinberg-Salam}$ como subgrupo. A simetria de G deve ser quebrada espontaneamente através do mecanismo de Higgs para resultar na fenomenologia conhecida de baixas energias:

$$G \Longrightarrow G_N \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \Longrightarrow SU(3)_c \otimes U(1)_7$$

Para temperaturas acima de $\approx 10^{16}\,Gev$ o valor esperado do campo de Higgs se anula e a simetria é restaurada. Esta é a situação esperada para $t \leq 10^{-37}\,s$.. Porém, a medida que o Universo esfria, passa por uma transição de fase e o campo de Higgs adquire um valor diferente de zero. Esse valor é escolhido ao acaso dentre aqueles que minimizam a energia livre. Se o mínimo da energia livre é degenerado, o valor assumido pelos campos de Higgs em dois pontos diferentes do espaço não precisa ser o mesmo, principalmente se a distância entre estes dois pontos é maior que o horizonte. A transição se realiza através da formação de bolhas da nova fase (isto é, regiões onde o campo de Higgs é diferente de zero) que se expandem preenchendo, por fim, todo o espaço. Quando algumas dessas bolhas se encontram em um ponto e o valor do campo de Higgs em cada uma delas é diferente pode se formar um sóliton topológico chamado monopolo magnético (Coleman(1)). Isto pode ser compreendido da seguinte maneira. Imagine uma superfície envolvendo o ponto de encontro das bolhas, de raio maior que as dimensões características de um monopolo mas menor que as bolhas. Ela define uma função contínua (se as paredes entre as bolhas não são singulares) de S^2 (pontos da esfera) em G/G_n (vácuos verdadeiros). Se esta função não for trivial, isto é, não puder ser continuamente deformada até uma função constante, ela permanecerá não-trivial, já que a equação de movimento é contínua e, com temperaturas abaixo de T_c, não é vantajoso o campo de Higgs ter um valor fora de G/G_n.

Assim, o campo de Higgs nos pontos da esfera nunca será constante, devendo, portanto, existir uma região no interior da esfera que interpole os valores assumidos na superfície.

São conhecidas soluções analíticas deste tipo no espaço de Minkovski, com a esfera colocada no infinito (Hooft(1) e Polyakov(1)). Para que o campo de Higgs não seja singular, os campos de gauge também devem ser não nulos na vizinhança do monopolo. Das soluções explícitas sabemos que a integral do campo magnético sobre uma superfície que envolve o monopolo magnético sobre uma superfície que envolve o monopolo é não

nula. Daío nome de monopolo magnético.

Abaixo da temperatura crítica, um monopolo só pode ser destruido em um aniquilamento monopolo-anti-monopolo. Em situacões cosmológicas este aniquilamento é desprezível (Preskill(1)). Portanto, os monopolos produzidos na transição de fase cosmológica devem estar presentes no Universo atual. Sua densidade é fácil de ser estimada, já que deve haver aproximadamente um monopolo por bolha de fase assimétrica. Tomando o tamanho de uma bolha como o de um horizonte na época da transição temos:

$$\text{densidade primordial de monopolos} \approx [\text{horizonte(GUT)}]^{-3} \approx 10^{78}/cm_3$$

Usando a conservação de entropia temos que a densidade agora é de:

$$\begin{aligned} densidade\ atual &= densidade\ primordial \frac{a^3(GUT)}{a^3(hoje)} \\ &= densidade\ primordial \frac{s(hoje)}{s(GUT)} \\ &= 10^{-10}/cm^3 \end{aligned}$$

Essa densidade de monopolos poderia ter escapado à deteção em experiências de laboratório mas não passaria desapercebida das observações astronômicas. Isto porque a massa de um monopolo, estimada com sendo a energia da solução clássica é da ordem de M/g^2, onde M é a escala da quebra de simetria e g a constante de acoplamento. Portanto a massa de um monopolo seria da ordem de $\approx 10^{16}\,Gev \approx 10^{-8}\,g.$ e a densidade de energia devida a ela $\rho_M \approx 10^{18}\,/cm^3 \gg \rho_{cr}$, o que contraria as obsevaçõoes. Com uma densidade dessas o Universo não poderia ter durado mais que $\approx$ 10.000 anos.

A Inflação

O modelo inflacionário, proposto por Guth em 1980 (Guth(1)), é uma alteração do modelo padrão nos seus instantes iniciais que parece solucionar os problemas vistos acima. Como o modelo padrão é intocado em instantes bem posteriores à época da grande unificação, os seus principais sucessos são mantidos.

A idéia central da inflação é que os três problemas apresentados deixariam de existir se, em algum período, o Universo passasse por uma fase de enorme expansão mantendo-se a *densidade* da entropia. Essa expansão diluiria a densidade de monopolos, diminuiria a curvatura espacial,e, como o Universo observável antes da expansão seria menor do que o previsto pelo modelo padrão, o problema do horizonte também seria resolvido. A hipótese de não conservação da entropia total é essencial porque, como já vimos, a relação entre o fator de escala e o tempo é determinada pela condição de adiabaticidade.

Segundo o modelo inflacionário esta expansão é uma consequencia do mecanismo de transição de fase da GUT. Vamos ver com algum detalhe como isto aconteca. Define-se $W(\beta, J)$ como:

$$W(\beta,J) = -\frac{1}{\beta}\ln Z(\beta,J) = -\frac{1}{\beta}\ln Tr\ \hat{\rho}_\beta = -\frac{1}{\beta}\ln Tr\ \exp\bigl(-\beta(H+J\phi)\bigr)$$

onde H é o hamiltoniano, $\hat{\rho}_\beta$ a matriz densidade do emsemble canônico e $J\,\phi = \int J\,\phi\, d^3\vec{x}$. Assim:

$$\langle\phi\rangle = Z^{-1}\ln Tr\,\phi\,\hat{\rho}_\beta = \frac{\delta W(\beta,J)}{\delta J} \qquad (xi)$$

Vamos nos restringir a $J(\vec{x}) = cte.$. Como H é invariante por translações e não esperamos quebra espontânea da simetria translacional $\langle\phi\rangle$ deve também ser constante. Eliminando-se a variável J por ϕ através de uma transformada de Legendre:

$$V_{ef}(\phi,\beta) = V^{-1}[W(\beta,J) - J\langle\phi\rangle V]$$

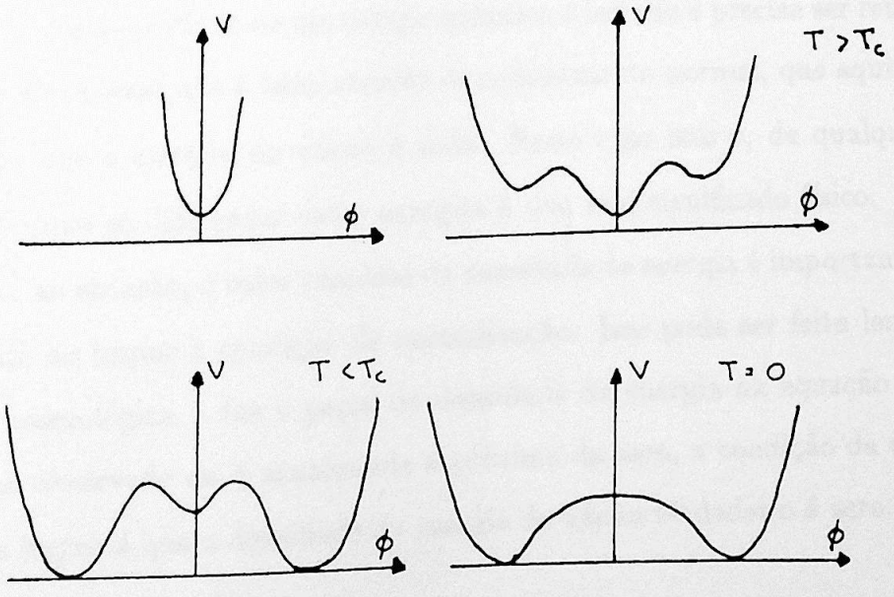
Assim:

$$\frac{\partial V_{ef}}{\partial \phi} = \frac{\partial W}{\partial J}\,\frac{dJ}{d\phi} - J - \phi\frac{dJ}{d\phi} = -J$$

Na ausência de fonte externa J a equação:

$$\frac{\partial V_{ef}}{\partial \phi} = 0$$

determina o valor esperado de ϕ. O potencial efetivo de uma teoria de gauge com simetria quebrada através do mecanismo de Higgs tem o formato mostrado na figura I.



Para $T > T_c$, $\phi = 0$ é o mínimo global de V_{ef}. Para $T < T_c$ os mínimos globais passam a ser os valores $\pm\phi_{min}$, e, consequentemente, o campo ϕ escolhe um destes dois

valores e a simetria (no caso $\phi \rightarrow -\phi$) é quebrada. A variação de ϕ com T é abrupta em $T = T_c$, portanto a transição é de primeira ordem.

O modelo inflacionário assume que inicialmente o Universo estava à uma temperatura $T > T_c$ e portanto $\langle \phi \rangle = 0$, porém, devido ao resfriamento rápido o campo ϕ permaneceu ≈ 0 mesmo após a temperatura ter abaixado para $T < T_c$, preso pela barreira de potencial em torno de $\phi \approx 0$. Este estado, é claro, é metaestável, isto é, flutuações térmicas ou quânticas farão com que, após um certo tempo, ϕ atravesse a barreira de potencial e atinja um dos valores $\pm\phi_{min}$. Esse fenômeno é conhecido por superesfriamento e tem análogos conhecidos na física de mat;eria condensada. Qual a consequencia cosmológica do superesfriamento do campo de Higgs? O tensor momento-energia do estado $\phi = 0$ é dado por:

$$T_{\mu\nu}(\phi = 0) = T_{\mu\nu}(\phi = \pm\phi_{\min}) + V(0)\, g_{\mu\nu},$$

onde $V(O)$ é a *diferença* entre a densidade de energia entre o vácuo falso e verdadeiro. A densidade de energia do vácuo de um campo quântico é infinita e precisa ser renormalizada. No espaço de Minkovski isto é feito através do ordenamento normal, que equivale a impor a condição de que a energia do vácuo é nula. Neste caso isto é, de qualquer maneira, irrelevante, porque só diferenças entre energias é que tem significado físico. Na presença da gravitação, no entanto, o valor absoluto da densidade de energia é importante e devemos tomar cuidado ao impor a condição de normalização. Isso pode ser feito lembrando que a constante cosmológica Λ faz o papel de densidade de energia na equação de Einstein. Como o valor observado de Λ atualmente é próximo de zero, a condição de normalização que devemos impor é que a densidade de energia do vácuo verdadeiro é zero. Isto implica em:

$$\Lambda_B + V(\phi_{\min}) = 0, \qquad \Lambda_B = \text{ cte. cosmológica nua}$$

Assim o estado metaestável $\phi = 0$ terá como tensor momento-energia:

$$T_{\mu\nu}(\phi = 0) = V(0)\, g_{\mu\nu},$$

ou seja, $\rho = V(0)$ e $p = -V(0)$. Esta estranha equação de estado quando colocada nas equações de movimento para $a(t)$ fornecem:

$$a(t) \sim \begin{cases} \cosh Ht & K = 1 \\ \exp Ht & K = 0 \\ \sinh Ht & K = -1 \end{cases}$$

com

$$H = \sqrt{\frac{8\pi}{3} V(0)}$$

Todas essas soluções tendem rapidamente ($\approx 1/H$) para $\sim e^{Ht}$, ou seja, o estado metaestável $\phi = 0$ leva o Universo a uma expansão exponencial, que é a fase inflacionária.

Vamos analisar com mais detalhe como a existência da fase inflacionária pode resolver os problemas discutidos do modelo padrão.

O problema do "flatness" - A expansão inflacionária reduz a curvatura espacial $k\,/\,a^2$ a um valor muito menor que o inicial. Da equação (i) concluimos que isto ajusta a densidade de energia a um valor perto do crítico.

Da equação (viii) temos que se $a(t) \sim e^{Ht}$:

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} \sim e^{-2Ht}$$

Anteriormente argumentamos que na época da grande unificação o valor de $\Omega - 1/\Omega$ deveria ser ajustado para:

$$-10^{-51} < \frac{\Omega - 1}{\Omega} < 10^{-63}$$

para termos um valor de $\Omega - 1/\Omega$ compatível com o de hoje. Porém, se a duraçãao do período inflacionário τ for da ordem de $\approx 60H^{-1}$, este ajuste é feito naturalmente pela inflação:

$$\left(\frac{\Omega - 1}{\Omega}\right)_{\substack{antes\ da \\ inflacao}} = \left(\frac{\Omega - 1}{\Omega}\right)_{\substack{apos\ a \\ inflacao}} \quad e^{2H\tau} \approx e^{120} \begin{cases} 10^{-53} \\ -10^{-51} \end{cases} \approx \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

O Problema do horizonte — A existência de uma fase inflacionária implica que no passado o Universo era bem menor do que supõe o modelo padrão. Vimos que o tamanho do Universo observável em $\approx 10^{78}$ *s.* segundo o modelo padrão era de $\approx 10^{-2}$ cm., enquanto o horizonte era de apenas $\approx 10^{-31}$ cm..Para a solução do problema do horizonte é necessário, portanto, que o Universo observável seja resultado da evolução de uma região $\approx 10^{30}$ vezes menor do que supõe o modelo padrão, ou seja:

$$e^{H\tau} \approx 10^{30} \Longrightarrow \tau \approx 70\frac{1}{H}$$

Abundância de monopolos - A expansão inflacionária dilue a densidade de qualquer grandeza conservada, em especial a densidade de monopolos magnéticos.Uma expansão da ordem de 10^{26} diminue essa densidade em $\approx 10^{-78}$, tornando os monopolos completamente inobserváveis. O número bariônico também é reduzido a uma quantidade desprezível. A assimetria matéria-anti-matéria do Universo atual foi gerada, portanto, após à inflação. Segundo o cenário original da inflação, isto se deu após as bolhas da fase assimétrica se chocarem, liberando a energia contida nas paredes (que é o calor latente da transição) e

reaquecendo o Universo a uma temperatura da ordem de T_c. O número bariônico não é conservado a essas temperaturas e um valor atual de zero pode ter sido gerado.

