

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA

SOMABILIDADE DE BOREL  
E  
SÉRIES PERTURBATIVAS

José Carlos Brunelli

Dissertação de Mestrado  
apresentada no Instituto de  
Física da Universidade de  
São Paulo

SÃO PAULO  
1987

*Defesa em 25/06/87*



SBI-IFUSP



305M810T0988

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA

530.14

B 894<sub>2</sub>

M

e. 1

UNIVERSIDADE DE BOREL  
E  
PERTURBATIVAS

Carlos Brunelli

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Brunelli, José Carlos  
Somabilidade de Borel e séries perturbativas.  
São Paulo, 1987.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo.  
Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.

Área de Concentração: Física das Partículas Elementares.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes

Unitermos: 1.Somabilidade de Borel; 2.Teoria de campos; 3.Comportamento da série perturbativa.

USP/IF/SBI - 14/87

1987



# AGRADECIMENTOS

Ao professor Manoel de Jesus pela orientação, incentivo e ajuda de

seus alunos, especialmente os que foram meus colegas.

Aos meus pais, especialmente a minha mãe e ao meu pai.

Aos meus irmãos, especialmente a minha irmã, especialmente ao  
meu irmão, especialmente ao meu irmão.

Aos meus amigos, especialmente a minha amiga e ao meu amigo.

Por todos os que me ajudaram.

*Aos meus pais.*

## AGRADECIMENTOS

- Ao professor Marcelo O. C. Gomes pela sua orientação, incentivo e amizade.
- Ao professor Josif Frenkel por todo apoio recebido.
- Ao Gustavo T. F. da Costa pelas discussões e sugestões.
- Aos colegas do Departamento de Física Matemática, especialmente ao Barranco, Luis, Renio, Rubens, Sergio e Wagner.
- Ao pessoal da Xerox: Cida, Edson, Joaquim e Josué.
- À FAPESP pelo apoio financeiro.



## RESUMO

Fazemos um apanhado geral do método de soma de Borel. O aplicamos, de modo particular, no estudo da somabilidade da matriz-S exata do modelo Sigma não linear. Mais especificamente, analisamos a influência da geração dinâmica de massa, um efeito não perturbativo na constante de acoplamento usual, em cada termo da sua expansão  $1/N$ .

## ABSTRACT

We make an overview of the Borel summation method. We apply it, particularly, to the study of the exact S-matrix of the non-linear Sigma model. Specifically, we analyse the influence of dynamical mass generation, a non perturbative effect to the usual coupling constant, in each order of the  $1/N$  expansion.

# ÍNDICE

INTRODUÇÃO .....	1
<i>Capítulo 1</i> .....	5
SOMABILIDADE DE BOREL E SÉRIES PERTURBATIVAS ASPECTOS MATEMÁTICOS	
1.1 - Séries Assintóticas .....	6
1.2 - Somabilidade de Borel .....	13
<i>Capítulo 2</i> .....	20
SOMABILIDADE DE BOREL E SÉRIES PERTURBATIVAS ASPECTOS FÍSICOS	
2.1 - O Oscilador Anarmônico e a Somabilidade de Borel na Mecânica Quântica.....	20
2.2 - Somabilidade de Borel na Teoria de Campos.....	26
<i>Capítulo 3</i> .....	31
MATRIZES-S EXATAS	
3.1 - Matrizes-S em Duas Dimensões .....	31
3.2 - Matrizes-S de Modelos com Simetria $O(N)$ .....	36
3.3 - Matrizes-S de Modelos com Simetria $U(N)$ .....	44
<i>Capítulo 4</i> .....	47
EFEITOS NÃO PERTURBATIVOS NA MATRIZ-S SOMABILIDADE DE BOREL	
4.1 - Geração Dinâmica de Massa .....	47
4.2 - Análise das Primeiras Ordens de $1/N$ da Matriz-S.....	49
4.3 - Extensão a Ordens Superiores de $1/N$ .....	54
CONCLUSÃO .....	57



Apêndice .....	59
<b>TRATAMENTO DAS INTEGRAIS <math>I_n</math></b>	
REFERÊNCIAS .....	66

O tratamento das integrais  $I_n$  provenientes de cálculos perturbativos em mecânica quântica e na teoria de campos, baseadas na equação de Schrödinger e na equação de Dirac, respectivamente, para as grandezas  $F$  da teoria, é um problema clássico. A divergência das séries de potências, sobretudo as constantes de acoplamento, tornou-se um problema bastante que na teoria de campos, devido à natureza das integrais envolvidas. Nesse caso, os métodos de renormalização, em cada ordem de perturbação, pela subtração dos termos divergentes, são empregados. Em qualquer caso o interesse imediato é obter resultados finitos para algum valor de  $n$ . Dyson<sup>1</sup>, em 1952, estabeleceu a divergência das SP na eletrodinâmica quântica (EDQ) e iniciou a investigação da divergência das SP, tanto na EDQ quanto na teoria de campos, através das séries de potências em  $\alpha$ . Assim, por volta de 1953, Huzar, Thirring e Petermann<sup>2</sup> estabeleceram, independentemente, a divergência das SP na teoria  $(\varphi^4)_1$ , posteriormente Jaffe<sup>3</sup>, em 1961, provou de modo exato que todas as funções de Green para  $(\varphi^4)_2$  são séries divergentes e em 1962 de Calin e Rivasseau<sup>4</sup> estabeleceram, também de modo exato, a divergência das SP para  $(\varphi^4)_1$ . A partir de 1965, em uma série de outros trabalhos, a divergência das SP foi estabelecida utilizando-se dois métodos distintos introduzidos por Bender e Wu<sup>5,6</sup> e por Lipatov<sup>7,8</sup>, sendo que este último foi aperfeiçoado por Fucini<sup>9</sup>, Zinn-Justin<sup>10-14</sup> e outros. O método de Bender e Wu baseava-se na aplicação da aproximação WKB enquanto o método de Lipatov só poderia obter os primeiros termos da série de perturbação, i.e.,  $n=1, 2$ , para  $n \rightarrow \infty$ .

## INTRODUÇÃO

O aparecimento de séries divergentes na física, provenientes de cálculos perturbativos, é muito freqüente, principalmente na mecânica quântica e na teoria de campos. Os métodos perturbativos de Rayleigh-Schrödinger e de Feynman-Dyson produzem séries perturbativas (SP) para as grandezas  $F$  da forma

$$F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n,$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro de expansão. Na mecânica quântica os coeficientes  $a_n$  são finitos em cada ordem de perturbação, enquanto que na teoria de campos, esses coeficientes podem divergir individualmente. Nesse caso essas divergências podem ser absorvidas, em cada ordem de perturbação, pela renormalização dos parâmetros da teoria. Em qualquer caso o interesse imediato é saber se essas séries convergem para algum valor de  $\alpha$ . Dyson<sup>[1]</sup>, em 1952, estabeleceu heurísticamente a divergência das SP na eletrodinâmica quântica. Esse trabalho motivou a investigação da divergência das SP, tanto na mecânica quântica como na teoria de campos, diretamente nas séries de algumas teorias. Assim, por volta de 1953, Hurst, Thirring e Peterman<sup>[2]</sup> estabeleceram, independentemente, a divergência das SP na teoria  $(\varphi^3)_4$ ; posteriormente Jaffe<sup>[3]</sup>, em 1965, provou de modo exato que todas as funções de Green para  $[P(\varphi)]_2$  têm séries divergentes e em 1982 de Calan e Rivasseau<sup>[4]</sup> mostraram, também de modo exato, a divergência das SP para  $(\varphi^4)_3$ . A partir de 1968, em uma série de outros modelos, a divergência da SP foi estabelecida utilizando-se dois métodos distintos introduzidos por Bender e Wu<sup>[5-7]</sup> e por Lipatov<sup>[8,9]</sup>, sendo que este último foi aperfeiçoado por Parisi<sup>[11]</sup>, Zinn-Justin<sup>[12-14]</sup> e outros. O método de Bender e Wu baseava-se na aplicação da aproximação WKB enquanto o de Lipatov no método de ponto de sela, porém em ambos era possível obter o comportamento dos coeficientes da SP para grandes ordens de perturbação, i.e.,  $a_n$  para  $n \rightarrow \infty$ .



Para diversas teorias, o comportamento de  $a_n$  mostrava divergência fatorial ( $a_n \sim (An)! (-B)^n n^C [1 + O(1/n)]$  para  $n \rightarrow \infty$ ), como por exemplo no caso do oscilador anarmônico<sup>[5]</sup>, onde  $a_n \sim \sqrt{6}/\pi^{3/2} (-1)^{n+1} 3^n \Gamma(n + 1/2)$  e em diversas teorias de campos<sup>[9]</sup>. Além do mais, as SP apesar de divergirem mostravam ser séries assintóticas.

Do ponto de vista construtivista, principalmente na teoria de campos, a divergência das SP levou à seguinte questão: qual a relação entre as séries perturbativas  $\sum a_n \alpha^n$  e os objetos  $F(\alpha)$  que desejamos conhecer exatamente? Matematicamente, essa questão pode ser traduzida:  $\sum a_n \alpha^n$  define totalmente  $F(\alpha)$  a ponto de poder ser usada para reconstruí-la? A fim de responder a essa pergunta começou-se a estudar métodos de soma para essa SP, principalmente o método de soma de Borel<sup>[15]</sup>, baseado na fórmula  $n! = \int_0^\infty dt e^{-t} t^n$ . Neste caso, dada uma série com  $|a_n| \leq B^n n!$  constrói-se uma série chamada de transformada de Borel,  $B(t) = \sum a_n \alpha^n / n!$ , que converge para  $|t| \leq B^{-1}$ . No caso de sermos capazes de continuar analiticamente  $B(t)$  em  $[0, \infty)$  e se  $|B(t)| \leq e^{Rt}$ , teremos

$$\tilde{F}(\alpha) = 1/\alpha \int_0^\infty dt e^{-t/\alpha} B(t),$$

onde  $\tilde{F}(\alpha)$  é chamada de soma de Borel de  $\sum a_n \alpha^n$ . A substituição da série  $B(t)$ , nessa integral, e a inversão da ordem de soma e integração, produzem formalmente  $\tilde{F}(\alpha) = F(\alpha)$ . Porém, se a função  $F(\alpha)$  obedece certas condições, mais especificamente, se  $F(\alpha)$  é assintoticamente forte a  $\sum a_n \alpha^n$ , o método de soma de Borel sempre resulta em  $\tilde{F}(\alpha) = F(\alpha)$ . Essa última afirmação é o conteúdo de um teorema de 1912, devido a Watson<sup>[16]</sup> e estendido posteriormente por Nevanlinna<sup>[17]</sup>. Assim em princípio, é possível a partir do conhecimento dos coeficientes  $a_n$ , recuperar a função exata  $F(\alpha)$ .

De posse dessas informações começou-se a verificar o que hoje denomina-se de Somabilidade de Borel (SB) das SP, tanto na mecânica quântica como na teoria de campos, de modo a garantir que as grandezas físicas  $F(\alpha)$  fossem totalmente determinadas pelas SP  $\sum a_n \alpha^n$ , via método de soma de Borel. Nesse sentido foi demonstrado exatamente, a nível de mecânica quântica, a

SB dos níveis de energia para: o oscilador anarmônico por Graffi, Grecchi e Simon<sup>[18]</sup>; o efeito Zeeman por Avron, Herbst e Simon<sup>[19]</sup>; o efeito Stark para o átomo de hidrogênio por Graffi e Grecchi<sup>[20]</sup> e para átomos complexos por Herbst e Simon<sup>[21]</sup>; o poço duplo de potencial "unequal",  $H(g, \epsilon) = p^2 + x^2 + 2gx^3 + g^2(1 + \epsilon)x^4$  para  $\epsilon \neq 0$ , por Graffi e Grecchi<sup>[22]</sup> e para os potenciais não polinomiais da forma  $H(g, \alpha) = 1/2 x^2 \pm gx^4/(1 + \alpha gx^2)$  por Auberson<sup>[23]</sup>.

Na teoria de campos a SB foi estabelecida para: o estado fundamental da teoria  $(\varphi^4)_2$  por Simon<sup>[24]</sup>; as funções de Schwinger para  $(\varphi^4)_2$  por Eckmann, Magnen e Sénéor<sup>[25]</sup>; as funções de Schwinger para  $Y_2$  (modelo de Yukawa em duas dimensões) por Renouard<sup>[26]</sup>; as funções de Schwinger para  $(\varphi^4)_3$  por Magnen e Sénéor<sup>[27]</sup>; a massa física e a matriz-S de dois corpos da teoria  $(\varphi^4)_2$  por Eckmann e Epstein<sup>[28]</sup>; a expansão em  $1/N$  da densidade de energia livre e da funções de correlação do modelo Sigma não linear na rede por Frohlich, Mardin e Rivasseau<sup>[29]</sup>; as funções de Schwinger para o modelo de Gross-Neveu massivo bidimensional por Feldman, Magnen, Rivasseau e Sénéor<sup>[30]</sup> e a SB local foi mostrada para o modelo  $(\varphi^4)_\nu$ , primeiramente para  $\text{Re } \nu < 4$  por Rivasseau e Speer<sup>[31]</sup> e posteriormente para  $\nu = 4$  por de Calan e Rivasseau<sup>[32]</sup>.

Sabe-se hoje em dia, que a SB pode se afetada por singularidades na transformada de Borel  $B(t)$  em  $\text{Re } t \geq 0$ , cuja origem é fisicamente conhecida. Assim, efeitos não perturbativos como instantons<sup>[33,34]</sup> e geração dinâmica de massa, como também os processos de renormalização<sup>[34]</sup>, dão origem a tais singularidades, neste último caso, denominados de renormalons. Neste trabalho analisaremos a influência da geração dinâmica de massa na expansão perturbativa do modelo Sigma não linear, mais especificamente na sua matriz-S exata de dois corpos.

No primeiro capítulo discutiremos os aspectos matemáticos relacionados com as séries perturbativas e a somabilidade de Borel. Uma visão da aplicação desses métodos em mecânica quântica e em teorias de campos será feita no capítulo 2.



No capítulo 3 mostraremos como é possível obter a matriz-S, de modo exato, para certas teorias bidimensionais. Descreveremos os cálculos para o modelo Sigma não linear e indicaremos quais as alterações necessárias para outros modelos.

Mostraremos os cálculos concernentes as propriedades de convergência da expansão perturbativa da matriz-S do modelo Sigma não linear no capítulo 4 e no apêndice. Finalmente, faremos uma breve discussão dos nossos resultados.

Capítulo 1

SOMABILIDADE DE BOREL E SÉRIES PERTURBATIVAS  
ASPECTOS MATEMÁTICOS

Sem dúvida a ferramenta mais útil em física teórica é a utilização de métodos perturbativos. Seu uso sistemático começa na astronomia, passa pela mecânica quântica não relativística e atinge seu ápice na teoria quântica de campos. Neste último caso os cálculos perturbativos obtidos para a eletrodinâmica quântica (QED) através das séries de Feynman estão em grande acordo com a experiência<sup>†</sup>. Porém surge a seguinte questão: a série obtida para a QED, mesmo para valores pequenos da constante de acoplamento, converge? Dyson<sup>[1]</sup> em 1952 sugeriu um argumento que mostrava de modo heurístico a divergência das séries perturbativas em QED. Seu argumento baseava-se no fato de que as grandezas calculadas perturbativamente em QED são do tipo

$$F(e^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (e^2)^n, \quad (1.1)$$

e, como séries de potências convergem em círculos, teríamos para  $e^2 < 0$  um universo onde elétrons se atrairiam e repeliriam pósitrons. Isto implicaria em um vácuo instável, pois estados de carga nula com energias menores que a do vácuo poderiam existir. Assim não teríamos uma teoria para  $e^2 < 0$ , além do mais a série perturbativa não convergiria para  $e^2 < 0$ ; como ela deve convergir em círculos, somos obrigados a admitir que a série diverge para todos os valores de  $e^2$ , i.e., ela tem raio de convergência nulo. Mesmo assim, teríamos outra questão a responder: qual o sentido da série divergente (1.1) obtida em face dos resultados experimentais? A resposta é que as séries obtidas são assintóticas. A soma de um número finito de termos da série

---

<sup>†</sup> Para o momento magnético anômalo do elétron, a eletrodinâmica quântica prediz o valor  $(1159652.74 \pm 0.30) \cdot 10^{-9}$  enquanto a experiência fornece  $(1159652.41 \pm 0.2) \cdot 10^{-9}$ .



aproxima a função  $F(e^2)$  com erro menor que o último termo retido.

Vamos agora falar de séries assintóticas em geral e, posteriormente, explorar a possibilidade de somar essas séries, i.e., obter  $F(e^2)$  dado pela série em (1.1) a partir dos coeficientes  $a_n$ .

### 1.1 - SÉRIES ASSINTÓTICAS<sup>[35,41]</sup>

Vamos exemplificar a natureza das séries assintóticas. Seja a função

$$Ei(x) = \int_x^{\infty} dt \frac{e^{-t}}{t} \quad 0 < x < +\infty \quad (1.2)$$

conhecida como integral exponencial. Essa função só pode ser representada através dessa integral, não por meio de funções elementares. Além do mais (1.2) não é uma expressão útil para cálculos. Vamos então procurar uma "expansão" de (1.2) para, por exemplo, valores grandes de  $x$ .

Integrando (1.2) por partes repetidamente, com  $e^{-t} dt = du$ , obteremos

$$Ei(x) = e^{-x} \left[ \frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n} \right] \\ + (-1)^n n! \int_x^{\infty} dt \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} \equiv S_n(x) + R_n(x). \quad (1.3)$$

Aplicando o teste da razão para a soma parcial  $S_n(x)$  temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{x} \right| > 1, \quad \text{para } x \text{ fixo, e} \quad (1.4)$$

portanto a série diverge e não podemos escrever  $Ei(x)$  como

$$Ei(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},$$

porém se fixarmos  $n$  e fizermos  $x \rightarrow \infty$  temos que o resto (já que  $e^{-t} \leq 1$ )

$$|R_n(x)| = n! \left| \int_x^{\infty} dt \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} \right| \leq \int_x^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} \leq \frac{n!}{x^{n+1}} \rightarrow 0. \quad (1.6)$$

Assim a soma parcial em (1.6) aproxima bem a função  $Ei(x)$  para valores grandes de  $x$ . Chamamos então  $S_n(x)$  de série assintótica de  $Ei(x)$  para  $x \rightarrow \infty$  e indicamos como

$$Ei(x) \sim S_n(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad \text{com } x \rightarrow \infty \text{ e } n \text{ fixo,} \quad (1.7)$$

e onde o símbolo “ $\sim$ ” deve ser lido como “assintótico a”, e que apesar da série se estender até o infinito, devemos entendê-la como soma de um número finito de termos.

Como exemplo numérico apresentamos na tabela 1.1 os termos sucessivos e as somas parciais  $S_n(x)$  da série assintótica de  $e^x Ei(x)$  para  $x = 10$ . O primeiro ponto a salientar é que os termos diminuem em valor absoluto até  $n = 10$  e daí em diante passam a aumentar sem limite (conseqüência de (1.4) pois para esses valores  $n$  torna-se maior que  $x$ ). Como o resto  $R_n(x)$  alterna seu sinal com  $n$ , o valor de  $e^{10} Ei(10)$  deve estar entre duas somas parciais  $S_n(x)$  sucessivas (pois se  $S = S_n + R_n$  e  $S = S_{n+1} + R_{n+1}$  onde  $R_n > 0$  e  $R_{n+1} < 0$  então  $S > S_n$  e  $S < S_{n+1}$ ). Por outro lado a melhor aproximação para  $e^{10} Ei(10)$  é dada pelo inteiro  $N$  que minimiza  $R_n$ , i.e.,  $\frac{d}{dn} [(n-1)!/x^n] = 0$ . Esse valor é  $N = \text{maior inteiro } \leq x$ . Assim,

$$0.091545632000 < e^{10} Ei(10) < 0.091581920000$$

que comparada aos valores dados na tabela 1.2 mostra uma aproximação muito boa. O fato importante é que o resultado obtido acima é o melhor que se pode conseguir para  $e^{10} Ei(10)$ ; se incluirmos mais termos na soma parcial  $S_n(x)$  além do ponto ótimo, a precisão diminui e o resultado começa a divergir como mostra a tabela 1.1. Para valores maiores de  $x$ , a diferença entre os limites superiores e inferiores diminuirá, e poderemos a princípio calcular  $Ei(x)$  com um grande grau de precisão.

