



GRAVITAÇÃO DE EINSTEIN-CARTAN
REVISITADA

Alberto Vazquez Saa



Orientador: Prof. Dr. JOSIF FRENKEL

Comissão Examinadora:

Abraham H. Zimmerman (IFT-UNESP)
Henrique Fleming (IFUSP)
Josif Frenkel (IFUSP)
Ruben Aldrovandi (IFT-UNESP)
Victor O. Rivelles (IFUSP)

Tese apresentada ao Instituto
de Física da Universidade de
São Paulo para a obtenção do
Título de Doutor em Ciências

Therê Luiz Caldas

Josif Frenkel

SÃO PAULO

1994

S411G
D
e. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Saa, Alberto Vazquez

**Gravitação de Einstein-Cartan revisitada. São
Paulo, 1993.**

**Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. Ins-
tituto de Física. Departamento de Física Matemática.**

**Área de Concentração: Física de Partículas Elemen-
tares**

Orientador: Prof. Dr. Josif Frenkel

**Unitermos: 1. Gravitação; 2. Unificação; 3. Teoria de
campos.**

USP/IF/SBI - 103/93

Resumo

O papel da torção do espaço-tempo na Relatividade Geral é revisto nesta tese. Estudando-se formas diferenciais de volume em variedades afins, será mostrado que o elemento de volume riemanniano usual não é compatível com conexões com torção. Um novo elemento de volume é proposto e usado na formulação lagrangiana da gravitação de Einstein-Cartan. O modelo que surge prevê, entre outras coisas, a propagação da torção e a interação entre campos de *gauge* e a torção do espaço-tempo sem a perda da simetria de *gauge*. O novo elemento de volume também permite uma interpretação geométrica, em termos das quantidades não-riemannianas do espaço-tempo, para as correções à gravitação advindas da teoria de cordas (*dilaton gravity*).

Abstract

The role of space-time torsion in General Relativity is reviewed in this thesis. Through the analysis of volume forms in affine manifolds, it will be shown that the usual riemannian volume element is not compatible with connections with non-vanishing torsion. A new volume element is proposed and used in the lagrangian formulation for Einstein-Cartan theory of gravity. By this new model, torsion can propagate and gauge fields can interact with torsion without breaking of gauge invariance. The new volume element can also provide a geometrical interpretation for the dilaton gravity by means of the non-riemannian quantities of space-time.

Preâmbulo

Esta tese discute a teoria da gravitação de Einstein-Cartan. Através do estudo do proceso de integração e do problema da definição de elementos de volume sobre variedades não-riemannianas, teremos subsídios para propormos modificações à teoria de Einstein-Cartan. As consequências destas modificações serão expostas e analisadas.

A intenção foi a de produzir um texto auto-suficiente, dentro de certos limites. Como referências centrais, para convenções, definições e nomenclatura, usamos as referências [Bis80] para os conceitos matemáticos e [Sab85] para os físicos. Todas as outras referências relevantes são citadas no decorrer do texto.

O quinto e último capítulo é dedicado à apresentação de possíveis desenvolvimentos, que poderão ser realizados a partir dos resultados que serão expostos no decorrer dos 4 capítulos iniciais.

Gostaria de agradecer a todos aqueles que contribuíram na elaboração desta tese. Em particular, agradeço ao Prof. Josif Frenkel, meu orientador, e à FAPESP, responsável pelo eficiente suporte financeiro.

A.V.S.

Alea jact est

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Espaço-tempo e torção	1
1.2	Mínima ação e acoplamento mínimo	3
2	Variedades Afins	10
2.1	Definições	10
2.2	Formas de volume	13
3	Gravitação de Einstein-Cartan	20
3.1	Equações para o vácuo	20
3.2	Campos escalares	23
3.3	Campos de gauge	25
3.3.1	Campos de Maxwell	26
3.3.2	Campos não-abelianos	31
3.4	Férmions	34
3.5	Sobre a condição $dS = 0$	37
4	Teoria de Cordas e Gravitação	39
4.1	Dilaton gravity	39
4.2	Interpretação geométrica	41
5	Considerações Finais	44
5.1	Torção e spin	44
5.2	Perspectivas futuras	45
	Referências	47

Capítulo 1

Introdução

Neste primeiro capítulo, será feita uma introdução informal à teoria de Einstein-Cartan da gravitação. O princípio de mínima ação em variedades não-riemannianas e a prescrição de acoplamento mínimo serão discutidos. Pretende-se com estes pontos fornecer as motivações físicas para a análise mais formal do próximo capítulo.

1.1 Espaço-tempo e torção

O modelo de Einstein, que relaciona os fenômenos gravitacionais à geometria do espaço-tempo, é considerado por muitos a maior contribuição individual à Física deste século [Fey62]. Sua teoria da gravitação foi formulada na década de 10, e quase todas as suas consequências físicas “mensuráveis” foram descritas pelo próprio Einstein em seus trabalhos originais. Portanto, este é um tópico com 80 anos e sem novidades experimentais, e a pergunta se realmente haveria interesse e necessidade em propor modificações à teoria de Einstein é legítima. Todas as motivações para modificações à teoria da gravitação de Einstein são essencialmente teóricas, mas muitas destas modificações surgem naturalmente a partir de questionamentos físicos muito simples. É o caso da teoria de Einstein-Cartan da gravitação.

A hipótese básica da teoria de Einstein-Cartan é a de que o espaço-tempo seria uma variedade de Riemann-Cartan (pseudo) [Heh76], e não uma variedade riemanniana como admitiu Einstein implicitamente. Esta hipótese, evidentemente, deve ser compatível com os dados experimentais disponíveis.

Foi Élie Cartan, em 1922, quem sugeriu que a estrutura não-riemanniana do espaço-tempo poderia estar relacionada a outras grandezas intrínsecas que a matéria eventualmente possuísse além da massa. Cartan chegou a sugerir que estas outras grandezas intrínsecas seriam algo semelhante a um “momento angular intrínseco” da matéria [Car22]. Se lembrarmos que a noção moderna de *spin* foi introduzida por Uhlenbeck e Goudsmit somente 2 anos depois, podemos entender porque a teoria proposta por Cartan foi então considerada como desprovida de sentido físico. Ainda na primeira metade deste século, outros modelos onde o espaço-tempo era admitido como uma variedade não riemanniana foram considerados, como nas tentativas sem sucesso de se unificar o eletromagnetismo e a gravitação [Berg76].

Foi no início da década de 60 que a teoria de Einstein-Cartan voltou ao cenário da Física Teórica. Os trabalhos de Kibble e Sciamma [Kib61, Sci64] mostraram que é esta teoria, e não a teoria usual de Einstein, que surge naturalmente de uma teoria de *gauge* da gravitação. As idéias envolvidas nestes trabalhos são simples e tentadoras. Consideremos, por exemplo, férmions de Dirac na Relatividade Especial,

$$\mathcal{L}_F = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi. \quad (1.1)$$

Este sistema é invariante sob a multiplicação de ψ por uma fase $e^{i\alpha}$, ou seja, sob ação do grupo $U(1)$. A partir de (1.1) podemos tentar construir uma ação invariante localmente sob $U(1)$, ou seja, vamos admitir que a fase dependa da posição, $e^{i\alpha(x)}$. Sob a ação local de $U(1)$, (1.1) transforma-se como

$$\mathcal{L}_F \rightarrow \mathcal{L}_F - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha, \quad (1.2)$$

e uma maneira de cancelarmos este termo extra é admitindo-se a existência de um campo A_μ tal que

$$\mathcal{L}_G = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \quad (1.3)$$

e que se transforme como

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\alpha, \quad (1.4)$$

sob a ação local de $U(1)$. A lagrangiana total $\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G$ é invariante sob a ação local de $U(1)$. O eletromagnetismo portanto surge naturalmente como a teoria de férmions invariante sob a ação local de $U(1)$, ou em outros termos, como a teoria de *gauge* do grupo $U(1)$. É importante notar que

o termo cinético para o campo A_μ , $F_{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu}$, não pode ser deduzido deste procedimento. Contudo, o termo cinético pode ser visto como o escalar “mais simples” invariante pela ação local de $U(1)$.

Kibble e Sciama aplicaram esse procedimento para a gravitação. Apesar do espaço-tempo possuir uma geometria não trivial, sabemos que localmente a Relatividade Especial é válida, e portanto, localmente, o grupo de Poincaré é um grupo de simetrias da Física. A gravitação implica naturalmente numa ação local do grupo de Poincaré. Estudando-se sistemas invariantes sob as transformações do grupo de Poincaré, esperava-se ser possível a identificação das grandezas do campo gravitacional com os campos de *gauge*, introduzidos para garantir a invariância local sob o grupo de Poincaré. Esta é a essência dos trabalhos do início da década de 60, os quais estabeleceram que os campos de *gauge* do grupo de Poincaré podem ser identificados com a métrica $g_{\mu\nu}$ e com a conexão linear $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ do espaço-tempo, a qual é compatível com a métrica, $D_\rho g_{\alpha\beta} = 0$, mas não é simétrica em seus índices inferiores, e portanto não possui torção nula. Note que, como no eletromagnetismo, o acoplamento entre matéria e gravitação está ligado ao grupo de *gauge*, no caso o grupo de Poincaré, o qual possui representações totalmente definidas pelos parâmetros massa e *spin*. A extensão das idéias de Einstein para o mundo microscópico, onde a matéria é caracterizada segundo as representações do grupo de Poincaré, parece levar necessariamente à hipótese básica da teoria de Einstein-Cartan [Heh85]. Deve-se dizer também que a hipótese da teoria de Einstein-Cartan é compatível com todos os dados experimentais disponíveis atualmente [Sab85].

Até agora, tratamos unicamente da “cinemática” da teoria de Einstein-Cartan, nada dissemos a respeito da obtenção das equações de movimento desta teoria, não conhecemos ainda sua “dinâmica”. Grande parte das abordagens sobre a “dinâmica” da teoria de Einstein-Cartan fazem uso de princípios de mínima ação e de prescrições de acoplamento. Nossas contribuições são relacionadas a estes tópicos, e a eles será dedicada a próxima seção.

1.2 Mínima ação e acoplamento mínimo

O primeiro passo para o estudo da gravitação de Einstein-Cartan é a descrição de campos sobre variedades de Riemann-Cartan. O princípio de

mínima ação, principalmente em sua formulação lagrangiana, é o ponto de partida para quase todas as análises clássicas (não quânticas) de teoria de campos sobre espaços curvos. Também usaremos a formulação lagrangiana do princípio de mínima ação para as nossas análises, por seu intermédio obteremos as equações de movimento para vários campos de matéria e para a própria geometria do espaço-tempo. O funcional ação para um campo de matéria qualquer φ sobre uma variedade n -dimensional \mathcal{X} é dado por:

$$S[\varphi] = \int d\text{vol} \mathcal{L}_{\mathcal{X}}(\varphi, \partial_{\mu}\varphi), \quad (1.5)$$

onde $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ é a função Lagrangiana para o campo φ sobre a variedade \mathcal{X} . Formalmente, o integrando de (1.5) deve ser uma n -forma, mas podemos considerar $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ um escalar (o dual de Hodge de uma n -forma) se introduzirmos um elemento de volume covariante, $d\text{vol}$ em (1.5). É um fato bem conhecido que a definição de um elemento de volume sobre uma variedade diferenciável envolve uma densidade escalar, a qual irá "compensar" o jacobiano da lei de transformação do elemento de volume euclidiano $d^n x$. Usualmente, a densidade $\sqrt{|g|}$ é introduzida com este propósito, mas não vamos fixar agora qual densidade usaremos, vamos designá-la por $j(x)$ ¹, de modo a termos:

$$d\text{vol} = j(x) d^n x. \quad (1.6)$$

Para as nossas análises de campos materiais, será suficiente considerar que $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ dependa apenas de φ e de suas primeiras derivadas $\partial_{\mu}\varphi$, mas o formalismo pode ser naturalmente estendido para lagrangianas que dependam até das m -ésimas derivadas de φ . As equações de movimento para φ são obtidas usando-se as hipóteses básicas do cálculo variacional, ou seja,

$$\delta S = \int \frac{1}{j(x)} \frac{\delta j(x) \mathcal{L}_{\mathcal{X}}}{\delta \varphi} \delta \varphi d\text{vol} = 0, \quad (1.7)$$

e para a determinação de $\frac{\delta j(x) \mathcal{L}_{\mathcal{X}}}{\delta \varphi}$ serão desprezados todos os termos de superfície que eventualmente surjam devido ao processo de integração por partes. A equação de Euler-Lagrange para uma lagrangiana sobre \mathcal{X} que envolva apenas φ e suas primeiras derivadas $\partial_{\mu}\varphi$ será portanto dada por

$$\frac{1}{j(x)} \frac{\delta j(x) \mathcal{L}_{\mathcal{X}}}{\delta \varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{X}}}{\partial \varphi} - \frac{1}{j(x)} \partial_{\mu} \left(j(x) \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{X}}}{\partial \partial_{\mu} \varphi} \right) = 0. \quad (1.8)$$

¹No Capítulo 2 o elemento de volume $d\text{vol}$ e a densidade $j(x)$ serão melhor discutidos.

Conhecidas a densidade $j(x)$ e a função lagrangiana, podemos obter as equações de movimento e fazer todas as análises clássicas do problema. Porém, para as situações de interesse físico, não podemos determinar unicamente tais quantidades. Esta é uma afirmação bem conhecida quando aplicada à lagrangiana, mas talvez haja estranheza com relação ao seu emprego para a densidade $j(x)$. Este ponto será melhor elucidado no Capítulo 2.

Nossa descrição do mundo cotidiano e todas as experiências microscópicas atuais se baseiam na hipótese básica de que o espaço-tempo é minkowskiano. Para construirmos um modelo que descreva uma situação onde a geometria do espaço-tempo seja não trivial, praticamente o único vínculo que deve ser respeitado é que tal modelo deve ser fisicamente razoável no limite do espaço-tempo minkowskiano. Isto naturalmente leva a inevitáveis ambigüidades. Contudo, a crença de que a Física deve ser essencialmente simples é mais uma vez reforçada com a prescrição do “acoplamento mínimo”. Tal prescrição evita as ambigüidades dizendo que o modelo relevante deve ser o “mais simples” dentre todos os modelos que possuam o mesmo limite de Relatividade Especial. Esta prescrição é adotada com sucesso na Física de Partículas e na teoria de Einstein da gravitação.