O período inflacionário pode ser visto como um processo que fixa as condições iniciais para o desenvolvimento do Universo segundo o modelo padrão. Essas condições *independem do conteúdo anterior* do Universo, que sai da inflação com a densidade muito próxima da crítica e a densidade de todas as grandezas conservadas zeradas quaisquer que sejam as condições antes da inflação.

O modêlo inflacionário sofre também das suas dificuldades. A principal delas é a falta de uma saída natural da fase inflacionária. Isto acontece porque as bolhas da fase assimétrica crescem mais lentamente que o espaço, mantendo o Universo permanentemente inflando. De fato, supondo que as paredes das bolhas tenham a velocidade da luz, a coordenada $r(t)$ de uma parede de bolha surgida no instante t_0 com raio $r(t_0)$ satisfaz a equação:

$$a(t)\,\dot{r}(t) = 1, \qquad a(t) \sim e^{Ht}$$

cuja solução é:

$$r(t) = r(t_0) + \frac{1}{H} e^{-Ht_0} - \frac{1}{H} e^{Ht}$$

No limite $t \cdot \rightarrow \infty$, a coordenada da parede tende a um valor finito $r(\infty) = r(t_0) + H^{-1}\, e^{-Ht_0}$. Assim uma única bolha jamais preencheria todo o espaço. A formação de novas bolhas poderia completar o processo, mas as estimativas da taxa de decaimento do falso vácuo mostram que esta taxa é insuficiente para o conjunto de parâmetros que fornecem inflação suficiente.

A Nova Inflação

Para evitar o problema da falta de uma saída natural do período inflacionário, foi proposta (Linde(2) e Albrecht(1)) uma alteração no cenário apresentado acima conhecido por nova inflação.

A nova inflação supõe que a simetria da GUT seja quebrada pelo mecanismo de Coleman-Weinberg (Coleman(2)), que é o mecanismo de Higgs onde, na lagrangeana do bósons escalares não exite o termo de massa com sinal trocado. A quebra de simetria é gerada por flutuações quânticas e portanto só aparece quando olhamos para o potencial efetivo calculado além da aproximação de árvore. Em um loop o potencial efetivo é:

$$V_{ef}{}^{(1)} = V(0) + B\phi^4\left[\ln(\frac{\phi^2}{\sigma^2}) - \frac{1}{2}\right],$$

Repare que ele é bastante plano ($V''_{ef} = V'''_{ef} = 0$) perto de $\phi = 0$. Os efeito de temperatura finita adicionam um termo que, para $\phi \ll \sigma$ é $\approx \phi^2 T^2$. A figura II mostra o potencial efetivo em diversas temperaturas.

Como na inflação original, o campo de Higgs passa pelo estado metaestável $\phi \approx 0$, gerando a expansão exponencial. A barreira de potencial que prende o campo ϕ em $\phi = 0$ é bastante pequena quando $T \ll \sigma$ e flutuações térmicas ou quânticas levam o campo ϕ a atravessá-la. Porém o valor mais provável de ϕ após atravessar a barreira é de $\approx 3\phi_1$, onde ϕ_1 é determinado pela equação:

$$V_{ef}(0,T) = V_{ef}(\phi_1,T)$$

O valor $3\phi_1$ provém de simulações numéricas (Linde(2)). Devido ao formato particular do potencial , $\phi_1 \ll \sigma$ e $V_{ef}(\simeq \phi_1) \simeq V_{ef}(0)$ A partir de $3\phi_1$ o campo ϕ desce o potencial seguindo uma trajetória clássica até chegar em σ. Como o potencial é bastante plano, a queda de ϕ pelo potencial pode ser bastante demorada. Durante a queda, o potencial domina a densidade de energia do Universo, levando à uma fase inflacionária. As estimativas indicam uma expansão de até 10^{3000}. Isto significa que todo o Universo observável (e ainda muito mais) evoluiu de uma única bolha. Isto evita a necessidade das bolhas colidirem. O calor latente da transição é liberado quando o campo ϕ passa a oscilar amortecidamente em torno de σ, ou seja, os bósons de Higgs decaem em outras partículas e reaquecem o Universo.

Crítica ao uso do potencial efetivo no modelo inflacionário

Os argumentos usuais que sustentam o modelo inflacionário são baseados no método do potencial efetivo. Em especial é assumido implicitamente que quando $T > T_c$ o valor do campo de Higgs é próximo de zero em cada ponto do espaço. Entretanto, como observou

Mazenko *et al.* (Mazenko(1)), o mínimo do potencial efetivo determina somente médias espaciais de ϕ. De fato, tomando $J(\vec{x}) = cte.$ na equação (xi) temos que:

$$\begin{aligned} V^{-1}\frac{d}{dJ}W(\beta,J) &= -(VZ\beta)^{-1}\frac{d}{dJ}Tr\,\exp[-\beta(H+J\int\phi\,d^3\vec{x}) \\ &= (VZ)^{-1}\,Tr[\int\phi\,d^3\vec{x}]\exp[-\beta(H+J\int\phi\,d^3\vec{x}] \\ &= V^{-1}\langle\int\phi\,d^3\vec{x}\rangle \equiv \langle\overline{\phi}\rangle, \end{aligned}$$

onde V é o volume espacial que tomamos $V \to \infty$ no final do cálculos. Como V_{ef} é a transformada de Legendre de W que substitui J por $\langle\overline{\phi}\rangle$ chegamos a conclusão que os mínimos de V_{ef} correspondem a valores assumidos pela média espacial de ϕ. O fato de a curvatura de V_{ef} nos pontos de mínimo ser grande não nos garante que o valor de $\phi(\vec{x})$ em cada ponto flutua pouco. Na realidade temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2V_{ef}}{d\phi^2} = -\frac{dJ}{d\phi} = -\left(\frac{d\phi}{dJ}\right)^{-1} &= -\left(\frac{d^2W}{dJ^2}\right)^{-1} \\ &= -\left(-\beta^{-1}\frac{d^2\ln Z}{dJ^2}\right)^{-1} \\ &= \beta\left[\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dJ^2} - \frac{1}{Z^2}\left(\frac{dZ}{dJ}\right)^2\right]^{-1} \end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z}\frac{dZ}{dZ} &= \frac{1}{Z}\frac{a}{dJ}\,Tr\,\exp\left[-\beta(H+\int J\phi\,d^3\vec{x})\right] \\ &= \frac{1}{Z}\,Tr\left[(-\beta\int\phi\,d^3\vec{x})\exp[-\beta(H+\int J\phi\,d^3\vec{x})]\right] \\ &= -\beta\langle\overline{\phi}\rangle, \end{aligned}$$

temos:

$$\frac{d^2V_{ef}}{d\phi^2} = \beta^{-1}\left[\langle\overline{\phi}^2\rangle - \langle\overline{\phi}\rangle^2\right]^{-1}$$

Em um potencial tipo Coleman-Weinberg:

$$\left.\frac{d^2V_{ef}}{d\phi^2}\right|_{\phi=0} = CT^2 , \qquad C = cte.$$

Assim:

$$\langle \overline{\phi}^2 \rangle - \langle \overline{\phi} \rangle^2 = C^{-1}T^{-1}$$

Portanto é a flutuação da média espacial de ϕ que diminui com a temperatura. Isto não significa que a flutuação de $\phi(\vec{x})$ em cada ponto ponto é menor (o campo flutua mais a altas temperaturas) mas que o comprimento de correlação $\approx T^{-1}$ é menor.

Dessa maneira se espera que mesmo com $T > T_c$ as configurações de ϕ mais prováveis sejam aquelas compostas de domínios com $\phi \pm \phi_{min}$. O sistema nunca entra no estado superesfriado, preferindo desde o início os mínimos globais do potencial. A energia fica concentrada nas paredes divisórias dos domínios e não há motivo para se esperar inflação.Embora o estado metaestável exista na termodinâmica do modelo, isto não significa que o resfriamento do Universo desde $T > T_c$ levará o campo ϕ a ele, a menos que se admita como condição inicial um estado homogêneo $\phi \approx 0$. Esta hipótese é claramente um retrocesso em relação à idéia da inflação, que visa descartar a necessidade de um ajuste fino das condições iniciais para que o modelo funcione.

As analogias com sistemas de matéria condensada que são apresentados na referência (Mazenko(1)) como suporte da situação descrita acima têm em comum uma diferença com a situação cosmológica: em nenhum deles o resfriamento é causado pela expansão do espaço. A intenção deste trabalho será investigar o mecanismo da quebra de simetria em um espaço que se expande rapidamente.

O Modêlo

Para analisar a existência ou não de uma fase, inflacionária consideraremos um modelo bastante simplificado do mecanismo de quebra de simetria da GUT. Estudaremos o comportamento de um campo escalar real sujeito a um potencial com o formato característico que leva a quebra espontânea de simetria em uma métrica de Robertson-Walker bidimensional. Essa simplificação merece alguns comentários. A primeira diferença do nosso modelo com modelos mais realistas é que nosso campo escalar não está acoplado a campos de gauge. Supondo não haver correlação entre ϕ e os campos de gauge, o efeito deste acoplamento seria equivalente a um termo adicional $\sim -e^2A^2\phi^2 \sim -e^2\langle A^2\rangle\phi^2 \sim -e^2T^2\phi^2$ no potencial, ou seja, surge um pequeno poço em torno de $\phi = 0$, tanto mais profundo quanto maior a temperatura. Este poço pode alterar a dinâmica da transição de fase apenas se o campo ϕ for de alguma maneira preparado inicialmente em uma configuração $\phi \approx 0$. Assim o sistema entraria no estado metaestável e a transição ocorreria segundo os cenários usuais de inflação. Se o sistema é simplesmente resfriado desde uma temperatura $T > T_c$, a única alteração que este poço pode causar é a formação de alguns domínios com $\phi \approx 0$, além daqueles com $\phi = \pm\sigma$. Esses domínios desapareceriam ao se chocar com domínios da fase assimétrica. Resta ainda a possibilidade de inflação local de um desses domínios $\phi \approx 0$. Como a pressão dentro desses domínios é grande e negativa, a parede recuaria com velocidade próxima da luz. A coordenada da parede $r(t)$ satisfaz a equação:

$$\dot{r}(t) = -a^{-1}(t) = -e^{-Ht}$$

logo:

$$r(t) = r(0) + \frac{1}{H}e^{-Ht} - \frac{1}{H}, \qquad \text{t=0 é o início da inflação.}$$

Para que o raio do domínio $e^{Ht}r(t) = e^{Ht}r(0) + H^{-1} - H-1e^{Ht}$ cresça é necessário que o domínio seja formado com $r(0) > H^{-1}$. Só assim a contração das paredes é contrabalançada pela inflação do domínio não podem ser muito maiores que o comprimento de correlação $\xi \approx T_c^{-1} \approx \sigma^{-1}$ (na realidade o comprimento de correlação diverge em $T = T_c$, mas argumentos causalidade impedem a formação de domínios $\gg T_c^{-1}$). Como $H \approx V(0)^{\frac{1}{2}} \approx \sigma\sqrt{\lambda}$, a razão entre tamanho dos domínios formados e o raio mínimo para que eles não desapareçam é:

$$\frac{\xi}{H^{-1}} = \sigma\sqrt{\lambda} \ll 1$$

Portanto é improvável que um domínio de tamanho suficiente seja formado.

A depressão no potencial efetivo pode ainda ter influência no mecanismo da transição se algum mecanismo levar o campo de Higgs próximo de zero (ou seja, dentro do poço) em uma região maior que ξ. Voltaremos a comentar esta possibilidade depois de termos alguns resultados numéricos.

A hipótese de que o Universo seja descrito por uma métrica de Robertson-Walker e, portanto, homogêneo e isotrópico, mesmo antes da inflação é um defeito das análises usuais do modelo inflacionário. Assumir a homogeneidade e isotropia antes do período inflacionário torna sem sentido a resolução do problema do horizonte que comentamos. Assumiremos o ponto de vista prático de que a métrica de Robertson-Walker é simples de se trabalhar e que a sua substituição por outra métrica qualquer não altera o mecanismo da transição. Isto deve ser verdade pelo menos para aquelas métricas que variam pouco dentro de uma dimensão comparável aos domínios formados. Também por razões práticas nossas análises são feitas em uma dimensão espacial. Como veremos depois, o aumento para três dimensões espaciais aumenta em várias ordens de grandeza o tempo de computação. Quando dizemos que trabalhamos em uma dimensão espacial queremos dizer que consideramos configurações do campo ϕ que independem de duas coordenads espaciais. A

diferença reside no seguinte ponto. A equação de movimento do campo ϕ na métrica de Robertson-Walker é:

$$D_\mu D^\mu + V' = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + V' = \ddot{\phi} + d\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\Delta\phi + V' = 0$$

onde d é o número de dimensões espaciais e Δ o laplaciano da métrica tridimensional. O coeficiente do termo dissipativo depende, portanto, se considerarmos um sistema tridimensional independente de duas coordenadas ou um sistema realmente unidimensional. Veremos depois que esta diferença é essencial na dinâmica do sistema. O fator de escala também será aquele de um Universo tridimensional (por exemplo,se a radiação domina $a(t) \sim \sqrt{t}$).

O nosso problema é analisar a equação de movimento (xii), sujeita a condições iniciais que simulem o equilíbrio térmico à altas temperaturas. Algumas estimativas podem ser feitas analiticamente mas, apesar de só estarmos interessados no comportamento qualitativo da solução (existência ou não da inflação), a análise numérica é necessaria. A análise numérica de (xii) não é trivial. As dificuldades encontradas e suas soluções serão discutidas no capítulo seguinte.