Por outro lado, temos para  $e^x Ei(x)$  uma expansão em série de potências convergente para todo  $x$ , dada por

$$e^x Ei(x) = e^x \left[ -\gamma - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n n!} \right] \quad (1.8)$$



onde  $\gamma$  é a constante de Euler-Macheroni. Para obtermos o valor  $e^{10} Ei(10) = 0.00915$  seria necessário o cálculo de 40 termos dessa série.

Na tabela 1.3 temos as somas parciais da série de  $e^x Ei(x)$  para diversos valores de  $x$ . Para  $x = 50, 100$  e  $200$  a coincidência com os resultados exatos dados na tabela 1.2 é surpreendente. Para obtermos esses resultados através de (1.8) o número de termos seria muito grande.

$n$	$a_n$	$S_n(10)$
0	0.1000 0000 0000	0.1000 0000 0000
1	-0.0100 0000 0000	0.0900 0000 0000
2	0.0020 0000 0000	0.0920 0000 0000
3	-0.0006 0000 0000	0.0914 0000 0000
4	0.0002 4000 0000	0.0916 4000 0000
5	-0.0001 2000 0000	0.0915 2000 0000
6	0.0000 7200 0000	0.0915 9200 0000
7	-0.0000 5040 0000	0.0915 4160 0000
8	0.0000 4032 0000	0.0915 8192 0000
9	-0.0000 3628 8000	0.0915 4563 2000
10	0.0000 3628 8000	0.0915 8192 0000
11	-0.0000 3991 6800	0.0915 4200 3200
12	0.0000 4790 0160	0.0915 8990 3360
13	-0.0000 6227 0208	0.0915 2763 3152
14	0.0000 8717 8291	0.0916 1481 1443
15	-0.0001 3076 7437	0.0914 8404 4006
16	0.0002 0922 7899	0.0916 9327 1905
17	-0.0003 5568 7428	0.0913 3758 4477
18	0.0006 4023 7371	0.0919 7782 1848
19	-0.0012 1645 1004	0.0907 6137 0844
20	0.0024 3290 2008	0.0931 9427 2852

Tabela 1.1 - Termos e somas parciais para a expansão assintótica de  $\exp(10) Ei(10)$ .

$x$	$\exp(x) Ei(x)$
2	0.3613 2861 6888
5	0.1704 2217 6285
10	0.0915 6333 3940
20	0.0477 1854 5496
50	0.0196 1510 9930
100	0.0099 0194 2287
200	0.0049 7524 6323
500	0.0019 9601 5905
1000	0.0009 9900 1994

Tabela 1.2 - Alguns valores exatos para  $\exp(x) Ei(x)$ .

$n$	$S_n(2)$	$S_n(5)$	$S_n(10)$	$S_n(20)$	$S_n(50)$	$S_n(100)$	$S_n(200)$
0	0.5000 0000 0000	0.2000 0000 0000	0.1000 0000 0000	0.0500 0000 0000	0.0200 0000 0000	0.0100 0000 0000	0.0050 0000 0000
1	0.2500 0000 0000	0.1600 0000 0000	0.0900 0000 0000	0.0475 0000 0000	0.0196 0000 0000	0.0099 0000 0000	0.0049 7500 0000
2	0.5000 0000 0000	0.1760 0000 0000	0.0920 0000 0000	0.0477 5000 0000	0.0196 1600 0000	0.0099 0200 0000	0.0049 7525 0000
3	0.1250 0000 0000	0.1664 0000 0000	0.0914 0000 0000	0.0477 1250 0000	0.0196 1504 0000	0.0099 0194 0000	0.0049 7524 6250
4	0.8750 0000 0000	0.1740 8000 0000	0.0916 4000 0000	0.0477 2000 0000	0.0196 1511 6800	0.0099 0194 2400	0.0049 7524 6325
5	-1.0000 0000 0000	0.1664 0000 0000	0.0915 2000 0000	0.0477 1812 5000	0.0196 1510 9120	0.0099 0194 2280	0.0049 7524 6323
6	4.6250 0000 0000	0.1756 1600 0000	0.0915 9200 0000	0.0477 1868 7500	0.0196 1511 0042	0.0099 0194 2287	0.0049 7524 6323
7	-15.062 5000 0000	0.1627 1360 0000	0.0915 4160 0000	0.0477 1849 0625	0.0196 1510 9913	0.0099 0194 2287	0.0049 7524 6323
8	63.687 5000 0000	0.1833 5744 0000	0.0915 8192 0000	0.0477 1856 9375	0.0196 1510 9933	0.0099 0194 2287	0.0049 7524 6323
9	-290.68 7500 0000	0.1461 9852 8000	0.0915 4563 2000	0.0477 1853 3938	0.0196 1510 9930	0.0099 0194 2287	0.0049 7524 6323
10	1481.1 8750 0000	0.2205 1635 2000	0.0915 8192 0000	0.0477 1855 1656	0.0196 1510 9930	0.0099 0194 2287	0.0049 7524 6323
11	-8264.1 2500 0000	0.0570 1713 9200	0.0915 4200 3200	0.0477 1854 1911	0.0196 1510 9930	0.0099 0194 2287	0.0049 7524 6323
12	50207. 7500 0000	0.4494 1524 9920	0.0915 8990 3360	0.0477 1854 7758	0.0196 1510 9930	0.0099 0194 2287	0.0049 7524 6323
13	-329859. 437 5000	-0.5708 1983 7952	0.0915 2763 3152	0.0477 1854 3958	0.0196 1510 9930	0.0099 0194 2287	0.0049 7524 6323
14	233061 0.87 5000	2.2858 3840 8090	0.0916 1481 1443	0.0477 1854 6618	0.0196 1510 9930	0.0099 0194 2287	0.0049 7524 6323
15	-176229 16.4 6875	-6.2841 3633 0035	0.0914 8404 4006	0.0477 1854 4623	0.0196 1510 9930	0.0099 0194 2287	0.0049 7524 6323
16	142005 302. 2816	21.139 7828 3196	0.0916 9327 1905	0.0477 1854 6219	0.0196 1510 9930	0.0099 0194 2287	0.0049 7524 6323
17	-121483 4557. 094	-72.101 5423 1883	0.0913 3758 4477	0.0477 1854 4862	0.0196 1510 9930	0.0099 0194 2287	0.0049 7524 6323
18	109967 2417 7.28	263.56 7228 2240	0.0919 7782 1847	0.0477 1854 6083	0.0196 1510 9930	0.0099 0194 2287	0.0049 7524 6323
19	-105013 0837 99.3	-1011.9 7409 9839	0.0907 6137 0843	0.0477 1854 4923	0.0196 1510 9930	0.0099 0194 2287	0.0049 7524 6323
20	105508 4995 966.	4090.1 9121 2413	0.0931 9427 2851	0.0477 1854 6083	0.0196 1510 9930	0.0099 0194 2287	0.0049 7524 6323

Tabela 1.3 - Somas parciais para a expansão assintótica de  $\exp(x) E_i(x)$ .



Esse exemplo ilustrou um ponto muito importante, a série assintótica, apesar de ser divergente, apresenta uma “convergência rápida” quando  $x \rightarrow \infty$ ; já a série convergente (1.8) converge rapidamente apenas para  $x \rightarrow 0$ . Assim do ponto de vista computacional a série assintótica é enormemente útil, e sob certos aspectos preferível a uma série lentamente convergente. Vamos agora definir de modo mais preciso o que vem a ser uma série de potências assintótica.

**Definição 1.1** (Poincaré - 1886)<sup>[35]</sup>

Dizemos que  $S_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n (x - x_0)^n$  é assintótica a  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  se, para algum  $N$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - S_N(x)}{(x - x_0)^N} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_N(x)}{(x - x_0)^N} = 0 \quad (1.9)$$

e se  $S_N(x)$  for assintótica a  $f$  em  $x_0$  para todo  $N$ , então a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  é dita assintótica a  $f$  em  $x_0$  e escrevemos

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (1.10)$$

Assim uma série de potências é assintótica a uma função se o resto após  $N$  termos é muito menor que o último termo retido quando  $x \rightarrow x_0$ . Devemos enfatizar que uma série pode ser assintótica sem ser convergente. Quando  $x_0 = \infty$ , como no exemplo anterior, a definição é  $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n/x^n$  quando  $x \rightarrow \infty$ , se  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^N R_N(x) = 0$  para todo  $N$ .

Nem todas as funções podem ser expandidas em séries de potências assintóticas, por exemplo,  $f(x) = 1/x$  cresce quando  $x \rightarrow 0$  e assim não podemos ter uma expansão da forma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Do mesmo modo  $f(x) = e^x$  cresce quando  $x \rightarrow \infty$ , assim não temos a expansão  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/x^n$ .

Quando mostramos que uma série converge, não precisamos conhecer nada a respeito da função a qual ela converge; nesse sentido a convergência é uma propriedade intrínseca dos coeficientes da expansão, i.e., convergência

é uma propriedade absoluta da série. A assintoticidade, por sua vez, é uma propriedade relativa tanto dos coeficientes da expansão como da função  $f(x)$  para a qual a série é assintótica. Não há sentido em indagar sobre a assintoticidade de uma série de potências para  $x \rightarrow x_0$ , mas sim a que função a série é assintótica quando  $x \rightarrow x_0$ .

A definição (1.9) permite obter os coeficientes  $a_n$  univocamente, ou seja

$$\begin{aligned} a_0 &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ a_1 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_0}{x - x_0} \\ a_2 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)}{(x - x_0)^2} \\ &\vdots \\ a_N &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n (x - x_0)^n}{(x - x_0)^N} \end{aligned} \quad (1.11)$$

e podemos então dizer que uma função tem uma série assintótica caso os limites acima existam.

Uma série de potências é assintótica para uma classe de funções que diferem por um fator subdominante. Em outros termos, se tivermos  $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$  para  $x \rightarrow x_0$  então  $f(x) + g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$  para  $x \rightarrow x_0$  se  $g(x) \rightarrow 0$  para  $x \rightarrow x_0$  (mais rapidamente que qualquer potência de  $(x-x_0)$ ), onde  $g(x)$  é o fator subdominante. Por exemplo  $f(x)$  e  $f(x) + e^{-x^\alpha}$  com  $\alpha < 0$ , têm a mesma série assintótica para  $x \rightarrow 0$ , pois  $e^{-x^\alpha} \sim \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$ . Em contraste, para uma dada função há apenas uma série assintótica, pois como vimos em (1.11) os coeficientes da expansão são únicos.

As operações algébricas entre as séries assintóticas podem ser realizadas com se elas fossem convergentes, entretanto a diferenciação e integração termo a termo exigem maiores cuidados<sup>[35]</sup>.

† Como essa série é convergente, isso mostra que a soma a qual essa série assintótica converge, não representa necessariamente a função assintótica à mesma.



O fato de uma série ser assintótica para uma classe de funções não nos garantiria, por exemplo no caso da QED, que as séries de Feynman fossem assintóticas às correspondentes funções da teoria exata, ou seja, as teorias de campo não seriam determinadas pelas suas séries assintóticas. Conseqüentemente, a assintoticidade estabelecida na definição de Poincaré é por esse ponto de vista muito fraca, ela não exige condições sobre a função  $f(x)$  nem sobre como (1.9) tende a zero! Essa não unicidade é conseqüência do fato de funções não nulas como  $e^{-x^{-1}}$  terem séries assintóticas nulas. Uma condição mais forte, que garante a unicidade entre a função e a série assintótica, é dada pela definição e teoremas seguintes:

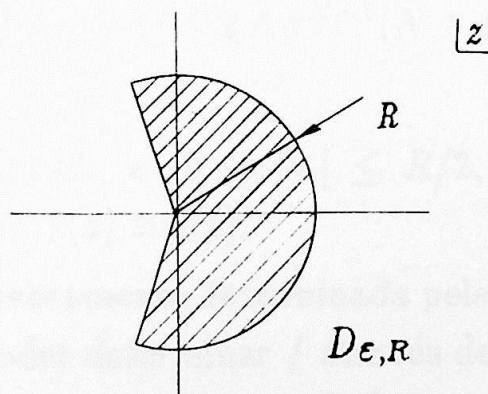
**Definição 1.2** (*Séries Assintóticas Fortes*)<sup>[36-40]</sup>

A série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  é uma série assintótica forte para a função  $f(z)$  se e somente se

a)  $f$  é analítica na região

$$D_{\varepsilon,R} = \{z / |\arg z| < \pi/2 + \varepsilon; \quad 0 < |z| < R\} \quad (1.12)$$

para algum  $\varepsilon > 0$  e  $R > 0$



b) para algum  $A$  e  $\sigma$ , e para todo  $N = 0, 1, \dots$  e todo  $z \in D_{\varepsilon,R}$

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^N a_n z^n \right| \leq A \sigma^{N+1} (N+1)! |z|^{N+1} \quad (1.13)$$

Também é costume dizer que  $f(z)$  obedece uma condição de assintoticidade forte quando a) e b) da definição acima são satisfeitas.

**Teorema 1.1** (de Carleman)<sup>[37-39]</sup>

Seja  $g(z)$  analítica e contínua no interior de

$$S = \{z / |\arg z| \leq \pi/2 + \varepsilon; \quad 0 < |z| \leq R\}$$

para algum  $\varepsilon > 0$ . Se existe  $C$  e  $B$  tais que

$$|g(z)| \leq C B^N n! |z|^n$$

para todo  $z \in S$  e todo  $n$ , então  $g(z)$  é identicamente nula.

Deste modo se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  é uma série assintótica forte para duas funções analíticas  $f(z)$  e  $g(z)$  temos que

$$|f(z) - g(z)| \leq 2 A \sigma^{N+1} (N+1)! |z|^{N+1}$$

em  $|\arg z| < \pi/2 + \varepsilon/2$  e  $0 < |z| \leq R/2$ , e portanto o teorema de Carleman garante que  $f(z) \equiv g(z)$ .

Assim se  $f$  é univocamente determinada pela sua série assintótica, seria muito interessante poder determinar  $f$  através de  $a_n$ . Existe um método de soma devido a Borel que torna isso possível, passaremos então a descrevê-lo.

## 1.2 - SOMABILIDADE DE BOREL<sup>[15,36-43]</sup>

O método de soma de Borel permite recuperar uma função  $f$ , que obedeça à condição de assintoticidade forte, através dos coeficientes  $a_n$  de sua série assintótica. Em primeiro lugar vamos descrever como obter a soma de Borel, que nos dá uma representação integral para a série assintótica.



---

**Definição 1.3 (Soma de Borel)<sup>[15]</sup>**

A série de potências formal  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  é Borel somável se

- a)  $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n / n!$  converge em algum círculo  $|t| < \delta$ , e onde  $B(t)$  é chamada de transformada de Borel de  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,
- b)  $B(t)$  tem uma continuação analítica para uma vizinhança do eixo real positivo,
- c)  $g(z) = 1/z \int_0^{\infty} dt e^{-t/z} B(t)$  converge (não necessariamente absolutamente) para algum  $z \neq 0$ , onde  $g(z)$  é a soma de Borel de  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .
- 

**Exemplo**

Seja a série divergente em (1.7)

$$Ei(x) = \frac{e^{-x}}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^n}, \quad (1.14)$$

vamos verificar que ela é Borel somável.

a) a transformada de Borel

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t}$$

converge em  $|t| \leq 1$ .

b)  $B(t)$  pode ser continuada analiticamente para todo o eixo real positivo.

c) a soma de Borel  $g(1/x)$  é

$$g(1/x) = x \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-tx}}{1+t}$$

que converge absolutamente para todo  $x \neq \infty$ .

Assim

$$Ei(x) = \frac{e^{-x}}{x} g(1/x) = \int_x^{\infty} dt \frac{e^{-t}}{t},$$

que é a integral em (1.2).

Na verdade o método de soma de Borel não é nada mais que o inverso do lema de Watson, que permite derivar expansões assintóticas para funções que podem ser representadas por certas integrais.

**Lema 1.1 (de Watson)<sup>[35]</sup>**

Seja

$$I(x) = \int_0^b dt f(t) e^{-tx}$$

com  $b > 0$  e

a)  $f(t)$  contínua no intervalo  $0 \leq t \leq b$ ,

b)  $f(t) \sim t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\beta n}$  para  $t \rightarrow 0^+$  com  $\alpha > -1$  e  $\beta > 0$ ,

c) se  $b = +\infty$  então devemos ter  $f(t) \ll e^{\sigma t}$  para  $t \rightarrow +\infty$  e  $\sigma \geq 0$ .

Nessas condições temos que

$$I(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^b dt t^{\alpha+\beta n} e^{-tx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(\alpha + \beta n + 1)}{x^{\alpha+\beta n+1}} \quad \text{para } x \rightarrow +\infty.$$

Voltando ao nosso exemplo temos

$$Ei(x) = \int_x^{\infty} dt \frac{e^{-t}}{t} = e^{-x} \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-tx}}{1+t}$$

onde  $f(t) = 1/1+t$  satisfaz as condições acima com  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$ , pois  $f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$ . Conseqüentemente

$$Ei(x) \sim e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+1)}{x^{n+1}},$$

que é o resultado obtido por integrações por partes.

O fato curioso é que a soma de Borel da série assintótica de  $Ei(x)$  é igual à própria função. O teorema seguinte, enunciado por Watson em 1912,

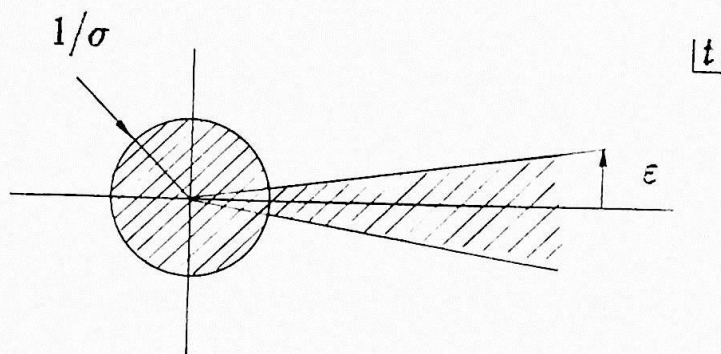


dá condições para que a função  $f(z)$  seja igual à soma de Borel  $g(z)$  de sua série assintótica.

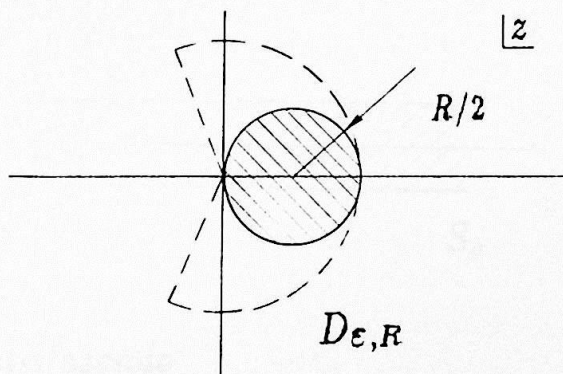
**Teorema 1.2 (de Watson)<sup>[16,36-43]</sup>**

Supondo que  $f(z)$  obedeça à condição de assintocidade forte dada anteriormente (analítica no domínio dado por (1.12) e obedecendo (1.13)), onde  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  é a sua série assintótica forte, então temos como consequência:

- a)  $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n / n!$  converge no círculo  $|t| < 1/\sigma$ ,  
 b)  $B(t)$  tem uma continuação analítica para o setor  $|\arg t| < \varepsilon$ ,



- c) a integral  $1/z \int_0^{\infty} dt e^{-t/z} B(t)$  é absolutamente convergente para  $\operatorname{Re} z^{-1} > R^{-1}$  e nessa região é igual a  $f(z)$ .