O acoplamento mínimo não é um procedimento muito bem definido, mas pode-se considerar o seguinte procedimento heurístico para obter uma quantidade tensorial $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ em \mathcal{X} a partir de sua versão no contexto da Relatividade Especial, \mathcal{T}_{RN} , a qual é conhecida por hipótese:

Deve-se substituir as derivadas parciais ∂_{μ} presentes em \mathcal{T}_{RN} pelas derivadas covariantes D_{μ} de \mathcal{X} , e o tensor métrico da Relatividade Especial, $\eta_{\mu\nu}$, pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ de \mathcal{X} .

É importante comentarmos o sucesso do acoplamento mínimo verificado na Física de Partículas e na gravitação de Einstein. Na Física de Partículas, temos o caso da Eletrodinâmica Quântica, que pode ser formulada num fibrado onde o potencial A_{μ} tem papel de conexão. Neste caso, o acoplamento mínimo é corroborado experimentalmente, ele é utilizado para as previsões mais precisas que se tem notícia na Física (Momento magnético anômalo do elétron, estrutura atômica, etc...). A situação é semelhante para a Cromodinâmica Quântica. Já na teoria de Einstein, o acoplamento mínimo é compatível com o princípio de equivalência, que garante a existência de sistemas de coordenadas holonômicas onde pode-se “anular” num dado ponto a

gravidade ($D_\mu \rightarrow \partial_\mu, g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$), ou seja, tem-se num dado ponto num sistema holonômico a mesma dinâmica da Relatividade Especial. Cabe lembrar que não temos nenhum destes dois pontos para sustentar o uso do acoplamento mínimo para variedades com torção.

Podemos pensar o acoplamento mínimo como uma aplicação f_{AM} tal que:

$$\mathcal{T}_{R^N} \xrightarrow{f_{AM}} \mathcal{T}_{\mathcal{X}} \equiv \mathcal{T}_{R^N}(\partial_\mu \rightarrow D_\mu, \eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}). \quad (1.9)$$

A expressão (1.9) deve ser entendida como uma expressão puramente formal. O elemento de volume é uma característica intrínseca da variedade, a prescrição de acoplamento mínimo não é aplicável à sua determinação. Contudo, vamos admitir que

$$d^n x \xrightarrow{f_{AM}} d\text{vol} \equiv j(x)d^n x, \quad (1.10)$$

com $j(x)$ ainda não especificada.

A ação para o campo φ sobre \mathcal{X} pode formalmente ser obtida como

$$S_{R^N}[\varphi] \xrightarrow{f_{AM}} S_{\mathcal{X}}[\varphi] = \int \mathcal{L}_{\mathcal{X}} d\text{vol}, \quad (1.11)$$

onde $\mathcal{L}_{\mathcal{X}} = f_{AM} \circ \mathcal{L}_{R^N}$ e $d\text{vol} = f_{AM} \circ d^n x$. As equações de Euler-Lagrange de (1.11) serão dadas por (1.8).

Mesmo não sendo o acoplamento mínimo um procedimento matematicamente bem definido, seu sucesso nos contextos da gravitação de Einstein e das teorias de *gauge* indica que ele pode ter algum significado mais profundo, mesmo que ainda desconhecido. Isto nos incentiva a investir mais na tentativa de formalização de f_{AM} . Por analogia com esses casos onde a prescrição tem sucesso, podemos formular algumas exigências “fisicamente plausíveis” para f_{AM} .

Devido à natureza variacional do princípio de mínima ação, as lagrangianas são naturalmente divididas em classes de equivalência $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, definidas a partir da relação de equivalência \sim tal que $\mathcal{L}' \sim \mathcal{L}$ se $S[\mathcal{L}']$ e $S[\mathcal{L}]$ tiverem equações de Euler-Lagrange idênticas. Para o R^N , por exemplo, tem-se

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{R^N}} \equiv \{\mathcal{L}'_{R^N} | \mathcal{L}'_{R^N} - \mathcal{L}_{R^N} = \partial_\mu V^\mu\}, \quad (1.12)$$

onde V^μ é um vetor qualquer. Para a gravitação de Einstein e para as teorias de *gauge*, temos que as equações de Euler-Lagrange de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\mathcal{X}}}$ são idênticas às equações obtidas pelo uso do acoplamento mínimo às equações de Euler-Lagrange de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{R^N}}$, desde que $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\mathcal{X}}}$ seja obtida pelo acoplamento mínimo de

$\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{RN}}$. De maneira mais formal, isto implica na comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}_{\mathcal{L}_{RN}} & \xrightarrow{f_{AM}} & \mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\mathcal{X}}} \\
 \downarrow \text{E.L.} & & \downarrow \text{E.L.} \\
 \frac{\delta}{\delta\varphi} \mathcal{L}_{RN} & \xrightarrow{f_{AM}} & \frac{1}{j(x)} \frac{\delta}{\delta\varphi} j(x) \mathcal{L}_{\mathcal{X}}
 \end{array} \quad (1.13)$$

Este diagrama é fisicamente razoável. Se ele não fosse verificado, teríamos outra ambigüidade a resolver, deveríamos escolher entre as equações obtidas via acoplamento mínimo e as equações que minimizam a lagrangiana obtida por acoplamento mínimo. Isto corresponderia a escolher como mais fundamental as equações de movimento ou a formulação lagrangiana. É importante notar que na abordagem usual da teoria de Einstein-Cartan não se verifica o diagrama (1.13). Isto faz parte de nossas críticas à abordagem usual, que serão expostas no Capítulo 3.

Trataremos como uma conjectura para o procedimento de acoplamento mínimo a comutatividade do diagrama (1.13), e para que possamos garantí-la precisamos primeiramente que

$$f_{AM} \circ \mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{f_{AM} \circ \mathcal{L}}, \quad (1.14)$$

ou seja, o acoplamento mínimo deve preservar as classes de equivalência. Aplicando-se o procedimento do acoplamento mínimo às equações de Euler-Lagrange de \mathcal{L}_{RN} obtém-se

$$f_{AM} \circ \frac{\delta \mathcal{L}_{RN}}{\delta \varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{X}}}{\partial \varphi} - D_{\mu} \pi_{\mathcal{X}}^{\mu}, \quad (1.15)$$

onde $\pi_{\mathcal{X}}^{\mu}$ é o momento canonicamente conjugado ao campo φ sobre \mathcal{X} ,

$$\pi_{\mathcal{X}}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{X}}}{\partial \partial_{\mu} \varphi}. \quad (1.16)$$

Para que completemos o diagrama, compare (1.8) e (1.15). necessitamos que

$$D_{\mu} \pi_{\mathcal{X}}^{\mu} = \frac{1}{j(x)} \partial_{\mu} j(x) \pi_{\mathcal{X}}^{\mu}, \quad (1.17)$$

o que é verificado se

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} = \partial_{\alpha} \ln j(x), \quad (1.18)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ é a conexão em \mathcal{X} . A relação (1.18) é válida para variedades riemannianas e ela é de fato uma restrição à geometria do espaço-tempo. Estes fatos serão discutidos do Capítulo 2.

Proposição 1.1. *A relação (1.18) é condição suficiente para a comutatividade do diagrama (1.13).*

Prova: Basta provar que (1.18) é condição necessária e suficiente para que o acoplamento mínimo preserve as classes de equivalência, relação (1.14). Temos

$$f_{AM} \circ \mathcal{C}_{\mathcal{L}_{RN}} = \mathcal{C}'_{\mathcal{L}_{\mathcal{X}}} \equiv \{\mathcal{L}'_{\mathcal{X}} | \mathcal{L}'_{\mathcal{X}} - \mathcal{L}_{\mathcal{X}} = D_{\mu} V^{\mu}\}, \quad (1.19)$$

onde $\mathcal{C}'_{\mathcal{L}_{\mathcal{X}}}$ é agora um conjunto de funções lagrangianas. Sejam $S[\mathcal{L}_{\mathcal{X}}]$ e $S[\mathcal{L}'_{\mathcal{X}}]$ as ações sobre \mathcal{X} para dois elementos quaisquer deste conjunto. Temos

$$S[\mathcal{L}'_{\mathcal{X}}] - S[\mathcal{L}_{\mathcal{X}}] = \int D_{\mu} V^{\mu} j(x) d^n x. \quad (1.20)$$

O segundo lado de (1.20) será um termo de superfície se $\Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} = \partial_{\alpha} \ln j(x)$, neste caso $S[\mathcal{L}_{\mathcal{X}}]$ e $S[\mathcal{L}'_{\mathcal{X}}]$ possuem as mesmas equações de Euler-Lagrange e portanto $\mathcal{C}'_{\mathcal{L}_{\mathcal{X}}}$ é uma classe de equivalência. ■

Nossa conjectura então, se resume em admitir que (1.18) seja válida. Em outras palavras, se a condição (1.18) for verificada, as variedades de Riemann-Cartan se comportarão como as riemannianas no que diz respeito à prescrição de acoplamento mínimo, o que essencialmente se reduz à equivalência entre a formulação lagrangiana e as equações de movimento do ponto de vista do acoplamento mínimo. Como já dissemos, esta condição “fisicamente plausível” é verificada para todas as teorias onde a prescrição do acoplamento mínimo é utilizada com sucesso.

Como ilustração, veremos como o diagrama (1.13) é violado na abordagem usual da teoria de Einstein-Cartan, quando é utilizada a densidade usual, $j(x) = \sqrt{|g|}$ [Saa93a]. O modelo de campo material mais simples, um campo escalar sem massa φ , possui a seguinte ação na Relatividade Especial

$$S_{RN} = \int d^n x \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi. \quad (1.21)$$

Aplicando-se a prescrição do acoplamento mínimo em (1.21) e mantendo-se o elemento de volume usual, temos a seguinte ação

$$S_{\chi} = \int d^n x \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi, \quad (1.22)$$

que possui a seguinte equação de Euler-Lagrange

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\mu} \sqrt{|g|} \partial^{\mu} \varphi = 0, \quad (1.23)$$

a qual difere da equação obtida pelo uso da prescrição de acoplamento mínimo à equação de Euler-Lagrange de (1.21),

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} \varphi + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} \partial^{\alpha} \varphi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\mu} \sqrt{|g|} \partial^{\mu} \varphi + 2\Gamma_{[\mu\alpha]}^{\mu} \partial^{\alpha} \varphi = 0. \quad (1.24)$$

A literatura geralmente privilegia a equação (1.23), mas é importante notar que temos uma ambigüidade, as equações deveriam ser equivalentes. Todos os campos materiais apresentam o mesmo "paradoxo".

No próximo capítulo, mostraremos o significado geométrico de (1.18), que surgirá naturalmente no estudo de elementos de volume sobre variedades não-riemannianas. Suas implicações físicas serão explorado no Capítulo 3.

Capítulo 2

Variedades Afins

Este capítulo é dedicado à apresentação dos fundamentos matemáticos necessários à construção da teoria de Einstein-Cartan da gravitação. Ele pode, à primeira vista, parecer excessivamente formal, mas um mínimo de formalismo e rigor são essenciais para a abordagem do problema.

No Capítulo 1, foi visto que o estudo da teoria de Einstein-Cartan da gravitação envolve, entre outras coisas, o problema da definição de elementos de volume sobre variedades não-riemannianas. Este basicamente será o ponto de interesse deste capítulo. Trabalharemos o problema para as variedades métricas mais gerais, as variedades afins, e obteremos os resultados para as variedades de Riemann-Cartan por meio de um limite apropriado.

2.1 Definições

Neste trabalho, \mathcal{M} é uma variedade diferenciável, C^∞ , orientável e n -dimensional. O espaço vetorial das m -formas sobre \mathcal{M} será chamado $\Omega^m(\mathcal{M})$. A variedade \mathcal{M} é chamada uma variedade afim se ela é munida de uma conexão linear $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$, a qual é usada para definir a derivada covariante de formas diferenciais a valores tensoriais:

$$D\Pi_\beta^\alpha = d\Pi_\beta^\alpha + \omega_\rho^\alpha \wedge \Pi_\beta^\rho - \omega_\beta^\rho \wedge \Pi_\rho^\alpha - w\omega \wedge \Pi_\beta^\alpha, \quad (2.1)$$

onde w é o peso de Π_β^α , e

$$\omega_\beta^\alpha = \Gamma_{\mu\beta}^\alpha dx^\mu, \quad (2.2a)$$

$$\omega = \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha dx^\mu. \quad (2.2b)$$

A conexão linear (afim) possui n^3 componentes independentes em geral. Se considerarmos um (p, q) -tensor relativo de peso w , $A_{(\beta_1 \dots \beta_q)}^{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}$, como sendo $p \times q$ 0-formas diferenciais teremos de (2.1) a fórmula usual para a derivada covariante de tensores relativos:

$$\begin{aligned} DA_{(\beta)}^{(\alpha)} &= (D_\mu A_{(\beta)}^{(\alpha)}) dx^\mu \\ &= \left(\partial_\mu A_{(\beta)}^{(\alpha)} + \sum_{i=1}^p \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha_i} A_{(\beta)}^{(\alpha_1 \dots \rho \dots \alpha_p)} - \sum_{j=1}^q \Gamma_{\mu\beta_j}^\rho A_{(\beta_1 \dots \rho \dots \beta_q)}^{(\alpha)} - w \Gamma_{\rho\mu}^\rho A_{(\beta)}^{(\alpha)} \right) dx^\mu. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Será admitida também a existência de um tensor métrico em \mathcal{M} , com o qual define-se distâncias infinitesimais,

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (2.4)$$

Como \mathcal{M} deverá descrever o espaço-tempo, $g_{\alpha\beta}$ deve ter uma assinatura lorentziana. Neste trabalho adotaremos a convenção segundo a qual a forma diagonal do tensor métrico é $\text{diag}(1, -1, \dots, -1)$. Note que a conexão afim $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ e o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ são objetos independentes.