2. OS MÉTODOS NUMÉRICOS

-Estabilidade

O método mais usual para a resolução numérica de equações à derivadas parciais do tipo hiperbólico é o método das diferenças finitas, ou da rêde, que consiste em substituir o espaço-tempo por um retículo e discretizar a equação diferencial sobre ele. A equação resultante é apenas uma equação algébrica, muito mais facil de se resolver. Vamos ilustrar o método com uma versão simplificada da equação (xii), agora com coeficientes constantes:

$$\ddot{\phi} + \gamma\dot{\phi} - \Delta\phi + V'(\phi) = 0 \qquad (xiii)$$

com

$$V(\phi) = -\frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$$

e

$$\gamma = \text{cte.} > 0$$

Chamando de ϕ_X^T o valor de ϕ em um nó da rêde situado na posição ($T\Delta t$, $X\Delta x$), Δt e Δx sendo o espaçamento da rêde, X e T inteiros, a maneira mais simples de discretizar (xiii) é:

(xiv)

$$\frac{1}{\Delta t^2}(\phi_X^{T+1} - 2\phi_X^T + \phi_X^{T-1}) + \frac{\gamma}{2\Delta t}(\phi_X^{T+1} - \phi_X^{T-1})$$
$$-\frac{1}{\Delta x^2}(\phi_{X+1}^T - 2\phi_X^T + \phi_{X-1}^T) - m^2\phi_X^T + \lambda{\phi_X^T}^3 = 0$$

Conhecendo-se $\phi_X^T, \phi_X^{T-1}, \phi_{X+1}^T$ e ϕ_{X-1}^T, obtém-se ϕ_X^{T+1}, sendo assim possível obter-se um novo "passo" a partir dos anteriores. Os dois primeiros passos, necessários para começar o processo são obtidos a partir das condições iniciais:

$$\phi(x,0) = f(x)$$
$$\dot{\phi}(x,0) = g(x)$$

então:

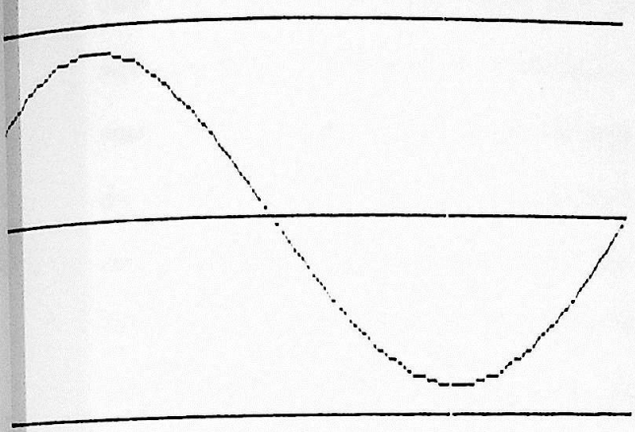
$$\phi_X^0 = f(X\Delta x)$$
$$\phi_X^1 = \phi_X^0 + g(X\Delta x)\Delta t$$

Parece razoável esperar que para Δx e Δt suficientemente pequenos, o método acima fornece uma boa aproximação da solução de (xii). Na figura IV estão alguns passos da solução obtida com o esquema numérico (xiv).

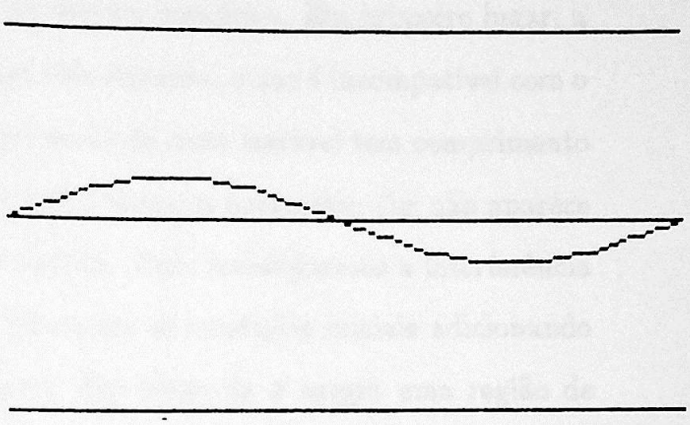
A simulação, que de início parece funcionar bem, é abruptamente destruída pelo aparecimento de regiões onde o campo ϕ oscila muito de um ponto para outro da rêde. Essas oscilações crescem em amplitude rapidamente e fazem o campo divergir.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1475
ℓ. 2
INSTITUTO DE FÍSICA

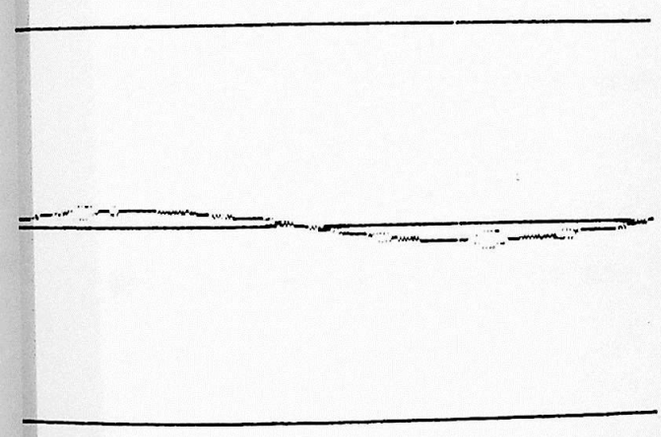
FIGURA IV



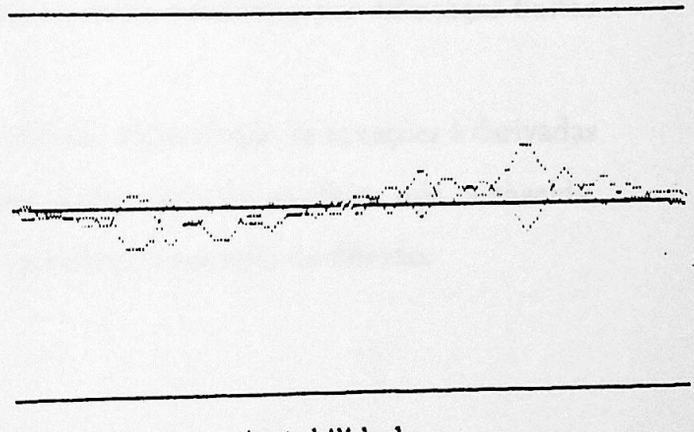
O campo ϕ oscila...



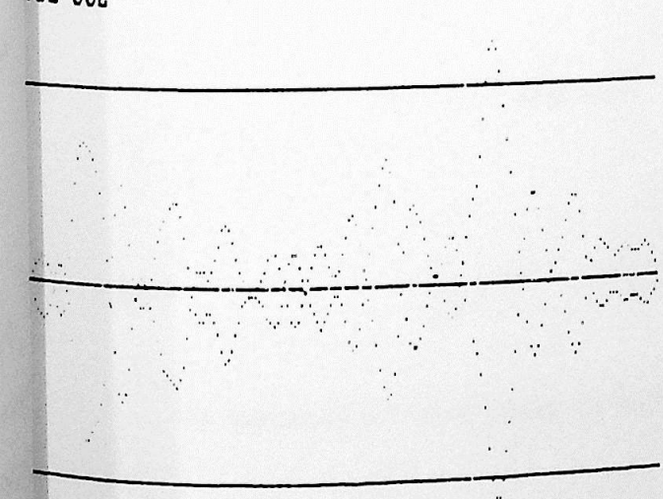
...amortecidamente...



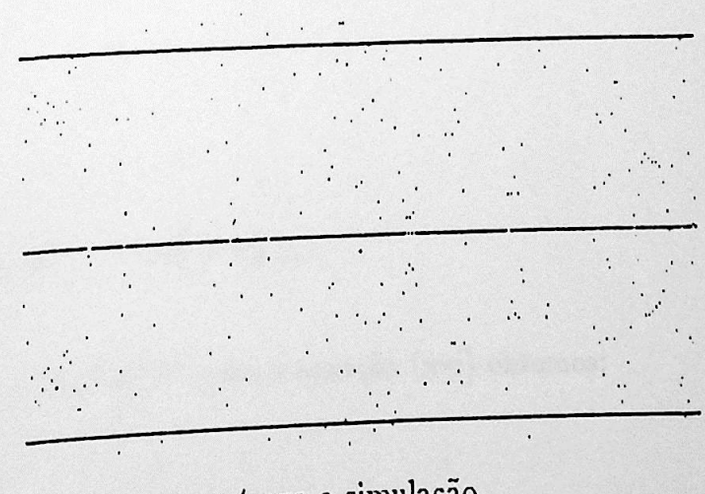
...até que...



...a instabilidade...



...aparece e...



...estraga a simulação

Existem diversas maneiras de se perceber que esta oscilação não é um fenômeno físico descrito na equação (xiii), mas sim um defeito do método numérico. Em primeiro lugar, a equação (xiii) é dissipativa e portanto sua energia é decrescente, o que é incompatível com o resultado numérico. Em segundo lugar, o comprimento de onda instável tem comprimento de onda $\lambda \approx 2\Delta x$ independentemente do valor deΔx Como o parâmetro Δx não aparece em (xii) o problema é claramente de origem numérica. Para investigarmos a interferência de erros de arredondamento nesse fenômeno, alteramos as condições iniciais adicionando um pequeno desvio à ϕ^0_X em um único ponto $\bar{x}$. Em torno de $\bar{x}$ surgiu uma região de instabilidade muito parecida com as instabilidades anteriores. Isto mostra que os erros de arredondamento são pelo menos, uma das fontes de instabilidade numérica. Por fim, sabemos que os mais diversos tipos de equações ao serem resolvidas por diferenças finitas apresentam comportamento semelhante.

A instabilidade numérica é a principal dificuldade da resolução de equações à derivadas parciais da rêde. Em um exemplo mais simples, onde a solução analítica seja conhecida, poderemos entender mais a respeito. Vamos considerar a equação de difusão:

$$\dot{u} = \Delta u \tag{xv}$$

discretizada segundo o esquema:

$$\frac{1}{\Delta t}(u^T_X{}^{+1} - u^T_X) = \frac{1}{\Delta x^2}(u^T_{X+1} - 2u^T_X + u^T_{X-1}) \tag{xvi}$$

Se tentarmos uma solução da forma $u^T_X \sim (\xi_k)^T e^{ik\Delta x}$ para a equação (xvi) obtemos:

$$\xi_k = 1 + 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(\cos k\Delta x - 1)$$

A tentativa análoga $u(x,t) \sim (\alpha_k)^{t/\Delta t}\, e^{ikx}$ na equação contínua fornece:

$$\alpha_k = e^{-k^2 \Delta t}$$

Para que a solução u_X^T aproxime $u(t,x)$ é necessário que cada modo e^{ikx} tenha taxas de crescimento (ou decrescimento) ξ_k e α_k semelhantes. Expandindo em série:

$$\alpha_k = e^{-k^2 \Delta t} = 1 - k^2 \Delta t + \frac{1}{2} k^4 \Delta t^2 - \ldots \text{ contínuo}$$
$$\xi_k = 1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}(\cos k\Delta x - 1) = 1 - k^2 \Delta t + \frac{1}{12} k^4 \Delta x^2 \Delta t - \ldots \text{ discreto}$$

A taxa de crescimento de cada comprimento de onda ξ_k (que são independentes porque a equação é linear) pode ser tomada tão próxima da taxa correspondente α_k quanto se queira. Para isso basta tomar Δx e Δt suficientemente pequenos. Entretanto, fixados Δx e Δt, existem sempre valores de k para os quais ξ_k difere apreciavelmente de α_k. Isto não invalida necessáriamente a simulação. Após decidirmos por um determinado grau de precisão, modos k maiores que um determinado k_0 são desprezíveis e para eles não importa se $\xi_k \neq \alpha_k$, a menos que a amplitude deste modo cresça a ponto de não ser mais desprezível. Evidentemente, a condição que evita isto acontecer é:

$$|\xi_k| < 1$$

No nosso caso $\xi_k = 1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}(\cos k\Delta x - 1)$ a condição acima pode ser escrita como:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2} \qquad (xvii)$$

A condição acima garante a estabilidade do esquema. Repare que o modo que tem o maior valor de $|\xi_k|$ é $k = \pi/\Delta x$, ou seja, aquele cujo comprimento de onda é o dobro do

espaçamento da rêde. Se a condição (xvii) não for satisfeita, esse será o modo que mais irá crescer, criando o padrão de instabilidade que encontramos na nossa simulação. Mesmo que este modo não esteja presente na decomposição de Fourier das condições iniciais e não possa, portanto, ser amplificado, ele pode ser criado na prática através de erros de arredondamento. Toda equação que contenha o termo Δu discretizado como $\Delta x^{-2}(u^T_{X+1} - 2U^T_X + U^T_{X-1})$ contém, na expressão de ξ_k o termo ($\cos k\Delta x - 1$). Como valor extremo deste termo se encontra em $k = \pi/\Delta x$, é provável que, se o esquema for instável, o modo $k = \pi/\Delta x$ seja o mais instável.

O método que utilizamos aqui para a análise da estabilidade é conhecido como método de Von Neumann. Vamos aplicá-lo agora ao nosso esquema original dado pela equação (xiv). Aqui surge uma dificuldade. Como a equação não é linear, a solução de cada modo não é independente dos demais. O que podemos fazer é linearizar o esquema (xiv) em torno de uma solução conhecida e estudarmos a estabilidade do esquema com respeito à pequenas variações em torno desta solução. Vamos tomar, como exemplo, a solução:

$$\phi^T_X = \frac{m}{\sqrt{\lambda}},$$

que é estável no contínuo, já que corresponde a um mínimo do potencial. Somando a ela uma perturbação $\sim \xi^T\, e^{ikX\Delta x}$ e desprezando termos da ordem $O(\xi^2)$ temos, após alguma álgebra:

$$\xi_k = 1 + (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2(\cos k\Delta x - 1) - m^2\Delta t^2 \pm \sqrt{[m^2\Delta t^2 - (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2(\cos k\Delta x - 1)]^2 + \gamma^2\Delta t^2 - 1}$$

O aparecimento de dois valores de ξ para cada k é devido ao fato de que a equação é de segunda ordem no tempo e portanto, a especificação da amplitude e comprimento de onda no instante inicial é insuficiente para determinar seu desenvolvimento futuro. Como a expressão (xix) é muito complicada, vamos nos concentrar no modo mais suspeito de

instabilidade $k = \pi/\Delta x$. É razoável supor que Δx e Δt devam ser bem menores que os parâmetros da equação com a mesma dimensão se quisermos ter resolução suficiente:

$$\Delta t\,,\ \Delta x \ll \gamma^{-1}\,,\ m^{-1}$$

Assim temos que:

$$\left|\xi_{\pi/\Delta x}\right| > 1$$

Isto explica o padrão de instabilidade numérica observado na figura 4.