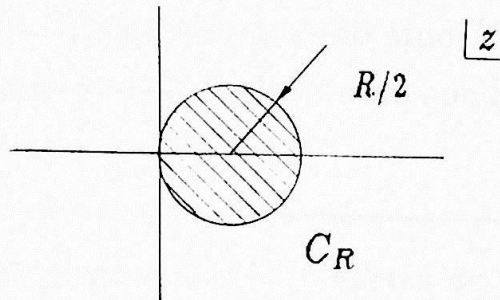
Em outras palavras o teorema de Watson afirma que a soma de Borel de uma série que é assintoticamente forte a  $f(z)$  é a própria função  $f(z)$ , e nesse sentido é que dizemos que uma série é Borel somável. Assim a coincidência obtida está explicada. Entretanto, como é salientado por Sokal<sup>[42]</sup>, a aplicação do teorema de Watson é dificultado pelo fato de termos que verificar a analiticidade de  $f(z)$  no domínio em (1.12) e a estimativa de (1.13) com  $\varepsilon > 0$ , o que é muito difícil na prática. Além do mais, a região recupe-

rada pelo teorema de Watson é menor que o domínio exigido em (1.12).

F. Nevanlinna em 1918 remediou as desvantagens citadas modificando o teorema de Watson.

**Teorema 1.3 (de Watson-Nevanlinna)<sup>[17,42]</sup>**

Seja  $f(z)$  analítica em  $C_R = \{z / \operatorname{Re} z^{-1} > R^{-1}\}$  obedecendo (1.13) uniformemente em  $N$  e em  $z \in C_R$ ,

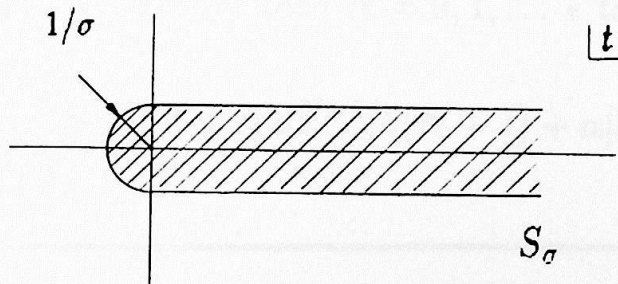


então temos:

a)  $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n / n!$  converge no círculo  $|t| < 1/\sigma$ ,

b)  $B(t)$  tem uma continuação analítica para a região

$$S_\sigma = \{t / \operatorname{dist}(t, R_+) < 1/\sigma\},$$



para algum  $\sigma > 0$ , satisfazendo

$$|B(t)| \leq K e^{|t|/R} \quad (1.15)$$

uniformemente em  $S_{\sigma'}$  com  $\sigma' > \sigma$ ,

c)  $f(z)$  pode ser representada por

$$f(z) = 1/z \int_0^{\infty} dt e^{-t/z} B(t) \quad (1.16)$$

para qualquer  $z \in C_R$ ,



d) inversamente, se  $B(t)$  é uma função analítica em  $S_{\sigma''}$  ( $\sigma'' < \sigma$ ) e satisfaz (1.15), então  $f(z)$  dado por (1.16) é analítica em  $C_R$  e satisfaz (1.19) uniformemente, com  $a_n = B^{(n)}(t)|_{t=0}$  em todo  $C_{R'}$  com  $R' < R$ .

---

Esse teorema aumenta o conjunto de funções que são Borel somáveis, pois restringe a região de analiticidade de  $f(z)$ .

A condição de assintoticidade forte (1.13) implica que  $|a_n| \leq A\sigma^n n!$ , porém muitas séries têm comportamento do tipo  $(kn)!$  ou  $(kn + \alpha)!$  com  $k > 1$  e  $\alpha > 0$ , entretanto é possível definir uma condição de assintoticidade forte modificada:

---

**Definição 1.4** (*Séries Assintóticas* <sup>[37,43]</sup> Fortes de ordem  $k$ )

A série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  é uma série assintótica forte de ordem  $k$  para a função  $f(z)$  se e somente se

a)  $f$  é analítica na região

$$D_{\varepsilon, R} = \{z / |\arg z| < k\pi/2 + \varepsilon; \quad 0 < |z| < R\} \quad (1.17)$$

para algum  $\varepsilon > 0$  e  $R > 0$ ,

b) para algum  $A, \alpha$  e  $\sigma$  e para todo  $N = 0, 1, \dots$  e todo  $z \in D_{\varepsilon, R}$

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^N a_n z^n \right| \leq A\sigma^{N+1} [k(N+1) + \alpha]! |z|^{N+1}. \quad (1.18)$$


---

Para aplicarmos o teorema de Watson-Nevamlinna, com a condição de assintoticidade forte, é necessária a modificação da transformada e soma de Borel, assim

$$B_{(k, \alpha)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{\Gamma(kn + \alpha + 1)} \quad \text{e} \quad f(z) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{\alpha} B_{(k, \alpha)}(zt^k). \quad (1.19)$$

O método de soma de Borel extendido através de (1.19) é devido a Le Roy<sup>[41]</sup>, e dizemos que nessas condições, uma série é Borel-Le Roy somável de ordem  $(k, \alpha)$ .

É possível obter um grau de generalização ainda maior para o teorema de Watson-Nevanlinna permitindo transformadas de Borel no sentido distribucional, como foi mostrado por Caliceti, Grecchi e Maioli<sup>[44]</sup>.

## ASPECTOS FÍSICOS

Como já vimos, a teoria das séries perturbativas, apesar das séries perturbativas serem convergentes em um sentido anterior, vamos agora fazer um tratamento das séries perturbativas em sistemas perturbativos visto na teoria das séries perturbativas da teoria quântica de campos. Obviamente, a teoria das séries perturbativas, pode ser feita em um estado com a teoria das séries perturbativas, e qualifica de certos aspectos que são importantes para a somabilidade de Borel das séries perturbativas. Isso é feito por Simon<sup>[45]</sup>.

### 2.1- O ANARMÔNICO E A SOMABILIDADE DE BOREL NA MECÂNICA QUÂNTICA

Consideramos o sistema definido pela equação de Schrödinger

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} k x^2 + \lambda x^4 - E(x) \right] \psi(x) = 0 \quad (2.1)$$

com a condição de contorno

$$\psi(x) \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad |x| \rightarrow \infty$$

Procuramos obter perturbativamente os níveis de energia, particularmente o estado fundamental  $E_0$ , para  $\lambda > 0$ , no qual representa-se por

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \lambda^n \quad (2.2)$$

O interesse por esse modelo é devido à estrutura similar que este tem com o modelo  $\lambda \phi^4$  da teoria de campos de escalares, e este modelo físico



## Capítulo 2

SOMABILIDADE DE BOREL E SÉRIES PERTURBATIVAS  
ASPECTOS FÍSICOS

Após a exposição dos detalhes matemáticos, acerca das séries perturbativas e da transformada de Borel, no capítulo anterior, vamos agora fazer um apanhado da aplicação dessas idéias em problemas perturbativos tanto na mecânica quântica ordinária como na teoria quântica de campos. Obviamente, devido à extensão do tema, não pretendemos fazer um estudo completo. Apenas daremos uma visão geral e qualitativa de certos aspectos que envolvem a divergência e a somabilidade de Borel das séries perturbativas. Uma revisão excelente pode ser encontrada em Simon<sup>[38]</sup>.

## 2.1 - O OSCILADOR ANARMÔNICO E A SOMABILIDADE DE BOREL NA MECÂNICA QUÂNTICA

Esse sistema é definido pela equação de Schrödinger

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{4} + g \frac{x^4}{4} - E_n(g) \right] \psi_n(x) = 0 \quad (2.1)$$

com a condição de contorno

$$\psi_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Procura-se obter perturbativamente os níveis de energia, particularmente o estado fundamental  $E(g)$ , para  $g \rightarrow 0$ , ao qual representa-se por

$$E(g) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n g^n. \quad (2.2)$$

O interesse por esse modelo é devido à estrutura similar que este tem com o modelo  $\lambda \varphi^4$  da teoria de campos, além do mais é um modelo físico

simples em que a série perturbativa (2.2) diverge. Seu estudo começa a partir de 1969 em uma série de trabalhos. No primeiro deles, Bender e Wu<sup>[5]</sup> calcularam, para o estado fundamental, 75 termos  $a_n$  da série (2.2). Esses termos mostraram ser frações racionais, cujos denominadores eram potências de 2

$$a_1 = 3/4, \quad a_2 = -21/8, \quad a_3 = 333/16, \dots$$

e isso permitiu obter uma fórmula empírica para o comportamento assintótico desses coeficientes, i.e.,  $a_n$  para  $n \rightarrow \infty$

$$a_n \sim (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} 3^n \Gamma(n + 1/2) \left[ 1 - \frac{95}{72} \frac{1}{n} + O(1/n^2) \right]. \quad (2.3)$$

Também obtiveram a estrutura analítica de  $E(g)$ , mostrando que ela possui três ramos, sendo que no ramo principal ( $C$  menos o corte de  $(-\infty, 0)$ ) ela é analítica, e nos outros ramos apresenta singularidades.

Posteriormente Simon<sup>[45]</sup> mostrou de modo rigoroso os resultados obtidos por Bender e Wu, principalmente os referentes à estrutura analítica de  $E(g)$ . Isso permitiu que Graffi, Grecchi e Simon<sup>[18]</sup> mostrassem a somabilidade de Borel da série (2.2) (na verdade mostraram a somabilidade para o oscilador anarmônico generalizado  $x^{2m}$ ).

Podemos mostrar alguns desse resultados. Vamos verificar primeiramente a divergência da série perturbativa, utilizando um argumento similar ao de Dyson apresentado no início do primeiro capítulo<sup>†</sup>. Seja então a figura 2.1 onde em (a) temos o potencial  $V(x) = x^2/4 + gx^4/4$  para  $g > 0$  e em (b) para  $g < 0$ .

Verificamos através dessa figura que o comportamento do estado fundamental de  $E(g)$  é muito diferente para  $g > 0$  e  $g < 0$ . No segundo caso

---

<sup>†</sup> Esse tipo de argumento, apesar de funcionar na maioria das vezes, apresenta exceções, como é mostrado por exemplo em Herbst e Simon<sup>[46]</sup> para o potencial da forma  $H(g) = p^2 + x^2 + 2g(x^3 - x) + g^2 x^2$ , que tem um estado fundamental  $E(g)$  cuja série é convergente, contrariamente ao argumento de Dyson.



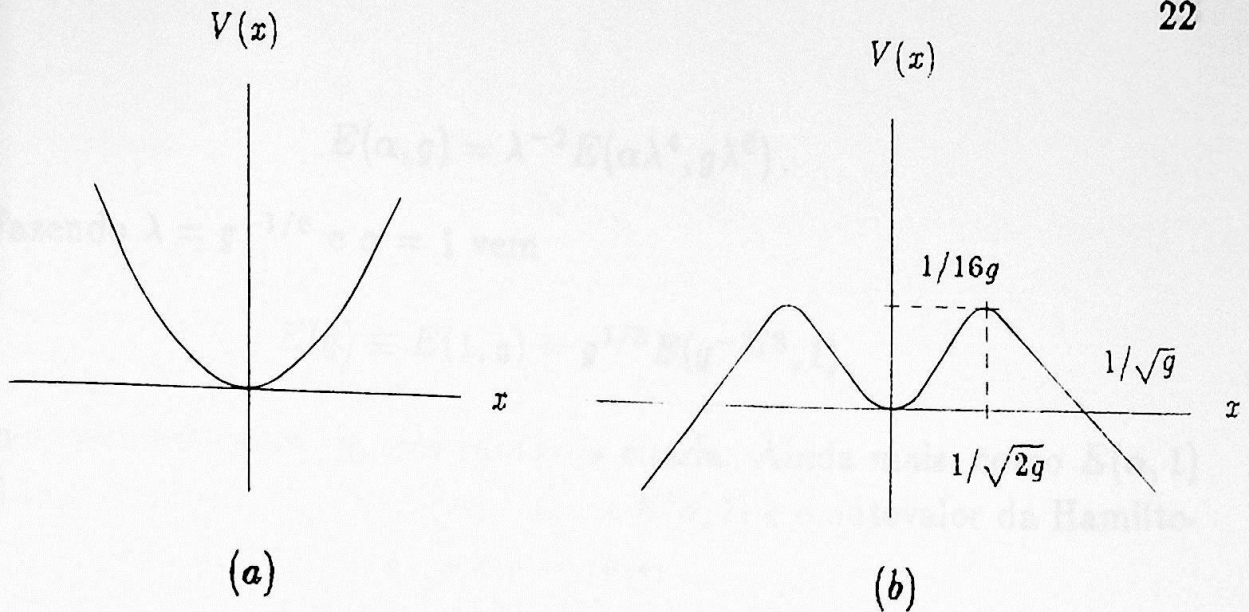


Figura 2.1 - Gráficos do potencial  $V(x) = x^2/4 + gx^4/4$  para (a)  $g > 0$  e (b)  $g < 0$ .

não há estado fundamental; ele é metaestável, pois há uma probabilidade de tunelamento. Em outras palavras, para  $g < 0$  a Hamiltoniana do sistema não é limitada inferiormente. Como uma série de potências converge em círculos, e o comportamento físico de  $E(g)$  é tão distinto para  $g > 0$  e  $g < 0$ , somos obrigados a admitir a divergência da série perturbativa. Assim  $g = 0$  é um ponto de não analiticidade para  $E(g)$ , e podemos mostrar que esse ponto não é uma singularidade isolada, mas sim um ponto de ramificação. Para tanto, vamos usar um argumento de escala devido a Symanzik e que tem um papel fundamental nos trabalhos de Simon<sup>[45]</sup>. Seja então  $H(\alpha, g) = p^2 + \alpha x^2 + g x^4$  com  $\alpha, g$  reais,  $g \geq 0$  e  $E(\alpha, g)$  o respectivo estado fundamental desse operador. Vamos considerar um mapeamento unitário  $U(\lambda)$  tal que

$$U(\lambda) x U^{-1}(\lambda) = \lambda x$$

$$U(\lambda) p U^{-1}(\lambda) = \lambda^{-1} p.$$

Assim

$$U(\lambda) H(\alpha, g) U^{-1}(\lambda) = \lambda^{-2}(p^2 + \alpha \lambda^4 x^2 + g \lambda^6 x^4) = \lambda^{-2} H(\alpha \lambda^4, g \lambda^6)$$

e como operadores unitariamente equivalentes têm os mesmos autovalores,

vem

$$E(\alpha, g) = \lambda^{-2} E(\alpha \lambda^4, g \lambda^6).$$

Fazendo  $\lambda = g^{-1/6}$  e  $\alpha = 1$  vem

$$E(g) \equiv E(1, g) = g^{1/3} E(g^{-2/3}, 1)$$

que mostra a estrutura de três ramos já citada. Ainda mais, como  $E(\alpha, 1)$  é analítica em torno de  $\alpha = 0$  (pois agora  $E(\alpha, 1)$  é o autovalor da Hamiltoniana  $H = p^2 + x^4 + \alpha x^2$ ), é válido escrever

$$E(g) = a_0 g^{1/3} + a_1 g^{-1/3} + a_2 g^{-1} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} b_m g^{(1-2m)/3}, \quad (2.4)$$

que converge<sup>[45]</sup> para  $|g| \rightarrow \infty$ . Essa é a série de acoplamento forte<sup>[47]</sup>.

É possível obter o comportamento da série de potências (2.2) para grandes ordens de perturbação através de uma relação de dispersão. Vamos definir

$$F(g) = \frac{E(g) - 1/2}{g} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g^{n-1}. \quad (2.5)$$

Usando a fórmula integral de Cauchy, para a função acima, temos que

$$F(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dg' \frac{F(g')}{g' - g} \quad (2.6)$$

onde  $C$  é o contorno mostrado no plano complexo  $g'$  da figura 2.2. Podemos usar o contorno  $C'$  ao invés de  $C$ , pois para  $|g'| \rightarrow \infty$  temos que  $F(g') \rightarrow 0$ , como é facilmente verificável usando (2.5) e (2.4).

Temos então que

$$F(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 dg' \frac{D(g')}{g' - g} \quad (2.7)$$

onde  $D(g')$  é a descontinuidade através do corte da figura 2.2,

$$D(g') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} [F(g' + i\epsilon) - F(g' - i\epsilon)]. \quad (2.8)$$



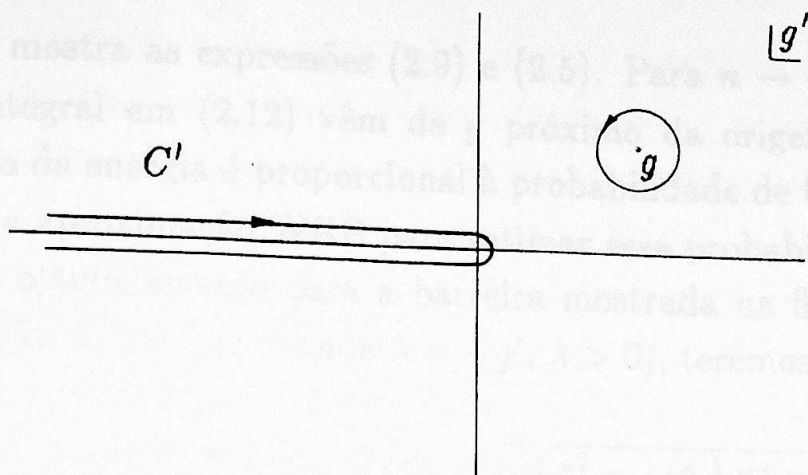


Figura 2.2 - Contornos utilizados na derivação da relação de dispersão, no plano complexo  $g'$ .

Como  $F(g')$  é real para  $g' > 0$ , temos pelo princípio de reflexão de Schwarz que  $F^*(g') = F(g'^*)$  e então

$$D(g') = \text{Im } F(g' + i0^+). \quad (2.9)$$

Expandindo

$$\frac{1}{g' - g} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{n-1}}{g'^n} \quad (2.10)$$

na integral (2.7), obtemos após inverter a ordem de soma com a de integração (essa inversão pode ser justificada com auxílio do Lema de Watson, Lema 1.1 do primeiro capítulo)

$$F(g) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} g^{n-1} \int_{-\infty}^0 dg' D(g') g'^{-n} \quad (2.11)$$

e comparando essa expansão com (2.5) vem que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 dg' \frac{D(g')}{g'^n} \quad (2.12)$$

A fórmula acima é exata e relaciona o  $n$ -ésimo coeficiente da série perturbativa (2.2) (com  $g > 0$ ) com a parte imaginária da energia (com  $g < 0$ ),

conforme mostra as expressões (2.9) e (2.5). Para  $n \rightarrow \infty$  as contribuições para a integral em (2.12) vêm de  $g$  próximo da origem. Como a parte imaginária da energia é proporcional à probabilidade de tunelamento, podemos usar a aproximação WKB para estimar essa probabilidade. Assim considerando o tunelamento para a barreira mostrada na figura 2.1(b), com a aproximação  $E(\lambda) \cong 1/2$  (onde  $\lambda = -g'$ ,  $\lambda > 0$ ), teremos que

$$\text{Im } E(\lambda) \cong \exp \left[ -2 \int dx \sqrt{1/4 x^2 - 1/4 \lambda x^4 - 1/2} \right], \quad (2.13)$$

onde os limites de integração são as raízes de  $V(x) = 1/2$ . Essa integral pode ser calculada aproximadamente e fornece, a menos de constantes

$$\text{Im } E(\lambda) \cong \text{const. } \lambda^{-1/2} \exp(-1/3\lambda). \quad (2.14)$$

Substituindo o resultado acima (com  $\lambda = -g'$ ) na relação de dispersão (2.12) vem

$$a_n \sim \text{const. } (-3)^{n+1} \Gamma(n + 1/2) \quad (2.15)$$

que é o resultado (2.3) derivado primeiramente por Bender e Wu. Esse método para a obtenção do comportamento assintótico da série perturbativa foi desenvolvido por Bender e Wu<sup>[6]</sup> (aproximação de Bender e Wu) a fim de justificar os resultados (2.3), obtidos primeiramente de uma análise numérica dos coeficientes  $a_n$ . Com esse método obtiveram não apenas a primeira ordem de (2.3) como também ordens superiores de  $1/n$ , obviamente usando todas as potencialidades do método WKB.

