Universidade de São Paulo
Instituto de Física

SBI-IFUSP
305M810T2050

Potencial nucleon-nucleon devido à troca de dois píons: o papel da simetria quiral

Tese de doutorado submetida ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Carlos Antonio da Rocha

Orientador: Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta

São Paulo
1993

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
2050
e. 1
INSTITUTO DE FÍSICA

539.725
P 6.1 2.2
x.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Rocha, Carlos Antonio da
Estudo do potencial nucleon-nucleon devido a troca de dois píons: o papel da simetria quiral. São Paulo, 1993.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Experimental
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares
Orientador: Profº Dr. Manoel Roberto Robilotta

Unitermos: 1. Potencial nucleon-nucleon; 2. Troca de píons; 3. Simetria quiral; 4. Interação NN com dinâmica quiral.

USP/IF/SBI - 68/93

À minha querida esposa Ângela, pelo apoio, incentivo e pela grande força nos momentos mais difíceis.

À minha mãe, pela lição de vida, pelo carinho, pelo amor.
Em memória de meu pai, que recentemente partiu e cuja lembrança me enche de saudade e força para a vida.

Agradecimentos

Ao prof. Manoel Roberto Robilotta, pela orientação amiga, firme e paciente e por ter aceitado a grande tarefa de transformar um físico experimental em teórico.

Aos amigos Orimar e Orildo Batisttel, companheiros de sala, pelo apoio constante, pelo chimarrão amigo e pelas discussões enriquecedoras.

Ao grupo Finpe como um todo e em particular aos profs. Celso Lima, Fernando Navarra e Hélio Dias pelo apoio.

Ao Fernando Braga, da SBF, pelo apoio imprescindível na editoração eletrônica deste trabalho e pela amizade.

Ao Maurício, do grupo SEMA, pela ajuda na minha introdução ao mundo dos PC's e pela amizade.

Ao pessoal do Vax: Becherini, Douglas, Adilson e Fábio, sempre prontos a resolver as minhas inúmeras dúvidas.

Ao amigo Luiz Guilherme, pela valiosa ajuda na compreensão do programa LaTeX.

À Sandraly e à Ellen, pelo apoio importante no final da tese e pela amizade.

Ao João Carlos e Carlinhos pela precisão e zelo nos desenhos.

Ao Josué e à Cida pela amizade e pelo apoio sempre imediato e constante.

À minha querida Ângela, pela revisão ortográfica.

A todos meus amigos, de forma especial e sincera, pela convivência saudável e pelo estímulo.

Ao CNPq e à FAPESP, pelo apoio financeiro.

E a todos aqueles que, direta ou indiretamente, me auxiliaram neste trabalho.

Índice

1 Introdução **1**

2 O potencial nucleon-nucleon: introdução **5**

2.1 Características empíricas da força nuclear 6

2.1.1 A força nuclear é de curto alcance 6

2.1.2 A força nuclear é atrativa na região de alcance intermediário 6

2.1.3 A força nuclear tem um caroço repulsivo 7

2.1.4 Existe uma componente tensorial 8

2.1.5 Existe uma componente de acoplamento spin-órbita 9

2.2 O desenvolvimento das idéias sobre a interação NN 10

2.2.1 O surgimento da Física Nuclear 10

2.2.2 O píon como o quantum da força forte 14

2.2.3 O OBEP e a "teoria de dispersão" 19

2.2.4 Os potenciais realísticos de Paris e Bonn 23

2.2.5 Desenvolvimentos mais recentes 25

3 A dinâmica quiral para as interações fortes **27**

3.1 A idéia da força nuclear mediada por trocas mesônicas 28

3.2 Diagramas de Feynman, simetrias e Lagran-gianas 29

3.3 Lagrangianas, simetrias e correntes de Noether 31

3.4 O surgimento da simetria quiral: interações fracas 35

3.5 Simetria quiral: álgebra de correntes 42

3.6 Simetria quiral: Lagrangianas 46

3.7 Realizações lineares da simetria quiral 47

3.8 Realizações não-lineares da simetria quiral 52

4 Interação NN e simetria quiral **59**
4.1 Os vértices 59
4.2 Regras de Feynman 63
4.3 Ordenação dos diagramas em potências do momento 68

5 Definição do Potencial NN **75**
5.1 Potencial e relatividade 75
5.2 Relações cinemáticas 77
5.3 Amplitudes 80
5.4 A equação de Bethe-Salpeter 83
5.5 Obtenção do potencial 85

6 Potencial NN devido à troca de dois píons **95**
6.1 Cálculo dos diagramas: representação integral 96
6.2 Soma das amplitudes 109
6.3 Cálculo da iteração da troca de um píon 119
6.4 Redução não-relativística do potencial 126
6.5 O potencial no espaço de configuração 134
6.6 Potencial devido à troca de um píon 144

7 Resultados para o potencial quiral **147**
7.1 O potencial NN e o espalhamento πN 147
7.2 O potencial até a segunda ordem 150
7.2.1 Funções de perfil do potencial 151
7.2.2 Decomposição do potencial nos canais de spin e isospin 156
7.2.3 O papel da troca de um píon 160
7.3 O Potencial em terceira e quarta ordens 164
7.4 Soma total para o potencial quiral 169

8 Conclusões e perspectivas **177**

9 Apêndices **180**

A Unidades e notação relativística **181**

B Regularização covariante **189**

C Cálculo das integrais de loop **193**

D O espalhamento πN **227**

E Detalhes da redução não-relativística **231**

10 Referências **245**

Lista de Figuras

2.1 *Energia total de ligação por partícula como função da massa atômica. À medida que A cresce, essa energia se mantém praticamente constante, indicando a saturação da força nuclear [WB 52].* 7

2.2 *Defasagens para o espalhamento NN para os estados* $^1S_0$ *e* $^1D_2$*. O que é mostrado na figura é uma análise dependente da energia feita por Arndt [Arn 87].* 8

2.3 *Parâmetros de mistura para* $J \leq 4$*. A análise mostrada é a de Arndt [Arn 87].* 9

2.4 *Deslocamento de fase para a interação NN para o tripleto de onda P. Nas figuras é mostrada a previsão teórica usando uma força central apenas (C), central mais tensor (C+T) e central mais tensor mais spin-órbita (C+T+LS). A linha pontilhada representa a análise dos deslocamentos de fase independente da energia [Arn+ 83, Dub+ 82].* 10

2.5 *Medidas para a polarização no sistema pp para a energia de laboratório de 212 MeV. Linha cheia: força nuclear completa; tracejada: força spin-órbita omitida; pontilhada: força central apenas. Os dados mostrados estão nas energias de 209.1 (quadrado vazado), 210 (círculo cheio)e 213 MeV (círculo vazado) [BL 82, Arn 87].* 11

2.6 *Interação NN central (no canal* $^1S_0$*) como função de r. Na figura é mostrado os domínios onde prevalecem a troca de um e dois píons, bem como a região fenomenológica de curto alcance [Wei 87].* 15

2.7 *Algumas das contribuições devidas à troca de dois píons para a interação NN. (a) é chamado de diagrama tipo "caixa". (b) é o diagrama cruzado. (c) e (d) contêm pares de partícula-antipartícula. Existem também diagramas cruzados com "pares", que não são mostrados aqui. Como será feito no restante do trabalho, as linhas cheias representam os nucleons e as tracejadas os píons. Nessa figura, os propagadores são não-covariantes, e o eixo temporal aponta para o futuro, para cima.* 16

2.8 *Diagramas tipo caixa ordenados temporalmente com estados NN intermediários de energia positiva. Os diagramas (a)-(d) são chamados de diagramas "iterados" e os diagramas (e) e (f) de diagramas "esticados". Os diagramas cruzados ordenados temporalmente não são mostrados aqui.* 17

2.9 *Contribuição da troca de dois píons para a interação NN, tal como vista pela teoria de dispersão. Os detalhes são explicados no texto.* 23

3.1 *Diagrama de Feynman representando a contribuição da troca de um bóson para o espalhamento NN no referencial de centro de massa. As linhas cheias representam os núcleons, a tracejada um bóson com massa* m_α. . . . 30

3.2 *Interação puntiforme de quatro férmions para o decaimento do neutron.* . . 36

3.3 *Representação diagramática do fator de forma axial do núcleon.* 40

3.4 *Correção devido à interação forte causada pela troca de um píon, no decaimento beta do neutron.* 40

4.1 *Um dos diagramas que contribuem para o espalhamento* πN 64

4.2 *Regras de Feynman necessárias para o estudo das interações méson-bárion deste trabalho* 67

4.3 *Diagrama da troca de um píon entre dois nucleons, que dá origem ao OPEP (one pion exchange potential). Esse é o termo de ordem zero na interação NN.* 70

4.4 *Diagramas de um loop para a interação NN onde um dos píons não é trocado entre os nucleons, não contribuindo, portanto para o TPEP. Na figura são mostrados apenas alguns exemplos dessa classe de diagramas.* 70

4.5 *Diagramas de um loop para a interação NN, que envolvem a troca de dois píons entre dois nucleons. Esses diagramas são de segunda ordem e contribuem para o TPEP (two pion exchange potential).* 71

4.6 *Diagramas de um loop para a interação NN, que envolvem a troca de dois píons entre dois nucleons. Esses diagramas são de terceira ordem e contribuem para o TPEP.* 71

4.7 *Diagramas de quarta ordem em Q_M, e que contribuem para a interação NN devido à troca de dois píons.* 72

4.8 *Diagramas com vértices de três píons. (a), (b), (c) e (d) contribuem para a quarta ordem da interação NN devido à troca de dois píons. (e) e (f) são também de quarta ordem, contribuindo, entretanto, para a troca de tês píons na interação NN. Esses diagramas com dois loops possuem alto grau de complexidade e não serão considerados aqui.* 73

4.9 *Diagramas que contribuem para o cálculo do $V_{NN}^{\pi\pi}$, que serão considerados nesse trabalho.* 74

5.1 *Diagrama genérico do espalhamento de dois corpos.* 77

5.2 *Choque de duas partículas de mesma massa no referencial cm. Na figura, θ_{cm} é o ângulo de espalhamento no cm.* 79

5.3 *Representação diagramática da equação de BS. As flechas indicam o sentido do fluxo do momento.* 85

5.4 *Núcleo (kernel) efetivo de interação devido a troca de um píon $\mathcal{U}^{(2)}$.* 89

5.5 *Núcleo efetivo de interação $\mathcal{U}^{(4)}$ para a troca de dois píons.* 89

5.6 *Representação diagramática da equação de BS para o núcleo efetivo de interação $\mathcal{U}$.* 90

5.7 *Representação diagramática da equação de BS quando expandimos núcleo efetivo de interação em $\mathcal{U}$ em termos de 2 e 4 vértices.* 91

5.8 *Diagrama covariante mostrando a troca de dois píons entre dois nucleons. Esse diagrama contém todas as ordenações temporais possíveis.* 92

5.9 *Diagrama da troca de dois píons, onde o propagador relativístico $\mathcal{G}$ foi substituido pelo propagador não-relativístico g, o que permite que se corte o diagrama em duas partes iguais, transformando a troca de dois píons na troca de um píon repetida duas vezes.* 93

5.10 *Diagramas redutíveis ordenados temporalmente para a troca de dois píons entre dois nucleons.* 93

5.11 *Diagramas irredutíveis ordenados temporalmente para a troca de dois píons na interação NN. O TPEP pode ser obtido se somarmos os diagramas cruzados e de energia negativa nos estados intermediários, que não são mostrados aqui.* 94

6.1 *Núcleo de interação $\mathcal{U}^{(4)}$ decomposto na soma das partes (a) redutível e (b) irredutível menos (c) a iteração da troca de um píon.* 96

6.2 *Diagramas de troca de dois píons entre dois nucleons que representam o núcleo irredutível de interação $\mathcal{K}^{(4)}$ "sanduichado" entre spinores livres.* . . 97

6.3 *Diagrama tipo caixa (box), que contribui para o TPEP, e que é associado ao termo $\mathcal{K}^{(2)}\mathcal{G}\mathcal{K}^{(2)}$.* 97

6.4 *Diagrama cruzado que contribui para o TPEP. Esse é um dos diagramas que pertencem ao núcleo irredutível $\mathcal{K}^{(4)}$.* 101

6.5 *Diagrama nabla que contribui para o TPEP. Esse é um dos diagramas que compõem o núcleo irredutível $\mathcal{K}^{(4)}$.* 102

6.6 *Diagrama triângulo que contribui para o TPEP. Esse é um dos diagramas que compõem o núcleo irredutível $\mathcal{K}^{(4)}$.* 104

6.7 *Diagrama bolha que contribui para o TPEP. Esse é um dos diagramas que pertencem ao núcleo irredutível $\mathcal{K}^{(4)}$.* 104

6.8 *Diagrama nabla escalar que contribui para o TPEP. Esse é um dos diagramas que compõem o núcleo irredutível $\mathcal{K}^{(4)}$, agora em terceira ordem na expansão em potências do momento.* 105

6.9 *Diagrama triângulo escalar que contribui para o TPEP. Esse é um dos diagramas que compõem o núcleo irredutível $\mathcal{K}^{(4)}$, em terceira ordem na expansão em potências do momento.* 107

6.10 *Diagrama bolha escalar que contribui para o TPEP. Esse é um dos diagramas que pertencem ao núcleo irredutível $\mathcal{K}^{(4)}$, agora em quarta ordem na expansão em potências do momento.* 108

6.11 *Amplitude $\mathcal{T}_1$ no espaço dos momentos, como função do módulo do momento transferido. Na figura são mostradas curvas para dois valores do fator de corte covariante: $\Lambda = 1.0$ GeV (curva sólida) e $\Lambda = 2.0$ GeV (curva tracejada). Os valores numéricos das constantes utilizadas são dados no capítulo 7, tabela 7.1.* 110

6.12 *Amplitude $\mathcal{T}_{5+6+10}$ no espaço dos momentos, como função do módulo do momento transferido. Comparando com a figura anterior, vemos que não há dependência no parâmetro de corte Λ.* 112

6.13 *Amplitude $\mathcal{T}_{13}$ no espaço dos momentos, como função do módulo do momento transferido. O significado das curvas é o mesmo que na figura 6.11.* 115

6.14 *Amplitude $\mathcal{T}_{15+17}$ no espaço dos momentos, como função do módulo do momento transferido. O significado das curvas é o mesmo que na figura 6.11.* 117

6.15 *Amplitude $\mathcal{T}_{18}$ no espaço dos momentos, como função do módulo do momento transferido, sem considerar o termo independente do momento. O gráfico da esquerda mostra que função cresce rapidamente com o aumento de Λ (1 $GeV \rightarrow$ 2 GeV). O gráfico da direita é uma ampliação da escala, que fornece mais detalhes da curva $\Lambda = 1$ GeV.* 119

6.16 *Diagrama da iteração da troca de um píon, com os quadrimomentos expressos em termos das variáveis relativas de BS.* 120

6.17 *Potencial V_9 menos a iteração do OPEP, no espaço dos momentos, para a parte central, spin-órbita, tensor e spin-spin, de acordo com a redução mostrada no apêndice E. A curva tracejada, mostrada nos dois primeiros gráficos, é o cálculo de Lomon e Partovi [PL 70].* 130

6.18 *Potencial V_{12} derivado do diagrama cruzado, no espaço dos momentos, para a parte central, spin-órbita, tensor e spin-spin.* 131

6.19 *Diagrama da troca de um píon entre dois nucleons.* 144

7.1 *Decomposição do diagrama caixa em 9 componentes. Os diagramas correspondentes às integrais I_2 e I_3 se anulam, conforme mostrado no apêndice C. As letras PV, S, V, PS significam vértices de acoplamento pseudovetor, escalar, vetor e pseudoescalar, respectivamente.* 148

7.2 *Significado do vértice de dois píons com o nucleon, que pode ser entendido como o limite de massa infinita para a correspondente ressonância.* 149

7.3 *Substituição dos vértices de dois píons com o nucleon pelas respectivas ressonâncias mesônicas. O índice e para o méson ρ indica que apenas a parte elétrica dessa resonância é fornecida pela realização não-linear, em segunda ordem.* 150

7.4 *Potencial $V_1(r)$ central (esquerda) e spin-órbita (direita). Na figura são mostradas curvas para $\Lambda = 1$ GeV (tracejada), $\Lambda = 2$ GeV (tracejada-pontilhada), $\Lambda = 10$ GeV (pontilhada) e $\Lambda = 50$ GeV (sólida).* 152

7.5 *Influência do parâmetro Λ no potencial $V_1(r)$.* 152

7.6 *Contribuições central e spin-órbita do potencial $V_2(r)$. Esse termo é repulsivo, em ambos canais.* 153

7.7 *Potencial $V_9 - V_I$ derivado nesse trabalho (curva sólida), comparado com o potencial correspondente no trabalho de PL (curva tracejada). Esses cálculos são diferentes apenas nos canais central e spin-órbita.* 154

7.8 *Potencial $V_{12}(r)$ devido ao diagrama cruzado.* 155

7.9 *Potencial central singleto, em segunda ordem na expansão em potências do momento. Em (a) temos o canal isosingleto e em (b) o isotripleto. O diagrama representativo de cada curva é dado na legenda da figura.* 157

7.10 *Potencial central tripleto, em segunda ordem na expansão em potências do momento.* 158

7.11 *Potencial spin-órbita, em segunda ordem na expansão em potências do momento.* 158

7.12 *Potencial tensor, em segunda ordem na expansão em potências do momento.* 159

7.13 *Potencial central isosingleto-singleto para a resultante em segunda ordem, comparado com o do píon. Em (a) temos uma visão global e em (b) uma ampliação da escala em torno da origem, com a finalidade de investigar o comportamento assintótico.* 160

7.14 *Potencial central isotripleto-singleto para a resultante em segunda ordem, comparado com o do píon.* 161

7.15 *Potencial central isosingleto-tripleto para a resultante em segunda ordem, comparado com o do píon.* 162

7.16 *Potencial central isotripleto-tripleto para a resultante em segunda ordem, comparado com o do píon.* 162

7.17 *Potencial tensor isosingleto-tripleto para a resultante em segunda ordem, comparado com o do píon.* 163

7.18 *Potencial tensor isotripleto-tripleto para a resultante em segunda ordem, comparado com o do píon.* 164

7.19 *Decomposição dos vértices pseudovetoriais do diagrama nabla escalar.* . . . 165

7.20 *Decomposição dos vértices pseudovetoriais do diagrama nabla escalar, mostrando as respectivas ressonâncias mesônicas de dois píons.* 165

7.21 *Potencial central e spin-órbita* $V_{13}(r)$, *para* Λ *=1 GeV (tracejada),* Λ *=2 GeV (tracejada-pontilhada),* $\Lambda = 10$ *GeV (pontilhada) e* Λ *=50 GeV (sólida).* 166

7.22 *Contribuição do termo* V_{15+17} *para a interação NN. As curvas tem o mesmo significado que o da figura anterior.* 167

7.23 *Contribuições central e spin-órbita do termo de quarta ordem para o potencial NN. O significado das curvas é o mesmo das duas figuras anteriores.* 168

7.24 *Contribuições de terceira e quarta ordens para o potencial NN. O valor do parâmetro de corte utilizado foi de 50 GeV.* 168

7.25 *Potencial central para o canal (0,0). A curva tracejada representa o nosso potencial em segunda ordem, a tracejada-pontilhada a soma da segunda, terceira e quarta ordens, a pontilhada o* v_{14} *e a sólida o* v_{28}. *A estratégia de leitura desses gráficos é explicada no texto.* 170

7.26 *Potencial central para o canal (1,0). A estratégia de leitura desses gráficos é explicada no texto.* 171

7.27 *Potencial central para o canal (0,1). A estratégia de leitura desses gráficos é explicada no texto.* 172

7.28 *Potencial central para o canal (1,1). A estratégia de leitura desses gráficos é explicada no texto.* 173

7.29 *Potencial spin-órbita para o canal (0,1). A estratégia de leitura desses gráficos é a mesma do potencial central.* 173

7.30 *Potencial spin-órbita para o canal (1,1).* 174

7.31 *Potencial tensor para o canal (0,1). A estratégia de leitura desses gráficos é a mesma do potencial central.* 175

7.32 *Potencial tensor para o canal (1,1).* 176

C.1 *Região de integração (a) antiga e (b) nova para* I_1. 195

C.2 *(a) antiga e (b) nova região de integração para a integral* I_9. 205

D.1 *Diagramas que contribuem para a amplitude* πN, *em ordem de* g^2, *onde o acoplamento* πN *é do tipo pseudo-escalar (PS). A maneira pela qual se obtém os vértices de interação a partir da Lagrangiana é mostrada no capítulo 4.* 227

D.2 *Diagramas que contribuem para a amplitude πN, em ordem de g^2, onde o acoplamento πN é derivado da Lagrangiana do modelo σ linear, sendo também do tipo pseudo-escalar. A novidade em relação ao modelo anterior está na "partícula" σ* 228

D.3 *Diagramas que contribuem para a amplitude πN, em ordem de g^2, requeridos pela realização não-linear da simetria quiral. Aqui, o vértice de interação πN é do tipo pseudovetor (PV). O vértice (V) representa a interação isovetorial de dois píons com o nucleon.* 229

D.4 *Decomposição do vértice pseudovetor em termos dos vértices pseudoescalar, vetorial e escalar.* 229

Resumo

O presente trabalho consiste no estudo do papel da simetria quiral no potencial nucleon-nucleon devido à troca de dois píons. Para o cálculo do potencial foi levada em consideração a troca de dois píons não-correlacionados, envolvendo contribuições com até um "loop".

A simetria quiral é introduzida no potencial através da sua realização não-linear, utilizando-se a Lagrangiana fenomenológica quiral de Weinberg. Os diagramas de Feynman construidos com os vértices derivados dessa Lagrangiana são ordenados segundo potências crescentes do momento, e calculados covariantemente. Os diagramas divergentes são regularizados covariantemente.

Partindo do formalismo da equação de Bethe-Salpeter, relacionamos, em uma primeira etapa, as amplitudes de transição covariantes com o potencial, através do princípio da unitariedade elástica. O potencial, covariante e relativístico, é obtido no espaço dos momentos e é não-local e dependente da energia. Em uma segunda etapa, efetuamos a redução não-relativística do potencial e sua transformada de Fourier, obtendo um potencial local e independente da energia, que pode ser usado na equação de Schrödinger. O potencial obtido possui contribuições central, spin-orbita, tensorial e spin-spin. A parte dependente de isospin é semelhante à do potencial de Lomon e Partovi, sendo que as maiores modificações aparecem na parte isoescalar, principalmente no canal central, onde um substancial aumento de atração na região de 1.2 a 2.0 fm é observada.

A fim de compararmos nosso potencial com a literatura, fixamos o valor de Λ como sendo 50 GeV, fazendo com que os efeitos do parâmetro de corte fiquem restritos à região $r \leq 0.5$ fm. Os resultados obtidos foram comparados com o potencial fenomenológico de Argonne e revelaram razoável compatibilidade na maioria dos canais. Entretanto, existem discrepâncias importantes, possivelmente devidas a efeitos não estudados neste trabalho, tais como os devidos às ressonâncias Δ e ρ.

Abstract

This work is devoted to the study of the role of chiral symmetry in the two pion exchange nucleon-nucleon potential. We consider only non-correlated two pion exchanges due to one loop contributions.

Chiral symmetry is implemented in the potential through its non-linear realization, given by Weinberg's phenomenological Lagrangian. Feynman diagrams derived from this Lagrangian are arranged according to increasing powers of the momentum, and calculated covariantly. Divergent diagrams are regularizated covariantly.

Starting from the Bethe-Salpeter equation, we relate the covariant transition amplitudes with the potential, using the elastic unitarity principle. The potential in momentum space is covariant, relativistic, non-local and energy dependent. Next, we perform its non-relativistic reduction and Fourier transform, obtaining a potential which is local, energy independent and that can be used in the Schrödinger equation. This potential has central, spin-orbit, tensor and spin-spin components. The isospin dependent part is similar to that of the Lomon and Partovi potential, but important differences appear in the isoscalar part, especially in the central channel, where a substantial increase of atraction in the 1.2 to 2.0 fm region is observed.

In order to compare our potential with the litterature, we fixed the cutoff parameter at $\Lambda = 50$ GeV, restricting its effects to the $r \leq 0.5$ fm region. Our results are compared with Argonne phenomenological potential, and a reasonable compatibility in most of the channels is found. However, there are also important discrepancies which may be due to effects not considered in this work, such as those due to Δ and the ρ ressonances.

Capítulo 1

Introdução

A interação entre nucleons tem sido um dos assuntos mais estudados em Física, desde a descoberta do núcleo no início deste século. Entretanto, apesar dos grandes esforços teóricos, ainda não existe uma teoria, como a eletrodinâmica quântica, que descreva corretamente a força nuclear. A maior parte do que conhecemos vem de informações experimentais: reações de espalhamento e estudo das propriedades do deuteron. Esses dados propiciaram uma formulação fenomenológica da interação entre dois nucleons, que tem sido constantemente aprimorada para ser aplicada a outros sistemas.

Atualmente, consideram-se os hádrons como sendo estados ligados de quarks, descritos por uma teoria de calibre renormalizável, conhecida como Cromodinâmica Quântica (QCD), que é tida como a teoria fundamental das interações fortes. Em virtude de sua liberdade assintótica, a QCD prevê que as interações entre os quarks tornam-se fracas à medida que a energia aumenta. A natureza fraca da força nesse regime permite o emprego de cáculos perturbativos na obtenção dos observáveis. Entretanto, à medida em que a energia vai diminuindo, a interação torna-se cada vez mais intensa e o uso da teoria de perturbação deixa de ser possível. Assim, ainda não se sabe como extrair dessa teoria as propriedades de estados ligados. Na falta de uma dinâmica que descreva essa interação, recorre-se às simetrias da teoria.

No caso da QCD, a *simetria quiral* fornece informações importantes sobre a dinâmica do sistema. Essa simetria foi introduzida no início dos anos 60, no estudo das interações de mésons com nucleons e de mésons entre si. Posteriormente, Weinberg [*Wei 67*, *Wei 68*] implementou a realização não-linear da simetria quiral, criando o método das Lagrangianas efetivas, que permite a obtenção da interação mais geral possível entre píons e nucleons. Apesar deste modo de se implementar a simetria ser relativamente

antigo, apenas recentemente ele foi aplicado às forças nucleares [*Wei 90* , *Wei 91*]. O emprego da simetria quiral permite tratar as interações mesônicas e bariônicas, ao nível hadrônico, como teorias efetivas para a QCD.

A parte mais bem estabelecida da interação nucleon-nucleon (NN) é o seu termo de longo alcance, devido à troca de um píon [*TNS 51*]. Seu cálculo é simples e reproduz várias características empíricas da força nuclear. Entretanto, com a contribuição da troca de dois píons acontece o inverso. Seu cálculo, além de complicado, possuiu, durante muito tempo, uma série de ambigüidades, que levaram a resultados controversos. Parte desses problemas foram solucionados em um trabalho de Lomon e Partovi (PL) [*PL 70*], onde eles calcularam a troca de dois píons de modo covariante e relativístico, via diagramas de Feynman, utilizando a redução tridimensional relativística da equação de Bethe-Salpeter [*SB 51*], proposta por Blankenbecler e Sugar [*BS 66*]. Nos anos 70, o grupo de Bonn iniciou um programa para calcular diagramas de trocas multipiônicas, incluindo as ressonâncias do nucleon, resultando uma década depois no "Potencial de Bonn" [*MHE 87*]. Esse potencial, apesar de ser preciso, possui alguns pontos fracos: a análise de seus diagramas não é feita covariantemente, mas utilizando-se a velha teoria de perturbação ordenada temporalmente [*Wen 49* , *Sch 61*] e as trocas envolvendo pares partícula-antipartícula são deliberadamente eliminadas, sem nenhuma justificativa teórica.

Os potenciais NN existentes atualmente têm uma característica comum: em todos eles, o papel da simetria quiral não é colocado claramente, apesar da QCD nos sugerir a relevância dessa simetria. Assim, a proposta desse trabalho é estudar a influência da simetria quiral sobre a interação NN, na parte relativa à troca de dois píons. Para isso, partimos da Lagrangiana não-linear de Weinberg e obtemos os termos de interação do nucleon com um e dois píons. O potencial é construido através da soma dos diagramas de Feynman permitidos pela Lagrangiana, e a *iteração* da troca de um píon é subtraida seguindo o procedimento de Lomon e Partovi.

O conteúdo desse trabalho se divide em oito capítulos e cinco apêndices. Iniciamos o capítulo 2 apresentando um resumo das cinco propriedades mais importantes da interação NN e, em seguida, esboçamos uma evolução das idéias sobre a força nuclear, desde a descoberta do núcleo por Rutherford, até os dias de hoje.

O capítulo 3 é dedicado à dinâmica quiral para as interações fortes, onde mostramos a origem dessa simetria e como ela é implementada na Lagrangiana, através da realização não-linear de Weinberg.

No capítulo 4, apresentamos o modelo teórico utilizado nesse trabalho para o estudo

da interação NN, que é formado por duas partes principais: (a) obtenção dos vértices de interação de um e dois píons com nucleons, a partir da Lagrangiana quiral e, (b) a prescrição de Weinberg de ordenação dos diagramas em potências do momento, que serve de guia para a construção dos diagramas da interação.

No capítulo 5 mostramos o método de obtenção do potencial NN a partir dos diagramas de Feynman. Esse procedimento possui duas etapas: inicialmente calculam-se os diagramas, obtendo-se a amplitude de transição covariante. Em seguida, através do formalismo da equação de Bethe-Salpeter relaciona-se a amplitude de transição covariante com a amplitude não-relativística de Lippmann-Schwinger, usando-se as propriedades de unitariedade dos elementos de matriz.

No capítulo 6 realizamos todos os cálculos do potencial, começando pela obtenção das amplitudes covariantes. Em seguida, subtraimos a iteração da troca de um píon, para evitar problemas de dupla contagem. Feito isso, passamos para a redução não-relativística do potencial, pois trabalhamos com energias abaixo do limiar de produção de píons. Por fim, efetuamos a transformada de Fourier, a fim de obter o potencial no espaço das coordenadas, que pode ser utilizado na equação de Schrödinger.

No capítulo 7 apresentamos os resultados obtidos e também uma comparação com o potencial fenomenológico de Argonne. Além disso, sugerimos possíveis refinamentos nos cálculos.

O capítulo 8 é dedicado às conclusões e possíveis extensões deste trabalho.

O apêndice A é dedicado às unidades e notações utilizadas. No apêndice B mostramos o modo de regularização covariante das integrais de loop. No apêndice C, damos detalhes dos cálculos das integrais de loop e das integrais que aparecem na obtencão da iteração da troca de um píon. No apêndice D mostramos como a simetria quiral explicou com sucesso os comprimentos de espalhamento da amplitude πN. Finalmente, no apêndice E mostramos alguns detalhes da redução não-relativística do potencial.

Capítulo 2

O potencial nucleon-nucleon: introdução

Neste capítulo vamos discutir dois aspectos importantes da interação NN: suas características qualitativas, obtidas através de experimentos diversos, e sua evolução histórica, desde a descoberta do núcleo por Rutherford, até os dias de hoje. O estudo da interação NN pode ser dividido em períodos, que correspondem a linhas de pesquisa quase independentes, mas com idéias básicas que permanecem e geram novos rumos. A primeira fase desta evolução se inicia com a descoberta do núcleo por Rutherford e vai até a deteção do píon em 1947/48. Esta fase é caracterizada por muita especulação, pois naquela época os dados experimentais ainda eram muito primitivos. O período seguinte abrange toda a década de 50, e é centrado no píon como o "quantum" da força nuclear. O terceiro período se inicia com a descoberta dos mésons vetoriais no início dos anos sessenta e, como conseqüência, envolve modelos que utilizam vários e diferentes mésons. Outro importante tópico desse período é a teoria de dispersão,[1] desenvolvida alternativamente à teoria de campos, cujo uso era visto como inconveniente naquela época. O período final se inicia em 1970 e é marcado pelo desenvolvimento de potenciais realísticos que seguem essencialmente duas linhas: relações de dispersão e teoria de campos. Por último, falaremos sobre os desenvolvimentos mais recentes que tentam obter a interação NN a partir da teoria dos quarks. A nossa apresentação dessa evolução é baseada nos resumos históricos contidos em dois trabalhos de R. Machleidt [*Mac 86* , *Mac 89*].

[1] A teoria de dispersão lida apenas com grandezas físicas observáveis, relacionando umas às outras através de propriedades fundamentais ligadas à matriz S.

2.1 Características empíricas da força nuclear

Apresentamos, aqui, as cinco propriedades mais importantes da interação NN [*Mor 63* , *Wil 63* , *BJ 76*].

2.1.1 A força nuclear é de curto alcance

O curto alcance da força nuclear pode ser inferido a partir do estudo das propriedades de saturação do núcleo atômico. É um fato experimental bem estabelecido que a energia de ligação por nucleon varia muito pouco para núcleos com muitos nucleons, o mesmo acontecendo com a densidade. Para núcleos médios e pesados , essa densidade é proporcional a $A^{1/3}$. Se a força nuclear fosse de longo alcance, a energia potencial por partícula cresceria com A, o mesmo ocorrendo com a densidade. Por outro lado, para núcleos leves ($A \leq 4$), a energia de ligação cresce com A. Para o deuteron, ela é de 2.2 MeV e de 8.5 MeV no ^{3}H, o que corresponde a uma energia por ligação de cerca de 2 MeV no deuteron e 3 MeV no trítio. Para o ^{4}He temos $\approx$4.5 MeV por ligação, e aumentando A, esse valor tende para uma constante, conforme mostra a figura 2.1. Essa saturação levou Wigner [*Wig 33*], em 1933, a conjecturar que as forças nucleares seriam de curto alcance, da ordem do raio da partícula alfa, 1.7 fm.

2.1.2 A força nuclear é atrativa na região de alcance intermediário

A prova do caráter atrativo da força nuclear é dada pela coesão do núcleo. O intervalo onde ocorre essa atração pode ser obtido mais precisamente considerando-se a densidade central de núcleos pesados, obtida por meio do espalhamento com elétrons. Essa densidade é cerca de 0.17 fm^{-3} (densidade da matéria nuclear), equivalente a um cubo de aresta 1.8 fm para cada nucleon. Assim, a distância média entre os centros de dois nucleons no interior de un núcleo é cerca de 1.8 fm, que concorda com a estimativa dada no item 2.1.1. Essa distância média deve ser aproximadamente o *alcance da atração.* Outras evidências do caráter atrativo da força nuclear provêm da análise dos dados de espalhamento NN. A defasagem para a onda $^1S_0$ é positiva (correspondendo a atração) para baixas energias, como é mostrado na figura 2.2. É interessante notar que o momento médio de um nucleon dentro da matéria nuclear corresponde a uma energia de laboratório de cerca de 50 MeV.

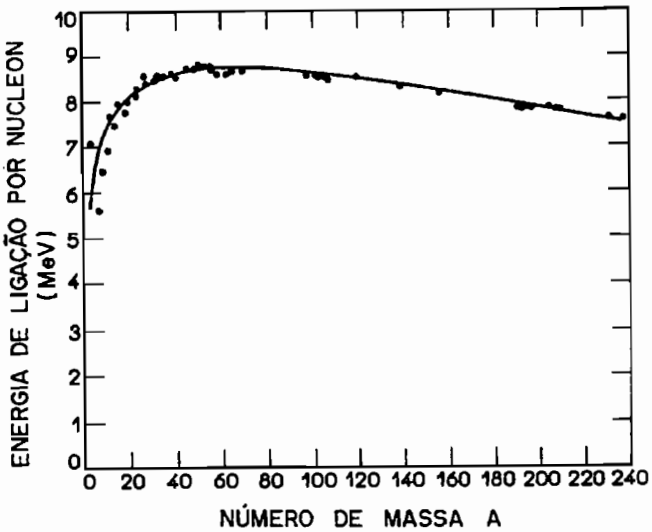


Figura 2.1: *Energia total de ligação por partícula como função da massa atômica. À medida que A cresce, essa energia se mantém praticamente constante, indicando a saturação da força nuclear [WB 52].*

2.1.3 A força nuclear tem um caroço repulsivo

Um caroço repulsivo foi proposto primeiramente por Jastrow [*Jas 51*] para explicar a isotropia observada na seção de choque diferencial para o espalhamento pp. Uma evidência mais precisa desse caroço é dada pelo comportamento das defasagens das ondas $^1S_0$ e $^1D_2$ como função da energia (figura 2.2). A última se mantém positiva (atração) até cerca de 800 MeV, enquanto que para a onda $^1S_0$ isso acontece somente até perto de 250 MeV. Como o estado S possui momento angular orbital $L = 0$, não há barreira centrífuga, e ele "sente" a região mais interna da força. No estado D, L=2, por outro lado, os nucleons são mantidos afastados pela barreira centrífuga, fazendo com que a repulsão só se manifeste para energias altas. Do ponto de vista clássico, o momento angular máximo, L_{max}, é dado por[2]

$$L_{max} \approx Rp, \tag{2.1}$$

[2]Neste trabalho usaremos sempre o sistema natural de unidades: $\hbar = c = 1$, sendo o fator de conversão $\hbar \cdot c = 197.3$ MeV.fm.

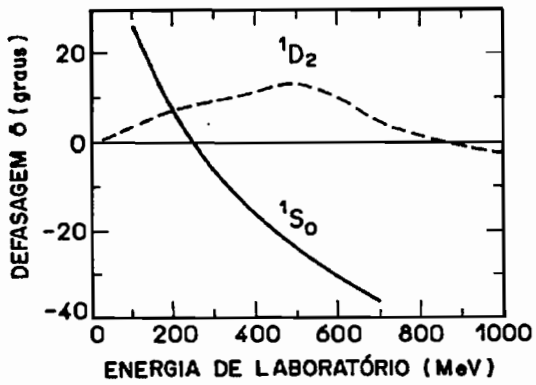


Figura 2.2: *Defasagens para o espalhamento NN para os estados* $^1S_0$ *e* $^1D_2$. *O que é mostrado na figura é uma análise dependente da energia feita por Arndt [Arn 87].*

onde R é a distância radial e p o momento do nucleon, que no referencial de centro de massa do sistema NN é relacionado à energia de laboratório, E_{lab}, por

$$E_{lab} = \frac{2p^2}{m}, \tag{2.2}$$

sendo m a massa do nucleon. Para $E_{lab} = 250$ MeV, quando a defasagem para a onda $^1S_0$ se torna negativa, temos $p \approx 1.7 fm^{-1}$. Admitindo que L_{max} seja o menor possível e não nulo, $L_{max} \leq 1$ obtemos

$$R \leq 0.6 \text{ fm} , \tag{2.3}$$

que é uma estimativa inicial do raio do caroço repulsivo.

2.1.4 Existe uma componente tensorial

A evidência mais forte da existência de uma componente tensorial consiste em três propriedades deuteron: o momento de quadrupolo, o momento magnético e a razão assintótica η dos estados D sobre S, que não são nulos. Além disso, para a onda $^3S_1$ existe um estado ligado, mas isso não ocorre para a onda $^1S_0$, o que se deve ao fato do operador da força tensorial provocar atração nos estados tripleto, mas ser nulo para estados singleto, quando $S = 0$. Outras evidências são dadas pelos "parâmetros de mistura" ϵ_J não-nulos, obtidos a partir da análise das defasagens dos dados de espalhamento NN, figura 2.3. Este parâmetro é proporcional à amplitude de transição de um estado com $L = J - 1$

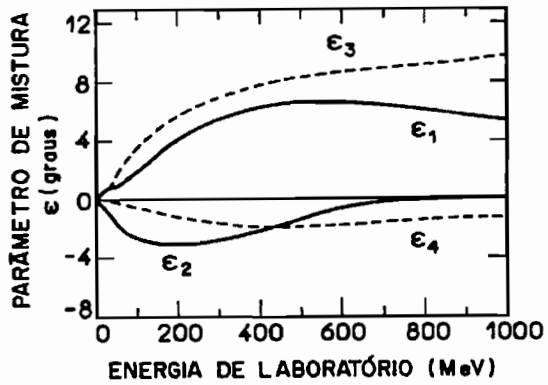


Figura 2.3: *Parâmetros de mistura para $J \leq 4$. A análise mostrada é a de Arndt [Arn 87].*

para um outro com $L = J + 1$. De todos os operadores a partir dos quais pode-se obter uma representação não-relativística e geral do potencial NN, apenas o operador tensorial possui elementos de matriz não-nulos para essa transição.

2.1.5 Existe uma componente de acoplamento spin-órbita

Uma primeira indicação da presença de uma componente spin-órbita foi dada nos espectros dos núcleos atômicos. Deve-se ressaltar entretanto que estes espectros se referem à interação NN *efetiva* num sistema de muitos corpos, que não é a mesma que a interação NN livre. Evidências claras da força spin-órbita vieram da primeira análise de deslocamentos de fase para altas energias, na segunda metade da década de 50 [*SYM 57*, *GT 57*]. O tripleto de ondas **P** resultante dessas análises só pode ser explicado por meio de uma força spin-órbita bem forte, conforme podemos ver na figura 2.4. Uma força spin-órbita forte é também necessária para explicar a polarização, conforme dados mostrados na figura 2.5 Para completar essa discussão, convém mencionar que existe também uma força spin-spin $(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$ que não é, entretanto, tão importante como as forças spin-órbita e tensorial. Além disso, outro fato importante é que as forças nucleares são dependentes de isospin.

Essas características empíricas da força nuclear motivaram várias tentativas de explicação teórica. Veremos a seguir uma evolução histórica dessas idéias.[3]

[3]Essa revisão histórica é apenas um resumo, e não tem a pretensão de ser completa.

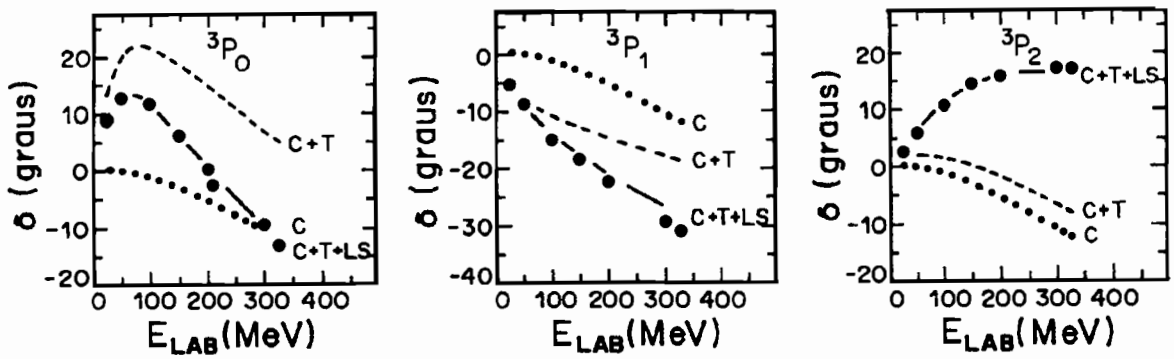


Figura 2.4: *Deslocamento de fase para a interação NN para o tripleto de onda P. Nas figuras é mostrada a previsão teórica usando uma força central apenas (C), central mais tensor (C+T) e central mais tensor mais spin-órbita (C+T+LS). As bolas pretas representam a análise dos deslocamentos de fase independente da energia [Arn+ 83, Dub+ 82].*

2.2 O desenvolvimento das idéias sobre a interação NN

2.2.1 O surgimento da Física Nuclear

O marco inicial da história da Física Nuclear pode ser tomado como sendo a descoberta do núcleo atômico por Rutherford em 1911 [*Rut 11*]. A massa nuclear foi investigada por Thomson [*Tho 13*], que também descobriu a existência de isótopos. O primeiro modelo nuclear supunha que o núcleo fosse formado por A prótons e A-Z elétrons, visando explicar o número de massa A e o número de carga Z. Uma clara contradição desse modelo aparece quando foi descoberto que o núcleo de ^{14}N obedecia a estatística de Bose [*HH 29* , *EO 31*] pois, de acordo com ele, o ^{14}N consistiria de 14 prótons e 7 elétrons, o que resultaria num spin total semi-inteiro e faria desse núcleo um férmion. Em 1932, o neutron foi descoberto por Chadwick [*Cha 32*], sugerindo serem ele e o próton os constituintes fundamentais do núcleo. Isso levou à hipótese da existência de uma nova força, agindo entre o próton e o neutron, e que manteria o núcleo coeso. Essa força foi chamada de *força nuclear ou força forte* e, desde então, um dos problemas centrais da física tem sido tentar entender a sua natureza.

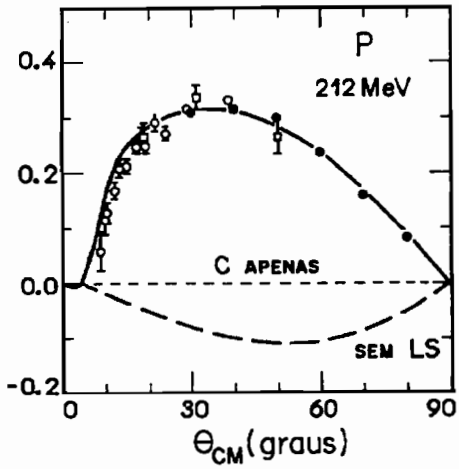


Figura 2.5: *Medidas para a polarização no sistema pp para a energia de laboratório de 212 MeV. Linha cheia: força nuclear completa; tracejada: força spin-órbita omitida; pontilhada: força central apenas. Os dados mostrados estão nas energias de 209.1 (quadrado vazado), 210 (círculo cheio)e 213 MeV (círculo vazado) [BL 82, Arn 87].*

As primeiras características da força nuclear vieram do estudo das energias de ligação dos núcleos, de onde Wigner [*Wig 33*] concluiu que a interação teria que ser de curto alcance e bem forte. Outras considerações teóricas vieram de Heisenberg [*Hei 32*] e de Majorana [*Maj 33*], que propuseram o modelo conhecido como "forças de troca", que poderia explicar a saturação nuclear. Também o lado experimental evoluiu rapidamente: a energia de ligação do deuteron, o único estado ligado de dois nucleons, foi medida por Chadwick e Goldhaber [*CG 34*]. Experimentos de espalhamento próton-próton alcançam rapidamente a energia de laboratório de 1 MeV [*THH 36*], indicando que esta nova força forte também age entre dois prótons, levando à hipótese de que a força nuclear deveria ser independente da carga elétrica [*BCP 36*, *BF 36*].

A primeira idéia mais fundamental para a origem da força nuclear foi lançada em 1935, quando Yukawa [*Yuk 35*] sugeriu que uma nova partícula, com massa entre a do próton e a do elétron, poderia ser responsável pela interação entre o próton e o neutron. A massa da partícula trocada entre os constituintes nucleares, que seria posteriormente chamada de méson [*Bha 39*], forneceria a força de alcance finito, necessária para explicar a saturação nuclear. As interações fundamentais conhecidas na época eram a coulombiana e a gravitacional, ambas possuindo leis matemáticas muito simples. A formulação de

Yukawa para o potencial nuclear também envolvia uma expressão simples, da forma

$$V \propto \frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{2.4}$$

onde r é a distância entre os dois nucleons e μ, a massa da partícula trocada. A teoria original de Yukawa, envolvendo campos clássicos, aplicava-se somente à força nuclear entre o próton e o neutron, pois os mésons escalares trocados eram carregados. Isto se devia ao fato de estar muito em voga na época a teoria de Fermi do decaimento beta [*Fer 34*], baseada em transferências de carga. Logo depois Yukawa reconsiderou sua proposta em termos da teoria quântica de campos [*Yuk 37* , *YS 37* , *Yuk+ 38*], e nos anos seguintes, variações e extensões foram trabalhadas por ele e por seus colaboradores [*YST 38* , *Sup 55*].

Em 1937 ocorre um evento que favoreceria a teoria de Yukawa: um "méson" é descoberto nos raios cósmicos, o múon [*NA 37* , *SS 37*]. Ele foi interpretado (como sabemos hoje, incorretamente), como a partícula prevista por Yukawa, principalmente porque sua massa (106 MeV) parecia fornecer o alcance correto da força nuclear. Esta descoberta trouxe considerável interesse à idéia de Yukawa e, por isso, a interpretação errada do múon teve o seu lado positivo.

Kemmer, [*Kem 38a*] sentiu-se inspirado pela idéia de Yukawa e sugeriu a existência de vários campos mesônicos, incluindo formas pseudoescalares, pseudovetoriais e tensoriais, depois de Proca, em 1936, ter sugerido o uso de mésons vetoriais [*Pro 36*]. Também uma teoria "simétrica"[4] foi proposta por Kemmer [*Kem 38b*] e Bhabha [*Bha 38*], com a finalidade de justificar a independência de carga (veja também Yukawa et al., [*Yuk+ 38*]). Esta sugestão foi feita apesar de que experimentalmente, apenas "mésons" carregados (μ^+, μ^-) eram conhecidos.

Em 1938, Wick [*Wic 38*] elaborou um modo de relacionar a massa m de uma partícula com o alcance R da força devida à sua troca. No contexto da equação de Schrödinger, um processo espontâneo de criação está associado a uma incerteza da energia, dada por $\Delta E \approx \mu c^2$. O princípio de Heisenberg relaciona ΔE a Δt, o tempo entre a emissão e a absorção da partícula:

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar. \tag{2.5}$$

Se a partícula se mover com, no máximo, a velocidade da luz c, teremos $R = c\Delta t$, o que

[4] O termo "simétrica" é usado aqui para designar uma teoria que utiliza bosons isovetoriais, isto é, bosons com três estados de carga: positivo, neutro e negativo.

resulta em

$$R \approx \frac{\hbar c}{\mu c^2} \tag{2.6}$$

que é exatamente o comprimento de onda Compton para a partícula. Assim, um alcance de aproximadamente 2 fm, corresponde a uma massa ao redor de 100 MeV.

A descoberta do momento de quadrupolo e a medida do momento magnético do deuteron por Rabi e colaboradores em 1939 [*Kel+ 39* , *Kel+ 40*], motivaram investigações teóricas mais detalhadas e o desenvolvimento de modelos mais sofisticados. Então, percebeu-se que os campos vetoriais (isovetoriais) criavam uma força tensorial da qual emergia um momento de quadrupolo para o deuteron, com o sinal contrário ao fornecido pelo experimento. O problema foi logo contornado com a inclusão do campos pseudoescalares. Nessas "teorias de campos misturados" envolvendo simultaneamente contribuições pseudoescalares e vetoriais, ambas com mesma massa [*MR 40*] ou com o méson vetorial mais pesado [*Sch 42*], a singularidade $\frac{1}{r^3}$ na força tensorial pode ser removida. Com a força de Schwinger, aproximadamente 1/3 do momento de quadrupolo empírico do deuteron pôde ser reproduzido [*JH 44*]. Com respeito ao problema da singularidade, Bethe [*Bet 40* , *RS 41a*] já tinha sugerido em 1940 o uso de um parâmetro de corte ("cutoff") para pequenas distâncias r, que poderia ser interpretado como sendo devido à extensão espacial dos nucleons. Esta idéia e alguns problemas que ela levantou com respeito à invariançia relativística da teoria, foram examinadas com detalhes por Pauli, que concluiu que a teoria "simétrica" pseudoescalar previa o sinal correto para o momento de quadrupolo do deuteron, e por isso seria a mais correta [*Pau 46*]. Isto foi afirmado bem antes do píon ser descoberto e seu spin e paridade serem determinados. Outra previsão bastante interessante foi a de Breit [*Bre 37* , *BS 38*] e Rosenfeld [*Ros 45*], de que os campos vetoriais e escalares geram uma força spin-órbita. Evidências empíricas para esse fato podiam ser vistas nos espectros dos núcleos leves. Rosenfeld em 1948 declarava: "A ocorrência de um acoplamento spin- órbita grande no ^{5}He pode ser uma indicação da existência de mésons de spin um".

Medidas experimentais causam o fim deste primeiro período: em 1947 Conversi, Pancini e Piccioni [*CPP 47*] mostraram que o múon não interage fortemente com o núcleo (e portanto, de acordo com a convenção estabelecida por volta de 1960, não é um méson; é um lépton). Neste mesmo ano, um (verdadeiro) méson, com uma massa ao redor de 140 MeV, o píon, foi descoberto nos raios cósmicos por Occhialini e outros pesquisadores, entre eles o brasileiro César Lattes [*Occ+ 47* , *LOP 47*]; logo depois o mesmo méson foi detectado no laboratório cíclotron de Berkeley [*GL 48*]. A "confirmação" final e con-

clusiva da realidade dos mésons é dada em 1949 pela Academia Sueca de Ciências ao conceder o prêmio Nobel de Física a Yukawa.

2.2.2 O píon como o quantum da força forte

A deteção do méson π motivou vigorosos esforços teóricos no sentido de descrever a força nuclear, *somente por meio do píon.* Este se tornou o programa de pesquisa dos anos 50. O sucesso do programa de renormalização acabara de reabilitar a teoria de campos. O píon parecia ser "o" quantum da interação forte, em analogia ao papel desempenhado pelo fóton na eletrodinâmica quântica (QED). O sucesso quantitativo da QED, fez com que o programa baseado no píon começasse com altas expectativas. Entretanto, esse programa viria a terminar em profundo desapontamento.

Os trabalhos dos físicos japoneses merecem especial atenção neste período. Em 1951, Taketani, Nakamura e Sasaki [*TNS 51*] apresentaram sua sugestão histórica de subdividir a força nuclear em três regiões. Essa proposta foi muito apropriada pois, até nos modelos mais atuais da força forte, inspirados na cromodinâmica quântica (QCD), essa subdivisão ainda é utilizada. TNS distinguem uma região **clássica**, de longo alcance, com $r > 2$ fm, uma região **dinâmica**, de alcance intermediário, com $1 < r < 2$ fm, e uma região **fenomenológica** ou **caroço**, de curto alcance, com $r < 1$ fm. Na região clássica, de longo alcance, a troca de um píon (OPE) é dominante, pois ele tem a menor massa entre os mésons. Na região intermediária, a troca de dois píons (TPE) é a mais importante, ainda que mésons mais pesados também comecem a ter certa relevância. Finalmente, na região do caroço, muitos processos diferentes, com massas equivalentes trocadas superiores a 2μ, contribuem.[5] Nesse caso, podem haver trocas de vários píons simultaneamente, trocas de mésons pesados de vários tipos e, de um ponto de vista atual, interações de quarks e glúons. O esquema de TNS pode ser visualizado na figura 2.6. Esta classificação tem sido muito útil, tanto do ponto de vista teórico como prático. Ela permite uma exploração gradual da interação entre dois nucleons e, se necessário, uma modelagem diferente para partes diferentes da força. Assim, é possível primeiro calcular a parte de longo alcance do potencial e correlacionar os resultados com informações empíricas sensíveis à região em estudo. Deste modo, o problema como um todo não precisa ser enfrentado de uma vez, mas sim, em etapas. Ainda, a divisão de TNS, de certa forma, justifica o uso de fontes

[5] Adotamos μ como sendo a massa do píon e m a massa do nucleon. Quando necessário, usamos subíndices para diferenciar os mésons e bárions entre si, como por exemplo o neutron do próton: m_n, m_p; ou o píon do sigma: μ_π, μ_σ.

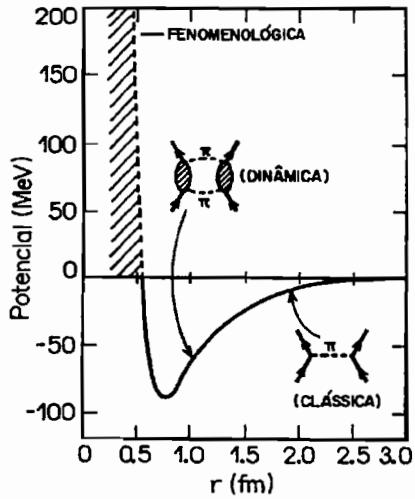


Figura 2.6: *Interação NN central (no canal $^1S_0$) como função de r. Na figura é mostrado os domínios onde prevalecem a troca de um e dois píons, bem como a região fenomenológica de curto alcance [Wei 87].*

extensas (cut-off), que simulam a repulsão à curtas distâncias.

Na década de 50, experimentos identificaram, de maneira clara, a troca de um píon como responsável pela parte de longo alcance do potencial NN. As evidências vieram da análise dos dados de espalhamento NN e do deuteron. Utilizando a teoria de disperão [*Che 61*], obtém-se a constante de acoplamento πN através da análise dos dados de espalhamento NN, que concorda com a calculada através do espalhamento πN [*Czi+ 59*]. Quando se estuda o espalhamento NN em termos de ondas parciais, para valores altos do momento angular orbital correspondentes a distâncias internucleônicas grandes, apenas a troca de um píon é relevante. Da análise dessas ondas resulta que o χ^2 tem um mínimo para os valores corretos da massa do píon e da constante de acoplamento [*Bre+ 60* , *Bre 62*]. No caso do deuteron, o momento de quadrupolo também pode ser quase totalmente explicado pelo potencial da troca de um píon [*Iwa+ 56* , *Sup 56* , *Won 59* , *GK 62*]. Além disso, a razão assintótica η entre os estados D e S da função de onda do deuteron, fornece evidências convincentes para a troca de um píon a grandes distâncias [*Iwa+ 55* , *Iwa+ 56* , *Won 59*]. Recentemente, aspectos diferentes relacionados ao papel da troca de um píon foram reexaminados por Ericson e Rosa-Clot [*ER 83* , *Eri 84* , *ER 85*], O.L. Battistel [*Bat 89*] e Ballot e Robilotta

[*BR 92*]. Esses trabalhos essencialmente confirmam os argumentos usados nos anos 50, resumidos nesta seção; entretanto, devido ao avanço tecnológico na física experimental, os dados disponíveis nos anos 80 são muito mais precisos, o que fornece grande confiabilidade a esses estudos recentes. Do que foi exposto até agora, vemos que a contribuição da troca de um píon (OPEP) para a força nuclear tem qualidades positivas: é fácil de ser calculada e satisfatória ao ser comparada com a fenomenologia. A contribuição para a troca de dois píons (TPEP), por outro lado, vai numa direção oposta. O seu cálculo não é apenas complicado mas, também, por muito tempo, envolveu algumas ambigüidades sérias, que levaram a resultados controversos.

Os potenciais teóricos envolvendo um e mais píons, desenvolvidos na década de 50, costumavam ser divididos em dois grupos: os do tipo Taketani-Machida-Onuma [*TMO 52*], e os do tipo Brueckner-Watson [*BW 53*]. No primeiro tipo, a matriz S era calculada diretamente da teoria de campos mesônica, a partir da qual se obtinha um potencial. Em contraste, o método de BW era baseado em uma expansão no número de partículas, na qual o potencial é calculado diretamente. A principal diferença entre os dois métodos era que os diagramas tipo caixa e os que incluíam contribuições de nucleons e anti-nucleons nos estados intermediários, figura 2.7, estavam sempre incluidos no TMO, enquanto que

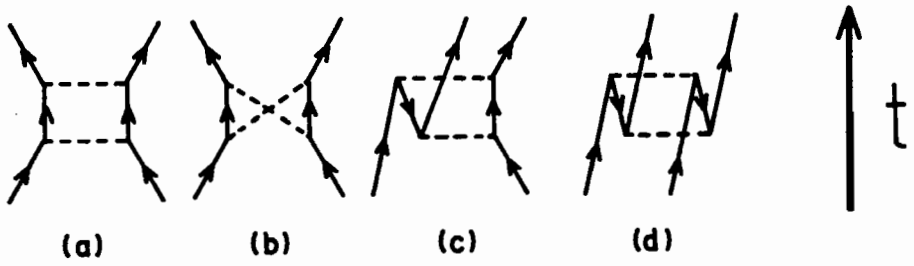


Figura 2.7: *Algumas das contribuições devidas à troca de dois píons para a interação NN. (a) é chamado de diagrama tipo "caixa". (b) é o diagrama cruzado. (c) e (d) contêm pares de partícula-antipartícula. Existem também diagramas cruzados com "pares", que não são mostrados aqui. Como será feito no restante do trabalho, as linhas cheias representam os nucleons e as tracejadas os píons. Nessa figura, os propagadores são não-covariantes, e o eixo temporal aponta para o futuro, para cima.*

BW excluia o diagrama tipo caixa desde o princípio, e eventualmente também os que continham pares. Ambos os métodos utilizavam a teoria de perturbação não-covariante

ordenada temporalmente. Nessa teoria, as possíveis ordenações temporais do diagrama tipo caixa são explicitamente escritas e escolhe-se apenas as que interessam. Na figura 2.8 mostramos as possíveis ordenações temporais do diagrama tipo caixa, sem incluir as antipartículas. A não-inclusão dos diagramas envolvendo pares no potencial de BW, tinha

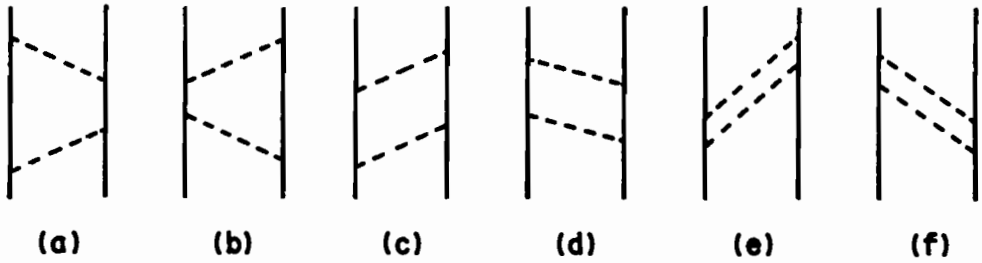


Figura 2.8: *Diagramas tipo caixa ordenados temporalmente com estados NN intermediários de energia positiva. Os diagramas (a)-(d) são chamados de diagramas "iterados" e os diagramas (e) e (f) de diagramas "esticados". Os diagramas cruzados ordenados temporalmente não são mostrados aqui.*

como base os dados experimentais de espalhamento πN em onda S, com acoplamento pseudoescalar, onde os antinucleons levam a um comprimento de espalhamento que excede o valor experimental em mais de duas ordens de magnitude. Outro resultado importante do trabalho de BW é que eles descobriram um cancelamento quase exato entre as contribuições de um e dois pares para a interação NN, figuras 2.7c e 2.7d. Essa não-inclusão de pares virtuais partícula-antipartícula, conhecida como "pair supression", foi sugerida, na época, como uma característica geral da física mesônica de baixas energias [*BGG 53*]. Esse problema somente seria colocado em uma base teórica mais sólida com a introdução da simetria quiral, nos anos 60 [*GL 60* , *Wei 67* , *Bro 79*].