A parte anti-simétrica da conexão afim,

$$S_{\alpha\beta}{}^\gamma = \frac{1}{2} (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma), \quad (2.5)$$

define um novo tensor, o tensor de torção $S_{\alpha\beta}{}^\gamma$. A derivada covariante do tensor métrico em variedades afins também define um novo tensor, o tensor de não-metricidade, que é dado por

$$N_{\alpha\beta\gamma} = D_\alpha g_{\beta\gamma}. \quad (2.6)$$

Usando-se explicitamente a derivada covariante do tensor métrico em (2.6) obtém-se

$$N_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma\beta}. \quad (2.7)$$

onde $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = g_{\rho\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\rho$. Podemos utilizar (2.7) para escrevermos as n^3 componentes independentes da conexão como função do tensor de não-metricidade $N_{\alpha\beta\gamma}$ e das primeiras derivadas do tensor métrico. Resolvendo-se (2.7) para a conexão afim obtém-se

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} - K_{\beta\gamma}{}^\alpha + V_{\beta\gamma}^\alpha. \quad (2.8)$$

onde $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{smallmatrix} \right\}$ são os símbolos de Christoffel,

$$\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (\partial_\beta g_{\rho\gamma} + \partial_\gamma g_{\rho\beta} - \partial_\rho g_{\beta\gamma}), \quad (2.9)$$

$K_{\alpha\beta}{}^\gamma$ é o tensor de contorção, que é dado em função do tensor de torção por

$$K_{\alpha\beta}{}^\gamma = -S_{\alpha\beta}{}^\gamma + S_{\beta\alpha}{}^\gamma - S_{\alpha\gamma}{}^\beta, \quad (2.10)$$

e $V_{\alpha\beta\gamma}$ é dado em função do tensor de não-metricidade por

$$V_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} (N_{\alpha\beta\gamma} - N_{\gamma\alpha\beta} - N_{\beta\gamma\alpha}). \quad (2.11)$$

Uma variedade afim é chamada variedade de Riemann-Cartan (U_N) se $N_{\alpha\beta\gamma} = 0$, e variedade riemanniana (V_N) se $N_{\alpha\beta\gamma} = 0$ e $S_{\alpha\beta\gamma} = 0$. Nesses casos, a conexão linear é dita compatível com a métrica (veja (2.6)).

Por simplicidade, os traços dos tensores $S_{\rho\nu\mu}$ e $V_{\rho\nu\mu}$ serão chamados de S_μ e V_μ respectivamente,

$$S_\mu = S_{\rho\mu}{}^\rho = -\frac{1}{2} K_{\rho\mu}{}^\rho. \quad (2.12a)$$

$$V_\mu = V_{\rho\mu}{}^\rho = -\frac{1}{2} N_{\mu\alpha}{}^\alpha. \quad (2.12b)$$

O tensor de torção (2.5) pode ser dividido de maneira covariante em uma parte com traço e outra sem,

$$S_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{S}_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{n-1} (g_{\alpha\gamma} S_\beta - g_{\gamma\beta} S_\alpha), \quad (2.13)$$

onde $\tilde{S}_{\alpha\beta}{}^\alpha = 0$. Evidentemente, o tensor de contorção também pode ser dividido da mesma forma, e usando-se (2.13) teremos

$$K_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{K}_{\alpha\beta\gamma} - \frac{2}{n-1} (g_{\alpha\gamma} S_\beta - g_{\alpha\beta} S_\gamma), \quad (2.14)$$

onde $\tilde{K}_{\alpha\beta}{}^\alpha = 0$.

Com isto, teremos que o traço da conexão afim, presente em (2.2b), será dado por

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\mu}{}^\alpha &= \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \alpha\mu \end{smallmatrix} \right\} - K_{\alpha\mu}{}^\alpha + V_{\alpha\mu}{}^\alpha \\ &= \partial_\mu \ln \sqrt{|g|} + 2S_\mu + V_\mu, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde g é o determinante do tensor métrico.

O tensor de curvatura numa variedade afim pode ser definido de maneira análoga ao caso de variedades riemannianas, ou seja, explorando-se o comutador de derivadas covariantes. Teremos

$$[D_\beta, D_\alpha] A_\mu = R_{\alpha\beta\mu}{}^\rho A_\rho + 2S_{\alpha\beta}{}^\rho D_\rho A_\mu, \quad (2.16)$$

onde

$$R_{\alpha\beta\mu}{}^\rho = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\rho - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\rho + \Gamma_{\alpha\omega}^\rho \Gamma_{\beta\mu}^\omega - \Gamma_{\beta\omega}^\rho \Gamma_{\alpha\mu}^\omega. \quad (2.17)$$

As quantidades derivadas a partir do tensor de curvatura são de especial interesse para as análises dos capítulos seguintes. O escalar de curvatura para U_N , calculado pela contração de (2.17) com $N_{\alpha\beta\gamma} = 0$, será dado por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\nu}{}^\alpha = R^{V_N} - 4D_\mu S^\mu + \frac{4n}{n-1} S_\mu S^\mu - \tilde{K}_{\nu\rho\alpha} \tilde{K}^{\alpha\nu\rho}, \quad (2.18)$$

onde R^{V_N} é o escalar de curvatura riemanniano, calculado a partir dos símbolos de Christoffel.

2.2 Formas de volume

Na seção anterior, discutimos características locais de variedades afins (*i.e.* diferenciação, curvatura, etc.). Nesta seção trataremos do processo de integração sobre variedades afins. A primeira definição será a de forma de volume.

Definição 2.1. *Uma forma de volume sobre \mathcal{M} é uma n -form $v \in \Omega^n(\mathcal{M})$ que não se anula em ponto nenhum e é compatível com a orientação de \mathcal{M} [Ber88].*

Uma forma de volume, em geral, pode ser construída a partir de n 1-formas θ linearmente independentes ($\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n \neq 0$), e 0-formas não nulas,

$$v = f \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n. \quad (2.19)$$

Vamos admitir que f seja uma função estritamente positiva C^∞ . A forma de volume (2.19) define formalmente um elemento de volume em \mathcal{M} . Supondo

que as 1-formas $\{\theta^i\}$ formam um conjunto ortonormal. temos a seguinte expressão para a forma de volume (2.19) em termos de coordenadas locais $\{x^i\}$

$$v = f(x)\sqrt{|g|}dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (2.20)$$

A verificação de (2.20) é simples. Seja Λ a matriz de transformação da base, $\theta^i = \Lambda^i_j dx^j$, então $v = f(x) \det(\Lambda) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. O determinante $\det(\Lambda)$ pode ser determinado usando-se as propriedades de transformação do tensor métrico e que o conjunto $\{\theta^i\}$ é ortonormal.

Usando-se (2.20) temos que o volume de uma região χ de \mathcal{M} , medido pela forma (2.19), é dado por

$$\int_{\chi} v = \int_{\chi} f(x)\sqrt{|g|}dx^1 dx^2 \dots dx^n = \int_{\chi} d\text{vol}. \quad (2.21)$$

O elemento de volume usual para variedades riemannianas é obtido pela escolha $f(x) = 1$.

Numa variedade afim, existem certas condições de compatibilidade que podemos exigir entre a conexão afim e as formas de volume. Sabe-se que para uma variedade diferenciável qualquer com forma de volume v , é possível definir a divergência de um campo vetorial A , $\text{div } A$, por [Kob63]

$$(\text{div } A)v = \mathcal{L}_A v, \quad (2.22)$$

onde \mathcal{L}_A é a derivada de Lie na direção de A . Como a derivada de Lie é definida para qualquer variedade diferenciável, munida ou não de conexão afim, (2.22) evidentemente é válida também para variedades afins. Porém, se a variedade é munida de uma conexão afim, podemos definir de uma maneira natural a divergência de um campo vetorial usando-se a derivada covariante

$$\text{div}_{\nabla} A = D_{\mu} A^{\mu}. \quad (2.23)$$

As expressões (2.22) e (2.23) podem definir um critério de compatibilidade entre a conexão afim e a forma de volume.

Definição 2.2. *Uma forma de volume v é dita compatível com a conexão se:*

$$\mathcal{L}_A v = (D_{\mu} A^{\mu})v, \quad (2.24)$$

para qualquer campo vetorial A .

Podemos utilizar a definição para verificar que a forma de volume riemanniana $\nu = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ e os símbolos de Christoffel são compatíveis. Podemos verificar também que a forma de volume ν não é compatível com a conexão para uma variedade de Riemann-Cartan,

$$\mathcal{L}_A \nu = (D_\mu A^\mu - 2S_\mu A^\mu) \nu \neq (D_\mu A^\mu) \nu. \quad (2.25)$$

A incompatibilidade entre a forma de volume usual e a conexão para variedades não-riemannianas nos leva a uma nova questão. Seria possível a definição de formas de volume compatíveis com a conexão para variedades não-riemannianas? A resposta é, como veremos, que às vezes é possível.

Teorema 2.1. *Uma variedade afim admite uma forma de volume compatível com a conexão somente se a forma $2S + V = (2S_\beta + V_\beta) dx^\beta$ for exata [Saa93d].*

Prova: Numa variedade afim com forma de volume v (2.20) temos

$$\mathcal{L}_A v = \left[A^\mu D_\mu \left(f(x) \sqrt{|g|} \right) + f(x) \sqrt{|g|} D_\mu A^\mu \right] dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad (2.26)$$

e para que obtenhamos (2.24) para A^μ arbitrário é necessário que

$$\begin{aligned} D_\mu (f(x) \sqrt{|g|}) &= \sqrt{|g|} \partial_\mu f(x) + f(x) \partial_\mu \sqrt{|g|} - \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \rho\mu \end{smallmatrix} \right\} f(x) \sqrt{|g|} \\ &- (V_\mu + 2S_\mu) f(x) \sqrt{|g|} = 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

o que leva a $\partial_\mu \ln f(x) = V_\mu + 2S_\mu$, ou o que é equivalente

$$V_\mu dx^\mu + 2S_\mu dx^\mu = d \ln f(x). \quad (2.28)$$

onde d significa derivada exterior. ■

A partir de (2.28) temos que a 1-forma em questão é fechada como consequência do lema de Poincaré. Se a forma $(V_\beta + 2S_\beta) dx^\beta$ não é fechada, a variedade afim não admite uma forma de volume compatível com a conexão. Se a forma for fechada mas não exata, a recíproca do lema de Poincaré nos garante que é possível definir a forma de volume num aberto contrátil de

\mathcal{M} . A forma de volume compatível com a conexão para variedades afins será dada por

$$v = e^{2\Theta} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad (2.29)$$

onde $\partial_\mu \Theta = S_\mu + \frac{1}{2} V_\mu$, e temos também que

$$\Gamma_{\rho\mu}^\rho = \partial_\mu \ln \left(e^{2\Theta} \sqrt{|g|} \right), \quad (2.30)$$

que também decorre diretamente do Teorema 2.1. Naturalmente, o elemento de volume que teremos a partir de (2.29) será dado por

$$d\text{vol} = e^{2\Theta} \sqrt{|g|} d^n x. \quad (2.31)$$

A expressão (2.30) é exatamente a conjectura do Capítulo 1, veja (1.18). Agora podemos entender as restrições que ela impõe sobre a geometria do espaço-tempo. A comutatividade do diagrama (1.13) somente será verificada para variedades que admitam formas de volume compatíveis com a conexão.

Para variedades que não admitam formas de volume compatíveis, temos outra ambiguidade a resolver. Como temos duas expressões para o divergente de um campo vetorial, (2.22) e (2.23), devemos escolher uma entre as duas equações obtidas via acoplamento mínimo das equações de Euler-Lagrange:

$$f_{AM} \circ \left(v_{RN} \frac{\delta \mathcal{L}_{RN}}{\delta \varphi} \right) = v \frac{\partial \mathcal{L}_X}{\partial \varphi} - \mathcal{L}_{\pi_\lambda} v, \quad (2.32a)$$

$$f_{AM} \circ \frac{\delta \mathcal{L}_{RN}}{\delta \varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}_X}{\partial \varphi} - D_\mu \pi_\lambda^\mu, \quad (2.32b)$$

onde π_λ^μ é dado por (1.16), v_{RN} é a forma de volume canônica do R^N , $v_{RN} = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, e $f_{AM} \circ v_{RN} \equiv v$. As equações (2.32a) e (2.32b) são equivalentes para variedades riemannianas e somente serão equivalentes para variedades não-riemannianas se estas forem munidas de uma forma de volume v compatível com a conexão, veja Definição 2.2.

Quando provamos que (2.30) é condição suficiente para que o acoplamento mínimo preserve as classes de equivalência de lagrangianas, Proposição 1.1, tocamos indiretamente na fórmula de Gauss. Com a definição de forma de volume compatível, tal fórmula pode ser devidamente introduzida.

Teorema 2.2. *Se uma variedade afim é munida com uma forma de volume compatível com a conexão, temos a seguinte fórmula de Gauss generalizada [Saa93d]*

$$\int_{\mathcal{M}} D_{\mu} A^{\mu} d\text{vol} = \int_{\partial\mathcal{M}} A^{\mu} d\Sigma_{\mu}, \quad (2.33)$$

onde $d\Sigma_{\mu}$ é o elemento de superfície compatível, que é dado por:

$$d\Sigma_{\mu} = \frac{e^{2\Theta} \sqrt{|g|}}{(n-1)!} \varepsilon_{\mu\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n} dx^{\alpha_2} \wedge dx^{\alpha_3} \dots \wedge dx^{\alpha_n}. \quad (2.34)$$

Prova: Escolhendo a forma diferencial $\omega = \frac{e^{2\Theta} \sqrt{|g|}}{(n-1)!} \varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} A^{\alpha_1} dx^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n}$, usando (2.30) e o teorema de Stokes,

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega, \quad (2.35)$$

obtem-se (2.33). ■

Para variedades riemannianas n -dimensionais, a forma de volume compatível com a conexão pode ser obtida usando-se o operador estrela (*) de Hodge. O operador (*) é um operador linear tal que

$$* : \Omega^m(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{n-m}(\mathcal{M}), \quad (2.36)$$

que para uma variedade riemanniana possui a seguinte ação num vetor base de $\Omega^m(\mathcal{M})$

$$*(dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_m}) = \frac{\sqrt{|g|}}{(n-m)!} \varepsilon^{\alpha_1\dots\alpha_m}_{\beta_{m+1}\dots\beta_n} dx^{\beta_{m+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\beta_n}, \quad (2.37)$$

onde $\varepsilon_{\alpha_1\dots\alpha_n}$ é o símbolo totalmente anti-simétrico, e $\varepsilon^{\alpha_1\dots\alpha_m}_{\beta_{m+1}\dots\beta_n}$ é construído usando-se o tensor métrico. A ação de (2.37) no vetor base para $\Omega^0(\mathcal{M})$ fornece

$$*1 = \frac{\sqrt{|g|}}{n!} \varepsilon_{\alpha_1\dots\alpha_n} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n}, \quad (2.38)$$

que é a forma de volume compatível com a conexão para uma variedade riemanniana. Verificaremos agora que para variedades afins munidas com uma forma de volume compatível, temos uma construção equivalente.