O resultado (2.3) (ou (2.15)) dá forte indicações da somabilidade de Borel da série perturbativa (2.2) do estado fundamental do oscilador anarmônico. Isso decorre da presença do fator  $(-1)^n$ , pois a transformada de Borel de uma série que apresenta coeficientes que se comportam como  $a_n = (-1)^n n!$  é  $B(t) = 1/(1+t)$ , que obviamente não tem singularidades em  $\text{Re } t \geq 0$ . Porém, conforme expressa o Teorema 1.3 de Watson-Nevanlinna, não é possível estabelecer a somabilidade de Borel de uma série apenas através de seus coeficientes. É necessário construir a função  $f(z)$  e provar que ela satisfaz a condição de assintoticidade forte para a série em



questão. Entretanto, no caso particular da mecânica quântica, é possível aplicar métodos da análise funcional e determinar, por exemplo no caso do oscilador anarmônico, as propriedades analíticas do estado fundamental  $E(g)$  diretamente do operador  $H(g)$ . Essa é a estratégia utilizada para mostrar a somabilidade de Borel na mecânica quântica, e para o oscilador anarmônico isso foi feito por Graffi, Grecchi e Simon<sup>[18]</sup>. Também dentro desse esquema foi possível estabelecer a somabilidade para os níveis de energia do efeito Stark<sup>[20,21]</sup> e do efeito Zeeman<sup>[19]</sup>.

Em 1976 Lipatov inventou um novo método para o cálculo dos coeficientes da série perturbativa em grandes ordens de perturbação, baseado no método de ponto de sela. Contrariamente à aproximação de Bender e Wu, este novo método pode ser estendido diretamente ao formalismo da teoria quântica de campos. Porém o importante, nesses dois métodos, é que eles deixam claro como as propriedades semiclássicas da teoria ditam o comportamento da série perturbativa em grandes ordens de perturbação. Posteriormente esse método foi desenvolvido, principalmente por Parisi<sup>[11]</sup> e Zinn-Justin<sup>[12-14]</sup>, tornando possível derivar sistematicamente o comportamento de  $a_n$  para  $n \rightarrow \infty$ . Para o poço duplo de potencial, Brézin, Parisi e Zinn-Justin<sup>[48]</sup> obtiveram em grandes ordens de perturbação

$$a_n \sim -\frac{3}{\pi} 3^n n! \left[ 1 - \frac{103}{36} 1/n + O(1/n^2) \right], \quad (2.16)$$

que mostra a não somabilidade de Borel. Isso é reflexo do mínimo degenerado (duplo) que esse potencial apresenta. Assim quando fazemos a perturbação em torno de um desses mínimos, existe uma probabilidade de tunelamento para o outro mínimo de potencial. Esse comportamento é típico de teorias que apresentam instantons, i.e., soluções finitas das equações clássicas da teoria na região Euclideana. Retomaremos essa questão ao discutirmos a somabilidade de Borel em teorias de campos.

## 2.2 - SOMABILIDADE DE BOREL NA TEORIA DE CAMPOS

Contrariamente à mecânica quântica, estabelecer a somabilidade de Borel na teoria quântica de campos, com auxílio de métodos da análise

funcional, não é sempre possível. Conseqüentemente uma prova direta da somabilidade de Borel não é viável. Sob uma outra perspectiva, procura-se aplicar o inverso do teorema de Watson-Nevanlinna (item *d*) do Teorema 1.3), e caso a soma de Borel da série perturbativa satisfaça os seus requisitos, podemos usá-la como uma candidata às funções de Green da teoria em questão. Nesse caso o método de soma de Borel funciona como uma ferramenta construtivista.

De modo simplista, queremos dizer que se por exemplo, obtivermos para as funções de Green  $G(g)$  de uma teoria, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! g^n \quad (2.17)$$

que tem raio de convergência nulo, a transformada de Borel fornecerá

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t},$$

que tem um raio de convergência finito. Como a parte inversa do teorema de Watson-Nevanlinna é satisfeita, podemos obter a soma de Borel  $\tilde{G}(g)$  da série inicial

$$\tilde{G}(g) = \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-t}}{1+gt} \quad (2.18)$$

sendo que  $\tilde{G}(g)$  é assintoticamente forte à série (2.17) e define uma função analítica para todo  $g > 0$ . Assim apesar do cálculo perturbativo fornecer uma série, que não tem sentido para qualquer  $g$ , as funções de Green podem ser bem definidas através da soma de Borel dada por (2.18). Indo mais além, se soubéssemos a priori que  $G(g)$  fosse Borel somável, teríamos que  $G(g) = \tilde{G}(g)$ .

Se estabelecer a somabilidade de Borel é extremamente difícil, mostrar a sua inviabilidade pode ser fácil, desde que saibamos de antemão as singularidades da transformada de Borel. Como vimos anteriormente, efeitos semi-clássicos manifestam-se na série a grandes ordens de perturbação. No caso do poço duplo de potencial, os seus mínimos se comunicavam através



de soluções interpolantes, denominadas instantons. Podemos estudar o efeito dos instantons na teoria de campos, seguindo de perto uma análise devida a 't Hooft<sup>[34]</sup>. Sejam campos  $\varphi(x)$  no espaço Euclidiano e por exemplo as funções de Green de  $n$  pontos Euclidianas (funções de Schwinger) dadas por

$$G(g) = \langle 0 | \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) | 0 \rangle = \eta \int D[\varphi(x)] e^{-S[\varphi]/g} \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \quad (2.19)$$

onde fizemos um reescalonamento dos campos  $\varphi(x)$  de modo a escrever a ação Euclidiana com a constante de acoplamento  $g$  fatorada. Considerando que  $G(g)$  seja a soma de Borel de alguma função  $B(t)$ , teremos que

$$B(t) = \eta \int D[\varphi(x)] \delta(t - S[\varphi(x)]) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n).$$

Lembrando o resultado

$$\int dx_1 \cdots dx_n \delta[t - f(x_1, \dots, x_n)] = \int_{f(x)=t} d\sigma |\text{grad } f|^{-1}$$

onde  $|\text{grad } f| = \sqrt{\sum_i (\partial f / \partial x_i)^2}$ , observamos que a integral será singular em  $t = \tilde{t}$  se  $|\text{grad } f|$  anular-se na superfície  $f(x) = \tilde{t}$  e nesse caso  $\partial f / \partial x_i = 0$  para todo  $i$ . Isso significa um ponto estacionário para essa superfície. Em termos da integral funcional (2.19) teremos singularidades para a transformada de Borel em  $\tilde{t}$ , na superfície  $S[\varphi] = \tilde{t}$ , se existe um  $\varphi_i(x)$  tal que

$$\left. \frac{\delta S[\varphi(x)]}{\delta \varphi(x)} \right|_{\varphi=\varphi_i} = 0 \quad (2.20)$$

para todo  $x$ . Mas a condição (2.20) fornece as equações de campo clássicas Euclidianas. As soluções com ação finita são denominadas instantons<sup>[49]</sup>.

Obtivemos assim, de modo não perturbativo, certa classe de singularidades da transformada de Borel. Por exemplo para a teoria  $\lambda(\varphi^4)_4$  temos uma solução complexa de  $\delta S / \delta \varphi = 0$  para

$$\varphi(x) = \frac{i \rho \sqrt{48}}{x^2 + \rho^2}$$

com  $S[\varphi] = -16\pi^2$ . Temos então uma singularidade para a transformada de Borel em  $\tilde{t} = -16\pi^2$ , que não afeta a somabilidade da teoria. Na verdade para soluções tipo instantons, puramente imaginárias, as singularidades sempre se localizam em  $\text{Re } t < 0$ . Para as teorias de Gauge não Abelianas, temos soluções tipo instantons reais com  $S[\varphi] = 8\pi^2 n$  para  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , que impedem a somabilidade de Borel da teoria, como é o caso da cromodinâmica quântica.

Mesmo quando existem singularidades tipo instantons, no eixo real positivo do plano de Borel, conjectura-se a integrabilidade das mesmas<sup>[33,34]</sup>, supondo que sejam singularidades fracas.

Além do efeito dos instantons, o processo de renormalização pode prejudicar certos cancelamentos entre as amplitudes e gerar séries divergentes que não são Borel somáveis. Isso pode ser visto<sup>[34]</sup> ao considerarmos, por exemplo para a eletrodinâmica quântica, as contribuições para o gráfico de ordem  $n$  da figura (2.3), onde temos  $n$  inserções de bolhas de vácuo no propagador do fóton.

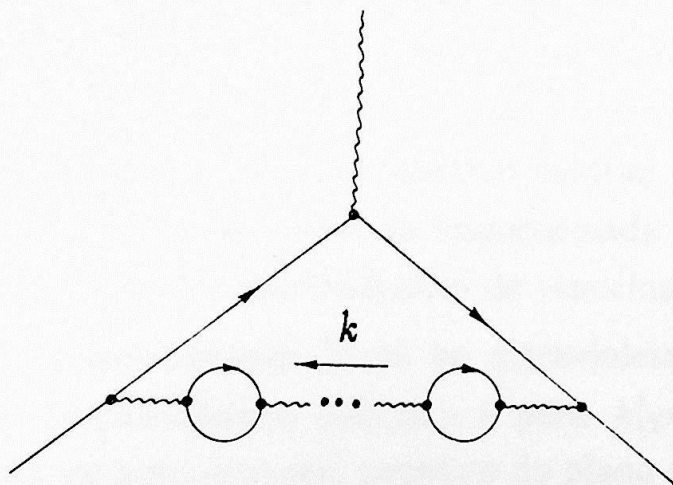


Figura 2.3 - Diagrama de ordem  $n$ , para um processo na eletrodinâmica quântica, com  $n$  inserções de bolhas de vácuo.

Cada bolha dessas comporta-se, para momentos  $k^2$  grandes, como

$$C k^2 \log k^2$$



e cada propagador como  $1/k^2$ . Então para  $k^2$  grande teremos que

$$\int d^4k (k^2)^\alpha (\log k^2)^n C^n$$

onde  $\alpha$ , após fazermos a renormalização, assume um valor maior ou igual a 3. Assim esse gráfico terá um comportamento proporcional a  $n$  da forma

$$n! (\alpha - 2)^{-n} C^n$$

e sua transformada de Borel terá um raio de convergência  $R$  dado por

$$R = \frac{(\alpha - 2)}{C} \quad \text{com} \quad \alpha \geq 3$$

onde o fator  $C$  é proporcional ao primeiro coeficiente não trivial da função  $\beta$ ,

$$C = \frac{\beta_1}{2}.$$

Teremos então uma singularidade na transformada de Borel em  $\tilde{t} = 2(\alpha - 2)/\beta_1$ . Na verdade essa singularidade parece ter um caráter universal para todas as teorias de campos. Esse tipo de gráfico, mostrado na figura (2.3), com  $n$  inserções divergentes para grandes momentos, contribui com  $n!$  e parece competir com todos os gráficos da mesma ordem. Em certas situações ele pode levar a um comportamento fatorial sem alternância de sinais, de modo que as singularidades na transformada de Borel caiam em  $\text{Re } t > 0$ . Essas singularidades são chamadas de renormalons.

Para teorias assintoticamente livres no ultravioleta, temos que  $\beta_1 < 0$ . Assim para a cromodinâmica quântica e para  $\lambda(\varphi^4)$  com  $\lambda < 0$ , as singularidades estão no semi-eixo real negativo do plano de Borel. Por outro lado, para a eletrodinâmica quântica e para  $\lambda(\varphi^4)$  com  $\lambda > 0$ , que não são assintoticamente livres, elas localizam-se no semi-eixo real positivo.

Em teorias de massa zero, além dos renormalons ultravioleta, podem existir outras singularidades na transformada de Borel, associadas com as contribuições de momentos pequenos, nas integrais de Feynman. Elas são chamadas de renormalons infravermelhos. No caso da cromodinâmica temos renormalons infravermelhos no semi-eixo real positivo além dos já citados renormalons ultravioleta no semi-eixo real negativo.

## MATRIZES-S EXATAS

Neste capítulo vamos mostrar como obter a matriz-S exata de modelos em  $(1 + 1)$  dimensões. Essas matrizes serão nosso objeto de estudo e nos permitirão a priori conhecer qualquer termo da expansão  $1/N$ , contornando assim os cálculos através dos diagramas de Feynman. Primeiramente vamos discutir o que torna possível obter essas amplitudes de espalhamento de forma exata, em seguida calcularemos as matrizes-S dos modelos com simetria  $O(N)$  e finalmente apresentaremos os resultados para modelos com simetria  $U(N)$ .

## 3.1 - MATRIZES-S EM DUAS DIMENSÕES

Certas teorias de campo em  $(1 + 1)$  dimensões possuem uma matriz-S, de muitas partículas, calculável exatamente<sup>[49-53]</sup>, isso é possível se a teoria em questão tem um número infinito de leis de conservação locais<sup>†</sup> (não é necessário o conhecimento explícito das mesmas) que forneçam cargas conservadas que sejam componentes de tensores de Lorentz de ordem crescente. Exemplos dessas teorias são os modelos de sine-Gordon, Thirring massivo, Sigma não linear, Gross-Neveu, Gross-Neveu Quiral, etc.. Assim como ponto de partida vamos assumir a existência dessas leis de conservação para as teorias em  $(1 + 1)$  dimensões (Coleman e Mandula<sup>[54]</sup> mostraram que para teorias desse tipo em dimensões espaciais superiores a 1 a matriz-S é trivial).

Sejam então  $Q_N$  uma certa quantidade conservada, componente de um tensor de Lorentz de ordem  $N$ , e  $|p_1, p_2, \dots, p_{n(l)}\rangle_{in(out)}$  um estado inicial(final) de espalhamento de  $n(l)$  partículas. Como esses estados assintó-

---

<sup>†</sup> Na verdade basta a existência de apenas duas leis de conservação locais, pois em  $(1 + 1)$  dimensões isso leva a existência de infinitas<sup>[55]</sup>.



ticos podem ser visualizados como pacotes de onda não interagentes, e do fato da lei de conservação ser local (implicando que  $Q_N$  seja a integral espacial de uma densidade de corrente local), o resultado da carga  $Q_N$  atuando sobre os estados assintóticos fornece

$$Q_N |p_1, p_2, \dots, p_n\rangle_{in} = \sum_{i=1}^n q_N(p_i) |p_1, p_2, \dots, p_n\rangle_{in} \quad (3.1)$$

$$Q_N |p'_1, p'_2, \dots, p'_l\rangle_{out} = \sum_{j=1}^l q_N(p_j) |p'_1, p'_2, \dots, p'_l\rangle_{out} \quad (3.2)$$

e onde os  $p_i = (p_i^0, p_i^1)$  são 2-vetores energia-momento<sup>†</sup> e  $q_N(p_i)$  são polinômios de ordem  $N$  em  $p_i$ . Por exemplo, para o modelo de sine-Gordon

$$q_{2N+1}(p_i) = p_i^{2N+1}$$

$$q_{2N}(p_i) = (p_i^2 + m_i^2) p_i^{2N}.$$

A razão de  $q_N(p_i)$  ser um polinômio advém do fato de  $Q_N$  ser um invariante de Lorentz, e a dependência em  $p_i$  do fato das quantidades conservadas em teorias de campo serem o momento e as cargas das simetrias internas. Como estamos em  $(1+1)$  dimensões, não há spin, e assim os tensores podem ser construídos apenas através dos 2-vetores energia-momento.

Como  $Q_N$  é conservado temos de (3.1) e (3.2) que

$$\sum_{i=1}^n q_N(p_i) = \sum_{j=1}^l q_N(p_j) \quad (3.3)$$

e como temos infinitas cargas  $Q_N$  conservadas, teremos um número infinito de equações (3.3) com polinômios de ordem  $N$  crescentes, ou seja, temos um sistema de equações em  $2(n+l)$  variáveis. Essas equações podem ser satisfeitas apenas se

$$l = n \quad \text{e} \quad \{p_1, p_2, \dots, p_n\} = \{p'_1, p'_2, \dots, p'_n\}, \quad (3.4)$$

<sup>†</sup> Daqui em diante nossa notação para o 2-vetor energia-momento será  $p_i = (e_i, k_i)$ , onde  $e_i$  e  $k_i$  são a energia e o momento linear da partícula  $i$  respectivamente.

isto é, o processo é elástico (o número total de partículas não pode mudar) e o conjunto inicial dos 2-momentos deve ser o mesmo que o conjunto final. Portanto esse processo de espalhamento permite apenas variações dos instantes da colisão (avanço e retardo) e das trocas de números quânticos.

Em teorias de campo onde o momento é conservado, todas as partículas quando translacionadas conjuntamente fornecem uma simetria. Em nosso caso, devido ao caráter tensorial de  $Q_N$ , é possível mover cada partícula por uma quantidade dependente do seu momento. Para mostrar esse fato vamos estudar o efeito de  $Q_N$  sobre pacotes de onda localizados. Seja então o estado inicial para um tempo negativo grande (a colisão se dá em  $t = 0$ ), onde as partículas estão bem distanciadas e portanto não interagindo, de modo que possamos representá-las como pacotes de onda, localizados tanto no espaço das coordenadas como no dos momentos. Como  $Q_N$  é a integral de uma corrente local, ela atuará em cada pacote de onda separadamente. Vamos tomar  $\Psi_i(x)$  como sendo o  $i$ -ésimo pacote, ao qual escolheremos como função de onda no espaço dos momentos, por conveniência, uma Gaussiana  $\Psi_i(k)$  centrada em  $k = k_i$ ,

$$\Psi_i(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ia(k)} \Psi_i(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(x-x_i)} e^{-a^2(k-k_i)^2}. \quad (3.5)$$

Observe que estamos considerando apenas a parte espacial de  $p$  (aqui chamado de  $k$  de acordo com a convenção) para que o argumento torne-se mais intuitivo. Usando o método da fase estacionária verificamos que  $\Psi_i(x)$  está centrada em  $x = x_i$ .

Vamos então aplicar a esse pacote de onda o operador  $\exp(iaQ_N)$  onde  $Q_N$  é uma das quantidades conservadas (veremos que  $N > 1$ ) e  $a$  é um parâmetro real,

$$\tilde{\Psi}_i(x) = e^{iaQ_N} \Psi_i(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{iaq_N(e,k)} e^{ik(x-x_i)} e^{-a^2(k-k_i)^2}, \quad (3.6)$$

e como  $e^2 = k^2 + m^2$ , reescrevemos  $q_N(e, k) = q_N(k)$ . Aplicando o método da fase estacionária (com  $k = k_i$  devido à Gaussiana) para o termo oscilante



$$e^{ig(k)} = e^{i[aq_N(k) + k(x-x_i)]} \quad (3.7)$$

temos  $g'|_{k=k_i} = a q'|_{k=k_i} + (x - x_i)$ , portanto o ponto estacionário é

$$x = x_i - a q'|_{k=k_i} \quad (3.8)$$

mas  $q_N$  é uma função não linear em  $k$  (por isso  $N > 1$ ) e portanto  $q'|_{k=k_i}$  dependerá de  $k_i$ . Assim a aplicação do operador  $\exp(iaQ_N)$  na  $i$ -ésima partícula a desloca de uma quantidade proporcional ao seu momento  $k_i$ . Do mesmo modo quando aplicarmos esse operador no estado inicial como um todo, cada partícula será deslocada diferentemente, por uma quantidade proporcional ao seu momento. Também fazendo o parâmetro  $a$  suficientemente grande, podemos alterar a posição relativa entre quaisquer duas partículas por uma quantidade arbitrária.