Uma outra fonte de discrepâncias nos cálculos do TPEP nos anos 50 eram as ambigüidades na subtração da iteração da troca de um píon, necessária para se obter o potencial [*Kle 58*]. Além disso, a força spin-órbita obtida a partir do TPEP era uma ordem de magnitude menor que a experimental. Todos esses problemas conjugados levaram a um descrédito geral nos cálculos da troca de dois píons via teoria de campos, que motivou a busca de métodos alternativos.

Nos anos 50, havia uma outra linha de pesquisa sobre a força nuclear, bastante independente da parte teórica, e que produziu melhores resultados. Seus objetivos eram mais

modestos: conseguir obter uma descrição fenomenológica simples do potencial nuclear. A base para o sucesso da linha fenomenológica de pesquisa foi o progresso substancial nos experimentos de espalhamento NN nesse período. Sabemos atualmente que não se podem obter informações precisas e detalhadas sobre a interação nuclear a partir de sistemas de muitos corpos. Por outro lado, a teoria do alcance efetivo [*Bet 49*] demonstrou que dados experimentais de baixa energia não contêm mais informação do que aquela possível de se parametrizar com duas grandezas: o comprimento de espalhamento e o alcance efetivo. Isso deixou claro na época que dados de alta energia eram necessários para se obter uma compreensão melhor da força nuclear. Além disso, seções de choque diferenciais não-polarizadas, mesmo em energias mais altas, são úteis apenas para um conjunto pequeno de conclusões básicas e qualitativas. A força nuclear depende de modo importante do spin e, por isso, dados de vários outros observáveis são necessários para especificar a amplitude de espalhamento [*WA 52*, *Wol 56*]. Em 1954, a primeira medida de polarização foi feita por Oxley et al [*OCR 54*] em Rochester, para uma energia de laboratório de aproximadamente 200 MeV. Fermi [*Fer 54*], em seguida, mostrou a relação entre a intensidade de polarização medida e o acoplamento spin-órbita postulado no modelo nuclear de camadas de Mayer e Jensen [*May 49*, *HJS 49*, *MJ 55*]. Assim, o **spin**, cuja importância era reconhecida e apreciada na física atômica desde os anos 20, tornou-se um assunto obrigatório na física nuclear.

Avanços tecnológicos permitiram que experimentos de espalhamento triplo, necessários para se medir observáveis de spin mais sofisticados, pudessem ser realizados ao redor de 1957. Então, em um conjunto de experimentos com prótons polarizados de 315 MeV de energia de laboratório, Chamberlain e colaboradores [*Cha+ 57*] estudaram o espalhamento próton-próton no cíclotron de 184 polegadas do laboratório de Berkeley. Pela primeira vez, um conjunto completo de observáveis foi medido. A análise das defasagens, baseada essencialmente nesses dados, foi feita por Stapp et al. [*SYM 57*] e foi de grande importância para o desenvolvimento dos potenciais fenomenológicos que apareceram logo a seguir.

Os objetivos básicos de se descrever a interação NN por meio de um potencial fenomenológico são dois. Primeiro, ele fornece um resumo econômico dos dados para comparação com potenciais obtidos teoricamente. Segundo, ele serve como subsídio para cálculos de estrutura nuclear.

A forma mais geral que um potencial não-relativístico pode assumir, quando se consideram os graus de liberdade de spin, pode ser obtida a partir de considerações de simetria

e invariância [*EW 41* , *OM 58* , *GT 60*]. Seja **p** o trimomento relativo entre dois nucleons. Se nos restringirmos à dependência linear em **p**, o potencial consiste nos termos *central, spin-spin, tensor e spin-órbita.* Se considerarmos também termos em $\mathbf{p}^2$, podemos acrescentar um termo spin-órbita ao quadrado [*OM 58*]. A esses operadores podemos associar uma função de $\mathbf{r}^2$, $\mathbf{p}^2$ e $\mathbf{L}^2$ (onde **L** é o operador momento angular orbital). Esta estrutura de operadores tem sido adotada para a construção de qualquer potencial NN não-relativístico. Uma tentativa de se ajustar os dados de espalhamento NN com apenas os três primeiros termos acima falhou [*GCT 57*]. A tentativa seguinte, que incluia o termo de spin-órbita, obteve muito sucesso na época. Este foi o primeiro potencial NN quantitativo na história da física nuclear, conhecido pelos nomes de Gammel e Thaler, publicado em 1957 [*GT 57*]. Este potencial utilizava um caroço repulsivo (hard core) a pequenas distâncias ($r \leq 0.4$ fm), para ajustar a defasagem para a onda $^1S_0$, que se torna negativa para energias de laboratório maiores que 250 MeV. A força de spin-órbita tornou-se necessária para descrever os dados de polarização e os desdobramentos dos diferentes tripletos de onda P. A evidência do curto alcance dessa parte da força foi produzida pelo fato de que os deslocamentos de fase para a onda F apresentam desdobramentos muito fracos.

Esses potenciais fenomenológicos foram aprimorados através dos anos. Outros exemplos de potenciais de caroço duro foram os construídos por Hamada e Johnston [*HJ 62*] e pelo grupo de Yale [*Las+ 62*]. Ambos consideram os cinco termos mencionados anteriormente. Esses modelos empregam a troca de um píon para a região de longo alcance e assim reproduzem as propriedades do deuteron. No final dos anos 60, R.V. Reid [*Rei 68*] desenvolveu potenciais de caroço duro e mole (soft core). Uma de suas versões de caroço mole tornou-se o potencial mais aplicado em problemas de estrutura nuclear nos anos 70. É importante mencionar que os potenciais fenomenológicos utilizam, tipicamente, de 30 a 50 parâmetros ajustáveis.

2.2.3 O OBEP e a "teoria de dispersão"

O início da década de 60 é caracterizado por dois fatos: o fracasso do programa teórico do "píon como quantum" e, por outro lado, o acúmulo de dados experimentais extremamente ricos, dos quais podia-se extrair informações tais como a repulsão a curtas distâncias e a componente spin-órbita da força nuclear. Esses fatos levaram Breit [*Bre 60a* , *Bre 60b*] e outros a reviver a velha idéia da troca de um méson vetorial [*BS 38* , *Ros 48*], que predizia essas duas características experimentais. Posteriormente, essa idéia ganhou mais

força, quando Nambu [*Nam 57*], Sakurai [*Sak 60a* , *Sak 60b* , *Sak 60c*], e Frazer e Fulco [*FF 59* , *FF 60*] conjecturaram que os bósons vetoriais deveriam desempenhar um papel dominante na explicação do fator de forma eletromagnético do nucleon. Essa suposição logo foi confirmada: em 1961, o méson ρ foi descoberto em Brookhaven na reação $\pi^- p \rightarrow \pi\pi$N [*Erw+ 61*], e o méson ω foi descoberto em Berkeley na aniquilação $p\bar{p}$ [*Mag+ 61* , *Kal 64*]. Ambos são bósons de spin um, sendo o ρ uma ressonância de dois píons e o ω, de três píons, com massas ao redor de 770-780 MeV.

A descoberta dos mésons pesados trouxe luz à situação obscura na qual se encontrava a teoria mesônica da interação NN. A primeira conseqüência foi a incorporação desses novos mésons ao potencial, surgindo os modelos de troca de um bóson (OBEP). Esses modelos eram baseados na velha idéia de Yukawa de que a força nuclear é mediada por mésons. A novidade agora, é a tentativa de se incorporarem as observações da física de altas energias, onde dois ou mais píons comportam-se, na maior parte do tempo, como se formassem uma única partícula com massa e números quânticos definidos, ou seja, são correlacionados e formam uma ressonância. Assim, nos modelos tipo OBE, a troca de dois ou mais píons sem interação durante o "vôo", é desprezada, em contraste com as idéias dos anos 50, onde apenas a troca de píons não-correlacionados era levada em conta. Ambas aproximações são muito drásticas, e um meio termo seria encontrado na década de 70.

Os modelos tipo OBE tem várias qualidades positivas. Primeiro, o cálculo da troca de uma partícula é razoavelmente simples e não possui ambigüidades como a troca de dois píons. Segundo, dentro desse tipo de modelo, os dados experimentais da interação NN podem ser descritos com poucos parâmetros, ao redor de 10, em contraste com os potenciais fenomenológicos que necessitavam de 30 a 50. Como nos modelos tipo OBE os parâmetros são as constantes de acoplamento méson-nucleon e os cutoffs, um significado físico, em princípio, pode ser atribuído a eles.

Muitos dos modelos do tipo OBE desenvolvidos até hoje incluem, além dos mésons vetoriais, contribuições de um ou dois mésons escalares e isoescalares, com massas no intervalo 400-800 MeV. Eles são responsáveis pela atração observada entre os nucleons na região intermediária da interação. Esses bósons representariam ressonâncias de dois píons em onda S. Durante os anos 60 e início dos anos 70, o "Particle Data Group" listava esses mésons, chamados de σ ou ϵ, em suas tabelas [*PDG 74*]. O méson ϵ, de massa mais baixa, desapareceu da tabela em 1976 [*PDG 76*], em favor do méson $\epsilon(1200)$ que, devido à sua grande massa, não fornece atração na região intermediária da força. Assim,

a justificação plena dos modelos tipo OBE não chegou a acontecer, porque os mésons escalares-isoescalares com massas apropriadas nunca foram observados. Entretanto, o sucesso quantitativo do modelo pode ser entendido como uma indicação de que a troca de dois píons não-correlacionados, simulada pela troca de um bóson escalar, é muito importante. De um ponto de vista teórico mais fundamental, essa situação é altamente não-satisfatória e, durante esse trabalho, voltaremos a mencionar esse ponto várias vezes.

Os primeiros potenciais tipo OBE (OBEP) foram desenvolvidos por teóricos japoneses [*HLM 61* , *Saw+ 62* , *Sup 67*], por Bryan e colaboradores [*BDR 63* , *BS 64*], Wong e colaboradores [*SW 63* , *SW 65*] e A.E.S. Green e associados [*GS 65* , *GS 67*]. Entretanto, o surgimento de potenciais do tipo OBE, baseados em constantes de acoplamento realísticas, e descrevendo com precisão todos os dados do deuteron e do espalhamento NN em baixas energias, só ocorreu na metade dos anos 70. Tais potenciais, representados no espaço de configuração, foram construidos pelo grupo de Nijmegen [*NRS 78*] e por Sprung e colaboradores [*TS 73* , *TRS 75*]. Finalmente, o conceito do OBE foi substancialmente aprimorado pelo uso de equações relativísticas tridimensionais obtidas via redução da equação de Bethe-Salpeter [*SB 51*]. Trabalhos nessa linha foram desenvolvidos por Schierholz [*Sch 72*], Thompson e outros [*Tho 70* , *GTG 71* , *BG 72*], e pelo grupo de Bonn [*Erk 74* , *HM 75* , *HM 76*]. Finalmente, Tjon e colaboradores resolveram a equação quadridimensional completa de Bethe-Salpeter na aproximação de "escada" [*FT 75* , *FT 77* , *FT 80* , *ZT 81*].

Apesar do sucesso quantitativo do OBEP ao reproduzir os dados da interação NN, conceitualmente tais modelos não podem ser aceitos como uma teoria definitiva, já que eles desprezam a troca simultânea de partículas não correlacionadas. A componente de longo alcance de tais interações e, portanto, a mais importante do conjunto, é a troca de dois píons (TPE). O estabelecimento do papel preciso da TPE na interação NN constituiu uma importante linha de trabalho nos anos 60. Convém lembrar que esse foi um dos principais objetivos da pesquisa dos anos 50, e como já descrevemos, um fracasso. Olhando em retrospectiva, pode-se entender as razões desse fracasso: primeiro, os cálculos da época não consideraram correlações entre os píons ou ressonâncias trocadas que, como os modelos de OBE tem demonstrado, desempenham um papel importante na interação. Em segundo lugar, a simetria quiral, que determina o contexto para as interações piônicas, não havia sido desenvolvida. Dentro desse quadro, a linha mais completa de pesquisa teria de incluir todas as possíveis trocas de partículas, correlacionadas ou não e, particularmente no caso de dois píons, levar em consideração a simetria quiral. Até hoje, essas duas características

importantes da interação NN não foram agrupadas em uma teoria única[6].

Voltando ao papel da troca de dois píons, existem, em princípio, duas maneiras conceitualmente bem diferentes de se calcular essas contribuições: através da teoria de campos ou usando-se relações de dispersão. Após o fracasso dos cálculos com teoria de campos nos anos 50, houve pouca pesquisa nessa linha [*Mac 67*].

Uma abordagem alternativa da troca de partículas era a baseada na teoria de dispersão [*Che+ 57* , *Che 61* , *Man 58* , *Man 62*]. Essa linha de pesquisa nasceu devido à frustração com a teoria de campos e, por isso, todos os grandes problemas dessa última, como por exemplo, renormalização, convergência, seleção de diagramas, obtenção do potencial, etc., foram eliminados. Para se evitar esses problemas, desde o princípio, a teoria de dispersão envolve apenas quantidades observáveis. Lagrangianas, Hamiltonianas, potenciais não aparecem mais, e a teoria lida diretamente com amplitudes, relacionando diferentes reações mensuráveis umas com as outras. Dessa maneira, ela correlaciona consistentemente diferentes processos, como os espalhamentos NN, πN e elétron-nucleon (fator de forma eletromagnético do nucleon).

A técnica das relações de dispersão é baseada em três propriedades fundamentais: causalidade, unitariedade e simetria de cruzamento. As duas primeiras, suplementadas pela idéia de analiticidade máxima, determinam a estrutura da amplitude no plano de uma variável complexa. A terceira permite relacionar processos que diferem uns dos outros apenas pela troca entre partículas que incidem ou emergem da reação. Nesse contexto, a troca de uma partícula aparece como um polo na amplitude de espalhamento. Esse fato pode ser explorado para se extrair informaçẽs empíricas sobre as massas mesônicas e, particularmente, sobre constantes de acoplamento méson-nucleon.

No contexto da teoria de dispersão, para se calcular a contribuição da troca de dois píons à interação NN, deve-se seguir o procedimento esquematizado na figura 2.9. O "diagrama" total (a) é dividido em duas metades, (b), cada uma das quais, representa uma amplitude $N\bar{N} \rightarrow 2\pi$ no canal t (c). Esta amplitude é construida a partir de informações experimentais obtidas dos espalhamentos πN, (d)[7], e $\pi\pi$, círculo hachurado em (e).

No início da década de 60 Amati, Leader e Vitale [*ALV 60* , *ALV 63*] começaram o trabalho ao longo dessa linha, com a qual muitos grupos logo se envolveram.

[6] O potencial de Bonn [*MHE 87*] contém a troca de todos os mésons mais importantes, correlacionados ou não. Porém, esse potencial não leva em consideração a simetria quiral na interação NN.

[7] O retângulo hachurado em 2.9d representa o nucleon e todas as possíveis ressonâncias πN como, por exemplo, o $\Delta(1232)$

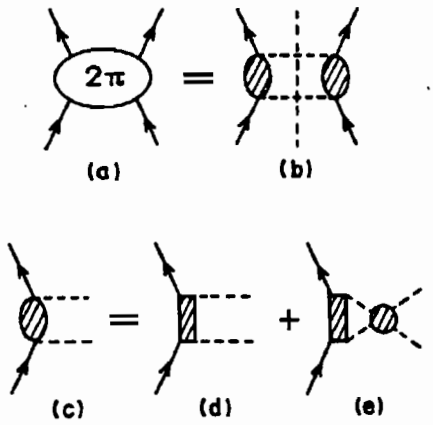


Figura 2.9: *Contribuição da troca de dois píons para a interação NN, tal como vista pela teoria de dispersão. Os detalhes são explicados no texto.*

[*Gre 67* , *Sup 67*]. Uma idéia da dificuldade dessa abordagem é dada pelo fato de que ela levou quase 10 anos para apresentar resultados quantitativos [*Bin 71* , *BB 71* , *CDR 72* , *Vin+ 73*]. Esses resultados mostraram que, para o intervalo de alcance intermediário, um potencial realístico pode ser obtido usando-se relações de dispersão e informações empíricas sobre o espalhamento πN e $\pi\pi$ como entrada. Esses primeiros resultados ainda estavam longe de fornecer um potencial nuclear completo e quantitativo.

2.2.4 Os potenciais realísticos de Paris e Bonn

Durante os anos 60, o programa de medidas dos observáveis do espalhamento elástico NN foi levado adiante em diversos aceleradores no mundo todo. Como resultado, ao final da década, o grupo de Livermore apresentou análise de deslocamentos de fase para o espalhamento NN em energias de laboratório de até 425 MeV, com alta qualidade [*MAW 69*]. Isto motivou o trabalho teórico dos anos 70, que seguem duas linhas já descritas aqui: a teoria de dispersão e a teoria de campos. Ambas resultaram em potenciais quantitativos muito bons, que receberam os nomes das cidades da Europa onde estavam concentrados os principais grupos de pesquisa: pela teoria de dispersão, o Potencial de Paris e, pela teoria de campos, o Potencial de Bonn.

Inicialmente, mencionamos os trabalhos na linha da teoria de dispersão. Em continuação ao trabalho de Chemtob e colaboradores [*CDR 72*], o grupo de Stony Brook

[*JRV 75*] construiu um potencial no qual o resultado da teoria de dispersão para a troca de dois píons foi complementado pela troca de um π e de um ω. Para distâncias pequenas, o potencial foi regularizado por um fator de forma eikonal derivado por Woloshyn e Jackson [*WJ 72*]. O ajuste para as defasagens do espalhamento NN foi apenas semi-quantitativo. Simultaneamente, o grupo de Paris produziu um potencial [*Lac+ 75*] com parâmetros teóricos de entrada bem semelhantes ao de Stony Brook. No caso de Paris, a parte repulsiva de curto alcance foi tratada por um cut-off quadrático dependente da energia. Refinamentos posteriores e uma representação conveniente foram elaborados pelo grupo de Paris. Sua versão final, publicada em 1980, é parametrizada em termos de funções estáticas de Yukawa, onde aparecem múltiplos da massa do píon nos expoentes [*Lac+ 80*]. Revisões dessa abordagem para a força nuclear foram elaboradas por Vinh Mau [*Vin 79*] e por Brown e Jackson [*BJ 76*].[8]

Consideremos, agora, os trabalhos baseados na teoria de campos. Após quase uma década de total ausência de trabalhos (uma exceção é [*Mac 67*]), a abordagem em teoria de campos foi revivida por um trabalho de Lomon e Partovi [*PL 70*]. Eles calcularam a troca de dois píons entre dois nucleons de maneira covariante e relativística, via diagramas e regras de Feynman, utilizando a redução tridimensional relativística da equação de Bethe-Salpeter [*SB 51*], proposta por Blankenbecler e Sugar [*BS 66*]. É uma aproximação não-estática para a troca de dois píons, e evita a velha ambigüidade de como subtrair a troca de um píon **iterada** na definição do potencial. Em trabalhos subseqüentes Lomon e colaboradores [*PL 72*, *Lom 76*, *Lom 80*] estudaram também a contribuição devida à troca correlacionada de dois píons em onda S. Um modelo em teoria de campos similar ao de Lomon e colaboradores foi desenvolvido por Nutt e Wilets [*NW 75*, *Nut 76*], que suprimiram os termos de partícula-antipartícula, incluídos por Lomon et al, além de utilizarem um propagador não-livre para o nucleon no cálculo dos diagramas de Feynman. Entretanto, esses modelos não incluiam contribuições importantes, tais como as ressonâncias bariônicas e mesônicas nos estados intermediários [*SH 68*], e as trocas de três e quatro píons. Nos anos 70, o grupo de Bonn iniciou um programa para calcular diagramas de trocas multipiônicas, incluindo as ressonâncias do nucleon. Este programa levou mais de uma década para ficar pronto. Passo a passo, o grupo de Bonn calculou todos os diagramas de troca de dois píons, incluindo a ressonância delta [*HM 77*, *Hol+ 79*, *Hol+ 81*, *BHM 81*] e também os diagramas relevantes da troca de 3 e 4 píons [*Hol+ 78*, *HM 81*, *BHM 84*]. O modelo de Bonn final [*MHE 87*] é satis-

[8] Esta referência contém muitos detalhes matemáticos.

fatório do ponto de vista quantitativo, utilizando cerca de doze parâmetros, tais como constantes de acoplamento méson-bárion e fatores de forma, que possuem significado físico bem definido. Porém, como veremos posteriormente, o cálculo de Bonn possui alguns pontos fracos: a análise de seus diagramas não é feita covariantemente, mas utilizando-se a velha teoria de perturbação ordenada no tempo [*Wen 49* , *Sch 61*]. Além disso, todas as trocas envolvendo partículas e antipartículas (pares) são deliberadamente eliminadas, e o papel da simetria quiral não é colocado claramente no potencial.

O modelo baseado em teoria de campos apresenta várias vantagens sobre o resultante da teoria de dispersão. Primeiramente, ele determina o comportamento "fora da camada de massa" da interação de uma maneira bem definida. Como as relações de dispersão lidam com amplitudes de reação, que são sempre "na camada de massa", o comportamento fora da camada de massa permanece indeterminado e é avaliado por meio de argumentos de simplicidade como, por exemplo, termos estáticos de Yukawa, nem sempre verdadeiros. Além disso, o conjunto de diagramas utilizado no modelo baseado na teoria de campos, permite a generalização consistente para o caso de forças de muitos corpos, e correntes mesônicas de troca. O cálculo da contribuição dessas últimas para as propriedades eletromagnéticas do núcleo requer um conhecimento preciso dos processos de trocas mesônicas entre nucleons [*Rob 87*].

2.2.5 Desenvolvimentos mais recentes

Como já comentamos, nos anos 50, a teoria mesônica foi pensada como sendo fundamental, com os mésons desempenhando um papel análogo ao dos fótons na eletrodinâmica quântica. Sabe-se, desde o fim dos anos 60, que o nucleon possui um tamanho finito e estrutura interna. Essas características têm sido incorporadas à teoria mesônica da interação NN através do uso de fatores de forma nos vértices méson-nucleon, que são ajustados através da comparação direta com os experimentos.

Atualmente a cromodinâmica quântica (QCD) é tida como a teoria fundamental das interações fortes. Nessa teoria, os hádrons são formados por quarks que interagem entre si através da troca de glúons [*Clo 79* , *HM 84*]. Entretanto, essa teoria ainda é inaplicável para descrever processos hadrônicos de baixa energia, o que levou ao surgimento de modelos "inspirados" na QCD, chamados de modelos efetivos.

As duas principais características da QCD são o confinamento de cor e a liberdade assintótica. Vários modelos efetivos foram propostos desde os anos 70, tentanto explicar a estrutura interna dos hádrons. Dentre eles, temos os modelos de sacola -

"MIT bag model" [*Cho+ 74a* , *Cho+ 74b*], "soliton bag" [*FL 78* , *GW 82*] -, as versões quirais desses modelos - "chiral bag" [*BRV 79* , *BR 79*] -, sacolas com núvens piônicas - "cloudy bag" [*TTM 80* , *MTT 80* , *Tho 83*] -, e modelos que fazem uso de potenciais - [*DeG+ 75* , *IK 77* , *IK 79* , *CKP 83*]. Esses modelos diferem principalmente na maneira pela qual o confinamento dos quarks é introduzido. Nos modelos de sacola, o confinamento é implementado através de condições de contorno na superfície da sacola ou através de um campo adicional. Nos modelos que utilizam potenciais, o confinamento é descrito em termos da interação entre os quarks. Em geral, além das forças confinantes, consideram-se outras interações mais fracas entre os quarks constituintes.

Existe outra classe de modelos, que usa apenas campos mesônicos para descrever os bárions, sem utilizar quarks. Esses modelos são baseados nas idéias de Skyrme [*Sky 62* , *Wit 83* , *ANW 83* , *ZB 86*] e são conhecidos como modelos solitônicos. Sua importância se deve ao fato de que é possível relacionar sua estrutura teórica com um limite clássico da QCD, onde o número de cores se torna infinito.

Um ponto muito importante em teorias envolvendo quarks é a possibilidade de se deduzir a interação nucleon-nucleon e entre hádrons em geral, e muitos modelos foram propostos nesse sentido [*Lib 77* , *DeT 78* , *WS 80* , *MI 83* , *MI 84* , *Cve+ 83* , *Shi 89*]. Na maioria dos modelos, a parte de longo alcance do potencial NN é descrita em termos da troca de um píon, sendo portanto bem reproduzida no modelo de sacola quiral, onde o campo do píon é introduzido explicitamente. Entretanto, sabemos que o píon é uma partícula composta de um par quark-antiquark, que trocam glúons entre si e, do ponto de vista teórico, não é aceitável tratar o píon como uma partícula elementar. Nesse sentido, tentativas têm sido feitas para tratar o píon como uma excitação quark-antiquark de um sistema composto por duas sacolas de três quarks interagentes. Já existem cálculos nesse modelo [*Duc 78* , *YZ 84* , *FH 85* , *FH 86a* , *FH 86b* , *FH 87*], mas eles ainda não tratam satisfatoriamente a parte de longo alcance, pois a aproximação perturbativa da QCD não funciona nessa região. Por outro lado, na região intermediária e de curto alcance, a estrutura interna dos hádrons é importante e uma razoável descrição dessa parte do potencial pode ser conseguida [*Shi 89*].

Capítulo 3

A dinâmica quiral para as interações fortes

Neste capítulo introduzimos os princípios teóricos utilizados para descrever a interação NN, iniciando pela idéia de Yukawa da força nuclear mediada por trocas de mésons e, em seguida, mostramos como ela pode ser representada a partir dos diagramas de Feynman. Na parte central do capítulo, tratamos das simetrias das Lagrangianas necessárias ao estudo da interação NN, apresentando a conexão entre simetrias e correntes conservadas, dadas pelo teorema de Noether. Em seguida, descrevemos o surgimento da simetria quiral no contexto das interações fracas. Posteriormente, apresentamos essa simetria de modo formal, exibindo sua relação com a álgebra de correntes, e introduzimos sua formulação Lagrangiana. Finalmente, comparamos os dois modos mais comuns de se realizar a simetria quiral na Lagrangiana, o linear e o não-linear. O primeiro, baseado no modelo σ-linear, permitiu uma explicação adequada do espalhamento πN. Entretanto, problemas conceituais e de ordem prática, levaram Weinberg a formular o modelo não-linear, que é analisado em seguida. Mostramos então as motivações para o desenvolvimento desse modelo, sua justificativa teórica e seu conteúdo dinâmico. Obtida a Lagrangiana fenomenológica quiral, podemos então calcular a interação NN. As partes inicial e central desse capítulo são baseadas nos trabalhos de R. Machleidt [*Mac 89*], D.K. Campbell [*Cam 77*], e de M.R. Robilotta [*Rob 89*], e a parte final é baseada nos trabalhos de Weinberg [*Wei 67*, *Wei 68*].

3.1 A idéia da força nuclear mediada por trocas mesônicas

No início dos anos 30, a propriedade mais bem estabelecida da força nuclear era o seu curto alcance. Por esse motivo, as primeiras tentativas teóricas foram no sentido de derivar uma força de alcance finito a partir de alguma idéia mais fundamental. Yukawa conseguiu isto em 1935 [*Yuk 35*], construindo um modelo em analogia à eletrodinâmica quântica (QED). Nesta teoria, o campo fotônico, associado a partículas de massa zero, satisfaz a equação de campo livre do sistema. Na aproximação estática e em presença de uma carga e, a quarta componente desse campo satisfaz a equação de Poisson da eletrodinâmica

$$-\nabla^2 V(\mathbf{r}) = e\delta^{(3)}(\mathbf{r}), \tag{3.1}$$

cuja solução,

$$V(r) = \frac{e}{4\pi}\frac{1}{r}, \tag{3.2}$$

com $r = |\mathbf{r}|$, é o potencial de Coulomb.

Analogamente, um campo mesônico de massa não-nula μ, em presença de uma fonte $G(x)$, satisfaz a equação de Klein-Gordon[1]

$$(\Box + \mu^2)\phi(x) = G(x). \tag{3.3}$$

Na aproximação onde a fonte do campo mesônico, o nucleon, representado por $G(x)$, é infinitamente pesado e fixo na origem, obtém-se a equação

$$(-\nabla^2 + \mu^2)\phi(\mathbf{r}) = g\delta^{(3)}(\mathbf{r}), \tag{3.4}$$

que é satisfeita pela função

$$\phi(r) = \frac{g}{4\pi}\frac{e^{-\mu r}}{r}. \tag{3.5}$$

conhecida como potencial de Yukawa. Devido à sua forma exponencial, conseqüência direta do caráter massivo da partícula trocada, este potencial tem o alcance finito desejado. Para um píon de massa 138 MeV, temos um alcance de 1.4 fm e, para o limite da massa mesônica (μ) tendendo a zero, o potencial de Yukawa tende ao potencial de Coulomb.

No início, acreditava-se que a teoria mesônica seria "correta" para as interações fortes, em analogia com a QED. Depois do surgimento da QCD, entretanto, a teoria mesônica é vista como uma descrição efetiva, que representa uma aproximação apropriada no limite de baixas energias, o regime típico da física nuclear.

[1] Notações e convenções de acordo com Apêndice A

3.2 Diagramas de Feynman, simetrias e Lagrangianas

A idéia de méson nasceu no contexto da teoria de campos clássica. Atualmente, as interações NN são abordadas por meio da teoria **quântica** de campos, desenvolvida inicialmente para a QED [*BD 64* , *BD 65*]. Em geral, não se consegue resolver exatamente as equações dinâmicas dessa teoria, o que torna necessário o uso da teoria de perturbações. As interações, quando tratadas perturbativamente, são representadas de modo muito conveniente em termos de diagramas de Feynman.

As constantes de acoplamento da interação efetiva entre bárions e mésons são grandes, da ordem de 10, o que torna questionável uma expansão perturbativa. Uma justificativa para o uso da teoria de perturbação na constante de acoplamento pode ser encontrada no programa de Taketani [*TNS 51*]. Contribuições de ordens crescentes, que podem se tornar cada vez mais divergentes, são de alcance curto. Para os intervalos de alcances longo e intermediário, existe apenas um número finito de contribuições perturbativas, o que justifica a confiança nas predições geradas neste tipo de abordagem. Atualmente sabe-se que os hádrons são formados por quarks e são, portanto, extensos. Por isso, a troca de mésons não reflete a realidade da interação para pequenas distâncias e, na maioria dos modelos mesônicos, a extensão dos núcleons é simulada fenomenologicamente através da introdução de fatores de forma.

Numa perspectiva mais moderna, o uso de perturbação no estudo de processos hadrônicos é justificado pelo fato de as interações de mésons com outros hádrons serem aproximadamente invariantes por transformações quirais. O uso perturbativo da dinâmica quiral corresponde a uma expansão da amplitude na energia (ou momento) e não na constante de acoplamento. Uma sistematização recente dessas idéias pode ser encontrada nos trabalhos de Weinberg [*Wei 79* , *Wei 90* , *Wei 91*]

Nesse trabalho, as interações hadrônicas a baixas energias são estudadas por meio de somas de diagramas de Feynman. As regras de Feynman envolvem três elementos básicos: espinores, propagadores e vértices. Os espinores descrevem os estados de spin e momento das partículas que entram e saem da região de interação, enquanto que os propagadores representam a densidade de probabilidade de uma partícula ir de um ponto no espaço-tempo para outro, no interior dessa região. Os vértices, por outro lado, estão associados a reações, ou seja, processos onde ocorrem mudanças nos tipos de partículas envolvidas. Como exemplo, examinemos a contribuição de ordem mais baixa para o espalhamento

NN, que é o diagrama da troca de um bóson. A figura 3.1 descreve esse processo no referencial de centro de massa das duas partículas interagentes. Segundo as regras de

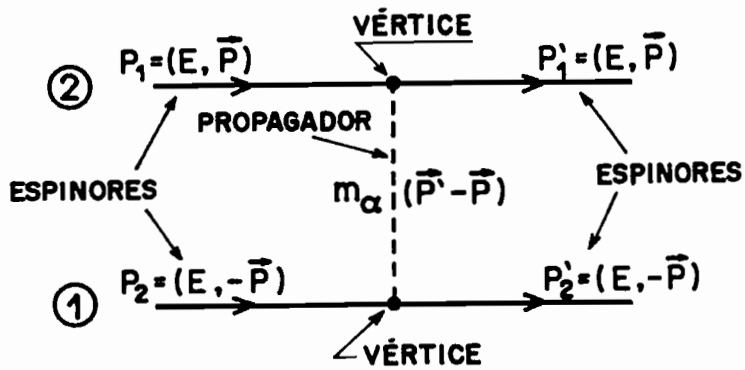


Figura 3.1: *Diagrama de Feynman representando a contribuição da troca de um bóson para o espalhamento NN no referencial de centro de massa. As linhas cheias representam os nucleons, a tracejada um bóson com massa m_α.*

Feynman, a amplitude para esse processo tem a forma

$$i\mathcal{T} = [(\text{espinor})_1'(\text{vértice})_1(\text{espinor})_1] \times [\text{propagador}] \times [(\text{espinor})_2'(\text{vértice})_2(\text{espinor})_2]\,. \tag{3.6}$$

O ponto fundamental na expressão da amplitude $\mathcal{T}$ acima está nos vértices, que fornecem a dinâmica da interação. Esses vértices são obtidos a partir da Lagrangiana do sistema, que encerra todo o conteúdo dinâmico da interação. A Lagrangiana, por outro lado, é em grande parte determinada pelas simetrias do sistema.

Para o cálculo da amplitude associada a um diagrama envolvendo nucleons e píons, é necessário o conhecimento das regras de Feynman úteis aos processos da física de energias intermediárias. Essas regras são tanto devidas à estrutura matemática da teoria quântica de campos, como também fortemente determinadas por informações fenomenológicas.[2]

As regras de Feynman podem refletir um tipo de informação muito profundo, porque elas foram construidas a partir de Lagrangianas de modo que, se estas forem simétricas por um grupo de transformações, as regras de Feynman também o serão, automaticamente.

[2] A discussão que se segue é baseada em [Rob 87].

Assim, por exemplo, dependendo da forma da Lagrangiana, podemos fazer com que as amplitudes dela derivadas acabem por ser invariantes por rotações, transformações de Lorentz ou translações espaço-temporais. Ou ainda, que as amplitudes só sejam não-nulas quando ocorrer a conservação da carga elétrica e, no caso das interações fortes, do número bariônico .

No caso do estudo dos processos mesônicos, existem duas simetrias que desempenham papéis centrais, além das associadas ao grupo de Poincaré: as simetrias quiral e de calibre. Em muitas situações em que os graus de liberdade mesônicos são importantes, tais como correntes mesônicas de troca ou interações entre nucleons, os resultados dependem fundamentalmente dos detalhes dos vértices entre o núcleon e o fóton ou entre o núcleon e um ou mais píons. Essas interações são associadas, por exemplo, aos processos $\gamma N \to \pi N$, $\gamma N \to \pi\pi N$, $NN \to \pi NN$, $\pi N \to \pi N$, $\pi N \to \pi\pi N$, onde pelo menos um dos mésons é virtual. Por isso, não é possível o uso direto da informação experimental sobre tais amplitudes em problemas de física nuclear. Torna-se, então, necessário o emprego de uma teoria que, por um lado, produza amplitudes compatíveis com os resultados experimentais a baixas energias e, por outro, continue válida para partículas virtuais. Esses requisitos são preenchidos quando as interações dos píons são tratadas como sendo aproximadamente invariantes por transformações quirais e as interações envolvendo mésons vetoriais são consideradas como sendo aproximadamente invariantes por transformações de calibre. Assim, na impossibilidade de se utilizar uma teoria fundamental para as interações fortes, as simetrias quiral e de calibre guiam a construção de Lagrangianas e, por isso, tornam-se vitais no estudo de processos mesônicos em física nuclear. Para o caso particular desse trabalho, estamos interessados na interação NN devido à troca de dois píons, o que nos leva a estudar com detalhes a simetria quiral, conforme veremos a seguir.

3.3 Lagrangianas, simetrias e correntes de Noether

Os princípios de simetria, também chamados de princípios de invariancia, são fundamentais na física atual. Eles são particularmente úteis em situações onde detalhes da interação são desconhecidos ou quando os processos dinâmicos são incalculáveis [*Cam 77*].

No decorrer desse trabalho faremos uso da relação geral entre simetrias de sistemas contínuos e a existência de leis diferenciais de conservação, isto é, correntes conservadas. Para estudar tais relações, é conveniente considerar o sistema como um conjunto de cam-

pos com a dinâmica descrita por uma Lagrangiana. A Lagrangiana da teoria de campos é definida como uma extensão natural da Lagrangiana corpuscular, no limite onde o número de graus de liberdade se torna infinito [*HT 62*]. Nesse caso, a Lagrangiana se torna uma integral sobre a *densidade Lagrangiana* dos campos, definidos em cada ponto do espaço-tempo, e das suas derivadas em relação ao espaço e ao tempo. Usando uma notação covariante [*Sca 79*], podemos escrever

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}[\phi(x), \partial_\mu \phi(x)], \tag{3.7}$$

onde $\mathcal{L}[\phi(x), \partial_\mu \phi(x)]$ é a densidade Lagrangiana, e $\partial_\mu \phi \equiv \partial\phi/\partial x^\mu$ com $\mu = 0, 1, 2, 3$. Variando a ação, obtemos a equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta[\partial_\mu \phi(x)]} \right) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi(x)}. \tag{3.8}$$

cujas soluções descrevem as possíveis configurações do sistema.

Seja um sistema dinâmico descrito por uma Lagrangiana[3] $\mathcal{L}$, que depende de N campos ϕ_i, onde o índice i refere-se a variáveis internas, e de suas primeiras derivadas $\partial_\mu \phi_i$. Se nesse sistema for possível efetuar uma *transformação* nos campos (chamada formalmente de T), de modo que a Lagrangiana não se altere, essa transformação corresponde a uma **simetria** do problema. No caso de uma simetria interna contínua, essa transformação T mistura os campos

$$\phi_i \xrightarrow{T} \phi_i' = \phi_i + \Lambda_j F_{ij}(\phi_1, \ldots, \phi_N), \tag{3.9}$$

onde Λ_j são os parâmetros infinitesimais da transformação e $F_{ij}(\phi_1, \ldots, \phi_N)$ é função dos campos a serem transformados. Esta operação transforma ϕ_i em uma combinação linear de campos da mesma espécie, cuja forma é determinada pela função F_{ij}. O índices i está associado ao número de geradores da transformação, enquanto que j está relacionado aos graus de liberdade internos dos campos. Assim, F_{ij} não é, necessariamente, uma matriz quadrada.

O teorema de Noether [*Rom 69*] afirma que, se a Lagrangiana é invariante sob a transformação T, $\Delta\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}' - \mathcal{L} = 0$, então existe uma corrente conservada J^μ tal que $\partial_\mu J^\mu = 0$. A partir dela pode-se derivar uma carga conservada, que comuta com a Hamiltoniana, correspondendo a uma simetria do sistema.

[3]Para simplificar a notação, trataremos $\mathcal{L}$ como sendo a Lagrangiana, e só usaremos o termo densidade Lagrangiana se houver possibilidade de confusão.

A conservação da corrente pode ser expressa como

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_t J^0 + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{3.10}$$

A carga, por outro lado, é definida por

$$Q(t) = \int d^3x\, J^0(\mathbf{x}, t). \tag{3.11}$$

Assim, integrando a derivada temporal da equação 3.11 em todo o espaço, obtemos

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \int d^3x \frac{d\,[J^0(\mathbf{x}, t)]}{dt} = -\int d^3x\, \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{3.12}$$

Para obter a última igualdade usamos o teorema de Gauss e supusemos que $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \to 0$ para valores muito grandes de $\mid \mathbf{x} \mid$.

Na representação de Heisenberg, a evolução temporal do operador Q é dada por

$$\frac{dQ(t)}{dt} = i[H, Q(t)] + \partial_t Q(t) \tag{3.13}$$

Portanto, quando $Q(t)$ não depende explicitamente do tempo, a equação 3.13 corresponde a

$$[H, Q] = 0 \tag{3.14}$$

Para obter explicitamente a corrente conservada associada a uma transformação de simetria T, consideremos Λ na equação 3.9 como sendo função de x. Neste caso, quando ϕ_i se transforma como 3.9, sua derivada é dada por

$$\partial_\mu \phi_i \xrightarrow{T} \partial_\mu \phi_i + (\partial_\mu \Lambda_j) F_{ij} + \Lambda_j (\partial_\mu F_{ij}). \tag{3.15}$$

Efetuando uma mudança infinitesimal dos campos, $\Delta\phi_i$, e nas suas derivadas $\Delta(\partial_\mu \phi_i)$, obtemos

$$\Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}\right) \Delta\phi_i + \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta[\partial_\mu \phi_i]}\right) \Delta(\partial_\mu \phi_i), \tag{3.16}$$

porque $\mathcal{L}$ depende funcionalmente apenas de ϕ_i e de $\partial_\mu \phi_i$. Usando 3.9 e 3.15, temos

$$\Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}\right) \Lambda_j F_{ij} + \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta[\partial_\mu \phi_i]}\right) [(\partial_\mu \Lambda_j) F_{ij} + \Lambda_j (\partial_\mu F_{ij})]. \tag{3.17}$$

Essa espressão pode ser escrita como

$$\Delta\mathcal{L} = \left(\frac{\partial(\Delta\mathcal{L})}{\partial\Lambda_j}\right) \Lambda_j + \left(\frac{\partial(\Delta\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu \Lambda_j)}\right) (\partial_\mu \Lambda_j), \tag{3.18}$$

com

$$\left(\frac{\partial(\Delta\mathcal{L})}{\partial\Lambda_j}\right) \equiv \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}\right) F_{ij} + \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta[\partial_\mu\phi_i]}\right) \partial_\mu F_{ij}, \tag{3.19}$$

e

$$\left(\frac{\partial(\Delta\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\Lambda_j)}\right) \equiv \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta[\partial_\mu\phi_i]}\right) F_{ij}. \tag{3.20}$$

Diferenciando a equação 3.20 com respeito x, obtemos

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial(\Delta\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\Lambda_j)}\right) = \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta[\partial_\mu\phi_i]}\right) F_{ij} + \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta[\partial_\mu\phi_i]}\right) \partial_\mu F_{ij}. \tag{3.21}$$

Usando as equações de Euler-Lagrange 3.8, o primeiro termo do lado direito da equação 3.21 pode ser substituido por

$$\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta[\partial_\mu\phi_i]}\right) = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}, \tag{3.22}$$

de tal forma que a equação 3.21 se torna

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial(\Delta\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\Lambda_j)}\right) = \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}\right) F_{ij} + \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta[\partial_\mu\phi_i]}\right) \partial_\mu F_{ij}. \tag{3.23}$$

Comparando 3.23 com 3.19, vemos que

$$\frac{\partial(\Delta\mathcal{L})}{\partial\Lambda_j} = \partial_\mu\left(\frac{\partial(\Delta\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\Lambda_j)}\right). \tag{3.24}$$

A equação 3.24 é simples e nos diz várias coisas não-triviais. Primeiro, se $\mathcal{L}$ é invariante sob transformações com Λ_j constante, então ela nos dá o conjunto de correntes conservadas J_j^μ imediatamente, pois, se definirmos

$$J_j^\mu \equiv \frac{\partial(\Delta\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\Lambda_j)}, \tag{3.25}$$

temos que $\partial_\mu J_j^\mu = 0$. Segundo, se $\mathcal{L}$ possui uma simetria aproximada, de tal forma que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \epsilon\mathcal{L}_1 \tag{3.26}$$

onde $\mathcal{L}_0$ é invariante por uma transformação T com Λ_j constante, e onde $\epsilon << 1$, então, com J_j^μ definido por 3.25, a equação 3.24 implica em

$$\partial_\mu J_j^\mu = \epsilon\left(\frac{\partial(\Delta\mathcal{L}_1)}{\partial\Lambda_j}\right). \tag{3.27}$$

Assim, a divergência J_j^μ é da ordem de ϵ. Essa relação entre uma simetria aproximada e uma corrente aproximadamente conservada é muito importante e será usada neste trabalho.

3.4 O surgimento da simetria quiral: interações fracas

A simetria quiral nasceu no contexto das interações fracas. Inicialmente esse tipo de interação foi pensado como sendo uma terceira e distinta classe de forças fundamentais. Entretanto, estudos desenvolvidos nestas duas últimas décadas[4] indicam que este não é o caso.

Para entender o papel da simetria quiral nas interações fracas, e sua extensão às interações fortes, convém fazer uma breve revisão do decaimento beta, observado já nos primeiros anos de pesquisa da física nuclear. Um avanço importante na compreensão desse processo ocorreu em 1933, quando Pauli [*Pau 33*], para implementar a conservação do momento e da energia, postulou a existência de uma nova partícula no estado final de todos os decaimentos beta, o neutrino, que teria spin $\frac{1}{2}$ e uma massa muito pequena ou nula, interagindo muito fracamente com a matéria. Um ano mais tarde, Fermi [*Fer 34*] construiu uma teoria do decaimento beta baseada na hipótese do neutrino, em analogia à formulação de Dirac da eletrodinâmica quântica (QED). Fermi postulou que a interação fraca responsável pelo decaimento beta seria similar à interação eletromagnética, porém sem o propagador do fóton. Por exemplo, na reação $n \to p + e^- + \bar{\nu}$, a Lagrangiana de interação seria o produto de duas funções de vértice do tipo

$$\mathcal{L} = C_v(\bar{\psi}_p\gamma^\mu\psi_n)(\bar{\psi}_e\gamma_\mu\psi_\nu) \tag{3.28}$$

Essa interação tem a forma de um produto de duas correntes: uma descreve a transformação de neutron em próton, e a outra, a criação de um elétron e um antineutrino. Essa teoria foi chamada de "interação puntiforme de quatro férmions" pois quatro linhas de partículas de spin 1/2 interagiam em um único ponto; não havia propagador, conforme mostra a figura 3.2.

A hipótese de Fermi foi posteriormente generalizada, com a introdução de outros acoplamentos, compatíveis com as simetrias do problema: invariância de Lorentz e invariância sob reversão temporal e reflexão espacial. Com essas condições, apenas cinco vértices podem tomar parte na Lagrangiana, que teria a forma

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{5} C_k[\bar{\psi}_p\Gamma_k\psi_n][\bar{\psi}_e\Gamma_k\psi_\nu], \tag{3.29}$$

[4] As chamadas "Teorias de Gauge", que unificam as interações eletromagnéticas e fracas [*Wei 67b* , *Sal 68* , *AL 73*].

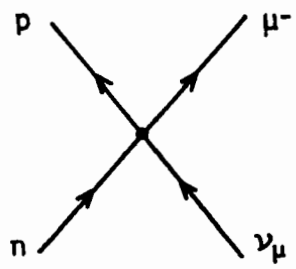


Figura 3.2: *Interação puntiforme de quatro férmions para o decaimento do neutron.*

onde $\Gamma_k = I$ (escalar), γ_5 (pseudo-escalar), γ_μ (vetor), $\sigma_{\mu\nu}$ (tensor) e $\gamma_5\gamma_\mu$ (vetor-axial). Nos anos que se seguiram à proposta de Fermi, houve um esforço muito grande para se determinar as cinco constantes de acoplamento C_k, usando-se essa Lagrangiana em processos envolvendo diferentes núcleos e medidas de correlação angular elétron-neutrino.

As primeiras tentativas de se medir as constantes de acoplamento do decaimento beta nuclear revelaram que os acoplamentos escalar e vetorial (F, de Fermi) não possuiam valores muito diferentes dos acoplamentos tensorial e pseudo-vetor (GT de Gamow-Teller). Essas medidas forneceram os resultados

$$G_F \cong \frac{1.0 \times 10^{-5}}{m_p^2}, \qquad | G_{GT} |= (1.2 \pm 0.5) \mid G_F \mid, \tag{3.30}$$

onde m_p é a massa do próton e G_F se relaciona com as constantes de acoplamento da expressão 3.29 por $G_F = -C_F \cdot \sqrt{2}$. Esse resultado demonstrava que as constantes de acoplamento não eram muito diferentes para as diversas interações propostas, o que levou muitos a pensarem na idéia de universalidade das interações fracas.

Essa idéia de universalidade foi reforçada com a descoberta do múon em 1936. Processos do tipo

$$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \qquad \mu^- + (Z, A) \to (Z-1, A) + \nu,$$

que simbolizam o decaimento do múon e a captura de um múon por um núcleo, podiam ser descritos pelo mesmo tipo de Lagrangiana usada no decaimento beta.

A descoberta do píon em 1947 novamente reforça a idéia de universalidade. Seu decaimento pode produzir um múon ou um elétron, e é descrito pelo mesmo tipo de Lagrangiana

$$\pi^\pm \to \mu^\pm + \nu(\bar{\nu}), \qquad \pi^\pm \to e^\pm + \nu(\bar{\nu}).$$

Assim, em 1956, acreditava-se que as interações fracas pudessem ser descritas pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{5} C_k[\bar{\psi}_1\Gamma_k\psi_2][\bar{\psi}_3\Gamma_k\psi_4], \tag{3.31}$$

Essa Lagrangiana seria *universal*, ou seja, teria a mesma forma e as mesmas constantes de acoplamento para o caso em que houvesse um par de hádrons e um par de léptons, ou dois pares de léptons.

Com o advento de aceleradores mais potentes nos anos 50, várias partículas novas foram descobertas. Algumas delas eram produzidas apenas aos pares e tinham meias-vidas várias ordens de magnitude maiores que os hádrons até então conhecidos (com exceção do neutron). Essa característica foi associada à um novo número quântico, a estranheza. A estranheza é conservada nas interações fortes e eletromagnéticas, mas não nas interações fracas. Portanto, as partículas estranhas decaem apenas por processos fracos, e um exemplo típico é o decaimento do kaon

$$K^0 \to \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e \qquad\qquad K^0 \to \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu.$$

Nessa época, já era bem conhecido o chamado paradoxo $\theta-\tau$, que consistia na hipótese da existência de duas partículas com propriedades quase idênticas. Essas duas partículas tinham aproximadamente a mesma massa e a mesma vida média do K^0. As paridades intrínsecas dessas duas partículas eram $+1$ para o θ e -1 para o τ. A menos dessa paridade, todos os outros números quânticos das duas partículas eram iguais. Seus decaimentos dominantes eram

$$\theta^\pm \to \pi^\pm + \pi^0 \qquad\qquad \tau^\pm \to \pi^\pm + \pi^+ + \pi^-.$$

Em 1956, Lee e Yang [*LY 56*] apontaram a possibilidade de que esses dois processos poderiam ser modos de decaimento diferentes para a mesma partícula, os parceiros carregados do K^0. Isso só poderia ser verdade se a paridade não se conservasse nessas reações. Assim, eles sugeriram uma série de experimentos para verificar a conservação ou não da paridade para a força fraca. Esses e outros experimentos mostraram conclusivamente que a paridade não se conserva nas interações fracas.

Após a confirmação experimental das conclusões do trabalho de Lee e Yang, duas propriedades das interações fracas ficaram claras: a universalidade das constantes de acoplamento e a não-conservação da paridade. No caso dos léptons, a não conservação da paridade está associada a uma Lagrangiana baseada na corrente $\gamma^\mu(1-\gamma_5) = \gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma_5$,

ou seja, que possui uma parte vetorial e uma parte axial. Temos então uma nova estrutura para a Lagrangiana de Fermi, a famosa estrutura $V - A$. Esse mesmo tipo de estrutura também foi adotado para a parte hadrônica da Lagrangiana.

A partir de estudos do decaimento do múon e do decaimento beta, utilizando a forma $V-A$ para a Lagrangiana de interação , fatos importantes foram descobertos. A igualdade das constantes de acoplamento vetorial para ambos os decaimentos levou, em analogia à interação eletromagnética, à hipótese da conservação da corrente vetorial forte (CVC), identificada como a corrente de isospin. A hipótese de CVC, que se tornou mais conhecida pelo tabalho de Feynman e Gell-Mann [*FG 58*], *deslocou* a importância das correntes: de meros objetos dinâmicos, elas passaram a fornecer informações sobre as simetrias da Lagrangiana e assim o estudo das interações fracas passou a ser uma fonte de informações sobre as interações fortes e vice-versa.

O segundo ponto importante ligado ao estudo desses decaimentos está na constante de acoplamento vetor-axial, C_A. Atualmente sabemos que [*RW 89*],

$$C_A = -1.256 C_V \qquad \text{logo} \qquad \tilde{g}_A \equiv C_A/C_V = -1.256. \tag{3.32}$$

Historicamente, a proximidade de $g_A \equiv \mid \tilde{g}_A \mid$ da unidade, levou à idéia de que a corrente axial hadrônica que ocorre no decaimento beta seria "quase" conservada, isto é,

$$\partial_\mu A_i^\mu \approx 0. \tag{3.33}$$

Essa afirmação toma forma na hipótese da "conservação parcial da corrente axial" - PCAC [*GL 60*]. No decaimento do píon, apenas a parte axial da corrente contribui, pois a paridade é conservada no elemento de matriz. Além disso, como o píon tem spin nulo, o único quadrivetor disponível é o seu quadrimomento. Sendo assim, a aplicação da condição invariância de Lorentz para o elemento de matriz que descreve esse decaimento leva a

$$< 0 \mid A_\mu^j(0) \mid \pi^k(q) >= i\delta^{jk} q_\mu f_\pi, \tag{3.34}$$

onde j e k são índices de isospin e f_π é a constante de decaimento do píon.

Se tomarmos a divergência da corrente axial acima, multiplicando a expressão no espaço dos momentos por iq^μ, obtemos

$$< 0 \mid \partial^\mu A_\mu^j(0) \mid \pi^k(q) >= \mu^2 f_\pi \delta^{jk} \tag{3.35}$$

Pelo fato de que a massa do píon é pequena na escala de energias hadrônicas, $\frac{\mu^2}{m^2} \approx \frac{1}{50}$, temos uma justificativa para a afirmação de que a divergência de A_μ^j é pequena.

Essa argumentação foi proposta por Gell-Mann e Lévy [*GL 60*], ao afirmarem que a não conservação da corrente axial poderia ser a menor possível, compatível com o decaimento do píon. Eles propuseram a expressão

$$\partial_\mu A_j^\mu(x) = f_\pi \mu^2 \pi_j(x), \tag{3.36}$$

que é consistente com 3.35.

Assim, temos que, em adição à corrente vetorial de isospin conservada, existe uma corrente axial "quase" conservada que, pelo teorema de Noether, corresponde a uma simetria "aproximada" das interações fortes. A pergunta a ser feita é qual é essa simetria e como ela se manifesta nas interações fortes. Para responder essas questões é util idealizarmos um mundo perfeitamente simétrico, onde a corrente axial é exatamente conservada

$$\partial_\mu A_i^\mu(x) = 0, \tag{3.37}$$

e analisar as conseqüências que essa afirmação traz. Convém notar que essa aproximação não pode descrever o mundo real pois, através da equação 3.35, ela faz com que tenhamos $\mu^2 = 0$ ou $f_\pi = 0$, e nenhum desses dois resultados tem suporte experimental. Apesar disso, os resultados obtidos para esse mundo simétrico esclarecem substancialmente a equação 3.33.

Supondo que 3.37 seja verdadeira, pode-se analisar as conseqüências para os elementos de matriz da corrente axial tomados entre os estados dos núcleons, $< N(p') \mid A_i^\mu(0) \mid N(p) >$, relevantes ao estudo do decaimento beta. Usando apenas as simetrias conhecidas para as interações fortes - invariância de Lorentz, isospin, paridade e conjugação de carga ([*BD 64*] pg. 275) - pode-se mostrar que a forma mais geral desse elemento de matriz deve ser

$$< N(p') \mid A_i^\mu(0) \mid N(p) >= \bar{N}(p')\frac{1}{2}\tau_i[\gamma^\mu\gamma_5\tilde{g}_A(q^2) + q^\mu\gamma_5 h(q^2)]N(p), \tag{3.38}$$

onde $q^\mu = p^\mu - p'^\mu$. Esse elemento de matriz, que pode ser chamado de "fator de forma axial do núcleon", é mostrado esquematicamente na figura 3.3. O termo $h(q^2)$ é chamado de fator de forma pseudoescalar-induzido, devido à presença da matriz γ_5 e praticamente não contribui para o decaimento beta, devido ao fato de que $q^\mu \approx (m_n - m_p)$ é pequeno. A dependência do momento de $\tilde{g}_A$ e o fator $h(q^2)$, devem-se às correções ao vértice fraco causadas pela interação forte. Um dos possíveis diagramas de interação forte que contribui para o decaimento beta é mostrado na figura 3.4. O vértice do lado direito na figura 3.4

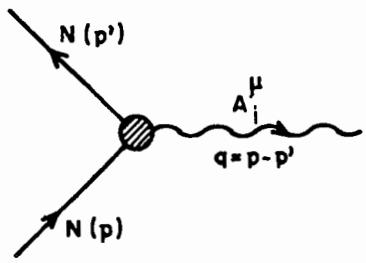


Figura 3.3: *Representação diagramática do fator de forma axial do núcleon.*

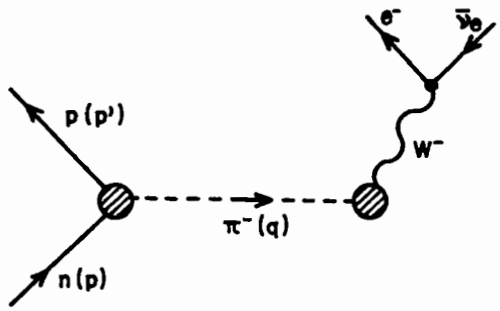


Figura 3.4: *Correção devido à interação forte causada pela troca de um píon, no decaimento beta do neutron.*

descreve o decaimento do píon e sabemos, via equação 3.34 como descrevê-lo. Supondo que $M_W \to \infty$, a amplitude desse processo torna-se proporcional a

$$i\sqrt{2} f_\pi q^\mu J_\mu^{lep}, \tag{3.39}$$

onde o fator $\sqrt{2}$ é devido à carga do píon e J_μ^{lep} é a corrente leptônica fraca. O vértice esquerdo da figura 3.4 descreve a interação $np\pi$ para um momento transferido q^2 e sua constante de acoplamento é dada por $\sqrt{2}g(q^2)$. Utilizando as regras de Feynman, podemos escrever a amplitude devida a esse diagrama

$$\mathcal{T} = i\sqrt{2}\bar{u}_p(p')g(q^2)\gamma_5 u_n(p)\frac{i}{q^2-\mu^2}i\sqrt{2}f_\pi q^\mu J_\mu^{lept} \tag{3.40}$$

$$= h^{(\pi)}(q^2)\bar{u}(p')\gamma_5 q^\mu u_n(p) J_\mu^{lep}, \tag{3.41}$$

$$\text{onde} \quad h^{(\pi)}(q^2) \equiv -\frac{2g(q^2)f_\pi}{q^2-\mu^2}. \tag{3.42}$$

As implicações da conservação de A_i^μ para o mundo "simétrico" podem ser determinadas multiplicando 3.38 por iq_μ (pois $\partial_\mu \to iq_\mu$),

$$< N(p') \mid \partial_\mu A_i^\mu \mid N(p) > = 0 \tag{3.43}$$

$$= i\bar{N}(p')\frac{1}{2}\tau_i[\gamma^\mu q_\mu \gamma_5 \tilde{g}_A(q^2) + q^2\gamma_5 h(q^2)]N(p). \tag{3.44}$$

Agora, como $q = p - p'$ e lembrando que $\gamma_\mu\gamma_5 = -\gamma_5\gamma_\mu$, podemos reescrever o primeiro termo nos colchetes da equação 3.44, supondo que $m_p = m_n = m$

$$\tilde{g}_A(q^2)\bar{N}(p')\frac{1}{2}\tau_i\gamma^\mu(p_\mu - p'_\mu)\gamma_5 N(p) = -2m\tilde{g}_A(q^2)\bar{N}(p')\frac{1}{2}\tau_i\gamma_5 N(p), \tag{3.45}$$

onde $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ e foi feito o uso da equação de Dirac $(\not{p} - m)N(p) = 0 = \bar{N}(p')(\not{p}' - m)$. Logo a conservação da corrente axial na equação 3.37 implica em

$$0 = 2m\tilde{g}_A(q^2) + q^2 h(q^2) \tag{3.46}$$

e se $\tilde{g}_A(q^2 = 0) \neq 0$, então $h(q^2)$ tem um polo em $q^2 = 0$,

$$h(q^2) = \left(\frac{2m\tilde{g}_A(q^2)}{q^2}\right) \xrightarrow{q^2\to 0} \left(\frac{2m\tilde{g}_A(0)}{q^2}\right). \tag{3.47}$$

Um polo em $q^2 = 0$ pode ser associado à existência de uma partícula de massa nula. Assim, nesse mundo simétrico, como conseqüência de $\partial_\mu A_i^\mu = 0$ e $g_A(0) \neq 0$, existe uma partícula de massa nula. No mundo real, tal partícula não existe. Porém, sabemos que o píon é o méson mais leve que pode ser trocado em diagramas do tipo da figura 3.4. Além disso, no limite de $\mu \to 0$, a condição de PCAC, equação 3.36, se torna a condição de conservação 3.37. Esses motivos permitem a identificação do píon no mundo real com a partícula sem massa no mundo simétrico. Se fizermos essa associação, podemos colocar $\mu = 0$ na equação 3.42, e calcular os resíduos nos polos das equações 3.42 e 3.47. O resultado é

$$2m\tilde{g}_A(0) = -2g(0)f_\pi \tag{3.48}$$

ou, lembrando que $\tilde{g}_A(0) \equiv -g_A = -1.256$, pois $q^2 \approx 0$ no decaimento beta, vemos que a equação 3.49 nos dá a famosa relação de Goldberger-Treiman (GT) [*GT 58*],

$$g_A m = g f_\pi, \tag{3.49}$$

onde[5]

[5]Essa maneira de se deduzir a relação de GT foi apresentada primeiramente por Nambu [*Nam 60*].