Proposição 2.1. *Se uma variedade afim \mathcal{M} admite uma forma de volume compatível com a conexão, tal forma pode ser obtida usando-se o operador $(^*)$ de Hodge modificado, definido por [Saa93d]*

$$^*(dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_m}) = \frac{e^{2\Theta} \sqrt{|g|}}{(n-m)!} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_m \beta_{m+1} \dots \beta_n} dx^{\beta_{m+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\beta_n}. \quad (2.39)$$

Prova: É simples verificar que a ação de (2.39) sobre o vetor base de $\Omega^0(\mathcal{M})$ fornece:

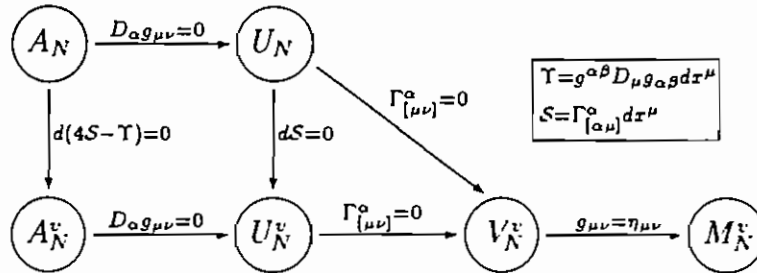
$$^*1 = \frac{e^{2\Theta} \sqrt{|g|}}{n!} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n}. \quad (2.40)$$

que é a forma de volume compatível. ■

O operador $(^*)$ de Hodge modificado (2.39), será crucial para a definição de duais no Capítulo 3.

Os resultados deste capítulo podem ser visualizados com a ajuda da figura (2.2). O símbolos A_N , U_N , V_N e M_N representam variedades afim, de

Figura 2.1: Classificação das variedades afins



Riemann-Cartan, riemannianas e minkowskianas respectivamente. O índice superior v indica que a variedade é munida de uma forma de volume compatível com a conexão. As setas indicam como as variedades podem ser obtidas, partindo-se de uma variedade afim genérica A_N . As variedades riemannianas e minkowskianas são naturalmente munidas de formas de volume compatíveis, o uso do índice v é portanto desnecessário e poderá ser omitido daqui em diante.

Como vimos, a variedade compatível com a nossa conjectura do Capítulo 1 é U_N^v . No Capítulo 3, a teoria de Einstein-Cartan será construída sobre U_4^v . Mostraremos também que esta restrição é inevitável, veremos que a condição $dS = 0$ será exigida por considerações de consistência das equações para campos materiais sobre uma variedade U_4 .

No Capítulo 4, será mostrado que as equações que garantem a invariância conforme (funções Beta em *1-loop*) para cordas bosônicas em campos de fundo podem ser geometricamente interpretadas em U_N^v . As variedades U_N^v se mostrarão extremamente relevantes para o estudo de teoria de cordas sobre campos de fundo.

Capítulo 3

Gravitação de Einstein-Cartan

Neste capítulo, determinaremos as equações da teoria de Einstein-Cartan a partir da hipótese básica de que o espaço-tempo é uma variedade U_4^v . Como consequência destas novas equações, novos fenômenos serão previstos, e eles serão discutidos nas próximas seções.

Devemos lembrar que para uma variedade U_4^v tem-se

$$\partial_\mu \Theta = S_\mu, \quad (3.1)$$

ou seja, o traço do tensor de torção é derivado de um potencial escalar, conforme Teorema 2.1, e que o elemento de volume compatível com a conexão é dado por

$$d\text{vol} = \epsilon^{2\Theta} \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.2)$$

Estes resultados serão amplamente usados no decorrer deste capítulo, nas análises para o vácuo e na presença de vários campos materiais. A última seção deste capítulo discute como a restrição de que o espaço-tempo deve ser uma variedade U_4^v surge de considerações de consistência das equações de movimento de campos materiais sobre U_4 .

3.1 Equações para o vácuo

De acordo com as nossas hipóteses, vamos admitir que as equações para a gravitação de Einstein-Cartan podem ser obtidas a partir de uma ação de Hilbert-Einstein. Usando-se o escalar de curvatura (2.18) teremos a seguinte

ação para a geometria de U_4^v :

$$\begin{aligned} S_{\text{grav}} &= - \int d\text{vol} R \\ &= - \int d^4x e^{2\Theta} \sqrt{-g} \left(R^{V_4} + \frac{16}{3} \partial_\mu \Theta \partial^\mu \Theta - \tilde{K}_{\nu\rho\alpha} \tilde{K}^{\alpha\nu\rho} \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde a fórmula de Gauss generalizada (2.33) foi usada e os termos de superfície desprezados.

As equações para os campos $g^{\mu\nu}$, Θ e $\tilde{K}_{\nu\rho\alpha}$ são obtidos a partir da minimização da ação (3.3). As variações de $g^{\mu\nu}$ e $S_{\mu\nu}{}^\rho$ no contorno, por hipótese do princípio variacional, são desconsideradas. A equação $\frac{\delta S_{\text{grav}}}{\delta \tilde{K}_{\nu\rho\alpha}} = 0$ implica que $\tilde{K}^{\nu\rho\alpha} = 0$, onde $\frac{\delta S_{\text{grav}}}{\delta \tilde{K}_{\nu\rho\alpha}}$ representa as equações de Euler-Lagrange para $\tilde{K}_{\nu\rho\alpha}$. Para as outras equações teremos

$$\begin{aligned} - \frac{e^{-2\Theta}}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} S_{\text{grav}} \Big|_{\tilde{K}=0} &= R_{\mu\nu}^{V_4} - 2D_\mu \partial_\nu \Theta \\ &\quad - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(R^{V_4} + \frac{8}{3} \partial_\rho \Theta \partial^\rho \Theta - 4\Box\Theta \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.4a)$$

$$- \frac{e^{-2\Theta}}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta \Theta} S_{\text{grav}} \Big|_{\tilde{K}=0} = R^{V_4} + \frac{16}{3} (\partial_\mu \Theta \partial^\mu \Theta - \Box\Theta) = 0, \quad (3.4b)$$

onde $R_{\mu\nu}^{V_4}$ é o tensor de Ricci de V_4 , calculado a partir dos símbolos de Christoffel, e \Box é o operador d'Alambertiano em U_4^v ,

$$\Box = D_\mu D^\mu = \frac{e^{-2\Theta}}{\sqrt{-g}} \partial_\mu e^{2\Theta} \sqrt{-g} \partial^\mu. \quad (3.5)$$

Calculando-se o traço da equação (3.4a),

$$R^{V_4} + \frac{16}{3} \partial_\mu \Theta \partial^\mu \Theta = 6\Box\Theta, \quad (3.6)$$

e usando-o novamente em (3.4), obtém-se finalmente as novas equações para a geometria de U_4^v no vácuo:

$$R_{\mu\nu}^{V_4} = 2D_\mu \partial_\nu \Theta - \frac{4}{3} g_{\mu\nu} \partial_\rho \Theta \partial^\rho \Theta \quad (3.7a)$$

$$\Box\Theta = 0, \quad (3.7b)$$

$$\tilde{K}_{\alpha\beta\gamma} = 0. \quad (3.7c)$$

As equações (3.7) já apresentam novas características da gravitação de Einstein-Cartan. É evidente que a torção, descrita pelas equações (3.7b) e (3.7c), se propaga. As interações mediadas pela torção perdem suas características de contato. A parte sem traço do tensor de contorção, $\tilde{K}_{\alpha\beta\gamma}$, se anula para o vácuo, e apenas o traço da torção, S_μ , pode ser não nulo fora de distribuições de matéria. Como naturalmente é esperado, as configurações do campo gravitacional para o vácuo são determinadas unicamente por condições de contorno, e se devido a estas condições tivermos que $S_\mu = 0$, nossas equações se reduzem às equações para o vácuo usuais, $S_{\alpha\gamma\beta} = 0$ e $R_{\alpha\beta}^{V_4} = 0$.

Parece possível, à primeira vista, que as equações (3.7) possam ser escritas sem o uso do potencial escalar $\Theta(x)$,

$$R_{\mu\nu}^{V_4} = 2D_\mu S_\nu - \frac{4}{3}g_{\mu\nu}S_\rho S^\rho, \quad (3.8a)$$

$$D_\mu S^\mu = 0, \quad (3.8b)$$

$$\tilde{K}_{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad (3.8c)$$

e por isso pode-se questionar se elas continuam válidas para variedades que não admitam elementos de volume compatíveis, isto é, variedades que não obedeçam (3.1). A resposta é negativa, o primeiro termo do lado direito da equação (3.8a) é simétrico sob a troca ($\mu \leftrightarrow \nu$) somente se a variedade admite um elemento de volume compatível.

Outra característica digna de nota, é que as equações (3.7) violam as hipóteses dos teoremas sobre singularidade inicial de Hawking. Estes teoremas de singularidade tem como uma de suas hipóteses a condição [Haw73, Nab88]

$$R_{\mu\nu}^{V_4} V^\mu V^\nu \leq 0, \quad (3.9)$$

para qualquer vetor causal¹ V^μ . Esta condição é aceita como a expressão matemática do fato de que a gravitação deve ser atrativa [Sac77]. Uma simples verificação, por exemplo com $V^\mu = (1, 0, 0, 0)$, mostra que esta condição não é verificada pela equação (3.7a). Com isto temos que, na teoria de Einstein-Cartan, a existência de uma singularidade inicial não é uma consequência inexorável, como ocorre na gravitação de Einstein.

A existência de modelos cosmológicos sem singularidades já havia sido verificada por Trautman e colaboradores [Kop92] no contexto da gravitação

¹Um vetor causal é um vetor do tipo luz ou do tipo tempo.

de Einstein-Cartan usual. Analisando modelos do tipo Robertson-Walker espacialmente chatos, este grupo construiu explicitamente uma solução compatível com os dados atuais e sem nenhum tipo de singularidade.

3.2 Campos escalares

O primeiro passo para introduzirmos campos materiais em nossas discussões será a descrição de campos escalares sobre variedades de Riemann-Cartan U_4^v . Com este propósito, usaremos a prescrição de acoplamento mínimo para obter a ação de um campo escalar. Para o caso de campos sem massa teremos:

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{grav}} + S_{\text{scal}} = - \int d^4x e^{2\Theta} \sqrt{-g} \left(R - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right) \\ &= - \int d^4x e^{2\Theta} \sqrt{-g} \left(R^{V_4} + \frac{16}{3} \partial_\mu \Theta \partial^\mu \Theta - \tilde{K}_{\nu\rho\alpha} \tilde{K}^{\alpha\nu\rho} - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde novamente os termos de superfície foram descartados. As equações para este caso podem ser obtidas com as variações de (3.10) com respeito a φ , $g^{\mu\nu}$, Θ e $\tilde{K}_{\alpha\beta\gamma}$. Como no caso do vácuo, a equação $\frac{\delta S}{\delta \tilde{K}} = 0$ implica que $\tilde{K}' = 0$. Levando em conta estas considerações teremos

$$- \frac{e^{-2\Theta}}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta \varphi} \Big|_{\tilde{K}=0} = \frac{e^{-2\Theta}}{\sqrt{-g}} \partial_\mu e^{2\Theta} \sqrt{-g} \partial^\mu \varphi = \square \varphi = 0, \quad (3.11a)$$

$$\begin{aligned} - \frac{e^{-2\Theta}}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \Big|_{\tilde{K}=0} &= R_{\mu\nu}^{V_4} - 2D_\mu S_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(R^{V_4} + \frac{8}{3} S_\rho S^\rho - 4D_\rho S^\rho \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \partial_\rho \varphi \partial^\rho \varphi = 0. \end{aligned} \quad (3.11b)$$

$$- \frac{e^{-2\Theta}}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta \Theta} \Big|_{\tilde{K}=0} = R^{V_4} + \frac{16}{3} (S_\mu S^\mu - D_\mu S^\mu) - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi = 0. \quad (3.11c)$$

Calculando-se o traço da equação (3.11b),

$$R^{V_4} + \frac{16}{3} S_\mu S^\mu = 6D_\mu S^\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi, \quad (3.12)$$

e usando-o novamente em (3.11), obtém-se o seguinte conjunto de equações para o caso de campos escalares sem massa

$$\square \varphi = 0, \quad (3.13a)$$

$$R_{\mu\nu}^{V_4} = 2D_\mu S_\nu - \frac{4}{3}g_{\mu\nu}S_\rho S^\rho + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi. \quad (3.13b)$$

$$D_\mu S^\mu = 0, \quad (3.13c)$$

$$\tilde{K}_{\alpha\beta\gamma} = 0. \quad (3.13d)$$

Note que a equação para o campo escalar, (3.13a), é a mesma que obteríamos pelo uso do acoplamento mínimo nas equações minkowskianas.