Para vermos as conseqüências do resultado obtido, vamos considerar a colisão de três partículas com momentos iniciais  $k_1 > k_2 > k_3$ . Como já sabemos, os momentos finais devem ser necessariamente  $\{k_1, k_2, k_3\}$ . Na figura 3.1 temos os três tipos possíveis de colisões para esse processo, vistas em um diagrama espaço-tempo. A figura 3.1(b) mostra a colisão simultânea das três partículas, enquanto que as figuras 3.1(a) e (c) mostram a colisão das partículas duas a duas, porém em seqüência temporal diferente.

Admitindo o conhecimento da amplitude de espalhamento para os choques de duas partículas, nos propomos a calcular a amplitude para o choque de três partículas. Processos de espalhamento como os das figuras 3.1(a) e (c) podem ser tratados como a sucessão de três colisões independentes de dois corpos e assim a amplitude do espalhamento de três corpos é o produto das amplitudes dos espalhamentos de dois corpos. Porém o processo da figura 3.1(b) não pode ser encarado dessa maneira, i.e., como uma seqüência de colisões entre duas partículas. Mas utilizando o fato da teoria possuir infinitas leis de conservação, ou melhor, tensores conservados de diversas ordens, a aplicação do operador  $\exp(iaQ_N)$  no espalhamento de três corpos, muda a posição relativa entre as partículas, assim podemos transformar qualquer diagrama da figura 3.1 em qualquer um dos outros (por exemplo deslocando a linha 3 relativamente às linhas 1 e 2). Conseqüentemente os

três processos da figura 3.1 têm amplitudes de transição iguais ( $\exp(iaQ_N)$  deixa a matriz-S invariante pois  $[H, Q_N] = 0$ ). E ainda mais, a matriz-S de três corpos pode ser fatorada como o produto de matrizes-S de dois corpos. Essa é a propriedade de fatorização da matriz-S, e pode ser escrita para o processo da figura 3.1 como

$$\begin{aligned} abcS_{a'b'c'}(123) &= efS_{b'c'}(23)dcS_{a'f}(13)abS_{de}(12) \\ &= deS_{a'b'}(12)afS_{dc'}(13)bcS_{ef}(23), \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde levamos em conta os números quânticos internos indicados na figura 3.1.

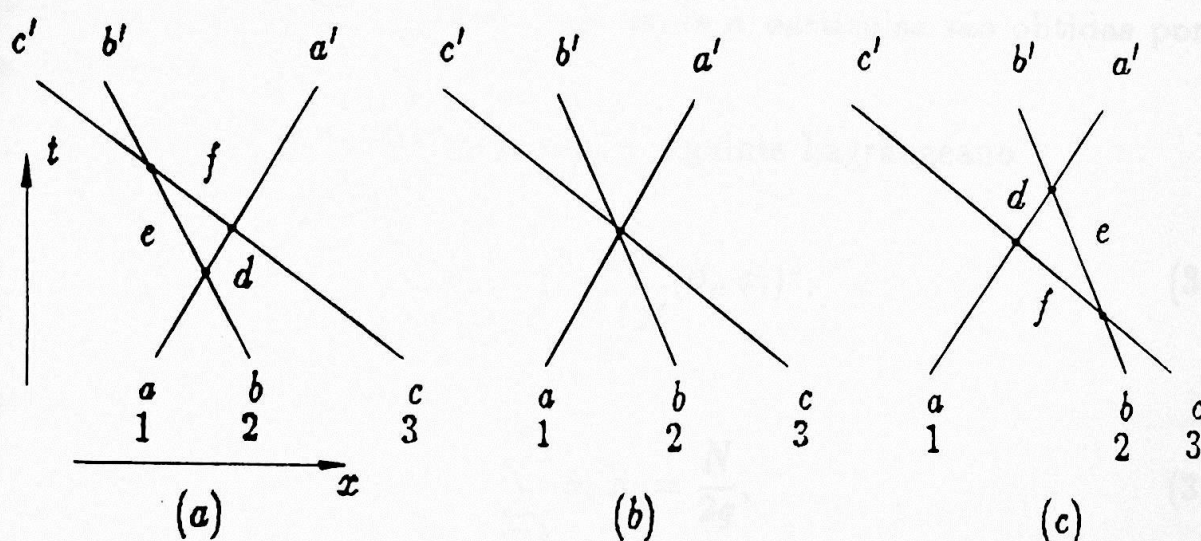


Figura 3.1 - Diagramas espaço-tempo das colisões possíveis para três partículas com  $k_1 < k_2 < k_3$ .

Os mesmos argumentos podem ser repetidos para matrizes-S de n-corpos o que garante a sua fatorização no produto de matrizes-S de dois corpos.

Em resumo temos como consequência da existência de infinitas leis de conservação, em teorias de campo em  $(1 + 1)$  dimensões, as seguintes propriedades:

- A matriz-S do processo de espalhamento é elástica.
- O conjunto de momentos iniciais das partículas é o mesmo que o dos finais num processo de espalhamento.



- c) A matriz-S do sistema se fatoriza no produto de matrizes-S de duas partículas.
- d) Essas matrizes-S de duas partículas obedecem uma identidade cúbica.

### 3.2 - MATRIZES-S DE MODELOS COM SIMETRIA $O(N)$

Vamos obter agora de forma exata a matriz-S de modelos com simetria  $O(N)$ , como por exemplo o modelo Sigma não linear. Isso será possível graças aos resultados anteriores para modelos em  $(1 + 1)$  dimensões com infinitas leis de conservação. Necessitamos apenas calcular a matriz-S para o espalhamento de dois corpos, pois as de  $n$  partículas são obtidas por fatorização.

O modelo Sigma não linear tem o seguinte Lagrangeano

$$\mathcal{L}_{SNL} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\partial_\mu \phi_i)^2, \quad (3.10)$$

com a restrição

$$\sum_{i=1}^N \phi_i^2 = \frac{N}{2g}, \quad (3.11)$$

onde  $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$  é um vetor no espaço  $O(N)$  ( $N > 3$ ), e claramente essa Lagrangeana tem uma invariância por  $O(N)$ . Na verdade essa simetria também é apresentada pelos modelos de sine-Gordon ( $N = 2$ ), Thirring massivo e Gross-Neveu.

O processo que queremos estudar é o espalhamento de duas partículas de massa  $M$

$$P_a(p_1) + P_b(p_2) \longrightarrow P_c(p'_1) + P_d(p'_2),$$

e estamos interessados na amplitude

$${}_{out} \langle P_c(p'_1) P_d(p'_2) | P_a(p_1) P_b(p_2) \rangle_{in} \quad (3.12)$$

onde  $p_i, p'_i$  são 2-momentos e  $a, b, c$  e  $d$  (que variam de 1 a  $N$ ) são índices de isospin do multipletto vetorial das partículas  $P$  de massa  $M$ .

A estratégia agora é a seguinte: utilizando a identidade cúbica (3.9) mais os princípios bem estabelecidos acerca das matrizes-S<sup>[56]</sup>, tais como invariância de Lorentz, analiticidade, unitariedade e simetria de crossing, será possível chegar a um sistema de equações que nos fornecerá a matriz-S exata para o espalhamento de dois corpos dado por (3.12). Vamos considerar então separadamente cada um desses princípios.

### a) Invariância de Lorentz

A matriz-S deve ser um escalar por transformações de Lorentz, conseqüentemente deve depender dos 2-momentos combinados de modo a fornecer escalares. As variáveis de Mandelstan<sup>[57]</sup>

$$\begin{aligned} s &\equiv (p_1 + p_2)^2 \\ t &\equiv (p_1 - p'_1)^2 \\ u &\equiv (p_1 - p'_2)^2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\text{com } s + t + u = 4M^2$$

são escalares apropriados. Porém como estamos em (1 + 1) dimensões temos apenas uma variável independente, pois das 8 componentes existentes dos quatro 2-vetores temos que subtrair: 1 parâmetro devido a rotação nesse espaço (em (1 + 1) dimensões essa rotação se refere apenas a um boost, pois não temos estrutura de spin nessa dimensão), 2 devido a translações espacial e temporal e 4 parâmetros devido as condições de "mass shell". Assim sobra um único parâmetro independente, o qual escolheremos como sendo a variável  $s$  definida em (3.13); porém, como o conjunto de momentos iniciais deve ser igual ao dos momentos finais, temos que:  $t = 0$  com  $u$  variando, ou  $u = 0$  com  $t$  variando. Assim

$$t = 0 \quad \text{com} \quad u = 4M^2 - s$$

ou

$$u = 0 \quad \text{com} \quad t = 4M^2 - s.$$

Vamos nos fixar no sistema do centro de momento  $CM$  onde podemos apenas ter espalhamento avançado ou retardado em (1 + 1) dimensões, e onde o



domínio físico das variáveis  $s$ ,  $t$  e  $u$  é

$$\begin{aligned} s &= (E_{cM}^2) \geq 4M^2 \\ t &\leq 0 \quad \text{com } u = 0 \\ u &\leq 0 \quad \text{com } t = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Levando em conta também a conservação momento-energia escrevemos (3.12) como

$$\begin{aligned} \text{out} \langle P_c(p'_1) P_d(p'_2) | P_a(p_1) P_d(p_2) \rangle_{\text{in}} &= \delta^2(p'_1 - p_1) \delta^2(p'_2 - p_2) {}_{ab}S_{cd}(s) \\ &\pm \text{ termo com } (a \leftrightarrow b, p_1 \leftrightarrow p_2) \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde  $+$  ( $-$ ) refere-se a bósons (férmions).

### b) Analiticidade

Nos diz que  ${}_{ab}S_{cd}(s)$  é uma função analítica no plano complexo  $s$  podendo ter polos de estados ligados no eixo real entre 0 e  $4M^2$ , e cortes para  $(4M^2, +\infty)$  e  $(0, -\infty)$  conforme mostra a figura 3.2(a).

Como  ${}_{ab}S_{cd}(s)$  é real para  $s$  entre 0 e  $4M^2$  e o domínio de analiticidade é simétrico em relação ao eixo imaginário podemos aplicar o princípio de reflexão de Schwarz

$${}_{ab}S_{cd}^*(s) = {}_{ab}S_{cd}(s^*). \quad (3.16)$$

Se fizermos a mudança para as variáveis de rapidez  $\theta$  definidas em termos de  $p_i = (e_i, k_i)$  como

$$\begin{aligned} k_i &= M \sinh \theta_i \\ e_i &= M \cosh \theta_i \end{aligned} \quad (3.17)$$

temos que

$$s = 4M^2 \cosh^2(\theta/2) \quad \text{com } \theta = \theta_1 - \theta_2. \quad (3.18)$$

Assim a figura 3.2(a) transforma-se em (b) e  ${}_{ab}S_{cd}(\theta)$  torna-se uma função meromórfica (analítica numa região exceto pela presença de um certo número de polos). Em termos da variável  $\theta$  a expressão (3.16) torna-se

$${}_{ab}S_{cd}^*(\theta) = {}_{ab}S_{cd}(-\theta) \quad \text{para } \theta \text{ real,} \quad (3.19)$$

que pode ser visto facilmente na figura 3.2 .

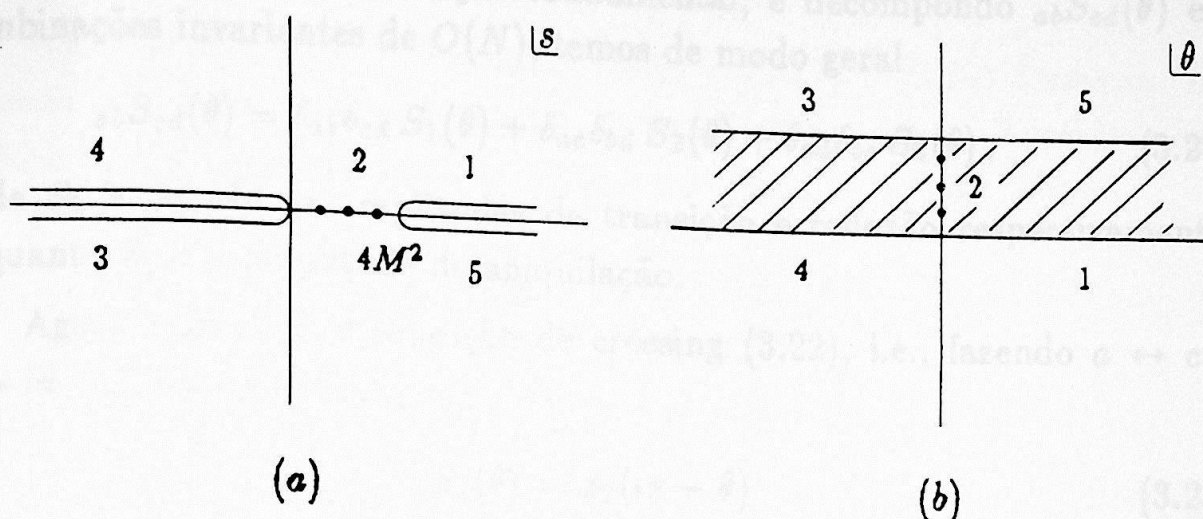


Figura 3.2 - Regiões de analiticidade da matriz-S nos planos complexos  $s$  e  $\theta$ .

### c) Crossing

O processo de crossing  $a \leftrightarrow c$  e  $s \leftrightarrow u$  impõe uma simetria para a matriz-S, a saber

$$S(s, t, u) = S(u, t, s).$$

Assim em termos da variável  $\theta$ , a substituição  $s \leftrightarrow u$  equivale a

$$\theta \leftrightarrow i\pi - \theta \quad (3.20)$$

pois

$$s = 2M^2(1 + \cosh\theta)$$

$$u = 2M^2(1 - \cosh\theta).$$

### d) Unitariedade

Devemos ter a condição  $SS^\dagger = 1$  para a matriz-S. Escrita em termos dos índices matriciais

$$\sum_{ef} {}_{ab}S_{ef}(\theta) {}_{ef}S_{cd}(\theta) = \sum_{ef} {}_{ab}S_{ef}(\theta) {}_{cd}S_{ef}(\theta) = \delta_{ac}\delta_{bd} \quad (3.21)$$



Levando em conta agora a simetria  $O(N)$  da teoria, escolhendo as partículas na sua representação fundamental, e decompondo  ${}_{ab}S_{cd}(\theta)$  em combinações invariantes de  $O(N)$ , temos de modo geral

$${}_{ab}S_{cd}(\theta) = \delta_{ab}\delta_{cd} S_1(\theta) + \delta_{ac}\delta_{bd} S_2(\theta) + \delta_{ad}\delta_{bc} S_3(\theta), \quad (3.22)$$

onde  $S_2$  e  $S_3$  são as amplitudes de transição e reflexão respectivamente, enquanto  $S_1$  é a amplitude de aniquilação.

Agora aplicando a condição de crossing (3.22), i.e., fazendo  $a \leftrightarrow c$  e  $\theta \leftrightarrow i\pi - \theta$ , temos

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta) \quad (3.23)$$

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta). \quad (3.24)$$

Substituindo (3.22) na relação de unitariedade (3.21) obtemos, fazendo uso de (3.19), as expressões

$$S_2(\theta) S_2(-\theta) + S_3(\theta) S_3(-\theta) = 1, \quad (3.25)$$

$$S_2(\theta) S_3(-\theta) + S_3(\theta) S_2(-\theta) = 0, \quad (3.26)$$

$$N S_1(\theta) S_1(-\theta) + S_1(\theta) S_2(-\theta) + S_2(\theta) S_1(-\theta) + S_1(\theta) S_3(-\theta) + S_3(\theta) S_1(-\theta) = 0. \quad (3.27)$$

Reescrevendo a relação cúbica (3.9) em termos das rapidezzes  $\theta = \theta_1 - \theta_2$  e  $\theta' = \theta_2 - \theta_3$  temos

$${}_{ef}S_{b'c'}(\theta) {}_{dc}S_{a'f}(\theta + \theta') {}_{ab}S_{de}(\theta) = {}_{dc}S_{a'b'}(\theta) {}_{af}S_{dc'}(\theta + \theta') {}_{bc}S_{ef}(\theta). \quad (3.28)$$

Utilizando novamente (3.22) na relação cúbica (3.28), obtemos dois conjuntos de equações, uma para  $N = 2$  e outra para  $N > 3$ . Vamos daqui em diante nos concentrar no segundo caso, que fornece as seguintes relações cúbicas

$$S_3 S_2 S_3 = S_2 S_3 S_3 + S_3 S_3 S_2, \quad (3.29a)$$

$$S_3 S_1 S_2 = S_2 S_1 S_1 + S_3 S_2 S_1, \quad (3.29b)$$

$$S_3 S_1 S_3 = N S_1 S_3 S_1 + S_1 S_3 S_2 + S_1 S_3 S_3 + S_1 S_2 S_1 + S_2 S_3 S_1 + S_1 S_1 S_1 + S_3 S_3 S_1, \quad (3.29c)$$

onde em todos os termos das expressões acima, os argumentos dos três  $S_i$  são  $\theta$ ,  $\theta + \theta'$  e  $\theta'$  respectivamente.

Assim o conjunto de equações (3.23) a (3.27) e (3.29) fornecem um sistema que torna possível obter a matriz-S exatamente. Primeiramente dividindo ambos os membros de (3.29a) por  $S_3 S_3 S_3$  temos

$$\frac{S_2(\theta + \theta')}{S_3(\theta + \theta')} = \frac{S_2(\theta)}{S_3(\theta)} + \frac{S_2(\theta')}{S_3(\theta')}, \quad (3.34)$$

ou seja,  $S_2/S_3$  é linear em seu argumento. Assim

$$\frac{S_2(\theta)}{S_3(\theta)} = \alpha \theta \quad (3.30)$$

onde  $\alpha$  é uma constante.

Usando  $S_3$  dado por (3.30) em (3.29b) e dividindo ambos os membros por  $S_2 S_1 S_1$  obtemos

$$\alpha \theta = \frac{S_2(\theta')}{S_1(\theta')} - \frac{S_2(\theta + \theta')}{S_1(\theta + \theta')}$$

que tem como solução

$$\frac{S_2(\theta)}{S_1(\theta)} = -(\alpha \theta + \beta) \quad (3.31)$$

onde  $\beta$  é outra constante.