- m é a massa do núcleon $m \approx 939 MeV$;
- g é a constante de acoplamento πN, $\frac{g^2}{4\pi} = 14.3$, e então $g \approx 13.4$;
- f_π é a constante de decaimento do píon, $f_\pi \approx 93 MeV$, e
- g_A é a magnitude da renormalização da corrente axial no decaimento beta do neutron, $g_A = 1.256$.

Substituindo os valores acima na relação de GT, vemos que essa igualdade é satisfeita com um erro de 6%. Essa concordância é tão boa que deu imediato respeito à hipótese de PCAC.[6] Do ponto de vista teórico, o significado da relação de GT está associado à chamada "dominância do polo do píon" (devido ao polo que aparece na equação 3.47), e corresponde à idéia de que as interações envolvendo correntes axiais são sempre mediadas por píons (como mostrado na figura 3.4). Assim, se idealizarmos um mundo simétrico no qual $\partial_\mu A_i^\mu = 0$, e $\mu = 0$, descobre-se a relação de Goldberger-Treiman. Nesse mundo simétrico, a lei de conservação $\partial_\mu A_i^\mu = 0$ implica, pelo teorema de Noether, uma simetria das interações fortes além da simetria de isospin, denominada **Simetria Quiral**. Ela envolve tanto transformações vetoriais como axiais. A proximidade da relação de GT com os valores experimentais sugere que o mundo real "quase" possui essa simetria.

3.5 Simetria quiral: álgebra de correntes

A partir da discussão do teorema de Noether, sabemos que simetrias levam a conservação de correntes, associadas por sua vez a conservação de cargas. No caso da simetria quiral, temos

$$Q_i^V(t) \equiv \int d^3x\, V_i^0(x,t), \tag{3.50}$$

$$Q_i^A(t) \equiv \int d^3x\, A_i^0(x,t) \tag{3.51}$$

para as correntes vetorial e axial.

A identificação da corrente vetorial como a corrente de isospin implica que suas cargas satisfazem as regras de comutação para o grupo $SU(2)$,

$$\left[Q_i^V, Q_j^V\right] = i\epsilon_{ijk} Q_k^V \tag{3.52}$$

[6] Historicamente, a relação de GT surgiu antes da hipótese de PCAC, de uma maneira pouco clara. A hipótese de PCAC foi formulada para colocar a relação de GT numa base teórica mais sólida, e acabou tendo uma importância bem maior do que seu objetivo inicial [*Lee 72*].

Pelo fato de que as cargas axiais transformam-se como vetores sob rotações de isospin e como Q_i^V são os geradores das transformações de isospin, as relações de comutação entre Q_i^A e Q_i^V são

$$\left[Q_i^V, Q_j^A\right] = i\epsilon_{ijk} Q_k^A. \tag{3.53}$$

A introdução das relações de comutação dos geradores das transformações axiais fecha a álgebra do grupo. Esse fechamento foi proposto por Gell-Mann [*Gel 62*], e feito sem introduzir outras cargas, de modo a manter a álgebra tão pequena quanto possível. Ele propôs a relação

$$\left[Q_i^A, Q_j^A\right] = i\epsilon_{ijk} Q_k^V. \tag{3.54}$$

A simetria associada às relações de comutação acima é a chamada **Simetria Quiral.** As expressões 3.52, 3.53, e 3.54 podem ser melhor compreendidas se definirmos as combinações

$$Q_i^L \equiv Q_i^V + Q_i^A, \qquad Q_i^R \equiv Q_I^V - Q_i^A, \tag{3.55}$$

o que permite que relações de comutação 3.52, 3.53 e 3.54 se fatorem em duas álgebras $SU(2)$ separadas, que comutam entre si

$$\begin{aligned} \left[Q_i^L, Q_j^L\right] &= i\epsilon_{ijk} Q_k^L && \longleftarrow \text{SU(2) esquerdo ("left")} \\ \left[Q_i^L, Q_j^R\right] &= 0 && \longleftarrow \text{desacoplamento} \\ \left[Q_i^R, Q_j^R\right] &= i\epsilon_{ijk} Q_k^R && \longleftarrow \text{SU(2) direito ("right")} \end{aligned} \tag{3.56}$$

A álgebra mostrada nas equações 3.56 é a do grupo $SU(2) \times SU(2)$. Pelo fato de que as estruturas $(V + A)$ e $(V - A)$ estão relacionadas entre si por mudança de paridade, essa álgebra é chamada de "$SU(2) \times SU(2)$ Quiral".

Essas relações de comutação entre as cargas correspondem à versão integrada das relações de comutação a tempos iguais para as respectivas correntes, propostas por Gell-Mann [*Gel 62* , *GN 64*] e escritas como

$$\left[V_i^0(x,t), V_j^0(y,t)\right] = i\epsilon_{ijk} V_k^0(x,t)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{3.57}$$

$$\left[V_i^0(x,t), A_j^0(y,t)\right] = i\epsilon_{ijk} A_k^0(x,t)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{3.58}$$

$$\left[A_i^0(x,t), A_j^0(y,t)\right] = i\epsilon_{ijk} V_k^0(x,t)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{3.59}$$

Esse conjunto de relações de comutação entre as correntes é denominado *Álgebra de Correntes.* A combinação da álgebra de correntes com a hipótese de PCAC gerou previsões

teóricas não-triviais,[7] passíveis de serem testadas por experimentos, das quais muitas foram confirmadas com grande sucesso. Uma descrição detalhada dessa elegante técnica, que dominou a física de hádrons nos anos 60, pode ser encontrada no livro de de Alfaro e colaboradores [*Alf+ 73*].

Os primeiros modelos envolvendo a idéia de simetria quiral foram formulados em termos de Lagrangianas. Nesse contexto, incorporar a simetria quiral significa produzir uma Lagrangiana tal que, por meio de variações adequadas nos campos[8], gere uma corrente vetorial conservada, uma corrente axial parcialmente conservada e cargas que reproduzam as relações de comutação do grupo $SU(2) \times SU(2)$ quiral.

Entretanto, no início dos anos 60, a idéia de se usar Lagrangianas em problemas de interação forte encontrava grande oposição, pois elas estavam vinculadas à linguagem perturbativa que não funcionava. Por isso, foi feito um esforço no sentido de se encontrar outras linguagens que não envolvessem perturbação e a primeira técnica formal desenvolvida consistia numa mistura de álgebra de correntes e fórmulas de redução de LSZ.

A técnica de redução de LSZ, [*Lee 72*], permite escrever a matriz S para um processo, tal como $\pi^\alpha(q) + A \to \pi^\beta(q') + B$, com A e B estados quaisquer, na forma

$$S^{\beta\alpha} = -\int d^4x d^4x' e^{-iqx} e^{iq'x'} (\mu^2 - q^2)(\mu^2 - q'^2) < B \mid T\left(\pi^\beta(x)\pi^\alpha(x')\right) \mid A > \tag{3.60}$$

onde $\boldsymbol{\pi}(x)$ é o campo do píon.

Substituindo-se os campos dos píons em termos da corrente axial e utilizando a hipótese de PCAC

$$\partial^\mu A^\alpha_\mu = f_\pi \mu^2 \pi^\alpha, \tag{3.61}$$

obtemos

$$\begin{aligned} S^{\beta\alpha} &= -\frac{1}{f_\pi^2 \mu^4} \int d^4x\, d^4x' e^{-iqx} e^{iq'x'} \times \\ &\times \left\{(\mu^2 - q^2)(\mu^2 - q'^2) < B \mid T\left(\partial^\mu A^\beta_\mu(x) \partial^\nu A^\alpha_\nu(x')\right) \mid A >\right\}. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Em seguida, o produto ordenado temporalmente (T) das divergências das correntes pode ser reescrito com o auxílio da seguinte relação, válida para quaisquer correntes A_μ e A_ν:

$$\partial^\mu T\left(A_\mu(x) A_\nu(x')\right) = T\left(\partial^\mu A_\mu(x) A_\nu(x')\right) + \delta(x_0)\left[A_0(x), A_\nu(x')\right]. \tag{3.63}$$

[7] Principalmente devido à relação de comutação 3.54, que fecha a álgebra do grupo.

[8] Estas variações, geradas por transformações vetoriais e axiais unitárias, serão mostradas ainda nessse capítulo.

O último termo dessa expressão contém um comutador, que pode ser calculado por meio da álgebra de correntes.

O uso da expressão 3.63, acompanhado da álgebra de correntes e das informações provenientes dos elementos de matriz das várias correntes relacionadas ao processo, permite a obtenção da amplitude de espalhamento da reação estudada. Esse método de cálculo é bastante rigoroso, não envolve perturbação e permite a obtenção de "teoremas" de baixas energias.

Entretanto, em 1966/67, Weinberg [*Wei 67*] criticou o método da álgebra de correntes, sob dois ângulos diferentes: primeiro, quando o processo envolve mais que dois píons, o trabalho algébrico é muito grande; segundo, as implicações dinâmicas das interações permanecem escondidas, não são explícitas. Como método alternativo para a implementação da simetria quiral, Weinberg propôs o uso de "Lagrangianas efetivas fenomenológicas" [*Wei 68*], tais que as correntes delas derivadas por transformações quirais obedeçam à álgebra de correntes. Isso garante que as amplitudes calculadas em ordem mais baixa de perturbação (diagramas tipo árvore), sejam equivalentes àquelas provenientes da álgebra de correntes. Essa idéia constitui a base da chamada **dinâmica quiral**, e não deve ser vista como uma tentativa de se usarem expansões perturbativas na constante de acoplamento em cálculos envolvendo interações fortes.

O tratamento da interação hadrônica, no contexto da simetria quiral pode, então, ser feito de duas maneiras: utilizando-se a técnica da álgebra de correntes, ou através do uso das Lagrangianas fenomenológicas. Nesse trabalho, utilizaremos o segundo método, por vários motivos:

- Os cálculos de processos complexos são menos complicados quando utilizamos Lagrangianas efetivas, ao contrário do que ocorre com a álgebra de correntes;

- A dinâmica da interação fica totalmente explícita ao usarmos as Lagrangianas, pois sabemos qual a contribuição de cada partícula para o particular processo em estudo;

- O tratamento da interação hadrônica via Lagrangianas efetivas quirais engloba a álgebra de correntes, pois além de reproduzir os resultados dessa última, tem implicações teóricas mais concisas, pois seu tratamento tem o rigor da teoria quântica de campos [*Wei 79*].

3.6 Simetria quiral: Lagrangianas

Como vimos anteriomente, a simetria quiral exata acontece quando $\partial^\mu A^i_\mu(x) = 0$, pois somente nesse caso as cargas axiais comutam com a Hamiltoniana. No mundo real, por outro lado, a relação acima é substituida pela condição de PCAC, equação 3.61. Por isso, se desejarmos estudar a simetria quiral por meio de Lagrangianas, devemos esperar que elas possam ser escritas na forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \epsilon \mathcal{L}_{SB} \tag{3.64}$$

onde $\mathcal{L}_0$ é invariante pelo grupo $SU(2) \times SU(2)$ quiral, e onde $\epsilon \approx O(\mu^2)$ nos lembra que o termo de quebra de simetria é pequeno. Como $\mathcal{L}_{SB}$ quebra somente a simetria "axial" e não o isospin, vemos que

$$\partial^\mu A^i_\mu(x) \propto \epsilon \approx O(\mu^2) \tag{3.65}$$

automaticamente. Assim, a vantagem do formalismo Lagrangiano sobre a abordagem da álgebra de correntes é que, dada a forma explícita do termo $\mathcal{L}_{SB}$, a equação 3.64 permite o desenvolvimento sistemático de uma teoria de perturbação em torno do limite quiral, onde a simetria é satisfeita [*Pag 75*]. Resta-nos entender o que é este limite e como ele se relaciona com a condição de píons sem massa.

Para uma simetria interna comum, como por exemplo, o isospin, o fato de que a Hamiltoniana comuta com os seus geradores faz com que o espectro dos estados possa ser classificado por representações do grupo de simetria. Todos os estados pertencentes ao mesmo "multipleto" têm a mesma massa, no limite de simetria exata. Assim, no caso do isospin, que é uma simetria $SU(2)$ dos estados hadrônicos, ambos os membros do isodubleto $p - n$ possuem a mesma massa, o mesmo acontecendo com os membros do tripleto do píon, π^+, π^0, π^-. Esse tipo de realização da simetria é chamado de modo de Wigner-Weyl. Desde o trabalho de Goldstone [*Gol 61*], sabe-se que existe ainda um outro tipo de realização da simetria, conhecida como modo de Nambu-Goldstone [*NJ 61* , *Gol 61*]. Neste modo, é possível que a Hamiltoniana possua uma simetria contínua, sem que o mesmo aconteça para o estado fundamental. Quando isso ocorre, existem partículas sem massa, características do sistema. Acredita-se que seja este o modo como a simetria quiral é realizada nas interações fortes. No limite de simetria exata, $\epsilon = 0$, as correntes vetorial e axial são conservadas, a relação de Goldberger-Treiman é exata, mas a simetria não se manifesta nos estados das partículas. Ao invés disso, o píon é a partícula de massa zero determinada pelo teorema de Goldstone. No mundo real, a massa do píon não é nula,

$\epsilon \neq 0$, a corrente axial obedece a condição de PCAC, e a relação de Goldberger-Treiman é uma aproximação (muito boa) com cerca de 6% de precisão.

Existem várias maneiras de se construir uma Lagrangiana invariante quiral, mas duas delas são especialmente importantes, porque refletem pontos de vista diferentes para o significado da simetria. Na primeira constrói-se a Lagrangiana invariante quiral como se a quiralidade fosse uma simetria comum, como o isospin e, em seguida, determinam-se as propriedades do vácuo. A Lagrangiana representativa dessa classe é a do modelo σ linear.[9] Na segunda, reconhece-se desde o princípio que a quiralidade não é como as outras simetrias e que seu conteúdo principal é relacionar processos envolvendo diferentes números de píons moles.[10] Por essa razão, constrói-se uma Lagrangiana invariante por transformações quirais expressas, não em termos das matrizes de isospin e γ_5, mas em termos das matrizes de isospin e do campo do píon. Nesse caso, trabalha-se desde o início com acoplamentos derivativos, não-lineares, e a Lagrangiana é chamada de não-linear. Por isso, podemos falar em realizações lineares e não-lineares da simetria quiral.[11]

3.7 Realizações lineares da simetria quiral

Para se obter uma realização linear da dinâmica quiral é preciso introduzir outras partículas além dos píons, ou seja, não podemos obter uma Lagrangiana invariante por $SU(2) \times SU(2)$ quiral usando apenas píons que se transformem linearmente sob a ação das cargas vetorial e axial. A introdução desses outros campos, no caso de realizações lineares, decorre da necessidade de se satisfazer a identidade de Jacobi para as cargas axiais [*GG 69*], o que se consegue por meio de campos de paridade positiva.

Em geral, a transformação de um campo ϕ é dada por

$$\phi \longrightarrow U\phi U^\dagger \tag{3.66}$$

onde U é o operador que implementa a transformação. Adotando a notação:

$$\begin{aligned} \text{Transformações de isospin :} \quad &\longrightarrow \quad U_V = e^{-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{Q}^V} \\ \text{Transformações axiais :} \quad &\longrightarrow \quad U_A = e^{-i\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{Q}^A}, \end{aligned}$$

[9] Na verdade, no modelo σ linear, a simetria pode se manifestar tanto da maneira comum, tipo Wigner-Weyl ou no modo de Nambu-Goldstone, conforme veremos a seguir.

[10] Um píon mole é um píon cuja massa tende a zero.

[11] Por transformação linear entendemos $[Q, \pi] = i\psi$, onde ψ é um outro campo. A ação de uma carga sobre um campo será não-linear se $[Q, \pi] = if(\pi)$ e $f(\pi)$ for uma função não-linear de π, como $f(\pi) = \text{sen} \mid \pi \mid$ ou $f(\pi) = \sqrt{1 - \pi^2}$, etc.

obtemos a seguinte forma para variações infinitesimais:

$$\delta^V \phi_a = -i\alpha_b \left[Q_b^V, \phi_a\right] \tag{3.67}$$

$$\delta^A \phi_a = -i\beta_b \left[Q_b^A, \phi_a\right]. \tag{3.68}$$

A realização linear mais famosa da simetria quiral é o chamado modelo sigma,[12] baseado no tripleto pseudoescalar $\boldsymbol{\pi}$ e num campo escalar σ, que juntos formam o quarteto quiral $(\sigma, \boldsymbol{\pi})$. Do ponto de vista da teoria de grupos, essa realização corresponde à representação $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de $SU(2) \times SU(2)$.

As transformações de isospin são dadas por

$$\delta^V \pi_a = -i\alpha_b \left[Q_b^V, \pi_a\right] = -i\alpha_b i\epsilon_{bac}\pi_c = -\left(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi}\right)_a \tag{3.69}$$

$$\delta^V \sigma = -i\alpha_b \left[Q_b^V, \sigma\right] = 0. \tag{3.70}$$

As cargas axiais mudam a paridade dos campos, transformando píons em sigmas, e vice-versa [*Lee 72*]

$$\delta^A \pi_a = -i\beta_b \left[Q_b^A, \pi_a\right] = -i\beta_b i\delta_{ab}\sigma = \left(\boldsymbol{\beta}\sigma\right)_a \tag{3.71}$$

$$\delta^A \sigma = -i\beta_b \left[Q_b^A, \sigma\right] = -i\beta_b\left(-i\pi_b\right) = -\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\pi}. \tag{3.72}$$

Para construirmos uma Lagrangiana que seja invariante por essas transformações, começamos pelo termo de energia potencial, ou seja, aquele que não envolve derivadas.

Uma combinação da forma $(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)$ é um invariante quiral pois,

$$\delta^A\left(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2\right) = 2\left(\sigma\delta^A\sigma + \boldsymbol{\pi}\delta^A\boldsymbol{\pi}\right) = 2\left(-\sigma\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\beta}\sigma\right) = 0. \tag{3.73}$$

Potências dessa combinação também são invariantes e, portanto, um termo de energia potencial muito geral e que respeita a simetria quiral é dado por

$$\mathcal{L}_{ep} = \sum_n C_n \left(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2\right)^{2n}, \tag{3.74}$$

[12] O modelo σ foi discutido primeiramente em [*Sch 58*]. A definição da corrente axial no modelo σ deve-se à [*Pol 58*]. A hipótese de PCAC foi discutida em grande detalhe no contexto do modelo σ linear em [*GL 60*], o qual serviu de fonte de inspiração para trabalhos posteriores sobre o modelo σ em particular, e sobre álgebra de correntes, no geral.

onde C_n são coeficientes constantes. O termo de energia cinética é proporcional às derivadas em segunda ordem dos campos e assim a Lagrangiana mesônica simétrica toma a forma

$$\mathcal{L}_{mes} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\boldsymbol{\pi}\cdot\partial^\mu\boldsymbol{\pi}) - \frac{M^2}{2}(\boldsymbol{\pi}^2+\sigma^2) - \frac{\lambda^2}{4}(\boldsymbol{\pi}^2+\sigma^2)^2 + \ldots \tag{3.75}$$

onde a constante λ^2 deve ser positiva para que a Hamiltoniana também o seja, e M é a massa dos mésons, que é igual para os dois.

Essa Lagrangiana simétrica corresponde a correntes vetorial e axial conservadas. Entretanto, na realidade a corrente axial é apenas parcialmente conservada, e um termo de quebra de simetria deve ser introduzido na Lagrangiana. O termo de quebra de simetria mais simples, compatível com PCAC tem a forma

$$\mathcal{L}_{SB} = c\sigma \tag{3.76}$$

Assim, a Lagrangiana mesônica mais simples que incorpora quebra espontânea de simetria e PCAC é

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\boldsymbol{\pi}\cdot\partial^\mu\boldsymbol{\pi}) - \frac{M^2}{2}(\boldsymbol{\pi}^2+\sigma^2) - \frac{\lambda^2}{4}(\boldsymbol{\pi}^2+\sigma^2)^2 + c\sigma \tag{3.77}$$

Essa Lagrangiana pode ser ampliada para incluir também os núcleons, cujas transformações são dadas por

$$\delta^V N = i\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}N; \qquad \delta^V\bar{N} = -i\bar{N}\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \tag{3.78}$$

$$\delta^A N = -i\boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5 N; \qquad \delta^A\bar{N} = -i\bar{N}\gamma_5\boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \tag{3.79}$$

No caso do modelo linear, as transformações axiais mudam a paridade do campo do núcleon por meio do operador γ_5, que troca as componentes altas e baixas do seu espinor. Usando as formas definidas no apêndice A, temos

$$\begin{aligned}\gamma_5\, u(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} E+m \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \end{pmatrix} \chi \\ &= \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ E+m \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

A mudança de paridade decorre do fato de $(E+m)$ ser par e $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}$ ser ímpar.

A inclusão dos núcleons leva à seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\sigma &= \bar{N}\left[i\gamma^\mu\partial_\mu\right]N - \bar{N}\left[g(\sigma + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\gamma_5\right]N + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\boldsymbol{\pi}\cdot\partial^\mu\boldsymbol{\pi}\right) - \\ &- \frac{M^2}{2}\left(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2\right) - \frac{\lambda^2}{4}\left(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2\right)^2 + c\sigma, \end{aligned} \tag{3.81}$$

onde o primeiro termo descreve o termo de energia cinética dos núcleons, o segundo a interação entre núcleons e píons através do acoplamento pseudo-escalar e com o sigma, através do acoplamento escalar, com a mesma constante de acoplamento g. Os três termos seguintes formam o setor mesônico simétrico, composto pelos termos de energia cinética, de massa e de energia potencial. O último termo é o que descreve a quebra de simetria.

Aplicando as transformações vetoriais e axiais em $\mathcal{L}_\sigma$ e seguindo os mesmos passos executados na dedução do teorema de Noether, obtemos

$$\mathbf{J}^V_\mu = -\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial^\mu\boldsymbol{\alpha})} = \bar{N}\gamma_\mu\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}N + \boldsymbol{\pi}\times\partial_\mu\boldsymbol{\pi} \tag{3.82}$$

$$\partial^\mu\mathbf{J}^V_\mu = -\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\boldsymbol{\alpha}} = 0, \tag{3.83}$$

e

$$\mathbf{J}^A_\mu = -\bar{N}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}N + \left(\boldsymbol{\pi}\partial_\mu\sigma - \sigma\partial_\mu\boldsymbol{\pi}\right) \tag{3.84}$$

$$\partial^\mu\mathbf{J}^A_\mu = \epsilon c\boldsymbol{\pi}(x). \tag{3.85}$$

Assim, a Lagrangiana acima é consistente com CVC e PCAC. É interessante notar que ela não contém o termo de massa para o núcleon, pois este quebra a simetria. Se incorporássemos um termo de forma $m\bar{N}N$ na Lagrangiana, a divergência da corrente axial passaria a ser

$$\partial^\mu\mathbf{J}^A_\mu = -im\bar{N}\gamma_5\boldsymbol{\tau}N + \epsilon c\boldsymbol{\pi}(x). \tag{3.86}$$

o que mostra que a simetria é somente exata no limite $m \to 0$. Por isso, o termo de massa não deve ser incluido explicitamente na Lagrangiana.

A equação 3.81, compatível com a hipótese de PCAC, tem dois problemas: (1) como já mencionamos, a massa do núcleon é nula e (2) por $\mathcal{L}_\sigma$ ser linear no campo σ, ela permite um valor esperado não-nulo para o campo σ no vácuo.[13] Para vermos porque isso ocorre,

[13]Na verdade, o valor não nulo para o campo σ no vácuo está ligada à realização do tipo Nambu-Goldstone para a simetria quiral, que ocasiona um vácuo degenerado, [Cam 77].

consideremos a equação de movimento dos mésons

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial^\mu \sigma)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \sigma} = 0 \;\rightarrow\; \left(\partial^2 + M^2\right)\sigma = c - \lambda^2 \sigma \left(\sigma^2 + \pi^2\right) \tag{3.87}$$

e

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial^\mu \pi_i)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \pi_i} = 0 \;\rightarrow\; \left(\partial^2 + M^2\right)\pi_i = c - \lambda^2 \pi_i \left(\sigma^2 + \pi^2\right) \tag{3.88}$$

Esse sistema de equações admite como solução $\pi_i = 0$, $\sigma = v$, onde v é uma constante tal que

$$M^2 v = c - \lambda^3 v^3 \quad \longrightarrow \quad \lambda^2 v^3 + M^2 v = c. \tag{3.89}$$

A função v representa o valor esperado no vácuo do campo σ,

$$< \sigma >_0 = v. \tag{3.90}$$

As flutuações quânticas escalares são associadas a um campo s tal que

$$s = \sigma - v \qquad e \qquad < s >_0 = 0. \tag{3.91}$$

A Lagrangiana em termos do novo campo s é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s &= \bar{N} i\gamma^\mu \partial_\mu N - \bar{N} m N - g\bar{N}(s + i\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\tau}\gamma_5)N + \frac{1}{2}\left[\partial_\mu \boldsymbol{\pi}\partial^\mu \boldsymbol{\pi} - \mu_\pi^2 \boldsymbol{\pi}^2\right] + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\partial_\mu s \partial^\mu s - \mu_\sigma^2 s^2\right] - \lambda^2 v s(s^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda^2}{4}(s^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2 + (\epsilon c - v\mu_\pi^2)s, \end{aligned} \tag{3.92}$$

onde um termo constante foi eliminado por não influir na dinâmica, e as seguintes associações foram feitas

$$\begin{aligned} m &= gv \\ \mu_\pi^2 &= M^2 + \lambda^2 v^2 \\ \mu_\sigma^2 &= M^2 + 3\lambda^2 v^2. \end{aligned}$$

Assim, pela Lagrangiana acima, o núcleon ganha uma massa m, e o píon e o sigma não são mais degenerados em massa. Isso é conseqüência direta da realização da simetria no modo de Nambu-Goldstone, que implica no fato de que o valor esperado no vácuo do campo de sigma é não-nulo. Ao subtrairmos o termo clássico (v) do campo do σ, gera-se uma massa para o núcleon e quebra-se a degenerescência em massa dos mésons.

Impondo que o valor esperado do campo s no vácuo seja nulo, temos

$$\epsilon c = v\mu_\pi^2. \tag{3.93}$$

Impondo a condição de PCAC, temos que $\epsilon c = f_\pi \mu_\pi^2$, o que implica em

$$v = f_\pi \tag{3.94}$$

ou seja, a constante de decaimento do píon é o valor esperado do campo σ no vácuo.

Esses resultados permitem uma melhor compreensão do significado da simetria quiral. No limite $\epsilon \to 0$, e pela equação 3.93 devemos ter $v = 0$ ou $\mu_\pi^2 = 0$. Uma ou outra condição depende essencialmente do parâmetro M^2. Lembrando que λ^2 é positivo, temos três possibilidades:

1. $M^2 > 0 \to$ Como $\lambda^2 v^2 \geq 0$, $\mu_\pi^2 \neq 0$. Portanto devemos impor $v = 0$. Nesse caso $\mu_\pi^2 = \mu_\sigma^2$, $f_\pi = 0$ e $m = 0$. A simetria se manifesta no modo de Wigner-Weyl.

2. $M^2 < 0 \to$ Nesse caso $v \neq 0$, pois se v se anular, $\mu_\pi^2 = \mu_\sigma^2 < 0$, o que é fisicamente inaceitável. Logo devemos impor $\mu_\pi^2 = 0$, $f_\pi \neq 0$, e então $m = g f_\pi$, que é a relação de Goldberger-Treiman para $g_A = 1$. A simetria é então realizada no modo Nambu-Goldstone.

3. $M^2 = 0 \to$ Nesse caso devemos impor $v = 0$, $m = \mu_\pi = \mu_\sigma = 0$.

Essa discussão sugere que a realização que pode ser transposta para o mundo real é a do segundo item. Nesse mundo, devido à hipótese de PCAC, o vácuo não é simétrico, $\mu_\pi^2 \neq \mu_\sigma^2 \neq 0$ e $m = g f_\pi$ é apenas uma aproximação. De acordo com Lee [*Lee 72*], para o modelo σ descrever o processo de espalhamento πN à baixas energias, devemos ter $5 < \lambda^2 < 6$ e $-(180)^2 < M^2 < -(150)^2$, o que confirma que a simetria tipo Nambu-Goldstone espelha a realidade dos processos envolvendo píons moles.

A importância da simetria quiral nos processos hadrônicos ficou clara no estudo do espalhamento píon-núcleon à baixas energias, através da realização linear da simetria [*Wei 66*]. Detalhes desse tópico podem ser vistos no Apêndice D, onde é feita uma discussão das vantagens e desvantagens da realização linear da simetria quiral.

3.8 Realizações não-lineares da simetria quiral

A primeira versão da Lagrangiana não-linear de Weinberg foi introduzida em um trabalho no qual propunha uma aproximação dinâmica para a álgebra de correntes [*Wei 67*]. A sua intenção era obter as previsões da álgebra de correntes para as interações de píons moles com menos trabalho e, também, com uma visão melhor da dinâmica do problema.

Nesse trabalho, ele partiu do modelo σ linear, efetuando uma rotação quiral dependente do espaço-tempo, transformando o quarteto (π, σ) em $(0, \sigma')$, com $\sigma' = \sqrt{\sigma^2 + \pi^2}$. O novo campo do píon passa a ser um ângulo quiral de rotação, e a Lagrangiana passa a ter uma estrutura não-linear, nova e complicada.

Posteriormente, influenciado por Schwinger, Weinberg achou possível construir diretamente uma Lagrangiana "fenomenológica" não-linear, através da introdução de um novo campo piônico, que desde o início teria propriedades de transformação não-lineares, obedecendo os preceitos da simetria quiral.[14] Seguindo essa idéia, Weinberg formulou uma teoria geral, [*Wei 68*], da realização não-linear da simetria quiral para o grupo $SU(2) \times SU(2)$, que logo foi estendida para grupos arbitrários [*CWZ 68* , *Cal+ 68*], e desde então tem sido aplicada por vários autores.

A importância da formulação de Weinberg não foi apenas a de economizar o trabalho dos cálculos, mas sobretudo a de tornar claro que a interação de outros hádrons com píons moles não depende de nenhuma propriedade específica das transformações quirais dos campos a eles associados, mas apenas do seu isospin.

As Lagrangianas obtidas por esse método são altamente não-lineares e não-renormalizáveis, o que no final dos anos 60 constituia um problema. Entretanto, para Weinberg essas Lagrangianas seriam apenas efetivas, e deveriam ser usadas apenas na aproximação de árvore.[15] Assim o caráter não-fundamental dessas Lagrangianas ficou claro desde o início, e elas receberam, por isso, o adjetivo de "fenomenológicas". Posteriormente, percebeu-se que essas Lagrangianas quirais efetivas poderiam ser usadas para calcular processos envolvendo píons moles em qualquer ordem nas suas energias, incluindo diagramas que contêm "loops". Sabemos, atualmente, que todas as divergências ultravioletas, oriundas desse tipo de cálculo, podem ser absorvidas, através da redefinição das constantes de acoplamento da Lagrangiana, desde que incluamos *todos* os termos consistentes com a quiralidade e outras simetrias desejadas.[16]

Weinberg, em 1979, [*Wei 79*], rediscute o papel das Lagrangianas efetivas e argumenta que elas, por si sós, podem ser usadas para justificar o cálculo dos elementos de

[14] Essa abordagem foi utilizada primeiramente por Schwinger [*Sch 67*], que foi estimulada pelo trabalho anterior de Weinberg [*Wei 67*]

[15] A dinâmica derivada dessas Lagrangianas, em primeira aproximação, já reproduzia todos os resultados da álgebra de correntes.

[16] Esse trabalho de renormalização foi efetuado apenas para o setor piônico da Lagrangiana [*Wei 79*]. Atualmente, o grupo de Weinberg estuda as modificações necessárias na renormalização para a inclusão de núcleons [*Wei 91*].

matriz para píons moles, a partir dos diagramas tipo árvore, dispensando o uso de álgebra de correntes. Seguno ele, teorias quânticas de campos específicas têm uma grande quantidade de conteúdo, mas a teoria quântica de campos em si não contém nada além de analiticidade, unitariedade, decomposição em aglomerados e simetrias. No contexto da teoria de perturbação, isso significa que se escrevermos uma Lagrangiana, a mais geral possível, incluindo todos os termos consistentes com os princípios de simetria adotados, e então calcularmos os elementos de matriz derivados dessa Lagrangiana em qualquer ordem da teoria de perturbação, o resultado será simplesmente a matriz S mais geral possível, consistente com analiticidade, unitariedade, decomposição em aglomerados e com esses princípios de simetria.

Para obtermos a Lagrangiana quiral efetiva, seguiremos de perto o trabalho de Weinberg [*Wei 68*], cujas contas estão detalhadas em [*Rob 89*]. Consideraremos inicialmente a parte puramente piônica do problema, introduzindo os núcleons posteriormente. Seja $\boldsymbol{\phi}$ o campo piônico. [17] As suas transformações são definidas de modo geral por

$$\left[Q_a^V, \phi_b\right] = i\epsilon_{abc}\phi_c \qquad \rightarrow \qquad \delta^V \boldsymbol{\phi} = -(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\phi})\,; \tag{3.95}$$

$$\left[Q_a^A, \phi_b\right] = i f_{ab}(\boldsymbol{\phi}) \qquad \rightarrow \qquad \delta^A \phi_b = \beta_a f_{ab}(\boldsymbol{\phi}). \tag{3.96}$$

As transformações vetoriais correspondem ao isospin usual. As relações de comutação das cargas axial e vetorial impõem limitações para a função $f_{ab}(\boldsymbol{\phi})$, que são determinadas pelas identidades de Jacobi. Essas restrições fornecem a informação de que $f_{ab}(\boldsymbol{\phi})$ é um isotensor e que possui paridade positiva, tomando a forma geral

$$f_{ab}(\boldsymbol{\phi}) = \delta_{ab} f(\boldsymbol{\phi}^2) + g(\boldsymbol{\phi}^2)\phi_a\phi_b. \tag{3.97}$$

Retomando as identidades de Jacobi com a forma de $f_{ab}(\boldsymbol{\phi})$ dada acima, encontramos a seguinte relação entre $f(\boldsymbol{\phi}^2)$ e $g(\boldsymbol{\phi}^2)$

$$g(\boldsymbol{\phi}^2) = \frac{1 + 2f(\boldsymbol{\phi}^2)f'(\boldsymbol{\phi}^2)}{f(\boldsymbol{\phi}^2) - 2\boldsymbol{\phi}^2 f'(\boldsymbol{\phi}^2)}, \tag{3.98}$$

onde a linha representa a derivada em relação ao argumento $\boldsymbol{\phi}^2$. Assim, a forma mais geral da transformação axial do campo piônico é dada pela expressão 3.96, onde $f_{ab}(\boldsymbol{\phi})$ segue 3.97, com $g(\boldsymbol{\phi}^2)$ especificado em termos da função arbitrária $f(\boldsymbol{\phi}^2)$ segundo a

[17] Chamaremos de $\boldsymbol{\phi}$ o campo piônico para a realização não-linear, para diferenciá-lo do realização linear, onde usamos $\boldsymbol{\pi}$.

equação 3.98. Isso fornece

$$\delta^A \boldsymbol{\phi} = f(\boldsymbol{\phi}^2)\boldsymbol{\beta} + \frac{1 + f(\boldsymbol{\phi}^2)f'(\boldsymbol{\phi}^2)}{f(\boldsymbol{\phi}^2) - 2\boldsymbol{\phi}^2 f'(\boldsymbol{\phi}^2)}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}. \tag{3.99}$$

Essa é a transformação mais geral possível para o campo do píon.

Consideremos agora as transformações para os outros campos. Seja ψ um campo qualquer, pertencente a um multipleto de isospin com dimensão n; t_b é a representação $n \times n$ dos geradores de $SU(2)$. As transformações isovetoriais para esse campo ψ tem a forma usual

$$\left[Q_b^V, \psi\right] = -t_b\psi, \qquad \rightarrow \qquad \delta^V\psi = i\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{t}\psi. \tag{3.100}$$

Para as transformações axiais, Weinberg sugere a seguinte forma geral

$$\left[Q_b^A, \psi\right] = -v_{bc}(\boldsymbol{\phi}^2)t_c\psi, \tag{3.101}$$

onde $v_{bc}(\boldsymbol{\phi}^2)$ é uma função do campo do píon. As identidades de Jacobi determinam a forma de $v_{bc}(\boldsymbol{\phi}^2)$ como um isotensor de paridade negativa, o que faz com que ela seja linear no campo do píon:

$$v_{bc}(\boldsymbol{\phi}^2) = \epsilon_{bcd}\phi_d v(\boldsymbol{\phi}^2). \tag{3.102}$$

onde $v(\boldsymbol{\phi}^2)$ é uma função isoescalar. Recalculando novamente as identidades de Jacobi com essa particular forma de $v_{bc}(\boldsymbol{\phi}^2)$, e fazendo uso da equação 3.97 obtemos a seguinte expressão para $v(\boldsymbol{\phi}^2)$

$$v(\boldsymbol{\phi}^2) = \frac{1}{f(\boldsymbol{\phi}^2) + \sqrt{f^2(\boldsymbol{\phi}^2) + \boldsymbol{\phi}^2}}. \tag{3.103}$$

Portanto, a transformação axial do campo ψ, consistente com as identidades de Jacobi é

$$\delta^A\psi = -i\beta_b\left[Q_b^A, \psi\right] = iv(\boldsymbol{\phi}^2)\boldsymbol{\beta}\cdot(\mathbf{t}\times\boldsymbol{\phi})\psi \tag{3.104}$$

com $v(\boldsymbol{\phi}^2)$ dado por 3.103 e $f(\boldsymbol{\phi}^2)$ a mesma função arbitrária que aparece na transformação do campo do píon.

Para derivadas dos campos, Weinberg sugere o uso de formas covariantes, que se transformam como o campo ψ. Assim, definimos a *derivada covariante* do campo do píon, $D^\mu\boldsymbol{\phi}$, de modo que essas transformações sejam

$$\left[Q_b^V, D^\mu\boldsymbol{\phi}\right] = -t_b D^\mu\boldsymbol{\phi}; \tag{3.105}$$

$$\left[Q_b^A, D^\mu\boldsymbol{\phi}\right] = -v_{bc}(\boldsymbol{\phi}^2)t_c D^\mu\boldsymbol{\phi}. \tag{3.106}$$

A covariância de Lorentz nos permite parametrizar $D^\mu \boldsymbol{\phi}$ como

$$D^\mu \boldsymbol{\phi}_a = d_{ab}(\boldsymbol{\phi})\partial^\mu \phi_b, \tag{3.107}$$

sendo a função $d_{ab}(\boldsymbol{\phi})$ determinada pelas relações de comutação 3.105 e 3.106,

$$d_{ab}(\boldsymbol{\phi}) \propto \frac{1}{\sqrt{f^2(\boldsymbol{\phi}^2)+\boldsymbol{\phi}^2}}\delta_{ab} - \frac{f'(\boldsymbol{\phi}^2)+v(\boldsymbol{\phi}^2)/2}{f^2(\boldsymbol{\phi}^2)+\boldsymbol{\phi}^2}\phi_a\phi_b, \tag{3.108}$$

onde $f(\boldsymbol{\phi}^2)$ é a função arbitrária que aparece na transformação do campo piônico e $v(\boldsymbol{\phi}^2)$ é dada por 3.103. Logo, a derivada covariante do campo do píon é

$$D^\mu \boldsymbol{\phi} = K\left\{\frac{1}{\sqrt{f^2(\boldsymbol{\phi}^2)+\boldsymbol{\phi}^2}}\partial^\mu \boldsymbol{\phi} - \frac{f'(\boldsymbol{\phi}^2)+v(\boldsymbol{\phi}^2)/2}{f^2(\boldsymbol{\phi}^2)+\boldsymbol{\phi}^2}\partial^\mu \phi^2 \boldsymbol{\phi}\right\}. \tag{3.109}$$

As derivadas do campo ψ também são associadas a derivadas covariantes, que se transformam como

$$\left[Q_b^A, D^\mu\psi\right] = -v_{bc}(\boldsymbol{\phi}^2)t_c D^\mu\psi \qquad \rightarrow \qquad \delta^A D^\mu\psi = iv(\boldsymbol{\phi}^2)\boldsymbol{\beta}\cdot(\mathbf{t}\times\boldsymbol{\phi})D^\mu\psi. \tag{3.110}$$

Para parametrizar a derivada covariante do campo ψ, supomos que o índice de Lorentz possa ser carregado tanto pelo campo ψ como pelo campo do píon, e então escrevemos

$$D^\mu\psi = \partial^\mu\psi + M_1\partial^\mu\phi^2\psi + iM_2\mathbf{t}\cdot(\boldsymbol{\phi}\times\partial^\mu\boldsymbol{\phi})\psi. \tag{3.111}$$

Seguindo o trabalho de Weinberg, é necessário obter apenas uma solução particular para a equação acima, pois isso já é suficiente para permitir a construção de Lagrangianas invariantes quirais. Assim, fazemos $M_1 = 0$ e escrevemos

$$D^\mu\psi = \partial^\mu\psi + iM\mathbf{t}\cdot(\boldsymbol{\phi}\times\partial^\mu\boldsymbol{\phi})\psi \tag{3.112}$$

Impondo que a transformação 3.110 funcione, obtemos para M

$$M = \frac{v(\boldsymbol{\phi}^2)}{\sqrt{f^2(\boldsymbol{\phi}^2)+\boldsymbol{\phi}^2}}, \tag{3.113}$$

o que fornece a seguinte derivada covariante para ψ

$$D^\mu\psi = \partial^\mu\psi + i\frac{v(\boldsymbol{\phi}^2)}{\sqrt{f^2(\boldsymbol{\phi}^2)+\boldsymbol{\phi}^2}}\mathbf{t}\cdot(\boldsymbol{\phi}\times\partial^\mu\boldsymbol{\phi})\psi. \tag{3.114}$$

Para se escrever uma Lagrangiana simétrica basta usar o fato de que "*qualquer isoescalar construido a partir de* $D^\mu\boldsymbol{\phi}$, ψ *e* $D^\mu\psi$ *é um invariante quiral*". Antes porém, precisamos fazer uma calibração fenomenológica, para descobrirmos o valor de K na equação 3.109. O primeiro passo é expandir o termo de energia cinética dos píons

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2} D_\mu \boldsymbol{\phi} D^\mu \boldsymbol{\phi}$$

como função de $\boldsymbol{\phi}^2$, em torno de $\boldsymbol{\phi}^2 = 0$, e impor que o termo de primeira ordem possua a normalização usual (que é o fator 1/2), o que leva a

$$K = f(0). \tag{3.115}$$

O segundo passo consiste em estudar o termo de quebra de simetria. Qualquer isoescalar construido a partir do *campo do píon* quebra a simetria quiral. Supondo que a Lagrangiana tenha um termo da forma

$$\mathcal{L}_{SB} = h(\boldsymbol{\phi}^2), \tag{3.116}$$

onde $h(\boldsymbol{\phi}^2)$ é uma função qualquer de $\boldsymbol{\phi}^2$, pode-se verificar diretamente que a divergência da corrente axial não é nula. Expandindo o resultado dessa divergência em torno de $\boldsymbol{\phi}^2 = 0$, usando-se o fato de que

$$\left(\frac{\delta h(\boldsymbol{\phi}^2)}{\delta[\boldsymbol{\phi}^2]}\right)_{\boldsymbol{\phi}^2=0} = -\frac{\mu^2}{2}, \tag{3.117}$$

e impondo a condição de PCAC, obtemos que $f(0) = f_\pi$. Portanto o valor de K é

$$K = f_\pi \tag{3.118}$$

Definindo o campo ψ como sendo o campo do nucleon, podemos finalmente escrever a Lagrangiana invariante quiral para o sistema πN, no formalismo não-linear desenvolvido por Weinberg

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i\gamma_\mu D^\mu \psi - M\bar{\psi}\psi + \frac{1}{2} D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\mu \boldsymbol{\phi} + \frac{g}{2m} \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \psi D^\mu \boldsymbol{\phi} + G\bar{\psi}\psi D_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot D^\mu \boldsymbol{\phi} + \ldots + \mathcal{L}_{SB}, \tag{3.119}$$

onde cada termo foi construido a partir de combinações isoescalares dos campos ψ e/ou $D^\mu\boldsymbol{\phi}$ e/ou $D^\mu\psi$, o que garante a invariância quiral da Lagrangiana. Os dois primeiros termos são os de energia cinética e de massa dos núcleons, respectivamente; o terceiro é o termo de energia cinética dos píons e o quarto e quinto termos representam a interação isovetorial e isoescalar entre o núcleon e o píon, respectivamente. As reticências ao final, antes do termo de quebra de simetria, indicam a possibilidade de se incluir mais núcleons e mais derivadas do campo do píon.

Capítulo 4

Interação NN e simetria quiral

Neste capítulo introduzimos o modelo teórico utilizado para o estudo da interação NN. Inicialmente apresentamos a expansão da Lagrangiana em potências do campo piônico, o que fornece termos de interação πN com diferentes números de píons. Em seguida, obtemos os vértices de interação, que entram na construção dos diagramas de Feynman e apresentamos um resumo das regras necessárias para o cálculo desses diagramas. Por último, mostramos o formalismo de Weinberg da ordenação das amplitudes em potências do momento, que serve de guia para a construção dos diagramas da interação NN. Finalizamos o capítulo, mostrando e justificando os diagramas escolhidos para o cálculo do potencial NN devido à troca de dois píons. Boa parte desse capítulo foi baseado nos trabalhos recentes de Weinberg [*Wei 79* , *Wei 90* , *Wei 91*].

4.1 Os vértices

Neste trabalho, estudamos a interação NN devida à troca de dois píons. Para tanto é necessário realizar uma expansão das funções de ϕ^2 presentes na Lagrangiana, equação 3.119, em torno do ponto $\phi^2 = 0$, para obtermos os vértices de interação πN com números diferentes de píons. Essas funções , quando expandidas, fornecem polinômios cujas potências são da forma $(\phi^2)^n$ e, portanto, correspondem a números pares de píons.

A expansão das várias funções presentes em 3.119 são dadas abaixo

$$\frac{1}{\sqrt{f^2(\phi^2)+\phi^2}} = \frac{1}{f_\pi}\cdot\left\{1-\left[\frac{f'(0)}{f_\pi}+\frac{1}{2f_\pi^2}\right]\phi^2+\right.$$

$$+ \left[-\frac{f''(0)}{2f_\pi} + \frac{[f'(0)]^2}{4f_\pi^2} + \frac{3f'(0)}{4f_\pi^3} + \frac{3}{16f_\pi^4}\right]\boldsymbol{\phi}^4 + \ldots\Bigg\}, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} v(\boldsymbol{\phi}^2) &= \frac{1}{f(\boldsymbol{\phi}^2) + \sqrt{f^2(\boldsymbol{\phi}^2) + \boldsymbol{\phi}^2}} = v(0) + v'(0)\boldsymbol{\phi}^2 + \ldots \\ &= \frac{1}{2f_\pi} - \frac{1}{4f_\pi^2}\left[2f'(0) + \frac{1}{2f_\pi}\right]\boldsymbol{\phi}^2 + \ldots, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{f'(\boldsymbol{\phi}^2) + v(\boldsymbol{\phi}^2)/2}{f^2(\boldsymbol{\phi}^2) + \boldsymbol{\phi}^2} &= \frac{1}{f_\pi^2}\Bigg\{\left(f'(0) + \frac{1}{4f_\pi}\right) + \\ &+ \left[f''(0) - \frac{2[f'(0)]^2}{f_\pi} - \frac{7f'(0)}{4f_\pi^2} - \frac{5}{16f_\pi^3}\right]\boldsymbol{\phi}^2 + \ldots\Bigg\}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\frac{v(\boldsymbol{\phi}^2)}{\sqrt{f^2(\boldsymbol{\phi}^2) + \boldsymbol{\phi}^2}} = \frac{1}{2f_\pi^2}\left[1 - \left(\frac{2f'(0)}{f_\pi} + \frac{3}{4f_\pi^2}\right)\boldsymbol{\phi}^2 + \ldots\right]. \tag{4.4}$$

O termo que fornece a interação πN com um número ímpar de píons na equação 3.119 é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(2n+1)\pi} &= \frac{g}{2m}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi\cdot f_\pi\Bigg\{\frac{1}{\sqrt{f^2(\boldsymbol{\phi}^2) + \boldsymbol{\phi}^2}}\partial^\mu\boldsymbol{\phi} - \\ &- \frac{f'(\boldsymbol{\phi}^2) + v(\boldsymbol{\phi}^2)/2}{f^2(\boldsymbol{\phi}^2) + \boldsymbol{\phi}^2}\partial^\mu\phi^2\boldsymbol{\phi}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Substituindo as funções expandidas na equação 4.5, obtemos o termo da interação πN com um número ímpar de píons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(2n+1)\pi} = \frac{g}{2m}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi\cdot f_\pi\Bigg\{\frac{1}{f_\pi}\Bigg[1 - \left(\frac{f'(0)}{f_\pi} + \frac{1}{2f_\pi^2}\right)\boldsymbol{\phi}^2 + \\ + \left(-\frac{f''(0)}{2f_\pi} + \frac{[f'(0)]^2}{4f_\pi^2} + \frac{3f'(0)}{4f_\pi^3} + \frac{3}{16f_\pi^4}\right)(\boldsymbol{\phi})^4 + \ldots\Bigg]\partial^\mu\boldsymbol{\phi} + \frac{1}{f_\pi^2}\Bigg[\left(f'(0) + \frac{1}{4f_\pi}\right) + \\ + \left(f''(0) - \frac{2[f'(0)]^2}{f_\pi} - \frac{7f'(0)}{4f_\pi^2} - \frac{5}{16f_\pi^3}\right)\boldsymbol{\phi}^2 + \ldots\Bigg]\partial^\mu\phi^2\boldsymbol{\phi}\Bigg\}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dessa expansão só nos interessa a parte com um píon, já que as demais só contribuem para diagramas com mais de um "loop" à interação NN. Assim a Lagrangiana de interação de

um píon com um nucleon fica

$$\mathcal{L}_{\pi N} = \frac{g}{2m}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\,\psi\cdot\partial^{\mu}\boldsymbol{\phi}. \tag{4.7}$$

As contribuições que envolvem números pares de píons interagindo com o nucleon provêm de dois termos da Lagrangiana: um isovetorial e um isoescalar. O primeiro é dado pela parte ligada a $D^{\mu}\psi$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{V}_{2n\pi} &= i\bar{\psi}\gamma_{\mu}D^{\mu}\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi - \bar{\psi}\gamma_{\mu}\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\psi\cdot\frac{v(\boldsymbol{\phi}^2)}{\sqrt{f^2(\boldsymbol{\phi}^2)+\boldsymbol{\phi}^2}}(\boldsymbol{\phi}\times\partial^{\mu}\boldsymbol{\phi}),\end{aligned} \tag{4.8}$$

Usando 4.4 e notando que o primeiro termo não contem nenhum píon, obtemos

$$\mathcal{L}^{V}_{2n\pi} = -\bar{\psi}\gamma_{\mu}\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\psi\cdot\frac{1}{2f_{\pi}^2}\left[1-\left(\frac{2f'(0)}{f_{\pi}}+\frac{3}{4f_{\pi}^2}\right)\boldsymbol{\phi}^2+\ldots\right](\boldsymbol{\phi}\times\partial^{\mu}\boldsymbol{\phi}), \tag{4.9}$$

Assim, a Lagrangiana de interação isovetorial de dois píons com o nucleon, utilizada nesse trabalho, é dada por

$$\mathcal{L}^{V}_{\pi\pi N} = -\frac{1}{4f_{\pi}^2}\epsilon_{ijk}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\tau_k\,\psi\,\phi_i\partial_{\mu}\phi_j, \tag{4.10}$$

onde fizemos uso da igualdade $\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{\phi}\times\partial_{\mu}\boldsymbol{\phi}) = \epsilon_{ijk}\phi_i\partial_{\mu}\phi_j\tau_k$.

Finalmente, a interação isoescalar corresponde ao último termo na equação 3.119. Para obtermos a interação de ordem mais baixa, que é o vértice de interação de dois píons com o nucleon, basta tomar o primeiro termo na expansão de $D^{\mu}\boldsymbol{\phi}$. Assim, a Lagrangiana de interação isoescalar de dois píons com o nucleon é dada por

$$\mathcal{L}^{S}_{\pi\pi N} = G\bar{\psi}\psi\partial_{\mu}\boldsymbol{\phi}\cdot\partial^{\mu}\boldsymbol{\phi}. \tag{4.11}$$

Em resumo, o termo particular, derivado da Lagrangiana geral de Weinberg, que será usado nesse trabalho, é dado por

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{2m}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\psi(\partial^{\mu}\boldsymbol{\phi}) - \frac{1}{4f_{\pi}^2}\bar{\psi}\gamma_{\mu}\boldsymbol{\tau}\cdot\psi(\boldsymbol{\phi}\times\partial_{\mu}\boldsymbol{\phi}) + G\bar{\psi}\psi\partial_{\mu}\boldsymbol{\phi}\cdot\partial^{\mu}\boldsymbol{\phi}, \tag{4.12}$$

onde os três termos podem ser identificados da seguinte forma: o primeiro descreve a interação do nucleon com um píon, o segundo a interação isovetorial de dois píons com o nucleon e o terceiro, a isoescalar.

As expressões para os vértices de interação, que entram no cálculo das amplitudes dos diagramas de Feynman, são obtidas derivando-se cada termo da Lagrangiana em relação aos campos do píon e do nucleon. Para efetuar essas operações é necessário estabelecer o significado de operadores da forma $\partial_\mu \phi$. Exprimindo o campo do píon em termos de ondas planas temos

$$\phi_\alpha(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_\mathbf{k}} \left[a_{\mathbf{k},\alpha} e^{-ikx} + a^+_{\mathbf{k},\alpha} e^{ikx} \right]. \tag{4.13}$$

onde $a_{\mathbf{k},\alpha}$ e $a^+_{\mathbf{k},\alpha}$ são os operadores de aniquilação e criação para um quantum de momento $\mathbf{k}$ e isospin α. A derivada, ao atuar sobre ϕ, faz descer o quadrimomento do expoente

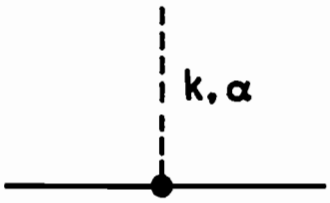
$$\partial_\mu \phi_\alpha = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_\mathbf{k}} \left[a_{\mathbf{k},\alpha}(-ik_\mu) e^{-ikx} + a^+_{\mathbf{k},\alpha}(ik_\mu) e^{ikx} \right] \tag{4.14}$$

Assim, para a aniquilação do píon (píon chegando ao vértice), a derivada do campo fornece $-ik_\mu$ e portanto $\partial_\mu \phi_\alpha$ é equivalente a $-ik_\mu \phi_\alpha$. Para o caso da emissão de um píon (píon saindo do vértice), temos apenas uma troca de sinal, e então $\partial_\mu \phi_\alpha$ corresponde a $ik_\mu \phi_\alpha$.

Podemos, então, obter os três vértices de interação que usaremos nesse trabalho. Eles são os seguintes:

$V_{\pi NN}$ - Vértice de um píon com o nucleon - acoplamento pseudovetorial

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\pi NN} &= \frac{g}{2m} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \tau_\beta \psi \partial \mu \phi^\beta = \frac{g}{2m} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \tau_\beta \psi (\pm i k_\mu) \phi^\beta \\
V_{\pi NN} &\equiv i \left(\frac{\delta^3 \mathcal{L}}{\delta \bar{\psi} \delta \psi \delta \phi_\alpha} \right) = i \frac{g}{2m} \gamma^\mu \gamma_5 \tau_\beta \delta_{\alpha\beta} (\pm i k_\mu)
\end{aligned}$$



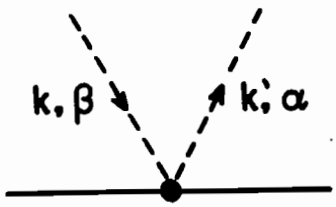
$$\longrightarrow V_{\pi NN} = \pm \frac{g}{2m} \not{k} \gamma_5 \tau_\alpha$$

onde (+) e (-) estão respectivamente associados ao píon chegando e saindo do vértice.

$V^V_{\pi\pi NN}$ - Vértice de dois píons com o nucleon - acoplamento isovetorial

$$\mathcal{L}^V_{\pi\pi NN} = -\frac{1}{4f_\pi^2}\bar{\psi}\gamma^\mu\epsilon_{ijk}\phi_i\partial_\mu\phi_j\tau_k\psi = -\frac{1}{4f_\pi^2}\bar{\psi}\gamma^\mu\epsilon_{ijk}\phi_i(\pm ik_\mu)\phi_j\tau_k\psi$$

$$V^V_{\pi\pi NN} \equiv i\left(\frac{\delta^4\mathcal{L}}{\delta\bar{\psi}\delta\psi\delta\phi_\alpha\delta\phi_\beta}\right) = \frac{\gamma^\mu}{4f_\pi^2}\left[\epsilon_{\beta\alpha k}k_\mu + \epsilon_{\alpha\beta k}(-)k'_\mu\right]\tau_k$$

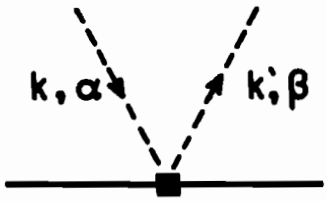


$$\longrightarrow V^V_{\pi\pi NN} = -\frac{1}{4f_\pi^2}(\not{k}' + \not{k})\epsilon_{\alpha\beta k}\tau_k$$

$V^S_{\pi\pi NN}$ - Vértice de dois píons com o nucleon - acoplamento isoescalar

$$\mathcal{L}^S_{\pi\pi NN} = \delta_{ab}G\bar{\psi}\psi\partial_\mu\phi^a\partial^\mu\phi^b = \delta_{ab}G\bar{\psi}\psi(\pm ik_\mu)\phi^a(\pm ik'^\mu)\phi^b$$

$$V^S_{\pi\pi NN} \equiv i\left(\frac{\delta^4\mathcal{L}}{\delta\bar{\psi}\delta\psi\delta\phi^\alpha\delta\phi^\beta}\right) = iG\delta_{ab}\left[\delta_{a\beta}\delta_{b\alpha}(\pm ik'^\mu)(\pm ik_\mu) + \delta_{b\beta}\delta_{a\alpha}(\pm ik_\mu)(\pm ik'^\mu)\right]$$



$$\longrightarrow V^S_{\pi\pi N} = 2iG\delta_{\alpha\beta}k'_\mu k^\mu$$

onde o quadrado cheio foi usado para representar o vértice escalar, a fim de poder diferenciá-lo do caso anterior.

4.2 Regras de Feynman

O cálculo de amplitudes derivadas dos diagramas que representam a dinâmica da interação NN é feito através das regras de Feynman [*Fey 49*]. Vamos apresentar neste item um

pequeno resumo dessas regras, úteis para o estudo dos processos mesônicos envolvidos nesse trabalho. A questão da validade dessas regras pode ser encontrada em vários livros de Eletrodinâmica Quântica [*BD 64* , *BD 65* , *IZ 80*], bem como os resultados numéricos muito precisos que ela fornece para vários processos físicos da QED.

As regras de Feynman servem para calcular amplitudes relativísticas de vários processos quânticos. Para utilizar essas regras, partimos de um desenho, o diagrama de Feynman, que descreve o processo que se deseja estudar. Cada desenho é composto de cinco partes fundamentais, que são

- partículas externas nos estados inicial e final;
- vértices de interação covariantes;
- propagadores internos covariantes;
- integrais nos quadrimomentos internos de cada loop e funções delta de conservação do quadrimomento total;
- vários sinais negativos derivados das estatísticas de spin e fatores de multiplicidade.