Como pode-se inferir, as equações para a torção, (3.13c) e (3.13d), são as mesmas que obtivemos para o vácuo, veja (3.7b) e (3.7c). Qualquer contribuição à torção será devida às condições de contorno, e não diretamente relacionada ao próprio campo escalar. Isto significa que se tais condições de contorno implicarem em $S_\mu = 0$, as equações para os campos φ e $g_{\mu\nu}$ serão as mesmas da teoria de Einstein. Podemos interpretar este fato dizendo que, mesmo “sentindo” a torção (veja a equação de (3.13a) e (3.5)), campos escalares sem massa não a produzem. Tal comportamento é compatível com a idéia de que a torção deve ser determinada por distribuições de *spin*.

Contudo, se verificarmos o caso de campos escalares massivos, onde tem-se a seguinte ação minimamente acoplada

$$S_{\text{scal}} = \int d^4x \epsilon^{2\Theta} \sqrt{-g} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2 \right). \quad (3.14)$$

teremos o seguinte conjunto de equações no lugar de (3.13)

$$(\square + m^2)\varphi = 0, \quad (3.15a)$$

$$R_{\mu\nu}^{V_4} = 2D_\mu S_\nu - \frac{4}{3}g_{\mu\nu}S_\rho S^\rho + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}m^2\varphi^2. \quad (3.15b)$$

$$D_\mu S^\mu = \frac{3}{4}m^2\varphi^2. \quad (3.15c)$$

$$\tilde{K}_{\alpha\beta\gamma} = 0. \quad (3.15d)$$

Percebemos que a equação para o traço da torção, (3.15c), é diferente da análoga do caso do vácuo, (3.13c), temos que campos escalares massivos podem ser fontes de torção. Contrastando com o caso sem massa, as equações (3.15) não admitem como solução $S_\mu = 0$ para campos φ não nulos. Este fato está em discordância com a crença tradicional de que a torção deve ser causada por distribuições de *spin*. Retornaremos a este fato no último capítulo.

É conhecido o fato de que as equações de movimento para campos escalares sem massa obtidas via acoplamento mínimo não são invariantes conforme, contrastando com as equações do R_4 que as são. Para se restabelecer a invariância conforme, é necessária a introdução de um termo proporcional ao escalar de curvatura na lagrangiana do campo escalar. É interessante notar que este novo termo permitirá a interação do campo escalar com a torção do espaço-tempo mesmo no caso onde $\Theta = 0$ [Nov76]. A generalização invariante conforme de S_{scal} em (3.10) é dada por

$$S_{\text{scal}} = \int d^4x \epsilon^{2\Theta} \sqrt{-g} \left\{ \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{R}{6} \varphi^2 \right\}, \quad (3.16)$$

e a equação de movimento correspondente é

$$\left(\square + \frac{R}{6} \right) \varphi = 0, \quad (3.17)$$

A ação (3.16) e as equações de movimento (3.17) são invariantes sob transformações conformes na métrica [Saa93a]

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &\rightarrow \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x) \\ \varphi(x) &\rightarrow \Omega^{-1}(x) \varphi(x) \\ S_{\alpha\beta}{}^\gamma(x) &\rightarrow S_{\alpha\beta}{}^\gamma(x) \\ \Theta(x) &\rightarrow \Theta(x) \end{aligned} \quad (3.18)$$

A generalização para outras dimensões do espaço-tempo pode ser obtida de maneira simples. O coeficiente do termo $R\varphi^2$ e o peso conforme de φ para um espaço-tempo U_N^k são os mesmos do espaço-tempo V_N , e podem ser encontrados, por exemplo, na referência [Buc92]. Contudo, é interessante notar que o tensor de torção $S_{\alpha\beta}{}^\gamma(x)$ e o potencial $\Theta(x)$ são quantidades invariantes conforme para qualquer dimensão do espaço-tempo.

3.3 Campos de gauge

A estudo da interação entre campos de *gauge* e a gravidade tem extrema relevância. Todas as medições astronômicas são de caráter eletromagnético, e historicamente, uma das primeiras previsões da teoria de Einstein foi o “encurvamento” da luz devido a um campo gravitacional. Também as interações



entre partículas elementares, importantes para a Astrofísica. são mediadas por campos de *gauge*, abelianos ou não.

O problema da descrição de campos de *gauge* sobre variedades de Riemann-Cartan ainda é controverso, é comum encontrar na literatura a afirmação de que a interação *minimal* entre campos de *gauge* e a estrutura não-riemanniana do espaço-tempo é incompatível com a simetria de *gauge*. Nas próximas subseções, mostraremos que o acoplamento mínimo, se devidamente utilizado, não leva a nenhuma incompatibilidade com a simetria de *gauge*, e que a restrição de que o espaço-tempo deve ser uma variedade U_4^* surge naturalmente a partir de condições de compatibilidade das equações de movimento.

3.3.1 Campos de Maxwell

É bem conhecido que as equações de Maxwell podem ser expressas usando-se formas diferenciais e cálculo exterior. Esta descrição é a mais “econômica”, no sentido que ela exige o mínimo da geometria da variedade do espaço-tempo. Formas diferenciais e suas derivadas exteriores são objetos covariantes em qualquer variedade diferenciável, munida ou não de conexão afim. Veremos que tal descrição pode ser considerada como a mais fundamental por razões físicas, e não devido somente a argumentos estéticos.

Para se estudar as equações de Maxwell numa variedade métrica diferenciável, introduziremos uma quantidade fundamental, a 1-forma potencial eletromagnético

$$A = A_\alpha dx^\alpha, \quad (3.19)$$

e a partir da 1-forma pontencial eletromagnético pode-se definir a 2-forma de Faraday

$$F = dA = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta, \quad (3.20)$$

onde $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ é o tensor eletromagnético usual.

É importante notar que (3.19) tem o papel de uma conexão no fibrado principal $\mathcal{P}(\mathcal{M}, U(1))$, onde o espaço-base \mathcal{M} é o espaço-tempo e o grupo de *gauge* do campo eletromagnético $U(1)$ é a fibra. Se o fibrado principal $\mathcal{P}(\mathcal{M}, U(1))$ é trivial, como por exemplo temos para $\mathcal{M} = R^4$, podemos assegurar que uma única conexão de *gauge* (3.19) é suficiente para uma descrição global. Contudo, para um fibrado não trivial podemos definir a conexão de *gauge* apenas localmente. Este é o caso do monopolo de Dirac onde, devido à

não trivialidade do $\mathcal{P}(S^2, U(1))$, são necessárias no mínimo duas conexões de *gauge* para descrevê-lo [Nak90]. Estes problemas serão ignorados por agora.

As equações de Maxwell homogêneas surgem naturalmente como consequência da definição (3.20) e do lema de Poincaré

$$dF = d(dA) = \frac{1}{2} \partial_\gamma F_{\alpha\beta} dx^\gamma \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta = 0, \quad (3.21)$$

e em termos de componentes tem-se

$$\partial_{[\gamma} F_{\alpha\beta]} = 0, \quad (3.22)$$

onde $[\]$ significa anti-simetrização.

As equações não-homogêneas no espaço-tempo de Minkowski são dadas por

$$d^*F = 4\pi^*J, \quad (3.23)$$

onde $^*J = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} J^\alpha dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta$ é a 3-forma de corrente construída a partir do vetor de corrente J^δ e

$$^*F = \frac{1}{4} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\gamma\delta} dx^\alpha \wedge dx^\beta, \quad (3.24)$$

é o dual da 2-forma de Faraday, construída a partir dela usando-se $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, o símbolo totalmente anti-simétrico, e o tensor métrico.

Com uma análise cuidadosa de (3.23), percebe-se que ela não é covariante num espaço-tempo curvo, porque *F não é uma 2-forma escalar, mas é uma 2-forma escalar relativa com peso -1 , devido à presença do símbolo totalmente anti-simétrico [Saa93b]. Agora devemos admitir que a variedade de espaço-tempo é munida de uma conexão para usá-la com a finalidade de colocar (3.23) numa forma covariante. Isto é feito substituindo-se a derivada exterior usual pela covariante

$$d^*F \rightarrow \mathcal{D}^*F = \frac{1}{3!} \left(\partial_\alpha ^*F_{\beta\gamma} + \Gamma_{\rho\alpha}^\rho ^*F_{\beta\gamma} \right) \delta_{\mu\nu\omega}^{\alpha\beta\gamma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\omega, \quad (3.25)$$

onde $\delta_{\mu\nu\omega}^{\alpha\beta\gamma}$ é o símbolo de Kronecker generalizado. A derivada exterior covariante em (3.25) leva em conta que $^*F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\gamma\delta}$ é um tensor relativo $(0, 2)$ com peso -1 . Podemos checar que \mathcal{D}^*F é uma 3-forma escalar relativa com peso -1 . Tem-se então a seguinte generalização covariante de (3.23)

$$\mathcal{D}^*F = 4\pi^*J. \quad (3.26)$$

A equação (3.21) já está numa forma covariante, para qualquer variedade diferenciável.

As informações sobre a geometria da variedade estão contidas no tensor métrico $g_{\alpha\beta}(x)$ usado na construção de *F , veja (3.24), e no traço da conexão usado na definição da derivada exterior covariante (3.25). Portanto, pode-se admitir que as equações (3.26) e (3.21) foram obtidas das minkowskianas por meio da prescrição de acoplamento mínimo usada nas formas diferenciais. A expressão em termos de componentes para (3.26) num espaço-tempo de Riemann-Cartan é

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} F^{\nu\mu} + 2S_\mu F^{\nu\mu} = 4\pi J^\nu. \quad (3.27)$$

Podemos ver que a equação (3.27), obtida usando-se o acoplamento mínimo nas formas diferenciais, permite a interação do eletromagnetismo com a torção do espaço-tempo sem destruir a invariância de *gauge*.

Calculando-se a derivada exterior covariante em ambos os lados de (3.26) obtemos

$$4\pi \mathcal{D}^*J = \frac{1}{4!} \left(\partial_\lambda \Gamma_{\rho\mu}^\rho \right) {}^*F_{\nu\omega} \delta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\lambda\mu\nu\omega} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta, \quad (3.28)$$

e para garantir uma condição de conservação generalizada para a corrente para $F_{\mu\nu}$ arbitrário precisamos que

$$\partial_\lambda \Gamma_{\rho\mu}^\rho - \partial_\mu \Gamma_{\rho\lambda}^\rho = 0, \quad (3.29)$$

que possui, no mínimo localmente, como solução geral

$$\Gamma_{\rho\mu}^\rho = \partial_\mu f(x), \quad (3.30)$$

que é exatamente a condição conjectura do Capítulo 1, condição suficiente para que o espaço-tempo seja uma variedade U_4^v , conforme a Teorema 2.1. Usando que $\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \rho\mu \end{smallmatrix} \right\} = \partial_\mu \ln \sqrt{-g}$, a equação (3.30) terá solução geral somente se o traço do tensor de torção obedecer (3.1). Neste caso, $f(x) = \ln \left(\epsilon^{2\Theta} \sqrt{-g} \right)$. Quando $J = 0$, a condição (3.30) é uma condição de consistência para a equação (3.26). Sob a condição (3.1), temos a seguinte expressão em coordenadas para (3.26)

$$\frac{e^{-2\Theta}}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \epsilon^{2\Theta} \sqrt{-g} F^{\nu\mu} = 4\pi J^\nu, \quad (3.31)$$

e para a condição de conservação generalizadas temos

$$\frac{e^{-2\Theta}}{\sqrt{-g}} \partial_\mu e^{2\Theta} \sqrt{-g} J^\mu = 0. \quad (3.32)$$

Devemos reforçar que se o traço do tensor de torção não obedecer (3.1), não é possível obter uma condição de conservação generalizada para a corrente.

Podemos agora perguntar se é possível obter a equação não homogênea (3.31) a partir de um princípio de mínima ação. Sabe-se que no espaço-tempo de Minkowski, a equação não-homogênea pode ser obtida a partir da seguinte ação

$$S = - \int \left(4\pi {}^*J \wedge A + \frac{1}{2} F \wedge {}^*F \right). \quad (3.33)$$

Além do tensor métrico, a única quantidade não covariante em (3.33) é o elemento de volume implícito

$$dv = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta. \quad (3.34)$$

Introduzindo o elemento de volume compatível com a conexão

$$dv = \frac{1}{4!} e^{2\Theta} \sqrt{-g} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta, \quad (3.35)$$

e o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, tem-se a seguinte expressão em coordenadas para (3.33)

$$S = \int d^4x e^{2\Theta} \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + 4\pi J^\alpha A_\alpha \right). \quad (3.36)$$

Novamente, (3.36) pode ser vista como a ação obtida via o acoplamento mínimo, usado nas formas diferenciais, de (3.33). De fato, (3.36) pode ser obtida simplesmente pelo uso do operador ($*$) de Hodge modificado da Proposição 2.1 [Saa93b]. Este é certamente o mais *minimal* dos acoplamentos, e a situação será idêntica ao caso onde o espaço-tempo é uma variedade V_4 [Saa93b].

É simples verificar que podemos obter (3.31) a partir da ação (3.36). Pode-se verificar também que as equações (3.22) e (3.31) são invariantes sob as transformações usuais do grupo $U(1)$, dadas por (1.4). Deve-se notar a importância da condição generalizada de conservação (3.32) para garantir a invariância de *gauge* da ação (3.36).