Substituindo (3.30) e (3.31) em (3.29c), reescreveremos essa última expressão em termos de  $S_1(\theta) S_1(\theta + \theta') S_1(\theta')$  e obteremos a relação

$$\beta = \frac{(N-2)}{2}. \quad (3.32)$$

Do princípio de reflexão (3.19) temos que

$$\frac{S_2(\theta)}{S_3^*(\theta)} = \frac{S_2(-\theta)}{S_3(-\theta)} \quad \text{ou} \quad \alpha^* \theta = -\alpha \theta \quad \text{e}$$

assim  $\alpha$  é um imaginário puro e o reescrevemos como

$$\alpha = i\lambda \quad \text{onde} \quad \lambda \quad \text{é real.} \quad (3.33)$$



Fazendo a razão entre (3.23) e (3.24) temos

$$\frac{S_2(\theta)}{S_1(\theta)} = \frac{S_2(i\pi - \theta)}{S_3(i\pi - \theta)}$$

que através de (3.31) e (3.30), expressas através de (3.33), fornece

$$\lambda = \frac{\beta}{\pi} = \frac{(N-2)}{2\pi}. \quad (3.34)$$

Assim temos

$$\frac{S_3(\theta)}{S_2(\theta)} = \frac{-2\pi i}{(N-2)\theta} \quad (3.35a)$$

$$\frac{S_1(\theta)}{S_2(\theta)} = \frac{-2\pi i}{(N-2)(i\pi - \theta)} \quad (3.35b)$$

e basta obter por exemplo  $S_2$  para determinar a matriz-S do espalhamento de dois corpos exatamente. Para isso vamos lançar mão das equações de unitariedade, (3.25) a (3.27), que não usamos até agora. É fácil verificar que (3.26) e (3.27) são satisfeitas por (3.35a) e (b). A equação (3.25) fornece

$$S_2(\theta) S_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \Delta^2} \quad (3.36)$$

onde introduzimos a notação

$$\Delta = \frac{2\pi}{N-2}. \quad (3.37)$$

Nosso problema se reduz então a achar  $S_2(\theta)$  que obedeça a relação de unitariedade (3.36) e a relação de crossing (3.23), i.e.,  $S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta)$ . Podemos tentar uma solução observando que

$$S_2'(\theta) = \frac{\theta}{\theta + i\Delta}$$

satisfaz (3.36). Porém é fácil verificar que não satisfaz a relação de crossing (3.23). Modificamos então  $S_2'$  de modo a satisfazer (3.23), assim

$$S_2''(\theta) = S_2'(\theta) \frac{i\pi - \theta}{i\pi - \theta + i\Delta}.$$

Porém (3.36) não é satisfeita. Novamente modificamos  $S_2''$  de modo a satisfazer (3.36), mas outra vez obtemos um  $S_2'''$  que não satisfaz (3.23). Podemos aplicar esse procedimento indefinidamente obtendo um produto que no limite deve satisfazer unitariedade e crossing. Observando a fórmula de Euler para a função Gama

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)},$$

podemos escrever  $S_2(\theta)$  como

$$S_2(\theta) = R(\theta) R(i\pi - \theta) \quad (3.38)$$

onde

$$R(\theta) = \frac{\Gamma(\Delta - \frac{i\theta}{2\pi}) \Gamma(\pi - \frac{i\theta}{2\pi})}{\Gamma(-\frac{i\theta}{2\pi}) \Gamma(\pi + \Delta - \frac{i\theta}{2\pi})} \quad (3.39)$$

e é facilmente verificável que (3.38) satisfaz (3.23) e (3.36).

Portanto obtido  $S_2(\theta)$ , dado por (3.28), obtemos  $S_3$  e  $S_1$  através de (3.35), e a matriz-S exata dada por (3.22) está determinada.

Temos agora uma observação importante a fazer. Multiplicando  $S_1(\theta)$ ,  $S_2(\theta)$  e  $S_3(\theta)$  por uma função comum  $f(\theta)$  dada por

$$f(\theta) = \prod_{k=1}^K \frac{\sinh\theta + i\text{sen}\alpha_k}{\sinh\theta - i\text{sen}\alpha_k} \quad (3.40)$$

onde  $\alpha_k$  e  $K$  são constantes arbitrárias, é fácil verificar que  $f(\theta)S_2(\theta)$  satisfaz (3.36) e (3.23), e como as outras condições envolvem razões entre os  $S_i$ , obtemos uma família de soluções ao multiplicarmos  $S_i$  por  $f(\theta)$  ( $f(\theta)$  são chamadas de ambigüidades de Castillejo, Dalitz e Dyson, ou abreviadamente CDD). Conseqüentemente temos uma ambigüidade na derivação da matriz-S, e isso é natural pois nunca entramos em detalhes acerca da dinâmica ou usamos a Lagrangeana do modelo em nossa discussão. Afirmamos apenas que os cálculos efetuados para  $N > 3$ , sem qualquer fator  $f(\theta)$ , correspondem ao modelo Sigma não linear (isso pode ser confrontado com a



expansão  $1/N$  desse modelo<sup>[52]</sup>). Já para  $N = 2$  a matriz-S obtida é a do modelo de sine-Gordon ou a do modelo Thirring massivo, devido à equivalência entre esses dois modelos mostrada por Coleman<sup>[58]</sup>.

Fazendo  $\Delta \leftrightarrow -\Delta$  em (3.39) obtemos outra solução, pois (3.36) é quadrática em  $\Delta$ . Essa matriz-S corresponde ao modelo de Gross-Neveu que tem a seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{GN} = i \sum_{i=1}^N \bar{\psi}_i \not{\partial} \psi_i + \frac{g^2}{2} \sum_{i=1}^N (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 \quad (3.41)$$

onde  $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$  é um vetor em  $O(N)$  e onde  $\psi_i$  são férmions de Majorana. Essa Lagrangeana possui uma invariância explícita por  $O(N)$ .

A diferença fundamental entre o modelo de Gross-Neveu e o Sigma não linear está no fato de que o primeiro apresenta um rico espectro de estados ligados. Isso pode ser visto notando que a mudança  $\Delta \leftrightarrow -\Delta$  produz

$$S_2^{GN}(\theta) = S_2^{SNL}(\theta) \frac{\sinh\theta + i\text{sen}\Delta}{\sinh\theta - i\text{sen}\Delta} \quad (3.42)$$

que introduz polos na matriz-S em  $\theta = i\Delta$ , ou  $s = 4M^2 \cos^2(\Delta/2)$  através de (3.18). Como é sabido, polos da matriz-S em  $0 \leq s \leq 4M^2$  correspondem a estados ligados.

### 3.3 - MATRIZES-S DE MODELOS COM SIMETRIA $U(N)$

Até agora nos detivemos no estudo das amplitudes de espalhamento para multipletos vetoriais de teorias com simetria  $O(N)$ . Essa informação entrou explicitamente na decomposição de  ${}_{ab}S_{cd}(\theta)$  dada por (3.22). Podemos agora fazer os cálculos de modo inteiramente análogo levando em conta uma simetria do tipo  $U(N)$  para esses multipletos. Assim vamos considerar um multipletto de partículas  $P_a$  ( $a = 1, \dots, N$ ) que se transforma de acordo com a representação fundamental de  $U(N)$  e um multipletto de antipartículas  $A_a$  que se transforma com a representação conjugada de  $U(N)$ . Para os espalhamentos partícula  $P$  e sua antipartícula  $A$

$$P_a(p_1) + A_b(p_2) \longrightarrow P_c(p'_1) + A_d(p'_2)$$

e partícula-partícula

$$P_a(p_1) + P_b(p_2) \longrightarrow P_c(p'_1) + P_d(p'_2),$$

temos as respectivas amplitudes de espalhamento

$$\begin{aligned} \text{out} \langle P_c(p'_1) A_d(p'_2) | P_a(p_1) A_b(p_2) \rangle_{\text{in}} &= \delta^2(p'_1 - p_1) \delta^2(p'_2 - p_2) {}_{ab}F_{cd}(\theta) \\ &\quad - \delta^2(p'_1 - p_2) \delta^2(p'_2 - p_1) {}_{ab}B_{dc}(\theta) \end{aligned} \quad (3.43a)$$

$$\begin{aligned} \text{out} \langle P_c(p'_1) P_d(p'_2) | P_a(p_1) P_b(p_2) \rangle_{\text{in}} &= \delta^2(p'_1 - p_1) \delta^2(p'_2 - p_2) {}_{ab}S_{cd}(\theta) \\ &\quad - \delta^2(p'_1 - p_1) \delta^2(p'_2 - p_2) {}_{ab}S_{dc}(\theta) \end{aligned} \quad (3.43b)$$

com

$${}_{ab}F_{cd}(\theta) = \delta_{ac} \delta_{bd} T_1(\theta) + \delta_{ab} \delta_{cd} T_2(\theta) \quad (3.44a)$$

$${}_{ab}B_{dc}(\theta) = \delta_{ac} \delta_{bd} R_1(\theta) + \delta_{ab} \delta_{cd} R_2(\theta) \quad (3.44b)$$

$${}_{ab}S_{cd}(\theta) = \delta_{ac} \delta_{bd} U_1(\theta) + \delta_{ad} \delta_{bc} U_2(\theta) \quad (3.44c)$$

onde  $T_1$  e  $T_2$  são as amplitudes invariantes de transmissão e  $R_1$  e  $R_2$  são as amplitudes invariantes de reflexão.

De modo inteiramente análogo ao que fizemos para a simetria  $O(N)$  podemos aplicar os princípios gerais da matriz-S e obter relações para as amplitudes invariantes  $T$ ,  $R$  e  $S$ , que quando adicionadas à relação de fatorização (3.9) fornecem um sistema de equações que levam a soluções classificáveis em seis classes distintas, como pode ser visto em Berg et al<sup>[53]</sup>. A classe III corresponde aos modelos com simetria  $O(2N)$ , que já mostramos anteriormente. A classe II leva a matriz-S do modelo de Gross-Neveu Quiral. Esse modelo é dado pela Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{GN} = i \sum_{i=1}^N \bar{\psi}_i \not{\partial} \psi_i + \frac{g^2}{2} \sum_{i=1}^N (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 + \frac{g^2}{2} \sum_{i=1}^N (\bar{\psi}_i \gamma^5 \psi_i)^2 \quad (3.45)$$



onde  $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$  transforma-se por  $SU(N) \otimes U(1) \otimes U(1)$  com  $\psi_i$  sendo férmions de Dirac. Esse modelo tem a propriedade interessante de ter antipartículas que são estados ligados de partículas, assim Kurak e Swieca<sup>[59]</sup> mostraram ser possível tratar o espalhamento das partículas desse modelo como tendo simetria  $U(N)$ . Obtiveram então para as amplitudes invariantes

$$R_1(\theta) = R_2(\theta) = 0, \quad (3.46a)$$

$$T_1(\theta) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{\theta}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{\theta}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{\theta}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{N} + \frac{\theta}{2})} \quad (3.46b)$$

$$T_2(\theta) = \frac{-2}{N(1-\theta)} T_1(\theta), \quad (3.46c)$$

$$U_1(\theta) = \frac{\Gamma(1 - \frac{\theta}{2}) \Gamma(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{N})}{\Gamma(1 - \frac{\theta}{2} - \frac{1}{N}) \Gamma(\frac{\theta}{2})} \quad (3.46d)$$

$$U_2(\theta) = -\frac{2}{N\theta} U_1(\theta). \quad (3.46e)$$

#### 4.1- GERAÇÃO DINÂMICA DE MASSA

O modelo Sigma não linear descrito pela Lagrangiana (3.10) com a restrição (3.11) apresenta um efeito não perturbativo conhecido como geração dinâmica de massa. Esse efeito pode ser visto, entretanto, na expansão  $1/N$  ( $N$  é o número de componentes do campo) da teoria em questão, e é

## EFEITOS NÃO PERTURBATIVOS NA MATRIZ-S SOMABILIDADE DE BOREL

Estabelecer a somabilidade de Borel no contexto da teoria de campos é uma tarefa nada trivial. Isso decorre do fato de termos que conhecer o domínio de analiticidade da função exata, sendo que conhecemos apenas os primeiros termos e o comportamento assintótico de sua série perturbativa. Mesmo mostrar a somabilidade local, i.e., ter  $B(t)$  analítica em  $t = 0$  já é, por si só, muito difícil. Por outro lado sabemos que certas singularidades na transformada de Borel, que impedem a somabilidade da série perturbativa, tem uma origem bem conhecida. Podemos citar as singularidades devido aos processos de renormalização (chamadas de renormalons ultravioleta ou infravermelho) e aos efeitos não perturbativos como instantons e a geração dinâmica de massa.

Como mostramos no capítulo 3, alguns modelos bidimensionais possuem uma matriz-S exata. Isso torna possível o estudo das influências dos processos acima citados, i.e., renormalização e efeitos não perturbativos, nas propriedades de convergência das séries perturbativas. O que faremos a seguir será o estudo da influência da geração dinâmica de massa no modelo Sigma não linear, aproveitando-nos do fato de conhecermos exatamente a amplitude de espalhamento de dois corpos para o mesmo.

### 4.1 - GERAÇÃO DINÂMICA DE MASSA

O modelo Sigma não linear descrito pela Lagrangeana (3.10) com a restrição (3.11) apresenta um efeito não perturbativo conhecido como geração dinâmica de massa. Esse efeito pode ser visto, entretanto, na expansão  $1/N$  ( $N$  é o número de componentes do campo) da teoria em questão, e é



dado, em primeira ordem de  $1/N$ , por<sup>[60]</sup>

$$M^2 = \mu^2 e^{-2\pi/g} \quad (4.1)$$

onde a massa  $M$  deve ser um invariante do grupo de renormalização, isto é

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} \right) M^2 = 0$$

Vamos estudar as influências desse efeito na convergência da série perturbativa da matriz-S do modelo em questão. Aproveitando-se do fato de conhecermos exatamente essa amplitude de espalhamento de dois corpos, podemos expandí-la em potências de  $1/N$ . Assim teremos qualquer termo da série de potências em  $1/N$  conhecido exatamente sem o uso da técnica convencional dos diagrams de Feynman.

Como vimos a matriz-S do modelo Sigma não linear é dada por (3.15) e (3.22) onde  $S_1$  e  $S_3$  são dados em função de  $S_2$  através de

$$S_3(\theta) = -\frac{2\pi i}{(N-2)\theta} S_2(\theta) \quad (4.2)$$

$$S_1(\theta) = -\frac{2\pi i}{(N-2)(i\pi - \theta)} S_2(\theta) \quad (4.3)$$

e  $S_2$  é dada por (3.38) e (3.39), ou seja

$$S_2(\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{2\pi}{\Delta} - \frac{i\theta}{2\pi}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\theta}{2\pi}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{2\pi}{\Delta} + \frac{i\theta}{2\pi}\right) \Gamma\left(1 + \frac{i\theta}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(-\frac{i\theta}{2\pi}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{2\pi}{\Delta} - \frac{i\theta}{2\pi}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i\theta}{2\pi}\right) \Gamma\left(1 + \frac{2\pi}{\Delta} + \frac{i\theta}{2\pi}\right)} \quad (4.4)$$

e lembrando que a variável  $s$  de Mandelstan está relacionada com a rapidez  $\theta$  por

$$s = 4M^2 \cosh^2(\theta/2) \quad (4.5)$$

e que

$$\Delta = \frac{2\pi}{N-2} \quad (4.6)$$

Colocando (4.4) sob a forma de uma integral, utilizando uma representação da função Gama, conhecida como representação de Malmstém<sup>[61]</sup>

$$\ln \Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-t}}{t} \left\{ (z-1) - \frac{1 - e^{-(z-1)t}}{1 - e^{-t}} \right\} \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (4.7)$$

e assim  $S_2(\theta)$  dada por (4.4) fica

$$S_2(\theta) = \left(1 + \frac{\Delta^2}{\theta^2}\right)^{-1/2} \exp \left\{ -i \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} [1 - e^{-t\Delta/2\pi}] \operatorname{tgh}(t/4) \operatorname{sen}(\theta t/2\pi) \right\}. \quad (4.8)$$

Devemos observar que usamos a representação (4.7) mesmo para o termo  $\Gamma(-\frac{i\theta}{2\pi})$  em (4.4), onde o argumento é um imaginário puro. Isso implica que a integral (4.8) não é absolutamente convergente, assim fica implícito o uso de um corte  $\exp(-\epsilon t)$  no integrando de (4.8).

## 4.2 - ANÁLISE DAS PRIMEIRAS ORDENS DE $1/N$ DA MATRIZ-S

Vamos obter uma expansão para amplitude  $S_2(\theta)$  em potências de  $1/N$ , i.e., vamos expandir (4.8) para  $\Delta \rightarrow 0$ ,

$$S_2(\theta) = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\theta^2} + O(\Delta^4) + \dots\right) \exp \left\{ -\frac{i\Delta}{2\pi} \int_0^{\infty} dt \operatorname{tgh}(t/4) \operatorname{sen}(\theta t/2\pi) \right. \\ \left. + \frac{i\Delta^2}{8\pi^2} \int_0^{\infty} dt t \operatorname{tgh}(t/4) \operatorname{sen}(\theta t/2\pi) + O(\Delta^3) + \dots \right\}. \quad (4.9)$$

Assim  $S_2(\theta)$  em primeira ordem de  $1/N$  fornece

$$S_2(\theta) = 1 - i \int_0^{\infty} dt \operatorname{tgh}(t/4) \operatorname{sen}(\theta t/2\pi)$$

onde as integrais desse tipo estão no apêndice (no caso fórmula (A.8)), temos portanto

$$S_2(\theta) = 1 - \frac{2\pi i}{\operatorname{senh} \theta} \frac{1}{N} \quad (4.10)$$



e através de (4.2) e (4.3) vem

$$S_3(\theta) = -\frac{2\pi i}{\theta} 1/N \quad (4.11)$$

$$S_1(\theta) = -\frac{2\pi i}{i\pi - \theta} 1/N \quad (4.12)$$

que é o mesmo resultado obtido via teoria de perturbação em  $1/N^{[52]}$ .

Vamos agora, em primeira ordem de  $1/N$ , estudar o limite  $g \rightarrow 0$  (que por (4.1) é o mesmo que  $M^2 \rightarrow 0$ ), ou de modo equivalente o limite  $\theta \rightarrow \infty$ , como pode ser visto por (4.5), já que a variável  $s$ , que corresponde a energia, está fixa. Invertendo a expressão (4.5) teremos  $\theta$  em função de  $M^2$ , ou seja

$$\theta = \ln \left[ s/2M^2 - 1 + \sqrt{(s/2M^2 - 1)^2 - 1} \right] \quad (4.13)$$

Introduzindo (4.13) em (4.10) e expandindo a expressão para  $M^2 \rightarrow 0$  temos

$$S_2(\theta) = 1 - 2\pi i \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (4M^2/s)^{n+\frac{1}{2}} \right] 1/N + O(1/N^2) \quad (4.14)$$

e fazendo o mesmo para (4.12) ((4.11) é análogo) obtemos

$$S_3(\theta) = -2\pi i \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} (2M^2/s)^{\ell} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!} C_{\ell} \right] 1/N + O(1/N^2) \quad (4.15)$$

onde

$$C_{\ell} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{\ln(s/2M^2)} \right)^{n+1} D_{\ell,n} \quad (4.16)$$

com

$$D_{\ell,n} = \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}} \left[ \ln(1-x + \sqrt{1-2x}) \right]^n \Big|_{x=0}, \quad (4.17)$$

que comporta-se para  $n \rightarrow \infty$  como

$$D_{\ell,n} \sim n^{\ell} (\ln 2)^{n-\ell} (-1)^{\ell}. \quad (4.18)$$

Sabemos que cada termo da expansão  $1/N$  é a soma de um número infinito de diagramas de Feynman, de diversas ordens, da expansão em



potências de  $g$ . Temos conseqüentemente, que alguns dos fenômenos não perturbativos em  $g$  se incorporam nos termos da expansão em  $1/N$ . Assim  $S_2(\theta)$ , em primeira ordem de  $1/N$  e no limite  $g \rightarrow 0$ , é uma série de potências em  $(2M^2/s)$ , ou equivalentemente em  $\exp(-1/g)$ , como mostra (4.14). Esse resultado é claramente não perturbativo em  $g$ , e ocorre justamente pelo fato da expansão  $1/N$  agrupar um número infinito de termos da expansão em  $g$ . A expressão (4.15) para  $S_3(\theta)$  em primeira ordem de  $1/N$  é mais interessante, pois para  $g \rightarrow 0$  é uma série dupla de potências em  $(2M^2/s)$  e  $1/\ln(s/2M^2)$ , ou em  $\exp(-1/g)$  e  $g$  respectivamente. Podemos encará-la como uma série de potências em  $\exp(-1/g)$  onde cada coeficiente  $C_\ell$  dessa série é uma série de potências em  $g$ . Assim (4.15) é um rearranjo da série de potências em  $g$ , onde o efeito da geração dinâmica de massa foi colocado em evidência.