Consideremos, por exemplo, o diagrama da figura 4.1 que representa um dos processos que contribuem para o espalhamento elástico píon-nucleon. Esse diagrama é interessante, pois é exatamente a "metade" de outros diagramas que representam a troca de dois píons entre dois nucleons, figura 2.7a. Um diagrama deve ser "lido" normalmente, da esquerda

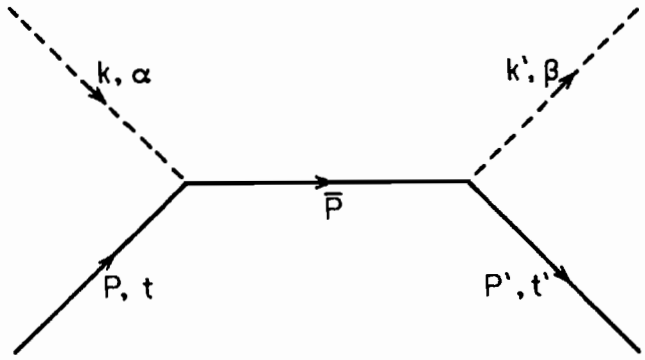
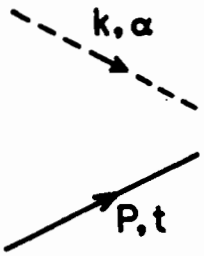


Figura 4.1: *Um dos diagramas que contribuem para o espalhamento πN*

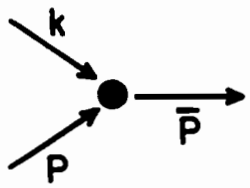
para a direita, e representa a seqüência de idéias descrita a seguir.

- **Linhas externas chegando:**



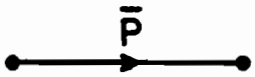
um píon de quadrimomento k e isospin α e um nucleon de quadrimomento p e isospin t antes de interagirem. Para as partículas externas valem $k^2 = \mu^2$ e $p^2 = m^2$.

- **Vértice:**



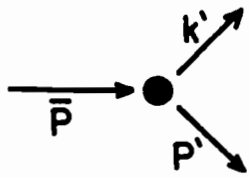
o píon é absorvido pelo nucleon; as setas indicam o fluxo de quadrimomento que é conservado em cada vértice, e portanto $\bar{p} = p + k$.

- **Propagador:**



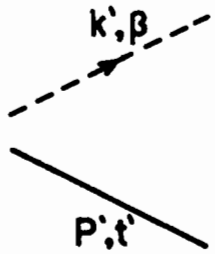
o nucleon, depois de absorver o píon, passa a estar "fora da camada de massa" pois $\bar{p}^2 \neq m^2$. Devido ao desbalanço entre massa e quadrimomento, essa partícula não pode existir indefinidamente. Assim, o propagador descreve a vida efêmera desse estado.

- **Vértice:**



o nucleon "fora da camada de massa" emite um píon com momento k', voltando a ser um nucleon "normal" com momento p', onde $\bar{p} = p' + k'$.

- **Linhas externas saindo:**



o píon de momento k' e o nucleon de momento p' vão embora depois da interação. Para eles valem $k'^2 = \mu^2$ e $p'^2 = m^2$.

As regras de Feynman são um conjunto de prescrições que associam a cada elemento de um diagrama uma função matemática que o representa. Essa associação leva à construção da amplitude relativística correspondente. As regras de Feynman relevantes para o estudo das interações deste trabalho são dadas na figura 4.2.

Para construir a amplitude correspondente ao diagrama da figura 4.1, é preciso lê-la da direita para a esquerda, seguindo a linha do nucleon e usando os elementos da figura 4.2. O resultado é diretamente a amplitude desejada, multiplicada por i.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{nucleon}\\ \text{saindo}\end{array}} \otimes \boxed{\begin{array}{c}\text{vértice}\\ \text{direito}\end{array}} \otimes \boxed{\begin{array}{c}\text{propagador}\\ \text{do nucleon}\end{array}} \otimes \boxed{\begin{array}{c}\text{vértice}\\ \text{esquerdo}\end{array}} \otimes \boxed{\begin{array}{c}\text{nucleon}\\ \text{chegando}\end{array}}$$

$$\text{Amplitude: } i\mathcal{T} = \bar{N}(\mathbf{p}')\left[-\frac{g}{2m}\,\not{k}\gamma_5\tau_\beta\right] i\frac{\not{\bar{p}}+m}{\bar{p}^2-m^2}\left[+\frac{g}{2m}\,\not{k}\gamma_5\tau_\alpha\right] N(\mathbf{p})$$

As contribuições das linhas externas piônicas são iguais à 1 e não aparecem.

A expressão anterior já é a amplitude relativística desejada. Ela está pronta para ser elevada ao quadrado para calcular uma seção de choque, ser somada a outras amplitudes do mesmo processo, etc.. Em geral é conveniente rearranjar essa expressão, separando a dependência em isospin e as constantes do "sanduiche" dos espinores de Dirac. Podemos por exemplo, reescrevê-la como

$$\mathcal{T} = -\left(\frac{g}{2m}\right)^2 \left(\eta^{t'\dagger}\tau_\beta\tau_\alpha\eta^t\right)\bar{u}(\mathbf{p}')\not{k}'\gamma_5\frac{\not{\bar{p}}+m}{\bar{p}^2-m^2}\,\not{k}\gamma_5 u(\mathbf{p}). \tag{4.15}$$

REGRAS DE FEYNMAN

1. **Linhas Externas**

   - *Pion* { *chegando* $\rightarrow 1$; *saindo* $\rightarrow 1$

   - *Nucleon* { *chegando* $\rightarrow u(\mathbf{p})$; *saindo* $\rightarrow \bar{u}(\mathbf{p})$

2. **Propagadores**

   - *Pion* $\rightarrow i\frac{1}{k^2-\mu^2}$
   - *Rho* $\rightarrow -i\frac{g^{\mu\nu}-q^\mu q^\nu/m_\rho^2}{q^2-m_\rho^2}$
   - *Nucleon* $\rightarrow i\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2}$

3. **Vértices**

   - πNN $\rightarrow \frac{g}{2m}\tau_a \not{k}\gamma_5$
   - $\pi\pi NN(V)$ $\rightarrow -\frac{1}{4f_\pi^2}(\not{k}'+\not{k})\epsilon_{bac}\tau_c$ (isovetorial)
   - $\pi\pi NN(S)$ $\rightarrow 2iG\delta_{ab}k_\mu k'^\mu$ (isoescalar)

4. **Integrais de loop**

   - Para cada circuito intermediário fechado, integre no quadrimomento interno k via $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$, para todos valores possíveis de k.

5. **Fatores de multiplicidade**

   - Para um loop puramente bosônico, multiplique a amplitude pelo fator $\frac{1}{2}$.

Figura 4.2: *Regras de Feynman necessárias para o estudo das interações méson-bárion deste trabalho*

4.3 Ordenação dos diagramas em potências do momento

Nesta seção vamos descrever brevemente a prescrição de Weinberg, [*Wei 91*], para a ordenação dos diagramas de Feynman em potências do momento, por que ela é muito útil para o estabelecimento de uma hierarquia entre os vários efeitos. A sua proposta tem como objetivo de longo prazo a construção de uma teoria das interações hadrônicas. Nós, por outro lado, estamos mais preocupados com a fenomenologia da região de alcance intermediário e, por isso, abordamos o problema de um ângulo um pouco diferente no que diz respeito às interações de curto alcance. Entretanto, os nossos resultados devem coincidir com os da dinâmica quiral na região de distâncias maiores que 1 fm. Tratamos inicialmente do problema de modo geral e, em seguida, particularizamos para o caso da interação NN.

Consideremos um estado com N nucleons, cujos momentos são todos (não muito) menores que um valor máximo Q_M. Como trabalhamos com uma Lagrangiana não-renormalizável, as amplitudes calculadas a partir dos diagramas de Feynman, para a interação NN, contêm divergências do tipo ultravioleta de grau crescente, à medida em que vamos para ordens mais elevadas na expansão perturbativa; porém essas divergências podem ser todas absorvidas na redefinição das (infinitas) constantes da Lagrangiana. Na abordagem de Weinberg, a absorção das divergências é feita por meio de contratermos na Lagrangiana, associados a interações de contato, que produzem potenciais tipo delta de Dirac, sem troca de píons.[1] Com os infinitos eliminados dessa forma, as integrais remanescentes são efetivamente cortadas em um momento interno da ordem de Q_M. Expande-se então o potencial[2] em termos de ordens crescentes em Q_M e, "*para cada ordem de Q_M é possível renormalizar a Lagrangiana, redefinindo suas constantes*"[*Wei 90*]. Para se usar esta prescrição é necessário, portanto, um critério para contar as potências de Q_M.

Seja uma interação (vértice) do tipo i, caracterizado por um número d_i de derivadas ou potências da massa do píon, n_i campos do nucleon e p_i campos piônicos. Cada derivada ou massa piônica contribui com (+1) unidade no expoente de Q_M, cada propagador do

[1] Neste trabalho estamos interessados na componente de médio alcance do potencial NN e, por isso, não consideramos as interações de contato. No nosso caso, os infinitos são eliminados por meio de cut-offs no momento.

[2] Essa expansão é feita em termos dos diagramas de Feynman, a partir dos quais se obtém o potencial efetivo.

nucleon com (-1) unidade, cada propagador do píon com (-2) unidades e cada integração no quadrimomento (loop) com (+4) unidades. Assim, o expoente total (ν) de Q_M devido a um diagrama construido com I_N linhas internas de nucleons, I_p linhas internas de píons, V_i vértices do tipo i e L loops é dado por

$$\nu = 4L - I_N - 2I_p + \sum_i V_i d_i. \tag{4.16}$$

Em seguida, usamos as seguintes relações topológicas [*Pol 80*]:

$$L = I_p + I_N - \sum_i V_i + 1, \tag{4.17}$$

$$2I_N + E_N = \sum_i V_i n_i, \tag{4.18}$$

onde E_N é o número de linhas externas do nucleon no diagrama em questão. Então a equação 4.16 pode ser reescrita como

$$\nu = 2 - \frac{1}{2}E_N + 2L + \sum_i V_i \left[d_i + \frac{1}{2}n_i - 2\right]. \tag{4.19}$$

A expressão acima é muito conveniente, porque a simetria quiral coloca o limite inferior zero para o termo entre colchetes que multiplica V_i.[3] Logo, para qualquer processo dado, o termo de ordem mais baixa será aquele sem loops, construido apenas com interações que obedecem

$$d_i + \frac{1}{2}n_i - 2 = 0. \tag{4.20}$$

Os vértices de interação mostrados na Lagrangiana $\mathcal{L}_{int}$, equação 4.12 fornecem para a equação 4.20

$$\begin{aligned} V_{\pi NN} &\rightarrow 0, \\ V^V_{\pi\pi NN} &\rightarrow 0, \\ V^S_{\pi\pi NN} &\rightarrow 1. \end{aligned}$$

É interessante notar que o vértice de interação isoescalar de dois píons com dois nucleons é de primeira ordem.

Para a interação NN, o termo de ordem mais baixa, que é de ordem zero, deve ser formado pelos vértices $V_{\pi NN}$ e $V^V_{\pi\pi NN}$, sem loops. Porém é impossível utilizar o segundo

[3] Isso não é verdade para certas interações de campos eletrofracos com o campo do nucleon (um apenas) e com campos do píon, onde o limite inferior é -1 [*Rho 91*].

vértice, sem construir pelo menos um loop. Assim, o termo de ordem mais baixa da interação NN envolendo píons é de ordem zero e dado, como era de se esperar, pela troca de um píon entre os dois nucleons,[4] mostrado na figura 4.3.

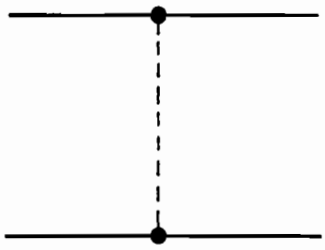


Figura 4.3: *Diagrama da troca de um píon entre dois nucleons, que dá origem ao OPEP (one pion exchange potential). Esse é o termo de ordem zero na interação NN.*

Considerando agora termos de ordem superior, podemos construir diagramas com um loop, com vértices de interação que ainda satisfazem a equação 4.20. Esses diagramas são de segunda ordem no momento, e dados nas figuras 4.4 e 4.5. Os diagramas de um

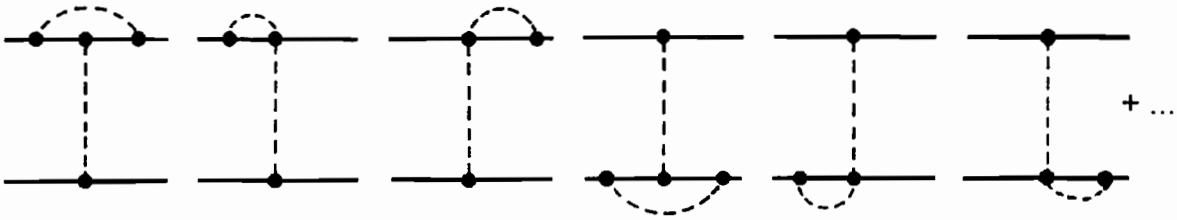


Figura 4.4: *Diagramas de um loop para a interação NN onde um dos píons não é trocado entre os nucleons, não contribuindo, portanto para o TPEP. Na figura são mostrados apenas alguns exemplos dessa classe de diagramas.*

loop, como os mostrados na figura 4.4, correspondem a contribuições de segunda ordem no momento para o fator de forma píon-nucleon. Os diagramas da figura 4.5, por outro lado, representam contribuições de segunda ordem à interação NN devido a troca de dois

[4]Existem também diagramas de contato nessa ordem.

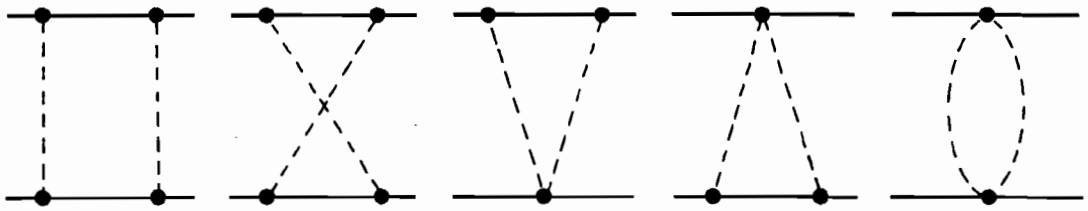


Figura 4.5: *Diagramas de um loop para a interação NN, que envolvem a troca de dois píons entre dois nucleons. Esses diagramas são de segunda ordem e contribuem para o TPEP (two pion exchange potential).*

píons.[5]

É possível também construirmos termos de terceira ordem, dados por diagramas que contêm um loop, com, no máximo, *um* vértice isoescalar, para o qual a equação 4.20 fornece o valor +1. Os diagramas associadosà interação NN nessa ordem são mostrados na figura 4.6.

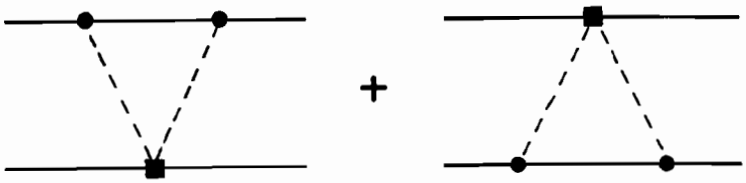


Figura 4.6: *Diagramas de um loop para a interação NN, que envolvem a troca de dois píons entre dois nucleons. Esses diagramas são de terceira ordem e contribuem para o TPEP.*

Usando apenas os três vértices definidos na seção 4.1, termos de quarta ordem no momento podem ser obtidos de duas maneiras: a primeira é manter ainda um loop e usar *dois* vértices para os quais a equação 4.20 fornece o valor +1; esse procedimento só fornece

[5] É interessante notar que a abordagem de Weinberg em segunda ordem requer tanto a introdução de fatores de forma quanto troca de dois píons, enquanto que apenas estas últimas estão presentes na abordagem tradicional tipo Taketani.

um diagrama, mostrado na figura 4.7a. A segunda maneira é utilizar apenas vértices de ordem zero, porém construindo agora *dois* loops. Existem muitas possibilidades desse tipo de construção , algumas das quais mostrados nas figuras 4.7b-j. Para a quarta ordem

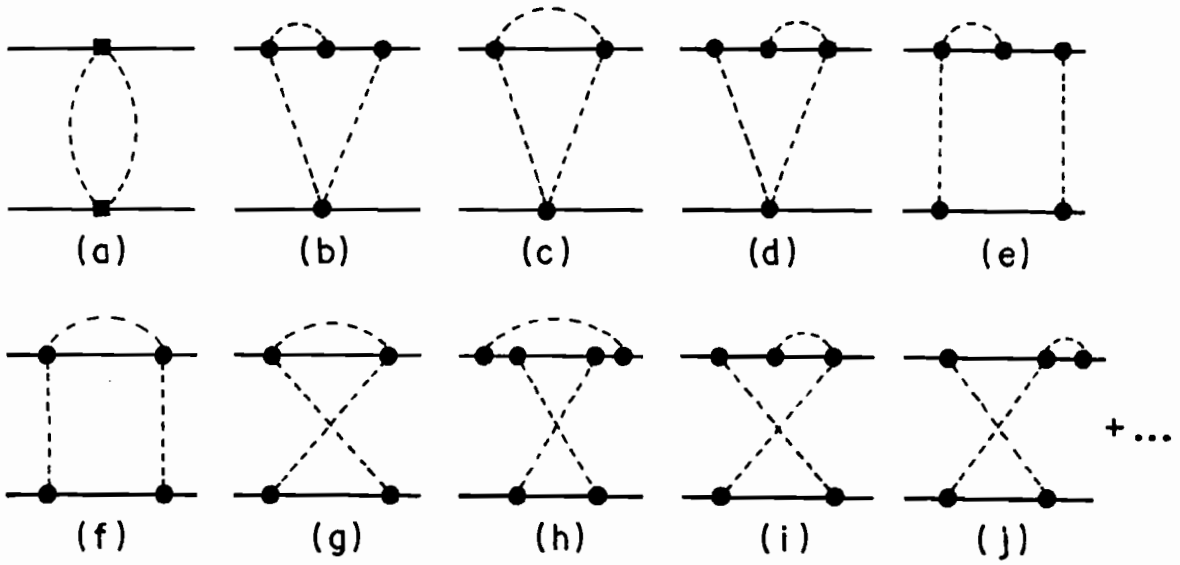


Figura 4.7: *Diagramas de quarta ordem em Q_M, e que contribuem para a interação NN devido à troca de dois píons.*

existem ainda diagramas que são construidos a partir de vértices com três píons e que fornecem dois loops, e que não serão considerados aqui devido a sua complexidade. A figura 4.8 mostra alguns diagramas que contribuem para essa ordem.

Sabemos que, para o estudo completo da interação NN, devemos considerar *todos* os diagramas possíveis para cada ordem da expansão das potências do momento. Porém, esse trabalho é enorme e só factível se efetuado respeitando-se a hierarquia dos diagramas proposta por Weinberg. Neste trabalho nos propomos a calcular a parte mais simples desses diagramas, que contribuem para o potencial NN devido à troca de dois píons, seguindo um critério que visa facilitar a comparação com outros potenciais da literatura e verificar o papel da simetria quiral. Por isso, incluiremos em nossos cálculos todos os processos de segunda e terceira ordens nos quais dois píons são efetivamente trocados entre os nucleons, o que corresponde aos diagramas das figuras 4.5 e 4.6. Além desses processos, incluiremos também o da figura 4.7a, por razões puramente fenomenológicas, pois ele

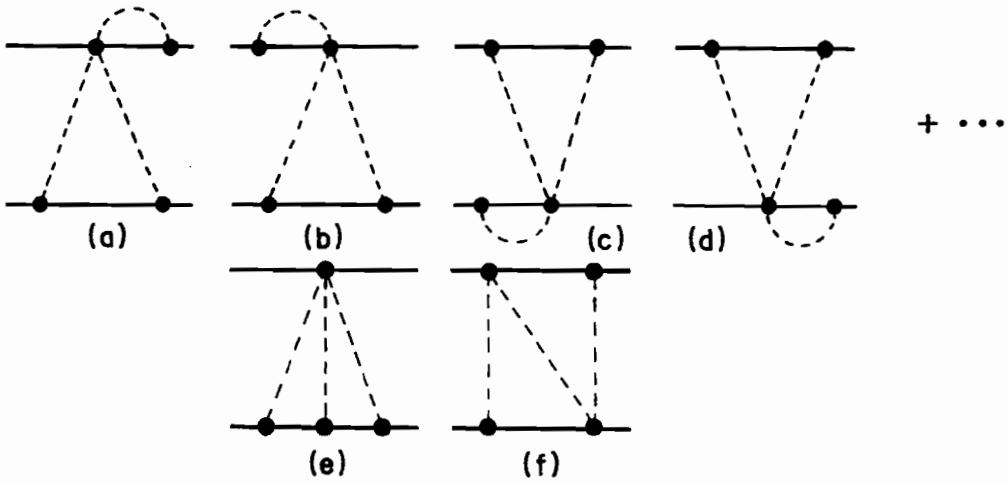


Figura 4.8: *Diagramas com vértices de três píons. (a), (b), (c) e (d) contribuem para a quarta ordem da interação NN devido à troca de dois píons. (e) e (f) são também de quarta ordem, contribuindo, entretanto, para a troca de três píons na interação NN. Esses diagramas com dois loops possuem alto grau de complexidade e não serão considerados aqui.*

contribui ao potencial isoescalar devido à troca de dois píons, importante para a existência de estados ligados nucleares. Assim, os diagramas que serão utilizados nesse trabalho, para o cálculo de $V_{NN}^{\pi\pi}$, o potencial NN devido à troca de dois píons, são mostrados na figura 4.9.

No capítulo 5, para obtermos esse potencial $V_{NN}^{\pi\pi}$, calcularemos todos os diagramas de Feynman da figura 4.9 no espaço dos momentos, respeitando-se a covariância relativística.[6] O potencial no espaço dos momentos tem componentes não-locais e dependentes da energia. Para obtermos o potencial no espaço das coordenadas, efetuamos sua redução não-relativística e, posteriormente, a sua transformada de Fourier.

[6]Um fator de corte (Λ) aparece nas expressões, pois se trata de uma teoria não-renormalizável.

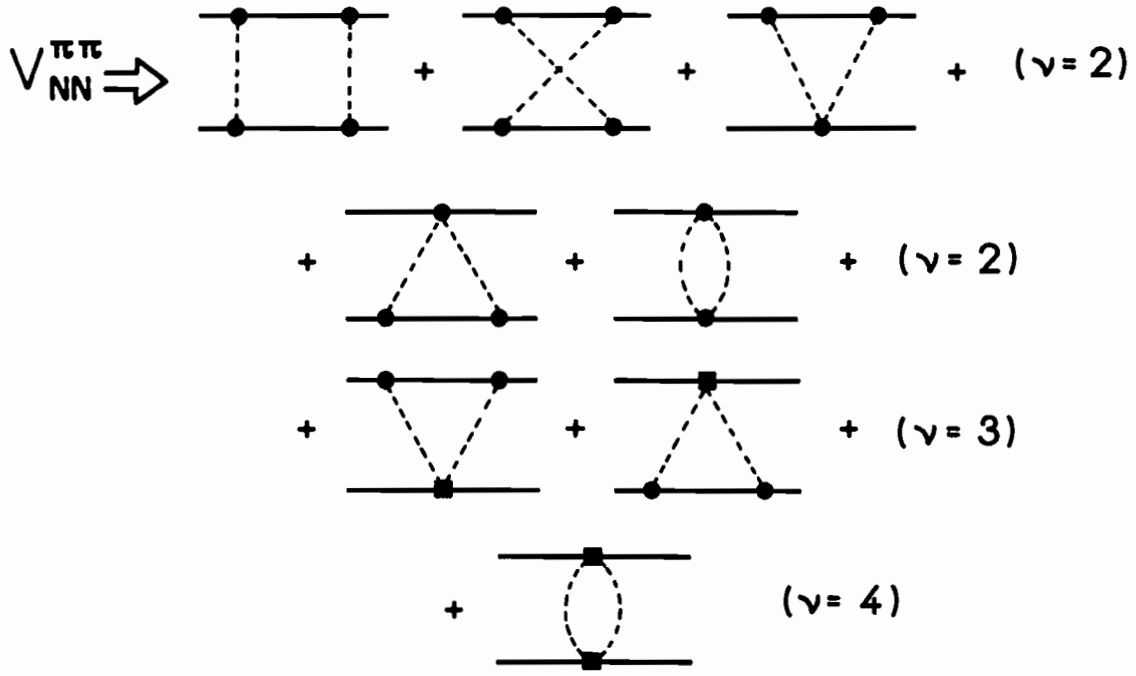


Figura 4.9: *Diagramas que contribuem para o cálculo do $V_{NN}^{\pi\pi}$, que serão considerados nesse trabalho.*

Em trabalho recente, Weinberg [*Wei 91*] considera o mesmo problema, partindo porém de uma Lagrangiana não-relativística, derivada da expressão 3.119. Utilizando a técnica da contagem de potências do momento, Weinberg enumera os diagramas que contribuem para a interação NN, e os resultados são, essencialmente, os expostos acima.[7]

[7] O cálculo de segunda ordem para essa Lagrangiana não-relativística está sendo feito atualmente por C. Ordóñez e U. van Kolck, em colaboração com S. Weinberg.

Capítulo 5

Definição do Potencial NN

Neste capítulo, apresentamos o método de obtenção do potencial NN a partir da amplitude de espalhamento invariante e relativística $\mathcal{M}$, dada pela equação de Bethe-Salpeter. Inicialmente, discutimos o conceito de potencial, introduzimos a notação covariante, a cinemática relativística para o espalhamento de duas partículas e apresentamos a equação de Bethe-Salpeter, mostrando como reduzí-la a uma equação tridimensional, através da prescrição de Blanckenbecler-Sugar. Em seguida, mostramos como se obtém o potencial através da relação entre a matriz $\mathcal{T}$, relativística e covariante, usada na equação de Bethe-Salpeter, e a matriz T, não-relativística, usada na equação de Lippmann-Schwinger. Finalizamos o capítulo, discutindo o significado de cada termo do potencial obtido para a troca de dois píons, em termos dos diagramas de Feynman.

5.1 Potencial e relatividade

É um fato bem estabelecido que efeitos relativísticos devem ser levados em consideração na interação NN, mesmo em energias baixas [*Erk 74* , *BJ 76*]. Isso se deve à repulsão de curto alcance, que força a função de onda do sistema NN no estado **S** a mudar rapidamente para distâncias menores que ≈ 0.5 fm, gerando componentes importantes de alto momento em todas as energias de espalhamento. Além disso, efeitos relativísticos aparecem quando subtrairmos a troca de um píon <u>iterada</u> da amplitude de dois píons, conforme veremos nesse capítulo.

Em geral, a representação da interação NN na forma de um potencial é complicada na região relativística, devido a dependências de velocidade e não-localidades. No caso de energias baixas e intermediárias, por outro lado, potenciais úteis podem ser obtidos.

A questão do domínio de validade da representação da interação por meio de um potencial tem sido discutida extensivamente na literatura [*FL 64* , *Kle 58* , *HM 62* , *CF 60* , *CT 60* , *PL 70* , *BJ 76* , *MHE 87*]. Essa questão tem dois aspectos relacionados. O primeiro diz respeito à aproximações usadas para se obter informação a partir da teoria de campos. O segundo trata da redução dessa informação a um potencial. Nesta seção concentramo-nos apenas no primeiro aspecto, e o segundo será discutido posteriormente.

Existem vários métodos de se derivar um potencial a partir de teoria de campos [*Sup 56* , *Sup 67* , *Kle 58* , *CF 60* , *CT 60* , *PL 70*]. A idéia básica dessas abordagens é a definição de um potencial que, quando usado na equação de Schrödinger, gere a amplitude derivada da teoria de campos, em uma ordem pré-definida de aproximação. Neste trabalho empregamos o método de Partovi e Lomon [*PL 70*], que chamaremos de PL, baseado no uso da teoria de perturbação covariante e na equação de Bethe-Salpeter [*SB 51*], denotada por BS.[1]

Alguns outros métodos de obtenção do potencial não produzem resultados satisfatórios,[2] pois utilizam a teoria de perturbação ordenada temporalmente, escolhendo mais ou menos arbitrariamente um subconjunto de diagramas e quebrando a covariância relativística. No passado, essa escolha era feita de modo a eliminar os diagramas com estados intermediários de energia negativa (pair suppression), que forneciam valores altos para o comprimento de espalhamento píon-nucleon. Essa eliminação arbitrária também acontecia quando se utilizava a aproximação de tempos iguais na equação de Bethe-Salpeter [*AG 54*]. Numa perspectiva atual, a falha desses métodos se deve à não implementação da simetria quiral na interação πN, que entra indiretamente no cálculo.

Um outro problema encontrado em cálculos do potencial NN está relacionado ao uso da chamada "aproximação estática", que pode ser evitada quando usamos a equação de BS. Essa aproximação consiste essencialmente em se anular a razão entre as massas do píon e do nucleon, *antes* de se efetuar o cálculo da interação, o que leva a sérios erros, conforme notado em [*HM 62* , *CF 60* , *CT 60* , *Gup 60*]. Essencialmente, esses erros ocorrem quando se calculam os diagramas da troca de dois píons e a iteração do OPEP, que envolvem um loop. O cálculo desse loop requer uma integração sobre todo o intervalo de momentos possível, o que é contraditório com a aproximação estática, que restringe esse intervalo. De fato, a contribuição dos termos de alto momento para a iteração do

[1] É importante enfatizar que usaremos o <u>método</u> de PL para obter um potencial com conteúdo dinâmico diferente, baseado na simetria quiral.

[2] Esses métodos são aqueles descritos no capítulo 2, que deram origem aos primeiros potenciais de troca de dois píons nos anos 50, conhecidos pelos nomes de BW e TMO.

OPEP é importante na região de alcance intermediário (1 fm < r < 2 fm), fazendo com que a aproximação estática seja imprecisa.

Um ponto positivo do trabalho de PL é que não é feita nenhuma aproximação durante o cálculo do potencial a partir da teoria de campos. Assim, a amplitude obtida no espaço dos momentos para a interação devida à troca de dois píons é totalmente relativística e covariante. Essa amplitude, entretanto, é não-local e dependente da energia. Por isso, aproximações são efetuadas posteriormente, quando se deseja passar para o espaço de configuração, a fim de se obter um potencial local, independente da energia, e que possa ser usado na equação de Schrödinger.

5.2 Relações cinemáticas

Consideremos o processo de espalhamento $N^{t_1}_{s_1}(p_1)N^{t_2}_{s_2}(p_2) \rightarrow N^{t'_1}_{s'_1}(p'_1)N^{t'_2}_{s'_2}(p'_2)$, descrito na figura 5.1. O quadrimomento total é conservado no processo, $p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$, e

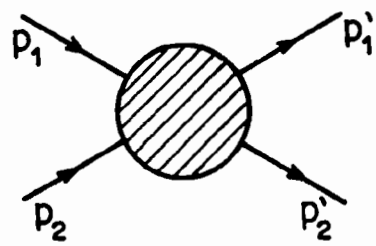


Figura 5.1: *Diagrama genérico do espalhamento de dois corpos.*

todas as partículas estão na camada de massa, o que fornece, para nucleons idênticos, $p_1^2 = p_2^2 = p_1'^2 = p_2'^2 = m^2$. A conservação do quadrimomento e a condição de camada de massa fazem com que existam apenas duas combinações independentes de produtos escalares de Lorentz. Existem vários modos de se definir essas variáveis, sendo a mais conhecida a proposta por Mandelstam:

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2 , \tag{5.1}$$

$$t \equiv (p'_1 - p_1)^2 = (p'_2 - p_2)^2 , \tag{5.2}$$

$$u \equiv (p'_1 - p_2)^2 = (p'_2 - p_1)^2 . \tag{5.3}$$

Essas variáveis satisfazem a seguinte relação de vínculo

$$s + t + u = 4m^2, \tag{5.4}$$

o que implica na existência de apenas dois invariantes independentes, que são os análogos da energia e do ângulo de espalhamento das colisões não-relativísticas. Em alguns casos, utiliza-se também a variável ν, definida por

$$\nu = \frac{(s-u)}{4m} = \frac{(p_1' + p_1)\cdot(p_2' + p_2)}{4m}\,. \tag{5.5}$$

No estudo da equação de Bethe-Salpeter costuma-se empregar o seguinte conjunto de variáveis

$$W = p_1 + p_2 = p_1' + p_2'\,, \tag{5.6}$$

$$q = \frac{p_1 - p_2}{2}\,, \tag{5.7}$$

$$q' = \frac{p_1' - p_2'}{2}\,. \tag{5.8}$$

As seguintes combinações também são utilizadas

$$Q \equiv \frac{q' + q}{2} \qquad \text{e} \qquad \Delta \equiv (q' - q) \tag{5.9}$$

com as relações inversas

$$q' = Q + \frac{\Delta}{2} \qquad \text{e} \qquad q = Q - \frac{\Delta}{2} \tag{5.10}$$

Essas grandezas estão relacionadas às variáveis originais por

$$p_1 = \frac{W}{2} + Q - \frac{\Delta}{2}, \tag{5.11}$$

$$p_2 = \frac{W}{2} - Q + \frac{\Delta}{2}, \tag{5.12}$$

$$p_1' = \frac{W}{2} + Q + \frac{\Delta}{2} \tag{5.13}$$

$$p_2' = \frac{W}{2} - Q - \frac{\Delta}{2} \tag{5.14}$$

O fato dessas variáveis estarem na camada de massa leva às seguintes condições

$$W \cdot q = W \cdot q' = 0, \tag{5.15}$$

$$W \cdot Q = W \cdot \Delta = Q \cdot \Delta = 0, \tag{5.16}$$

$$-\frac{p_1 \cdot \Delta}{\Delta^2} = \frac{p_2 \cdot \Delta}{\Delta^2} = \frac{p_1' \cdot \Delta}{\Delta^2} = -\frac{p_2' \cdot \Delta}{\Delta^2} = \frac{1}{2}. \tag{5.17}$$

As variáveis de Mandelstam, por outro lado, podem ser expressas por

$$s = W^2 \tag{5.18}$$

$$t = \Delta^2 \tag{5.19}$$

$$u = 4Q^2. \tag{5.20}$$

Nesse caso, o vínculo da equação 5.4 passa a ser

$$W^2 + \Delta^2 + 4Q^2 = 4m^2. \tag{5.21}$$

O nosso cálculo do potencial NN é feito no referencial de centro de massa das partículas interagentes, que pode ser visualizado na figura 5.2. Nesse referencial, os quadrimomentos

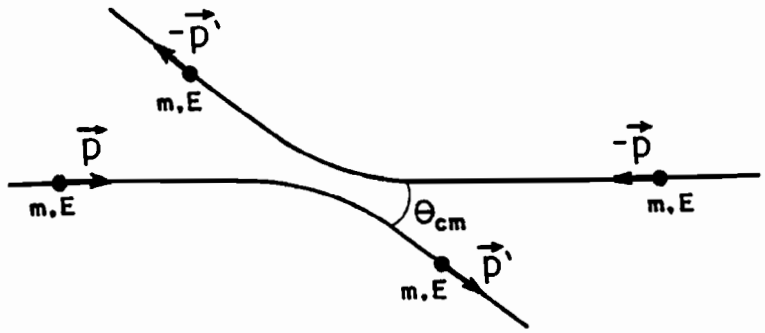


Figura 5.2: *Choque de duas partículas de mesma massa no referencial cm. Na figura, θ_{cm} é o ângulo de espalhamento no cm.*

são dados por

$$p_1 = (E, \mathbf{p}), \qquad p_2 = (E, -\mathbf{p}), \qquad p_1' = (E, \mathbf{p}'), \qquad p_2' = (E, -\mathbf{p}'), \tag{5.22}$$

As variáveis de BS, equações 5.6, 5.7 e 5.8 nesse referencial ficam

$$W = p_1 + p_2 = (2E, 0), \tag{5.23}$$

$$q = \frac{p_1 - p_2}{2} = (0, \mathbf{p}), \tag{5.24}$$

$$q' = \frac{p_1' - p_2'}{2} = (0, \mathbf{p}') . \tag{5.25}$$

No centro de massa, os invariantes de Mandelstam, dados nas equações 5.1, 5.2 e 5.3 e redefinidos nas equações 5.18, 5.19 e 5.20, adquirem a forma

$$W = p_1 + p_2 = p_1' + p_2' = (2E, 0) \quad \longrightarrow \quad W^2 = s = (4E^2, 0), \tag{5.26}$$

$$Q = \frac{q' + q}{2} = (0, \frac{\mathbf{p}' + \mathbf{p}}{2}) \quad \longrightarrow \quad Q^2 = \frac{u}{4} = -\frac{\mathbf{p}^2}{2}(1 + \cos\theta), \tag{5.27}$$

$$\Delta = q' - q = (0, \mathbf{p}' - \mathbf{p}) \quad \longrightarrow \quad \Delta^2 = t = -2\mathbf{p}^2(1 - \cos\theta), \tag{5.28}$$

onde foi usado o fato de que o módulo do trimomento se conserva, ou seja, $\mid \mathbf{p} \mid = \mid \mathbf{p}' \mid$. O invariante s corresponde ao quadrado da energia total do cm; o invariante t corresponde ao quadrado do trimomento transferido (onde $\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}} = \cos\theta$); e u é o quadrado do momento transferido cruzado, que pode ser eliminado em favor de s $(\mathbf{p}^2)$ e t (θ), através da equação de vínculo 5.4.

5.3 Amplitudes

Os elementos covariantes[3] da matriz S são dados por[4]

$$S_{fi} = < f \mid S \mid i >, \tag{5.29}$$

e possuem a seguinte relação com a matriz de transição $\mathcal{T}$

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i\delta^4 (W_f - W_i) \mathcal{T}_{fi}, \tag{5.30}$$

onde $\delta^4 = (2\pi)^4 \delta^4$, W_f e W_i são os quadrimomentos totais do canal de entrada e de saída. A expressão 5.30 define $\mathcal{T}_{fi}$, os elementos covariantes da matriz $\mathcal{T}$, que são escalares de

[3]Esta seção é baseada no livro de M.D. Scadron, [*Sca 79*].

[4]Usaremos letras caligráficas maiúsculas para as grandezas relativísticas covariantes e letras comuns, maiúsculas e minúsculas, para as grandezas não-relativísticas. Uma exceção será a matriz S, que apesar de ser covariante e relativística, será descrita pela letra S devido ao uso generalizado.

Lorentz e funções dos quadrimomentos, spins e isospins das partículas espalhadas, isto é, $\mathcal{T}_{fi} = \mathcal{T}^{t_1' t_2' t_1 t_2}_{s_1' s_2' s_1 s_2}(\mathbf{q}', \mathbf{q} \mid W)$. Para simplificar a notação, escreveremos a dependência explícita de $\mathcal{T}_{fi}$ apenas onde for necessário. As regras de Feynman para a obtenção de $\mathcal{T}_{fi}$ foram descritas no capítulo 4 e um resumo encontra-se na página 67. O termo δ_{fi} representa a condição de estados inicial e final iguais e não contribui para um processo de espalhamento real.

No sistema natural de unidades, onde $\hbar = c = 1$, cada estado tem dimensão M^{-1}, consistente com a normalização covariante[5] $< \mathbf{p}' \mid \mathbf{p} >= 2E\bar{\delta}^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$, onde M indica uma dimensão de massa genérica. Assim, para uma reação envolvendo n partículas, temos

$$\dim[S_{fi}] = M^{-n}; \qquad \dim[\mathcal{T}_{fi}] = M^{4-n}. \tag{5.31}$$

Particularmente, para o processo de espalhamento NN, $n = 4$ e então $\dim[S_{fi}] = M^4$ e a matriz $\mathcal{T}$ é adimensional.

Para o espalhamento NN elástico e relativístico, a seção de choque diferencial no referencial cm é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{cm}} = \left| \frac{\mathcal{T}_{fi}}{8\pi W} \right|^2 . \tag{5.32}$$

Neste trabalho vamos considerar apenas reações elásticas, o que restringe a energia cinética no laboratório a valores menores que 280 MeV. Nesse regime vale a condição de unitariedade elástica relativística para $\mathcal{T}$, obtida a partir da matriz S e da relação 5.30. Tomando $S^\dagger S = 1$ entre estados normalizados covariantemente, obtemos

$$-i[\mathcal{T}_{fi} - \mathcal{T}^*_{if}] = \sum_n \int d\rho_n \mathcal{T}^*_{nf} \mathcal{T}_{ni} \tag{5.33}$$

onde a soma é sobre todas as partículas que podem estar presentes no estado intermediário e $d\rho_n$ é o fator de espaço de fase covariante para n corpos. No caso elástico temos

$$d\rho_2 = \bar{\delta}^4 (W - \bar{p}_1 - \bar{p}_2) \frac{\bar{d}^3 \bar{p}_1}{2\bar{E}_1} \frac{\bar{d}^3 \bar{p}_2}{2\bar{E}_2} \tag{5.34}$$

onde $\bar{d}^3 = \frac{\mathrm{d}^3}{(2\pi)^3}$, e $\bar{p}_i$ são os quadrimomentos das partículas presentes no estado intermediário. Usando a invariância por reversão temporal e paridade, o lado direito da equação 5.34 pode ser convertido na parte imaginária da amplitude de espalhamento,

$$\mathrm{Im}\, \mathcal{T}_{fi} = \frac{1}{2} \sum_n \int d\rho_2 \mathcal{T}^*_{nf} \mathcal{T}_{ni} . \tag{5.35}$$

[5]Notar que $\delta^3(\mathbf{p})$ tem dimensão de M^{-3} devido à relação $\int \mathrm{d}^3\mathbf{p}\, \delta^3(\mathbf{p}) = 1$; para mais detalhes sobre a normalização covariante, vide apêndice A.

No sistema de centro de massa, juntando 5.34 e 5.35, e explicitando a dependência dos momentos, obtemos

$$i[\mathcal{T}^\dagger(\mathbf{q}',\mathbf{q} \mid W) - \mathcal{T}(\mathbf{q}',\mathbf{q} \mid W)] = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}^3\mathbf{z}\, \mathcal{T}^\dagger(\mathbf{q}',\mathbf{z} \mid W)\frac{\delta(2E_\mathbf{z} - 2E)}{4E_\mathbf{z}^2}\mathcal{T}(\mathbf{z},\mathbf{q} \mid W). \tag{5.36}$$

onde

$$z = \frac{1}{2}(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \tag{5.37}$$

é o momento relativo no canal intermediário. A expressão 5.36 é conhecida como "condição de unitariedade elástica". Um caso particular importante dessa expressão é obtido quando estudamos o espalhamento frontal, ou seja $i = f$. Nesse caso a parte imaginária da amplitude pode ser relacionada com a seção de choque, levando ao teorema ótico

$$\langle Im\{\mathcal{T}_{ii}\}\rangle = \langle Im\mathcal{T}(\mathbf{q},\mathbf{q} \mid W)\rangle = 4 \mid \mathbf{p} \mid E\ \sigma_{tot} \tag{5.38}$$

onde $\langle\ \rangle$ indica a somatória nos spins inicial e final e a média nos spins iniciais.

Para a definição do potencial é necessária uma ligação entre os mundos relativístico e não-relativístico, que pode ser obtida através de algum observável comum, como por exemplo, a seção de choque.

Na mecânica quântica não-relativística, a matriz análoga à matriz $\mathcal{T}$ é T, que se relaciona com a matriz S pela expressão

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i\delta(E_f - E_i)T_{fi}\ , \tag{5.39}$$

e obedece a equação integral de espalhamento de Lippmann-Schwinger (LS)

$$T_{fi}(\mathbf{q}',\mathbf{q} \mid W) = V_{fi}(\mathbf{q}',\mathbf{q} \mid W) + \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{z}}{(2\pi)^3} V_{fi}(\mathbf{q},\mathbf{z} \mid W)\frac{m}{\mathbf{q}^2 - \mathbf{z}^2 + i\epsilon}T_{fi}(\mathbf{z},\mathbf{q} \mid W)\ , \tag{5.40}$$

onde os estados não-relativísticos são normalizados por $< \mathbf{p}' \mid \mathbf{p} >= \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$.

A unitariedade da matriz T é obtida a partir da matriz S e da matriz de reação R. Como $S^\dagger S = 1$ e $S = 1 + R$, temos

$$R + R^\dagger = -R^\dagger R\ . \tag{5.41}$$

Para processos onde a energia se conserva, sabemos que $R_{fi} = -i\delta(E_{fi})T_{fi}$, de modo que 5.41 se torna equivalente à

$$i[T_{fi} - T_{if}^*] = \sum_n \int d\phi_2 T_{nf}^* T_{ni} \tag{5.42}$$

onde

$$d\phi_2 = \delta^4(W - \bar{p}_1 - \bar{p}_2)đ^3\bar{p}_1 đ^3\bar{p}_2 \tag{5.43}$$

Assim, condição de unitariedade elástica para T é dada por

$$i[T(\mathbf{q}',\mathbf{q} \mid W) - T^\dagger(\mathbf{q}',\mathbf{q} \mid W)] = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}^3\mathbf{z}\, T^\dagger(\mathbf{q}',\mathbf{z} \mid W)\delta\left(\frac{\mathbf{z}^2}{m} - \frac{\mathbf{p}^2}{m}\right) T(\mathbf{z},\mathbf{p} \mid W)\,. \tag{5.44}$$

No caso do espalhamento NN, a matriz T pode ser relacionada à amplitude de transição relativística $f(\mathbf{q}',\mathbf{q})$, cujo quadrado é a seção de choque

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{q}',\mathbf{q})|^2\ , \tag{5.45}$$

pela expressão

$$f(\mathbf{q}',\mathbf{q}) = -\frac{m}{4\pi} < \mathbf{q}' \mid T \mid \mathbf{q} >\ , \tag{5.46}$$

Comparando 5.45 e 5.46, podemos exprimir a seção de choque diferencial em termos da matriz T

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{16\pi^2}|< \mathbf{q}' \mid T \mid \mathbf{q} >|^2 = \frac{m^2}{16\pi^2}|T_{fi}|^2\ . \tag{5.47}$$

Assim, podemos relacionar a amplitude de transição relativística $\mathcal{T}$ com a matriz T comparando 5.32 com 5.47

$$\begin{aligned} |T_{fi}|^2 &= \frac{1}{16E^2m^2}|\mathcal{T}_{fi}|^2\ , \\ T_{fi} &= -\frac{1}{4Em}\mathcal{T}_{fi}\ , \end{aligned} \tag{5.48}$$

que vale apenas na camada de massa, e o sinal negativo aparece devido às relações envolvendo a matriz S, equações 5.30 e 5.39. Essa comparação é importante pois na equação de Lippmann-Schwinger temos a presença do operador potencial V. No mundo relativístico, a equação análoga à de LS é a de Bethe-Salpeter.

5.4 A equação de Bethe-Salpeter

A abordagem covariante da interação de dois nucleons na teoria quântica de campos é feita no contexto da equação de ~~de~~ Bethe-Salpeter (BS), que pode ser considerada uma generalização relativística da equação de Lippmann-Schwinger.

Bethe e Salpeter mostraram [*SB 51*], utilizando os diagramas de Feynman, que a amplitude relativística $\mathcal{M}$ para o espalhamento elástico de dois nucleons, em um estado

inicial de momento total W e momento relativo q para um estado final de momento relativo q', é dada pelas soluções da seguinte equação integral covariante [6]

$$\mathcal{M}(q',q \mid W) = \mathcal{K}(q',q \mid W) + \int \frac{d^4z}{(2\pi)^4} \mathcal{K}(q',z \mid W)\,\mathcal{G}(z \mid W)\,\mathcal{M}(z,q \mid W), \tag{5.49}$$

onde $\mathcal{M}$ é a amplitude invariante, W, q, q' e z são dados pelas equações 5.6, 5.7, 5.8 e 5.37; $\mathcal{K}$ é o núcleo de interação ("kernel"), que consiste de todos os diagramas irredutíveis em dois nucleons[7] e $\mathcal{G}$ é a função de Green livre para dois férmions

$$\mathcal{G}(z \mid W) = \left[\frac{\frac{1}{2}\not{W} + \not{z} + m}{\left(\frac{1}{2}W + z\right)^2 - m^2 + i\epsilon}\right]^{(1)} \times \left[\frac{\frac{1}{2}\not{W} - \not{z} + m}{\left(\frac{1}{2}W - z\right)^2 - m^2 + i\epsilon}\right]^{(2)} \tag{5.50}$$

onde o corte $\not{a}$ indica a contração de a com as matrizes de Dirac, e os índices (1) e (2) referem-se aos dois nucleons. Simbolicamente, a equação de BS pode ser escrita como

$$\mathcal{M} = \mathcal{K} + \mathcal{K}\mathcal{G}\mathcal{M} \tag{5.51}$$

e a sua representação diagramática é dada na figura 5.3

A equação de BS é muito difícil de ser resolvida exatamente, pois o núcleo $\mathcal{K}$ não é dado por uma expressão fechada. Por isso, uma aproximação bastante usada é a chamada "aproximação de escada", que é implementada considerando-se apenas a contribuição da troca de um bóson para $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K} = \mathcal{K}^{(2)}$). Mesmo nessa aproximação, a complexidade da equação, para partículas de spin 1/2, é muito grande, conforme pode ser visto nos trabalhos de Tjon e colaboradores [*FT 75* , *FT 77* , *FT 80* , *ZT 81*]. Assim, é muito conveniente buscar uma simplificação para o problema, pelo menos para a região de baixas energias. Um possível esquema consiste na chamada "abordagem unitária" para a equação de BS, que gera uma equação tridimensional e covariante, cuja amplitude satisfaz a condição relativística de unitariedade elástica [*BJ 76*].

Para se entender a idéia básica da abordagem unitária, consideremos a função de Green dada na equação 5.50. Uma característica de $\mathcal{G}$ é a de produzir estados intermediários com contribuições de energias negativas. Entretanto, para espalhamentos em

[6] A dedução por meio da teoria de campos da equação de BS foi estabelecida primeiramente por Gell-Mann e Low [*GL 51*]. Schwinger [*Sch 51*], derivou-a independentemente usando o formalismo das derivadas funcionais e, posteriormente, Mandelstam [*Man 55*] obteve a mesma equação utilizando a teoria de funções analíticas.

[7] Por diagramas irredutíveis em dois nucleons entendemos aqueles que não podem ser separados em dois pedaços cortando apenas duas linhas nucleônicas.

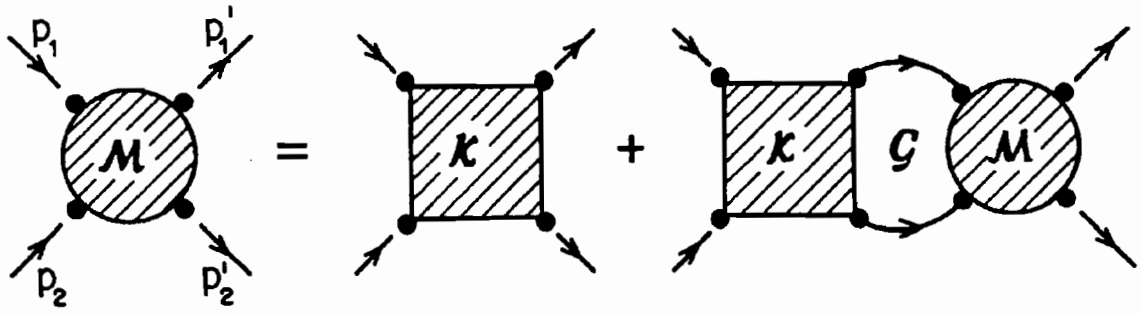


Figura 5.3: *Representação diagramática da equação de BS. As flechas indicam o sentido do fluxo do momento.*

energias baixas, esperamos que os nucleons dos estados intermediários permaneçam energeticamente próximos da camada de massa e, consequentemente, que as contribuições de energias negativas sejam muito pequenas. Portanto, para energias abaixo do limite de produção de píons, é proposta uma substituição de $\mathcal{G}$ pela função de Green de duas partículas g, que pode produzir cortes de duas partículas apenas na região física.[8]

É interessante notar que, essa abordagem unitária para a equação de BS não é única.[9] Nesse trabalho, utilizaremos a escolha de Blanckenbecler-Sugar (BbS) que, segundo os trabalhos de Tjon citados anteriormente, é a que fornece resultados mais próximos dos valores obtidos para a equação de BS sem aproximação.

5.5 Obtenção do potencial

Apresentamos aqui o modo de se obter o potencial a partir da equação de BS, e sua interpretação em termos dos diagramas de Feynman.

Segundo BbS [*BS 66*], a construção do propagador g, associado à propagação de nucleons de energia positiva deve ser feita da seguinte maneira:[10] primeiro, impomos que $\mathcal{G}$ e g tenham a mesma parte imaginária, o que garante a mesma estrutura analítica na

[8]Ou seja, o propagador possui polos apenas para energias positivas.

[9]Existem, em princípio, infinitas formas de se efetuar essa redução. Um estudo bastante completo dessas escolhas para g pode ser encontrado em [*BJ 76*], páginas 97-103.

[10]A construção do propagador g segundo BbS, pode ser encontrada, com muitos detalhes matemáticos, no trabalho de Brockmann e Machleidt [*BM 90*], no apêndice A, página 1973.

região física. Feito isso, construimos g a partir de sua parte imaginária, através de uma relação de dispersão, que no caso de BbS é dada por

$$\begin{aligned} g(z,W) &= -2\pi i \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'-s-i\epsilon} \left\{\frac{1}{2}\not{W}'+\not{z}+m\right\}^{(1)} \left\{\frac{1}{2}\not{W}'-\not{z}+m\right\}^{(2)} \times \\ &\times \delta^{(+)}\left[\left(\frac{1}{2}W'+z\right)^2-m^2\right]\delta^{(+)}\left[\left(\frac{1}{2}W'-z\right)^2-m^2\right] \end{aligned} \tag{5.52}$$

onde, $s = W^2$ e $\delta^{(+)}$ indica que apenas a raiz positiva da energia deve ser incluida no argumento da função delta, o que elimina a possibilidade de antipartículas. Assim, o propagador g possui a mesma descontinuidade que $\mathcal{G}$ na região física, preservando a relação de unitariedade satisfeita por $\mathcal{M}$. Essa é a prescrição de PL para generalizar o trabalho de BbS, que originalmente não incluia o spin. A integral 5.52 pode ser calculada analiticamente e fornece

$$g(z \mid W) = -2\pi i \frac{(\gamma^0 E_{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{z}+m)^{(1)}(\gamma^0 E_{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{z}+m)^{(2)}}{4E_{\mathbf{z}}\left(\frac{1}{4}W^2 - E_{\mathbf{z}}^2 + i\epsilon\right)}\,\delta(z_0) \tag{5.53}$$

onde[11] os termos entre parêntesis no numerador são proporcionais aos operadores de projeção de energia positiva, Λ_+, definidos por

$$\Lambda_+^{(i)}(\mathbf{z}) = \left[\frac{\gamma^0 E_{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{z}+m}{2m}\right]^{(i)} = \frac{1}{2m}\sum_r \mathrm{u}_r(\mathbf{z})\bar{\mathrm{u}}_r(\mathbf{z}) \tag{5.54}$$

onde i é o índice do nucleon ($i = 1,2$), $\mathbf{z}$ é o trimomento da partícula, $\mathrm{u}_r(\mathbf{z})$ é o espinor de Dirac de energia positiva com trimomento $\mathbf{z}$ e spin r; $E_{\mathbf{z}} = \sqrt{\mathbf{z}^2+m^2}$. A presença dos operadores de projeção implica na eliminação das contribuições de antinucleons nos estados intermediários.

O propagador g de BbS possui propriedades importantes. Ele contém o propagador de Schrödinger com a parte imaginária correta. Os operadores de projeção Λ_+ servem para reduzir a equação original para uma que contem apenas componentes de energia positiva, enquanto que a função $\delta(z_0)$ implementa a redução para uma equação tridimensional. O aparecimento do fator $E_{\mathbf{z}}$ está ligado à unitariedade, como veremos adiante. Finalmente, convém ressaltar que a função g não é única, pois podemos acrescentar a ela uma parte que se anule para $E_{\mathbf{z}} = \frac{1}{2}W$. A escolha de BbS feita aqui, incluindo $E_{\mathbf{z}}$ no denominador, tem como justificativa o fato de reduzir a amplitude relativística exatamente à amplitude de Lippmann-Schwinger.

[11] Note que $\delta^{(+)}\left[(\frac{1}{2}W'+z)^2-m^2\right]\delta^{(+)}\left[(\frac{1}{2}W'-z)^2-m^2\right] = \frac{1}{8}E_{\mathbf{z}}^2\delta(z_0)\delta\left(\frac{1}{2}W'-E_{\mathbf{z}}\right)$.

Seguindo o procedimento de Partovi e Lomon, escrevemos $\mathcal{G}$ como a soma de dois termos

$$\mathcal{G} = g + (\mathcal{G} - g). \tag{5.55}$$

Em seguida, escrevemos uma nova equação para $\mathcal{M}$, utilizando a notação simbólica de operadores

$$\mathcal{M} = \mathcal{U} + \mathcal{U} g \mathcal{M}, \tag{5.56}$$

onde $\mathcal{U}$ é um nucleo efetivo de interação, cuja conexão com $\mathcal{K}$ é encontrada comparando-se 5.49 com 5.56

$$\mathcal{U} = \mathcal{K} + \mathcal{K}(\mathcal{G} - g)\,\mathcal{U}. \tag{5.57}$$

Na equação 5.57, vemos que $\mathcal{U}$ é um núcleo criado a partir da iteração do núcleo $\mathcal{K}$ através do propagador $\mathcal{G} - g$. Como o corte de duas partículas, com limiar em $W = 2m$, é cancelado no propagador $\mathcal{G} - g$, espera-se que $\mathcal{U}$ dependa fracamente da energia perto do limiar. Deve-se ressaltar que nenhuma aproximação está envolvida nas equações 5.56 e 5.57. Se as recombinarmos, obteremos novamente a equação de BS, 5.51.

Retomando a dedução do potencial, reescrevemos a equação 5.56 de forma completa, utilizando a expressão 5.53 para o propagador g e 5.54 para o operador de projeção de energia positiva

$$\mathcal{M}(q', q \mid W) = \mathcal{U}(q', q \mid W) - 2\pi i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \mathcal{U}(q', z \mid W)$$

$$\times \quad \frac{[\mathrm{u}_r(\mathbf{z})\bar{\mathrm{u}}_r(\mathbf{z})]^{(1)}\,[\mathrm{u}_s(-\mathbf{z})\bar{\mathrm{u}}_s(-\mathbf{z})]^{(2)}}{4E_{\mathbf{z}}\,[\mathbf{p}^2 - \mathbf{z}^2 + i\epsilon]} \cdot \delta(z_0)\mathcal{M}(z, q \mid W) \tag{5.58}$$

Os elementos de matriz de $\mathcal{M}$ tomados entre os espinores de energia positiva são definidos como sendo a amplitude de espalhamento $\mathcal{T}$ multiplicada por i

$$i\mathcal{T} = \bar{\mathrm{u}}^{(1)}_{s_1'}(\mathbf{p}')\bar{\mathrm{u}}^{(2)}_{s_2'}(-\mathbf{p}')\mathcal{M}(\mathbf{q}', \mathbf{q} \mid W)\mathrm{u}^{(1)}_{s_1}(\mathbf{p})\mathrm{u}^{(2)}_{s_2}(-\mathbf{p})\,. \tag{5.59}$$

De modo análogo, definimos uma amplitude $i\mathcal{V}$ tomando os elementos de matriz do operador $\mathcal{U}$

$$i\mathcal{V} = \bar{\mathrm{u}}^{(1)}_{s_1'}(\mathbf{p}')\bar{\mathrm{u}}^{(2)}_{s_2'}(-\mathbf{p}')\mathcal{U}(\mathbf{q}', \mathbf{q} \mid W)\mathrm{u}^{(1)}_{s_1}(\mathbf{p})\mathrm{u}^{(2)}_{s_2}(-\mathbf{p})\,. \tag{5.60}$$

Assim, a equação 5.58 transforma-se em uma equação integral para $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T}(\mathbf{q}', \mathbf{q} \mid W) = \mathcal{V}(\mathbf{q}', \mathbf{q} \mid W) + \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{z}}{(2\pi)^3}\, \mathcal{V}(\mathbf{q}', \mathbf{z} \mid W) \frac{1}{\mathbf{p}^2 - \mathbf{z}^2 + i\epsilon}\, \frac{1}{4E_{\mathbf{z}}} \mathcal{T}(\mathbf{z}, \mathbf{q} \mid W), \tag{5.61}$$

onde os índices de spin e isospin foram suprimidos. O fator $E_{\mathbf{z}}$ no denominador, que aparece naturalmente, provém da expressão 5.53 e é necessário para compatibilizar as matrizes T e $\mathcal{T}$, de acordo com a equação 5.48. Quando os estados intermediários estão fora da camada de energia ($E_{\mathbf{z}} \neq \frac{W}{2}$), usamos uma generalização de equação 5.48:

$$T(\mathbf{z},\mathbf{q} \mid W) = -\sqrt{\frac{1}{4E_{\mathbf{z}}m}}\mathcal{T}(\mathbf{z},\mathbf{q} \mid W)\sqrt{\frac{1}{4E_{\mathbf{q}}m}}\,, \tag{5.62}$$

que é conhecida como "relatividade mínima" [*BJK 69* , *PL 70* , *BJ 76* , *Mac 89* , *BM 90*].

Substituindo 5.62 em 5.61, e comparando com a equação de Lippmann-Schwinger, expressão 5.40, relacionamos o núcleo de interação $\mathcal{V}$ ao potencial por uma expressão análoga a 5.62

$$V(\mathbf{z},\mathbf{q} \mid W) = -\sqrt{\frac{1}{4E_{\mathbf{z}}m}}\mathcal{V}(\mathbf{z},\mathbf{q} \mid W)\sqrt{\frac{1}{4E_{\mathbf{q}}m}}. \tag{5.63}$$

Assim, o potencial pode ser calculado a partir de $\mathcal{V}$ que, por sua vez é obtido por meio de 5.60 e 5.57.