–Os nossos esquemas numéricos

O problema passa ser agora achar um esquema de discretização da equação (xii) que seja estável. Dois esquemas foram usados nas nossas experiências numéricas. O primeiro deles é uma generalização de um esquema proposto por Strauss e Vazquez (Strauss(1)) para a equação de Klein-Gordon não linear. Com a nossa adaptação o esquema ficou assim:

$$(xx) \qquad \ddot{\phi} \longrightarrow \frac{1}{\Delta t^2}(\phi_X^{T+1} - 2\phi_X^T + \phi_X^{T-1})$$

$$3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} \longrightarrow 3\frac{\dot{a}(T\Delta t)}{2\Delta t a(T\Delta t)}(\phi_X^{T+1} - \phi_X^{T-1})$$

$$-\frac{1}{a^2}\Delta\phi \longrightarrow -\frac{1}{a^2(T\Delta t)}(\phi^T_{X+1} - 2\phi^T_X + \phi^T_{X-1})$$

$$-m^2\phi \longrightarrow -\frac{m^2}{2}(\phi^{T+1}_X + \phi^{T-1}_X)$$

$$\lambda\phi^3 \longrightarrow \frac{\lambda}{4}\frac{(\phi^{T+1^4}_X - \phi^{T-1^4}_X)}{(\phi^{T+1}_X - \phi^{T-1}_X)}$$

O último termo pode ser fatorado como :

$$\lambda(\phi^{T+1^3}_X + \phi^{T+1^2}_X\phi^{T-1}_X + \phi^{T+1}_X\phi^{T-1^2}_X + \phi^{T-1^3}_X)/4$$

Assim, para obtermos ϕ^{T+1}_X a partir de $\phi^T_X, \phi^{T-1}_X, \phi^T_{X+1}$ e ϕ^T_{X-1}, precisamos resolver uma equação cúbica. Isto torna a execução do esquema bem mais lenta do que, por exemplo, o esquema (xiv).

A vantagem do esquema de Strauss e Vasquez é que é possível mostrar a sua estabilidade, no espaço de Minkovski, ou dar um bom argumento em favor da estabilidade, no caso do espaço estar expandindo. Para isso, multiplicamos o esquema (xx) por $(\phi^{T+1}_X - \phi^{T-1}_X)$. Lembrando que:

$$\sum_X F(X) = \sum_X F(X+1),$$

onde $F(X)$ é qualquer função e as condições de contorno são periódicas, chegamos a conclusão de que a versão discretizada da energia E_T dada por:

$$E_T = \sum_X \left(\frac{\phi^{T+1}_X - \phi^T_X}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\phi^{T+1}_{X+1} - \phi^{T+1}_X}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi^T_{X+1} - \phi^T_X}{\Delta x}\right)$$
$$-\frac{m^2}{2}(\phi^{T+1}_X + \phi^T_X) + \frac{\lambda}{4}(\phi^{T+1^4}_X + \phi^{T^4}_X)$$

satisfaz:

$$E_{T+1} = E_T - \frac{3\dot{a}(T\Delta t)}{2\Delta t a(T\Delta t)} \sum_X (\phi_X^{T+1} - \phi_X^{T-1})^2 +$$

$$\left[\frac{1}{a^2(T\Delta t)} - \frac{1}{a^2((T+1)\Delta t)}\right] + \sum_X \left(\frac{\phi_{X+1}^{T+1} - \phi_X^{T+1}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi_{X+1}^{T} - \phi_X^{T}}{\Delta x}\right)$$

No espaço de Minkovski $a(T\Delta t) = \text{cte.}$ e portanto a energia E_T é conservada. Isto limita o valor de $|\phi_X^T|$, mostrando a estabilidade do esquema. No nosso caso, em que o espaço está se expandindo, o termo dissipativo:

$$-\frac{3\dot{a}}{2\Delta t a} \sum_X (\phi_X^{T+1} - \phi_X^T)^2,$$

é sempre negativo, diminuindo E_T a cada passo. No entanto não podemos garantir o sinal do outro termo de (xxi); o que estraga a prova de instabilidade. No entanto, quando $a(t)$ é crescente:

$$\left[\frac{1}{a^2(t\Delta t)} - \frac{1}{a^2((T-1)\Delta t)}\right] \sum_X \left(\frac{\phi_{X+1}^{T+1} - \phi_X^{T+1}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\phi_{X+1}^{T} - \phi_X^{T}}{\Delta x}\right) \approx -2\frac{\dot{a}}{a^3}\Delta t \int (\nabla\phi)^2\, dx \leq 0$$

Enquanto a aproximação acima for razoável, E_T será decrescente e a estabilidade do esquema está garantida. Na prática, quando sinais de instabilidae surgiam, uma diminuição de Δt resolvia o problema.

É importante notar que a estabilidade não garante que a solução numérica tenda à solução real quando Δx e $\Delta t \to 0$. No caso linear um teorema de Lax (Lax(1)) garante a equivalência entre estabilidade e convergência. São conhecidos, no entanto, exemplos de esquemas não-lineares estáveis que não convergem para a solução exata (Richtmeyer(1)).

O esquema (xx) precisa portanto ser testado. Dois testes foram feitos. O primeiro foi simular uma conhecida solução da equação (xii) com $a(t) = 1$ que é o "kink". A outra foi

colocar como condição inicial $\phi(x,o) = \dot{\phi}(x,0) = 0$ e comparar a evolução do campo com o resultado obtido pelo método de Runge-Kutta de segunda ordem; com essas condições iniciais a equação (xii) se transforma numa equação ordinária. O termo dissipativo que não atua no primeiro teste é testado no segundo. Dentro do número de passos que normalmente usamos (≈ 3000), a precisão da solução é bem mais do que qualitativa.

O segundo de nossos esquemas numéricos, e o que mais usamos, é uma adptação do esquema usado por Ablowitz, Kruskal e Ladik (Ablowitz(1))) para a equação de Klein-Gordon não linear. Ela é baseado na descoberta empírica de que o esquema mais simples possível ("leap-frog"):

$$(xxiii) \qquad \frac{1}{\Delta t^2}(\phi_X^{T+1} - 2\phi_X^T + \phi_X^{T-1}) - \frac{1}{\Delta x^2}(\phi_{X+1}^T - 2\phi_X^T + \phi_{X-1}^T) + V'(\phi_X^T) = 0$$

pode ser estabilizado substituindo-se ϕ_X^T por $(\phi_{X+1}^T + \phi_{X-1}^T)/2$ no termo do potencial. Nosso esquema na métrica de Robertson-Walker é o seguinte:

$$\frac{1}{\Delta t^2}(\phi_X^{T+1} - 2\phi_X^T + \phi_X^{T-1}) - \frac{3H(t)}{2\Delta t}(\phi_X^{T+1} - \phi_X^{T-1}) - \frac{1}{a^2\Delta x^2}(\phi_{X+1}^T - 2\phi_X^T + \phi_X^{T-1}) + \\ + V'((\phi_{X+1}^T + \phi_{X-1}^T)/2) = 0$$

Para obter ϕ_X^T a partir de $\phi_X^T, \phi_X^{T-1}, \phi_{X+1}^T$ e ϕ_{X-1}^T é necessário resolver apenas uma equação de primeiro grau, e não de terceiro grau como no primeiro esquema, o que significa um considerável aumento na velocidade de cálculo. Com os coeficientes variáveis, o esquema (xxiv) não é tão estável quanto (xxiii). Uma condução de estabilidade que encontramos empiricamente é:

$$\Delta t < a(t)\Delta x,$$

que é muito semelhante a condição de estabilidade para diversos esquemas de discretização de equações hiperbólicas (Courant(1)).

A grande virtude deste esquema para nós, é a possibilidade de estudarmos potenciais de grau maior que 4 ou mesmo não-polinomiais. No nosso caso é interessante o estudo do potencial de Coleman-Weinberg, que é o potencial assumido pela nova inflação.

Denominaremos a partir de agora o primeiro (eq.(xx)) esquema numérico discutido de esquema SV (Strauss e Vasquez) e o último esquema (eq.(xxiv)) de que falamos de esquema AKL (Ablowitz,Kruskal e Ladik). Temos duas maneiras de trabalhar com o potemcial $\lambda\phi^4$: com o esquema SV ou o AKL. Uma comparação entre os dois pode nos fornecer uma estimativa da precisão do método e uma checagem dos nossos programas. Como exemplo, mostramos abaixo (tab. I) o resultado das simulações feitas com ambos os esquemas com parâmetros $\sigma = 1$, $\lambda = 10^{-3}$, com condições iniciais $\phi(x,0) = 2\,\mathrm{sen}(2x)$ e $\dot{\phi}(x,0) = 0$. O espaçamento da rede Δx é igual à $\pi/400$ e o passo Δt é variável, sendo igual à $t/50$ (tempo de Hubble/100) até o limite $\Delta x\, a(t)$, e, a partir daí, para satisfazer a condição de estabilidade, Δt é igual à $\Delta x\, a(t)$. Observamos um desvio do valor de $\phi(100\Delta x)$ crescente mas sempre desprezível para as nossas análises quantitativas. Os valores da energia potencial e cinética (incluindo também o termo de derivada espacial), calculados com um e outro esquema, estão suficientemente próximos para não haver alteração nas nossas conclusões. Como o esquema AKL é mais rápido que o SV, este último foi usado principalmente quando problemas de instabilidade surgiam com o AKL, já que o esquema SV parece ser bem mais estável. Maiores detralhes serão dados no próximo capítulo.

Tabela I

t	$\Delta\phi$	$\Delta\phi/\phi$
5.10^{-3}	2.10−8	10^{-8}
3.10^{-2}	4.10−7	3.10^{-7}
2.10^{-1}	2.10−6	10^{-6}
3.10^{-1}	10−4	10^{-4}
6.10^{-1}	8.10−4	10^{-3}
10^{-2}	7.10−4	8.10^{-4}

OS RESULTADOS

–Estimativas Analíticas

Antes de chegarmos aos resultados numéricos, vamos obter algumas informações sobre o sistema analiticamente. Devido à dificuldade do problema, nossas estimativas serão apenas de ordem de grandeza e, para serem obtidas, requerem alguma dose de intuição. A comparação com os resultados numéricos será um teste da nossa intuição da dinâmica do sistema.

A equação de movimento (aproximação de árvore) de um campo escalar em uma métrica de Robetson-Walker em d dimensões espaciais é:

$$\ddot{\phi} + d\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\Delta\phi + c\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)\phi + V'(\phi) = 0 \qquad (xxv)$$

onde c é nulo quando não há acoplamento conforme e $((n-1)/(n-1))/4$ quando existe

acoplamento conforme com a gravitação. Mudando a variável t para o tempo conforme η definido por $ad\eta = dt$ temos:

$$\ddot{\phi} + (d-1) - \Delta\phi + c\left(\frac{\ddot{a}}{a} + k\right) + a^2 V'(\phi) = 0 \qquad (xxvi)$$

onde $'$ significa derivação em relação à η. Em $1+1$ dimensões isto é suficiente para estabelecer a correspondência com o espaço de Minkovski. Em $3+1$ dimensões é necessária ainda a substituição $\phi = a^{-1} f$ que fornece:

$$f'' - \Delta f + kf + a^3 V'(a^{-1} f) = 0 \qquad \text{c/acopl. conforme} \qquad (xxviia)$$

$$f'' - \Delta f + kf + \left(\frac{\ddot{a}}{a} + k\right) f + a^3 V'(a^{-1} f) = 0 \qquad \text{s/ acopl. conforme} \qquad (xxviib)$$

Vamos nos restringir po enquanto ao caso $k = 0, \rho = 3p$ ($R = 0$). Nesse caso a equação de movimento, com ou sem acoplamento conforme é:

$$f'' - \Delta f + a^3 V'(a^{-1} f) = 0 \qquad (xxviii)$$

Com $V(\phi) = \lambda\phi^2(\phi^2/2 - \sigma^2)/2$ temos:

$$f'' - \Delta f + \lambda f(f^2 - \lambda a^2 \sigma^2) = 0 \qquad (xxix)$$

Nos estágios imediatamente anteriores à inflação $f \ll \sigma$ e podemos desprezar o termo λf^3. A equação (v) de torna linear e é interessante olhar para a sua transformada de Fourier:

$$(xxx) \qquad f_q'' + (q^2 - \lambda a^2 \sigma^2) f_q = 0$$

O termo do potencial retido é justamente aquele que evita o acesso de ϕ à configuração $\phi \approx 0$.

Enquanto $q^2 > \lambda a^2 \sigma^2$ a solução da equação (xxx) deve oscilar com uma frequência $\approx (q^2 - \lambda a^2 \sigma^2)^{\frac{1}{2}}$. A expansão do Universo aumenta o comprimento de onda de cada modo, diminue sua energia cinética e faz com que o campo $\phi = a^{-1} f$ se concentre em $\phi \approx 0$. Todos estes efeitos favorecem a inflação. Repare que o campo ϕ, devido à relação $\phi = a^{-1} f$, pode se concentrar em $\phi \approx 0$ apesar da tendência oposta gerada pelo potencial. Este efeito não existe em $1+1$ dimensões onde o próprio ϕ satisfaz uma equação análoga a que f satisfaz (compare (xxvi) com (xxx)). A diminuição da amplitude de oscilação de ϕ proporcionalmente à a^{-1} é consequência, no equilíbrio térmico e com ϕ livre, da relação $T \sim a^{-1}$. De fato:

$$a^{-4} \sim T^4 \sim \rho \sim q^2 \langle \phi^2 \rangle$$

A relação $\langle \phi^2 \rangle \sim a^{-2}$, no entanto, pode ser válida mesmo que ϕ não seja livre, bastando para isso que a amplitude de oscilação seja aproximadamente constante. Para que isto aconteça é necessário que a expansão do Universo seja bem mais rápida que a frequência de oscilação de f. Caso contrário (expansão quasi-estática) a conservação do invariante adiabático (Landau(1)):

$$\frac{E}{\omega} = \langle f^2 \rangle \omega = cte.,$$

implicaria que $\langle f^2 \rangle \to \infty$ quando $\omega \to 0$.

Quando $q^2 < \lambda\sigma^2 a^2$ o modo q se torna instável, para de oscilar e cresce até a aproximação $f \ll \sigma$ deixar de ser válida. O termo λf^3 evita que f cresça indefinidamente e os domínios com $\phi \pm \sigma$ são formados, cessando a possibilidade de inflação.

Suporemos que a uma temperatura inicial $T_0 > T_c$ o modo predominante seja $q \approx T_0$, já que o volume no espaço de fase ocupado por modos com $|\vec{q}| = q$ cresce com q^2 e os modos com $q > T_0$ são suprimidos exponencialmente da distribuição de Bose (graus de liberdade "congelados").