A seguinte questão surge naturalmente: É a geração dinâmica de massa o único efeito não perturbativo a ser levado em consideração? Podemos tentar responder a essa questão analisando o status dos coeficientes  $C_\ell$ . Como ele é uma série podemos verificar a sua somabilidade de Borel. Na verdade é facilmente verificável, a partir de (4.16) e (4.18) que  $C_\ell$  é uma série com raio de convergência infinito quando  $g \rightarrow 0$ .

Podemos agora aplicar o mesmo raciocínio em segunda ordem de  $1/N$ , observando que a geração dinâmica de massa não está relacionada com a constante de acoplamento perturbativa através da expressão (4.1), pois esta dá apenas a contribuição de primeira ordem em  $1/N$ . Por outro lado, quando expressamos  $\theta$  em função da massa gerada  $M$ , observamos o aparecimento sistemático de séries duplas do tipo

$$\sum_{\ell, n} (2M^2/s)^\ell \left( \frac{1}{\ln(s/2M^2)} \right)^n D_{\ell, n},$$

fato esse independente de qualquer cálculo perturbativo, pois é conseqüência do conhecimento exato da matriz-S do modelo. Isso nos leva, de modo natural, a escolher  $1/\ln(s/2M^2)$  como uma constante de acoplamento, dada também pela expressão (4.1), sendo que agora a constante de acoplamento que nela aparece é a efetiva e não a perturbativa. Visto de outro modo, a



expressão que dá a geração dinâmica de massa para o modelo Sigma não linear, que em primeira ordem de  $1/N$  fornece (4.1), é

$$M^2 = \mu^2 e^{-2\pi/\tilde{g}} \quad \text{onde } \tilde{g} = f(g).$$

De agora em diante sempre que nos referirmos a (4.1) devemos encará-la no contexto acima, i.e.,  $g$  que nela aparece é a constante de acoplamento efetiva.

De (4.9) vem que

$$S_2(\theta) = \underbrace{1 - \frac{2\pi i}{\sinh \theta}}_{\text{o mesmo que (4.14)}} \frac{1}{N} + \underbrace{\left[ \frac{i}{2} \int_0^\infty dt t \operatorname{tgh}(t/4) \operatorname{sen}(\theta t/2\pi) \right]}_{\equiv I_1} - \left[ \frac{4\pi i}{\sinh \theta} - \frac{2\pi^2}{\theta^2} \right] \frac{1}{N^2} + O(1/N^3) \quad (4.19)$$

onde a integral  $I_1$  não pode ser calculada exatamente. Porém no apêndice damos uma expansão assintótica para a mesma através de (A.22). Assim

$$I_1 \sim \sum_{m=1}^{\ell} P\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^{2m+1} (2^{2-2m} - 2^2) B_m + R_\ell \quad (4.20)$$

onde  $P$  é a prescrição do valor principal, que é dado por (A.14). Como estamos interessados no comportamento de  $I_1$  para  $\theta \rightarrow \infty$  podemos tomar

$$P\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^{2m+1} = \left(\frac{2\pi}{\theta + i\epsilon}\right)^{2m+1} \quad \text{para } \theta \neq 0 \quad (4.21)$$

pois as derivadas da função Delta de Dirac anulam-se nessa região. De fato devemos nos preocupar em usar  $P$ , explicitamente, apenas na presença de integrais que têm a origem entre os limites de integração.

Queremos agora colocar  $P(2\pi/\theta)^{2m+1}$  em termos da massa gerada  $M$ . Observando que

$$\cosh(\theta + i\epsilon) \cong \cosh \theta + i\epsilon = \frac{s}{4M^2} - 1 + i\epsilon \quad (4.22)$$

temos

$$\theta + i\epsilon = \ln \left[ s/2M^2 - 1 + i\epsilon + \sqrt{(s/2M^2 - 1)^2 - 1 + i\epsilon} \right] \quad (4.23)$$

e assim continuaremos a usar as expressões anteriores (4.13 ao invés de 4.23), lembrando que agora  $s/2M^2 \rightarrow s/2M^2 + i\epsilon$ .

Introduzindo (4.13) em (4.19) e efetuando o limite  $M^2 \rightarrow 0$  teremos três termos em  $1/N^2$ , sendo que apenas o que contém (4.20) leva a uma expansão com estrutura diferente de (4.14) e (4.15) ( $1/\sinh \theta$  e  $1/\theta$  têm essas estruturas respectivamente).

Usando a expansão assintótica da integral dada em (4.20) e substituindo nesta (4.13), obtemos após fazer o limite  $M^2 \rightarrow 0$

$$I_1 = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2M^2/s)^\ell \frac{(-1)^\ell}{\ell!} C_\ell \quad (4.24)$$

onde

$$C_\ell = \sum_{a=3}^{\infty} C_{\ell,a} \left( \frac{1}{\ln(s/2M^2)} \right)^a \quad (4.25)$$

com

$$C_{\ell,a} = \sum_{m=1}^{\ell} D_{\ell,a-2m-1} \left[ \frac{(2\pi)^{m+1} (-1)^{a-2m-1} (4^{m-1} - 4) (a-1)!}{(2m)! (a-2m-1)!} B_m \right] \quad (4.26)$$

e onde  $D_{\ell,a-2m-1}$  é dado por (4.17).

Vamos verificar se  $C_\ell$  converge. Para  $a \rightarrow \infty$

$$\left| C_{\ell,a} \left( \frac{1}{\ln(s/2M^2)} \right)^a \right| \leq E_{\ell,a} \left( \frac{1}{\ln(s/2M^2)} \right)^a \quad (4.27)$$

onde

$$E_{\ell,a} = a^{2\ell+a} (\ln 2)^a \sum_{m=1}^{\ell} \frac{(2\pi)^{m+1} (4^{m-1} - 4)}{(2m)!} B_m \quad (4.28)$$

e como a série  $\sum_{a=0}^{\infty} E_{\ell,a} 1/[\ln(s/2M^2)]^a$  converge, a série  $C_\ell$  converge absolutamente.



Verificamos assim para  $S_2(\theta)$ , até segunda ordem de  $1/N$ , que a geração dinâmica de massa é o único efeito não perturbativo presente na expansão em  $g$ . Vamos mostrar agora que isso é verdade em todas as ordens de  $1/N$ .

#### 4.3 - EXTENSÃO A ORDENS SUPERIORES DE $1/N$

Expandindo o termo  $[1 - \exp(-t\Delta/2\pi)]$ , presente na expressão (4.8), para  $\Delta \rightarrow 0$  (que está ligado com  $1/N$  através de (4.6)) obtemos que

$$S_2(\theta) = \left(1 + \frac{\Delta^2}{\theta^2}\right)^{-1/2} \exp \left\{ -i \int_0^\infty dt \left[ \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\Delta}{2\pi}\right)^{n+1} \frac{(-1)^n t^n}{(n+1)!} \right] \times \operatorname{tgh}(t/4) \operatorname{sen}(\theta t/2\pi) \right\} \quad (4.29)$$

e separando essa série em termos de potências pares e ímpares de  $t$ , obtemos integrais  $I_n$  do tipo (A.1) do apêndice. Como estamos interessados em  $g \rightarrow 0$ , precisamos conhecer apenas o comportamento assintótico dessas integrais para  $\theta \rightarrow \infty$ . Assim pelos cálculos mostrados no apêndice temos para  $\theta \rightarrow \infty$  (ver (A.10) e (A.22))

$$I_{2n} = (-1)^n 4^{n+1} \pi^{2n+1} e^{-\theta} \quad (4.30a)$$

$$I_{2n+1} \sim \sum_{2m \geq 2n+1}^l \left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^{2m+1} \frac{(-1)^{n+1} (2m)! (4 - 4^{n-m+1})}{(2m - 2n)!} B_{m-n} \quad (4.30b)$$

para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Substituindo (4.30) em (4.29) obtemos

$$S_2(\theta) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{\Delta}{\theta}\right)^{2n+2} - 2i \underbrace{\left( \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} \right)}_{\operatorname{sen} \Delta} e^{-\theta} + i \sum_{n=0}^\infty \frac{I_{2n+1}}{(2n+2)!} \left(\frac{\Delta}{2\pi}\right)^{2n+2} \right\} \quad (4.31)$$

e ao relacionarmos  $\theta$ , presente na exponencial da expressão (4.31), com a massa gerada  $M$ , teremos

$$e^{-\theta} \rightarrow (2M^2/s) \quad (4.32a)$$

$$\frac{1}{\theta^k} \rightarrow \sum_{\ell=0}^{\infty} (2M^2/s)^\ell \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} \left( \frac{1}{\ln(s/2M^2)} \right)^{n+k} D_{\ell,n} \right] \quad (4.32b)$$

relembrando que  $(2M^2/s)$  e  $1/\ln(s/2M^2)$  estão ligados a  $e^{-1/g}$  e  $g$  respectivamente. Assim, de modo esquemático

$$S_2(\theta) = \exp \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n a_n, \quad (4.33a)$$

$$\text{onde } a_n = \sum_{\ell} (e^{-1/g})^\ell b_\ell \text{ com } b_\ell = \sum_n g^n C_{n,\ell}. \quad (4.33b)$$

Os coeficientes  $b_\ell$ , que apresentam os termos dados por (4.32b), são séries absolutamente convergentes. Por sua vez a exponenciação não traz nenhum problema adicional, assim  $S_2(\theta)$  não possui nenhum outro efeito não perturbativo, exceto a geração dinâmica de massa, em qualquer ordem de  $1/N$ . Através de (4.2) e (4.3) conclui-se que a matriz-S do modelo Sigma não linear também apresenta apenas esse efeito não perturbativo em  $g$ .

Raciocinando de modo inverso, se tivéssemos obtido para a matriz-S, de modo mais específico  $S_2$ , todos os termos da série perturbativa em  $g$  (em nosso caso o conhecimento exato da matriz-S permite contornar esses cálculos) poderíamos através de um rearranjo dos termos da mesma (sabemos que o rearranjo ideal é o ditado pela expansão em potências de  $1/N$ ) expressá-la da forma (4.33). Dessa maneira um efeito puramente não perturbativo apareceria explicitamente (a expansão em  $1/N$  dá a dependência analítica desse efeito em termos da constante de acoplamento efetiva  $g$ ), efeito esse que seria reconhecido como uma geração dinâmica de massa. Em



outras palavras, através de um rearranjo dos termos dessa série seria possível definir uma matriz-S não perturbativa.

Em nossos cálculos obtivemos uma série de potências em  $g$  ( $b_l$  dada por (4.33b) ) convergente. Em caso contrário, restaria a possibilidade de verificar a sua somabilidade de Borel, o que ainda poderia levar a uma definição não perturbativa para a matriz-S. A não somabilidade de Borel indicaria a presença de outros efeitos não perturbativos em  $g$ . Conseqüentemente, teríamos que fatorar esse efeito da expansão em  $g$  de modo análogo ao que fizemos para a geração dinâmica de massa. Novamente deveríamos analisar o status da série de potências em  $g$  e verificar a sua somabilidade.

## CONCLUSÃO

Mostramos nesse trabalho ser possível definir uma matriz-S para o modelo Sigma não linear através de sua expansão perturbativa em  $g$ . Para tanto tivemos que reorganizar essa série de um modo especial, tal que os efeitos não perturbativos em  $g$ , como a geração dinâmica de massa, ficassem fatorados e que uma série de potências em  $g$  emergisse e pudesse ser bem definida por um processo de soma.

Conseguimos realizar esse programa graças ao conhecimento da matriz-S exata do modelo. Fizemos a sua expansão em potências de  $1/N$  e conseguimos fatorar a dependência explícita na geração dinâmica de massa, dada através da expansão perturbativa em  $1/N$ . Essa fatorização resultou, para cada ordem de  $1/N$ , em uma série de potências na massa física gerada, sendo cada coeficiente uma série de potências na constante de acoplamento  $g$  efetiva. Mostramos a convergência das séries em  $g$ , apesar de esperarmos que fossem divergentes mas Borel somáveis.

Isso nos levou a concluir que a geração dinâmica de massa é o único efeito não perturbativo existente na expansão perturbativa do modelo. Mesmo não podendo exprimir a matriz-S como uma série de potências em  $g$ , já que a geração dinâmica de massa é responsável pela presença de uma singularidade essencial, a expansão em  $g$  pode ser usada para definir a matriz-S não perturbativamente, desde que seja feito um reordenamento de seus termos.

Vale a pena nesse ponto citar os resultados obtidos por David<sup>[62]</sup>, neste mesmo modelo, para a expansão de produtos de operadores a curta distância. Essa expansão é muito utilizada na cromodinâmica quântica dentro do formalismo das regras de soma. A idéia é levar em consideração efeitos não perturbativos, assumindo que valores esperados no vácuo de operadores locais sejam não nulos; assim para as funções de Green:  $G(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_i C_i(x_1, \dots, x_{2n}; g) \langle 0 | O_n | 0 \rangle$ , onde  $C_i$  são obtidos perturbativamente



e os valores esperados no vácuo de  $O_n$  parametrizam os efeitos não perturbativos. Essa expressão foi proposta por Shifman, Vainshtein e Zakharof (SVZ). O ponto importante é que os coeficientes  $C_i$  são definidos por um processo de soma, de Borel por exemplo, da série perturbativa na constante de acoplamento  $g$  e os valores esperados no vácuo de  $O_n$  são termos não perturbativos da ordem de  $\exp(-2\pi/g)$ .

David testou a validade dessa expansão, no caso do modelo Sigma não linear, analisando as funções de Green. Em  $1/N$  essas funções são bem definidas pois essa expansão leva em conta os efeitos não perturbativos da teoria. Ele considerou, como sendo o lado esquerdo da expansão de SVZ, as funções de Green dadas por  $1/N$ . O lado direito foi obtido expandindo as funções de Green em  $1/N$  levando em conta o efeito de geração dinâmica de massa, obtendo dessa maneira a dependência em  $g$ . Assim reproduziu a expansão de SVZ onde a soma em  $i$  referia-se a cada termo da expansão em  $1/N$ . Num primeiro trabalho mostrou a existência de renormalons infravermelhos para cada termo em  $i$  que se cancelavam com os existentes em  $i + 1$ . Posteriormente, em um outro artigo, mostrou que esse mecanismo de cancelamento era incorreto.

O fato é que nossos cálculos assemelham-se muito a uma expansão do tipo SVZ, como pode ser visto para  $\ln S_2(\theta)$  dado por (4.33). Na verdade, o que esperavamos era obter singularidades na transformada de Borel para as séries  $b_\ell$  que se cancelariam para termos  $\ell$  sucessivos, de modo a não fornecer ambigüidades, pois conhecíamos  $S_2(\theta)$  exatamente. Obtivemos na verdade séries bem comportadas.

Dentro desse espírito de cálculo, parece-nos interessante extendê-los às outras matrizes-S exatas existentes. Para o modelo de Gross-Neveu, por exemplo, temos os mesmos resultados que para o Sigma não linear, já que temos a equivalência  $\Delta \leftrightarrow -\Delta$  entre as soluções desses dois modelos. Mais interessante ainda, seria fazer esse estudo para as matrizes-S exatas dos modelos supersimétricos, como o Sigma não linear e o  $CP^{N-1}$ , pois estes possuem matrizes-S expressas em termos de produtórios que envolvem um número infinito de funções Gama.

## Apêndice

TRATAMENTO DAS INTEGRAIS  $I_n$ 

Devemos calcular integrais do tipo

$$I_n = \int_0^{\infty} dt (t^n \operatorname{tgh} \beta t) \operatorname{sen} \alpha t \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.1})$$

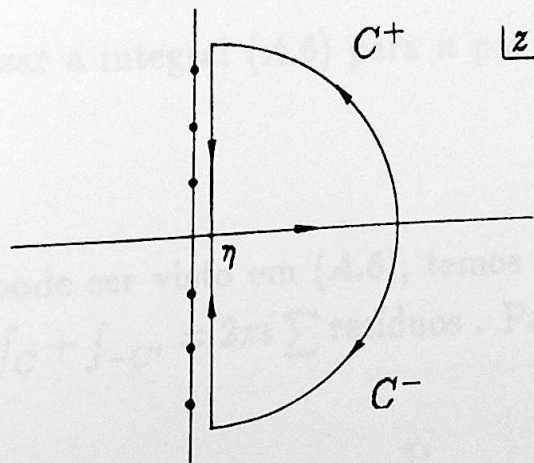
onde em nosso caso  $\alpha = \theta/2\pi$  e  $\beta = 1/4$ . Como essa integral não é absolutamente convergente vamos colocar um fator  $\exp(-\epsilon t)$ , com  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , no integrando da mesma. Assim

$$I_n = \int_0^{\infty} dt (t^n \operatorname{tgh} \beta t) e^{-\epsilon t} \operatorname{sen} \alpha t, \quad (\text{A.2})$$

e vamos reescreve-la como

$$I_n = \frac{1}{2i} \left[ \underbrace{\int_0^{\infty} dt (t^n \operatorname{tgh} \beta t) e^{(i\alpha - \epsilon)t}}_{I^+} - \underbrace{\int_0^{\infty} dt (t^n \operatorname{tgh} \beta t) e^{-(i\alpha + \epsilon)t}}_{I^-} \right] \quad (\text{A.3})$$

No plano complexo  $z$  mostrado abaixo podemos aplicar o teorema de Cauchy nas regiões indicadas, observando que a integração em  $C^+$  para  $I^+$  e  $C^-$  para  $I^-$  dão contribuições nulas.



Assim, com  $\eta$  infinitesimal,



$$I_n = \frac{1}{2i} \left[ \int_{\eta}^{\eta+i\infty} dz (z^n \operatorname{tgh} \beta z) e^{(i\alpha-\epsilon)z} - \int_{\eta}^{\eta-i\infty} dz (z^n \operatorname{tgh} \beta z) e^{-(i\alpha+\epsilon)z} \right] \quad (A.4)$$

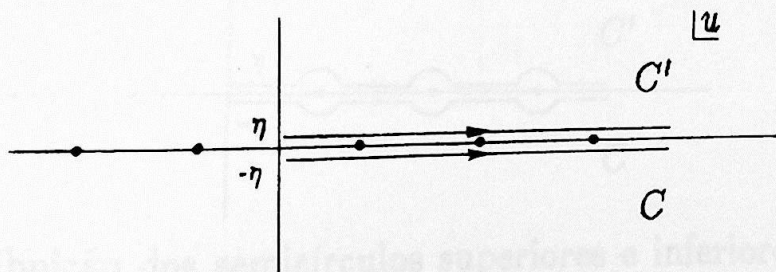
e fazendo as mudanças de variáveis  $z = iu$  e  $z = -iu$  para a primeira e segunda integrais em (A.4), respectivamente, temos

$$I_n = \frac{i^{n+1}}{2} \left[ \int_{-i\eta}^{-i\eta+\infty} du (u^n \operatorname{tg} \beta u) e^{-\alpha u - i\epsilon u} - (-1)^n \int_{i\eta}^{i\eta+\infty} du (u^n \operatorname{tg} \beta u) e^{-\alpha u + i\epsilon u} \right]. \quad (A.5)$$

Nesse ponto podemos fazer  $\epsilon = 0$  e reescrever (A.5) como

$$I_n = \frac{i^{n+1}}{2} \left[ \int_C du (u^n \operatorname{tg} \beta u) e^{-\alpha u} - (-1)^n \int_{C'} du (u^n \operatorname{tg} \beta u) e^{-\alpha u} \right], \quad (A.6)$$

onde os contornos  $C$  e  $C'$  estão mostrados no plano complexo da figura abaixo, e os pólos do integrando estão localizados em  $\operatorname{Re} u = \pm \frac{(2k+1)\pi}{2\beta}$  com  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$



Vamos agora analisar a integral (A.6) para  $n$  par e  $n$  ímpar separadamente.