A redução para a equação de LS depende crucialmente da maneira pela qual 5.48 é generalizada para 5.62. Enquanto que 5.48 é obtida de maneira única, através da seção de choque, a generalização para fora da camada de massa não é unívoca. O modo usual de se obter 5.62 é através da condição de unitariedade elástica. Segundo Brown, Kuo e Jackson [*BJK 69*], o requisito mínimo de relatividade que a amplitude T deve satisfazer para descrever processos relativísticos é obedecer a condição de unitariedade elástica relativística da amplitude $\mathcal{T}$, dada por 5.36. Aplicando a generalização dada em 5.62 na expressão relativística 5.36, obtemos a condição de unitariedade não-relativística 5.44. Essa consistência se deve ao fato de que $\mathcal{G}$ e g têm a mesma estrutura de corte de duas partículas na região física.

O potencial V é obtido perturbativamente a partir da solução da equação 5.63. As várias ordens do núcleo $\mathcal{U}$ podem ser escritas retomando-se a expressão 5.57

$$\mathcal{U}^{(2)} = \mathcal{K}^{(2)} \tag{5.64}$$

$$\mathcal{U}^{(4)} = \mathcal{K}^{(4)} + \mathcal{K}^{(2)}(\mathcal{G} - g)\mathcal{K}^{(2)}, \tag{5.65}$$

e assim por diante. Os índices referem-se à ordem da constante de acoplamento na expressão perturbativa. As equações 5.64 e 5.65 definem a estrutura dos diagramas de Feynman. O núcleo efetivo de interação $\mathcal{U}^{(2)}$ é o termo de mais baixa ordem na constante de acoplamento, e gera o potencial devido à troca de um píon, OPEP, cujo diagrama é

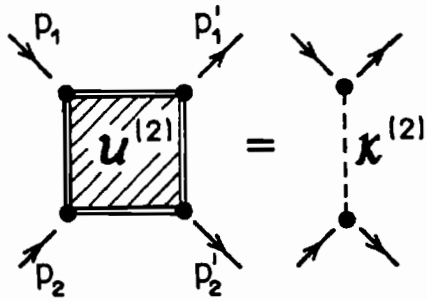


Figura 5.4: *Núcleo (kernel) efetivo de interação devido a troca de um píon* $\mathcal{U}^{(2)}$.

mostrado na figura 5.4. O potencial devido à troca de dois píons (TPEP) está associado ao núcleo de interação $U^{(4)}$, dado pela expressão 5.65, e pode ser representado como na figura 5.5. O kernel $\mathcal{K}^{(4)}$ representa o núcleo irredutível da troca de dois píons, que gera os

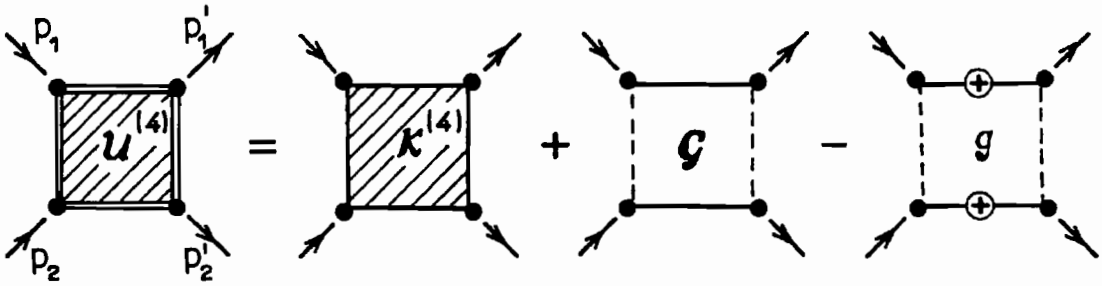


Figura 5.5: *Núcleo efetivo de interação* $\mathcal{U}^{(4)}$ *para a troca de dois píons.*

diagramas de Feynman mostrados nas figuras 4.9b-h. O termo $\mathcal{K}^{(2)}\mathcal{G}\mathcal{K}^{(2)}$ é representado pelo diagrama tipo caixa, dado na figura 4.9a, e $\mathcal{K}^{(2)}g\mathcal{K}^{(2)}$ é a iteração não-relativística da troca de um píon, que gera um diagrama semelhante ao tipo caixa, mas com propagadores de frequência positiva. Na expressão 5.65, a subtração $\mathcal{G} - g$ indica que a iteração não-relativística da troca de um píon deve ser eliminada se quisermos obter um potencial NN devido apenas à troca de dois píons, evitando problemas de dupla contagem.

A equação de Bethe-Salpeter por outro lado, é dada pela expressão 5.56, que pode ser associada ao diagrama da figura 5.6

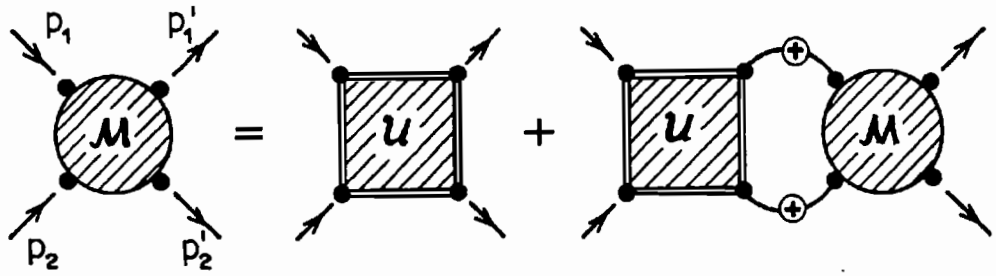


Figura 5.6: *Representação diagramática da equação de BS para o núcleo efetivo de interação $\mathcal{U}$.*

Usando as equações 5.64 e 5.65 em 5.56, obtemos

$$\mathcal{M} = \mathcal{K}^{(2)} + \mathcal{K}^{(4)} + \mathcal{K}^{(2)}(\mathcal{G} - g)\mathcal{K}^{(2)} + \left[\mathcal{K}^{(2)} + \mathcal{K}^{(4)} + \mathcal{K}^{(2)}(\mathcal{G} - g)\mathcal{K}^{(2)}\right] g\mathcal{M} \,, \qquad (5.66)$$

cuja representação gráfica é feita na figura 5.7

Para completar essa discussão, é conveniente situarmos o presente trabalho frente ao de outros autores. Adotamos aqui o método de definição do potencial proposto por Partovi e Lomon. Eles, entretanto, não se preocupam com a simetria quiral, pois usaram acoplamentos pseudoescalares para os vértices píon-nucleon. A justificativa deles para o uso desse acoplamento é o fato de que esse vértice gera uma teoria renormalizável. Porém, como já discutimos no Apêndice D, o uso desse tipo de acoplamento gera um comprimento de espalhamento πN muito grande, devido à presença dos estados de energia negativa, e incompatível com os resultados experimentais.[12] Nós implementamos a simetria quiral por meio de Lagrangianas não-lineares, e isso tem conseqüências para o kernel $\mathcal{K}^{(4)}$. Para PL, esse kernel é dado apenas pelo diagrama cruzado, figura 4.9b, enquanto que, no presente trabalho, ele é representado por um conjunto de diagramas, figura 4.9b-h, envolvendo todos os possíveis diagramas de troca de dois píons entre dois nucleons, *até um loop*. Como o termo de subtração da iteração $\mathcal{G} - g$ é bem semelhante ao trabalho de PL (a diferença está apenas no acoplamento πN), o potencial obtido no presente trabalho *engloba* o potencial de PL original. De fato, veremos no capítulo seguinte que parte do

[12]Posteriormente, Lomon e colaboradores introduziram o méson escalar σ no potencial, na tentativa de implementar a supressão de pares[*PL 72*]. Entretanto, um cálculo de defasagens para esse potencial não foi publicado até hoje.

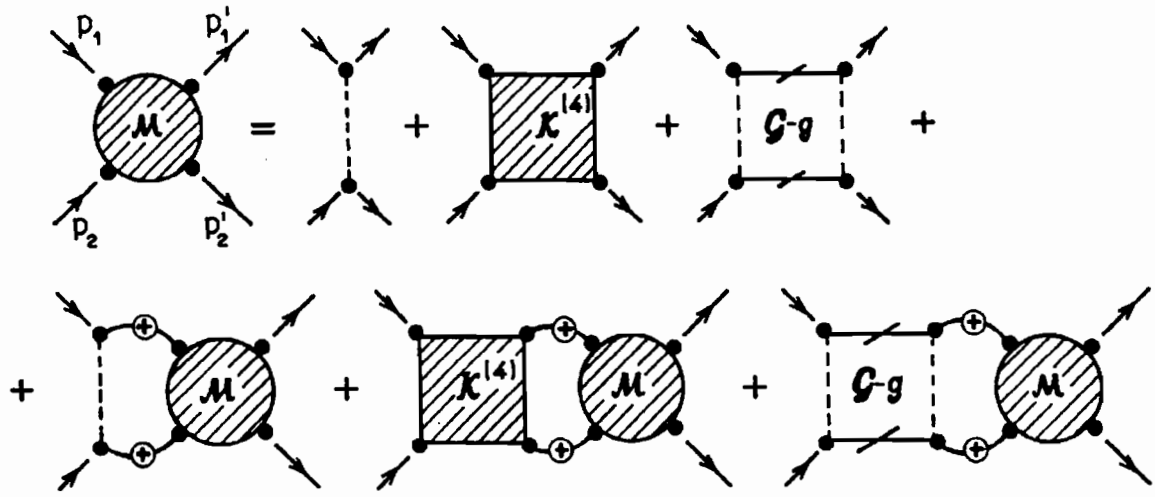


Figura 5.7: *Representação diagramática da equação de BS quando expandimos núcleo efetivo de interação em $\mathcal{U}$ em termos de 2 e 4 vértices.*

nosso potencial é o obtido por PL, e que os termos excedentes, ditados pela simetria quiral, contribuem para a parte central e spin-órbita do potencial no espaço de configuração.

O potencial de Bonn, por outro lado, utiliza a técnica de perturbação ordenada temporalmente para o cálculo dos diagramas de loop, deixando a covariância de lado. Apenas os diagramas de energia positiva são incluidos no potencial, com o critério básico de se procurar um ajuste fenomenológico das defasagens. Em sua última versão [*MHE 87*], há uma quantidade enorme de diagramas, alguns deles com massas efetivas trocadas da ordem de GeVs, o que já não reflete a realidade da troca de mésons, pois nessa região de curto alcance os efeitos devidos a quarks começam a dominar. Apesar do trabalho do grupo de Bonn ser excelente no aspecto quantitativo, no seu trabalho a simetria quiral também não foi considerada. Embora um méson σ esteja presente, ele é simplesmente um bóson a mais no potencial, sem o papel quiral de contrapartida do píon.

Na linha de estudo do TPEP derivado da teoria de campos, existe ainda o trabalho de Zuilhof e Tjon [*ZT 82*], que chamaremos de ZT. Este trabalho é semelhante ao de PL, sendo que as únicas diferenças estão na redução tridimensional da equação de BS, onde ZT permitem o aparecimento de energias negativas, e no acoplamento πN, que é pseudovetorial. Porém, como PL, ZT não se preocupam com o estudo da influência da simetria quiral no potencial, pois utilizam apenas o diagrama cruzado (figura 4.9b) para

o kernel $\mathcal{K}^{(4)}$, deixando de lado diagramas de mesma ordem em potências do momento.

Assim, apesar de nossos cálculos terem bastante em comum com os trabalhos de PL, Bonn e ZT, a motivação central desse trabalho é nova e é caracterizada pelo estudo da influência da simetria quiral no TPEP.

Terminamos esse capítulo estabelecendo o vínculo da subtração da iteração em 5.65 e os diagramas ordenados temporalmente. A figura 5.8, mostra o diagrama tipo caixa da troca de dois píons entre dois nucleons, onde os momentos $\bar{p}_1$ e $\bar{p}_2$ podem assumir quaisquer

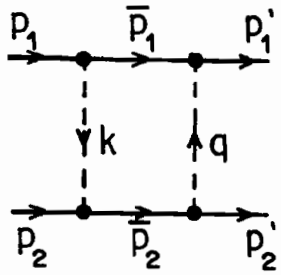


Figura 5.8: *Diagrama covariante mostrando a troca de dois píons entre dois nucleons. Esse diagrama contém todas as ordenações temporais possíveis.*

valores, pois o quadrimomento interno é integrado para todos os valores possíveis. Isso fornece estados de energia negativa, como já foi dito. Por outro lado, a aproximação de BbS consiste em colocar as duas "pernas" de $\mathcal{G}$ na camada de massa, para energias positivas ($\delta^{(+)}$ na equação 5.52). Assim, os dois píons trocados só carregam trimomento no referencial cm, correspondendo à repetição (iteração) da troca de um píon, conforme mostra a figura 5.9.

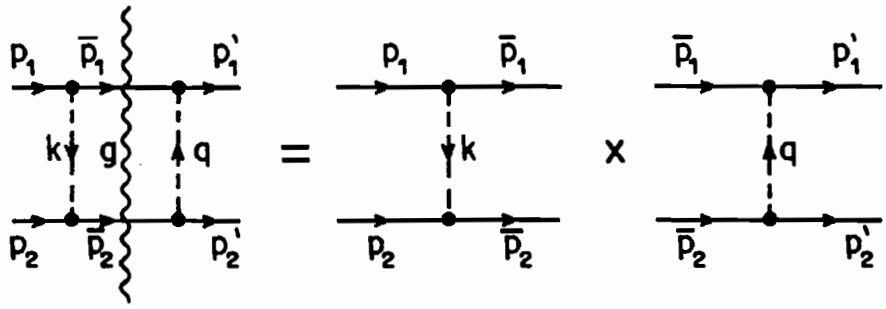


Figura 5.9: *Diagrama da troca de dois píons, onde o propagador relativístico $\mathcal{G}$ foi substituido pelo propagador não-relativístico g, o que permite que se corte o diagrama em duas partes iguais, transformando a troca de dois píons na troca de um píon repetida duas vezes.*

O píon de quadrimomento k sai do nucleon (1) e chega ao nucleon (2) e só depois é que o mesmo acontece com o píon de quadrimomento q. Os dois píons não estão "no ar" simultaneamente.

Em termos da antiga teoria de perturbação ordenada temporalmente, g pode ser entendido como sendo o responsável pela propagação dos nucleons nos diagramas cortáveis, iterando a troca de um píon. Esses diagramas são mostrados na figura 5.10.

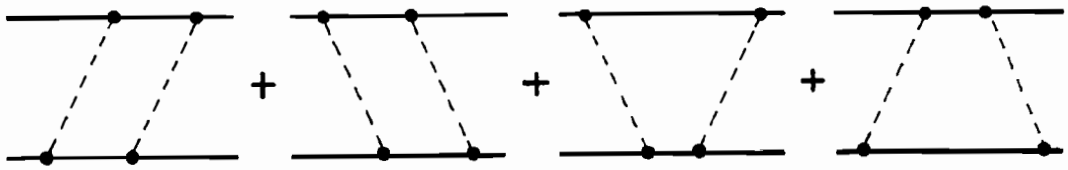


Figura 5.10: *Diagramas redutíveis ordenados temporalmente para a troca de dois píons entre dois nucleons.*

Por outro lado, os diagramas não-iterativos (não-cortáveis) representariam a troca genuína de dois píons entre dois nucleons, pois os dois píons estão simultaneamente "no ar", durante algum tempo. Tais diagramas são mostrados na figura 5.11.

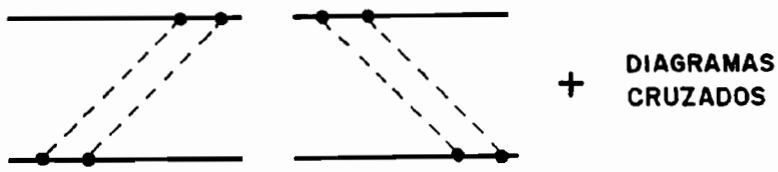


Figura 5.11: *Diagramas irredutíveis ordenados temporalmente para a troca de dois píons na interação NN. O TPEP pode ser obtido se somarmos os diagramas cruzados e de energia negativa nos estados intermediários, que não são mostrados aqui.*

Dessa forma, para o cálculo do TPEP, só podemos utilizar os diagramas da figura 5.11. Como trabalhamos com a linguagem covariante, $\mathcal{K}^{(2)}\mathcal{G}\mathcal{K}^{(2)}$ representa todos os diagramas ordenados temporalmente e $\mathcal{K}^{(2)}g\mathcal{K}^{(2)}$ só os diagramas cortáveis, que devem ser subtraidos. Logo, $\mathcal{K}^{(2)}(\mathcal{G}-g)\mathcal{K}^{(2)}$ representa uma troca de dois píons genuína, para o diagrama tipo caixa.

Capítulo 6

Potencial NN devido à troca de dois píons

Neste capítulo, calculamos o potencial NN devido à troca de dois píons (TPEP), a partir da amplitude invariante de Bethe-Salpeter, usando o formalismo definido no capítulo anterior. O potencial obtido, no espaço dos momentos, é relativístico, não-local e dependente da energia. Para que o potencial possa ser utilizado na equação de Schrödinger, efetuamos a redução não-relativística das amplitudes e sua transformada de Fourier. O potencial final no espaço de configuração é local e independente da energia. A obtenção do potencial segue a seguinte estratégia:

1. **Cálculo da amplitude**: para cada diagrama que contribui para o potencial, calcula-se a amplitude invariante $\mathcal{T}$ correspondente.

2. **Obtenção do potencial**: após subtrairmos a iteração do OPEP da amplitude total, obtemos um potencial não-local e dependente da energia no espaço dos momentos.

3. **Redução não-relativística do potencial**: como trabalharemos com energias até o limiar de produção de píons, são feitas aproximações nas expressões relativísticas, que produzem um potencial local e independente da energia no espaço dos momentos.

4. **Transformada de Fourier do potencial**: o potencial é transformado para o espaço das coordenadas, onde comparações com outros potenciais podem ser feitas.

Ao final do capítulo, com o intuito de realizarmos um ajuste semi-fenomenológico, apresentamos o potencial devido à troca de um píon (OPEP), que será somado ao TPEP

para efetuarmos comparações com potenciais realísticos.

6.1 Cálculo dos diagramas: representação integral

No item 4.1, apresentamos os vértices de interação píon-nucleon relevantes para o presente trabalho, que foram derivados da Lagrangiana quiral de Weinberg. Com esses vértices, construimos diagramas de interação NN que podem ser agrupados em ordem crescente de potências do momento, conforme discutido no item 4.3. Seguindo essa ordenação, construimos os diagramas relevantes para a troca de dois píons entre dois nucleons, até um loop, cuja soma representa o núcleo de interação efetivo $\mathcal{U}^{(4)}$, a partir do qual o TPEP pode ser obtido através da expressão

$$V^{(4)}_{s_1' s_2' s_1 s_2,\, t_1' t_2' t_1 t_2}(\mathbf{p}', \mathbf{p} \mid W) = -\sqrt{\frac{1}{4E_{\mathbf{p}'}\, m}}\, \eta^{\dagger(1)}_{t_1'} \eta^{\dagger(2)}_{t_2'} \bar{u}^{(1)}_{s_1'}(\mathbf{p}') \bar{u}^{(2)}_{s_2'}(-\mathbf{p}')$$

$$\times\ \mathcal{U}^{(4)}_{s_1' s_2' s_1 s_2,\, t_1' t_2' t_1 t_2}(\mathbf{p}', \mathbf{p}, \mid W) u^{(1)}_{s_1}(\mathbf{p}) u^{(2)}_{s_2}(-\mathbf{p}) \eta^{(1)}_{t_1} \eta^{(2)}_{t_2} \sqrt{\frac{1}{4E_{\mathbf{p}}\, m}} \tag{6.1}$$

onde $\mathcal{U}^{(4)}$ é dado pela expressão 5.65 e representado novamente na figura 6.1. Inicialmente, calculamos o valor esperado de $\mathcal{U}^{(4)}$ entre os estados do nucleon (matriz $\mathcal{T}$) e a multiplicação pelas raízes externas é feita posteriormente.

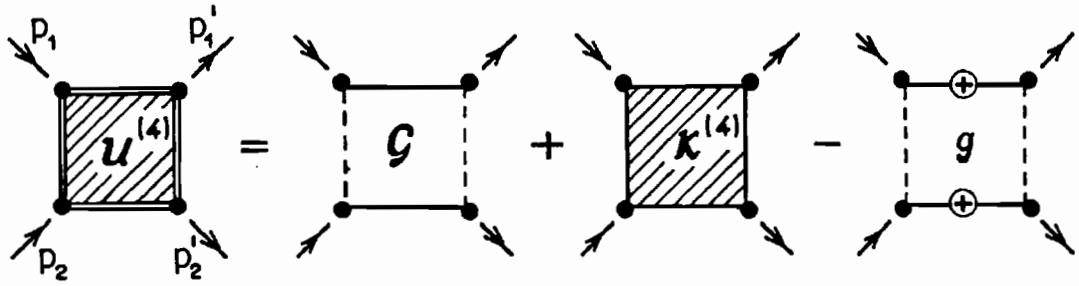


Figura 6.1: *Núcleo de interação $\mathcal{U}^{(4)}$ decomposto na soma das partes (a) redutível e (b) irredutível menos (c) a iteração da troca de um píon.*

Os diagramas que representam o sanduíche de $\mathcal{K}^{(4)}$, o núcleo irredutível de quarta ordem, entre spinores livres, são mostrados na figura 6.2.

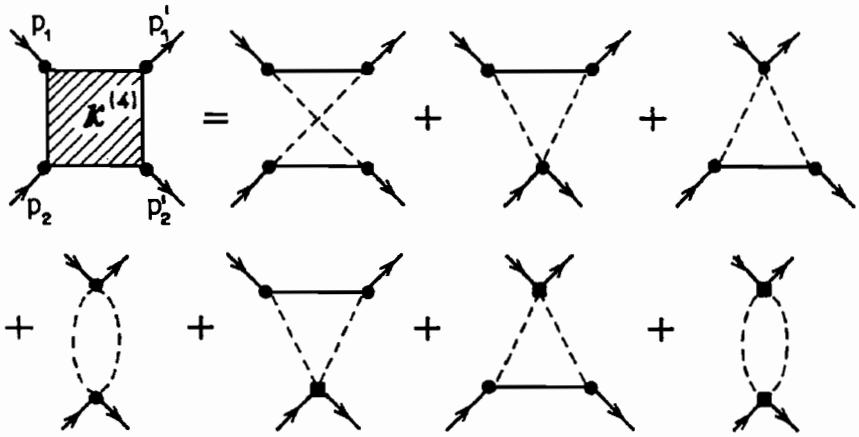


Figura 6.2: *Diagramas de troca de dois píons entre dois nucleons que representam o núcleo irredutível de interação* $\mathcal{K}^{(4)}$ *"sanduichado" entre spinores livres.*

Iniciaremos, agora, o cálculo dos diagramas de Feynman exibidos nas figuras 6.1 e 6.2 e, para cada um, obteremos a amplitude invariante $\mathcal{T}$, que será dada em uma representação integral, pois a presença do loop requer uma integração quadridimensional.

Diagrama tipo caixa (box)

O diagrama tipo caixa é detalhado na figura 6.3.

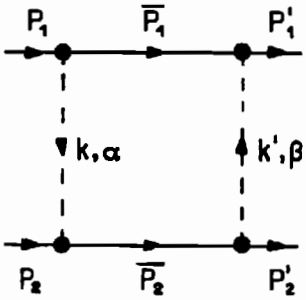


Figura 6.3: *Diagrama tipo caixa (box), que contribui para o TPEP, e que é associado ao termo* $\mathcal{K}^{(2)}\mathcal{G}\mathcal{K}^{(2)}$.

A conservação do quadrimomento em cada vértice fornece as relações :

$$\bar{p}_1 = p_1 - k \;=\; p_1' - k' \,; \tag{6.2}$$

$$\bar{p}_2 = p_2 + k \;=\; p_2' + k' \,. \tag{6.3}$$

Utilizando as regras de Feynman descritas no capítulo 4, obtemos a seguinte amplitude no espaço dos momentos:

$$i\mathcal{T}_\Box = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \eta^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}_1') \left[\frac{g}{2m} \not{k}' \gamma_5 \tau_\beta \right] i \frac{\not{\bar{p}}_1 + m}{\bar{p}_1^2 - m^2} \left[-\frac{g}{2m} \not{k} \gamma_5 \tau_\alpha \right] u(\mathbf{p}_1)\eta \right\}^{(1)} \frac{i}{k^2 - \mu^2}$$

$$\times \frac{i}{k'^2 - \mu^2} \left\{ \eta^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}_2') \left[-\frac{g}{2m} \not{k}' \gamma_5 \tau_\beta \right] i \frac{\not{\bar{p}}_2 + m}{\bar{p}_2^2 - m^2} \left[\frac{g}{2m} \not{k} \gamma_5 \tau_\alpha \right] u(\mathbf{p}_2)\eta \right\}^{(2)} \tag{6.4}$$

onde as massas dos píons e nucleons possuem partes imaginárias infinitesimais $+i\epsilon$, de acordo com a prescrição de Feynman. Os espaços de spin e isospin são desacoplados, o que nos permite escrever

$$i\mathcal{T}_\Box = \left(\eta^\dagger \tau_\beta \tau_\alpha \eta\right)^{(1)} \left(\eta^\dagger \tau_\beta \tau_\alpha \eta\right)^{(2)} (i)^4 (-)^2 \left(\frac{g}{2m}\right)^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

$$\times \left\{ \frac{[\bar{u}(\mathbf{p}_1') \not{k}' \gamma_5 (\not{\bar{p}}_1 + m) \not{k} \gamma_5 u(\mathbf{p}_1)]^{(1)} [\bar{u}(\mathbf{p}_2') \not{k}' \gamma_5 (\not{\bar{p}}_2 + m) \not{k} \gamma_5 u(\mathbf{p}_2)]^{(2)}}{(\bar{p}_1^2 - m^2)(k^2 - \mu^2)(k'^2 - \mu^2)(\bar{p}_2^2 - m^2)} \right\} . \tag{6.5}$$

A parte de isospin fornece:

$$\begin{aligned} \left(\eta^\dagger \tau_\beta \tau_\alpha \eta\right)^{(1)} \left(\eta^\dagger \tau_\beta \tau_\alpha \eta\right)^{(2)} &= \left[\delta_{\beta\alpha} I^{(1)} + i\epsilon_{\beta\alpha\gamma} \tau_\gamma^{(1)}\right] \left[\delta_{\beta\alpha} I^{(2)} + i\epsilon_{\beta\alpha\nu} \tau_\nu^{(2)}\right] \\ &= 3 - 2\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

onde $I^{(i)}$ e $\tau^{(i)}$ representam o valor esperado para o nucleon i.

Para a parte de spin é conveniente adotar a seguinte convenção: qualquer matriz quando "sanduichada" entre dois espinores e dividida pelo fator de normalização $2m$, levará o índice do nucleon (i). Assim temos, por exemplo

$$\frac{1}{2m} \bar{u}(\mathbf{p}_i) u(\mathbf{p}_i) \;\equiv\; I^{(i)} \,, \tag{6.7}$$

$$\frac{1}{2m} \bar{u}(\mathbf{p}_i) \gamma^\mu u(\mathbf{p}_i) \;\equiv\; \gamma^{\mu\,(i)} \,, \tag{6.8}$$

$$\frac{1}{2m} \bar{u}(\mathbf{p}_i) \not{p}_i u(\mathbf{p}) \;\equiv\; \not{p}_i^{(i)}, \text{ etc.... } \tag{6.9}$$

Para calcular os valores esperados entre os espinores dos nucleons (1) e (2) utilizamos a equação de Dirac (Apêndice A), o que corresponde à hipótese de que os nucleons externos à interação estão na camada de massa. O valor esperado para o nucleon (1) no numerador da integral 6.5 fornece

$$\begin{aligned} &\bar{u}(\mathbf{p}_1')\ \not{k}'\gamma_5(\not{p}_1+m)\ \not{k}\gamma_5 u(\mathbf{p}_1) = \\ &= -2m\left[(p_1-k)^2-m^2\right]\cdot\left[2mI^{(1)}+\not{k}^{(1)}+\frac{4m^2\ \not{k}^{(1)}}{(p_1-k)^2-m^2}\right], \end{aligned} \tag{6.10}$$

onde fizemos uso das propriedades das matrizes γ, dadas no apêndice A.

O valor esperado para o nucleon (2) é obtido de maneira análoga, trocando-se $1 \to 2$ e $k \to -k$:

$$\begin{aligned} &\bar{u}(\mathbf{p}_2')\ \not{k}'\gamma_5(\not{p}_2+m)\ \not{k}\gamma_5 u(\mathbf{p}_2) = \\ &= -2m\left[(p_2+k)^2-m^2\right]\cdot\left[2mI^{(2)}-\not{k}^{(2)}-\frac{4m^2\ \not{k}^{(2)}}{(p_2+k)^2-m^2}\right]. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Substituindo 6.6, 6.10 e 6.11 em 6.5 obtemos

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}_\square &= \left[3-2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right]\frac{g^4}{(2m)^2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[2mI^{(1)}+\not{k}^{(1)}+\frac{4m^2\ \not{k}^{(1)}}{(p_1-k)^2-m^2}\right]\times \\ &\times\ \frac{1}{k^2-\mu^2}\frac{1}{k'^2-\mu^2}\left[2mI^{(2)}-\not{k}^{(2)}-\frac{4m^2\ \not{k}^{(2)}}{(p_2+k)^2-m^2}\right]. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Ao efetuarmos a multiplicação na expressão 6.12, aparece uma soma de nove integrais, que são rotuladas da seguinte forma:

$$i\mathcal{T}_\square = \left[3-2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right]g^4\cdot\left[I_1-I_2+I_3-I_4+I_5-I_6-I_7-I_8-I_9\right] \tag{6.13}$$

onde

$$I_1 = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{I^{(1)}I^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)} \tag{6.14}$$

$$I_2 = \frac{1}{2m}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{I^{(1)}\ \not{k}^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)} \tag{6.15}$$

$$I_3 = \frac{1}{2m}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\not{k}^{(1)}I^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)} \tag{6.16}$$

$$I_4 = \frac{1}{4m^2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\not{k}^{(1)}\ \not{k}^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)} \tag{6.17}$$

$$I_5 = 2m\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\not{k}^{(1)} I^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)[(p_1-k)^2-m^2]} \tag{6.18}$$

$$I_6 = 2m\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{I^{(1)}\ \not{k}^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)[(p_2+k)^2-m^2]} \tag{6.19}$$

$$I_7 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\not{k}^{(1)}\ \not{k}^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)[(p_1-k)^2-m^2]} \tag{6.20}$$

$$I_8 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\not{k}^{(1)}\ \not{k}^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)[(p_2+k)^2-m^2]} \tag{6.21}$$

$$I_9 = 4m^2\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\not{k}^{(1)}\ \not{k}^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)[(p_1-k)^2-m^2][(p_2+k)^2-m^2]}. \tag{6.22}$$

As integrais acima são todas adimensionais.[1] No trabalho de PL, o diagrama tipo caixa é dado pela integral I_9 apenas, pois eles utilizam o acoplamento pseudoescalar para a interação πN. Assim, as 8 integrais restantes devem-se ao uso do acoplamento pseudovetor para o vértice πN, e podemos notar que a simetria quiral já começa a mostrar sua influência.

Diagrama cruzado (crossed box)

O diagrama cruzado da figura 6.2 é detalhado na figura 6.4, e para ele valem as relações de conservação

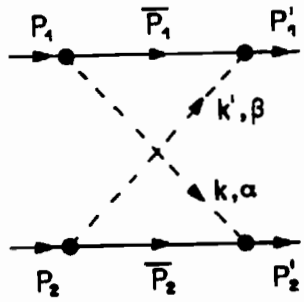
$$\bar{p}_1 = p_1 - k = p_1' - k' ; \tag{6.23}$$

$$\bar{p}_2 = p_2 - k' = p_2' - k' . \tag{6.24}$$

A amplitude para esse diagrama é dada por

$$i\mathcal{T}_{\bowtie} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{\eta^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}_1')\left[\frac{g}{2m}\not{k}'\gamma_5\tau_\beta\right] i\frac{\not{\bar{p}}_1+m}{\bar{p}_1^2-m^2}\left[-\frac{g}{2m}\not{k}\gamma_5\tau_\alpha\right] u(\mathbf{p}_1)\eta\right\}^{(1)} \frac{i}{k^2-\mu^2}\times$$

[1] Em termos do trabalho de Zuilhof e Tjon [*ZT 82*], as integrais 1,2,4 e 6 são chamadas de "funções de dois pontos"; as integrais 3,5,7 e 8 de "funções de três pontos" e a integral 9 de "função de quatro pontos". Essa denominação se deve ao fato dessas integrais envolverem dois, três e quatro propagadores, respectivamente.



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
2050
e. 1
INSTITUTO DE FÍSICA

Figura 6.4: *Diagrama cruzado que contribui para o TPEP. Esse é um dos diagramas que pertencem ao núcleo irredutível* $\mathcal{K}^{(4)}$.

$$\times \quad \frac{i}{k'^2-\mu^2}\left\{\eta^\dagger\bar{u}(\mathbf{p}_2')\left[\frac{g}{2m}\not{k}\gamma_5\tau_\alpha\right] i\frac{\not{\bar{p}}_2+m}{\bar{p}_2^2-m^2}\left[-\frac{g}{2m}\not{k}'\gamma_5\tau_\beta\right]u(\mathbf{p}_2)\eta\right\}^{(2)} \tag{6.25}$$

Analogamente ao caso do diagrama caixa, obtemos

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}_{\bowtie} &= \left[3+2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right]\frac{g^4}{(2m)^2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(2mI^{(1)}+\not{k}^{(1)}+\frac{4m^2\not{k}^{(1)}}{(p_1-k)^2-m^2}\right)\times \\ &\times \frac{1}{k^2-\mu^2}\frac{1}{k'^2-\mu^2}\left(2mI^{(2)}+\not{k}^{(2)}+\frac{4m^2\not{k}^{(2)}}{(p_2-k')^2-m^2}\right) \end{aligned} \tag{6.26}$$

Ao efetuarmos a multiplicação em 6.26, aparecem novamente 9 integrais, que são rotuladas como no diagrama tipo caixa

$$i\mathcal{T}_{\bowtie} = \left[3+2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right]g^4\cdot[I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_7+I_{10}+I_{11}+I_{12}] \tag{6.27}$$

onde

$$I_{10} = 2m\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{I^{(1)}\not{k}^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)[(p_2-k')^2-m^2]} \tag{6.28}$$

$$I_{11} = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\not{k}^{(1)}\not{k}^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)[(p_2-k')^2-m^2]} \tag{6.29}$$

$$I_{12} = 4m^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\not{k}^{(1)}\not{k}^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)[(p_1-k)^2-m^2][(p_2-k')^2-m^2]}\,. \tag{6.30}$$

A semelhança é muito grande com as integrais do diagrama tipo caixa. Uma mudança na variável de integração permite-nos concluir que

$$I_{10} = -I_6 \tag{6.31}$$

$$I_{11} = I_8 \tag{6.32}$$

Novamente a simetria quiral atua nesse caso: no trabalho de PL apenas a integral $I_{\bowtie 9}$ representa o diagrama cruzado.

Diagrama nabla (∇)

O diagrama nabla da figura 6.2 é detalhado na figura 6.5. Para ele valem as relações de conservação dadas em 6.2.

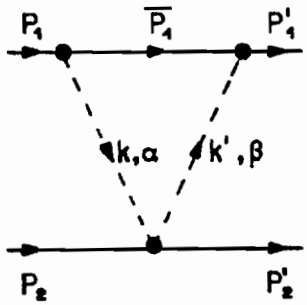


Figura 6.5: *Diagrama nabla que contribui para o TPEP. Esse é um dos diagramas que compõem o núcleo irredutível $\mathcal{K}^{(4)}$.*

A amplitude para esse diagrama é dada por

$$i\mathcal{T}_\nabla = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \eta^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}_1') \left[\frac{g}{2m} \not{k}' \gamma_5 \tau_\beta \right] i \frac{\not{\bar{p}}_1 + m}{\bar{p}_1^2 - m^2} \left[-\frac{g}{2m} \not{k} \gamma_5 \tau_\alpha \right] u(\mathbf{p}_1)\eta \right\}^{(1)} \frac{i}{k^2 - \mu^2} \times$$

$$\times \frac{i}{k'^2 - \mu^2} \left\{ \eta^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}_2') \left[-\frac{1}{4f_\pi^2} (\not{k}' + \not{k}) \epsilon_{\beta\alpha\nu} \tau_\nu \right] u(\mathbf{p}_2)\eta \right\}^{(2)} \tag{6.33}$$

onde a parte de isospin fornece

$$\begin{aligned} \left(\eta^\dagger \tau_\beta \tau_\alpha \eta\right)^{(1)} \left(\eta^\dagger i\epsilon_{\beta\alpha\nu}\tau_\nu \eta\right)^{(2)} &= \left(\delta_{\beta\alpha} I^{(1)} + i\epsilon_{\beta\alpha\gamma}\tau_\gamma^{(1)}\right)\left(i\epsilon_{\beta\alpha\nu}\tau_\nu^{(2)}\right) \\ &= -2\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}. \end{aligned} \tag{6.34}$$

O cálculo do valor esperado para o nucleon (1) é análogo aos diagramas anteriores, equação 6.10. Para o nucleon (2) temos

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathbf{p}_2')(\not{k}'+\not{k})u(\mathbf{p}_2) &= \bar{u}(\mathbf{p}_2')(\not{p}_2-\not{p}_2'+2\not{k})u(\mathbf{p}_2)\\ &= 4m\,\not{k}^{(2)}\end{aligned} \tag{6.35}$$

onde foi feito o uso da equação de Dirac. Desse modo, a amplitude para o diagrama nabla é dada por

$$\begin{aligned}i\mathcal{T}_\nabla &= -4\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\frac{g^4}{(2m)^2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\times\\ &\times\left[2mI^{(1)}+\not{k}^{(1)}+\frac{4m^2\,\not{k}^{(1)}}{(p_1-k)^2-m^2}\right]\frac{1}{k^2-\mu^2}\frac{1}{k'^2-\mu^2}\not{k}^{(2)}\end{aligned} \tag{6.36}$$

onde foi usada a relação de Goldberger-Treiman para $g_A=1$

$$\frac{1}{4f_\pi^2}=\left(\frac{g}{2m}\right)^2. \tag{6.37}$$

Na amplitude $i\mathcal{T}_\nabla$ temos três integrais que, comparadas com as dos dois primeiros diagramas, são as de número 2, 4 e 7. Assim temos

$$i\mathcal{T}_\nabla=-4\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}g^4\cdot[I_2+I_4+I_7] \tag{6.38}$$

Diagrama triângulo ($\triangle$)

O diagrama triângulo da figura 6.2 é semelhante ao anterior e é detalhado na figura 6.6. As relações cinemáticas são dadas na equação 6.3.

A amplitude para esse diagrama é dada por

$$\begin{aligned}i\mathcal{T}_\triangle &= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{\eta^\dagger\bar{u}(\mathbf{p}_1')\left[-\frac{1}{4f_\pi^2}(\not{k}'+\not{k})\epsilon_{\alpha\beta\nu}\tau_\nu\right]u(\mathbf{p}_1)\eta\right\}^{(1)}\frac{i}{k^2-\mu^2}\times\\ &\times\frac{i}{k'^2-\mu^2}\left\{\eta^\dagger\bar{u}(\mathbf{p}_2')\left[\frac{g}{2m}\not{k}\gamma_5\tau_\alpha\right]i\frac{\not{\bar{p}}_2+m}{\bar{p}_2^2-m^2}\left[-\frac{g}{2m}\not{k}'\gamma_5\tau_\beta\right]u(\mathbf{p}_2)\eta\right\}^{(2)}\end{aligned} \tag{6.39}$$

Essa amplitude é semelhante a expressão 6.33, e dada por

$$\begin{aligned}i\mathcal{T}_\triangle &= -4\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\frac{g^4}{(2m)^2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\not{k}^{(1)}\times\\ &\times\frac{1}{k^2-\mu^2}\frac{1}{k'^2-\mu^2}\left(2mI^{(2)}+\not{k}^{(2)}+\frac{4m^2\,\not{k}^{(2)}}{(p_2-k')^2-m^2}\right)\end{aligned} \tag{6.40}$$

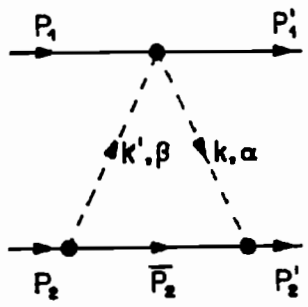


Figura 6.6: *Diagrama triângulo que contribui para o TPEP. Esse é um dos diagramas que compõem o núcleo irredutível* $\mathcal{K}^{(4)}$.

Ao efetuarmos a multiplicação em 6.40, aparecem novamente 3 integrais, que são rotuladas, por comparação com as expressões anteriores, por 3, 4 e 11. Assim temos

$$i\mathcal{T}_{\triangle} = -4\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)} g^4 \cdot [I_3 + I_4 + I_{11}] \tag{6.41}$$

Diagrama bolha (()

O diagrama bolha da figura 6.2 é detalhado na figura 6.7, e pode ser relacionado à auto-energia do méson ρ.

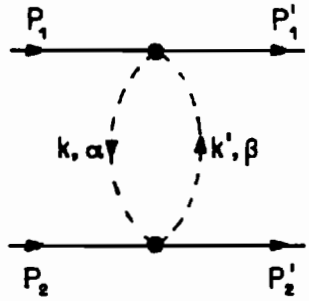


Figura 6.7: *Diagrama bolha que contribui para o TPEP. Esse é um dos diagramas que pertencem ao núcleo irredutível* $\mathcal{K}^{(4)}$.

A amplitude para esse diagrama é dada por

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{T}_0 &= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{\eta^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}_1')\left[-\frac{1}{4f_\pi^2}(\not{k}'+\not{k})\epsilon_{\alpha\beta\nu}\tau_\nu\right]u(\mathbf{p}_1)\eta\right\}^{(1)}\frac{i}{k^2-\mu^2}\times \\
&\times \frac{i}{k'^2-\mu^2}\left\{\eta^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}_2')\left[-\frac{1}{4f_\pi^2}(\not{k}'+\not{k})\epsilon_{\beta\alpha\gamma}\tau_\gamma\right]u(\mathbf{p}_2)\eta\right\}^{(2)} \qquad (6.42)
\end{aligned}
$$

onde a parte de isospin fornece

$$
\begin{aligned}
\left(\eta^\dagger \epsilon_{\alpha\beta\nu}\tau_\nu\eta\right)^{(1)}\left(\eta^\dagger \epsilon_{\beta\alpha\gamma}\tau_\gamma\eta\right)^{(2)} &= \epsilon_{\alpha\beta\nu}\tau_\nu^{(1)}(-)\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\tau_\gamma^{(2)} \\
&= -2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}. \qquad (6.43)
\end{aligned}
$$

Assim, a expressão para essa amplitude é dada por

$$
i\mathcal{T}_0 = 4\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}g^4\cdot I_4 \qquad (6.44)
$$

Diagrama nabla escalar (∇_S)

O diagrama nabla escalar da figura 6.2 é detalhado na figura 6.8. A novidade agora é o vértice isoescalar $\pi\pi$N, que pode ser entendido como uma aproximação de massa infinita para a troca de um méson escalar, isoescalar.

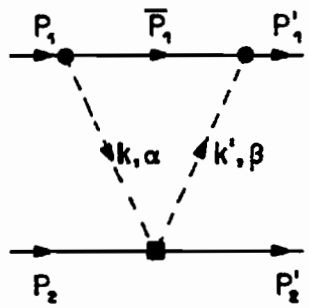


Figura 6.8: *Diagrama nabla escalar que contribui para o TPEP. Esse é um dos diagramas que compõem o núcleo irredutível $\mathcal{K}^{(4)}$, agora em terceira ordem na expansão em potências do momento.*

A amplitude para esse diagrama é dada por

$$
i\mathcal{T}_{\nabla_S} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{\eta^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}_1')\left[\frac{g}{2m}\not{k}'\gamma_5\tau_\beta\right]i\frac{\not{\bar{p}}_1+m}{\bar{p}_1^2-m^2}\left[-\frac{g}{2m}\not{k}\gamma_5\tau_\alpha\right]u(\mathbf{p}_1)\eta\right\}^{(1)}\frac{i}{k^2-\mu^2}\times
$$

$$\times \quad \frac{i}{k'^2 - \mu^2} \left\{ \eta^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}_2') \left[2iG\delta_{\alpha\beta} k' \cdot k \right] u(\mathbf{p}_2)\eta \right\}^{(2)} , \tag{6.45}$$

onde a parte de isospin fornece

$$\begin{aligned} \left(\eta^\dagger \tau_\beta \tau_\alpha \eta\right)^{(1)} \left(\eta^\dagger \delta_{\alpha\beta} \eta\right)^{(2)} &= \left(\delta_{\beta\alpha} I^{(1)} + i\epsilon_{\beta\alpha\gamma}\tau_\gamma^{(1)}\right)\left(\delta_{\alpha\beta} I^{(2)}\right) \\ &= 3 . \end{aligned} \tag{6.46}$$

O cálculo do valor esperado para o nucleon (1) é análogo aos diagramas caixa e cruzado. Para o nucleon (2) temos

$$\bar{u}(\mathbf{p}_2')(k' \cdot k) u(\mathbf{p}_2) = 2m\, k' \cdot k\, I^{(2)} \tag{6.47}$$

Desse modo, a amplitude para o diagrama nabla escalar é dada por

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}_{\nabla_S} &= 6g^2 G \cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[2mI^{(1)} + \not{k}^{(1)} + \frac{4m^2\, \not{k}^{(1)}}{(p_1 - k)^2 - m^2} \right] \\ &\times \frac{1}{k^2 - \mu^2} \frac{1}{k'^2 - \mu^2} k' \cdot k I^{(2)} \end{aligned} \tag{6.48}$$

De forma mais compacta, obtemos

$$i\mathcal{T}_{\nabla_S} = 6g^2 G\mu^3 \cdot [I_{13} + I_{14} + I_{15}] \tag{6.49}$$

onde

$$I_{13} = \frac{2m}{\mu^3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k' \cdot k I^{(1)} I^{(2)}}{(k^2 - \mu^2)(k'^2 - \mu^2)} \tag{6.50}$$

$$I_{14} = \frac{1}{\mu^3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k' \cdot k\, \not{k}^{(1)} I^{(2)}}{(k^2 - \mu^2)(k'^2 - \mu^2)} \tag{6.51}$$

$$I_{15} = \frac{4m^2}{\mu^3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k' \cdot k\, \not{k}^{(1)} I^{(2)}}{(k^2 - \mu^2)(k'^2 - \mu^2)[(p_1 - k)^2 - m^2]} . \tag{6.52}$$

Essas integrais, assim como as anteriores, são adimensionais.

Diagrama triângulo escalar ($\triangle_S$)

O diagrama triângulo da figura 6.2 é semelhante ao anterior. Suas variáveis cinemáticas são detalhadas na figura 6.9. A sua amplitude é dada por

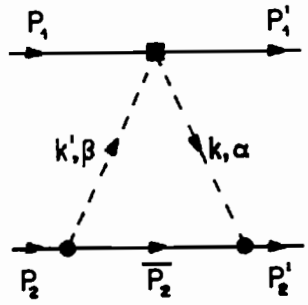


Figura 6.9: *Diagrama triângulo escalar que contribui para o TPEP. Esse é um dos diagramas que compõem o núcleo irredutível $\mathcal{K}^{(4)}$, em terceira ordem na expansão em potências do momento.*

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{T}_{\triangle_S} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \eta^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}_1') \left[2iG\delta_{\alpha\beta} k' \cdot k \right] u(\mathbf{p}_1)\eta \right\}^{(1)} \frac{i}{k^2-\mu^2} \frac{i}{k'^2-\mu^2} \times \\
&\times \left\{ \eta^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}_2') \left[\frac{g}{2m} \not{k}\gamma_5\tau_\alpha \right] i \frac{\not{\bar{p}}_2 + m}{\bar{p}_2^2 - m^2} \left[-\frac{g}{2m} \not{k}'\gamma_5\tau_\beta \right] u(\mathbf{p}_2)\eta \right\}^{(2)}
\end{aligned} \tag{6.53}
$$

A expressão 6.53 guarda grande semelhança com a expressão 6.45, de modo que os mesmos passos podem ser seguidos. Assim, obtemos para a amplitude triângulo escalar

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{T}_{\triangle_S} &= 6g^2G\frac{1}{\mu^3}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k' \cdot k I^{(1)} \times \\
&\times \frac{1}{k^2-\mu^2}\frac{1}{k'^2-\mu^2}\left(2mI^{(2)} + \not{k}^{(2)} + \frac{4m^2\ \not{k}^{(2)}}{(p_2-k')^2-m^2} \right)
\end{aligned} \tag{6.54}
$$

Ao efetuarmos a multiplicação em 6.54, obtemos 3 integrais que são rotuladas, por comparação com o diagrama anterior, por 13, 16 e 17. Assim temos

$$
i\mathcal{T}_{\triangle_S} = 6g^2G\mu^3 \cdot [I_{13} + I_{16} + I_{17}] \tag{6.55}
$$

onde

$$
I_{16} = \frac{1}{\mu^3}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k' \cdot k I^{(1)}\ \not{k}^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)} \tag{6.56}
$$

$$
I_{17} = \frac{4m^2}{\mu^3}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k' \cdot k I^{(1)}\ \not{k}^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)[(p_2-k')^2-m^2]}\,. \tag{6.57}
$$

Diagrama bolha escalar (0_S)

O diagrama bolha escalar é o último diagrama da figura 6.2 e é detalhado na figura 6.10. Analogamente ao outro diagrama bolha, ele está ligado à auto-energia de um méson escalar-isoescalar.

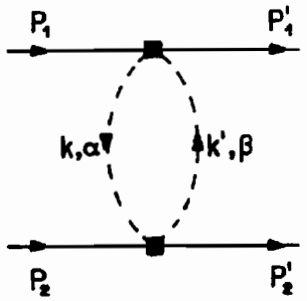


Figura 6.10: *Diagrama bolha escalar que contribui para o TPEP. Esse é um dos diagramas que pertencem ao núcleo irredutível $\mathcal{K}^{(4)}$, agora em quarta ordem na expansão em potências do momento.*

A amplitude para esse diagrama é dada por

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}_{0_S} &= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{\eta^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}_1')\left[2iG\delta_{\alpha\beta}k'\cdot k\right]u(\mathbf{p}_1)\eta\right\}^{(1)}\frac{i}{k^2-\mu^2}\times \\ &\times \frac{i}{k'^2-\mu^2}\left\{\eta^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}_2')\left[2iG\delta_{\alpha\beta}k'\cdot k\right]u(\mathbf{p}_2)\eta\right\}^{(2)} \end{aligned} \tag{6.58}$$

onde a parte de isospin fornece

$$\begin{aligned} \left(\eta^\dagger\delta_{\alpha\beta}\eta\right)^{(1)}\left(\eta^\dagger\delta_{\alpha\beta}\eta\right)^{(2)} &= \delta_{\alpha\beta}I^{(1)}\delta_{\alpha\beta}I^{(2)} \\ &= 3. \end{aligned} \tag{6.59}$$

A expressão 6.58, como esperado, não possui semelhança com as integrais dos dois diagramas anteriores, pois é de ordem superior. Rotulando essa integral pelo número 18, obtemos para a amplitude bolha escalar

$$i\mathcal{T}_{0_S} = 6G^2\mu^6\cdot I_{18}, \tag{6.60}$$

onde

$$I_{18} = \left(\frac{2m}{\mu^3}\right)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(k'\cdot k)^2 I^{(1)}I^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)} \tag{6.61}$$

Com esse diagrama, terminamos de equacionar todas as integrais relevantes para a amplitude da troca de dois píons entre dois nucleons. A seguir, vamos realizar a soma das integrais semelhantes.

6.2 Soma das amplitudes

Nesta seção organizamos nossos resultados com o intuito de explicitar os cancelamentos devidos à simetria quiral. De acordo com a seção anterior, temos 18 integrais diferentes.

Matriz $\mathcal{T}$ para a integral I_1

A integral I_1 aparece na expressão 6.14. Ela é divergente logaritmicamente, e necessita da introdução de um regularizador covariante, conforme descrito no apêndice B.

Somando as duas amplitudes envolvendo I_1, temos

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}_1 &= i\{\mathcal{T}_{\square 1} + \mathcal{T}_{\bowtie 1}\} \\ &= \left[\left(3 - 2\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}\right) + \left(3 + 2\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}\right)\right] g^4 \cdot I_1 \\ &= 6g^4 I_1 \end{aligned} \tag{6.62}$$

Assim, $\mathcal{T}_1$ é isoescalar. O cálculo de I_1 é feito no apêndice C e fornece

$$I_1 = \frac{2i}{(4\pi)^2} S_1 \, I^{(1)} \cdot I^{(2)} \tag{6.63}$$

com

$$S_1 = (\Lambda^2 - \mu^2) \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu \, \frac{F_1}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_1^2} \tag{6.64}$$

$$F_1 = \left[1 - \alpha^2 + \nu(1+\alpha)^2\right]^{-1} \tag{6.65}$$

$$M_1 = 2\sqrt{F_1\left(\mu^2 + \frac{\nu\Lambda^2}{1-\nu}\right)}\,, \tag{6.66}$$

onde α e ν são as variáveis auxiliares de Feynman, Λ é o fator de corte (cutoff) covariante e $\boldsymbol{\Delta}$ é o trimomento transferido.

Na expressão 6.64, as integrações em α e ν podem ser feitas analiticamente, mas o resultado é uma função complexa de $\boldsymbol{\Delta}$, o que complica a transformada de Fourier a ser

feita posteriormente. É interessante notar nesse resultado que S_1 não depende da energia (E) e não contém não-localidades (Q).

A amplitude $\mathcal{T}_1$ é obtida substituindo-se 6.63 em 6.62

$$\mathcal{T}_1 = \frac{12g^4}{(4\pi)^2} S_1 \, I^{(1)} \cdot I^{(2)} \, . \tag{6.67}$$

Na figura 6.11 graficamos a amplitude $\mathcal{T}_1$, para[2] $I^{(1)} \cdot I^{(2)} = 1$ em função do módulo de $\boldsymbol{\Delta}$, para dois valores de Λ: 1.0 e 2.0 GeV.

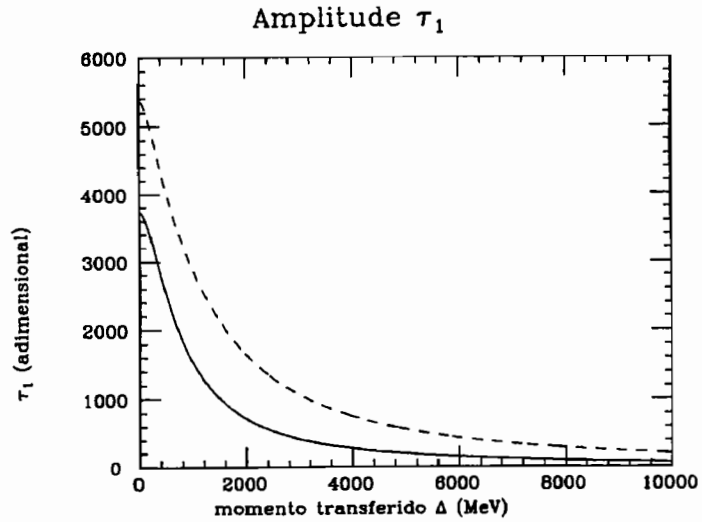


Figura 6.11: *Amplitude $\mathcal{T}_1$ no espaço dos momentos, como função do módulo do momento transferido. Na figura são mostradas curvas para dois valores do fator de corte covariante: $\Lambda = 1.0$ GeV (curva sólida) e $\Lambda = 2.0$ GeV (curva tracejada). Os valores numéricos das constantes utilizadas são dados no capítulo 7, tabela 7.1.*

Matriz $\mathcal{T}$ para a integral I_2 e I_3

De acordo com o apêndice C, equação C.13, $I_2 = I_3 = 0$. Portanto

$$\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_3 = 0 \tag{6.68}$$

[2] O valor 1 é a primeira aproximação não-relativística para esse operador, conforme veremos adiante.

Matriz $\mathcal{T}$ para a integral I_4

A integral I_4 aparece na expressão 6.17. Ela é quadraticamente divergente, necessitando de um regularizador duplo.

Somando as cinco amplitudes envolvendo I_4, temos

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}_4 &= i\left\{\mathcal{T}_{\square\,4} + \mathcal{T}_{\bowtie\,4} + \mathcal{T}_{\triangledown\,4} + \mathcal{T}_{\triangle\,4} + \mathcal{T}_{0\,4}\right\} \\ &= \Big[-\left(3 - 2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right) + \left(3 + 2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right) - 4\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)} \\ &+ -4\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)} + 4\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\Big]\, g^4 I_4 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.69}$$

Matriz $\mathcal{T}$ para as integrais I_5, I_6 e I_{10}

As integrais I_5, I_6 e I_{10} aparecem nas expressões 6.19, 6.18 e 6.28. Elas são convergentes, não necessitando de regularizador. Na equação 6.31 vimos que $I_6 = -I_{10}$ e no apêndice C, mostramos que $I_5 = -I_6$.

Somando as duas amplitudes envolvendo I_5, I_6 e I_{10}, temos

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}_{5+6+10} &= i\left\{\mathcal{T}_{\square\,5} + \mathcal{T}_{\bowtie\,5} + \mathcal{T}_{\square\,6} + \mathcal{T}_{\bowtie\,10}\right\} \\ &= 2\left[\left(3 - 2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right) + \left(3 + 2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right)\right] g^4\cdot I_5 \\ &= 12 g^4 I_5 \end{aligned} \tag{6.70}$$

Assim, a amplitude $\mathcal{T}_{5+6+10}$ também é isoescalar. O cálculo de I_5 é feito no apêndice C e fornece

$$I_5 = -\frac{4i}{(4\pi)^2} S_2\, I^{(1)}\cdot I^{(2)} \tag{6.71}$$

com

$$S_2 = m^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu^2)} \tag{6.72}$$

$$F_2 = \left[(1-\alpha^2)(1-\nu)\right]^{-1} \tag{6.73}$$

$$M(x) = 2\sqrt{F_2\left(\mu^2 + \frac{x\, m^2}{1-\nu}\right)} \tag{6.74}$$

Substituindo 6.71 em 6.70 obtemos

$$\mathcal{T}_{5+6+10} = -\frac{48 g^4}{(4\pi)^2}\, S_2\, I^{(1)}\cdot I^{(2)} \tag{6.75}$$

onde S_2 é dada em 6.72.

Novamente, as integrações nas variáveis auxiliares de Feynman só serão feitas, se conveniente, após a transformada de Fourier. A função S_2 não depende da energia (E) e não contém não-localidades (Q).

Na figura 6.12 fazemos o gráfico da amplitude $\mathcal{T}_{5+6+10}$, para $I^{(1)} \cdot I^{(2)} = 1$ em função do módulo de $\boldsymbol{\Delta}$.

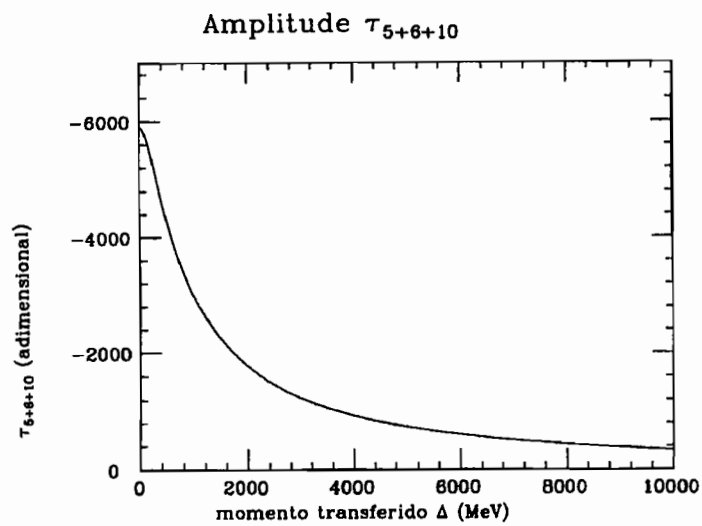


Figura 6.12: *Amplitude $\mathcal{T}_{5+6+10}$ no espaço dos momentos, como função do módulo do momento transferido. Comparando com a figura anterior, vemos que não há dependência no parâmetro de corte Λ.*

Matriz $\mathcal{T}$ para as integrais I_7, I_8 e I_{11}

A integral I_7 aparece na expressão 6.20. Ela é logaritmicamente divergente, necessitando de um regularizador.

Somando as três amplitudes envolvendo I_7, obtemos

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}_7 &= i\{\mathcal{T}_{\square 7} + \mathcal{T}_{\bowtie 7} + \mathcal{T}_{\triangledown 7}\} \\ &= \left[-\left(3 - 2\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}\right) + \left(3 + 2\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}\right) - 4\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}\right] g^4 I_7 = 0 \end{aligned} \quad (6.76)$$

Vimos na equação 6.32 que $I_{11} = I_8$. Assim, temos

$$i\mathcal{T}_{8+11} = i\{\mathcal{T}_{\square 8} + \mathcal{T}_{\bowtie 11} + \mathcal{T}_{\triangle 11}\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[-\left(3-2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right)+\left(3+2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right)-4\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right]g^4 I_8 \\
&= 0\,. \qquad (6.77)
\end{aligned}
$$

Matriz $\mathcal{T}$ para as integrais I_9 e I_{12}

As integrais I_9 e I_{12} são convergentes e seus denominadores são iguais aos que ocorrem nos diagramas caixa e cruzado no trabalho de Lomon e Partovi. Elas aparecem nas expressões 6.22 e 6.30. Essas integrais são complicadas, pois não há cancelamentos entre os propagadores dos nucleons no denominador, o que significa quatro variáveis de Feynman na integração.