O instante $\bar{t}$ em que este modo se torna instável é dado por:

$$\bar{t} = t_0 \frac{q^2}{\sigma^2\lambda} = \frac{t_0 T_0^2}{\sigma^2\lambda} = \frac{1}{4}\left(\frac{45}{\pi^3 N}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma^{-2}\lambda^{-1},$$

onde usamos a relação (vii).Para que haja inflação é preciso que $\phi \approx 0$ e $V(0) \gg \rho$, ou seja:

$(xxxia)$ $$\langle \phi^2 \rangle_0^{\frac{1}{2}} \frac{a(t_0)}{a(\bar{t})} = T_0 \sqrt{\frac{t_0}{\bar{t}}} \ll \sigma$$

$(xxxib)$ $$\rho = \frac{3}{32\pi\bar{t}^2} \ll \frac{\sigma^4\lambda}{4}$$

A condição (xxxi a) implica em:

$(xxxii)$ $$\lambda \ll 1$$

e a condição (xxxi b) em:

$$\lambda \ll \frac{15}{2\pi^2} N^{-1} \approx N^{-1}$$

Os modos, depois de se tornarem instáveis demoram um certo tempo τ para crescerem em amplitude e formarem domínios. Este intervalo τ pode ser grosseiramente estimado a partir da equação (xxx) como sendo:

$$\tau \approx \sigma^{-1}\lambda^{-\frac{1}{4}}$$

Se o instante em que um determinado modo se torna instável é suficientemente tardio para que sua amplitude seja bastante reduzida (condição (xxxii)) e para que o modo tenha tido tempo de realizar ao menos uma oscilação, os domínios só serão formados após $\approx \tau$. Se $\tau \gg \bar{t}$ as condições (xxxii) devem ser substituidas por:

$$\sigma^2 \gg \frac{3}{8\pi} \approx 10^{-1}$$

A relação $\bar{t} > \tau$ implica em:

(xxxiii) $$\lambda < \frac{45}{16\pi^3} N^{-1}\sigma^{-2} \approx 10^{-1} N^{-1}\sigma^{-2}$$

Em resumo, para que haja inflação devemos ter:

$$\lambda \ll 10^{-1} N^{-1}\sigma^{-2}$$

e

$$\lambda \ll N^{-1}$$

e se $\lambda > 10^{-1}N^{-1}\sigma^{-2}$ e houver tempo do modo oscilar antes de $\bar{t}$ basta que:

$$\sigma \gg 10^{-1}$$

Com um potencial tipo Coleman-Weinberg, que é bem plano em $\phi \approx 0$, as forças formadoras de domínios são muito menores quando o campo se concentra na região $|\phi| \leq \sigma/2$ e a inflação é favorecida. As restrições sobre os parâmetros devem ser menos restritivas do que para o potencial $\lambda\phi^4$.

-Os Resultados Numéricos

Dois tipos de condições iniciais foram usadas nas nossas simulações. A primeira delas, semelhante a aquela considerada por Albrecht *et al.* (Albrecht(2)), é a seguinte:

$$\phi(x,0) = T_0 \, sen(T_0 x)$$
$$\dot{\phi}(x,0) = 0,$$

com $T_0 > T_c$. A motivação para uma condição inicial deste tipo foi explicada quando expusemos as nossas estimativas analíticas. Como $T_c \approx \sigma$, usamos $T_0 = 2\sigma$ na maioria das nossas simulações.

No outro tipo de condições iniciais, o campo ϕ tem um valor constante igual a um valor aleatóriamente escolhido no intervalo $[-T_0 , T_0]$ em regiões de comprimento $\sim T_0^{-1}$, que é o comprimento de correlação à temperatura T_0. Os valores escolhidos entre duas regiões adjacentes não são relacionados, o que causa uma discontinuidade em ϕ. Essa discontinuidade é uma fonte potencial de instabilidades numéricas. As velocidades também são tomadas como nulas no instante inicial.

Ambas as condições iniciais pretendem imitar uma configuração "típica" do campo de Higgs em equilíbrio térmico a temperatura T_0.

Evidentemente não sabemos nada a respeito do estado do campo ϕ antes da inflação e, portanto, nossas condições iniciais devem ser vistas apenas como uma entre muitas outras possibilidades. De qualquer modo, o equilíbrio térmico é o que tem máxima probabilidade (isto se a expansão rápida do Universo não afastar excessivamente o sistema do equilíbrio térmico).

Os parâmetros independentes do modêlo são: N (o número de graus de liberdade das partículas em equilíbrio), σ, λ, e T_0. O instante inicial t_0 é determinado a partir de N e T_0. A temperatura inicial foi tomada usualmente como $T_0 = 2\sigma$ em ambos os tipos de condições iniciais.

O espaçamento da rede é igual à $\pi/400\sigma$ e $1/40\sigma$, respectivamente com a condição inicial senoidal e aleatória. O número de pontos da rêde (espacial) é de 400, o que comporta um comprimento de onda com a primeira e 20 regiões de ϕ constante com a segunda condição inicial. As condições de contorno espaciais são periódicas.

O passo Δt é variável dentro de uma mesma simulação. Isto se deve ao fato que $a(t) = \sqrt{t/t_0}$ comparece nas equações de movimento e é razoável esperar que, para não termos um prejuizo importante na precisão, devemos escolher um Δt pequeno em relação ao período em que $a(t)$ varia apreciavelmente. Este período, porém, aumenta com o aumento de t e, para não termos um aumento exagerado no tempo de computação devemos aumentar Δt. Optamos por um Δt igual à:

$$\Delta t = \frac{t_H}{100} = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^{-1} /100 = \frac{t}{50}$$

Entretanto, como $\Delta t \sim t$, haverá um instante em que $\Delta t > a(t)\,\Delta x$, o que contraria nosso critério de estabilidade. Por isso, a partir deste instante usamos o passo Δt como $a(t)\,\Delta x$. Note que com $\Delta t \sim t$, o número de passos para que t aumente em uma ordem de grandeza é fixo (≈ 70), mas quando $\Delta t \sim a(t) \sim \sqrt{t}$ este número cresce com $\sqrt{t}$.

Nosso programa calcula o valor de $\phi(x, t + \Delta t)$ a partir de $\phi(x,t)$ e de $\phi(x, t - \Delta t)$ segundo um dos esquemas numéricos discutidos no capítulo anterior e armazena, a cada 10 ou 20 passos o potencial, a soma da energia cinética com a energia de derivada espacial, a densidade de energia do Universo (que causa a expansão a que ϕ esta sujeito) e $\phi(x,t)$. Por uma questão prática de economia de espaço em disco, o valor de ϕ é aproximado dentro de uma precisão que permite o armazenamento do valor de ϕ em cada ponto da rede e em cada instante em um byte. Este arredondamento é feito apenas na hora da gravação em disco do resultado. O valor de ϕ usado no cálculo dos passos seguintes não sofre nenhuma aproximação. Como a análise dos dados gravados é puramente qualitativa, este arredondamento não nos causa nenhum problema.

σ	λ_{max}		analítico
	$\lambda\phi^4$	Coleman-Weinberg	
1	10^{-5}	10^{-4}	10^{-4}
10^{-1}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-3}
10^{-2}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-3}

A escolha dos parâmetros a serem testados foi guiada mais pela tentativa de testar nossas estimativas analíticas e por limitações práticas do que pelo realismo. Não testamos, por exemplo, o valor $\sigma \approx 10^{-5}$, que corresponde a escala de energia das GUT's. Para testar a existencia da inflação devemos chegar a valores de t tais que :

$$\rho(t) = \frac{3}{32\pi t^2} \ll V(0) = \frac{\sigma^4}{\lambda},$$

ou seja:

$$t > \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sigma^{-2}\,\lambda^{-\frac{1}{2}}.$$

Isto dificulta a simulação com valores pequenos de σ. O menor valor de σ que testamos foi $\sigma = 10^{-2}$. O valor de λ, porém, pode ser escolhido com mais liberdade.

Na maior parte das vezes usamos o esquema AKL. Para $\sigma = 10^{-2}$ e condições iniciais aleatórias, entretanto, usamos o esquema SV porque um sinal de instabilidade apareceu no início da simulação com o esquema AKL. Isto porque a discontinuidade deste tipo de condição inicial causa uma alta amplitude inicial para o modo $q = 2\pi/\Delta x$, que é justamente o modo com maior chance de ser instável. Após um certo t, mesmo este modo se torna estável, porém sua amplitude já cresceu bastante e o campo ϕ oscila bastante de um ponto a outro da rêde.

Na tabela V estão sumarizados os resultados da simulação com $N = 10^2$ e condições iniciais senoidais.

A única discordânia importante com os estimativas analíticas é a não existencia de inflação para $\sigma = 1$ e $\lambda = 1, 10^{-1}$ e 10^{-2}.

Para esses valores o modo $q = T_0$ que estamos considerando é instável desde muito cedo. O que poderia causar inflação seria a demora para o campo ϕ sair de $\phi \approx 0$ e chegar em $\sigma \approx 0$ formando domínios (para esses valores $\tau > \bar{t}$).Como o valor de $V(0)$ é alto não é necessário que o estado metaestável dure muito até que $\rho(t) \ll V(0)$. Com as nossas condiÇões iniciais, emtretanto, por volta de $\bar{t}$ o campo esta próximo de $\pm\sigma$ e não há demora na formação de domínios (figura V).

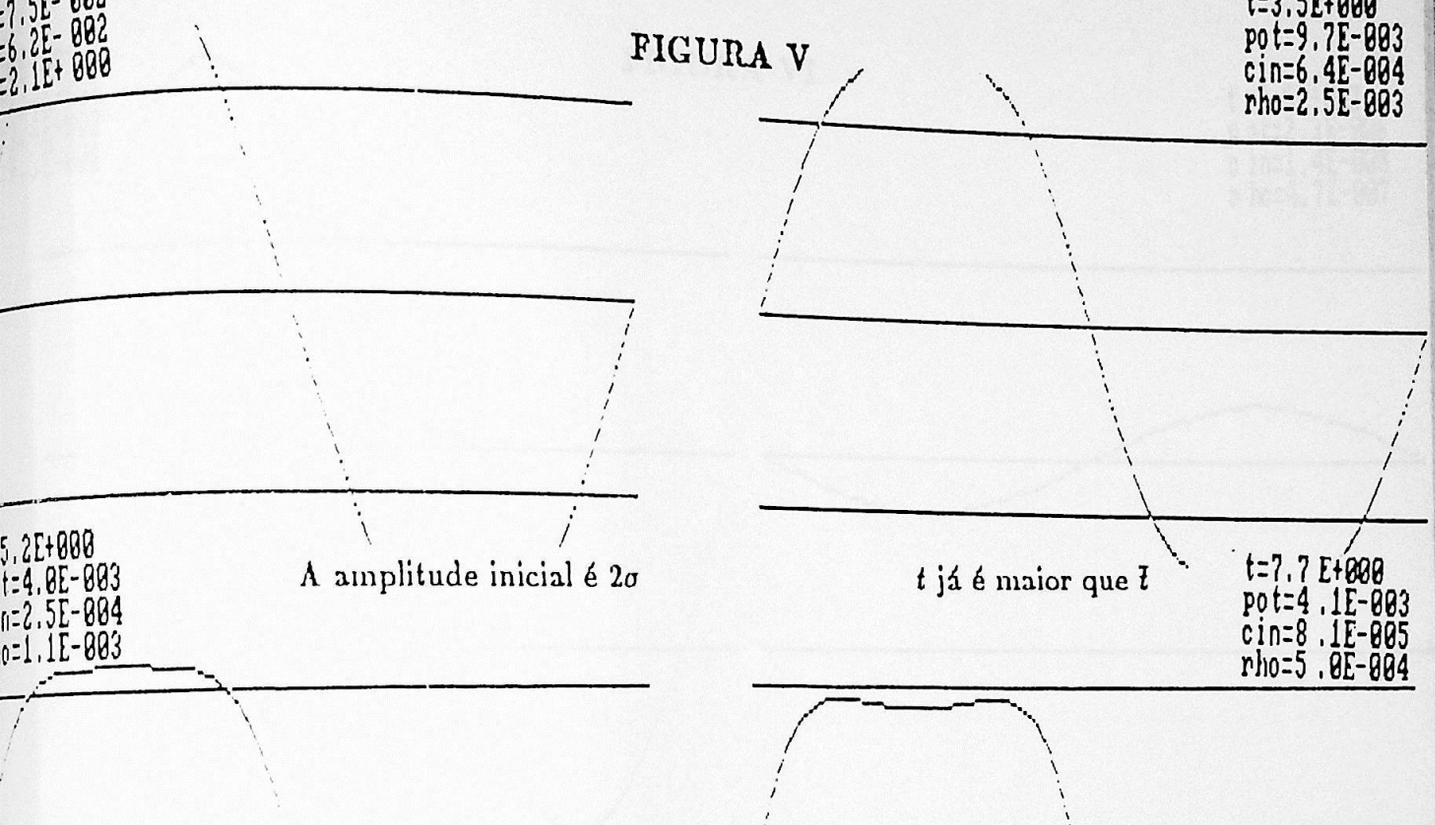
Uma concordância bastante importante entre os resultados numéricos e analíticos á o instante em que termina a inflação e se inicia a formação de domínios, que é o ponto fundamental da nossa estimativa analítica.

Conforme a seção anterior, o instante da formação de domínios é aquele em que o modo predominante se torna instável, ou seja, $\bar{t}$ (equação (xxxi)).