Antes de introduzirmos os termos cinéticos da geometria em nossas análises, faremos uma pequena digressão para discutir a maneira tradicional de acoplar campos de Maxwell à torção, quando usualmente se aplica à prescrição de acoplamento mínimo nas equações tensoriais. Na maneira usual, perdemos não só a invariância de *gauge*, mas também a equação homogênea (3.22). Usando-se a prescrição usual em (3.22) obtemos

$$\partial_{[\alpha} \tilde{F}_{\beta\gamma]} + 2S_{[\alpha\beta}{}^\rho \tilde{F}_{\gamma]\rho} = 0, \quad (3.37)$$

onde

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} - 2S_{\alpha\beta}{}^\rho A_\rho. \quad (3.38)$$

É claro que $\tilde{F}_{\alpha\beta}$ não é mais invariante sob $U(1)$. Também podemos verificar que (3.37) não possui solução geral para $S_{\alpha\beta}{}^\rho$ arbitrário [Saa93b]. A origem destes problemas está ligado à diferença entre as derivadas exteriores e as derivadas covariantes existentes em U_4 . A relação entre a derivada exterior de uma 1-forma e a derivada covariante de um vetor em V_4

$$dA = \partial_\alpha A_\beta dx^\alpha \wedge dx^\beta = D_\alpha A_\beta dx^\alpha \wedge dx^\beta, \quad (3.39)$$

não é válida em U_4 , onde no lugar de (3.39) tem-se

$$dA = \partial_\alpha A_\beta dx^\alpha \wedge dx^\beta = \left(D_\alpha A_\beta + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}{}^\rho A_\rho \right) dx^\alpha \wedge dx^\beta \neq D_\alpha A_\beta dx^\alpha \wedge dx^\beta. \quad (3.40)$$

A diferença entre (3.39) e (3.40) é a origem dos problemas com o uso do acoplamento mínimo nas equações tensoriais em U_4 . Em V_4 , existe uma certa “equivalência” entre derivadas covariantes e exteriores, e por isso encontramos o mesmo resultado usando o acoplamento mínimo nas quantidades tensoriais ou nas formas diferenciais. Esta “equivalência” não é verificada em U_4 , onde o acoplamento mínimo somente pode ser usado consistentemente nas formas diferenciais. Baseados nestes fatos é que sustentamos a afirmação de que a representação em termos de formas diferenciais para as equações de Maxwell é a mais fundamental.

Vamos agora incluir os termos cinéticos da geometria para que possamos obter as equações totais para campos de Maxwell sobre U_4^v . Sem perda de generalidade, trataremos do caso sem fontes, $J_\mu = 0$. A ação total será

$$S = S_{\text{grav}} + S_{\text{Maxw}} = - \int d^4x e^{2\Theta} \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (3.41)$$

Como nos casos já estudados, a equação $\tilde{K}_{\alpha\beta\gamma} = 0$ é obtida através da minimização de (3.41). As outras equações serão

$$\frac{e^{-2\Theta}}{\sqrt{-g}} \partial_\mu e^{2\Theta} \sqrt{-g} F^{\nu\mu} = 0, \quad (3.42a)$$

$$R_{\mu\nu}^{\nu\lambda} = 2D_\mu S_\nu - \frac{4}{3} g_{\mu\nu} S_\rho S^\rho - \frac{1}{2} \left(F_{\mu\alpha} F_\nu{}^\alpha + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\omega\rho} F^{\omega\rho} \right), \quad (3.42b)$$

$$D_\mu S^\mu = -\frac{3}{8} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (3.42c)$$

Podemos ver que as equações (3.42) são invariantes sob a ação do grupo $U(1)$. Também é claro a partir da equação (3.42a) que campos de Maxwell interagem como a estrutura não riemanniana do espaço-tempo. Como no caso dos campos escalares massivos, as equações (3.42) não admitem como solução $S_\mu = 0$ para $F_{\alpha\beta}$ arbitrário, veja (3.42c). Portanto, campos de Maxwell também servem de fonte para a torção do espaço-tempo.

3.3.2 Campos não-abelianos

Com a finalidade de generalizar os resultados da Seção 3.3.1 para o caso não-abeliano, devemos introduzir a 1-forma potencial não-abeliano

$$A = A_\mu^\alpha \lambda^\alpha dx^\mu, \quad (3.43)$$

onde λ^α são os geradores do grupo de Lie de *gauge* \mathcal{G} ,

$$[\lambda^a, \lambda^b] = f^{abc} \lambda^c. \quad (3.44)$$

Índices romanos são reservados para a variedade de grupo, e a convenção da soma para índices repetidos é adotada. Vamos nos restringir a grupos de *gauge* compactos e semi-simples, para que as constantes de estrutura sejam anti-simétricas sob a troca de qualquer par de índices [Olv86]. Um elemento $g \in \mathcal{G}$ pode ser escrito como

$$h(x) = \exp i\theta^a(x) \lambda^a, \quad (3.45)$$

onde $\theta^a(x)$ são os parâmetros contínuos do grupo.

Aqui é importante fazermos os mesmos comentários já feitos na Seção 3.3.1. O potencial de *gauge* possui papel de conexão no fibrado principal

$\mathcal{P}(\mathcal{M}, \mathcal{G})$, e podemos garantir a validade global de uma única conexão de gauge apenas para fibrados triviais.

A partir de (3.43) podemos definir a 2-forma não-abeliana equivalente a (3.20),

$$F = DA = dA + A \wedge A = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a \lambda^a dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (3.46)$$

onde $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ é o tensor de campo não-abeliano usual. A derivada D é a derivada covariante que se transforma de maneira apropriada sob as transformações de *gauge* [Nak90].

Como no caso abeliano, as equações homogêneas não-abelianas são consequência das identidades de Bianchi

$$DF = dF + A \wedge F - F \wedge A = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu F_{\omega\nu}^a + A_\mu^b F_{\omega\nu}^c f^{abc} \right) \lambda^a dx^\mu \wedge dx^\omega \wedge dx^\nu = 0. \quad (3.47)$$

As equações não-homogêneas para campos de *gauge* não-abelianos são escritas como as de Maxwell (3.23). Por simplicidade e sem perda de generalidade, tratemos o caso sem fontes,

$$D^*F = d^*F + A \wedge ^*F - ^*F \wedge A = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu ^*F_{\omega\nu}^a + A_\mu^b ^*F_{\omega\nu}^c f^{abc} \right) \lambda^a dx^\mu \wedge dx^\omega \wedge dx^\nu = 0, \quad (3.48)$$

onde o dual do tensor de campo não-abeliano é definido como em (3.24). Da mesma maneira que no caso abeliano, a equação (3.47) já está numa forma covariante para qualquer variedade, mas devido ao termo *F , a equação (3.48) deve ser generalizada num espaço-tempo curvo. Para colocarmos (3.48) numa forma covariante, precisamos substituir $d^*F \rightarrow \mathcal{D}^*F$ em (3.48) como fizemos em (3.25). A derivada \mathcal{D} agora é definida como

$$\mathcal{D}^*F = d^*F + \omega \wedge ^*F, \quad (3.49)$$

onde $\omega = \Gamma_{\rho\sigma}^\rho dx^\sigma$. Pode-se verificar facilmente que (3.49) é equivalente a (3.25). Usando-se a derivada \mathcal{D} obtemos a seguinte generalização para (3.48)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^*F &= d^*F + \omega \wedge ^*F + A \wedge ^*F - ^*F \wedge A = \\ &= \frac{1}{2} \left(\partial_\mu ^*F_{\omega\nu}^a + \Gamma_{\rho\mu}^\rho ^*F_{\omega\nu}^a + A_\mu^b ^*F_{\omega\nu}^c f^{abc} \right) \lambda^a dx^\mu \wedge dx^\omega \wedge dx^\nu = 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Para que as equações (3.47) e (3.50) tenham soluções não triviais precisamos que $D(DF) = D(\mathcal{D}^*F) = 0$ [Saa93b]. Usando o fato de que DF e \mathcal{D}^*F são

respectivamente uma 3-forma e uma 3-forma relativa com peso -1 , obtemos

$$D(DF) = d(DF) + A \wedge (DF) + (DF) \wedge A = 0, \quad (3.51)$$

para a equação homogênea (3.47). Para o caso da não-homogênea tem-se

$$D(D^*F) = d(D^*F) + \omega \wedge D^*F + A \wedge (D^*F) + (D^*F) \wedge A = d\omega \wedge {}^*F, \quad (3.52)$$

e para obtermos a condição desejada $D(D^*F) = 0$ para qualquer F , somos levados a $d\omega = 0$. Já que ω é uma 1-forma fechada, pela recíproca do lema de Poincaré temos que, no mínimo num aberto contrátil, ω é exata, $\omega = df$, que é o mesmo resultado que obtivemos no caso abeliano.

Sob a hipótese (3.1) temos a expressão usual em coordenadas para (3.47)

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \left(\partial_\beta F_{\gamma\delta}^a + A_\beta^b F_{\gamma\delta}^c f^{abc} \right) = 0, \quad (3.53)$$

e a seguinte expressão para a equação generalizada não-homogênea (3.50)

$$\frac{e^{-2\Theta}}{\sqrt{-g}} \partial_\mu e^{2\Theta} \sqrt{-g} F^{\alpha\nu\mu} + A_\mu^b F^{c\nu\mu} f^{abc} = 0. \quad (3.54)$$

Pode-se verificar que as equações (3.53) e (3.54) são invariantes sob as transformações de *gauge* não-abelianas

$$A_\mu \rightarrow h A_\mu h^{-1} + h \partial_\mu h^{-1}, \quad (3.55)$$

onde $A_\mu = A_\mu^a \lambda^a$. É claro, a partir de (3.54), que campos de *gauge* não-abelianos são sensíveis à estrutura não-riemanniana do espaço-tempo.

Como no caso abeliano, podemos tentar obter a equação (3.54) de um princípio de mínima ação. Sabe-se que, no espaço-tempo de Minkowski as equações não-homogêneas são obtidas a partir da ação

$$S = -\frac{1}{2} \int \text{tr} (F \wedge {}^*F). \quad (3.56)$$

a qual possui a seguinte expressão em coordenadas locais

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \text{tr} \left(F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \lambda^a \lambda^b \right) = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (3.57)$$

onde a condição de normalização $\text{tr}(\lambda^a \lambda^b) = \delta^{ab}$ é utilizada para os geradores do grupo.

Para colocarmos (3.56) numa forma covariante, precisamos substituir o operador (*) pelo modificado da Proposição 2.1. Obteremos

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \epsilon^{2\Theta} \sqrt{-g} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (3.58)$$

O elemento de volume compatível com a conexão surge naturalmente em (3.58). As equações (3.54) seguem da minimização de (3.58). É fácil verificarmos que a ação (3.58) é invariante sob as transformações de *gauge* não-abelianas (3.55).

Incorporando-se os termos cinéticos da geometria, teremos basicamente o mesmo sistema de equações da seção 3.3.1,

$$S = - \int d^4x \epsilon^{2\Theta} \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \right). \quad (3.59)$$

As equações derivadas de (3.59) são essencialmente as mesmas que obtivemos no caso abeliano, equações (3.42). Quanto à interação com a geometria de U_4^v , campos de *gauge* abelianos e não abelianos são, de certa forma, equivalentes.

3.4 Férmions

A lagrangiana para um férmion de Dirac de massa m no espaço-tempo de Minkowski é dada por

$$\mathcal{L}_F = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^a \partial_a \psi - (\partial_a \bar{\psi}) \gamma^a \psi \right) - m \bar{\psi} \psi, \quad (3.60)$$

onde γ^a são as matrizes de Dirac e $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Os índices gregos denotam coordenadas do espaço-tempo (holonômicas) e os romanos coordenadas localmente chatas (não-holonômicas). É bem conhecido [Sab85] o fato de que para escrever (3.60) em uma forma covariante, são necessárias a introdução do campo de *vierbein* $e_a^\mu(x)$, e a generalização das matrizes de Dirac, $\gamma^\mu(x) = e_a^\mu(x) \gamma^a$. As derivadas parciais também devem ser generalizadas com a introdução da conexão espinorial ω_μ ,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi &\rightarrow \nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \omega_\mu \psi, \\ \partial_\mu \bar{\psi} &\rightarrow \nabla_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - \bar{\psi} \omega_\mu, \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde a conexão espinorial é dada por [Heh76]

$$\begin{aligned}\omega_\mu &= \frac{1}{8}[\gamma^a, \gamma^b]\epsilon_a^\nu (\partial_\mu \epsilon_{\nu b} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \epsilon_{\rho b}) \\ &= \frac{1}{8}(\gamma^\nu \partial_\mu \gamma_\nu - (\partial_\mu \gamma_\nu) \gamma^\nu - [\gamma^\nu, \gamma_\rho] \Gamma_{\mu\nu}^\rho).\end{aligned}\quad (3.62)$$

Seguindo estes passos e introduzindo-se o elemento de volume compatível com a conexão (3.2), teremos a ação para férmions de Dirac sobre variedades de Riemann-Cartan

$$S_F = \int d^4x e^{2\Theta} \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu(x) \nabla_\mu \psi - (\nabla_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu(x) \psi) - m \bar{\psi} \psi \right\}. \quad (3.63)$$

Variando a ação (3.63) com respeito a $\bar{\psi}$ tem-se

$$\frac{e^{-2\Theta}}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_F}{\delta \bar{\psi}} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \nabla_\mu \psi + \omega_\mu \gamma^\mu \psi) - m \psi + \frac{i}{2} \frac{e^{-2\Theta}}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \epsilon^{2\Theta} \sqrt{-g} \gamma^\mu \psi = 0. \quad (3.64)$$

Usando o resultado [Saa93e]

$$[\omega_\mu, \gamma^\mu] \psi = - \left(\frac{e^{-2\Theta}}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \epsilon^{2\Theta} \sqrt{-g} \gamma^\mu \right) \psi, \quad (3.65)$$

que pode ser verificado usando-se (3.62), (2.30) e propriedades das matrizes de Dirac ordinárias e do campo de *vierbein*, obtemos a seguinte equação para ψ sobre uma variedade de Riemann-Cartan

$$i \gamma^\mu(x) \nabla_\mu \psi - m \psi = 0. \quad (3.66)$$

A equação para $\bar{\psi}$ pode ser obtida se maneira semelhante,

$$i (\nabla_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu(x) + m \bar{\psi} = 0. \quad (3.67)$$

Podemos ver que as equações (3.66) e (3.67) são as mesmas que obteríamos se usássemos a prescrição de acoplamento mínimo nas equações de movimento minkowskianas. Como já foi dito, na abordagem usual para a teoria de Einstein-Cartan, as equações obtidas do princípio de mínima ação não coincidem com as equações obtidas pelo acoplamento mínimo das equações minkowskianas [Sab85].