As amplitudes para essas integrais são:

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{T}_9 = i\mathcal{T}_{\square 9} &= \left(3-2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right)g^4\cdot I_9 \\
i\mathcal{T}_{12} = i\mathcal{T}_{\bowtie 12} &= \left(3+2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right)g^4\cdot I_{12}
\end{aligned}
$$

A diferança entre I_9 e I_{12}, está na cinemática da interação, onde a primeira amplitude acontece no canal t, e a segunda, no canal u. O cálculo dessas integrais, feito no apêndice C, revela essas diferenças nos denominadores: a integral do diagrama cruzado depende explicitamente de $\mathbf{Q}$

$$
\begin{aligned}
I_9 &= i\frac{2m^2}{(4\pi)^2}\times\left\{\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta}d\zeta\,\frac{\zeta\gamma^{\mu\,(1)}\gamma_\mu^{(2)}}{D_2(\zeta^2)}+\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta}d\zeta\int_0^{\zeta}d\epsilon\right. \\
&\times\left.-\frac{2}{D_\square^2}\left[-\zeta^2\left(E\gamma^{0\,(1)}-mI^{(1)}\right)\left(E\gamma^{0\,(2)}-mI^{(2)}\right)+\epsilon^2E^2\,\boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{(2)}\right]\right\} \qquad (6.78)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{12} &= i\frac{2m^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta}d\zeta\int_0^{\zeta}d\epsilon\left\{-\frac{\gamma^{\mu\,(1)}\gamma_\mu^{(2)}}{D_\bowtie}+\right. \\
&+\left.\frac{2}{D_\bowtie^2}\left[\zeta^2E^2\,\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}-\epsilon^2\left(E\gamma^{0\,(1)}-mI^{(1)}\right)\left(E\gamma^{0\,(2)}-mI^{(2)}\right)\right]\right\} \qquad (6.79)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
D_2(x) &= \boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta-\zeta)+\mu^2(1-\zeta)+x\,m^2 && (6.80)\\
D_\square &= \boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta-\zeta)+\mu^2(1-\zeta)+\epsilon^2E^2-\zeta^2(E^2-m^2) && (6.81)\\
D_\bowtie &= \boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta-\zeta)+\mu^2(1-\zeta)-\epsilon^2\mathbf{Q}^2+\zeta^2(m^2+\mathbf{Q}^2) && (6.82)
\end{aligned}
$$

Ao calcularmos a iteração no próximo item, veremos que ela fornece resultados semelhantes às integrais acima.

Matriz $\mathcal{T}$ para a integral I_{13}

A integral I_{13} aparece na expressão 6.50 e possui um produto escalar no numerador. Ela provém dos diagramas de terceira ordem no momento e tem estrutura diferente das anteriores. A amplitude resultante da soma dessas duas integrais é

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}_{13} &= i\,(\mathcal{T}_{\nabla 13} + \mathcal{T}_{\triangle 13}) \\ &= 12\,g^2\,G\,\mu^3\,I_{13} \end{aligned} \tag{6.83}$$

Usando o resultado do apêndice C, equações C.61, C.64 e C.67 podemos escrever

$$i\mathcal{T}_{13} = 12\,g^2\,G\,\mu^3 \frac{2m}{\mu^3}\,(I_{13A} + I_{13B} + I_{13C})\;\; I^{(1)} \cdot I^{(2)} \tag{6.84}$$

Essas integrais são calculadas no apêndice C, e fornecem

$$I_{13B} = -\frac{i}{(4\pi)^2}\mu^2\;S_3 \tag{6.85}$$

$$I_{13A} + I_{13C} = \frac{i}{(4\pi)^2}\mu^2\left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2} + S_4\right) \tag{6.86}$$

onde as integrais são dadas por

$$S_3 = (\Lambda^2 - \mu^2)\,\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\int_{-1}^{1}\frac{d\rho}{1-\rho}\,\frac{1}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_2^2}\,, \tag{6.87}$$

com

$$M_2 = \sqrt{\frac{2\mu^2}{1-\rho} + \frac{2\Lambda^2}{1+\rho}}\,, \tag{6.88}$$

e

$$S_4 = \frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\left\{2\mu^2 - (1+\alpha)(1-\nu)M_1^2\right\}\frac{F_1}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_1^2}\,, \tag{6.89}$$

onde F_1 e M_1 são dados por 6.65 e 6.66, respectivamente.

Assim, podemos escrever a amplitude $\mathcal{T}_{13}$ em termos das integrais anteriores

$$\mathcal{T}_{13} = \frac{12g^2}{(4\pi)^2}G\mu^3\left(\frac{2m}{\mu}\right)\left\{\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2} - S_3 + S_4\right\}\;I^{(1)}\cdot I^{(2)} \tag{6.90}$$

As integrais nas variáveis auxiliares de Feynman α, ν e ρ não dependem da energia (E) e não contém não-localidades (Q), que só ocorrem para as integrais da amplitude de PL, $\mathcal{T}_9$ e $\mathcal{T}_{12}$.

Na figura 6.13 fazemos o gráfico da amplitude $\mathcal{T}_{13}$, para $I^{(1)} \cdot I^{(2)} = 1$, em função do módulo de $\boldsymbol{\Delta}$, sem incluir o termo independente do momento transferido.

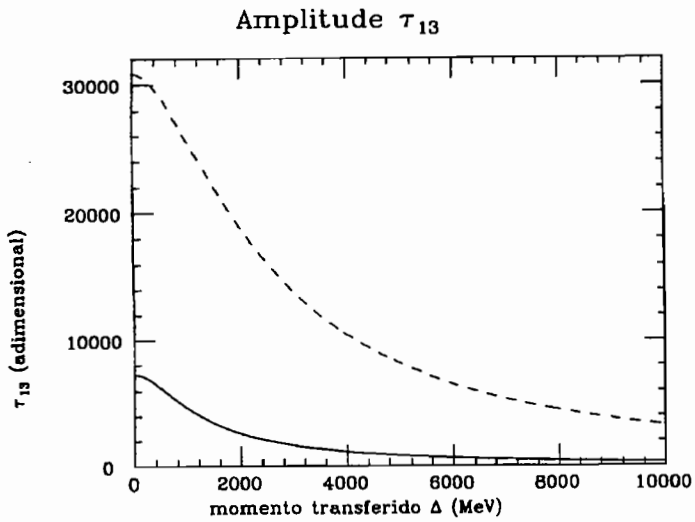


Figura 6.13: *Amplitude $\mathcal{T}_{13}$ no espaço dos momentos, como função do módulo do momento transferido. O significado das curvas é o mesmo que na figura 6.11.*

Matriz $\mathcal{T}$ para as integrais I_{14} e I_{16}

De acordo com o apêndice C, equação C.73, $I_{14} = I_{16} = 0$. Portanto

$$\mathcal{T}_{14} = \mathcal{T}_{16} = 0 \tag{6.91}$$

Matriz $\mathcal{T}$ para as integrais I_{15} e I_{17}

As integrais I_{15} e I_{17} aparecem nas expressões 6.52 e 6.57, respectivamente, e são mais complexas que as integrais escalares anteriores, pois possuem os propagadores dos nucleons no denominador. A amplitude resultante da soma dessas duas integrais é

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}_{15+17} &= \mathcal{T}_{\nabla\,15} + \mathcal{T}_{\triangle\,17} \\ &= 6\,g^2\,G\mu^3\,\{I_{15} + I_{17}\} \end{aligned} \tag{6.92}$$

No apêndice C mostramos que $I_{15} = I_{17}$. O cálculo dessa integral pode ser dividido em duas partes, I_{15A} e I_{15B}, que fornecem

$$I_{15A} = -\frac{2im}{(4\pi)^2}\left(\frac{\mu^2}{m^2}S_2 - I_G\right)\,I^{(1)}\cdot I^{(2)}\,, \tag{6.93}$$

com S_2 dado por 6.72 e I_G dado por

$$I_G = \Lambda^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_3^2}\,, \tag{6.94}$$

onde

$$M_3 = 2\sqrt{F_2\left(\frac{m^2\nu^2}{1-\nu} + \frac{(1+\alpha)}{2}\mu^2 + \frac{(1-\alpha)}{2}\Lambda^2\right)}\,, \tag{6.95}$$

e F_2 é dado por 6.73.

Para I_{15B} temos

$$I_{15B} = -\frac{im}{(4\pi)^2}\left[-I_H + I_J\right]\; I^{(1)}\cdot I^{(2)}\,, \tag{6.96}$$

onde

$$I_H = \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu\left[1+\alpha(1-\nu)\right] F_2 \frac{M^2(\nu^2)}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu^2)}\,, \tag{6.97}$$

$$I_J = \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu\left[1+\alpha(1-\nu)\right] F_2 \frac{M_3^2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_3^2}\,, \tag{6.98}$$

e F_2 é dado por 6.73, $M(x)$ por 6.74 e M_3 por 6.95.

Podemos agrupar o resultado de I_{15} em duas integrais, uma independente e a outra dependente do parâmetro de corte Λ. Juntando S_2 com I_H e I_G com I_J, obtemos S_5 e S_6, respectivamente, que são dadas abaixo

$$S_5 = \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu\left\{2\mu^2 - \left[1+\alpha(1-\nu)\right] M^2(\nu^2)\right\} \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu^2)} \tag{6.99}$$

$$S_6 = \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu\left\{2\Lambda^2 - \left[1+\alpha(1-\nu)\right] M_3^2\right\} \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_3^2} \tag{6.100}$$

Assim, a expressão final para a amplitude $\mathcal{T}_{15+17}$ fica

$$\mathcal{T}_{15+17} = -\frac{6g^2}{(4\pi)^2} G\mu^3 \left(\frac{2m}{\mu}\right)^3 \left\{S_5 - S_6\right\}\; I^{(1)}\cdot I^{(2)}\,. \tag{6.101}$$

Na figura 6.14 apresentamos a amplitude $\mathcal{T}_{15+17}$, para $I^{(1)}\cdot I^{(2)} = 1$, em função do módulo de $\boldsymbol{\Delta}$.

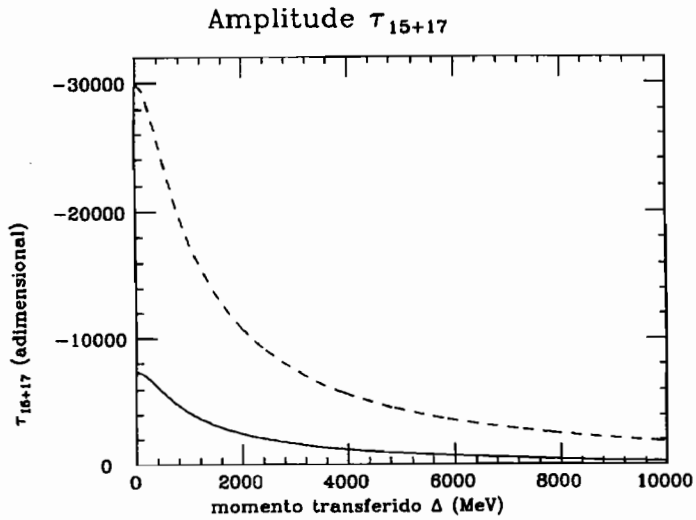


Figura 6.14: *Amplitude $\mathcal{T}_{15+17}$ no espaço dos momentos, como função do módulo do momento transferido. O significado das curvas é o mesmo que na figura 6.11.*

Matriz $\mathcal{T}$ para a integral I_{18}

A integral I_{18} é única e aparece na expressão 6.61. A amplitude para essa contribuição é

$$i\mathcal{T}_{0S} = 6\,G^2\,\mu^6\,I_{18}\;\; I^{(1)}\cdot I^{(2)} \tag{6.102}$$

De acordo com o apêndice C, I_{18} pode ser escrito como uma soma de três termos:

$$I_{18} = \left(\frac{2m}{\mu^3}\right)^2 \left[I_{18A} + I_{18B} + I_{18C}\right] .$$

O primeiro termo fornece

$$I_{18A} = \frac{2i}{(4\pi)^2}\,\mu^4\,\left[S_1 - S_3\right] , \tag{6.103}$$

onde S_1 e S_3 são dadas por 6.64 e 6.87, respectivamente. O segundo termo é dado por

$$I_{18B} = \frac{2i}{(4\pi)^2}\,\mu^4\left\{\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2} - I_K - \frac{(\Lambda^2-\mu^2)}{\mu^2}\frac{\Lambda^2}{\mu^2} + I_P\right\} ,$$

$$\text{onde} \qquad I_K = \frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\,(1+\alpha)(1-\nu)M_1^2\frac{F_1}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2} , \tag{6.104}$$

$$I_P = \frac{(\Lambda^2-\mu^2)}{\mu^2}\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\int_{-1}^{1} d\rho \left[\frac{\mu^2}{1-\rho}+\frac{\Lambda^2}{1+\rho}\right]\frac{1}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_2^2}\,, \tag{6.105}$$

com M_2 dado por 6.88. O terceiro termo fornece

$$I_{18C} = \frac{2i}{(4\pi)^2}\mu^4\left\{\left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)^2 - 2I_L + S_7 + C - I_N\right\}\,, \tag{6.106}$$

onde

$$I_L = \left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)^2\int_{-1}^{1} d\alpha\int_0^1 d\nu\;\nu(1+\alpha)^2(1-\nu)F_1^2\frac{M_1^2}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2}\,, \tag{6.107}$$

$$S_7 = \left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)^2\int_{-1}^{1} d\alpha\int_0^1 d\nu\;\nu(1+\alpha)^2(1-\nu)F_1^2\frac{M_1^4}{\left[\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2\right]^2}\,, \tag{6.108}$$

$$I_N = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)^2\int_{-1}^{1} d\alpha\int_0^1 d\nu\;\nu F_1\frac{M_1^2}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2}\,, \tag{6.109}$$

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)^2\int_{-1}^{1} d\alpha\int_0^1 d\nu\;\nu F_1\,, \tag{6.110}$$

sendo C o termo independente de $\boldsymbol{\Delta}$. Segundo Weinberg [*Wei 91*], essas constantes podem ser todas absorvidas se for efetuada a regularização completa nessa ordem do potencial. Além disso, essas constantes geram apenas termos de contato, $\delta(r)$, no espaço de configuração, não contribuindo para a dinâmica da interação em médias e curtas distâncias.

Assim, a amplitude total para o diagrama bolha escalar é

$$\mathcal{T}_{18} = -\frac{12}{(4\pi)^2}G^2\mu^6\left(\frac{2m}{\mu}\right)^2\left[S_7+S_8+S_9+C\right]\;I^{(1)}\cdot I^{(2)} \tag{6.111}$$

onde S_7 é dado por 6.108, S_8 é o resultado do agrupamento de S_1, I_K, I_L e I_N

$$S_8 = \frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\int_{-1}^{1} d\alpha\int_0^1 d\nu\;H(\alpha,\nu)\frac{F_1}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2}\,, \tag{6.112}$$

com

$$H(\alpha,\nu) = \left\{\mu^2 - M_1^2\left[(1+\alpha)(1-\nu)+\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\left((1+\alpha)^2(1-\nu)F_1+\frac{1}{4}\right)2\nu\right]\right\}\,; \tag{6.113}$$

e S_9 é o agrupamento de S_3 e I_P

$$S_9 = \frac{(\Lambda^2 - \mu^2)}{\mu^2}\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\int_{-1}^{1} d\rho \left[\frac{\Lambda^2}{1+\rho} + \frac{\Lambda^2 - \mu^2}{1-\rho}\right]\frac{1}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_2^2}\,. \tag{6.114}$$

Na figura 6.15 graficamos a amplitude $\mathcal{T}_{18}$, para $I^{(1)} \cdot I^{(2)} = 1$, em função do módulo de $\boldsymbol{\Delta}$, sem levar em conta o termo constante.

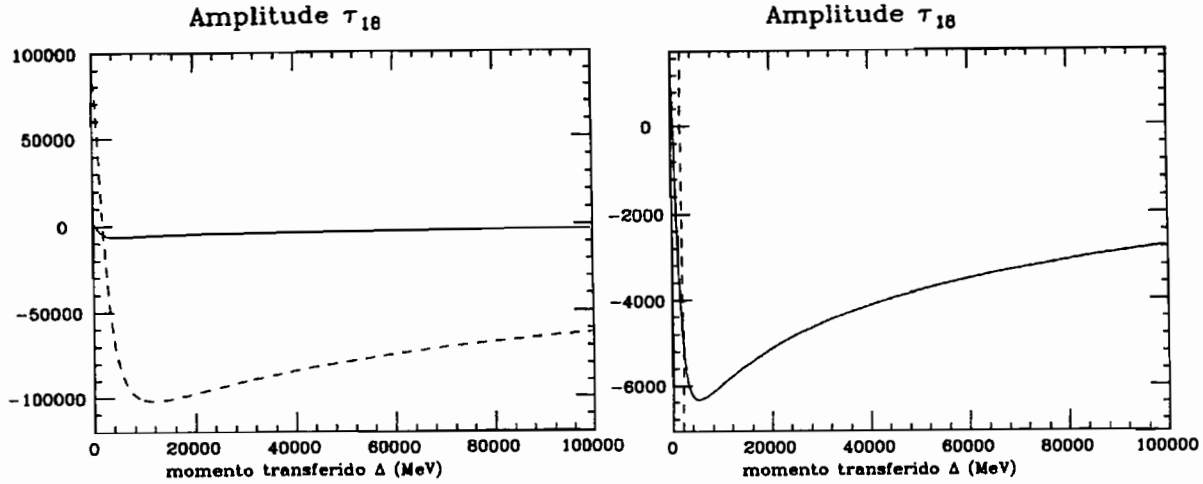


Figura 6.15: *Amplitude $\mathcal{T}_{18}$ no espaço dos momentos, como função do módulo do momento transferido, sem considerar o termo independente do momento. O gráfico da esquerda mostra que função cresce rapidamente com o aumento de Λ (1 GeV $\rightarrow$ 2 GeV). O gráfico da direita é uma ampliação da escala, que fornece mais detalhes da curva $\Lambda = 1$ GeV.*

6.3 Cálculo da iteração da troca de um píon

Como visto no item 6.1, para o cálculo do potencial NN devido à troca de dois píons, é necessário subtrair a iteração da troca de um píon.

De acordo com o item 5.5, equação 5.65, o "kernel" do potencial devido à troca de dois píons, na linguagem da equação de Bethe-Salpeter, é dado pela expressão

$$\mathcal{U}^{(4)}(q', q \mid W) = \mathcal{K}^{(4)}(q', q \mid W) +$$

$$+ \int \frac{\mathrm{d}^4 z}{(2\pi)^4}\, \mathcal{K}^{(2)}(q', z \mid W)\, [\mathcal{G}(z \mid W) - g(z \mid W)]\, \mathcal{K}^{(2)}(z, q \mid W), \tag{6.115}$$

onde os índices (2) e (4) indicam interações de segunda (1píon) e quarta (2 píons) ordens, respectivamente; $\mathcal{K}^{(4)}$ é a contribuição do núcleo dos diagramas irredutíveis até um loop, $\mathcal{K}^{(2)}\mathcal{G}\mathcal{K}^{(2)}$ é o núcleo do diagrama tipo caixa e $\mathcal{K}^{(2)}g\mathcal{K}^{(2)}$ é o núcleo da iteração da troca de um píon. O propagador g é obtido de $\mathcal{G}$ através da prescrição de Blankenbecler e Sugar (BbS) e é dado na equação 5.53, para o referencial de centro de massa.

Em termos dos diagramas de Feynman, podemos representar a iteração através da figura 6.16, onde usamos as variáveis relativas da equação de Bethe-Salpeter (BS),

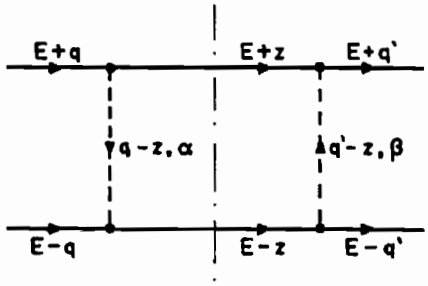


Figura 6.16: *Diagrama da iteração da troca de um píon, com os quadrimomentos expressos em termos das variáveis relativas de BS.*

equações 5.7, 5.8, 5.6 e 5.37, fazendo a associação $\frac{1}{2}W = E$. Utilizando as regras de Feynman, a expressão da amplitude é calculada substituindo-se o propagador relativístico $\mathcal{G}$ pelo não-relativístico g, obtendo

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}_I &= -2\pi i \int \frac{\mathrm{d}^4 z}{(2\pi)^4} \left\{ \eta^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}_1') \left[\frac{g}{2m} (\not{q}' - \not{z}) \gamma_5 \tau_\beta \right] \left[-\frac{g}{2m} (\not{q} - \not{z}) \gamma_5 \tau_\alpha \right] u(\mathbf{p}_1) \eta \right\}^{(1)} \\ &\times \frac{i}{[(q-z)^2 - \mu^2]} \frac{i}{[(q'-z)^2 - \mu^2]} (i)^2 \frac{[\gamma^0 E_{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{z} + m]^{(1)} [\gamma^0 E_{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{z} + m]^{(2)}}{4E_{\mathbf{z}} (E^2 - E_{\mathbf{z}}^2)} \\ &\times \left\{ \eta^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}_2') \left[-\frac{g}{2m} (\not{q}' - \not{z}) \gamma_5 \tau_\beta \right] \left[\frac{g}{2m} (\not{q} - \not{z}) \gamma_5 \tau_\alpha \right] u(\mathbf{p}_2) \eta \right\}^{(2)} \cdot \delta(z_0) \end{aligned} \tag{6.116}$$

onde as massas dos píons e nucleons possuem partes imaginárias infinitesimais $+i\epsilon$, conforme prescrição de Feynman. Reescrevendo o propagador g em termos dos operadores de projeção de energia positiva, e lembrando que os espaços de spin e isospin são desacoplados, temos

$$i\mathcal{T}_I = \left(\eta^\dagger \tau_\beta \tau_\alpha \eta\right)^{(1)} \left(\eta^\dagger \tau_\beta \tau_\alpha \eta\right)^{(2)} (i)^5 (-)^3 \left(\frac{g}{2m}\right)^4 \frac{1}{4} \frac{4m^2}{(2\pi)^3}$$

$$\times \int d^4z \frac{\left\{\bar{u}(\mathbf{p}_1')\left[(\not{z}-\not{q}')\gamma_5\Lambda_+^{(1)}(\mathbf{z})(\not{z}-\not{q})\gamma_5\right]u(\mathbf{p}_1)\right\}^{(1)}}{[(z-q)^2-\mu^2]\,[(z-q')^2-\mu^2]\,E_{\mathbf{z}}\,[E^2-E_{\mathbf{z}}^2]]}$$

$$\times \left\{\bar{u}(\mathbf{p}_2')\left[(\not{z}-\not{q}')\gamma_5\Lambda_+^{(2)}(-\mathbf{z})(\not{z}-\not{q})\gamma_5\right]u(\mathbf{p}_2)\right\}^{(2)}\cdot\delta(z_0)$$

Integrando em z_0, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_I &= -\left(\frac{g}{2m}\right)^4\left(3-2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right)\frac{4m^2}{4} \\
&\times \int\frac{d^3\mathbf{z}}{(2\pi)^3}\frac{\left\{\bar{u}(\mathbf{p}_1')\left[\gamma\cdot(\mathbf{z}-\mathbf{q}')\gamma_5\,\Lambda_+^{(1)}(\mathbf{z})\,\gamma\cdot(\mathbf{z}-\mathbf{q})\gamma_5\right]u(\mathbf{p}_1)\right\}^{(1)}}{[(\mathbf{z}-\mathbf{q})^2+\mu^2]\,[(\mathbf{z}-\mathbf{q}')^2+\mu^2]\,E_{\mathbf{z}}\,[E^2-E_{\mathbf{z}}^2]} \\
&\times \left\{\bar{u}(\mathbf{p}_2')\left[\gamma\cdot(\mathbf{z}-\mathbf{q}')\gamma_5\,\Lambda_+^{(2)}(-\mathbf{z})\,\gamma\cdot(\mathbf{z}-\mathbf{q})\gamma_5\right]u(\mathbf{p}_2)\right\}^{(2)} \qquad (6.117)
\end{aligned}$$

Usando o operador projeção de energia positiva, equação 5.54 e notando que $\mathbf{q}=\mathbf{p}$, $\mathbf{q}'=\mathbf{p}'$, obtemos para o nucleon (1)

$$N_1=\sum_r\bar{u}_s(\mathbf{p}')\left[(\gamma\cdot\mathbf{z}-\gamma\cdot\mathbf{p}')\gamma_5\right]\mathrm{u}_r(\mathbf{z})\bar{\mathrm{u}}_r(\mathbf{z})\left[(\gamma\cdot\mathbf{z}-\gamma\cdot\mathbf{p})\gamma_5\right]u_s(\mathbf{p})\,.$$

Como a matriz γ_5 anticomuta com γ_μ, podemos rearranjar a expressão anterior na forma

$$N_1=\sum_r\bar{u}_s(\mathbf{p}')\left[(-\gamma\cdot\mathbf{p}'\gamma_5-\gamma_5\gamma\cdot\mathbf{z})\right]\mathrm{u}_r(\mathbf{z})\bar{\mathrm{u}}_r(\mathbf{z})\left[(\gamma\cdot\mathbf{z}\gamma_5+\gamma_5\gamma\cdot\mathbf{p})\right]u_s(\mathbf{p})\,. \qquad (6.118)$$

A equação de Dirac nos fornece as seguintes relações genéricas

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\mathbf{q}')(-\gamma\cdot\mathbf{q}') &= \bar{u}(\mathbf{q}')\left(mI-\gamma^0E\right), \\
(-\gamma\cdot\mathbf{q})u(\mathbf{q}) &= \left(mI-\gamma^0E\right)u(\mathbf{q}),
\end{aligned}$$

que, quando aplicadas em 6.118, fornecem

$$N_1=\sum_r\bar{u}_s(\mathbf{p}')\left[2mI-\gamma^0(E-E_{\mathbf{z}})\right]\gamma_5\mathrm{u}_r(\mathbf{z})\bar{\mathrm{u}}_r(\mathbf{z})\gamma_5\left[-2mI+\gamma^0(E-E_{\mathbf{z}})\right]u_s(\mathbf{p})$$

Retomando a expressão original para o propagador g e lembrando que $\gamma_5\gamma_5=1$, temos

$$\begin{aligned}
N_1 &= \bar{u}_s(\mathbf{p}')\left[2mI-\gamma^0(E-E_{\mathbf{z}})\right]\left(\gamma^0E_{\mathbf{z}}-\gamma\cdot\mathbf{z}+m\right)\left[2mI-\gamma^0(E-E_{\mathbf{z}})\right]u_s(\mathbf{p}), \\
&= \bar{u}_s(\mathbf{p}')\left[4m^2I\left(\gamma^0E_{\mathbf{z}}-\gamma\cdot\mathbf{z}+m\right)-4m(E-E_{\mathbf{z}})(E_{\mathbf{z}}I-m\gamma^0)\right. \\
&+ \left.(E-E_{\mathbf{z}})^2\left(\gamma^0E_{\mathbf{z}}+\gamma\cdot\mathbf{z}+m\right)\right]u_s(\mathbf{p})
\end{aligned}$$

Utilizando a notação definida em 6.9, temos

$$N_1 = (2m)^3\left[\gamma^{0\,(1)}E_{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\mathbf{z} - mI^{(1)}\right] - 2(2m)^2(E-E_{\mathbf{z}})\left[E_{\mathbf{z}}I^{(1)} - m\gamma^{0\,(1)}\right] + \\ + 2m(E-E_{\mathbf{z}})^2\left[\gamma^{0\,(1)}E_{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\mathbf{z} - mI^{(1)}\right]. \tag{6.119}$$

Para o nucleon (2), repetimos os mesmos passos para obter

$$N_2 = (2m)^3\left[\gamma^{0\,(2)}E_{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\gamma}^{(2)}\cdot\mathbf{z} - mI^{(2)}\right] - 2(2m)^2(E-E_{\mathbf{z}})\left[E_{\mathbf{z}}I^{(2)} - m\gamma^{0\,(2)}\right] + \\ + 2m(E-E_{\mathbf{z}})^2\left[\gamma^{0\,(2)}E_{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\gamma}^{(2)}\cdot\mathbf{z} - mI^{(2)}\right]. \tag{6.120}$$

Substituindo 6.119 e 6.120 em 6.117, obtemos

$$\mathcal{T}_I = -\left(3 - 2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right)\frac{g^4}{4}\frac{1}{4m^2} \\ \times \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{z}}{(2\pi)^3}\frac{N_1\cdot N_2}{[(\mathbf{z}-\mathbf{p})^2+\mu^2]\,[(\mathbf{z}-\mathbf{p}')^2+\mu^2]\,E_{\mathbf{z}}\,(E^2-E_{\mathbf{z}}^2)}$$

onde

$$N_1\cdot N_2 = \left\{4m^2\left[\gamma^{0\,(1)}E_{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\mathbf{z} - mI^{(1)}\right] - 4m(E-E_{\mathbf{z}})\left[E_{\mathbf{z}}I^{(1)} - m\gamma^{0\,(1)}\right] + \right. \\ + \left.(E-E_{\mathbf{z}})^2\left[\gamma^{0\,(1)}E_{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\mathbf{z} - mI^{(1)}\right]\right\}\times\left\{4m^2\left[\gamma^{0\,(2)}E_{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\gamma}^{(2)}\cdot\mathbf{z} - mI^{(2)}\right] - \right. \\ - \left.4m(E-E_{\mathbf{z}})\left[E_{\mathbf{z}}I^{(2)} - m\gamma^{0\,(2)}\right] + 2m(E-E_{\mathbf{z}})^2\left[\gamma^{0\,(2)}E_{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\gamma}^{(2)}\cdot\mathbf{z} - mI^{(2)}\right]\right\}$$

Este produto contém a expressão de Lomon e Partovi (LP) para a iteração (termo proporcional a $(4m)^2$), obtida através do uso do acoplamento pseudoescalar entre o píon e o nucleon. Assim, ao utilizarmos o acoplamento pseudovetor aparecem contribuições de ordem superior no momento do píon, exatamente como ocorreu nos diagramas tipo caixa e cruzado. Entretanto, aqui, os termos a mais apresentam o coeficiente $(E-E_{\mathbf{z}})$, que é nulo no polo do denominador, o que nos leva a considerar para esse produto apenas os termos de primeira ordem em $(E-E_{\mathbf{z}})$. Portanto, o produto no numerador pode ser escrito na forma

$$N_1\cdot N_2 = 16m^4\left[\gamma^{0\,(1)}E_{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\mathbf{z} - mI^{(1)}\right]\left[\gamma^{0\,(2)}E_{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\gamma}^{(2)}\cdot\mathbf{z} - mI^{(2)}\right] - \\ - 16m^3(E-E_{\mathbf{z}})\left\{\left[E_{\mathbf{z}}I^{(1)} - m\gamma^{0\,(1)}\right]\left[\gamma^{0\,(2)}E_{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\gamma}^{(2)}\cdot\mathbf{z} - mI^{(2)}\right] + \right. \\ + \left.\left[\gamma^{0\,(1)}E_{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\mathbf{z} - mI^{(1)}\right]\left[E_{\mathbf{z}}I^{(2)} - m\gamma^{0\,(2)}\right]\right\} + O(E-E_{\mathbf{z}})^2\ldots$$

Abrindo os produtos de matrizes gama, obtemos

$$
\begin{aligned}
N_1 \cdot N_2 &= 16m^4 \left\{ E_{\mathbf{z}}^2 \gamma^{0(1)} \cdot \gamma^{0(2)} + E_{\mathbf{z}} \left[\gamma^{0(1)} \left(\boldsymbol{\gamma}^{(2)} \cdot \mathbf{z} - mI^{(2)} \right) - \right. \right. \\
&- \left. \left(\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \mathbf{z} + mI^{(1)} \right) \gamma^{0(2)} \right] - \left(\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \mathbf{z} + mI^{(1)} \right) \left(\boldsymbol{\gamma}^{(2)} \cdot \mathbf{z} - mI^{(2)} \right) \Big\} - \\
&- 16m^3 (E - E_{\mathbf{z}}) \left\{ \left(E_{\mathbf{z}}^2 + m^2 \right) \left(\gamma^{0(1)} \cdot I^{(2)} + I^{(1)} \cdot \gamma^{0(2)} \right) - \right. \\
&- E_{\mathbf{z}} \left[I^{(2)} \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \mathbf{z} - I^{(1)} \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \cdot \mathbf{z} + 2m \left(I^{(1)} \cdot I^{(2)} + \gamma^{0(1)} \cdot \gamma^{0(2)} \right) \right] + \\
&+ \left. \left[\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \mathbf{z} \gamma^{0(2)} - \gamma^{0(1)} \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \cdot \mathbf{z} \right] \right\}
\end{aligned}
$$

Vamos utilizar o seguinte artifício: nos termos cujo coeficiente é $E_{\mathbf{z}}^2$, somaremos e subtrairemos E^2, com a finalidade de obter o cancelamento do polo no denominador. Chamando de D o denominador da integral da iteração, temos

$$
\frac{N_1 \cdot N_2}{D} = -16m^4 \left\{ \frac{1}{D_E} \times \gamma^{0(1)} \cdot \gamma^{0(2)} + \right. \tag{6.121}
$$

$$
+ \frac{1}{D_W} \times \left[\left(\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \mathbf{z} + mI^{(1)} \right) \gamma^{0(2)} - \gamma^{0(1)} \left(\boldsymbol{\gamma}^{(2)} \cdot \mathbf{z} - mI^{(2)} \right) \right] + \tag{6.122}
$$

$$
+ \left. \frac{1}{D_T} \times \left[\left(\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \mathbf{z} + mI^{(1)} \right) \left(\boldsymbol{\gamma}^{(2)} \cdot \mathbf{z} - mI^{(2)} \right) - E^2 \gamma^{0(1)} \cdot \gamma^{0(2)} \right] \right\} + \tag{6.123}
$$

$$
+ 16m^3 \left\{ -\frac{1}{D_{PI}} \times \left[\gamma^{0(1)} \cdot I^{(2)} + I^{(1)} \cdot \gamma^{0(2)} \right] + \right. \tag{6.124}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1}{D_E} \times \left[E \left(\gamma^{0(1)} \cdot I^{(2)} + I^{(1)} \cdot \gamma^{0(2)} \right) + 2m \left(I^{(1)} \cdot I^{(2)} + \gamma^{0(1)} \cdot \gamma^{0(2)} \right) + \right. \\
&+ \left. \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \mathbf{z} I^{(2)} - I^{(1)} \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \cdot \mathbf{z} \right] +
\end{aligned} \tag{6.125}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1}{D_W} \left[2mE \left(I^{(1)} \cdot I^{(2)} + \gamma^{0(1)} \cdot \gamma^{0(2)} \right) + \left(m^2 + E^2 \right) \left(\gamma^{0(1)} \cdot I^{(2)} + I^{(1)} \cdot \gamma^{0(2)} \right) + \right. \\
&+ \left. \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \mathbf{z} \left(EI^{(2)} + m\gamma^{0(2)} \right) - \left(EI^{(1)} + m\gamma^{0(1)} \right) \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \cdot \mathbf{z} \right] -
\end{aligned} \tag{6.126}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{E}{D_T} \left[2mE \left(I^{(1)} \cdot I^{(2)} + \gamma^{0(1)} \cdot \gamma^{0(2)} \right) + \left(m^2 + E^2 \right) \left(\gamma^{0(1)} \cdot I^{(2)} + I^{(1)} \cdot \gamma^{0(2)} \right) + \right. \\
&+ \left. \left. \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \mathbf{z} \left(EI^{(2)} + m\gamma^{0(2)} \right) - \left(EI^{(1)} + m\gamma^{0(1)} \right) \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \cdot \mathbf{z} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{6.127}
$$

onde fizemos as seguintes associações :

$$D_{PI} = \left[(\mathbf{z}-\mathbf{p}')^2+\mu^2\right]\left[(\mathbf{z}-\mathbf{p})^2+\mu^2\right] \tag{6.128}$$

$$D_E = E_{\mathbf{z}}\left[(\mathbf{z}-\mathbf{p}')^2+\mu^2\right]\left[(\mathbf{z}-\mathbf{p})^2+\mu^2\right] \tag{6.129}$$

$$D_W = \left[(\mathbf{z}-\mathbf{p}')^2+\mu^2\right]\left[(\mathbf{z}-\mathbf{p})^2+\mu^2\right]\left(E^2-E_{\mathbf{z}}^2\right) \tag{6.130}$$

$$D_T = \left[(\mathbf{z}-\mathbf{p}')^2+\mu^2\right]\left[(\mathbf{z}-\mathbf{p})^2+\mu^2\right]E_{\mathbf{z}}\left(E^2-E_{\mathbf{z}}^2\right) \tag{6.131}$$

Assim, a amplitude para a iteração da troca de um píon pode ser escrita como

$$\mathcal{T}_I = -\left(3-2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right)\frac{g^4}{4}\frac{1}{4m^2}\cdot\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{z}}{(2\pi)^3}\frac{N_1\cdot N_2}{D} \tag{6.132}$$

onde $\frac{N_1\cdot N_2}{D}$ é dado pelas expressões da página anterior.

A expressão anterior contém sete integrais. Pela ordem, a soma das três primeiras é a iteração segundo LP e as quatro integrais adicionais são conseqüência do uso do acoplamento pseudovetor na interação πN. O cálculo de cada integral é feito na segunda parte do apêndice C, e o resultado é o seguinte

$$\mathcal{T}_I = -\left(3-2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right)\frac{g^4}{(4\pi)^2}\left\{-2m^2\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}\frac{\gamma^{0(1)}\cdot\gamma^{0(2)}}{D_\zeta}\right. \tag{6.133}$$

$$+\ 4m^2\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta}d\zeta\int_0^\infty d\epsilon\,\frac{N_{IA}}{D_\square^2} \tag{6.134}$$

$$-\ 2m^2\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta}d\zeta\int_{\sqrt{\zeta}}^\infty d\epsilon\left[\frac{\boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{(2)}}{D_\square}-\frac{2N_{IB}}{D_\square^2}\right] \tag{6.135}$$

$$-\ 4mE\int_0^\infty d\epsilon\int_0^1 d\beta\,\frac{\gamma^{0(1)}\cdot\boldsymbol{I}^{(2)}+\boldsymbol{I}^{(1)}\cdot\gamma^{0(2)}}{D_\beta} \tag{6.136}$$

$$+\ 2m\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}\frac{N_{IC}}{D_\zeta} \tag{6.137}$$

$$\left.-\ 4mE\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta}d\zeta\int_{\sqrt{\zeta}}^\infty d\epsilon\frac{N_{ID}}{D_\square^2}\right\} \tag{6.138}$$

onde $D_\square$ é dado por 6.81, D_β e D_ζ por

$$D_\beta = \boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta)+\epsilon^2E^2+\mu^2 \tag{6.139}$$

$$D_\zeta = \boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta-\zeta)+\mu^2(1-\zeta)-\zeta^2(E^2-m^2)+\zeta E^2 \tag{6.140}$$

e os numeradores por

$$N_{IA} = \epsilon^2 E^2 \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)} - \zeta^2 \left[E\gamma^{0\,(1)} - mI^{(1)}\right] \cdot \left[E\gamma^{0\,(2)} - mI^{(2)}\right] \tag{6.141}$$

$$N_{IB} = E^2 \gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)} + \left[(1-\zeta)E\gamma^{0\,(1)} + m\zeta I^{(1)}\right]\left[(1-\zeta)E\gamma^{0\,(2)} + m\zeta I^{(2)}\right] \tag{6.142}$$

$$N_{IC} = (2-\zeta)E\left(\gamma^{0\,(1)} \cdot I^{(2)} + I^{(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)}\right) + 2m\left(\gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)} + \zeta I^{(1)} \cdot I^{(2)}\right) \tag{6.143}$$

$$N_{ID} = 2mE\left[\zeta I^{(1)} \cdot I^{(2)} + (2-\zeta)\gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)}\right] + \left[m^2\zeta + (2-\zeta)E^2\right] \times \left(\gamma^{0\,(1)} \cdot I^{(2)} + I^{(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)}\right) \tag{6.144}$$

Retomando as expressões da amplitude $\mathcal{T}_9$, equação 6.22, e utilizando as abreviações dadas acima, a amplitude total $\mathcal{T}_9 - \mathcal{T}_I$ pode ser escrita como

$$\mathcal{T}_9 - \mathcal{T}_I = \left(3 - 2\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}\right) \frac{g^4}{(4\pi)^2} \left\{ 2m^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta\, \zeta\, \frac{\gamma^{\mu\,(1)}\gamma_\mu^{(2)}}{D_\zeta} \right. \tag{6.145}$$

$$- 4m^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \left[\int_0^\zeta d\epsilon - \int_0^\infty d\epsilon\right] \frac{N_{IA}}{D_\Box^2} \tag{6.146}$$

$$- 2m^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_{\sqrt{\zeta}}^\infty d\epsilon \left[\frac{\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)}}{D_\Box} - \frac{2N_{IB}}{D_\Box^2}\right] \tag{6.147}$$

$$- 2m^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \frac{\gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)}}{D_\zeta} \tag{6.148}$$

$$- 4mE \int_0^\infty d\epsilon \int_0^1 d\beta\, \frac{\gamma^{0\,(1)} \cdot I^{(2)} + I^{(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)}}{D_\beta} \tag{6.149}$$

$$+ 2m \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta\, \zeta^{-1/2} \frac{N_{IC}}{D_\zeta} \tag{6.150}$$

$$\left. - 4mE \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_{\sqrt{\zeta}}^\infty d\epsilon \frac{N_{ID}}{D_\Box^2} \right\} \tag{6.151}$$

Rotulando cada integral por uma letra, obtemos

$$\mathcal{T}_9 - \mathcal{T}_I = \left(3 - 2\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}\right) \frac{g^4}{(4\pi)^2} \left\{I_{9A} + I_{9B} + I_{9C} + I_{9D} + I_{9E} + I_{9F} + I_{9G} + I_{9H}\right\} \tag{6.152}$$

onde I_{9A} é dada por 6.145, I_{9B} por 6.146, I_{9C} pela primeira integral de 6.147, I_{9D} por 6.148, I_{9E} pela segunda integral de 6.147, I_{9F} por 6.149, I_{9G} por 6.150 e I_{9H} por 6.151.

Na integral I_{9B}, o intervalo de integração em ϵ passa a ser de ζ a ∞, eliminando o corte que existe no limiar para $\epsilon = 0$. É importante notar que essa eliminação ocorre sem que seja feita nenhuma aproximação. Conforme discutido no capítulo 5, esse cancelamento é conseqüência de $\mathcal{G}$ e g terem a mesma estrutura de corte na região física. Após o limiar, a próxima singularidade só ocorre para $E = m + \mu$, ou seja, o corte em energia é removido para o limiar da produção de dois píons, onde o presente potencial não é mais válido. Assim, nossas expressões são bem comportadas até o limiar da produção de um píon, que equivale à uma energia de laboratório de aproximadamente 280 MeV.

6.4 Redução não-relativística do potencial

O potencial no espaço dos momentos é obtido a partir da amplitude $\mathcal{T}$, através da expressão 6.1, que escrevemos abaixo de maneira um pouco diferente:

$$V(\mathbf{p}', \mathbf{p} \mid E) = -\sqrt{\frac{1}{4E_{\mathbf{p}'}m}} \sum_{i=1}^{19} \mathcal{T}_i(\mathbf{p}', \mathbf{p} \mid E) \sqrt{\frac{1}{4E_{\mathbf{p}}m}} \tag{6.153}$$

onde a amplitude 19 é a iteração que deve ser somada com o sinal trocado. É importante notar que $E^2 - m^2 = \mathbf{p}^2$, $\mathbf{q}^2$ e $\mathbf{q}'^2$ são iguais na camada de massa.

Reescrevendo a expressão acima em termos das variáveis Q e Δ, equações 5.27 e 5.28, temos:

$$V(\boldsymbol{\Delta}, \mathbf{Q} \mid E) = -\frac{1}{\sqrt{m^2 + \mathbf{Q}^2 + \boldsymbol{\Delta}^2/4}} \frac{1}{4m} \sum_{i=1}^{19} \mathcal{T}_i(\boldsymbol{\Delta}, \mathbf{Q} \mid E) \tag{6.154}$$

onde usamos:

$$\sqrt{E_{\mathbf{p}'}} = \sqrt{E_{\mathbf{p}}} = \left\{m^2 + \mathbf{Q}^2 + \boldsymbol{\Delta}^2/4\right\}^{1/2} \tag{6.155}$$

Conforme veremos na próxima seção, uma dependência em $\mathbf{Q}$ no espaço dos momentos ocasiona um potencial dependente do operador momento $\hat{\mathbf{P}}$ no espaço de configuração, fato conhecido como "não-localidade". Ao estudarem a não-localidade do potencial, Partovi e Lomon [*PL 70*] mostraram que a expansão de um potencial não-local $V(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ em potências do operador momento $\hat{\mathbf{P}}$ é equivalente à expansão de $V(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\Delta})$ em torno de $\mathbf{Q} = 0$.

Dessa forma, para obtermos um potencial local que possa ser utilizado na equação de Schrödinger, devemos expandir a amplitude em torno de $\mathbf{Q} = 0$ até um número de termos conveniente. Segundo Hoshizaki e Machida [*HM 62*], a expansão do potencial em μ/m é errônea, enquanto que a expansão em $\mathbf{Q}/m$ é apropriada para valores de $\mathbf{Q}$ no intervalo

$0 \leq \mid \mathbf{Q} \mid \leq 8\mu$. Expandindo o potencial até o termo de 1ª ordem em $\frac{\mathbf{Q}}{m}$, todas as não-localidades se anulam, exceto a do termo spin-órbita. Naturalmente essa expansão é falha para curtas distâncias, onde os termos não locais são importantes para a dinâmica. Como regra geral, a expansão de $V(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ em termos do operador momento $\hat{\mathbf{P}}$ vale para distâncias onde o potencial é uma fração pequena da massa do nucleon. Lomon e Partovi sugerem o valor $\frac{1}{2}m$ como valor limite para o potencial. Para distâncias menores, onde V excede $\frac{1}{2}m$, a expansão já não reflete a realidade, não importando o número de termos em $\hat{\mathbf{P}}$. Segundo LP, esse fato demonstra a impossibilidade de se obter uma representação potencial simples para curtas distâncias, gerada pela teoria de campos. Ainda segundo LP, a transição entre a região local e a não local é abrupta, em torno de $r \sim 1/4\mu$. Antecipando o capítulo 7, nosso potencial está bem abaixo de $\frac{1}{2}m$ para $r \geq 1/2\mu$, tornando-se próximo desse valor para $r \sim 1/3\mu$. Logo, as expressões para o nosso potencialtornam-se razoáveis para $r > 1/3\mu \cong 0.5$ fm.

É interessante discutirmos também a dependência do potencial com a energia. Como visto seção anterior, o polo no limiar $E = m$ é cancelado ao subtrairmos a iteração. A próxima singularidade só ocorre para a energia de 525 MeV, o que excede o domínio de validade do nosso potencial. Entretanto, segundo LP, se desejarmos estudar o potencial como função da energia, não podemos fazer a expansão em $\frac{\mathbf{Q}}{m}$ só até o primeiro termo. Termos da ordem de $\frac{\mathbf{Q}^2}{m^2}$ se transformam em $\frac{E^2-m^2}{m^2}$ para r grandes, e devem ser considerados em conjunto.

Resumindo o que foi exposto acima, as não-localidades do potencial no espaço de configuração estão quase totalmente contidas na região do caroço ("core"). A expansão do potencial em potências do operador momento $\hat{\mathbf{P}}$ <u>não vale</u> na região do caroço. A transição entre o interior e o exterior do caroço é abrupta, e se situa em torno de $r \sim 1/4\mu$. Por outro lado, o comportamento assintótico correto do potencial requer que os termos $\frac{\mathbf{Q}^2}{m^2}$ e $\frac{E^2-m^2}{m^2}$ sejam tratados da mesma forma, pois eles se cancelam nessa região. Assim, a inclusão de termos da ordem de $\hat{\mathbf{P}}^2$ no potencial requer a manutenção dessas duas quantidades.[3] O lado positivo desse fato é que o potencial fica mais preciso na região de transição. Por outro lado, o potencial torna-se dependente da energia. Por isso, optamos por reter termos até a ordem de $\frac{\mathbf{Q}}{m}$ apenas, obtendo um potencial local e independente da energia. Assim, termos da ordem de $\frac{E^2-m^2}{m^2}$, $\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}$ e $\frac{\mathbf{p}'^2}{m^2}$ são desprezados frente à unidade, e esperamos que essa aproximação seja boa para energias abaixo do limiar de produção

[3]Esse fato não é considerado na parametrização do Potencial de Bonn, onde são mantidos termos da ordem de $\frac{\mathbf{Q}^2}{m^2}$ juntamente com a aproximação $E = m$.

de píons e para distâncias maiores que $1/3\mu$.

Podemos, então, escrever o potencial não-relativístico no espaço dos momentos, a partir da expressão 6.155:

$$V(\boldsymbol{\Delta}, \mathbf{Q}) = -\frac{1}{4m^2} \sum_{i=1}^{19} t_i(\boldsymbol{\Delta}, \mathbf{Q}) \tag{6.156}$$

onde t_i é o limite não-relativístico de $\mathcal{T}_i$. Para obtermos t_i é necessário implementarmos a redução não-relativística tanto nas integrais de Feynman quanto nas matrizes de Dirac, o que é feito com detalhes no apêndice E.

Assim, podemos escrever o potencial no espaço dos momentos através da seguinte soma:

$$V(\boldsymbol{\Delta}, \mathbf{Q}) = \sum_{i=1}^{19} V_i(\boldsymbol{\Delta}, \mathbf{Q}) \tag{6.157}$$

onde a soma compreende as amplitudes não-relativísticas dadas a seguir.

$$V_1 = -\frac{3g^4}{(4\pi)^2}\frac{S_1}{m^2}\, I^{(1)}\cdot I^{(2)} \tag{6.158}$$

$$V_{5+6+10} = \frac{12g^4}{(4\pi)^2}\frac{S_2}{m^2}\, I^{(1)}\cdot I^{(2)} \tag{6.159}$$

$$\begin{aligned}
V_9 - V_I &= -\left[3 - 2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right]\frac{g^4}{(4\pi)^2}\frac{1}{m^2}\ \times \\
&\times\ \Big\{S_2\,\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} + S_{10}\,\boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{(2)} - S_{11}\,\boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{(2)} - S_{14} \\
&+\ S_{12}\Big[\Big((1-\nu)\gamma^{0\,(1)} + \nu I^{(1)}\Big)\Big((1-\nu)\gamma^{0\,(2)} + \nu I^{(2)}\Big) \\
&-\ 2\Big(\nu + (1-\nu)\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\Big)\Big] \\
&-\ S_{13}\ \Big[\Big((1-\nu)\gamma^{0\,(1)} + \nu I^{(1)}\Big)\Big((1-\nu)\gamma^{0\,(2)} + \nu I^{(2)}\Big) + \gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} \\
&-\ 2\Big(2 + \nu I^{(1)}\cdot I^{(2)} + (2-\nu)\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\Big)\Big]\Big\}
\end{aligned} \tag{6.160}$$

$$\begin{aligned}
V_{12} &= -\left[3 + 2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right]\frac{g^4}{(4\pi)^2}\frac{1}{m^2}\Big\{-S_2\ \left[\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} - \boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{(2)}\right] \\
&+\ 8S_{15}\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\Big\}
\end{aligned} \tag{6.161}$$

$$V_{13} = -\frac{3g^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{2m}{\mu}\right)\frac{G\mu^3}{m^2}\left[\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2} - S_3 + S_4\right]\ I^{(1)}\cdot I^{(2)} \tag{6.162}$$

$$V_{15+17} = \frac{3g^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{2m}{\mu}\right)^3\frac{G\mu^3}{2m^2}\{S_5 - S_6\}\ I^{(1)}\cdot I^{(2)} \tag{6.163}$$

$$V_{18} = -\frac{3}{(4\pi)^2}\left(\frac{2m}{\mu}\right)^2\frac{G^2\mu^6}{m^2}\ \{S_7 + S_8 + S_9 + C\}\ I^{(1)}\cdot I^{(2)} \tag{6.164}$$

onde as integrais e funções são dadas nas páginas 132 e 133.

Nesse ponto, podemos graficar as amplitudes dos diagramas caixa e cruzado, pois elas já não dependem da energia e não possuem não-localidades. Fazemos isso nas figuras 6.17 e 6.18, respectivamente.

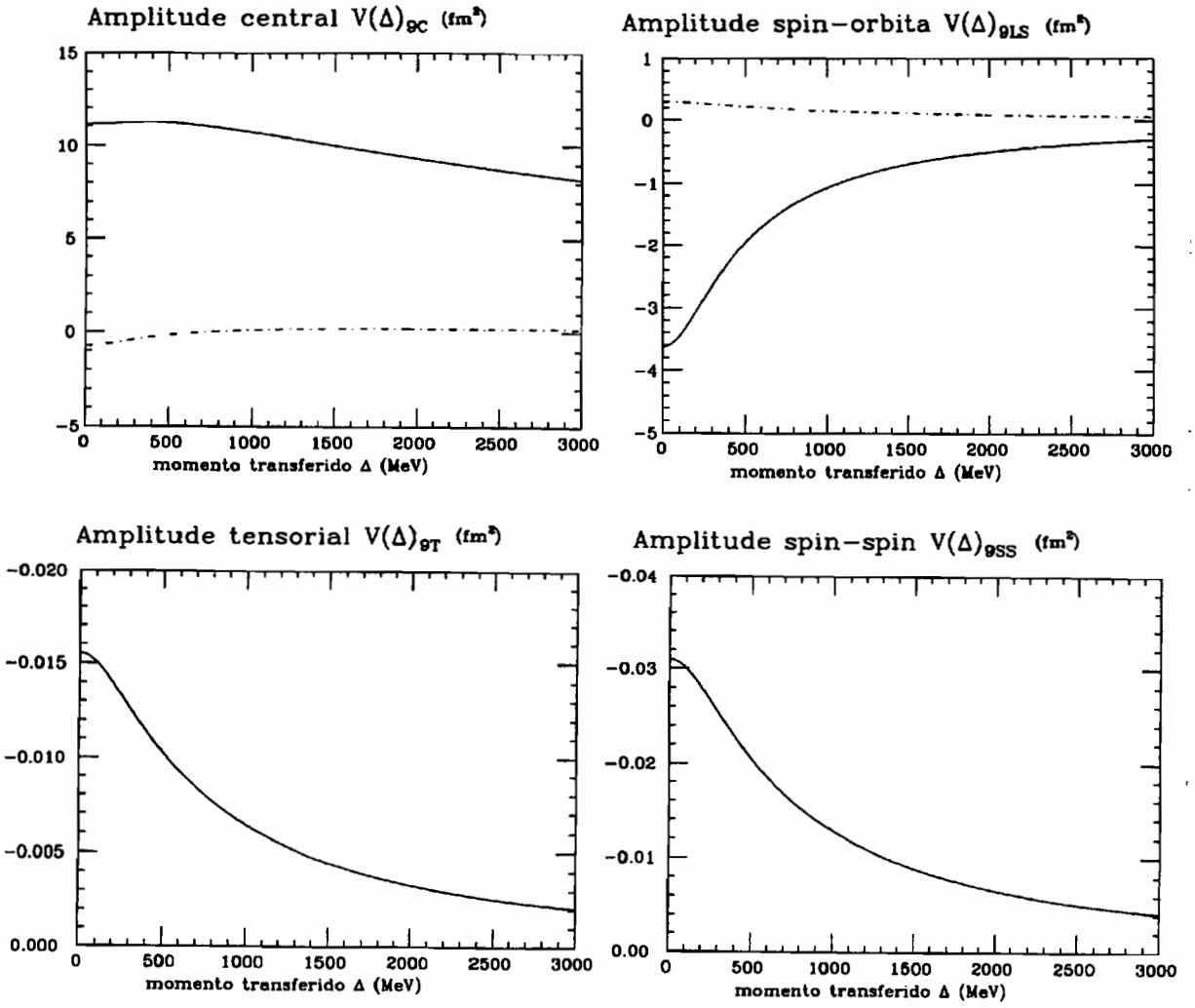


Figura 6.17: *Potencial V_9 menos a iteração do OPEP, no espaço dos momentos, para a parte central, spin-órbita, tensor e spin-spin, de acordo com a redução mostrada no apêndice E. A curva tracejada, mostrada nos dois primeiros gráficos, é o cálculo de Lomon e Partovi [PL 70].*

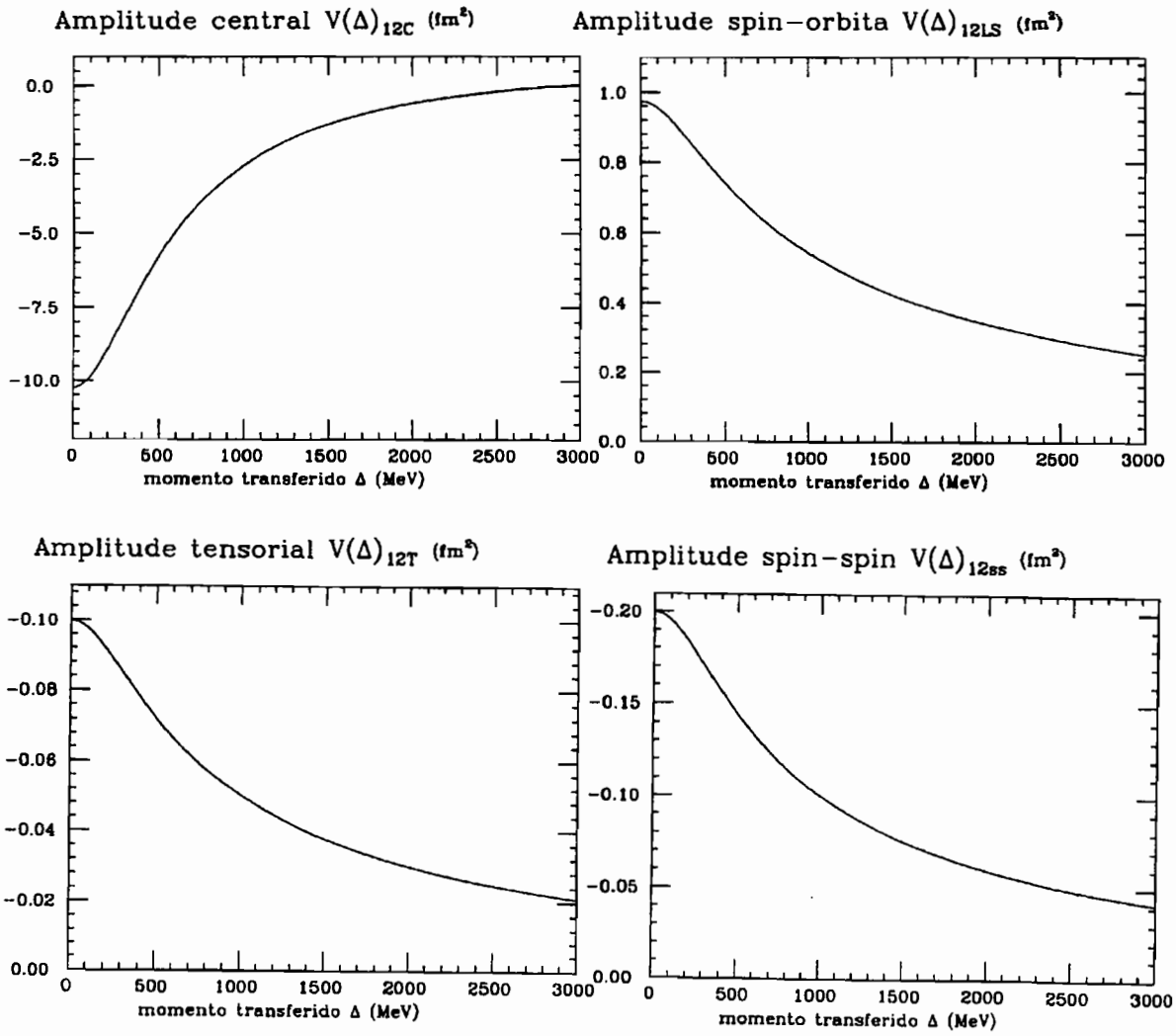


Figura 6.18: *Potencial V_{12} derivado do diagrama cruzado, no espaço dos momentos, para a parte central, spin-órbita, tensor e spin-spin.*

Integrais utilizadas nesse trabalho

$$S_1 = (\Lambda^2 - \mu^2)\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu \, \frac{F_1}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_1^2} \; ;$$

$$S_2 = m^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu \, \nu \, \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu^2)} \; ;$$

$$S_3 = (\Lambda^2 - \mu^2)\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\int_{-1}^{1} d\rho \frac{1}{1-\rho} \, \frac{1}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_2^2} \; ;$$

$$S_4 = \frac{(\Lambda^2 - \mu^2)}{\mu^2}\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu \left\{2\mu^2 - (1+\alpha)(1-\nu)M_1^2\right\} \frac{F_1}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_1^2} \; ;$$

$$S_5 = \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu \, \nu \left\{2\mu^2 - [1+\alpha(1-\nu)]M^2(\nu^2)\right\} \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu^2)}$$

$$S_6 = \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu \, \nu \left\{2\Lambda^2 - [1+\alpha(1-\nu)M_3^2\right\} \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_3^2} \; ;$$

$$S_7 = \left(\frac{\Lambda^2 - \mu^2}{\mu^2}\right)^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu \, \nu(1+\alpha)^2(1-\nu)M_1^4 \frac{F_1^2}{\left[\boldsymbol{\Delta}^2 + M_1^2\right]^2} \; ;$$

$$S_8 = \frac{(\Lambda^2 - \mu^2)}{\mu^2}\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu \, H(\alpha,\nu) \, \frac{F_1}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_1^2} \; ;$$

$$S_9 = \frac{(\Lambda^2 - \mu^2)}{\mu^2}\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\int_{-1}^{1} d\rho \left[\frac{\Lambda^2}{1+\rho} + \frac{\Lambda^2 - \mu^2}{1-\rho}\right] \frac{1}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_2^2} \; ;$$

$$S_{10} = m^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu \, \nu \int_1^{\infty} d\epsilon \, \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu^2\epsilon^2)} \; ;$$

$$S_{11} = m^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu \, \nu^{1/2} \int_1^{\infty} d\epsilon \, \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu\epsilon^2)} \; ;$$

$$S_{12} = m^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu \, \nu^{-1/2} \, \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu)} \; ;$$

$$S_{13} = m^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu \, \nu^{-1/2} \int_1^{\infty} \frac{d\epsilon}{\epsilon^2} \, \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu\epsilon^2)} \; ;$$

$$
\begin{aligned}
S_{14} &= m^2 \int_{-1}^{1} d\rho \int_0^{\infty} d\epsilon \, \frac{F_3}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_4^2} \; ; \\
S_{15} &= m^4 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^{1} d\nu \, \frac{\nu^3}{1-\nu} \, \frac{F_2^2}{\left[\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu^2)\right]^2} \; ; \\
C &= \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda^2 - \mu^2}{\mu^2}\right)^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^{1} d\nu \, \nu F_1 \; .
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \left[1 - \alpha^2 + \nu(1+\alpha)^2\right]^{-1} \\
F_2 &= \left[(1-\alpha^2)(1-\nu)\right]^{-1} \\
F_3 &= \left[(1+\rho)(1-\rho)\right]^{-1} \\
M(x) &= 2\sqrt{F_2\left(\mu^2 + \frac{m^2 x}{1-\nu}\right)} \\
M_1 &= 2\sqrt{F_1\left(\mu^2 + \frac{\Lambda^2 \nu}{1-\nu}\right)} \\
M_2 &= \sqrt{\frac{2\mu^2}{1-\rho} + \frac{2\Lambda^2}{1+\rho}} \\
M_3 &= 2\sqrt{F_2\left(\frac{m^2\nu^2}{1-\nu} + \frac{1+\alpha}{2}\mu^2 + \frac{1-\alpha}{2}\Lambda^2\right)} \\
M_4 &= 2\sqrt{F_3\left(\mu^2 + m^2\epsilon^2\right)} \\
H(\alpha,\nu) &= \left\{\mu^2 - M_1^2\left[(1+\alpha)(1-\nu) + \frac{\Lambda^2 - \mu^2}{\mu^2}\left((1+\alpha)^2(1-\nu)F_1 + \frac{1}{4}\right)2\nu\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Tabela 6.1:*Integrais e funções utilizadas neste trabalho.*

6.5 O potencial no espaço de configuração

A conexão entre os espaços de configuração e de momento é obtida através da transformada de Fourier. Para a interação NN, representada genericamente na figura 5.1, a transformada pode ser escrita formalmente por:

$$< \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2' \mid \hat{V} \mid \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 > \;=\; \int đ^3\mathbf{p}_1'\, đ^3\mathbf{p}_2'\, đ^3\mathbf{p}_1\, đ^3\mathbf{p}_2\; e^{-i\,[\,\mathbf{p}_1'\cdot\mathbf{r}_1'+\mathbf{p}_2'\cdot\mathbf{r}_2'-\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{r}_1-\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{r}_2\,]} \times$$

$$\times \;\; \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2'-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\; V(\mathbf{p}_1',\mathbf{p}_2',\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2) \tag{6.165}$$

onde a função δ traduz a condição de conservação do momento. Implementando as variáveis de Bethe-Salpeter dadas em 5.7 e 5.8, obtemos

$$< \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2' \mid \hat{V} \mid \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 >= \delta\left(\frac{\mathbf{r}_1'+\mathbf{r}_2'}{2}, \frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}\right) \int đ^3\mathbf{q}\, đ^3\mathbf{q}'\; e^{-i\,[\,\mathbf{q}'\cdot(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2')-\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,]}\; V(\mathbf{q}',\mathbf{q})$$

onde a função δ mostra que estamos no referencial de centro de massa, cuja origem permanece em repouso. Usando as coordenadas relativas de movimento:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2' \quad , \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{R}' = \frac{\mathbf{r}_1'+\mathbf{r}_2'}{2} \quad , \quad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2} \tag{6.166}$$

obtemos

$$< \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2' \mid \hat{V} \mid \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 >= \delta(\mathbf{R}'-\mathbf{R})V(\mathbf{r}',\mathbf{r})$$

onde $V(\mathbf{r}',\mathbf{r})$ é o potencial no espaço de configuração, dado por

$$V(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = \int đ^3\mathbf{q}\, đ^3\mathbf{q}' e^{-i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{r}}\; V(\mathbf{q}',\mathbf{q})\; e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tag{6.167}$$

Utilizando as variáveis Q e Δ, equações 5.9, obtemos:

$$V(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = \int đ^3\mathbf{Q}\, đ^3\boldsymbol{\Delta}\; e^{-i\,\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}\; V(\boldsymbol{\Delta},\mathbf{Q})\; e^{-i\,\boldsymbol{\Delta}\cdot\left(\frac{\mathbf{r}'+\mathbf{r}}{2}\right)} \tag{6.168}$$

Para o caso particular onde V não depende de $\mathbf{Q}$, obtemos:

$$V(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\; V(\mathbf{r})$$

onde

$$V(\mathbf{r}) = \int đ^3\boldsymbol{\Delta}\, e^{-i\,\boldsymbol{\Delta}\cdot\mathbf{r}}\, V(\boldsymbol{\Delta}) \tag{6.169}$$

O potencial que não é diagonal no espaço de configuração é chamado de não-local. Assim, a não-localidade ocorre quando existe uma dependência em $\mathbf{Q}$ no espaço dos momentos. Portanto, é necessário examinarmos a transformada para o caso onde V dependa linearmente de $\mathbf{Q}$, pois os termos de ordem superior são desprezados na redução não-relativística.