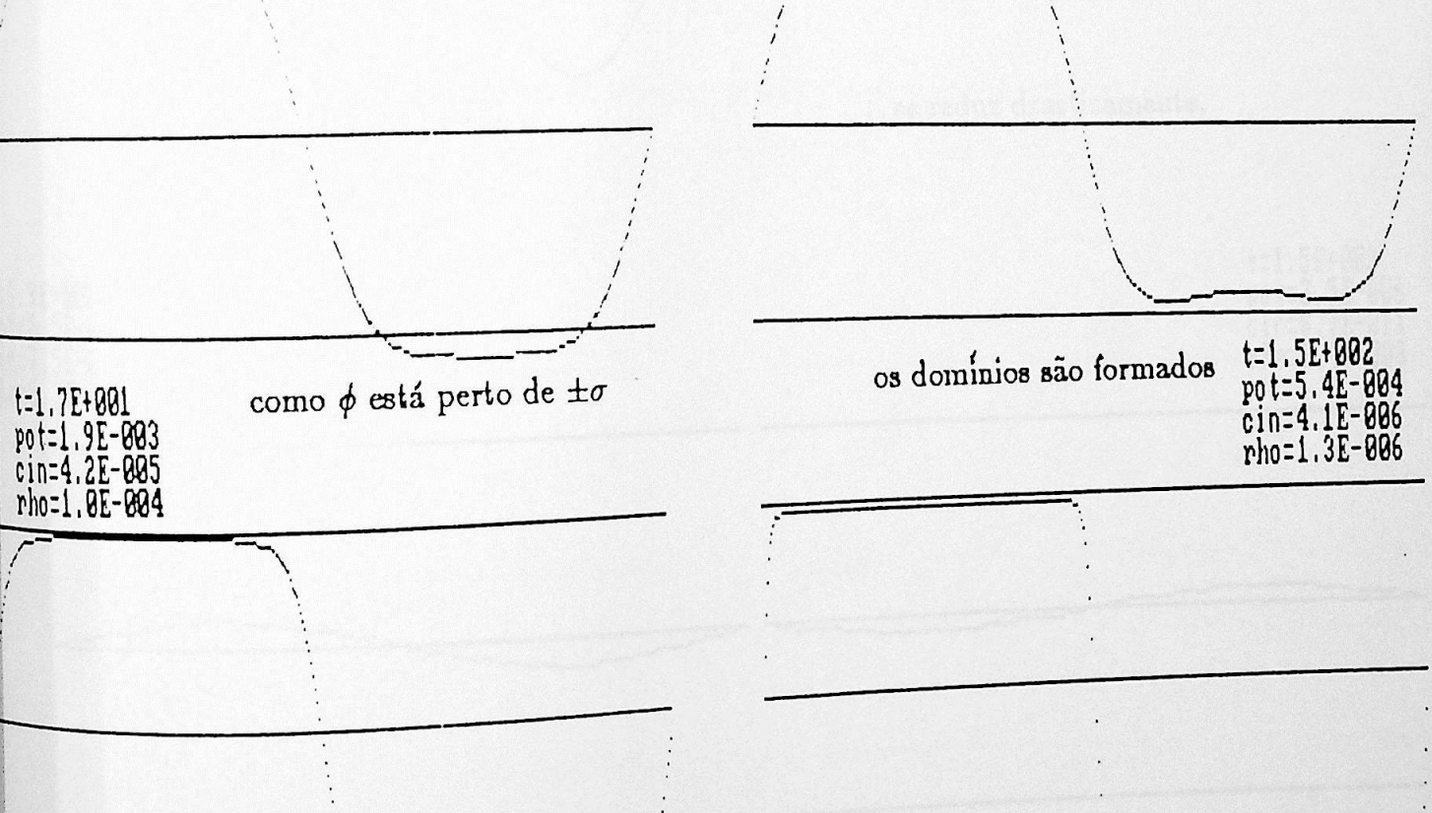
A relação $\phi \sim a^{-1} \sim t^{-\frac{1}{2}}$, entretanto, não é tão bem satisfeita e é o ponto em que nossas estimativas se tornam imprecisas. Isto ocorre provavelmente porque o "monte" do potencial em $\phi \approx 0$ exerce uma influencia que, se não é decisiva no início, levando à formação imediata de domínios, é suficiente para o alargamento da amplitude de oscilação de ϕ. Na figura VI mostramos alguns passos da simulção com os parâmetros $\sigma = 1$, $\lambda = 10^{-5}$ e potencial $\lambda\phi^4$ com condição inicial do tipo senoidal. Podemos ver o acúmulo de ϕ em torno de ≈ 0 e a consequente inflação. O instante de início de formação dos domínios ($\bar{t} = 3.10^3$) também é claro. A diminuição da amplitude de oscilação, entretanto, não obedece a relação $\phi \sim a^{-1} \sim t^{-\frac{1}{2}}$. Se esta relação fosse estritamente obedecida a inflação existiria para valores de λ maiores.

Uma diferença importante entre o resultado das simulações feitas com os dois potenciais foi que, com o potencial de Coleman-Weinberg o período inflacionário não tinha fim. Como este potencial é muito plano na origem, as forças formadoras de domínios decrescem rapidamente com a diminuição da amplitude de oscilação em torno de $\phi \approx 0$ e são, assim,

FIGURA V

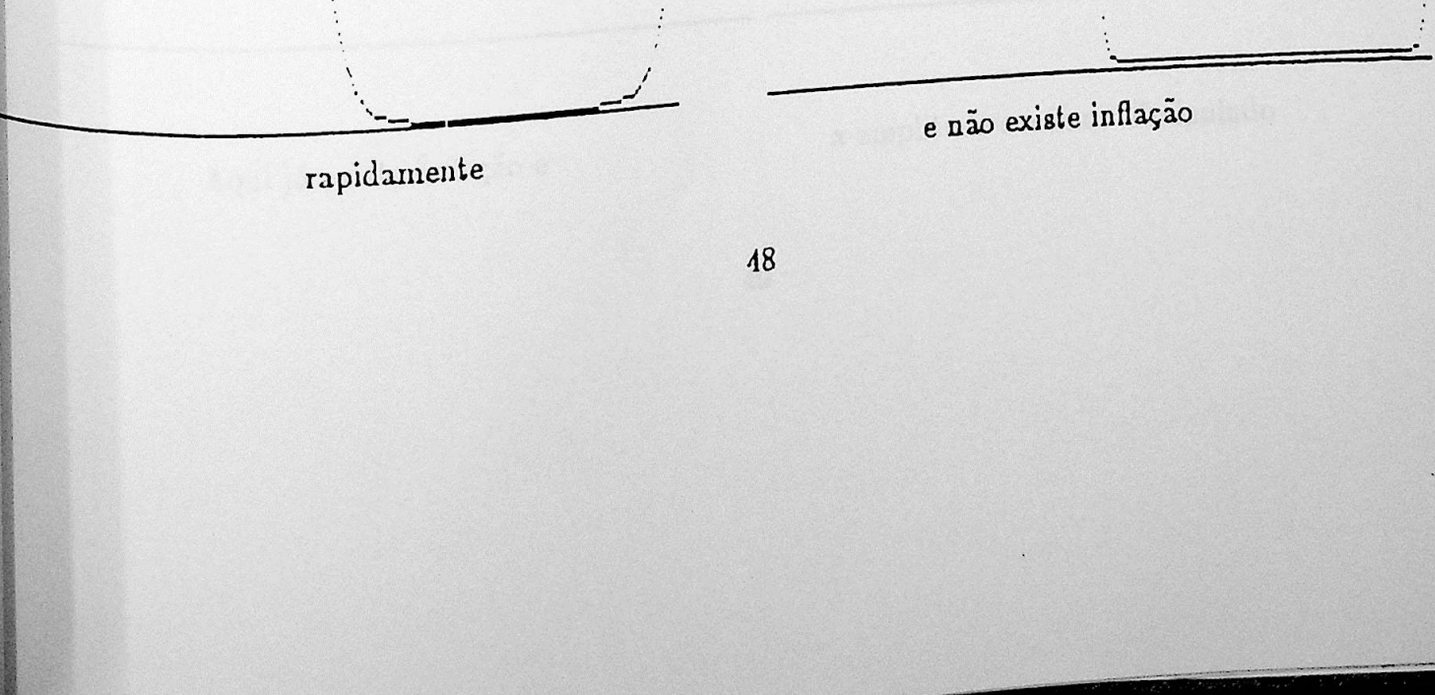


A amplitude inicial é 2σ



t já é maior que $\bar{t}$

como ϕ está perto de $\pm\sigma$

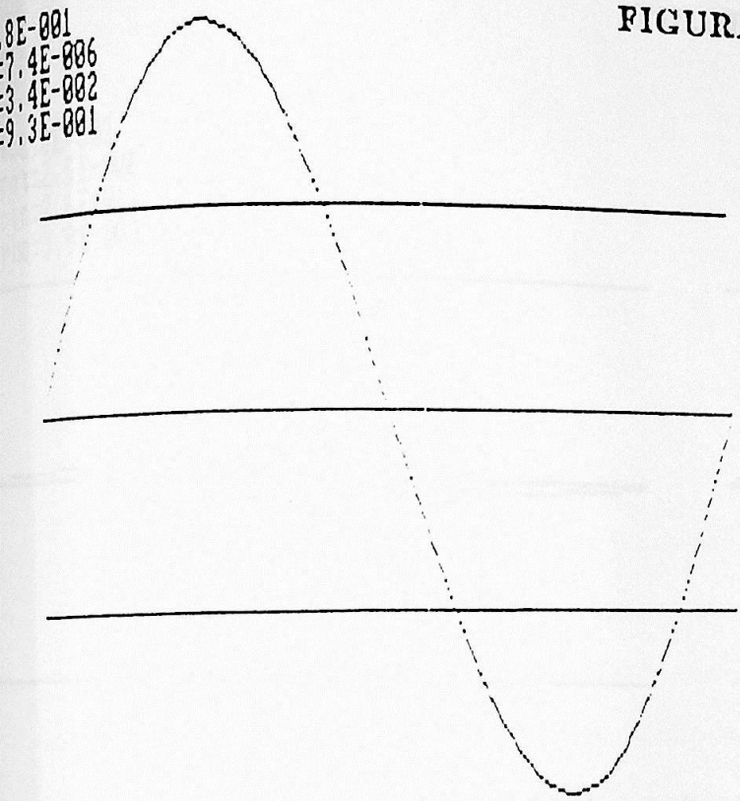


os domínios são formados

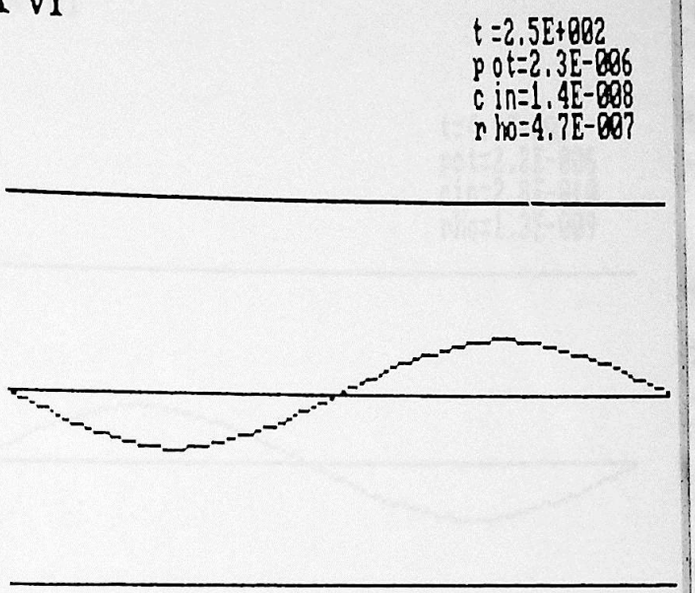
rapidamente

e não existe inflação

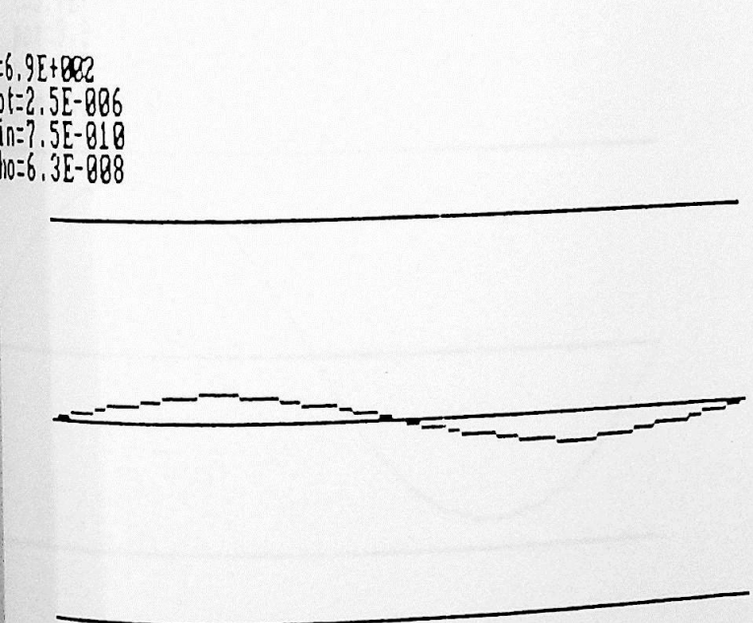
FIGURA VI



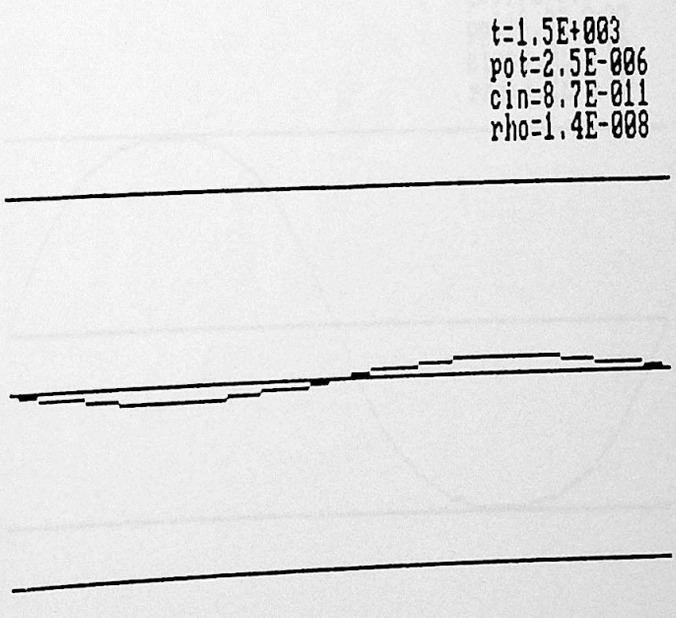
A amplitude inicial...



...se reduz drasticamente.