A lagrangiana que descreve a interação de férmions com a gravitação de Einstein-Cartan será

$$\begin{aligned}
S &= S_{\text{grav}} + S_{\text{F}} & (3.68) \\
&= - \int d^4x \epsilon^{2\Theta} \sqrt{-g} \left\{ R - \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right. \\
&\quad \left. + \bar{\psi} [\gamma^\mu, \omega_\mu] \psi) + m \bar{\psi} \psi \right\} \\
&= - \int d^4x \epsilon^{2\Theta} \sqrt{-g} \left\{ R - \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right. \\
&\quad \left. + \bar{\psi} [\gamma^\mu, \omega_\mu^{V_4}] \psi) - \frac{i}{8} \bar{\psi} \bar{K}_{\mu\nu\omega} \gamma^{\mu\nu} \gamma^\omega \psi + m \bar{\psi} \psi \right\},
\end{aligned}$$

onde foi usado que $\gamma^a [\gamma^b, \gamma^c] + [\gamma^b, \gamma^c] \gamma^a = 2\gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]}$, e que

$$\omega_\mu = \omega_\mu^{V_4} + \frac{1}{8} K_{\mu\nu\rho} [\gamma^\nu, \gamma^\rho], \quad (3.69)$$

onde $\omega_\mu^{V_4}$ é a conexão espinorial de V_4 , calculada usando-se os símbolos de Christoffel no lugar na conexão total em (3.62).

A peculiaridade dos campos fermiônicos é que, pela primeira vez, teremos uma equação não trivial para \bar{K} a partir de (3.68). A equação de Euler-Lagrange para \bar{K} é dada por

$$\frac{e^{-2\Theta}}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta \bar{K}} = \bar{K}^{\mu\nu\omega} + \frac{i}{8} \bar{\psi} \gamma^{[\mu} \gamma^\nu \gamma^{\omega]} \psi = 0. \quad (3.70)$$

De maneira diferente dos casos anteriores, temos que a parte sem traço do tensor de contorção, $\bar{K}_{\alpha\beta\gamma}$, é proporcional à distribuição de *spin*. Ela ainda será zero fora das distribuições de matéria, já que sua equação é algébrica e portanto não prevê propagação. As outras equações seguem naturalmente da minimização de (3.68). A principal diferença entre estas equações e as usuais obtidas pela abordagem tradicional, é que para as nossa equações temos soluções não triviais para o traço da torção, o qual é derivado de Θ . Na abordagem tradicional, o tensor de torção é um tensor totalmente anti-simétrico, sua equação é idêntica a (3.70), e portanto ele possui traço nulo.

3.5 Sobre a condição $dS = 0$

Nesta seção, voltaremos a discutir a condição $dS = 0$, que é a condição necessária e suficiente para que uma variedade U_4 admita uma forma de volume compatível com a conexão. No Capítulo 1, vimos que exigências fisicamente plausíveis para situações onde usamos o princípio de mínima ação em conjunto com a prescrição do acoplamento mínimo, naturalmente levam a esta condição. Mesmo sendo o princípio de mínima ação essencial para a obtenção das equações para a gravitação de Einstein-Cartan, podemos especular sobre as equações para campos materiais em U_4 sem o uso do princípio de mínima ação, obtendo as equações de movimento diretamente via acoplamento mínimo das minkowskianas. Veremos que a condição $dS = 0$ surgirá mesmo sem o uso do princípio de mínima ação.

Consideremos primeiramente o mais simples dos campos materiais, o caso de campos escalares sem massa φ . Sua equação de movimento em R_4 é dada por:

$$\mathcal{F}^{R_4}\varphi = \partial_\mu \partial^\mu \varphi = 0. \quad (3.71)$$

Aplicando-se o acoplamento mínimo a (3.71) obtém-se

$$\mathcal{F}^{U_4}\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} \partial^\mu \varphi + 2S_\mu \partial^\mu \varphi = 0. \quad (3.72)$$

Para dar continuidade às análises clássicas, precisamos definir um produto interno para o espaço das soluções de (3.72), da mesma maneira que fazemos para o caso do R_4 . Isto somente é possível se o operador diferencial \mathcal{F}^{U_4} for simétrico (hermitiano), no sentido que [Wit75]

$$\int \varphi_1^* \mathcal{F}^{U_4} \varphi_2 \, d\text{vol} = \int (\mathcal{F}^{U_4} \varphi_1)^* \varphi_2 \, d\text{vol}, \quad (3.73)$$

para quaisquer funções φ_1 e φ_2 suficientemente diferenciáveis e de suporte compacto. De fato, para que (3.73) esteja rigorosamente definida, devemos estabelecer propriedades de φ_1 e φ_2 no contorno da região de integração. Não nos preocuparemos com estes problemas, vamos supor que as funções simplesmente se anulam no contorno.

Pode-se verificar que a condição (3.73) somente será verificada se $S = d\Theta$ [Saa93a], e neste caso

$$\mathcal{F}^{U_4} = \frac{e^{-2\Theta}}{\sqrt{-g}} \partial_\mu e^{2\Theta} \sqrt{-g} \partial^\mu, \quad (3.74)$$

e $d\text{vol}$ deve ser o elemento de volume compatível com a conexão, $d\text{vol} = \epsilon^{2\Theta} \sqrt{-g} d^4x$. Vemos que a restrição de que espaço-tempo deve ser uma variedade U_4^v é exigida pelas equações de movimento de campos escalares.

Para campos de *gauge* abelianos, vimos que a equação obtida por acoplamento mínimo das equações minkowskianas são (veja Seção 3.3.1)

$$dF = 0, \quad (3.75a)$$

$$\mathcal{D}^* F = 4\pi^* J, \quad (3.75b)$$

onde $*$ é o operador de Hodge usual, o da Seção 3.3.1, e não o modificado da Proposição 2.1. A condição de integrabilidade de (3.75) é dada por

$$\mathcal{D}\mathcal{D}^* F = 4\pi\mathcal{D}^* J, \quad (3.76)$$

já que $ddF = 0$ pelo lema de Poincaré. Contudo, para que seja possível interpretar J^μ como um quadri-vetor corrente, precisamos de uma condição de conservação. Para o nosso caso, esta condição de conservação será naturalmente $\mathcal{D}^* J = 0$, que possui a familiar expressão em coordenadas $D_\mu J^\mu = 0$. Isto leva a

$$\mathcal{D}\mathcal{D}^* F = d\omega \wedge *F = 0, \quad (3.77)$$

onde ω é dado por (2.2b). Esta condição, já conhecida da Seção 3.3.1, implica em $dS = 0$.

A exigência de hermiticidade para a equação do campo escalar e a interpretação de J^μ como corrente, envolvem integrações sobre regiões do espaço-tempo. Além disso, elas envolvem, de uma forma ou de outra, o teorema de Gauss (Teorema 2.2), o qual somente está definido em U_4^v . Os campos fermiônicos também enfrentam os mesmos problemas.

Mesmo evitando o princípio de mínima ação, parece que não podemos evitar integrações sobre o espaço-tempo e o uso do teorema de Gauss nas análises clássicas. Como o teorema de Gauss somente está definido para U_4^v , temos a mesma restrição que serviu de hipótese para este capítulo.

Capítulo 4

Teoria de Cordas e Gravitação

Neste capítulo, mostraremos como os resultados do Capítulo 2 podem fornecer uma interpretação geométrica para as correções da teoria de cordas à gravitação (*dilaton gravity*). Não é nossa intenção discutir problemas intrínsecos de teoria de cordas. A referência [Gre87] é indicada para uma introdução à teoria de cordas e sua conexão com a gravitação.

4.1 Dilaton gravity

É bem conhecido que a equação de Einstein para o vácuo, $R_{\mu\nu}^V = 0$, surge naturalmente na análise quântica até a ordem de *1-loop* de cordas bosônicas sobre espaços-tempos curvos [Sch74]. De fato, foi a partir desse resultado que as teorias de cordas passaram a ser consideradas candidatas à descrição de campos não-hadrônicos. Quando os outros campos de fundo, o *dilaton* Φ e o campo anti-simétrico $B_{\mu\nu}$, são incorporados, a exigência de invariância conforme leva a um novo conjunto de equações, e estas são as equações da gravitação “dilatônica”.

A ação clássica que descreve uma corda bosônica sobre um espaço-tempo curvo N -dimensional e que incorpora todos os campos de fundo relevantes é dada por [Gre87]

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left(\sqrt{h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu}(X) + \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu}(X) - \alpha' \sqrt{h} \Phi(X) R^{(2)} \right), \quad (4.1)$$

onde σ , $h_{\alpha\beta}$, $\epsilon^{\alpha\beta}$ e $R^{(2)}$ são respectivamente coordenadas, o tensor métrico, o símbolo totalmente anti-simétrico e o escalar de curvatura na folha-mundo bi-dimensional. As cordas são objetos extensos, cujas equações de movimento são obtidas da minimização da superfície descrita por sua propagação, da mesma maneira que as partículas pontuais possuem equações que são obtidas da minimização da linha descrita por sua propagação. A quantidade $\frac{1}{2\pi\alpha'}$ é interpretada como sendo a tensão na corda, e no limite $\alpha' \rightarrow 0$ esta deveria colapsar e obteríamos a dinâmica de um corpo pontual.

A equação de Einstein para o vácuo surge de uma análise quântica até a ordem de 1-loop de (4.1) com $B_{\mu\nu} = \Phi = 0$. As condições necessárias para garantir a invariância conforme até a ordem de 1-loop de (4.1) (funções Beta) são [Cal85, Gre87]

$$\beta^\Phi = \frac{N-26}{3\alpha'} + 4D_\mu\Phi D^\mu\Phi - 4D^2\Phi - R + \frac{1}{12}H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad (4.2a)$$

$$\beta_{\mu\nu}^g = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}H_\mu^{\lambda\rho}H_{\nu\lambda\rho} + 2D_\mu D_\nu\Phi = 0, \quad (4.2b)$$

$$\beta_{\mu\nu}^B = D_\lambda H_{\mu\nu}^\lambda - 2(D_\lambda\Phi)H_{\mu\nu}^\lambda = 0, \quad (4.2c)$$

onde $R_{\mu\nu}$, R e D_μ são respectivamente o tensor de Ricci, o escalar de curvatura e a derivada covariante da variedade de fundo \mathcal{M} , a qual usualmente admitimos ser riemanniana, e portanto tais quantidades são calculadas a partir dos símbolos de Christoffel. Os índices superiores V_4 foram omitidos para maior clareza de (4.2). O novo campo $H_{\alpha\beta\gamma}$ em (4.2) é o tensor anti-simétrico de terceira ordem definido a partir de $B_{\mu\nu}$,

$$H_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha B_{\beta\gamma} + \partial_\gamma B_{\alpha\beta} + \partial_\beta B_{\gamma\alpha}. \quad (4.3)$$

Pode-se verificar que as equações (4.2) podem ser obtidas da minimização da seguinte ação efetiva

$$S = - \int d^N x \sqrt{-g} e^{-2\Phi} \left(R + 4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{12}H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma} - \frac{N-26}{3\alpha'} \right). \quad (4.4)$$

A ação (4.4) é a ação efetiva para a gravitação com as correções devido ao *dilaton* e ao campo $B_{\mu\nu}$, ela é o ponto de partida para as discussões sobre cosmologia de cordas [Tse92]. No limite $B_{\mu\nu} = \Phi = 0$, (4.4) se reduz a ação riemanniana usual de Hilbert-Einstein para o vácuo, suas equações de Euler-Lagrange serão simplesmente $R_{\mu\nu}^{V_4} = 0$ para $N = 26$.

4.2 Interpretação geométrica

O propósito desta seção é mostrar que a ação efetiva (4.4) é de fato a ação de Hilbert-Einstein para uma variedade de Riemann-Cartan N -dimensional munida de um elemento de volume compatível com a conexão, U_N^v . Isto estabelece uma ligação entre as funções Beta para os campos de fundo em primeira ordem e a gravitação de Einstein-Cartan, da mesma maneira que existe uma ligação entre a gravitação de Einstein e a função Beta do gráviton em primeira ordem. Já é conhecido, da análise clássica dos modelos sigma não lineares, que o campo $B_{\mu\nu}$ é relacionado à torção do espaço-tempo [Bra85]. Com os resultados do Capítulo 2, temos que, além do campo $B_{\mu\nu}$, o *dilaton* também pode ser interpretado em termos das quantidades não-riemannianas da variedade de fundo.

Recordando o Capítulo 3, a ação de Hilbert-Einstein para U_N^v com uma constante cosmológica Λ é dada por

$$\begin{aligned} S_{\text{grav}} &= - \int d\text{vol} (R + \Lambda) \\ &= - \int d^N x \sqrt{-g} e^{2\Theta} \left(R^{vN} + \frac{4N}{N-1} \partial_\mu \Theta \partial^\mu \Theta - \tilde{K}_{\nu\rho\alpha} \tilde{K}'^{\alpha\nu\rho} + \Lambda \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde os termos de superfícies foram desprezados.