Seja o potencial no espaço dos momentos dado por:

$$V(\boldsymbol{\Delta}, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}\, f(\boldsymbol{\Delta})$$

De acordo com 6.168 temos:

$$V_Q(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \int đ^3\mathbf{Q}\, đ^3\boldsymbol{\Delta}\, e^{-i\,\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}\, \mathbf{Q}\, f(\boldsymbol{\Delta})\, e^{i\,\boldsymbol{\Delta}\cdot\left(\frac{\mathbf{r}'+\mathbf{r}}{2}\right)}$$

Usando a relação

$$\mathbf{Q}\, e^{-i\,\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})} = -i\,\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}\, e^{-i\,\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}\ ,$$

a integral na variável $\mathbf{Q}$ pode ser feita e então obtemos:

$$V_Q(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = (-i)\, f\left(\frac{\mathbf{r}'+\mathbf{r}}{2}\right) \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}\, \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) \tag{6.170}$$

onde

$$f\left(\frac{\mathbf{r}'+\mathbf{r}}{2}\right) = \int đ^3\boldsymbol{\Delta}\, e^{-i\,\boldsymbol{\Delta}\cdot\mathbf{r}}\, f(\boldsymbol{\Delta})$$

O operador V_Q atuando em um estado Ψ produz:

$$\begin{aligned} < \mathbf{r} \mid V_Q \mid \Psi > &= -i \int d^3\mathbf{r}' < \mathbf{r} \mid V \mid \mathbf{r}' >< \mathbf{r}' \mid \Psi > \\ &= -i \int d^3\mathbf{r}'\, f\left(\frac{\mathbf{r}'+\mathbf{r}}{2}\right) \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}\, \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{6.171}$$

Integrando 6.171 por partes e usando a função δ, obtemos:

$$\begin{aligned} < \mathbf{r} \mid V_Q \mid \Psi > &= i\left\{ f(\mathbf{r})[\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}\Psi(\mathbf{r})] + \Psi(\mathbf{r})\frac{1}{2}[\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r})] \right\} \\ &= \frac{i}{2}\left\{ f(\mathbf{r})[\boldsymbol{\nabla}\Psi(\mathbf{r})] + \boldsymbol{\nabla}[f(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})] \right\} \end{aligned}$$

Usando a forma do operador momento no espaço de configuração, $\hat{\mathbf{P}} = -i\boldsymbol{\nabla}$, obtemos:

$$< \mathbf{r} \mid V_Q \mid \Psi > = \frac{1}{2}[\hat{\mathbf{P}} f(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{P}}]\Psi(\mathbf{r}) \tag{6.172}$$

Assim, observamos que uma dependência linear em $\mathbf{Q}$ no espaço dos momentos é equivalente a um potencial linear no operador $\hat{\mathbf{P}}$ no espaço de configuração. Podemos então fazer a seguinte associação :

Representação dos Momentos	Representação das coordenadas
$f(\boldsymbol{\Delta})$	$f(\mathbf{r})$
$\mathbf{Q}f(\boldsymbol{\Delta})$	$-\frac{1}{2}[\hat{\mathbf{P}}f(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{P}}\ ]$

Tabela 6.1: *Resultado da transformada de Fourier para o potencial, até a ordem* $\frac{\mathbf{Q}}{m}$

Com os resultados da tabela 6.1 podemos passar os operadores central, spin-órbita, tensor e spin-spin para o espaço de configuração, obtendo as seguintes correspondências [*PL 70* , *CV 63*]

$$f(\boldsymbol{\Delta}) \longrightarrow f(r) \tag{6.173}$$

$$f(\boldsymbol{\Delta})\boldsymbol{\Omega}_{so} \longrightarrow \frac{f'(r)}{r}\,\Omega^c_{so} \tag{6.174}$$

$$f(\boldsymbol{\Delta})\boldsymbol{\Omega}_{T} \longrightarrow \left[f''(r) - \frac{f'(r)}{r}\right]\,\Omega^c_{T} \tag{6.175}$$

$$f(\boldsymbol{\Delta})\boldsymbol{\Omega}_{ss} \longrightarrow -\left[f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)\right]\,\Omega^c_{ss} \tag{6.176}$$

onde os operadores no espaço de configuração são dados por

$$\begin{aligned}
\Omega^c_{so} &= \mathbf{S}\cdot(\mathbf{r}\wedge\mathbf{p}) \\
\Omega^c_{T} &= 3\,\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\hat{\mathbf{r}}\ \boldsymbol{\sigma}^{(2)}\cdot\hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \\
\Omega^c_{ss} &= \boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(2)}
\end{aligned}$$

Temos agora todas as informações necessárias para obter a representação integral do TPEP no espaço de configuração. Vamos mostrar essa transformação com detalhes apenas para V_1, pois as restantes são totalmente análogas. Todas as integrais e funções necessárias estão listadas nas páginas 132 e 133.

A. $V_1(r)$

O potencial não-relativístico $V_1(\boldsymbol{\Delta})$ é dado no apêndice E, expressão E.9:

$$V_1(\boldsymbol{\Delta}) = -\frac{3g^4}{(4\pi)^2}\,\frac{S_1}{m^2}\,\left[1 - \frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right]\,.$$

Calculemos inicialmente a contribuição central. Usaremos o índice C como rótulo do potencial, colocando o número da integral entre parênteses. Portanto, a transformada da parte central fornece:

$$V_C(1) = -\frac{3g^4}{(4\pi)^2}\,\frac{(\Lambda^2-\mu^2)}{m^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3\boldsymbol{\Delta}}{(2\pi)^3}\,e^{-i\,\boldsymbol{\Delta}\cdot\mathbf{r}}\int_{-1}^{1}d\alpha\int_0^1 d\nu\,\frac{F_1}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2}\,.$$

Invertendo a ordem de integração e usando a relação :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3\boldsymbol{\Delta}}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{-i\,\boldsymbol{\Delta}\cdot\mathbf{r}}}{\boldsymbol{\Delta}^2+a^2}=\frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{-ar}}{r} \tag{6.177}$$

obtemos:

$$V_C(1) = -\frac{3g^4}{(4\pi)^3}\left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{m^2}\right)\int_{-1}^{1}d\alpha\int_0^1 d\nu\;F_1\,\frac{e^{-rM_1}}{r} \tag{6.178}$$

Examinemos agora a parte spin-órbita (LS). Usando 6.168 temos:

$$\begin{aligned} V_{LS}(1) &= -\frac{3g^4}{(4\pi)^2}\,\frac{(\Lambda^2-\mu^2)}{m^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3\mathbf{Q}}{(2\pi)^3}\,\frac{d^3\boldsymbol{\Delta}}{(2\pi)^3}\,e^{-i\,\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}\,e^{-i\,\boldsymbol{\Delta}\cdot\left(\frac{\mathbf{r}'+\mathbf{r}}{2}\right)}\times \\ &\times\int_{-1}^{1}d\alpha\int_0^1 d\nu\,\frac{F_1}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2}\left[-\frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right] \end{aligned}$$

onde o operador $\boldsymbol{\Omega}_{so}$ depende linearmente de $\mathbf{Q}$. Utilizando a relação 6.175, obtemos:

$$V_{LS}(1) = -\frac{3g^4}{(4\pi)^2}\,\frac{(\Lambda^2-\mu^2)}{m^2}\left[-\frac{\Omega_{so}^c}{m^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right]\int_{-1}^{1}d\alpha\int_0^1 d\nu\;F_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3\boldsymbol{\Delta}}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\mathbf{r}}}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2}\,.$$

Usando 6.177 obtemos:

$$V_{LS}(1) = -\frac{3g^4}{(4\pi)^3}\,\frac{(\Lambda^2-\mu^2)}{2m^4}\int_{-1}^{1}d\alpha\int_0^1 d\nu\;[1+rM_1]\;F_1\,\frac{e^{-rM_1}}{r^3}\,, \tag{6.179}$$

onde usamos a relação:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ar}}{r}\right) = -\left[\frac{1}{r^2}+\frac{a}{r}\right]\,e^{-ar}$$

e omitindos o símbolo do operador por conveniência.

B. $V_{5+6+10}(r)$

O potencial $V_{5+6+10}(\boldsymbol{\Delta})$ é dado na expressão E.10

$$V_{5+6+10}(\boldsymbol{\Delta}) = \frac{12g^4}{(4\pi)^2}\,\frac{S_2}{m^2}\left[1-\frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right]\,.$$

Aplicando a transformada de maneira análoga à V_1, obtemos:

$$V_C(5+6+10) = \frac{12g^4}{(4\pi)^3}\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu\, F_2\, \frac{e^{-rM(\nu^2)}}{r} \tag{6.180}$$

$$V_{LS}(5+6+10) = \frac{6g^4}{(4\pi)^3}\,\frac{1}{m^2}\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu[1+rM(\nu^2)]\frac{e^{-rM(\nu^2)}}{r^3} \tag{6.181}$$

C. $V_9 - V_I\,(r)$

O potencial não-relativístico $V_9 - V_I\,(\boldsymbol{\Delta})$ é dado no apêndice E, expressão E.22

$$\begin{aligned}
V_9 - V_I\,(\boldsymbol{\Delta}) = &-\left[3 - 2\,\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right]\frac{g^4}{(4\pi)^2} \\
\times\ &\left\{\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu\, \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu^2)}\cdot\left[1+\frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right] + \right. \\
+\ &\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu \int_1^\infty d\epsilon\, \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu^2\epsilon^2)}\cdot\left[\frac{\boldsymbol{\Omega}_T}{12m^2}+\frac{\boldsymbol{\Omega}_{ss}}{6m^2}-\frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{m^2}\right] - \\
-\ &\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu^{1/2} \int_1^\infty d\epsilon\, \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu\epsilon^2)}\left[\frac{\boldsymbol{\Omega}_T}{12m^2}+\frac{\boldsymbol{\Omega}_{ss}}{6m^2}-\frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{m^2}\right] - \\
-\ &\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu^{-1/2}\frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu)}\left[1+\frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right] \\
+\ &6\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu^{-1/2} \int_1^\infty \frac{d\epsilon}{\epsilon^2}\,\frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu\epsilon^2)}\left[1+(1-\nu)\frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right] \\
-\ &\left. 4\int_{-1}^{1} d\rho \int_0^\infty d\epsilon\, \frac{F_3}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_4^2}\right\}
\end{aligned}$$

Efetuando a transformada termo a termo, obtemos:

$$\begin{aligned}
V_C(9-I) \ &= \ -\left[3 - 2\,\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right]\frac{g^4}{(4\pi)^3}\times \\
&\times\ \left\{\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu\, F_2\,\frac{e^{-rM(\nu^2)}}{r} - \right.
\end{aligned}$$

$$- \int_{-1}^{1} d\alpha \int_{0}^{1} d\nu\, \nu^{-1/2}\, F_2\, \frac{e^{-rM(\nu)}}{r} +$$

$$+ \; 6 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_{0}^{1} d\nu\, \nu^{-1/2} \int_{1}^{\infty} \frac{d\epsilon}{\epsilon^2}\, F_2\, \frac{e^{-rM(\nu\epsilon^2)}}{r} -$$

$$- \; 4 \int_{-1}^{1} d\rho \int_{0}^{\infty} d\epsilon\, F_3\, \frac{e^{-rM_4}}{r} \Bigg\} \tag{6.182}$$

$$V_{LS}(9-I) = -\left[3 - 2\,\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}\right] \frac{g^4}{(4\pi)^3}\, \frac{1}{2m^2} \times$$

$$\times \; \Bigg\{ - \int_{-1}^{1} d\alpha \int_{0}^{1} d\nu\, \nu \left[1 + rM(\nu^2)\right]\, F_2\, \frac{e^{-rM(\nu^2)}}{r^3} +$$

$$+ \; 2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_{0}^{1} d\nu\, \nu \int_{1}^{\infty} d\epsilon \left[1 + rM(\nu^2\epsilon^2)\right]\, F_2\, \frac{e^{-rM(\nu^2\epsilon^2)}}{r^3} -$$

$$- \; 2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_{0}^{1} d\nu\, \nu^{1/2} \int_{1}^{\infty} d\epsilon \left[1 + rM(\nu\epsilon^2)\right]\, F_2\, \frac{e^{-rM(\nu\epsilon^2)}}{r^3} +$$

$$+ \; \int_{-1}^{1} d\alpha \int_{0}^{1} d\nu\, \nu^{-1/2} \left[1 + rM(\nu)\right]\, F_2\, \frac{e^{-rM(\nu)}}{r^3} -$$

$$- \; 6 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_{0}^{1} d\nu\, \nu^{-1/2} \int_{1}^{\infty} \frac{d\epsilon}{\epsilon^2}\, (1-\nu) \left[1 + rM(\nu\epsilon^2)\right]\, F_2 \frac{e^{-rM(\nu\epsilon^2)}}{r^3} \Bigg\} \tag{6.183}$$

$$V_T(9-I) = -\left[3 - 2\,\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}\right] \frac{g^4}{(4\pi)^3}\, \frac{1}{4m^2} \times$$

$$\times \; \Bigg\{ \int_{-1}^{1} d\alpha \int_{0}^{1} d\nu\, \nu \int_{1}^{\infty} d\epsilon\, \left[1 + rM(\nu^2\epsilon^2) + r^2M^2(\nu^2\epsilon^2)/3\right]\, F_2\, \frac{e^{-rM(\nu^2\epsilon^2)}}{r^3}$$

$$- \; \int_{-1}^{1} d\alpha \int_{0}^{1} d\nu\, \nu^{1/2} \int_{1}^{\infty} d\epsilon \left[1 + rM(\nu\epsilon^2) + r^2M^2(\nu\epsilon^2)/3\right]\, F_2\, \frac{e^{-rM(\nu\epsilon^2)}}{r^3} \Bigg\} \tag{6.184}$$

onde usamos a relação :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]\left(\frac{e^{-ar}}{r}\right) = \left[\frac{3}{r^3} + \frac{3a}{r^2} + \frac{a^2}{r}\right] e^{-ar}$$

e o rótulo T indica o termo tensorial.

$$\begin{aligned} V_{SS}(9-I) &= -\left[3 - 2\,\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right]\frac{g^4}{(4\pi)^3}\,\frac{1}{6m^2}\times \\ &\times \left\{-\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\,\nu \int_0^\infty d\epsilon\, F_2\, M^2(\nu^2\epsilon^2)\,\frac{e^{-rM(\nu^2\epsilon^2)}}{r} + \right. \\ &+ \left. \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\,\nu^{1/2} \int_1^\infty d\epsilon\, F_2\, M^2(\nu\epsilon^2)\,\frac{e^{-rM(\nu\epsilon^2)}}{r}\right\} \end{aligned} \tag{6.185}$$

onde usamos a relação :

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{e^{-ar}}{r} = -\frac{a^2}{r}e^{-ar}$$

e o rótulo SS indica o termo spin-spin.

D. $V_{12}(r)$

O potencial não-relativístico $V_{12}(\boldsymbol{\Delta})$ é dado no apêndice E, expressão E.24:

$$\begin{aligned} V_{12}(\boldsymbol{\Delta}) &= -\left[3 + 2\,\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right]\frac{g^4}{(4\pi)^2}\times \\ &\times \left\{-\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\,\nu\,\frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu^2)}\cdot\left[1 + 3\frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2} - \frac{\boldsymbol{\Omega}_{ss}}{6m^2} - \frac{\boldsymbol{\Omega}_T}{12m^2}\right]\right. \\ &+ \left. 8m^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\,\frac{\nu^3}{1-\nu}\,\frac{F_2^2}{[\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu^2)]^2}\cdot\left[1 + \frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Efetuando a transformada, obtemos:

$$V_C(12) = -\left[3 + 2\,\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right]\frac{g^4}{(4\pi)^3}\times$$

$$\times \left\{ -\int_{-1}^{1} d\alpha \int_{0}^{1} d\nu \; \nu \; F_2 \; \frac{e^{-rM(\nu^2)}}{r} + \right.$$

$$\left. + \; 4m^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_{0}^{1} d\nu \; \frac{\nu^3}{1-\nu} \; \frac{F_2^2}{M(\nu^2)} \; e^{-rM(\nu^2)} \right\} \tag{6.186}$$

onde usamos a relação :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\boldsymbol{\Delta}}{(2\pi)^3} \; \frac{e^{-i\,\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{r}}}{[\boldsymbol{\Delta}^2 + a^2]^2} = \frac{e^{-ar}}{8\pi a} \tag{6.187}$$

$$V_{LS}(12) = -\left[3 + 2\,\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}(2)\right] \frac{g^4}{(4\pi)^3} \times$$

$$\times \left\{ \frac{3}{2m^2} \int_{-1}^{1} d\alpha \int_{0}^{1} d\nu \; \nu \; \left[1 + rM(\nu^2)\right] \; F_2 \; \frac{e^{-rM(\nu^2)}}{r^3} - \right.$$

$$\left. - \; 2\int_{-1}^{1} d\alpha \int_{0}^{1} d\nu \; \frac{\nu^3}{1-\nu} \; F_2^2 \; \frac{e^{-rM(\nu^2)}}{r} \right\} \tag{6.188}$$

$$V_T(12) = -\left[3 + 2\,\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right] \frac{g^4}{(4\pi)^3} \; \frac{1}{4m^2} \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} d\alpha \int_{0}^{1} d\nu \; \nu \; \left[1 + rM(\nu^2) + r^2M^2(\nu^2)/3\right] \; F_2 \; \frac{e^{-rM(\nu^2)}}{r^3} \tag{6.189}$$

$$V_{SS}(12) = \left[3 + 2\,\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\right] \frac{g^4}{(4\pi)^3} \; \frac{1}{6m^2} \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} d\alpha \int_{0}^{1} d\nu \; \nu \; F_2 \; M^2(\nu^2) \; \frac{e^{-rM(\nu^2)}}{r} \; . \tag{6.190}$$

E. $V_{13}(r)$

O potencial não-relativístico $V_{13}(\boldsymbol{\Delta})$ é dado na equação E.25:

$$V_{13}(\boldsymbol{\Delta}) = -\frac{3g^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{2m}{\mu}\right) \frac{G\mu^3}{m^2} \left[\frac{\Lambda^2 - \mu^2}{\mu^2} - S_3 + S_4\right] \left[1 - \frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right] \; .$$

A transformada de Fourier do termo constante fornece a função delta de Dirac. Assim temos:

$$
\begin{aligned}
V_C(13) &= -\frac{3g^2}{(4\pi)^3}\left(\frac{2m}{\mu}\right)\frac{G\mu^3}{m^2}\left\{\left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)4\pi\delta(\mathbf{r}) - \right. \\
&- (\Lambda^2-\mu^2)\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\int_{-1}^{1} d\rho\,\frac{1}{1+\rho}\,\frac{e^{-rM_2}}{r} + \\
&+ \left.\frac{(\Lambda^2-\mu^2)}{\mu^2}\int_{-1}^{1} d\alpha\int_0^1 d\nu\left[2\mu^2-(1+\alpha)(1-\nu)M_1^2\right]F_1\frac{e^{-rM_1}}{r}\right\} \quad (6.191)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{LS}(13) = -\frac{3g^2}{4\pi^3}\left(\frac{2m}{\mu}\right)\frac{G\mu^3}{2m^4}&\left\{\left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)\frac{4\pi}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}[\delta(\mathbf{r})] - \right. \\
- (\Lambda^2-\mu^2)\frac{\Lambda^2}{\mu^2}&\int_{-1}^{1} d\rho\,\frac{1}{1+\rho}\,[1+rM_2]\frac{e^{-rM_2}}{r^3} + \\
+ \frac{(\Lambda^2-\mu^2)}{\mu^2}&\int_{-1}^{1} d\alpha\int_0^1 d\nu\,\left[2\mu^2-(1+\alpha)(1-\nu)M_1^2\right][1+rM_1]\;F_1\,\frac{e^{-rM_1}}{r}\Bigg\} \quad (6.192)
\end{aligned}
$$

F. $V_{15+17}(r)$

O potencial não-relativístico $V_{15+17}(\boldsymbol{\Delta})$ é dado na expressão E.26:

$$
V_{15+17}(\boldsymbol{\Delta}) = \frac{3g^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{2m}{\mu}\right)^3\frac{G\mu^3}{2m^2}\;[S_5-S_6]\left[1-\frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right].
$$

Efetuando a transformada, obtemos

$$
\begin{aligned}
V_C(15+17) &= -\frac{3g^2}{(4\pi)^3}\left(\frac{2m}{\mu}\right)^3\frac{G\mu^3}{2m^2}\times \\
&\times\left\{\int_{-1}^{1} d\alpha\int_0^1 d\nu\,\nu\,\left\{2\mu^2-[1+\alpha(1-\nu)]M^2(\nu^2)\right\}\;F_2\,\frac{e^{-rM(\nu^2)}}{r} - \right. \\
&- \left.\int_{-1}^{1} d\alpha\int_0^1 d\nu\,\nu\,\left\{2\Lambda^2-[1+\alpha(1-\nu)]M_3^2\right\}\;F_2\,\frac{e^{-rM_3}}{r}\right\} \quad (6.193)
\end{aligned}
$$

$$V_{LS}(15+17) = -\frac{3g^2}{(4\pi)^3}\left(\frac{2m}{\mu}\right)^3 \frac{G\mu^3}{4m^4} \times$$

$$\times \left\{\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu \left\{2\mu^2 - [1+\alpha(1-\nu)]M^2(\nu^2)\right\}[1+rM(\nu^2)]\, F_2\, \frac{e^{-rM(\nu^2)}}{r^3}\right.$$

$$\left. - \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu \left\{2\Lambda^2 - [1+\alpha](1-\nu)]M_3^2\right\}[1+rM_3]\, F_2\, \frac{e^{-rM_3}}{r^3}\right\} \qquad (6.194)$$

G. $V_{18}(r)$

O potencial não-relativístico $V_{18}(\boldsymbol{\Delta})$ é dado na expressão E.27:

$$V_{18}(\boldsymbol{\Delta}) = -\frac{3}{(4\pi)^2}\frac{G^2\mu^6}{m^2}\left(\frac{2m}{\mu}\right)^2 [S_7+S_8+S_9+C]\left[1-\frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right].$$

Efetuando a transformada, obtemos:

$$\begin{aligned}
V_C(18) &= -\frac{3}{(4\pi)^3}\frac{G^2\mu^6}{m^2}\left(\frac{2m}{\mu}\right)^2 \{4\pi\, C\delta(\mathbf{r}) + \\
&+ \left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, H(\alpha,\nu)\, F_1\, \frac{e^{-rM_1}}{r} + \\
&+ \left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\int_{-1}^{1} d\rho \left[\frac{\Lambda^2}{1+\rho} + \frac{\Lambda^2-\mu^2}{1-\rho}\right]\frac{e^{-rM_2}}{r} + \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu(1+\alpha)^2(1-\nu)\, F_1^2\, M_1^3\, e^{-rM_1}\Bigg\} \qquad (6.195)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{LS}(18) &= -\frac{3}{(4\pi)^3}\frac{G^2\mu^6}{2m^4}\left(\frac{2m}{\mu}\right)^2 \left\{\frac{4\pi\, C}{r}\frac{\partial}{\partial r}[\delta(\mathbf{r})] + \right. \\
&+ \left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, H(\alpha,\nu)\,[1+rM_1]\, F_1\, \frac{e^{-rM_1}}{r^3} + \\
&+ \left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\int_{-1}^{1} d\rho \left[\frac{\Lambda^2}{1+\rho} + \frac{\Lambda^2-\mu^2}{1-\rho}\right](1+rM_2)\, \frac{e^{-rM_2}}{r^3} +
\end{aligned}$$

$$+ \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu(1+\alpha)^2(1-\nu)\, F_1^2\, M_1^4\, \frac{e^{-rM_2}}{r}\Bigg\} \quad (6.196)$$

onde

$$H(\alpha\,,\,\nu) = \left\{\mu^2 - M_1^2\left[(1+\alpha)(1-\nu) + \left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)\left((1+\alpha)^2(1-\nu)F_1 + \frac{1}{4}\right)2\nu\right]\right\} \quad ,$$

e foi utilizada a equação 6.187.

6.6 Potencial devido à troca de um píon

O diagrama da troca de um píon entre dois nucleons é mostrado na figura 6.19.

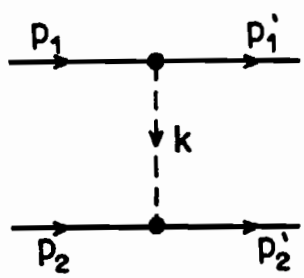


Figura 6.19: *Diagrama da troca de um píon entre dois nucleons.*

A amplitude relativística e covariante para essa troca é dada por:[4]

$$i\mathcal{T}_\pi = \left\{\eta^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}_1')\left[-\frac{g}{2m}\,\not{k}\gamma_5\tau_\alpha\right]u(\mathbf{p}_1)\eta\right\}^{(1)} \frac{i}{\mu^2-\Lambda^2}\left\{\eta^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}_2')\left[\frac{g}{2m}\,\not{k}\gamma_5\tau_\alpha\right]u(\mathbf{p}_2)\eta\right\}^{(2)} \quad , \tag{6.197}$$

onde usamos as regras de Feynman dadas na página 67. Separando os operadores de isospin, obtemos

$$i\mathcal{T}_\pi = -ig^2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\,(\not{k}\gamma_5)^{(1)}\frac{1}{\mu^2-\Lambda^2}(\not{k}\gamma_5)^{(2)}$$

Usando a notação de duas componentes para o spinor de Dirac, temos

$$\not{k}^{(i)}\gamma_5 = -\frac{E+m}{2m}\chi^\dagger\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\right]^{(i)}\chi\,,$$

[4]Esse cálculo pode ser encontrado com detalhes em [*Rob 87*].

onde fizemos uso do referencial de centro de massa. Efetuando a redução não-relativística, encontramos

$$V_\pi(\mathbf{k}) = -\frac{g^2}{4m^2}\,\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\,\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\mathbf{k}\,\frac{1}{\mathbf{k}^2+\mu^2}\,\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\cdot\mathbf{k}\,.$$

Efetuando a transformada de Fourier, obtemos:

$$< \mathbf{r}_1'\,\mathbf{r}_2' \mid \hat{V}_\pi \mid \mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_2 >= \delta^{(3)}(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_1)\,\delta^{(3)}(\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_2)\,V_\pi(r)\,,$$

onde $\mathbf{r}$ é a coordenada relativa e $V_\pi(r)$ é o potencial devido à troca de um píon, dado por:

$$V_\pi(r) = \frac{g^2}{4m^2}\,\frac{1}{4\pi}\,\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\,\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

A forma final do potencial é obtida efetuando-se as derivações da função de Yukawa, obtendo-se

$$V_\pi(r) = \frac{1}{3}\left(\frac{g\mu}{2m}\right)^2\frac{1}{4\pi}\,\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}\,\left[V_\pi^T + V_\pi^{SS}\right] \tag{6.198}$$

com os termos tensor e spin-spin dados por

$$V_\pi^T = \Omega_T^c\,\frac{3}{\mu}\left[1+\mu r+\mu^2 r^2/3\right]\frac{e^{-\mu r}}{r^3} \tag{6.199}$$

$$V_\pi^{SS} = \Omega_{ss}^c\left[-\frac{4\pi}{\mu^2}\,\delta(\mathbf{r}) + \frac{e^{-\mu r}}{r}\right] \tag{6.200}$$

Capítulo 7

Resultados para o potencial quiral

Neste capítulo apresentamos os resultados para o potencial devido à troca de dois píons. Inicialmente fazemos um paralelo entre o espalhamento πN, mostrado no apêndice D, e a interação NN, com a finalidade de compreender melhor a diferença entre nosso potencial e os da literatura. Em seguida, apresentamos nosso potencial em 2ª , 3ª e 4ª ordens, e também suas projeções nos diversos canais de spin e isospin, mostrando a contribuição de cada diagrama para o potencial. Nesse ponto, fazemos uma avaliação da troca de um píon, mostrando a região de transição onde a troca de dois píons começa a dominar. Encerramos o capítulo comparando nosso potencial com o de Argonne, sugerindo melhoramentos que possam torná-lo mais atraente fenomenologicamente.

7.1 O potencial NN e o espalhamento πN

O estudo do espalhamento πN, apresentado no apêndice D, evidencia a conexão entre as realizações linear e não-linear da simetria quiral, como indicado na figura D.4.

O potencial NN obtido nesse trabalho foi calculado a partir da realização não-linear. Os diagramas de 2ª e 3ª ordens contêm vértices πN pseudovetoriais, onde podemos aplicar a mesma decomposição. Ao efetuarmos o cálculo dos diagramas estamos, ao mesmo tempo, implementando essa decomposição. Cada diagrama é expresso por uma soma de integrais, sendo que cada uma dela pode ser interpretada como um "sub-diagrama" ou um "pedaço" do diagrama principal. Examinemos, por exemplo a decomposição para o diagrama tipo caixa, que apresenta 9 integrais listadas nas páginas 99 e 100, e é mostrado na figura 7.1. Cada integral pode ser interpretada como um diagrama-componente do diagrama caixa. O diagrama cruzado apresenta decomposição semelhante e os diagramas

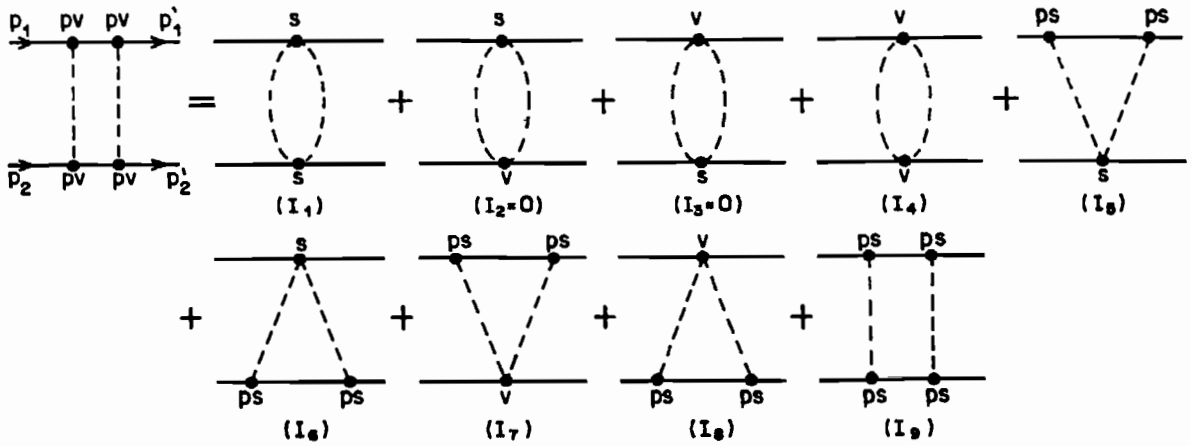


Figura 7.1: *Decomposição do diagrama caixa em 9 componentes. Os diagramas correspondentes às integrais I_2 e I_3 se anulam, conforme mostrado no apêndice C. As letras PV, S, V, PS significam vértices de acoplamento pseudovetor, escalar, vetor e pseudoescalar, respectivamente.*

nabla, triângulo e bolha apresentam 3 integrais, que também se encaixam entre as 9 primeiras. Assim, todos os diagramas de 2ª ordem podem ser interpretados em termos desses 9 sub-diagramas.

Os vértices escalar e vetorial de interação entre dois píons e o nucleon podem ser entendidos como um limite de massa infinita para a troca de ressonâncias, conforme ilustramos na figura 7.2. Por isso, podemos abrir os vértices de 2 píons e encaixar as respectivas ressonâncias, como mostramos na figura 7.3.

Estamos, agora, em condições de comparar nosso trabalho com o de Partovi e Lomon (PL) e o de Zuilhof e Tjon (ZT).

No trabalho de ZT, [*ZT 82*], o cálculo da amplitude é feito utilizando-se tanto o acoplamento pseudovetor como o pseudoescalar, mas ambos não estão de acordo com a simetria quiral. nos dois tipos de cálculo, ZT utilizam apenas os diagramas caixa e cruzado para obter a amplitude. Do ponto de vista não-linear, esse cálculo é incompleto, pois os diagramas de segunda ordem nabla, triângulo e bolhas não são incluidos[1]. Dessa forma, os cancelamentos ocorridos aqui para I_4, I_7, I_8 e I_{11}, não acontecem para ZT. Do ponto

[1]Para ZT e PL, o núcleo $K^{(4)}$ é composto apenas do diagrama cruzado, ao passo que, nesse trabalho, temos também, em 2ª ordem, os diagramas nabla, triângulo e bolha, como mostra a figura 6.2.

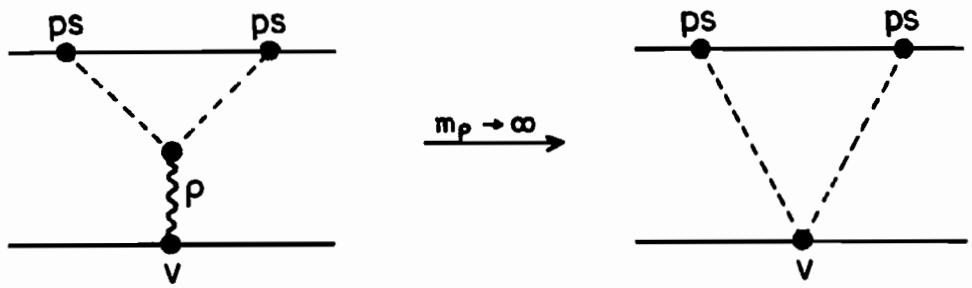


Figura 7.2: *Significado do vértice de dois píons com o nucleon, que pode ser entendido como o limite de massa infinita para a correspondente ressonância.*

de vista linear, o problema em ZT é o mesmo que acontece para PL: apenas os diagramas caixa e cruzado são incluidos, o que torna o cálculo, novamente, incompleto, pois então seria necessário incluir o méson σ explicitamente, para gerar as integrais I_1 , I_5 , I_6 e I_{10}. Em um trabalho posterior, Partovi e Lomon [*PL 72*] fazem essa inclusão, mas não tomam o limite $\mu_\sigma \to \infty$, usando essa massa como parâmetro do potencial. Esse fato descaracteriza o papel quiral do méson σ e faz com que os resultados das realizações linear e não-linear sejam diferentes. Isso mostra que, estruturalmente, essas dois trabalhos não implementam a simetria quiral no potencial.

Este presente trabalho tem, como objetivo principal, implementar a simetria quiral na interação NN, particularmente na parte da troca de dois píons. A realização não-linear utilizada aqui é derivada da Lagrangiana fenomenológica de Weinberg [*Wei 68*], e produz uma série de resultados interessantes. Inicialmente, podemos entender a presença dos vértices de 2 píons, escalar e vetorial, com o nucleon, como o limite de massa infinita para as ressonâncias σ e ρ, respectivamente. Assim, essas ressonâncias são "aproximadamente" incluidas no potencial. Essa aproximação é boa para a interação NN, pois as partículas trocadas são virtuais. O potencial pode ser melhorado através do acréscimo de termos de ordem superior. Em terceira ordem podem ser incluidas a parte magnética do méson vetorial, e em quarta ordem, o vértice de 3 píons, que representa a aproximação de massa infinita para o méson ω. Além disso, um termo importante, não incluido aqui, são as ressonâncias bariônicas, principalmente o Δ. O potencial de Bonn inclui a ressonância Δ de maneira não-covariante e a contribuição, apesar de pequena, é significativa. Nós omitimos essas contribuições porque o nosso objetivo principal é estudar a implementação

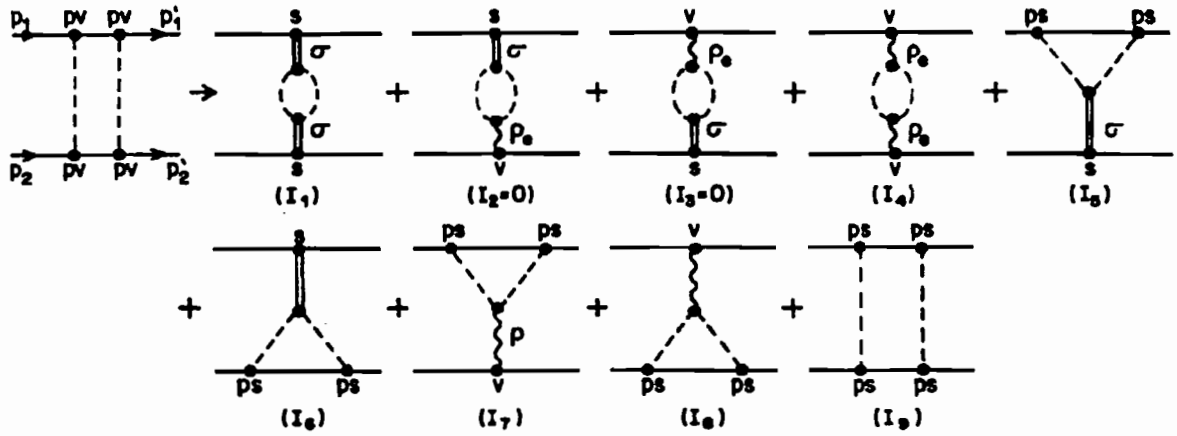


Figura 7.3: *Substituição dos vértices de dois píons com o nucleon pelas respectivas ressonâncias mesônicas. O índice e para o méson ρ indica que apenas a parte elétrica dessa resonância é fornecida pela realização não-linear, em segunda ordem.*

estrutural mínima da simetria quiral na interação NN.

7.2 O potencial até a segunda ordem

O potencial até 2ª ordem em potências do momento é dado pela soma dos termos V_1 , V_{5+6+10} , $V_9 - V_I$ e V_{12}. As constantes numéricas necessárias para o estudo desses termos e dos posteriores encontram-se na tabela 7.1.

Constante	Valor	Referência
g	13.39	*BCC 73*
μ	137.29 MeV	*PL 70*
m	938.92 MeV	*Rob 87*
Λ	50 GeV	-
G	$-0.4/\mu^3$	*OO75, CDR 83*

Tabela 7.1: *Constantes numéricas utilizadas no cálculo do potencial NN deste trabalho.*

Na tabela anterior, a massa do píon é calculada da seguinte maneira:

$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{(\mu^+)^2 + (\mu^0)^2}\ .$$

Segundo Lomon e Partovi, [*PL 70*], diagramas envolvendo duas massas piônicas distintas podem ser calculados usando a massa "média" da expressão anterior, pois a amplitude devida ao "loop" é praticamente insensível ao parâmetro

$$\epsilon^2 \equiv \frac{\mu_2^2 - \mu_1^2}{\mu_2^2 + \mu_1^2} \approx 0.04\ ,$$

que aparece nas expressões elevado à quarta potência. Assim, o erro ao utilizarmos a massa média é da ordem de $\epsilon^4 \approx 0.16\%$.

7.2.1 Funções de perfil do potencial

A seguir, exibimos a contribuição de cada amplitude para o potencial. Inicialmente, mostramos as *funções de perfil* do potencial, isto é, não levamos em consideração os operadores de spin e isospin. Em seguida, apresentamos as várias contribuições para potencial nos seus canais singleto e tripleto de spin e isospin.

A. $V_1(r)$

O potencial $V_1(r)$ é isoescalar e apresenta componentes central e spin-órbita. Ele se deve à auto-energia do méson escalar e é o único, em 2ª ordem, que depende do parâmetro de corte. A figura 7.4 mostra sua função de perfil para as contribuições central e spin-órbita, para vários valores de Λ. À medida em que o parâmetro de corte aumenta, sua influência vai se concentrando na parte mais interna do potencial. Para Λ ao redor de $20 - 50$ GeV e $r \geq 0.5$ fm, o potencial praticamente independe desse parâmetro. Na figura 7.5 a escala é ampliada para podermos ver a diferença entre as curvas. Na fronteira da região mais interna não conseguimos distinguir as curvas para Λ =10 GeV (pontilhada) e Λ =50 GeV (sólida). Esse comportamento se repete para os outros termos dependentes do fator de corte, o que nos permite concluir que, na região $r \geq 0.5$ fm, o valor de $\Lambda = 50$ GeV torna o potencial independente desse parâmetro.

O potencial $V_1(r)$, assim como os outros termos regularizados covariantemente, é atrativo no canal central.

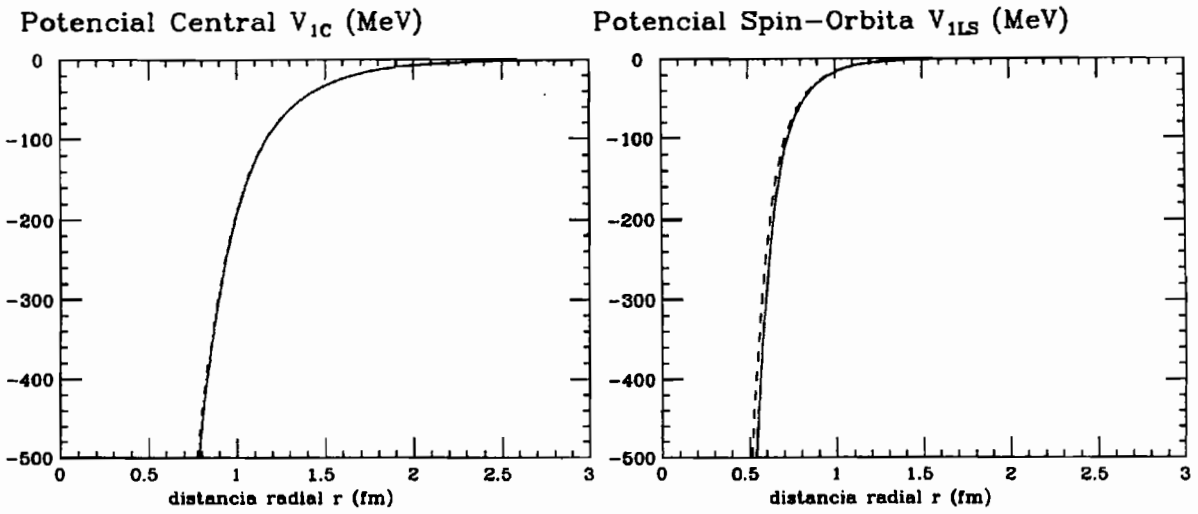


Figura 7.4: *Potencial $V_1(r)$ central (esquerda) e spin-órbita (direita). Na figura são mostradas curvas para $\Lambda = 1$ GeV (tracejada), $\Lambda = 2$ GeV (tracejada-pontilhada), $\Lambda = 10$ GeV (pontilhada) e $\Lambda = 50$ GeV (sólida).*

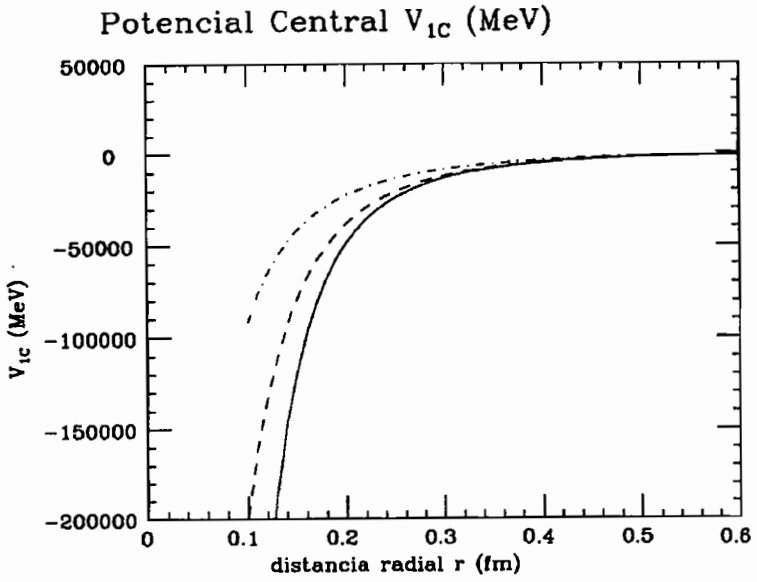


Figura 7.5: *Influência do parâmetro Λ no potencial $V_1(r)$.*

B. $V_{5+6+10}(r)$

Analogamente a $V_1(r)$, o potencial $V_{5+6+10}(r)$ é isoescalar e apresenta componentes central e spin-órbita. Esse potencial é independente do parâmetro de corte e repulsivo no canal central. Suas funções de perfil são mostradas na figura7.6.

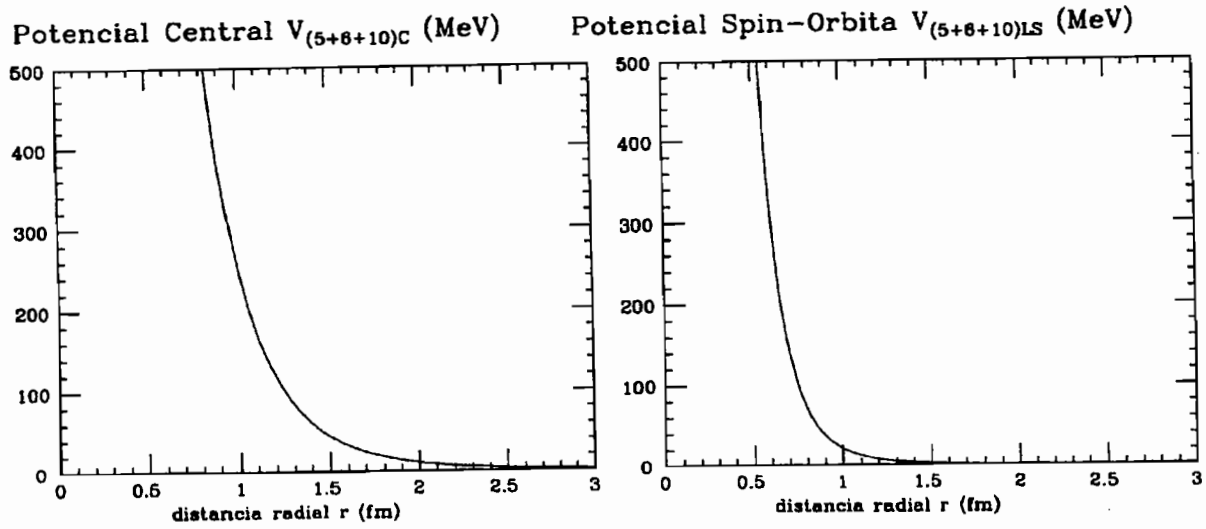


Figura 7.6: *Contribuições central e spin-órbita do potencial $V_2(r)$. Esse termo é repulsivo, em ambos canais.*

Comparando as figuras 7.6 e 7.4, podemos verificar que os valores ponto a ponto são bastante próximos.

C. $V_9 - V_I$

O potencial $V_9 - V_I$ deve-se ao diagrama caixa pseudo-escalar menos a iteração da troca de um píon. Em termos dos diagramas ordenados temporalmente, ele corresponde aos diagramas "esticados", mostrados na figura 5.11. Essa contribuição possui termos central, spin-órbita, tensor e spin-spin, e suas funções de perfil são mostradas na figura 7.7.

Esse termo é análogo ao do trabalho de PL, sendo a principal diferença referente ao cálculo da iteração da troca de um píon. Nas figuras podemos ver essa diferença, através das curvas sólida (presente trabalho) e tracejada (PL). O uso do acoplamento derivativo no

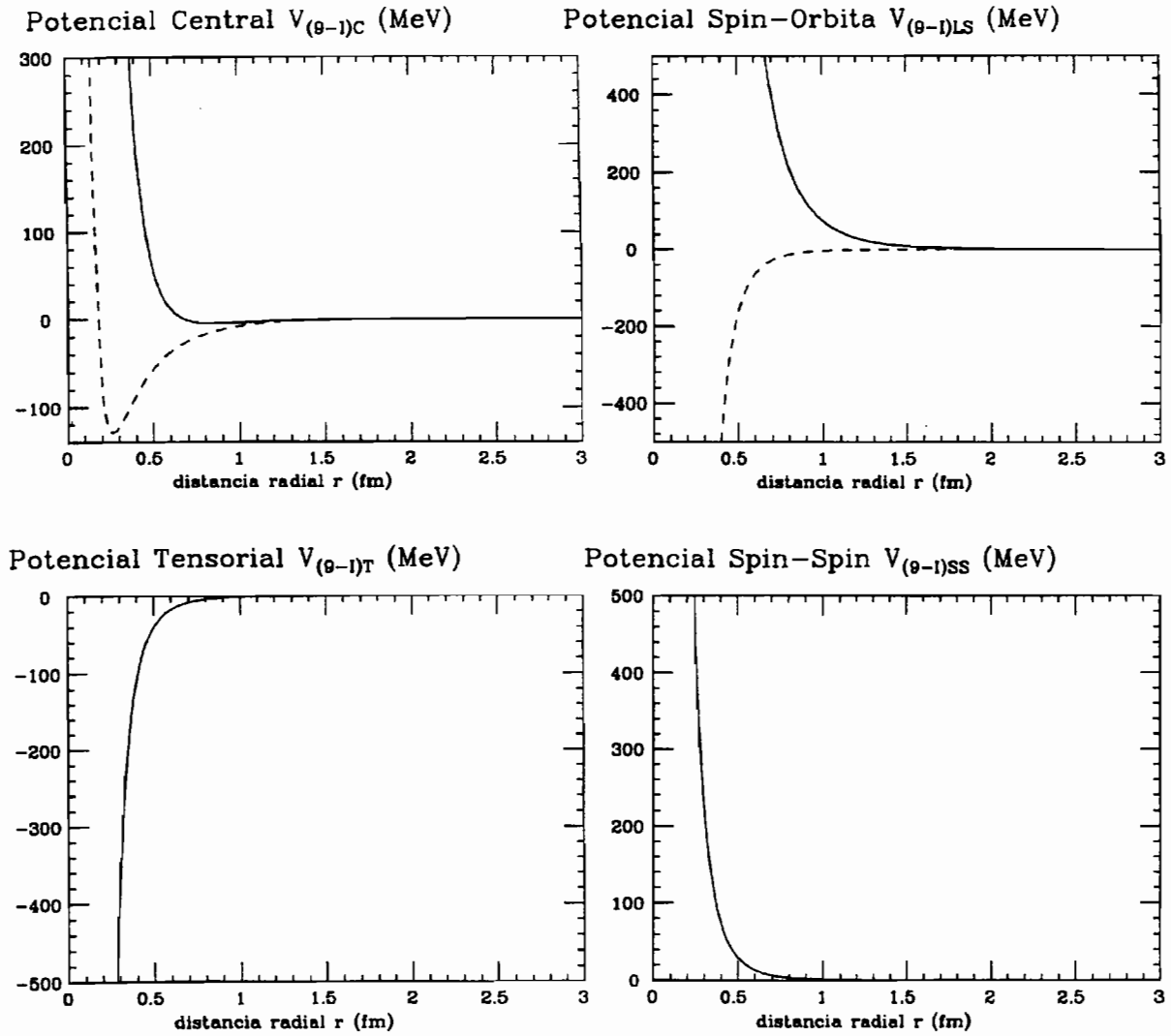


Figura 7.7: *Potencial $V_9 - V_I$ derivado nesse trabalho (curva sólida), comparado com o potencial correspondente no trabalho de PL (curva tracejada). Esses cálculos são diferentes apenas nos canais central e spin-órbita.*

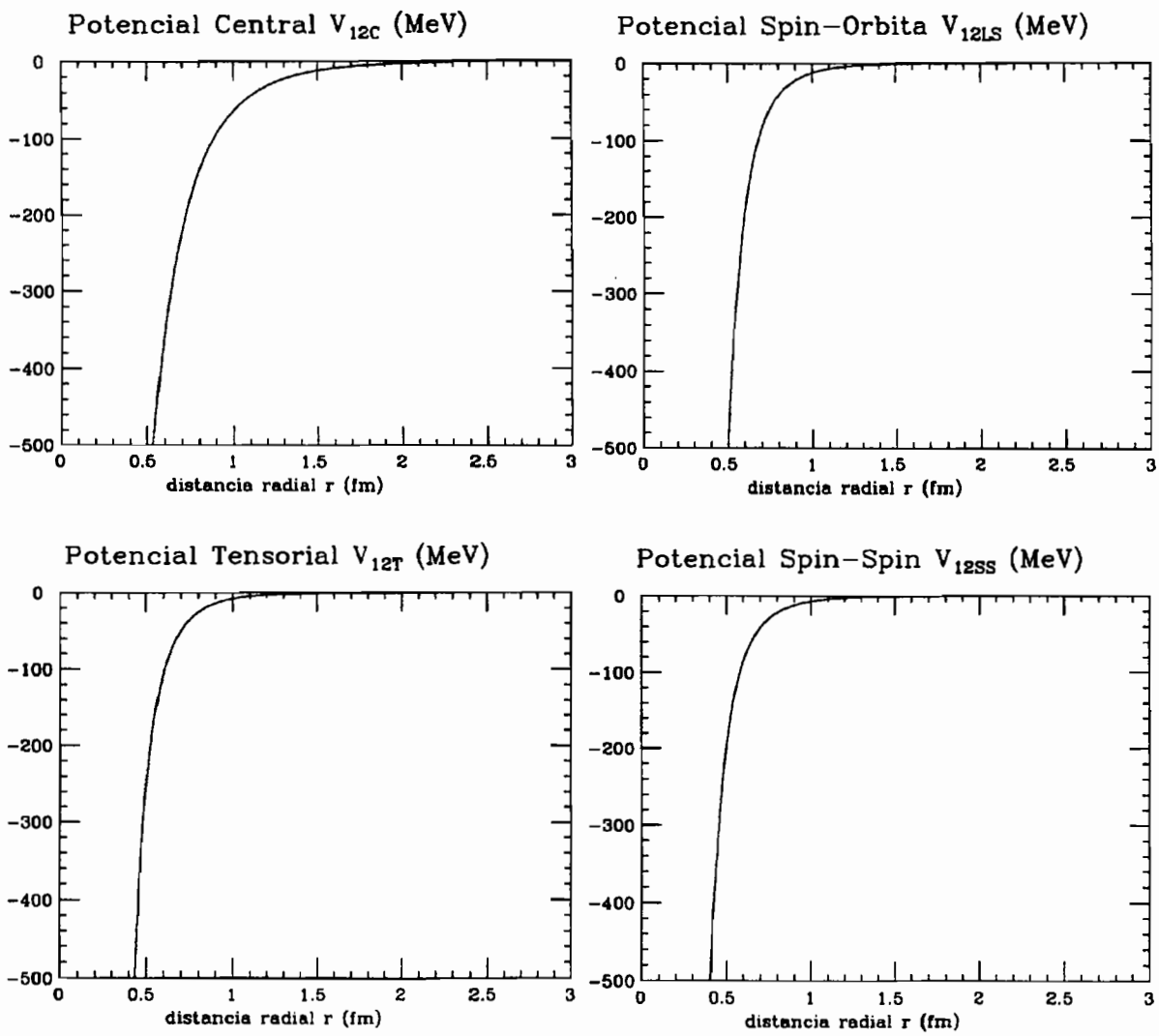


Figura 7.8: *Potencial $V_{12}(r)$ devido ao diagrama cruzado.*

cálculo da iteração introduz fatores novos, dependentes de isospin, que afetam os termos central e spin-órbita. Os termos tensorial e spin-spin não são alterados.

O uso do acoplamento pseudo-vetor para o cálculo da iteração afeta substancialmente a função de perfil para o termo spin-órbita. Enquanto que no canal central seu efeito é apenas reduzir o poço de potencial e aumentar o tamanho do caroço repulsivo, para o termo spin-órbita ocorre uma mudança de sinal da função de perfil.