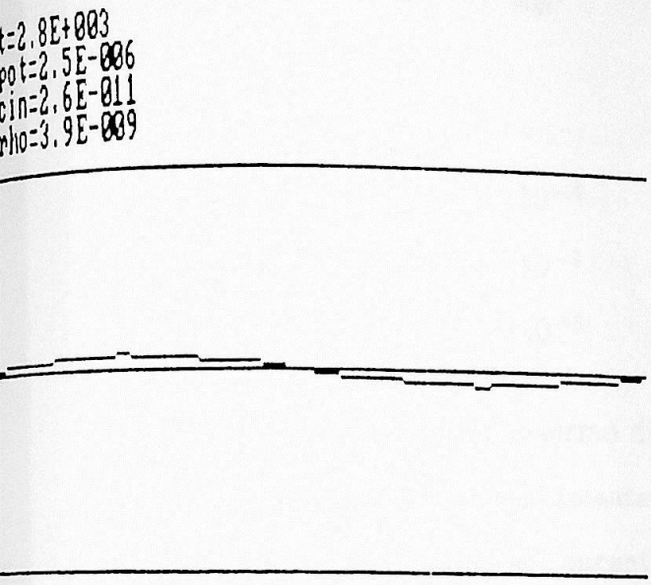


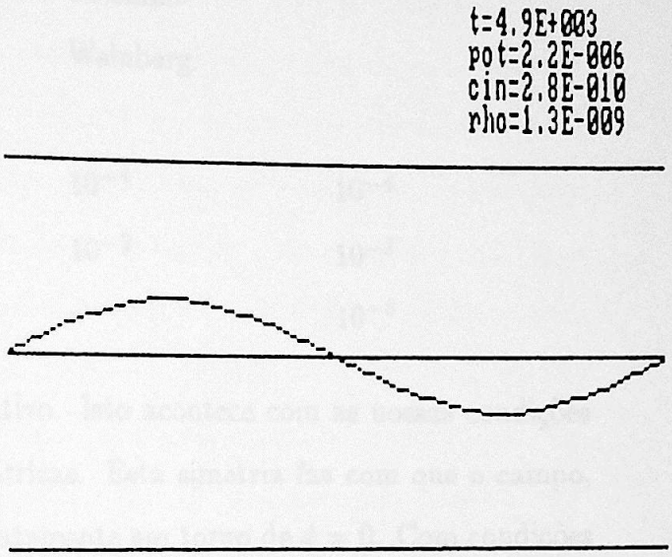
Aqui já existe inflação e



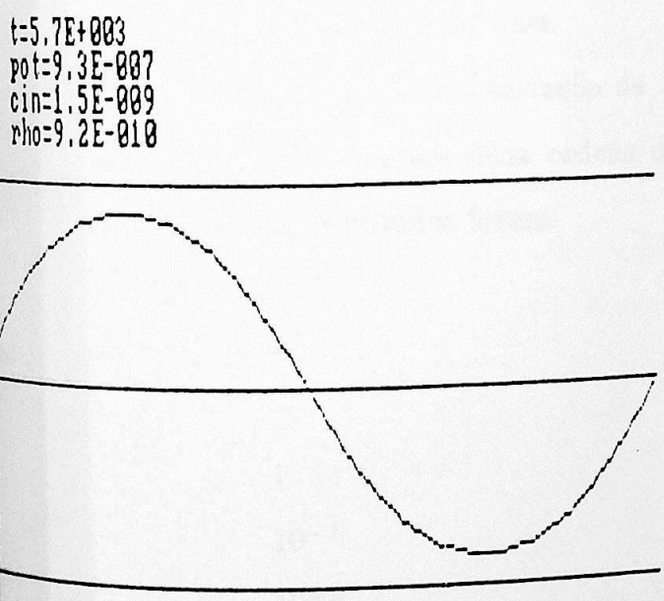
a amplitude continua diminuindo

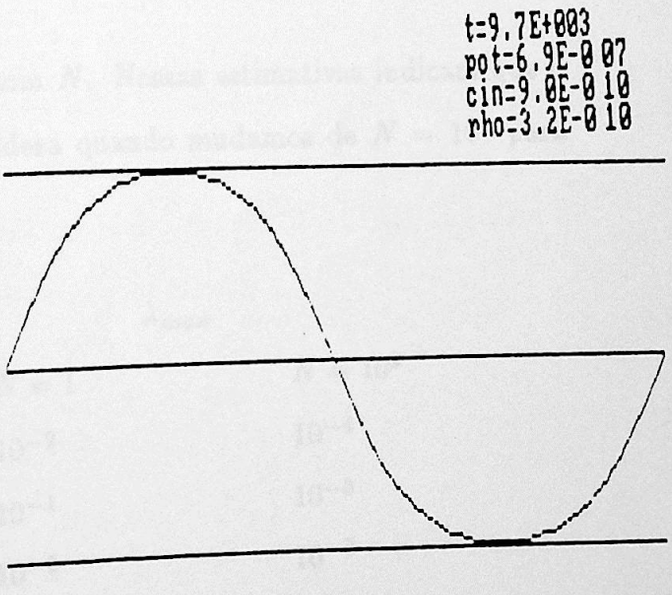
FIGURA VI





no instante $t = 3.10^3$ o modo se torna instável começa a crescer





até a formação ...

de domínios.

σ	λ_{max}		analítico
	$\lambda\phi^4$	Coleman-Weinberg	
1	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}
10^{-1}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-3}
10^{-2}	10^{-3}	—	10^{-3}

insuficientes para sobrepujar o termo dissipativo. Isto acontece com as nossas condições iniciais senoidais que são perfeitamente simétricas. Esta simetria faz com que o campo, com sua amplitude reduzida, se concentre exatamente em torno de $\phi = 0$. Com condições iniciais mais realistas haveria algum desvio dessa posição que faria o campo ϕ rolar uniformemente em todo o espaço em direção ao mínimo do potencial mais próximo, pondo fim a inflação. Comentaremos mais este ponto quando discutirmos os resultados obtidos com condições iniciais aleatórias.

Estudamos também a variação de λ_{max} com N. Nossas estimativas indicam que o valor de λ_{max} cresce em duas ordens de grandeza quando mudamos de $N = 10^2$ para $N = 1$. Nossos resultados foram:

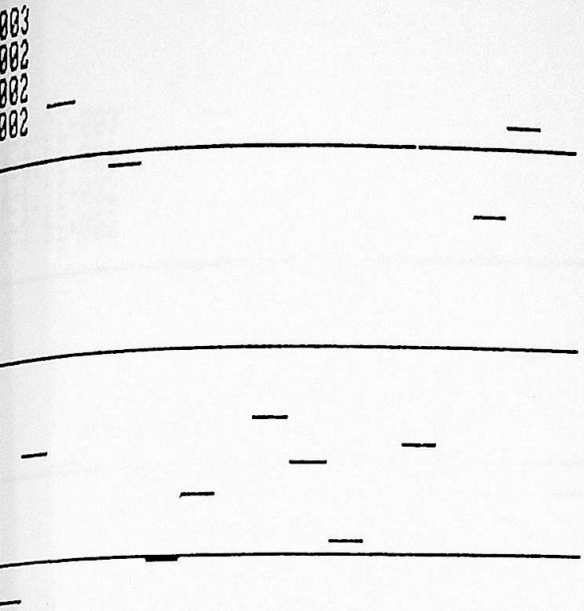
σ	λ_{max}	
	$N = 1$	$N = 10^2$
1	10^{-2}	10^{-4}
10^{-1}	10^{-1}	10^{-3}
10^{-2}	10^{-2}	10^{-3}

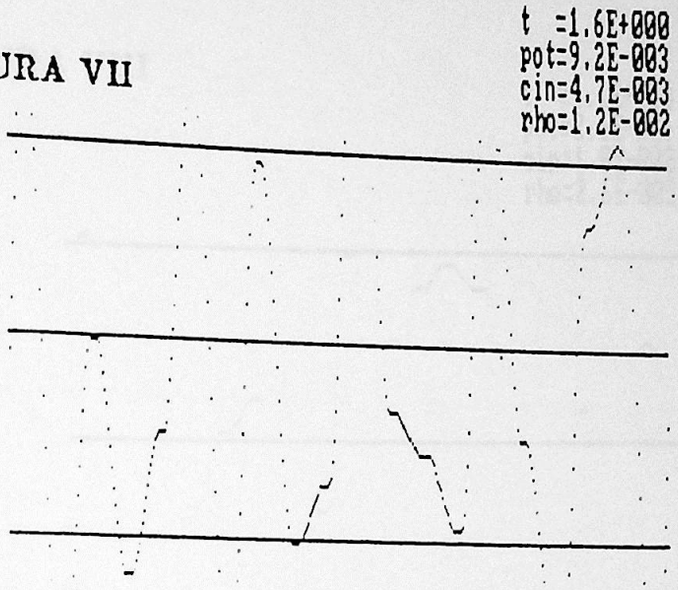
Com condições iniciais aleatórias os resultados foram muito semelhantes aos anteriores.

Com o valor $\sigma = 10^{-2}$ o esquema AKL é instável. Por este motivo tivemos de usar o esquema SV, que só pode ser usado com o potencial $\lambda\phi^4$.

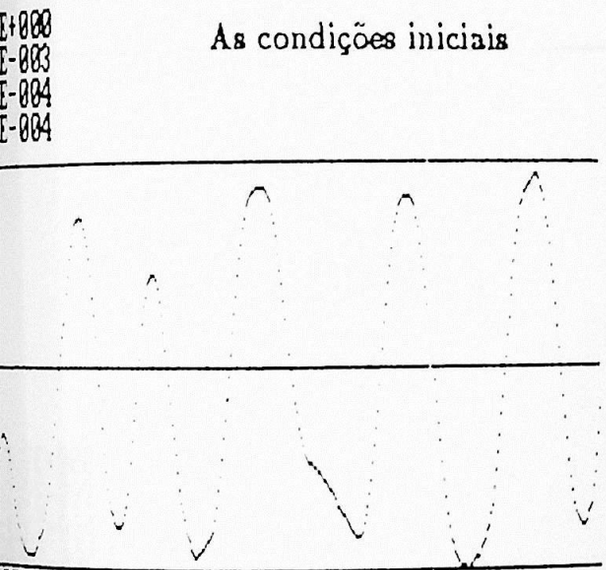
A semelhança entre os resultados obtidos com os dois tipos de condições iniciais não é surpreendente já que o modo predominante nas condições iniciais aleatórias é o modo $q = T_0$ que é o modo presente também nas condições senoidais. Entretanto, o instante em que se inicia a formação de domínios não é igual. Isso se deve ao fato de que neste caso o modo predominante na formação de domínios é o modo zero e o tempo que ele leva para destruir o estado metaestável depende muito do desvio de ϕ da posição $\phi = 0$. Esse desvio, por sua vez, depende das condições iniciais assumidas. Como já comentamos, com as condições iniciais senoidais, em que o valor da média espacial de ϕ era zero, ele não existia e a formação dos domínios seguia de perto as nossas estimativas analíticas. Em alguns casos, o azar na escolha dos valores aleatórios para ϕ fazia com que, após o campo se homogeneizar por todo espaço, seu valor fosse bastante distinto de zero, abreviando ou impossibilitando a inflação. Nestes casos uma outra escolha de valores para a condição inicial era feita até definirmos se havia ou não inflação. Um exemplo disso é mostrado para os valores $\sigma = 1$ e $\lambda = 10^{-6}$. O valor inicial da média espacial de ϕ é $\approx \sigma/3$. Quando ϕ se torna aproximadamente constante, seu valor é quase que insuficiente para gerar inflação e causa uma formação de domínios relativamente rápida (figura VIII). A diferença no instante de formação dos domínios não foi suficiente para mudar a ordem de grandeza do maior valor de λ para o qual existe inflação (o valor da tabela se refere à escolha mais favorável dos valores aleatórios das condições iniciais).

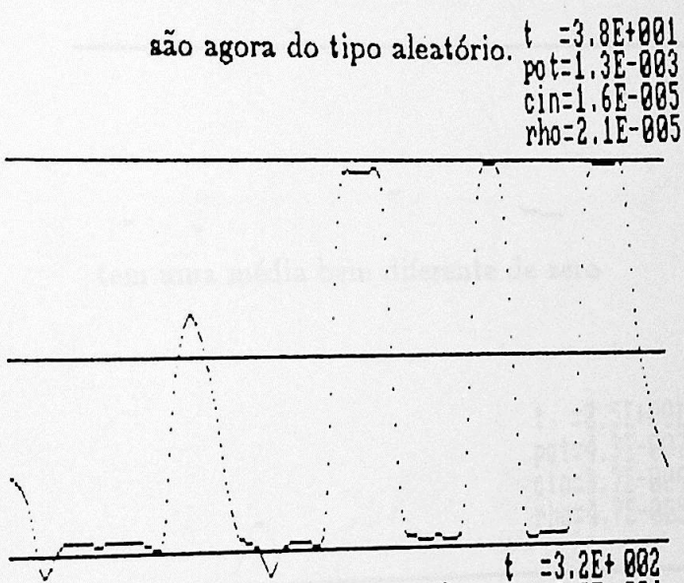
FIGURA VII



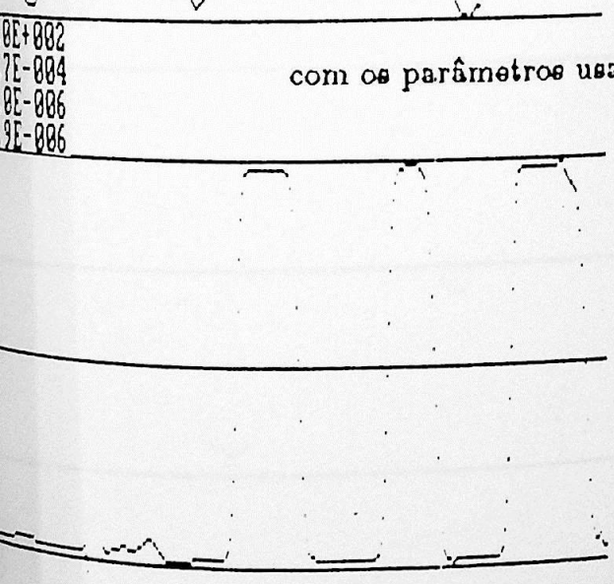


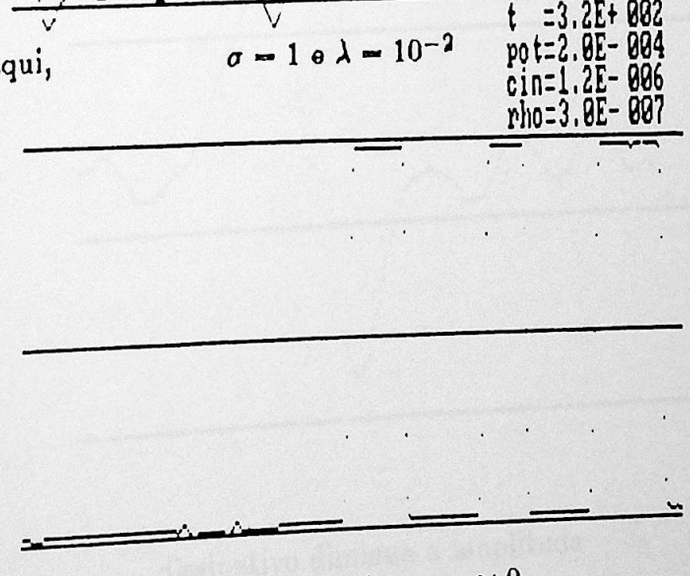
As condições iniciais são agora do tipo aleatório.