*n* par

Neste caso, como pode ser visto em (A.6), temos  $(-1)^n = 1$  e através do teorema de Cauchy  $\int_C + \int_{-C'} = 2\pi i \sum$  resíduos. Para  $n = 0$  os resíduos do integrando fornecem

$$2\pi i \sum \text{resíduos} = -\frac{\pi i}{\beta \operatorname{senh}(\alpha\pi/2\beta)} \quad (A.7)$$

e substituindo (A.7) em (A.6) para  $n = 0$  obtemos

$$I_0 = \frac{\pi}{2\beta} \frac{1}{\sinh(\alpha\pi/2\beta)} = \int_0^{\infty} dt \operatorname{tgh} \beta t \operatorname{sen} \alpha t. \quad (\text{A.8})$$

A integral  $I_0$  dada por (A.8) nos permite calcular  $I_n$  exatamente para  $n$  par. Isso é trivialmente obtido derivando  $I_0$  um número par de vezes em relação a  $\alpha$ . Assim

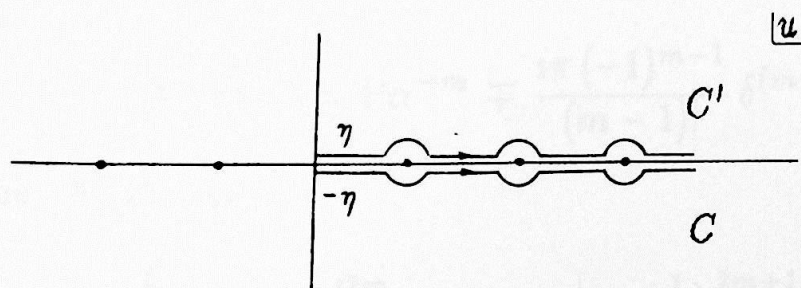
$$I_n = i^n \frac{\pi}{2\beta} \frac{d^n}{d\alpha^n} \left( \frac{1}{\sinh(\alpha\pi/2\beta)} \right) \quad \text{para } n = 0, 2, 4, 6, \dots \quad (\text{A.9})$$

e que assintoticamente para  $\alpha \rightarrow \infty$  comporta-se como

$$I_n = i^n 2 \left( \frac{\pi}{2\beta} \right)^{n+1} e^{-\alpha\pi/2\beta} \quad \text{para } \alpha \rightarrow \infty. \quad (\text{A.10})$$

*n* ímpar

Agora em (A.6)  $(-1)^n = -1$  e a integral deve ser calculada em  $C$  e  $C'$ , onde contornamos os polos através de semicírculos de raio  $\epsilon$ , como mostra a figura abaixo.



A contribuição dos semicírculos superiores e inferiores irá anular-se, e a soma das integrais nos segmentos entre esses semicírculos resultará duas vezes o valor principal da integral, assim

$$I_n = i^{n+1} \text{P} \int_0^{\infty} du (u^n \operatorname{tg} \beta u) e^{-\alpha u} \quad \text{para } n = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{A.11})$$

Vamos observar que (A.11) é uma outra representação de (A.2) para  $n$  ímpar. Devemos agora, já que não temos uma solução exata de (A.11), obter uma expansão assintótica, para  $\alpha \rightarrow \infty$ , de  $I_n$  para valores ímpares



de  $n$ . Integrando (A.3) por partes sucessivamente, teremos para  $I^+$  e  $I^-$  respectivamente

$$I^+ = \int_0^{\infty} dt (t^n \operatorname{tg} \beta t) e^{at} = \sum_{m=1}^{\ell} \frac{(-1)^m}{a^m} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} (t^n \operatorname{tgh} \beta t) \Big|_0 \quad (\text{A.12})$$

$$+ \frac{(-1)^{\ell}}{a^{\ell}} \int_0^{\infty} dt \frac{d^{\ell}}{dt^{\ell}} (t^n \operatorname{tgh} \beta t) e^{at}$$

$\equiv R_{\ell}^+$  resto de ordem  $\ell$

$$I^- = (I^+ \text{ com } a \rightarrow b) \quad \text{onde } a = i\alpha - \epsilon \quad \text{e } b = -(i\alpha + \epsilon).$$

Assim,

$$I_n = \frac{1}{2i} \sum_{m=1}^{\ell} \frac{(-1)^m}{i^m} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} (t^n \operatorname{tgh} \beta t) \Big|_0 \left[ \frac{1}{(\alpha + i\epsilon)^m} - \frac{(-1)^m}{(\alpha - i\epsilon)^m} \right] + R_{\ell} \quad (\text{A.13})$$

e observando que quando  $m$  é par estamos derivando uma função par um número ímpar de vezes, obtemos uma função ímpar que é nula na origem. Portanto em (A.13) só teremos termos não nulos para  $m$  ímpar. Desse modo usando

$$(\alpha \pm i\epsilon)^{-m} = P\alpha^{-m} \mp \frac{i\pi (-1)^{m-1}}{(m-1)!} \delta^{(m-1)}(\alpha), \quad (\text{A.14})$$

temos que (A.13) fica

$$I_n = \sum_{m=0}^{\ell} (-1)^m \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} (t^n \operatorname{tgh} \beta t) \Big|_0 P\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2m+1} + R_{\ell} \quad (\text{A.15})$$

onde

$$R_{\ell} = (-1)^{\ell} P\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\ell+1} \int_0^{\infty} dt \frac{d^{2\ell+1}}{dt^{2\ell+1}} (t^n \operatorname{tgh} \beta t) \cos at e^{-\epsilon t}. \quad (\text{A.16})$$

Pela regra de Leibniz temos

$$\frac{d^{2m}}{dt^{2m}} (t^n \operatorname{tgh} \beta t) \Big|_0 = \frac{(2m)!}{(2m-n)!} \frac{d^{2m-n}}{dt^{2m-n}} \operatorname{tgh} \beta t \Big|_0 \quad \text{para } 2m \geq n \quad (\text{A.17})$$

e igual a zero para  $2m < n$ . Observando a expansão de  $\operatorname{tgh} x$  em série de potências em torno de zero

$$\operatorname{tgh} x = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{\ell-1} 2^{2\ell} (2^{2\ell} - 1)}{2\ell} B_{\ell} \right] \frac{x^{2\ell-1}}{(2\ell-1)!} \quad (\text{A.18})$$

onde  $B_{\ell}$  são os números de Bernoulli, verificamos que seus coeficientes (observar a existência de apenas potências ímpares) fornecem

$$\left. \frac{d^{2m-n}}{dt^{2m-n}} \operatorname{tgh} \beta t \right|_0 = \frac{\beta^{2m-n} (-1)^{m-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} 2^{2m-n+1} (2^{2m-n+1} - 1)}{2m-n+1} B_{m-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} \quad (\text{A.19})$$

Assim, finalmente

$$I_n = \sum_{m(2m \geq n)}^{\ell} P\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2m+1} ;^{n+1} \beta^{2m-n} \frac{(2m)!}{(2m-n+1)!} \quad (\text{A.20})$$

$$\times 2^{2m-n+1} (2^{2m-n+1} - 1) B_{m-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} + R_{\ell} \quad \text{para } n = 1, 3, 5, \dots$$

Verificar que a série acima diverge é trivial. Devemos entretanto mostrar que  $R_{\ell} \rightarrow 0$  quando  $\alpha \rightarrow \infty$ . Seja então

$$|R_{\ell}| \leq P\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\ell+1} \left| \int_0^{\infty} dt \frac{d^{2\ell+1}}{dt^{2\ell+1}} (t^n \operatorname{tgh} \beta t) \right| \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\ell+1} \left. \frac{d^{2\ell}}{dt^{2\ell}} (t^n \operatorname{tgh} \beta t) \right|_0^{\infty} \quad (\text{A.21})$$

com  $2\ell \geq n$ . Para:

$t \rightarrow \infty$

$$\left. \frac{d^{2\ell}}{dt^{2\ell}} (t^n \operatorname{tgh} \beta t) \right|_{\infty} = \sum_{k=0}^{2\ell} \binom{2\ell}{k} (t^n)^{(k)} (1 - 2e^{-2\beta t} + 2e^{-4\beta t} - \dots)^{(2\ell-k)} \Big|_{\infty}$$

mas  $(t^n)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)t^{n-k}$  e como  $2\ell \geq n$  esse termo não diverge,

$t \rightarrow 0$

$$\left. \frac{d^{2\ell}}{dt^{2\ell}} (t^n \operatorname{tgh} \beta t) \right|_0 = \frac{(2\ell)!}{(2\ell-n)!} \left. \frac{d^{2\ell-n}}{dt^{2\ell-n}} \operatorname{tgh} \beta t \right|_0$$



que por (A.18) dá um resultado finito. Assim a integral em  $R_\ell$  é definida, i.e., resulta simplesmente em um número e portanto  $R_\ell \rightarrow 0$  quando  $\alpha \rightarrow \infty$ . Esse resultado nos permite utilizar (A.20) como uma série assintótica à (A.2) com  $n$  ímpar. Do ponto de vista computacional isso significa que a expansão assintótica aproxima bem a função exata para  $\alpha \rightarrow \infty$ , e escrevemos formalmente

$$I_n \sim \sum_{m(2m \geq n)}^{\ell} P\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2m+1} i^{n+1} \beta^{2m-n} \frac{(2m)!}{(2m-n+1)!} \quad (A.22)$$

$$\times 2^{2m-n+1} (2^{2m-n+1} - 1) B_{m-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} \quad \text{para } n = 1, 3, 5, \dots$$

Na verdade queremos usar (A.22) mais do que apenas como uma aproximação numérica, isto é, gostaríamos que ela tivesse um comportamento analítico idêntico ao da integral (A.2) para  $\alpha \rightarrow \infty$ . Isso nos garantiria que os termos do tipo  $e^{-\alpha}$  (que são importantes em nossos cálculos pois produzem potências de  $M$ ) não estivessem presentes em  $R_\ell$ , o que é perfeitamente possível, pois para  $\alpha \rightarrow \infty$  esse termo tende a zero. Isso pode ser garantido se mostrarmos que a série (A.22) é Borel somável, em outras palavras, essa série será assintoticamente forte à função  $I_n$  (isso garante que  $I_n + \sum (e^{-\alpha})^n a_n$  não tem como série assintótica (A.22)).

Vamos utilizar o teorema de Watson-Nevanlinna na ordem inversa, i.e., mostrar que a transformada de Borel  $B(u)$  é uma função analítica na vizinhança do eixo real positivo e que  $|B(u)| \leq K e^{|u|/R}$ .

A transformada de Borel  $B(u)$  é obtida através da série<sup>†</sup> em (A.15) dividindo cada termo da mesma por  $(2m)!$ . Assim,

$$B(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} (t^n \operatorname{tgh} \beta t) \Big|_0 P u^{2m}$$

e fazendo  $t \rightarrow it$

$$B(u) = i^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} (t^n \operatorname{tg} \beta t) \Big|_0 P u^{2m} = i^{n+1} P (u^n \operatorname{tg} \beta u). \quad (A.23)$$

<sup>†</sup> Essa série é da forma  $\sum_m a_m \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2m+1}$  e conseqüentemente a soma (se dividirmos os coeficientes da série por  $(2m)!$ ) e a transformada de Borel serão  $B(u) = \sum_m a_m \frac{u^{2m}}{(2m)!}$  e  $\int_0^\infty du e^{-u/\alpha} B(u)$  respectivamente.

Podemos nesse ponto calcular a soma de Borel, que é dada por

$$G(z) = \int_0^{\infty} du e^{-u/z} B(u) = \int_0^{\infty} du e^{-u/z} i^{n+1} P(u^n \operatorname{tg} \beta u). \quad (\text{A.24})$$

Em nosso caso  $z = 1/\alpha$  e então

$$G(\alpha) = i^{n+1} P \int_0^{\infty} du (u^n \operatorname{tg} \beta u) e^{-\alpha u}, \quad (\text{A.25})$$

que é idêntica a equação (A.11).

A expressão (A.23) apresentaria singularidades caso o valor principal  $P$  não estivesse presente. Assim é válido dizer que  $B(u)$  é analítica na vizinhança do eixo real positivo. Por outro lado

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left| \frac{P(u^n \operatorname{tg} \beta u)}{K e^{|u|/R}} \right| \rightarrow 0,$$

i.e.,  $|B(u)|$  tem um "bound" exponencial. Assim pelo inverso do Teorema de Watson-Nevalinna (Teorema 1.3 item *d*) a série (A.22) é assintoticamente forte à soma de Borel  $\int_0^{\infty} du e^{-u/z} B(u)$ . A soma de Borel por sua vez é igual a (A.11), como pode ser visto por (A.25) e conseqüentemente a série (A.22) é assintoticamente forte à integral (A.11) (integral (A.2) para  $n$  ímpar).



## REFERÊNCIAS

- [1] F. Dyson, *Phys. Rev.* **85**, 631(1952).
- [2] C. Hurst, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **48**, 625(1952).  
W. Thirring, *Helv. Phys. Acta* **26**, 33(1953).  
A. Peterman, *Helv. Phys. Acta* **26**, 291(1953).
- [3] A. Jaffe, *Commun. Math. Phys.* **1**, 127(1965).
- [4] C. de Calan e V. Rivasseau, *Commun. Math. Phys.* **83**, 77(1982).
- [5] C. M. Bender e T. T. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 406(1968).  
C. M. Bender e T. T. Wu, *Phys. Rev.* **184**, 1231(1969).
- [6] C. M. Bender e T. T. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 461(1971).  
C. M. Bender e T. T. Wu, *Phys. Rev.* **D7**, 1620(1973).
- [7] C. M. Bender, *Int. J. Quantum Chem.* **21**, 93(1982).  
T. T. Wu, *Int. J. Quantum Chem.* **21**, 105(1982).
- [8] L. Lipatov, *Sov. Phys. JETP* **72**, 411(1977).
- [9] E. Bogomol'nyi, V. A. Fateev e L. N. Lipatov, *Soviet Scientific Reviews A*  
**Vol2**, 247(1980).
- [10] D. I. Kazakov e D. V. Shirkov, *Fortschr. Phys.* **28**, 465(1980).
- [11] G. Parisi, Cargèse Lecture 1977 (Plenum Press, NY, 1977).
- [12] J. Zinn-Justin, Salamanca 1977, Lectures Notes in Physics 1977, número  
126, editor J. A. Azcerraga (Spring Verlag, Berlin 1977).
- [13] J. Zinn-Justin, Cargèse Lecture 1977 (Plenum Press, NY, 1977).
- [14] J. Zinn-Justin, International GIFT Seminar, Sant Feliu De Gaixols, Spain  
1981, Editores J. Julve e M. Ramóm-Medrano (World Scientific).
- [15] E. Borel, *Leçons sur les séries divergents*, 2ème éd. (Gauthier-Villars, Paris,  
1928), pp. 135.

- [16] G. N. Watson, *Philos. Trans. Soc. London* **A211**, 279(1912).
- [17] F. Nevanlinna, *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **A12**, No.3(1918).
- [18] S. Graffi, V. Grecchi e B. Simon, *Phys. Lett.* **B32**, 631(1970).
- [19] J. Avron, I. Herbst e B. Simon, *Commun. Math. Phys.* **79**, 529(1981).
- [20] S. Graffi e V. Grecchi, *Commun. Math. Phys.* **62**, 83(1978).
- [21] I. Herbst e B. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 67(1978).  
I. Herbst e B. Simon, *Commun. Math. Phys.* **81**, 181(1981).
- [22] S. Graffi e V. Grecchi, *Commun. Math. Phys.* **92**, 397(1984).
- [23] G. Auberson, *Commun. Math. Phys.* **84**, 531(1982).
- [24] B. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 1583(1970).
- [25] J. Eckmann, J. Magnen e R. Sénéor, *Commun. Math. Phys.* **39**, 251(1975).
- [26] R. Renouard, *Ann. Inst. Henri Poincare* **27**, 237(1977).  
R. Renouard, *Ann. Inst. Henri Poincare* **31**, 235(1979).
- [27] J. Magnen e R. Sénéor, *Commun. Math. Phys.* **56**, 237(1977).
- [28] J. Eckmann e H. Epstein, *Commun. Math. Phys.* **68**, 245(1979).
- [29] J. Fröhlich, A. Mardin E V. Rivasseau, *Commun. Math. Phys.* **86**, 87(1982).
- [30] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau e R. Sénéor, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 1479(1985).
- [31] V. Rivasseau e E. Speer, *Commun. Math. Phys.* **72**, 293(1980).
- [32] C. de Calan e V. Rivasseau, *Commun. Math. Phys.* **82**, 69(1981).
- [33] W. Y. Crutchfield II, *Phys. Rev.* **D19**, 2370(1979).
- [34] G. 't Hooft, Erice Lecture (1977), editor Zichini (1978).
- [35] C. M. Bender e S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods For Scientists And Engineers* (McGraw-Hill, 1978).
- [36] B. Hisbrunner, *Helv. Phys. Acta* **55**, 295(1982).



- [37] M. Reed e B. Simon, *Methods Of Modern Mathematical Physics*, Vol. IV (Academic Press, N. Y., 1978).
- [38] B. Simon, *Int. J. Quantum Chem.* **21**, 3(1982).
- [39] B. Simon, *Fundamental Interactions In Physics And Astrophysics*, p.120, editores G. Iverson, A. Perlmutter e S. Mintz (Plenum Press, 1973).
- [40] A. S. Wightman, *Erice Lecture (1977)*, editor Zichini (1978).
- [41] G. H. Hardy, *Divergent Series* (Oxford University Press, 1949).
- [42] A. D. Sokal, *J. Math. Phys.* **21**, 2(1980).
- [43] A. Horzela, *Acta Physica Polonica B15*, 425(1986).
- [44] E. Caliceti, V. Grecchi e M. Maioli, *Commun. Math. Phys.* **104**, 163(1986).
- [45] B. Simon, *Ann. Phys.(N. Y.)* **58**, 76(1970).  
B. Simon, *Cargèse Lecture* (Plenum Press, NY).
- [46] I. Herbst e B. Simon, *Phys. Lett.* **B78**, 304(1978).
- [47] A. V. Turbiner e A. G. Ushveridze, *Preprint ITEP-197*(1984).
- [48] E. Brézin, G. Parisi e J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.* **D16**, 408(1977).
- [49] R. Rajaraman, *Solitons And Instantons-An Introduction To Solitons And Instantons In Quantum Field Theory* (North-Holland, 1982).
- [50] R. Shankar, *Exact S-Matrices In Two-dimensional Field Theories: A Review*, Talk given at the APS meeting at Washington D.C. (1978).
- [51] V. Kurak, *Matrizes-S Exatas De Alguns Modelos Da Teoria De Campos*, Tese de doutorado (PUC/RJ, 1979).
- [52] A. B. Zamolodchikov e A. B. Zamolodchikov, *Annals Of Phys.* **120**, 253(1979).
- [53] B. Berg, M. Karowski, P. Weiz e V. Kurak, *Nucl. Phys.* **B134**, 125(1978).
- [54] S. Coleman e J. Mandula, *Phys. Rev.* **159**, 1251(1969).
- [55] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.* **B72**, 224(1977).  
S. Parke, *Nucl. Phys.* **B174**, 166(1980).

- [56] P. Roman, *Introduction To Quantum Field Theory* (John Wiley and Sons, 1969).
- [57] R. Hagerdorn, *Relativistic Kinematics* (Benjamin, N. Y., 1963).
- [58] S. Coleman, *Phys. Rev. D* **11**, 2088(1975).
- [59] V. Kurak e J. A. Swieca, *Phys. Lett.* **B82**, 289(1979).
- [60] A. D'Adda, M. Lüscher e P. di Vecchia, *Phys. Reports* **49**, 239(1979).
- [61] Bateman Manuscript Project, Volume 1 pag. 21.
- [62] F. David, *Nucl. Phys.* **B209**, 433(1982).  
F. David, *Nucl. Phys.* **B234**, 237(1984).