A semelhança entre (4.4) e (4.5) é surpreendente. Elas podem ser identificadas se admitirmos que

$$\Theta(x) = -\Phi(x), \quad (4.6a)$$

$$\Lambda = -\frac{N-26}{3\alpha'}, \quad (4.6b)$$

$$\frac{1}{12} H_{\alpha\beta\gamma} H^{\alpha\beta\gamma} = K_{\nu\rho\alpha} K'^{\alpha\nu\rho} = \tilde{K}_{\nu\rho\alpha} \tilde{K}'^{\alpha\nu\rho} - \frac{4}{N-1} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi. \quad (4.6c)$$

As expressões (4.6) merecem algum esclarecimento. A primeira equação, (4.6a), identifica o *dilaton* com o potencial escalar para o traço da torção, *i.e.* $S_\mu(x) = -\partial_\mu \Phi(x)$. A última, (4.6c), relaciona o tensor anti-simétrico $H_{\alpha\beta\gamma}$, que é derivado a partir do campo anti-simétrico $B_{\mu\nu}$, ao tensor de contorção, o qual não é anti-simétrico em geral e depende do *dilaton*. Ela admite como solução [Saa93c]

$$\tilde{K}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{H_{\mu\nu\omega} H^{\mu\nu\omega} + \frac{48}{N-1} \partial_\nu \Phi \partial^\nu \Phi} \frac{H_{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{H_{\mu\nu\omega} H^{\mu\nu\omega}}}, \quad (4.7)$$

válida para $H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma} \neq 0$. Consideremos a equação (4.7) para $\Phi = 0$. Neste caso, tem-se a interpretação padrão de que o campo $H_{\alpha\beta\gamma}$ contribui para a torção do espaço-tempo [Bra85]. A interpretação da parte sem traço do tensor de contorção, $\tilde{K}_{\alpha\beta\gamma}$, no contexto usual da gravitação de Einstein-Cartan é problemática, pois sabe-se que $H_{\alpha\beta\gamma}$, definido por (4.3), é invariante sob a transformação de “gauge”

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu, \quad (4.8)$$

e não temos razão *a priori* para esperar tal característica do tensor $\tilde{K}_{\alpha\beta\gamma}$. Contudo, a clara semelhança de (4.4) e (4.5) é nosso argumento básico para a afirmação de que o *dilaton* pode ser interpretado em termos das quantidades não-riemannianas do espaço de fundo conforme as expressões (4.6). [Saa93d]

É instrutivo explorarmos (4.6) em mais detalhes com dois casos particulares, o tri e o quadri-dimensional. Numa variedade tri-dimensional, um tensor de terceira ordem totalmente anti-simétrico tem a forma

$$H_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Omega(x), \quad (4.9)$$

onde $\Omega(x)$ é uma densidade escalar. Nesse caso, $H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma} = 0$ implica em $\Omega = 0$, e (4.7) está definida mesmo neste limite. Para o caso tri-dimensional, (4.7) é válida para qualquer $H_{\alpha\beta\gamma}$.

Já numa variedade quadri-dimensional, um tensor de terceira ordem totalmente anti-simétrico possui apenas 4 componentes independentes, o que nos permite escrever

$$H_{\alpha\beta\gamma}(x) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} j(x) H^\delta(x), \quad (4.10)$$

onde H^δ é um vetor contravariante e $j(x)$ é uma densidade escalar. Com a definição

$$H^{\alpha\beta\gamma}(x) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} j^{-1}(x) H_\delta(x), \quad (4.11)$$

e usando-se o fato de que a parte sem traço do tensor de contorção em (4.7) é também totalmente anti-simétrica, e portanto pode ser derivada a partir de um vetor \tilde{K}_α da mesma maneira que (4.10), temos a seguinte expressão para a equação (4.6c)

$$\frac{1}{2} H_\alpha H^\alpha = 6 \tilde{K}_\alpha \tilde{K}^\alpha - \frac{4}{3} S_\alpha S^\alpha. \quad (4.12)$$

A condição $H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma} = 0$ implica que $H_\alpha H^\alpha = 0$, e neste caso uma solução de (4.12) é $\tilde{K}_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}S_\alpha$. O tensor $\tilde{K}_{\alpha\beta\gamma}$ deve ser construído a partir de S^α como em (4.10). A escolha consistente para a densidade $j(x)$ é a que nos permite identificar (4.10) com o operador (*) de Hodge modificado [Saa93d], $j(x) = e^{2\Theta}\sqrt{-g}$, e neste caso teremos

$$\tilde{K}_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{\sqrt{2}}{3}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{-2\Phi}\sqrt{-g}\partial^\delta\Phi, \quad (4.13)$$

válido para $H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma} = 0$.

Estes resultados permitem-nos dizer que (4.1) pode ser vista como a ação para cordas bosônicas sobre U_N^v , onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico de U_N^v , e o *dilaton* Φ e o campo anti-simétrico $B_{\mu\nu}$ são relacionados à estrutura não-riemanniana do espaço-tempo por (4.6). Esta é uma nova interpretação para o campo do *dilaton*, que junto com as interpretações usuais para o gráviton $g_{\mu\nu}$ e para o campo anti-simétrico $B_{\mu\nu}$, nos proporciona uma interpretação geométrica para todos os estados sem massa da corda bosônica fechada [Gre87]. Tal descrição geométrica é satisfatória, já que acredita-se que, de alguma forma, as teorias de cordas, “*theory of everything*”, englobam também a gravitação. O estudo da geometria de U_N^v e sua relação com teoria de cordas mostra-se extremamente promissor.

Há um último comentário a respeito de (4.6). A equação para a constante cosmológica, (4.6b), parece impor um limite experimental para α' . Sabe-se que a constante cosmológica do nosso universo deve ser muito pequena, e isto implicaria num valor enorme para α' . Devemos ser cuidadosos com esta conclusão, de fato, (4.6) somente está bem definida para $N = 26$. As funções Beta (4.2) são calculadas perturbativamente em α' , mas percebemos que (4.2a) envolve termos de ordem diferentes, temos que

$$\lim_{\alpha' \rightarrow 0} \alpha' \beta^\Phi \neq 0. \quad (4.14)$$

A função (4.2a) deveria ser escrita como

$$\beta_{\frac{1}{\alpha'}}^\Phi = N - 26 = 0, \quad (4.15a)$$

$$\beta_{\alpha'}^\Phi = 4D_\mu\Phi D^\mu\Phi - 4D^2\Phi - R + \frac{1}{12}H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad (4.15b)$$

e neste caso fica claro que (4.15) faz sentido apenas para $N = 26$. Contudo, isto parece não desencorajar as inúmeras especulações baseadas na ação (4.4).

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste último capítulo, mostraremos como o novo modelo apresentado no Capítulo 3 requer uma revisão no entendimento tradicional da relação entre torção e *spin*. Também dedicaremos uma seção à apresentação de possíveis desenvolvimentos, que estão ainda por fazer.

5.1 Torção e spin

Pudemos perceber dos campos materiais estudados no Capítulo 3, que o traço do tensor de torção não é diretamente relacionado a distribuições de *spin*. Esta é outra característica do novo modelo, e naturalmente somos levados à seguinte questão: O que serve de fonte para a torção do espaço-tempo? A situação para a parte sem traço do tensor de torção é a mesma que temos na teoria usual de Einstein-Cartan, ou seja, apenas campos fermiônicos podem servir de fonte para ela¹. Já para o traço do tensor de torção, a situação é mais sutil. Tomemos por exemplo $\hat{K}_{\alpha\beta\gamma} = 0$, o que corresponde aos casos dos campos escalares e de *gauge*. Nestes casos, a equação para o traço do tensor de torção é dada por

$$D_{\mu}S^{\mu} = \frac{3}{2} \frac{e^{-2\Theta}}{\sqrt{-g}} \left(g^{\mu\nu} \frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{2} \frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta \Theta} \right). \quad (5.1)$$

¹De fato, campos de Proca também servem de fonte para a torção.

Usando a definição do tensor de energia-momento em U_4^v [Saa93e],

$$\frac{\epsilon^{-2\Theta}}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} T_{\mu\nu}, \quad (5.2)$$

e que para os campos escalares e de *gauge* tem-se

$$\frac{\epsilon^{-2\Theta}}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta \Theta} = 2\mathcal{L}_{\text{mat}}, \quad (5.3)$$

a equação (5.1) implica em

$$D_\mu S^\mu = \frac{3}{2} \left(\mathcal{L}_{\text{mat}} - \frac{1}{2} T \right), \quad (5.4)$$

onde T é o traço do tensor de energia-momento. A quantidade entre parênteses, em geral, não tem nenhuma relação com *spin*, e mesmo assim serve como fonte para uma parte do tensor de torção. Para campos de *gauge*, para os quais $T = 0$, a fonte para o traço do tensor de torção é exatamente a função lagrangiana. A presença do potencial escalar Θ no elemento de volume compatível com a conexão de U_4^v , parece indicar que a torção não é relacionada simplesmente a distribuições de *spin*.

5.2 Perspectivas futuras

São inúmeras as possibilidades de desenvolvimento dos resultados dos capítulos anteriores. Os tópicos relacionados às equações para a geometria de U_4^v no vácuo, estão agora sob investigação. Seria importante obter soluções esferossimétricas para o vácuo, as soluções de Schwartzchild para U_4^v , porque elas teriam aplicações diretas nas teorias de buracos negros. Como dissemos no Capítulo 3, existe a possibilidade, usando-se as equações da geometria de U_4^v , de obter-se uma evolução sem singularidade inicial para o universo. Este tópico também se mostra promissor.

O modelo de Capítulo 3, poderá possivelmente elucidar uma série de problemas existentes nas abordagens semi-clássicas, onde os campos materiais são considerados quanticamente e a geometria do espaço-tempo classicamente, como campos de fundo. Estes problemas são relacionados ao fato de que na teoria usual de Einstein-Cartan, apenas a parte totalmente anti-simétrica do tensor de torção pode interagir com campos materiais [Buc92].

O modelo proposto prevê que também o traço do tensor de torção, e não somente sua parte anti-simétrica, pode interagir com campos materias. É interessante repetir as análises semi-clássicas de U_4 para U_4^v .

Para as teorias de cordas, há interesse em estudar o problema do Capítulo 4 até a ordem de 2-loops , onde as verdadeiras correções da teoria de cordas devem aparecer. Estudando-se a propagação de cordas bosônicas num *background* onde $\Phi = B_{\mu\nu} = 0$, encontra-se na ordem de 2-loops , correções proporcionais a α' para a gravitação de Einstein [Gre87]. Se considerarmos todos os campos de fundo, deveremos obter correções proporcionais a α' para a gravitação de Einstein-Cartan.

Outro ponto promissor, está ligado às análises matemáticas do Capítulo 2. Recordando o Teorema 2.1, a condição suficiente para que uma variedade \mathcal{X} admita localmente uma forma de volume compatível com a conexão, é dada por $d(4S - \Upsilon) = 0$, onde

$$\Upsilon = g^{\alpha\beta} D_\mu g_{\alpha\beta} dx^\mu, \quad (5.5a)$$

$$S = \Gamma_{[\alpha\mu]}^\circ dx^\mu. \quad (5.5b)$$

O questionamento natural agora é sobre quando é possível definir-se globalmente uma forma de volume compatível com a conexão sobre \mathcal{X} . Quando as 1-formas $4S$ e Υ forem ambas fechadas, será possível definir uma forma de volume compatível quando elas diferirem por uma forma exata, $4S - \Upsilon = df$. Isto é equivalente a dizer que elas são homólogas, e portanto pertencem ao primeiro grupo de de Rham de \mathcal{X} , $R^1(\mathcal{X})$ [Gol70]. Assim se estabelece uma interessante e inesperada relação entre o estudo dos grupos de de Rham e existência de formas de volume globais compatíveis com a conexão.

Referências

- [Ber88] M. Berger e B. Gostiaux, *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces*, Springer Verlag, 1988.
- [Berg76] P.G. Bergmann. *Introduction to the Theory of Relativity*, Dover, 1976.
- [Bis80] R.L. Bishop e S.I. Goldberg, *Tensor Analysis on Manifolds*, Dover, 1980.
- [Bra85] E. Braaten, T.L. Curtright e C.K. Zachos, Nucl. Phys. **B260**, 630 (1985).
- [Buc92] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov e I.L. Shapiro, *Effective Actions in Quantum Gravity*, IOP, 1992.
- [Cal85] C.G. Callan, D. Friedan, E.J. Martinec e M.J. Perry, Nucl. Phys. **B262**, 593 (1985).
- [Car22] E. Cartan, *On Manifolds with an Affine Connection and the Theory of General Relativity*, 1922, Tradução para o inglês: A. Ashetkar, Bibliopolis - Nápoles, 1986.
- [Fey62] R.P. Feynman, *Lectures on Gravitation*, notas de aula por F. Morinigo e W. Wagner, Caltech, 1962.
- [Gol70] S.I. Goldberg. *Curvature and Homology*, Academic Press, 1970.
- [Gre87] M.B. Green, J.H. Schwarz e E. Witten. *Superstring Theory*. Cambridge University Press, 1987.

- [Haw73] S.W. Hawking e G.F.R. Ellis, *The large scale structure of spacetime*, Cambridge University Press, 1973.
- [Heh76] F.W. Hehl, P. von der Heyde, G.D. Kerlick e J.M. Nester, *Rev. Mod. Phys.* **48**, 393 (1976).
- [Heh85] F.W. Hehl, *Found. Phys.* **15**, 451 (1985).
- [Kib61] T.W.B. Kibble, *J. Math. Phys.* **2**, 212 (1961).
- [Kob63] S. Kobayashi e K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, John Wiley, 1963.
- [Kop92] W. Kopczyński e A. Trautman, *Spacetime and Gravitation*, John Wiley, 1992.
- [Nab88] G.L. Naber, *Spacetimes and Singularities*, Cambridge University Press, 1988.
- [Nak90] M. Nakahara, *Geometry, Topology, and Physics*, Adam Hilger, 1990.
- [Nov76] M. Novello. *Phys. Lett.* **A59**, 105 (1976).
- [Olv86] P.J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer-Verlag, 1986.
- [Saa93a] A. Saa, *Mod. Phys. Lett.* **A8**, 2565 (1993).
- [Saa93b] A. Saa, *Gauge fields on Riemann-Cartan space-times*, *Mod. Phys. Lett. A*, a ser publicado.
- [Saa93c] A. Saa, *Strings in background fields and Einstein-Cartan theory of gravity*, a ser publicado.
- [Saa93d] A. Saa, *Volume forms and minimal action principles in affine manifolds*, *J. Geom. Phys.*, a ser publicado.
- [Saa93e] A. Saa, *Einstein-Cartan theory of gravity revisited*, a ser publicado.
- [Sab85] V. de Sabbata e M. Gasperini, *Introduction to Gravitation*, World Scientific, 1985.

- [Sac77] R.K. Sachs e H. Wu, *General Relativity for Mathematicians*, Springer-Verlag, 1977.
- [Sci64] D.W. Sciama, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 463 e 1103, (1964).
- [Sch74] J. Scherk e J.H. Schwartz, *Nucl. Phys.* **B81** 118 (1974).
- [Tse92] A.A. Tseytlin e C. Vafa, *Nucl. Phys.* **B372** 443 (1992).
- [Wit75] B.S. DeWitt, *Phys. Rep.* **19C**, 295 (1975).