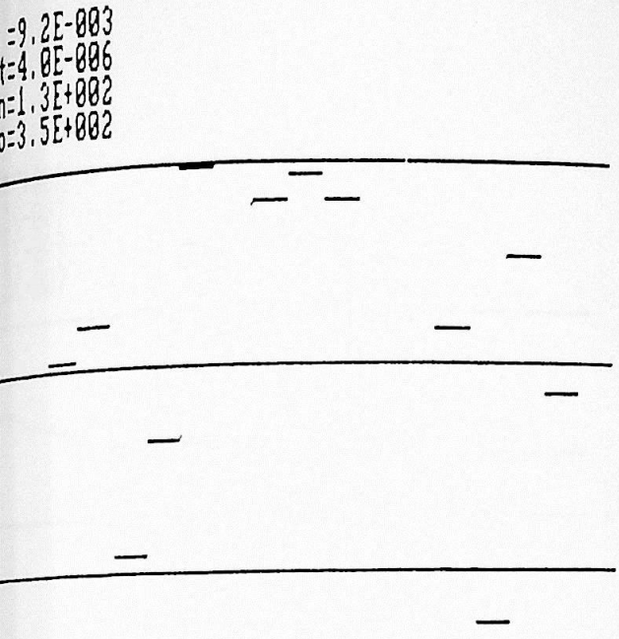
com os parâmetros usados aqui, $\sigma = 1$ e $\lambda = 10^{-2}$



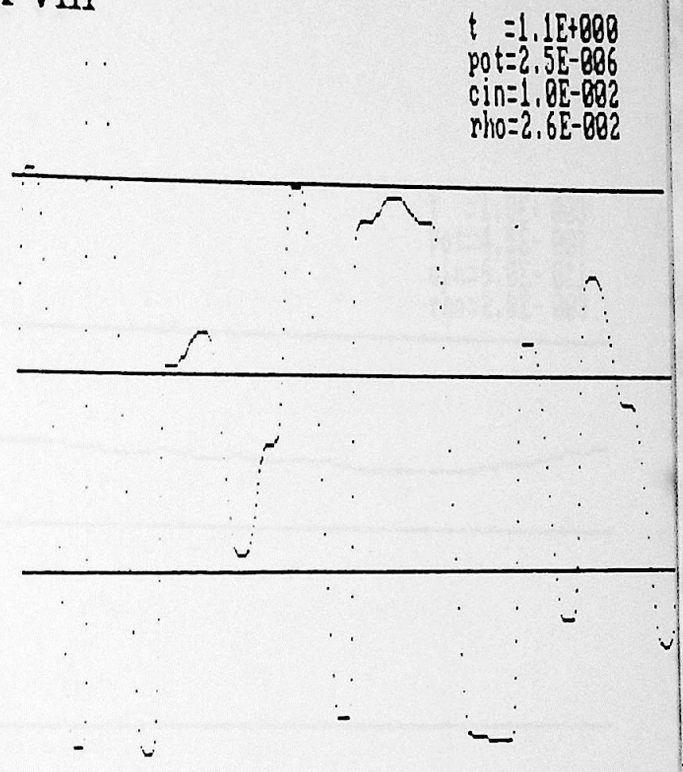


os domínios se formam antes de ϕ se concentrar em ≈ 0

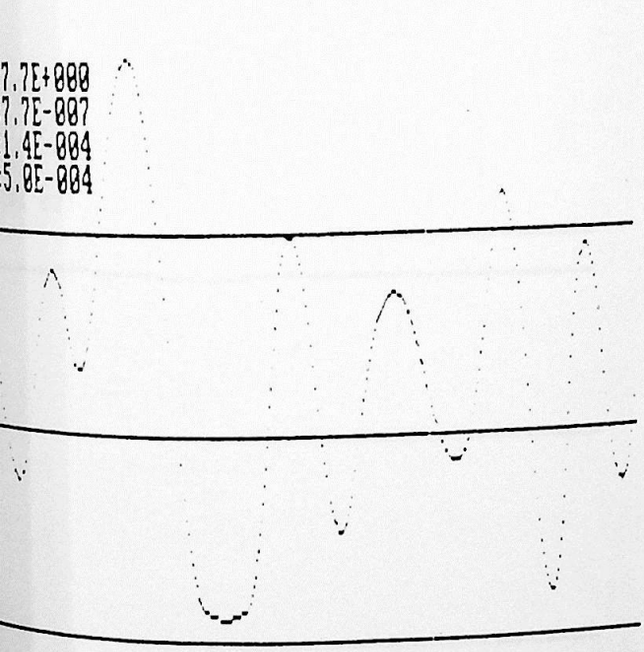
FIGURA VIII



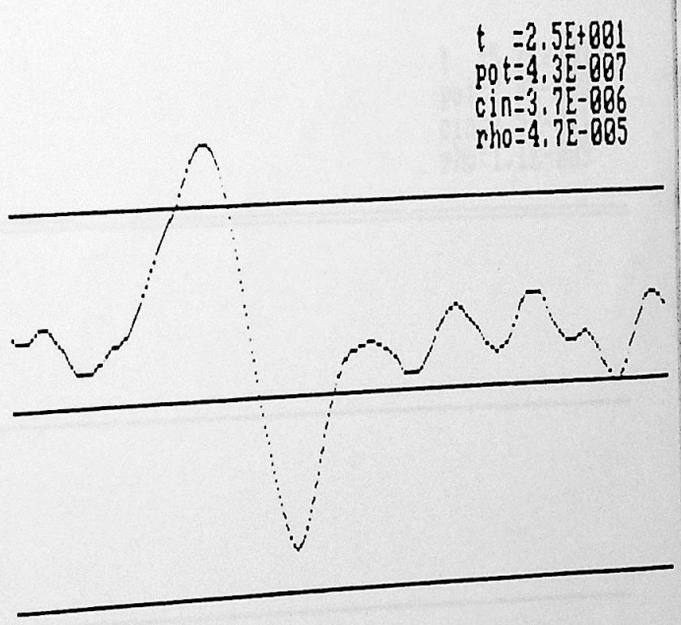
Os valores iniciais



tem uma média bem diferente de zero

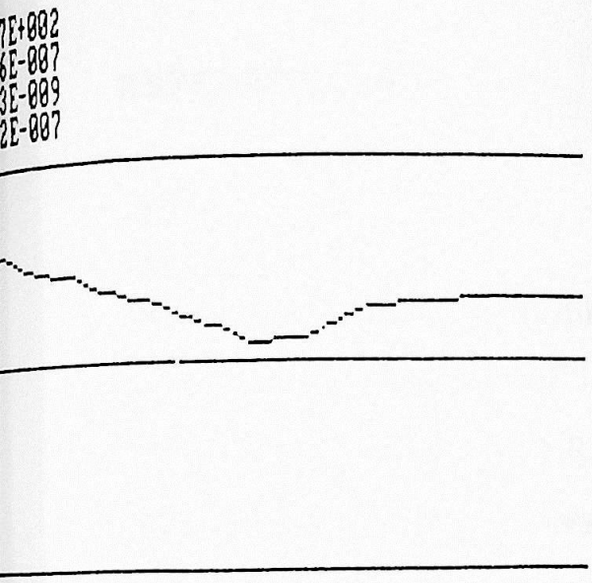


Isto não impede que o termo

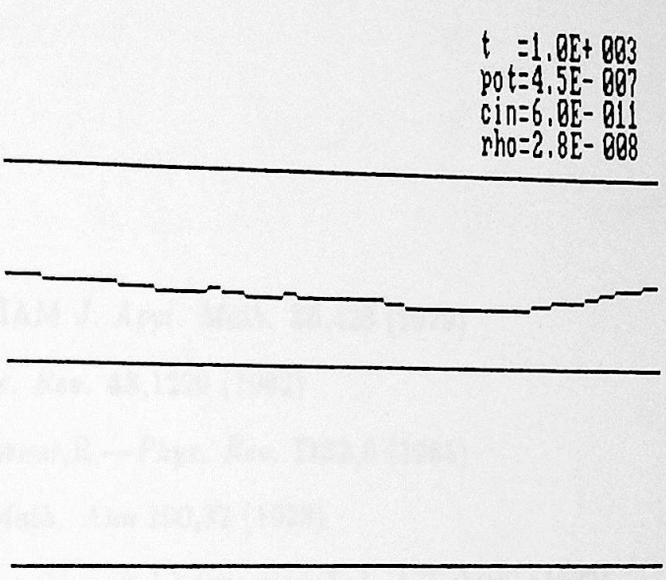


dissipativo diminua a amplitude

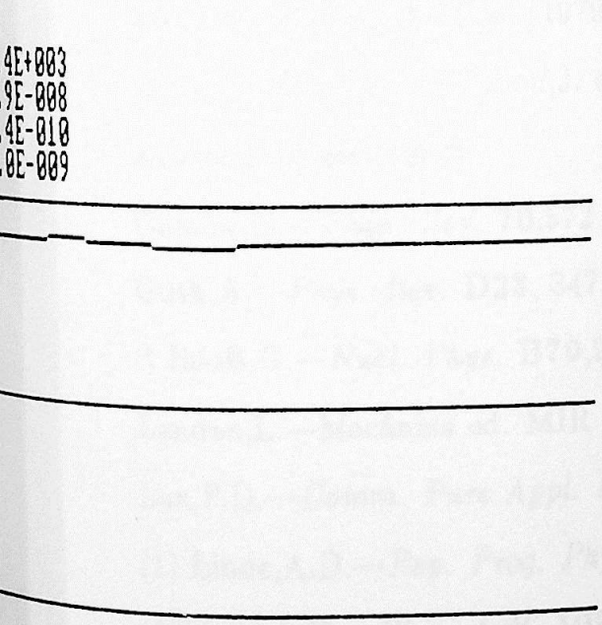
FIGURA VI



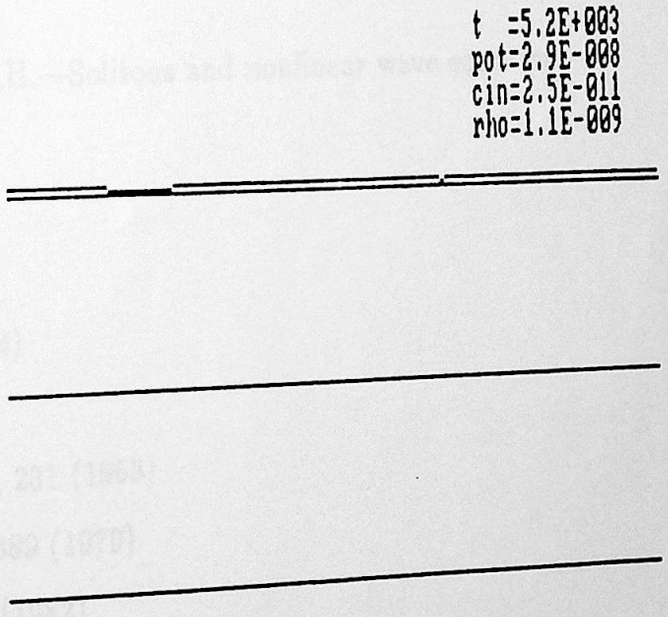
gerando inflação.



Repare que a enrgia potencial é $\gg \rho$



Como ϕ está distante de 0



ele corre rapidamente para o mínimo.

REFERÊNCIAS

Ablowitz,M., Kruskal,M. e Ladik,J.—SIAM *J. Appl. Math.* **36**,428 (1979)

(1) Albrecht,A. e Steinhardt,P.J.- *Phys. Rev.* **48**,1220 (1982)

(2) Albrecht,A., Brandenberg,R. e Matzner,R.—*Phys. Rev.* **D32**,6 (1985)

Courant,R.,Friedrichs,K. e Lewy,H.- *Math. Ann* 100,32 (1928)

(1) Coleman,S.—in "The unity of the fundamentel interactions"ed. A.Zichichi (1983)

(2) Coleman,S. e Weinberg,E.—*Phys. Rev.* **D7**, 1888 (1973)

Dicke,R. e Peebles,P.—in "General Relativity:an Einstein Centenary Survey"
eds. S.Hawking e W.Israel (1979)

Dodd,R., Eilbeck,J., Gibbon,J. e Morris,H.—Solitons and nonlinear wave equations
Academic Press (1982)

Gamow,G.—*Phys. Rev.* **70**,572 (1946)

Guth,A.—*Phys. Rev.* **D23**, 347 (1981)

't Hooft,G.—*Nucl. Phys.* **B79**,276 (1974)

Landau,L.—Mecânica ed. MIR (1978)

Lax,P.D.—*Comm. Pure Appl. Math.* **6**, 231 (1953)

(1) Linde,A.D.—*Rep. Prog. Phys.* **42**, 389 (1979)

(2)Linde,A.D.—*Phys. Lett.* **108B**, 389 (1982)

Mazenko,G., Unruh,W. e Wald,R.—*Phys. Rev.* **D31**,2 (1985)

Preskill,J.P.—*Phys. Rev. Lett.* **43**, 1365 (1979)

Penzias,A.A. e Wilson,R.W.—*Ap. J.* **142**, 419 (1965)

Polyakov,A.M.—JETP *Lett.* **20**,194 (1974)

Richtmeyer,R. e Morton,K.W.—Difference Methods for initial value problems Interscience Publishers (1967)

Rindler.W.—*Mon. Nat. Astron. Soc.* **116**, 663 (1956)

Strauss,W.A. e Vazquez,L.—*J. Comp. Phys.* **28**, 271 (1978)

Tamman,G.—Proceedings of the I.A.U./C.N.R.S. Colloquium (1977)

Weinberg,S.—Gravitation and Cosmology John Wiley (1972)