D. V_{12}

O potencial V_{12} possui termos central, spin-órbita, tensor e spin-spin e se deve ao diagrama cruzado pseudo-escalar. Seu resultado é idêntico ao cálculo de PL, e sua função de perfil é mostrada na figura 7.8.

7.2.2 Decomposição do potencial nos canais de spin e isospin

A função de onda de um sistema de dois nucleons tem elementos no espaço de configuração, spin e isospin. Como o nucleon tem spin e isospin 1/2, um sistema de dois nucleons pode estar em estado singleto ou tripleto. Para determinar a contribuição do potencial para os diversos canais de spin e isospin, utilizam-se os operadores de projeção para esses espaços.[2]

O potencial total, em segunda ordem na expansão de momentos, é mostrado nas figuras 7.9, 7.10, 7.11 e 7.12. Utilizamos a notação (T, S) para denotar os estados de spin e isospin e os termos singeto e tripleto para o spin e isosingleto e isotripleto para o isospin.

O potencial central singleto é mostrado nas figuras 7.9a,b. Na figura 7.9a, vemos que os diagramas bolha e triângulo tendem a se cancelar, produzindo uma resultante pequena e positiva. Esse fato se repete em todos os outros canais, pois esses termos são isoescalares e idependentes de spin. Essa resultante positiva soma-se a um termo negativo e também pequeno, dado pelo diagrama caixa. Assim a curva resultante para o canal (0,0) é dada praticamente apenas pelo diagrama cruzado. Na figura 7.9b esse fato se repete, com uma diferença: a contribuição do diagrama caixa é muito reduzida na região intermediária, e uma parte pequena do diagrama cruzado é anulada pela resultante dos diagramas bolha e triângulo. Assim a curva resultante para o canal (1,0) é, de novo, fortemente dominada pelo diagrama cruzado.

O potencial central tripleto é mostrado nas figuras 7.10a,b. Nessas figuras, o canal (0,1) apresenta comportamento semelhante ao canal (1,0), sendo sua resultante dada quase toda

[2] Uma discussão bem completa sobre esses operadores encontra-se em [*Rob 87*], pg. 31.

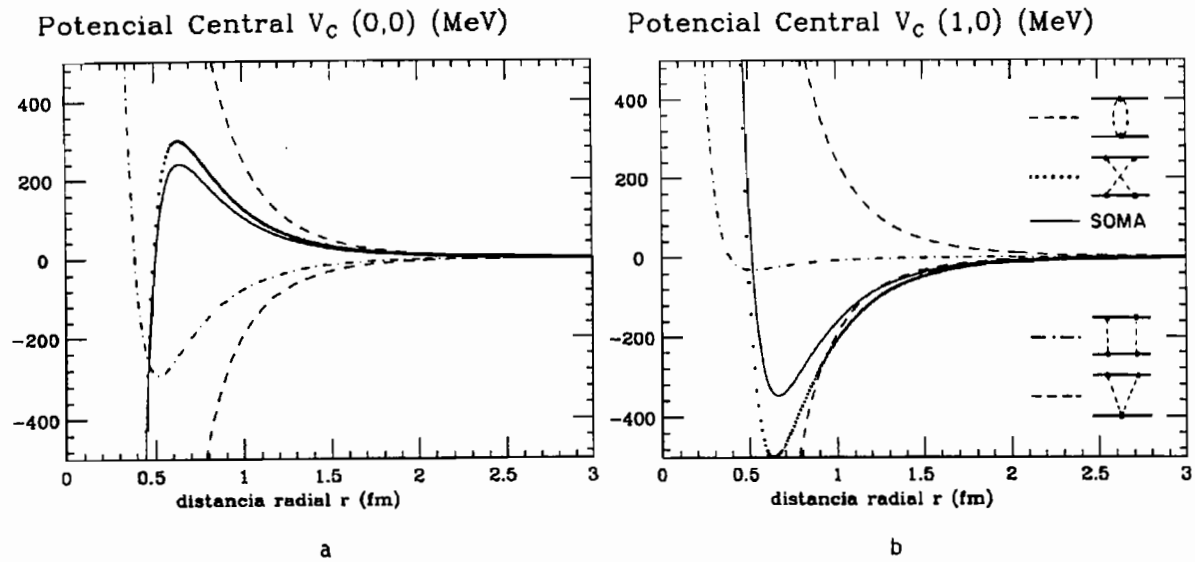


Figura 7.9: *Potencial central singleto, em segunda ordem na expansão em potências do momento. Em (a) temos o canal isosingleto e em (b) o isotripleto. O diagrama representativo de cada curva é dado na legenda da figura.*

pelo diagrama cruzado. Sendo esse o canal do deuteron, vemos que o potencial central, em segunda ordem, atua de modo repulsivo, o que é, de certa forma surpreendente. Para o canal (1,1) podemos aplicar os mesmos comentários anteriores, com a ressalva de que, como o diagrama cruzado fornece um potencial negativo, a resultante é atrativa.

O potencial spin-órbita é dado nas figuras 7.11a,b. Esse potencial só existe no canal tripleto. O canal isosingleto dado em 7.11a, é totalmente dominado pelo diagrama caixa, que é bem mais externo que os demais. Já no canal (1,1), ocorre um cancelamento muito forte entre os diagramas bolha-triângulo e caixa-cruzado, tornando a resultante bem interna e fraca na região intermediária.

O potencial tensor é dado nas figuras 7.12a,b. Esse potencial possui contribuições apenas dos diagramas caixa e cruzado. O canal isosingeto é dado na figura 7.12a, sendo que as componentes dos diagramas caixa e cruzado são semelhantes e com sinais opostos, o que fornece uma resultante fraca e repulsiva. Assim, a contribuição em segunda ordem para o potencial tensorial do deuteron é bem pequena. Para o canal (1,1), a contribuição do diagrama caixa é muito fraca na região intermediária, sendo a resultante dada quase toda pelo diagrama cruzado.

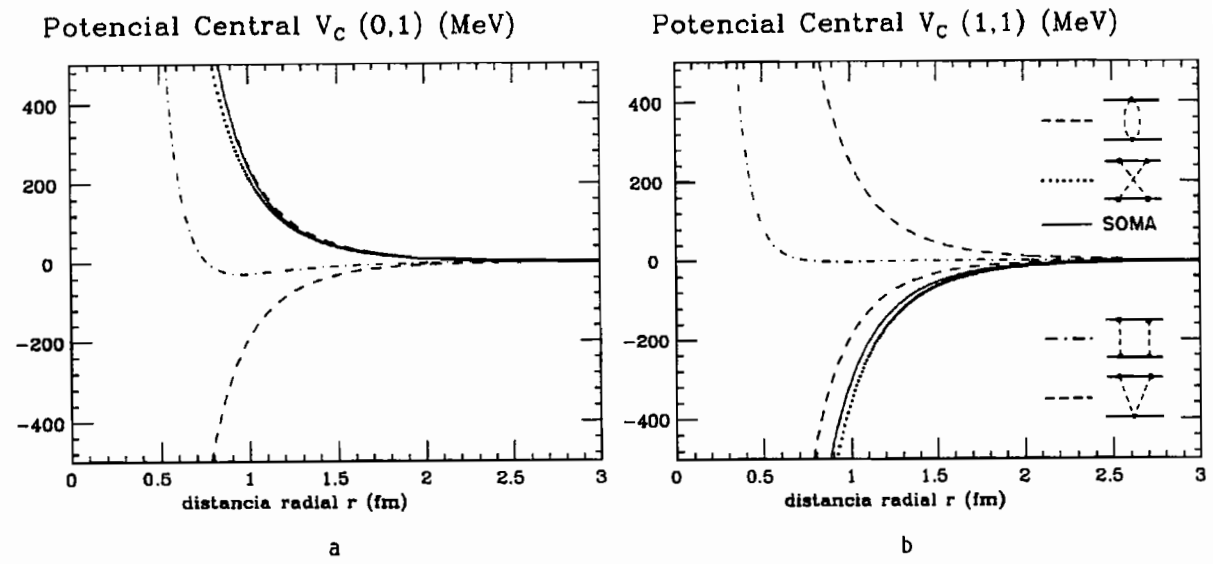


Figura 7.10: *Potencial central tripleto, em segunda ordem na expansão em potências do momento.*

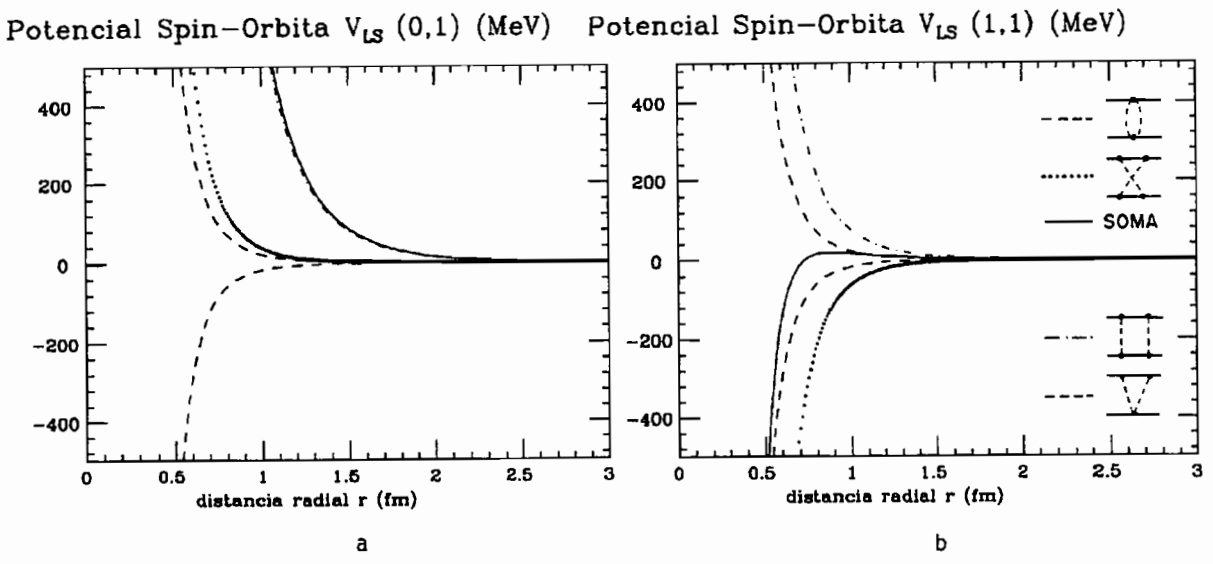


Figura 7.11: *Potencial spin-órbita, em segunda ordem na expansão em potências do momento.*

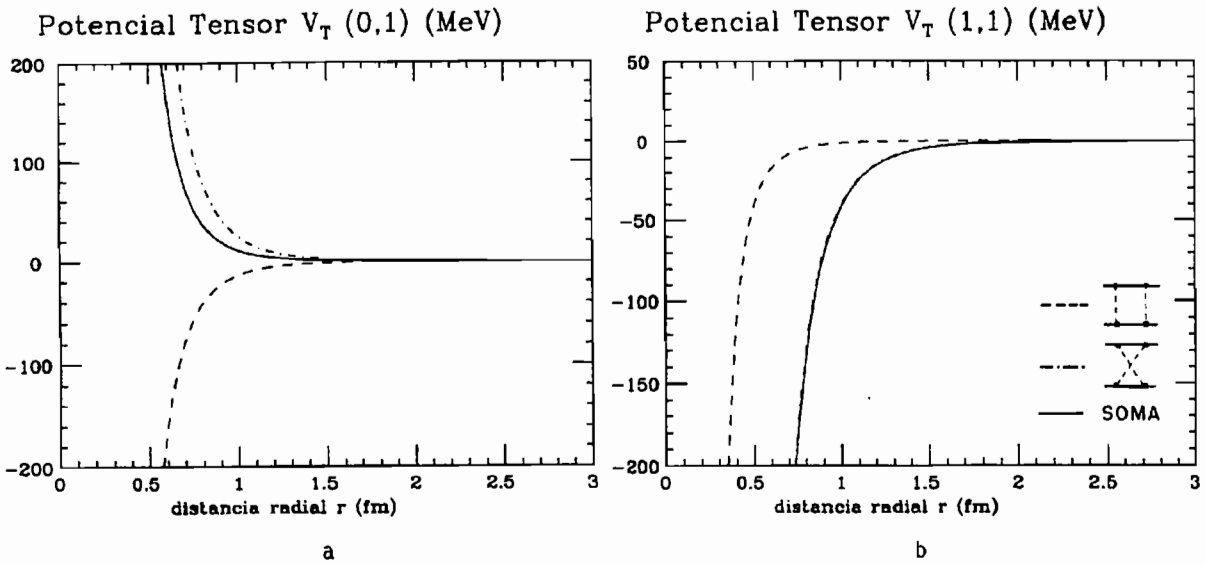


Figura 7.12: *Potencial tensor, em segunda ordem na expansão em potências do momento.*

7.2.3 O papel da troca de um píon

Neste ponto, é interessante analisarmos o papel do troca de um píon, comparando-o com a troca de dois píons. Isso é feito a seguir, para os termos central e tensor, que são os termos onde a troca de um píon atua.

Iniciamos com o potencial central isosingleto-singleto, mostrado nas figuras 7.13a,b. Na figura 7.13a, vemos que a amplitude da troca de um píon começa a se tornar comparável

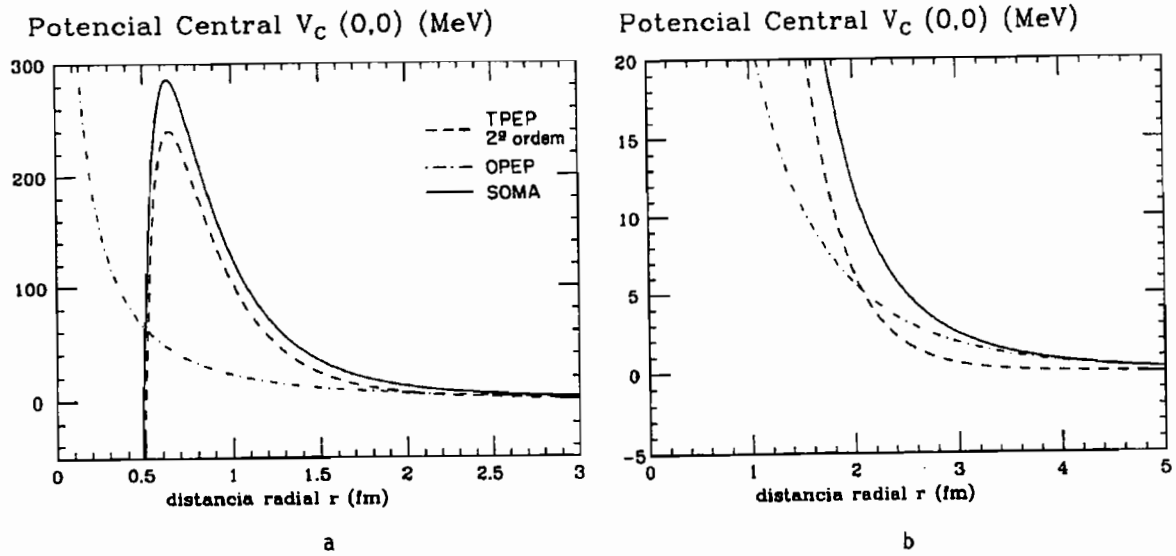


Figura 7.13: *Potencial central isosingleto-singleto para a resultante em segunda ordem, comparado com o do píon. Em (a) temos uma visão global e em (b) uma ampliação da escala em torno da origem, com a finalidade de investigar o comportamento assintótico.*

com a da troca de dois píons para r em torno de 2 fm. Na figura 7.13b, vemos claramente que o OPEP encontra o TPEP em 2.1 fm, e domina o potencial para r maiores, já que a curva cheia, representando a soma, tende assintoticamente ao OPEP à medida que aumentamos a distância.

O potencial central isotripleto-singleto é mostrado nas figuras 7.14a,b. Na figura 7.14a, notamos que, da mesma forma que no caso anterior, a amplitude da troca de um píon começa a se tornar comparável com a da troca de dois píons para r em torno de 2 fm. Na figura 7.14b, podemos ver que o OPEP encontra o TPEP em 2.3 fm, e domina o potencial para r maiores. Novamente, a curva cheia representando a soma OPEP+TPEP

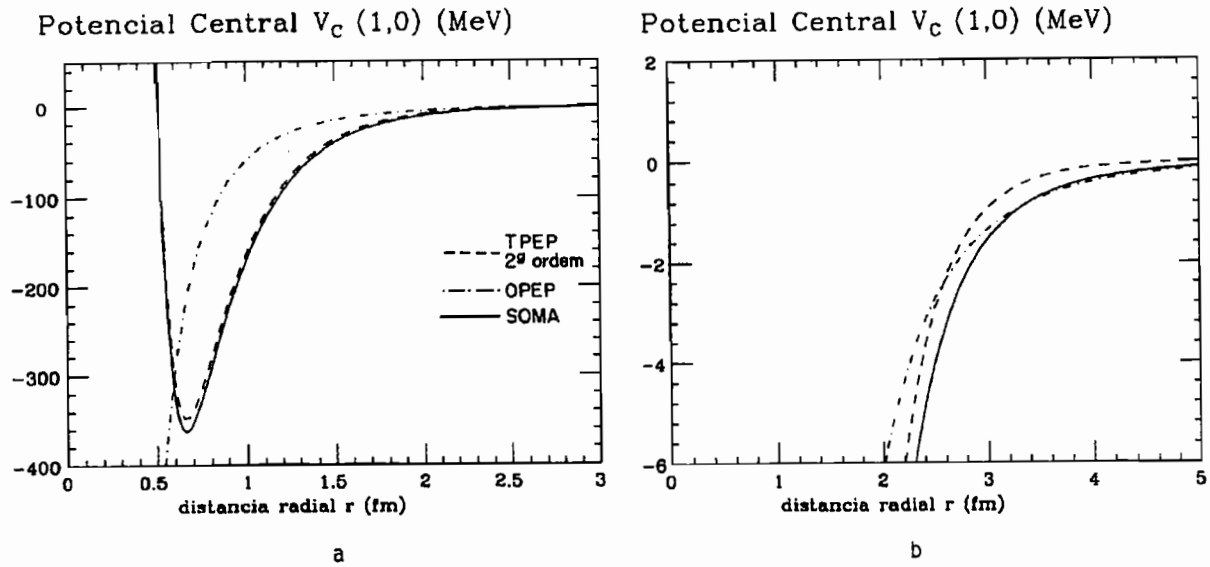


Figura 7.14: *Potencial central isotripleto-singleto para a resultante em segunda ordem, comparado com o do píon.*

é dominada pela troca de dois píons na região intermediária e tende assintoticamente ao OPEP para r grandes.

O potencial central isosingleto-tripleto é mostrado nas figuras 7.15a,b. Na figura 7.15a, podemos ver que o TPEP é fortemente repulsivo, o que leva a amplitude da troca de um píon a começar a se tornar comparável com a de dois píons apenas para r em torno de 3 fm. A figura 7.15b mostra que o OPEP se iguala ao TPEP (a menos do sinal) em 3.2 fm. O poço de potencial formado tem raio muito grande (3.7 fm), e profundidade muito pequena (0.25 MeV) para ligar o deuteron. Entretanto, segundo [*Rob 87*], esse fato não é tão grave, pois o deuteron necessita do potencial tensor para manter-se ligado. Ainda na figura 7.15 podemos observar que o potencial resultante, dominado pelo TPEP na região intermediária, tende assintoticamente ao OPEP para r grandes.

O potencial central isotripleto-tripleto é exibido nas figuras 7.16a,b. Na figura 7.16a, podemos ver que o OPEP é fracamente repulsivo, o que leva a amplitude da troca de um píon começar a se tornar comparável com a de dois píons para r acima de 4 fm. Na figura 7.16b, vemos que o OPEP se iguala ao TPEP (a menos do sinal) em 4.6 fm. Apesar da fraqueza do OPEP para esse canal, a soma OPEP+TPEP tende assintoticamente ao

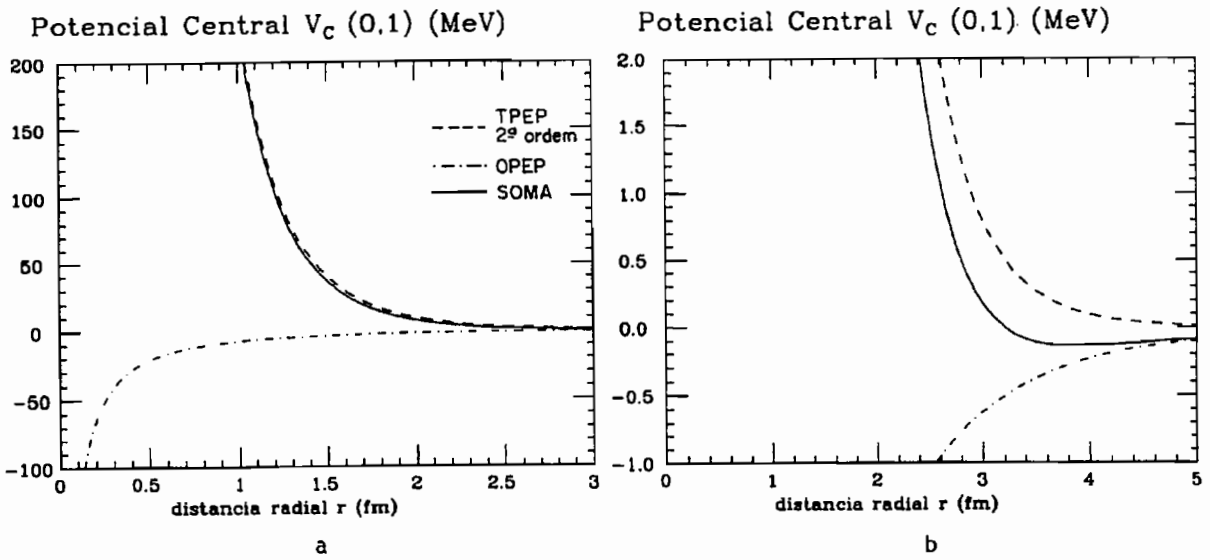


Figura 7.15: *Potencial central isosingleto-tripleto para a resultante em segunda ordem, comparado com o do píon.*

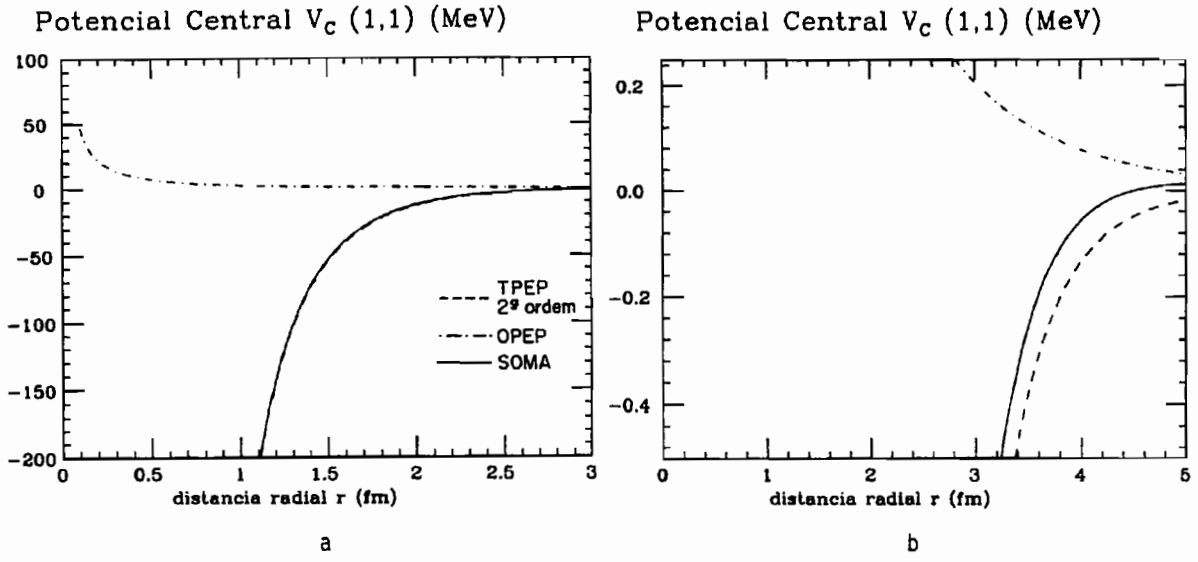


Figura 7.16: *Potencial central isotripleto-tripleto para a resultante em segunda ordem, comparado com o do píon.*

OPEP para r grandes, como podemos ver na figura 7.16.

Examinamos agora o potencial tensor. O canal isosingleto-tripleto é mostrado nas figuras 7.17a,b. Na figura 7.17a, podemos observar que o OPEP passa a ter magnitude

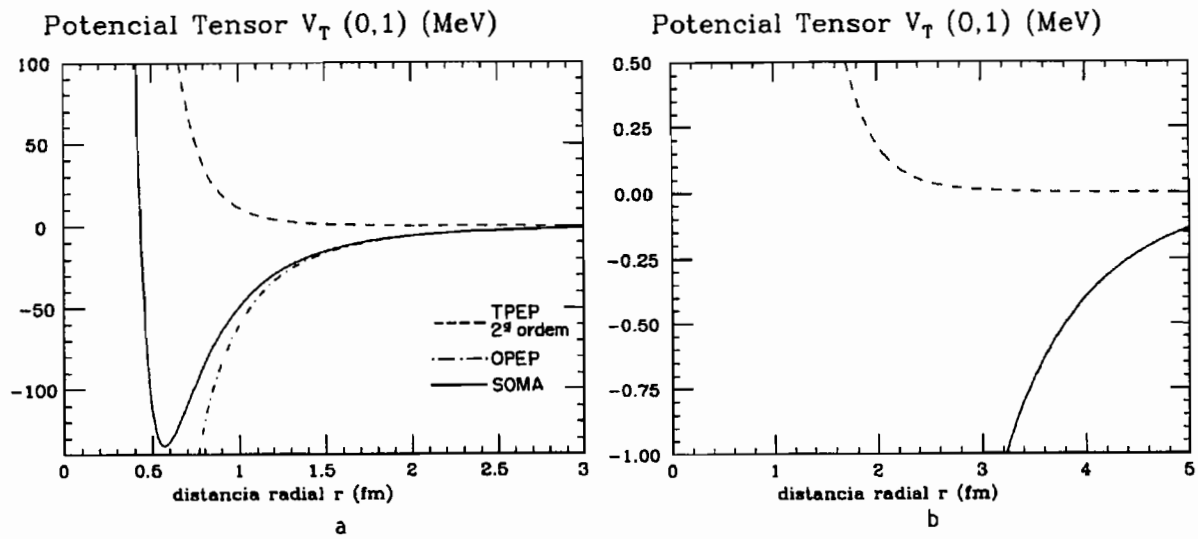


Figura 7.17: *Potencial tensor isosingleto-tripleto para a resultante em segunda ordem, comparado com o do píon.*

comparável com a do TPEP na região intermediária. O TPEP tem sinal positivo e cai rapidamente, ao passo que o OPEP é negativo e decresce mais suavemente. Na figura observamos que a amplitude devida à troca de dois píons começar a se tornar comparável com a de um píon para r em torno de 0.5 fm. Na figura 7.17b, vemos que o OPEP se iguala ao TPEP (a menos do sinal) em 0.55 fm (mínimo do potencial). O poço de potencial formado, apesar de ter profundidade adequada, tem raio muito pequeno para ligar o deuteron. Uma possível explicação para esse fato seria a ausência de componentes tensoriais de segunda ordem, que aparecem quando fazemos $g_A \neq 1$, ou quando incluimos as ressonâncias Δ. Ainda na figura 7.17b podemos observar que a curva cheia representando a soma OPEP+TPEP tende assintoticamente ao OPEP para r grandes.

O potencial tensor para o canal (1,1) é mostrado nas figuras 7.18a,b. Na figura 7.18a podemos observar que, assim como no canal (0,1), o OPEP tem magnitude comparável com a do TPEP na região intermediária. O TPEP é negativo e cai rapidamente, ao passo

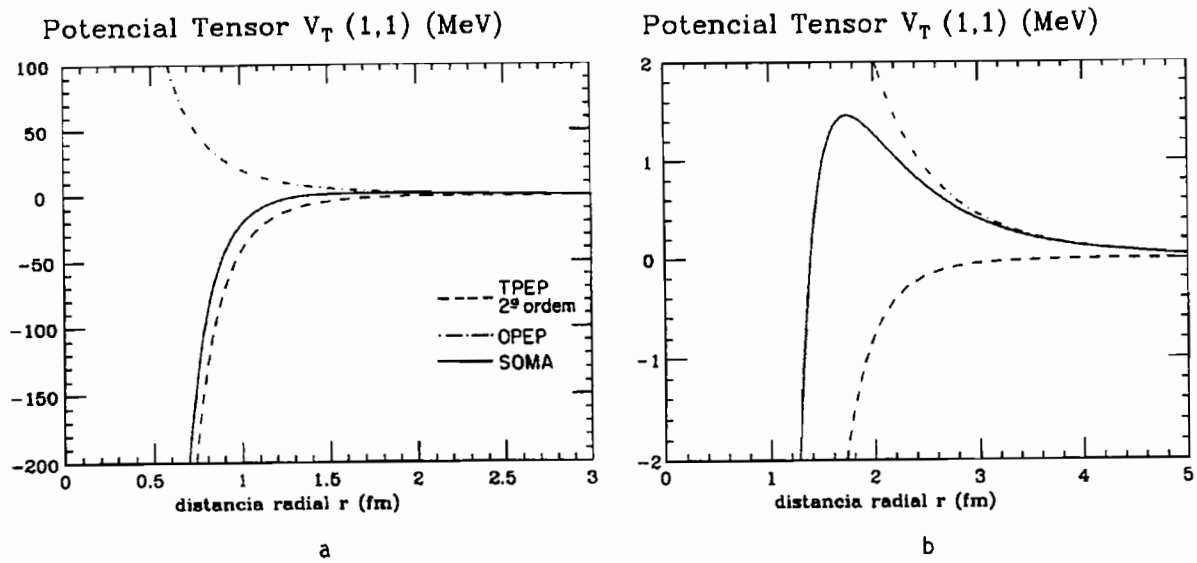


Figura 7.18: *Potencial tensor isotripleto-tripleto para a resultante em segunda ordem, comparado com o do píon.*

que o OPEP é positivo e decrescendo mais suavemente. Na figura observamos que a amplitude devida à troca de um píon começa a se tornar comparável com a de dois píons para r em torno de 1.5 fm. Na figura 7.18b, vemos que o OPEP se iguala ao TPEP (a menos do sinal) em 1.7 fm. Ainda na figura 7.18b podemos observar que a curva cheia representando a soma OPEP+TPEP tende assintoticamente ao OPEP para r grandes.

7.3 O Potencial em terceira e quarta ordens

O potencial em 3ª e 4ª ordens aparece neste trabalho devido ao uso do vértice escalar derivativo de dois píons, deduzido a partir do termo da Lagrangiana proporcional à $D^\mu\phi \cdot D_\mu\phi$. O objetivo ao se utilizar esse vértice é melhorar a fenomenologia, pois o potencial derivado desses termos é isoescalar, possuindo componentes central e spin-órbita fortemente atrativas.

Analogamente ao que ocorre na 2ª ordem, o vértice pseudovetor entre o píon e o nucleon pode ser decomposto, gerando sub-diagramas, que são responsáveis pelas integrais I_{13} até I_{17}. Vejamos, como exemplo, o diagrama nabla escalar, dado na figura 7.19. Em

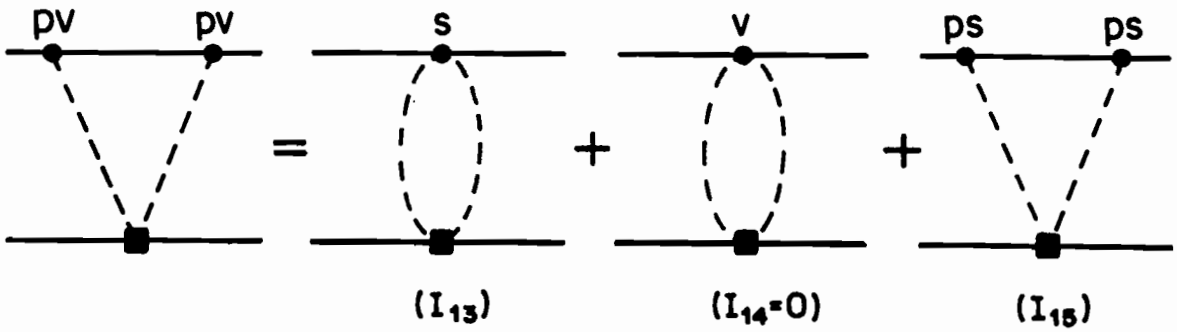


Figura 7.19: *Decomposição dos vértices pseudovetoriais do diagrama nabla escalar.*

termos das ressonâncias mesônicas, essa decomposição pode ser vista na figura 7.20, que

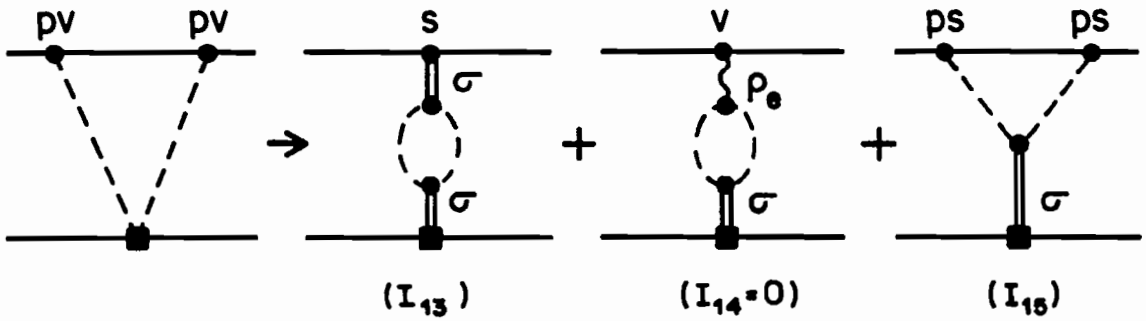


Figura 7.20: *Decomposição dos vértices pseudovetoriais do diagrama nabla escalar, mostrando as respectivas ressonâncias mesônicas de dois píons.*

se torna equivalente a 7.19 no limite de massa mesônica infinita. Já o potencial $V_{18}(r)$, por possuir apenas dois vértices do tipo escalar derivativo, não admite decomposição.

Assim, os termos de 3ª e 4ª ordens são representados pelos potenciais V_{13} , V_{15+17} e V_{18}. É importante ressaltar que este trabalho é o primeiro a utilizar tais termos na interação NN. Vamos, em seguida, estudar o resultado de cada amplitude. Como todos esses potenciais são isoescalares e não possuem termo spin-spin, a decomposição em canais é desnecessária, pois todos os canais de spin e isospin recebem igual contribuição, dada pela função de perfil do potencial.

A. V_{13}

As funções de perfil dos potenciais central e spin-órbita $V_{13}(r)$ são mostradas na figura 7.21. A variação desse potencial com o fator de corte mostra um comportamento semelhante ao de $V_1(r)$. Valores do parâmetro de corte da ordem de 30 a 50 GeV tornam o potencial independente desse parâmetro na região intermediária. Na figura podemos verificar que

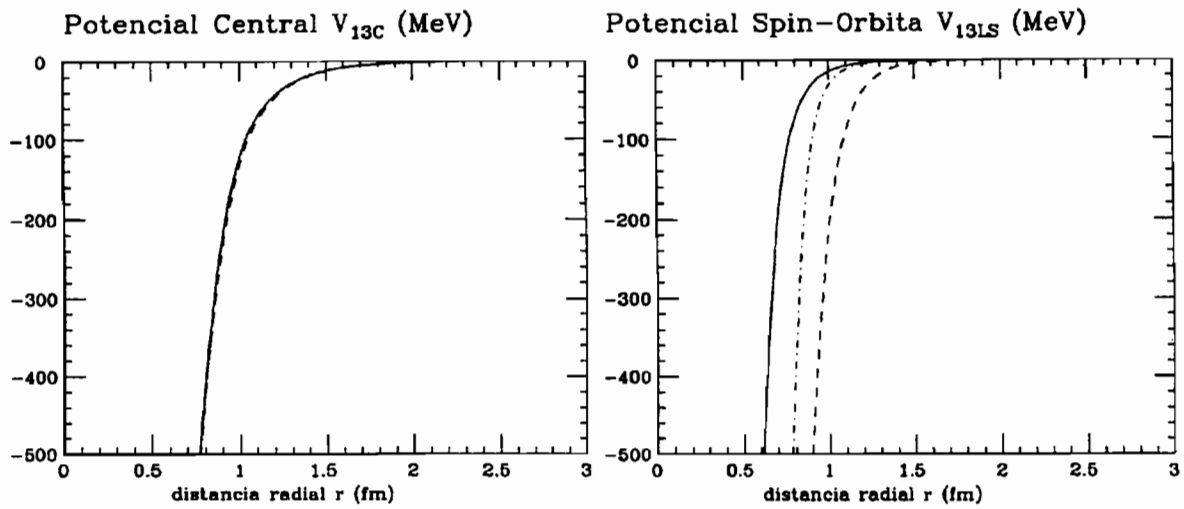


Figura 7.21: *Potencial central e spin-órbita $V_{13}(r)$, para Λ =1 GeV (tracejada), Λ =2 GeV (tracejada-pontilhada), Λ = 10 GeV (pontilhada) e Λ =50 GeV (sólida).*

as curvas pontilhada (Λ =10 GeV) e sólida (Λ =50 GeV) são indistinguíveis, o que atesta a independência do potencial com o parâmetro Λ para $\Lambda \geq$10 GeV. O potencial resultante é fortemente atrativo no canal central e negativo no canal spin-órbita.

B. V_{15+17}

O potencial V_{15+17} é, analogamente a V_{13}, isoescalar, apresentando componentes central e spin-órbita. Como visto no cálculo desse termo no apêndice C, ele é composto de uma soma de duas partes, uma dependente e outra independente de Λ. Ao fazermos Λ aumentar continuamente, apenas a parte independente de Λ fornece resultado apreciável para $r \geq 0.5$ fm. Esse termo resultante é muito semelhante ao potencial $V_{5+6+10}(r)$, apresentando sinal oposto. A sua função de perfil pode ser vista na figura 7.22. O

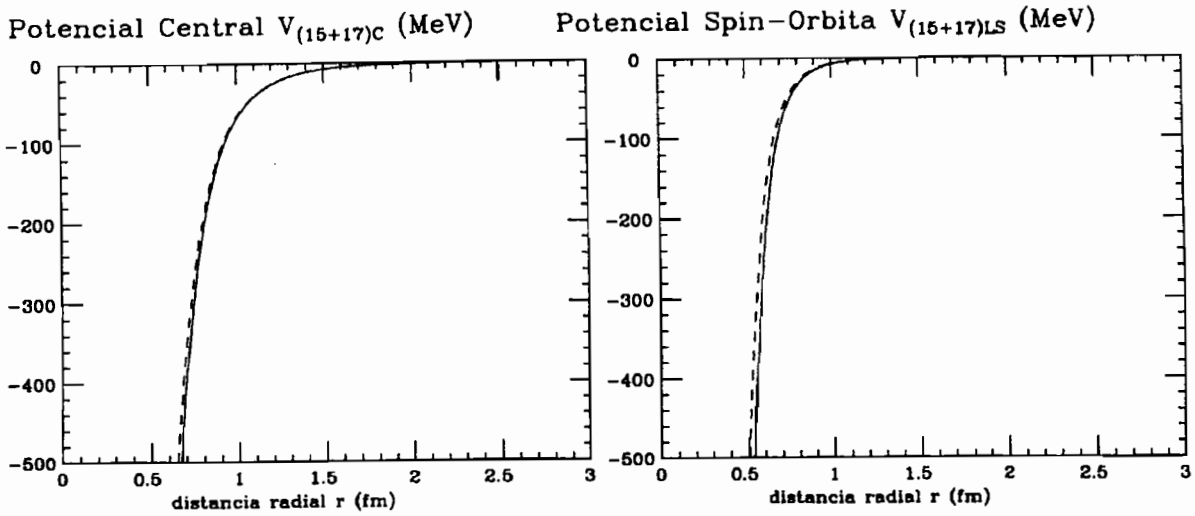


Figura 7.22: *Contribuição do termo V_{15+17} para a interação NN. As curvas tem o mesmo significado que o da figura anterior.*

potencial central é fortemente atrativo, e o termo spin-órbita é negativo. Analogamente à $V_{13}(r)$, as curvas pontilhada (Λ =10 GeV) e sólida (Λ =50 GeV) são indistinguíveis, mostrando a independência do potencial com o parâmetro Λ para $\Lambda \geq$10 GeV.

C. V_{18}

O potencial V_{18} é devido à auto energia do méson escalar com acoplamento derivativo com o nucleon. Todos os seus termos dependem de Λ. Na figura 7.23, mostramos a função de perfil do potencial para as contribuições central e spin-órbita, que possuem comportamento análogo a $V_1(r)$, ou seja, o potencial praticamente independe de Λ para $r \geq 0.5$ fm, quando $\Lambda \geq 10$ GeV.

Assim, todos os termos de 3ª e 4ª ordem fornecem contribuições atrativas para o potencial central e valores negativos para o termo spin-órbita. Na figura 7.24 graficamos as três contribuções em conjunto, e podemos observar que os termos de terceira e quarta ordem possuem comportamentos bem semelhantes, diferindo apenas um pouco no caso central, onde o termo de quarta ordem decresce mais rapidamente.

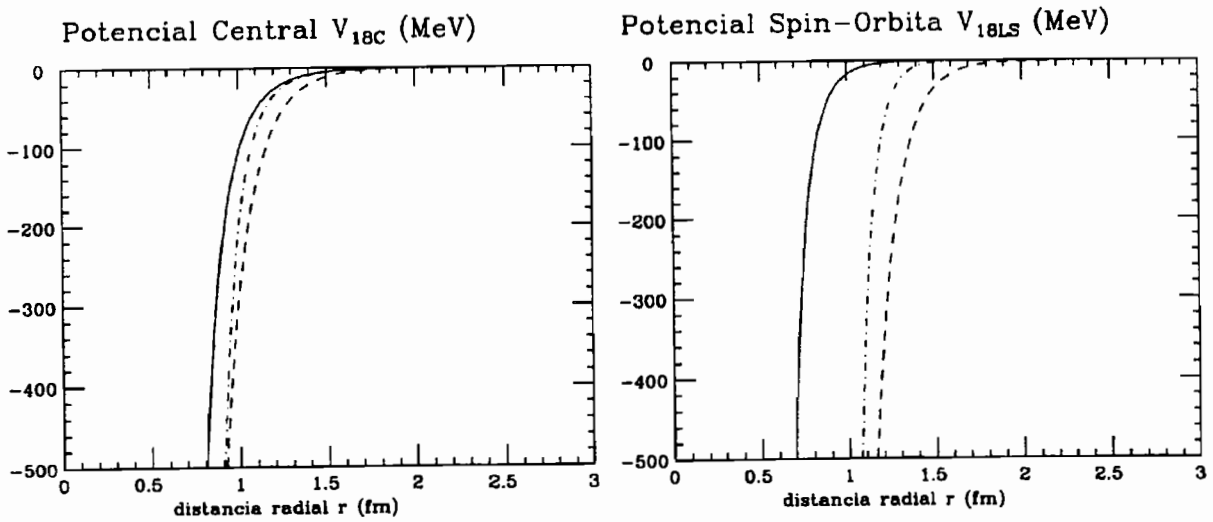


Figura 7.23: *Contribuições central e spin-órbita do termo de quarta ordem para o potencial NN. O significado das curvas é o mesmo das duas figuras anteriores.*

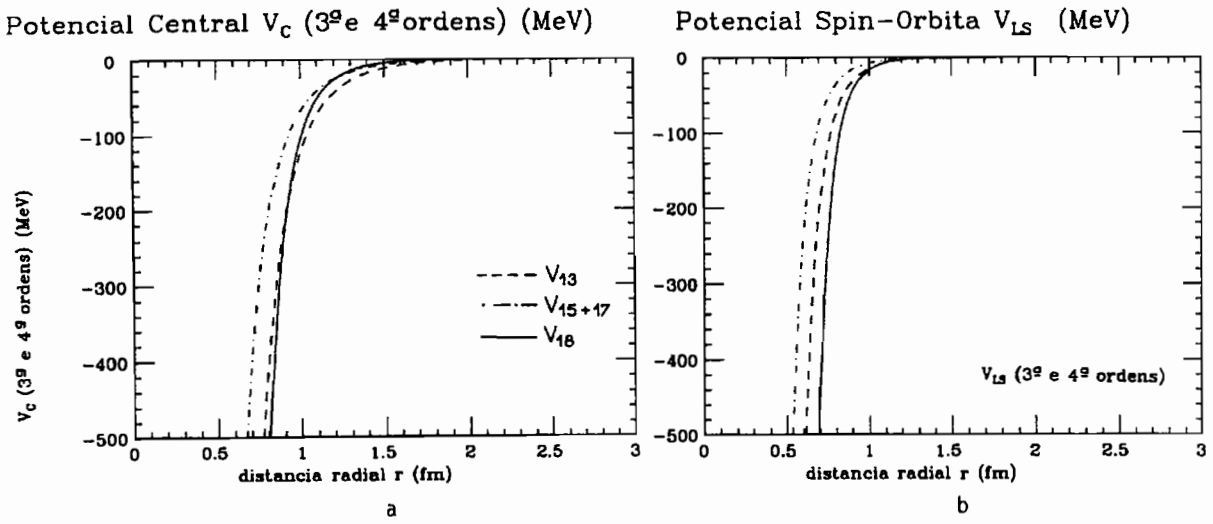


Figura 7.24: *Contribuições de terceira e quarta ordens para o potencial NN. O valor do parâmetro de corte utilizado foi de 50 GeV.*

7.4 Soma total para o potencial quiral

O potencial NN devido à troca de dois píons final é dado pela soma de todos os termos descritos anteriormente.

Nas figuras 7.25 a 7.32, apresentamos os potenciais central, spin-órbita e tensor resultantes, para os vários canais de spin e isospin.

Para efeitos de comparação, graficamos o potencial de Argonne [*WSA 84*] em conjunto com o nosso potencial. O potencial de Argone é semi-fenomenológico, sendo formado por três partes principais: (a) um termo de longo alcance dado pela troca de um píon, (b) uma parte intermediária, parametrizada pelo potencial tensor do píon elevado ao quadrado, multiplicado por uma função de corte gaussiana que simula a troca do méson ρ e (c) uma parte de curto alcance dada por uma função do tipo Woods-Saxon. A motivação para a escolha do potencial de Argone é que ele trata separadamente os canais intermediários associados ao Δ.

O potencial de Argonne $v_{28}(r)$ possui 28 parâmetros livres, 14 dos quais ajustam os canais intermediários de nucleons, e os 14 restantes atuam apenas quando a ressonância Δ está presente. Assim é possível graficar apenas a parte do potencial devida aos nucleons intermediários, "desligando" a ressonância Δ e, por isso, ele é o potencial mais adequado para ser comparado com o presente trabalho. Todos os outros potenciais realísticos (Bonn, Paris, Stony Brook) incluem de modo permanente a ressonância Δ nos canais intermediários, o que inviabiliza uma comparação direta com o nosso potencial.

Nos gráficos também incluimos o potencial de Argone v_{14}. Esse potencial utiliza apenas os 14 parâmetros devido aos nucleons intermediários para ajustar *todas* as defasagens, incluindo de modo implícito a contribuição do Δ. Esse potencial é semelhante ao potencial de Urbana [*LP 81*], e reproduz bem os dados experimentais. Entretanto, ele não serve como parâmetro de comparação direta com o nosso, pois as contribuições dos nucleons intermediários são magnificadas para cobrir a parte devida ao Δ e reproduzir os dados experimentais. A comparação com o v_{14} é indireta, pois nos fornece informações sobre quais canais são melhor ou pior ajustados com a fenomenologia, indicando possíveis contribuições que podem estar ausentes no presente potencial.

O potencial central isosingleto-singleto é mostrado nas figuras 7.25a,b. A leitura da figura 7.25 e das seguintes, deve ser feito do seguinte modo: para cada canal, sempre teremos quatro curvas: a tracejada e a tracejada-pontilhada representam o nosso potencial devido à troca de dois píons em $2^{\underline{a}}$ ordem e $2^{\underline{a}} + 3^{\underline{a}} + 4^{\underline{a}}$ ordens respectivamente; a linha

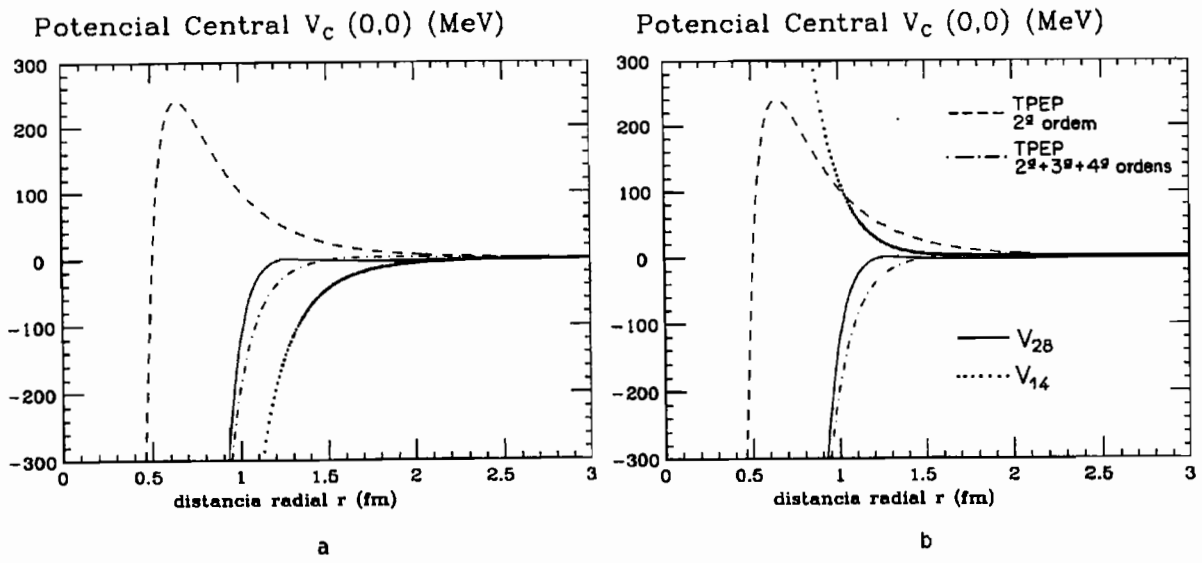


Figura 7.25: *Potencial central para o canal (0,0). A curva tracejada representa o nosso potencial em segunda ordem, a tracejada-pontilhada a soma da segunda, terceira e quarta ordens, a pontilhada o v_{14} e a sólida o v_{28}. A estratégia de leitura desses gráficos é explicada no texto.*

cheia é o potencial v_{28} com a contribuição devida à troca de dois píons apenas, não sendo incluidas a troca de um píon, o termo de Woods-Saxon e o corte gaussiano; a linha pontilhada representa o potencial v_{14}. Na figura da esquerda, o termo v_{14} contém só a contribuição da troca de dois píons, diferindo de v_{28} por incluir a ressonância Δ implicitamente nos canais intermediários. Na figura da direita, v_{14} é mostrado de forma completa, servindo como parâmetro de comparação fenomenológico.

Analisamos inicialmente o canal central (0,0). Em 7.25a, a diferença entre v_{14} e v_{28} indica que a inclusão da ressonância Δ torna o potencial atrativo à uma distância maior. Em 7.25b, o potencial total (v_{14}) torna-se repulsivo devido à inclusão do corte gaussiano. Nosso potencial em segunda ordem não coincide com v_{28}, apesar de ficar próximo do potencial fenomenológico até 0.7fm. A inclusão dos termos de terceira e quarta ordens aproxima o nosso potencial de v_{28} mas afasta do resultado total fenomenológico.

Nas figuras 7.26a-b, mostramos o potencial central isotripleto-singleto. A leitura da figura 7.26 segue os mesmos passos da anterior. A análise desse canal (1,0) é semelhante

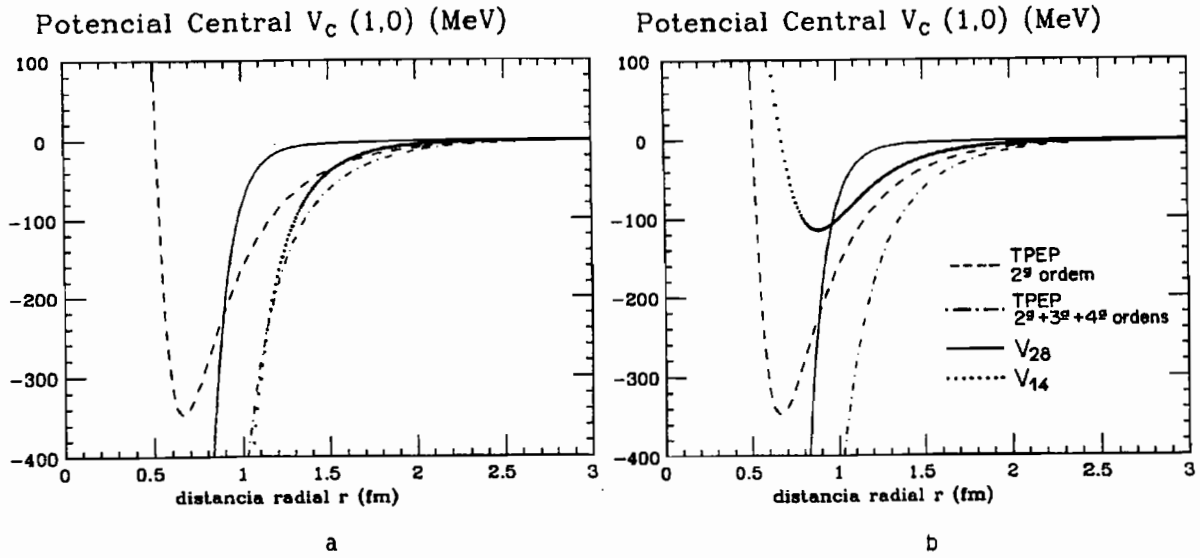


Figura 7.26: *Potencial central para o canal (1,0). A estratégia de leitura desses gráficos é explicada no texto.*

ao canal (0,0). Em 7.26a, a diferença entre v_{14} e v_{28} novamente indica que a inclusão da ressonância Δ torna o potencial atrativo a uma distância maior. Em 7.26b, o potencial total (v_{14}) torna-se repulsivo devido á inclusão do corte gaussiano. Nosso potencial em segunda ordem reproduz v_{28} até 0.7 fm aproximadamente, mas sem a forma correta. Isso pode ser atribuido ao fato do potencial de Argonne utilizar como molde o potencial tensor do píon ao quadrado para *todos* os canais, o que é claramente uma simplificação do problema e não corresponde à realidade. A inclusão dos termos de terceira e quarta ordens aproxima a forma do nosso potencial ao do v_{28}, embora piore o ajuste quantitativo.

O potencial central isosingleto-tripleto é apresentado nas figuras 7.27a,b. A análise desse canal (0,1) é novamente semelhante à anterior. Em 7.27b, o potencial total (v_{14}) torna-se repulsivo a curtas distâncias, formando um poço. Esse fato é importante pois esse é o canal do deuteron. Esse poço ocorre devido á inclusão do corte gaussiano. Nosso potencial em segunda ordem não reproduz v_{28}, possuindo sinal contrário. A inclusão dos termos de terceira e quarta ordens aproxima o nosso potencial de v_{28} mas afasta do resultado total fenomenológico. Esse afastamento pode ser atribuido a falta da ressonância Δ no nosso potencial.

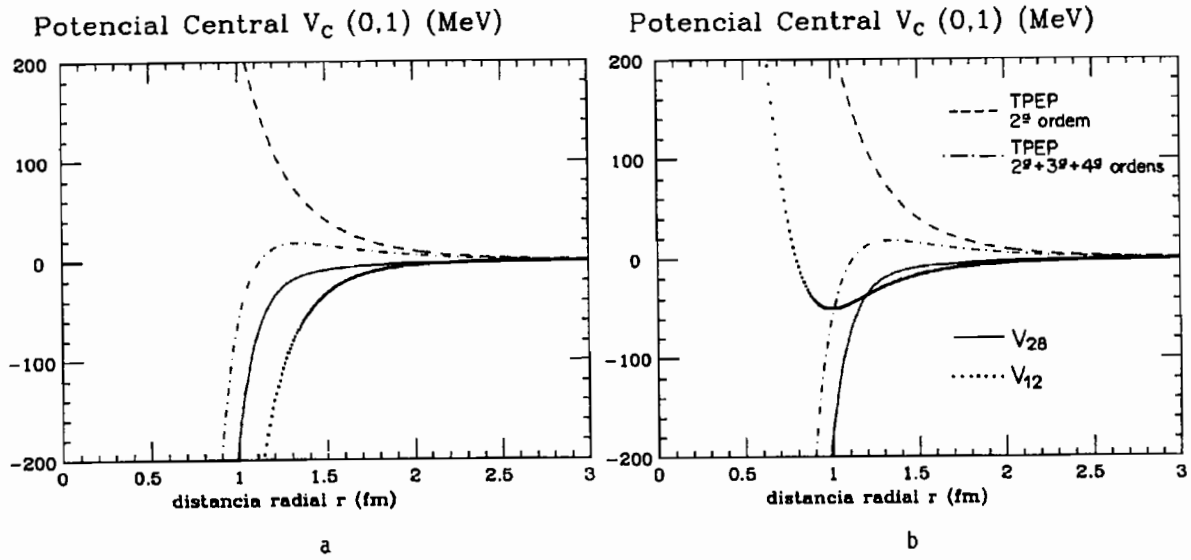


Figura 7.27: *Potencial central para o canal (0,1). A estratégia de leitura desses gráficos é explicada no texto.*

Nas figuras 7.28a,b exibimos o potencial central isotripleto-tripleto. A análise desse canal (1,1) revela que a ressonância Δ desempenha um papel vital. Isso pode ser visto através da mudança de comportamento de v_{14}. Nosso potencial não possui essa ressonância, e o fato de não ajustar esse canal, nem aproximadamente, indica que a troca de dois píons não-correlacionada influencia muito pouco esse termo (1,1).

Passamos, agora, à analise do potencial spin-órbita. A componente isosingleto-tripleto é mostrado nas figuras 7.29a,b. A leitura da figura 7.29a,b se faz da mesma maneira que no caso central. A análise desse canal (0,1), em 7.29a, mostra que os comportamentos de v_{14} e v_{28} são semelhantes, indicando que a ressonância Δ desempenha um papel pequeno nesse canal. Nosso potencial é positivo à uma distância demasiadamente grande, indicando a falta de um termo negativo de médio alcance.

O potencial spin-órbita isotripleto-tripleto é mostrado nas figuras 7.30a,b. A análise desse canal (1,1), em 7.30a, mostra novamente que a ressonância Δ desempenha um papel pequeno. Nosso potencial fornece aqui um ajuste qualitativo bem melhor que no canal anterior, como mostra a figura 7.30b. O desacordo entre nosso potencial e v_{28}, que ocorre também no canal (0,1), indica que talvez o potencial v_{28} não seja um bom padrão de

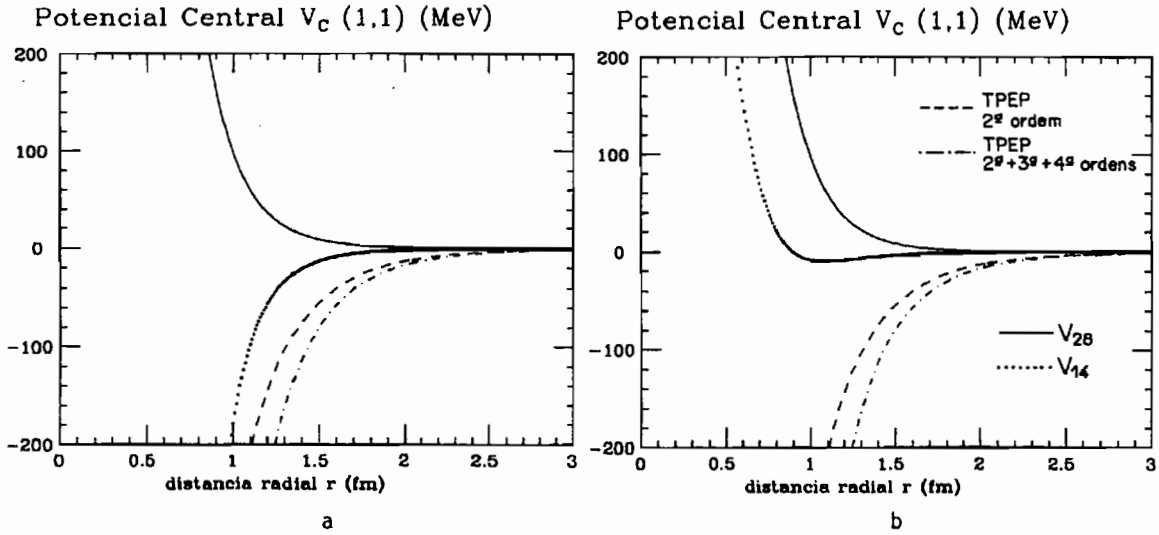


Figura 7.28: *Potencial central para o canal (1,1). A estratégia de leitura desses gráficos é explicada no texto.*

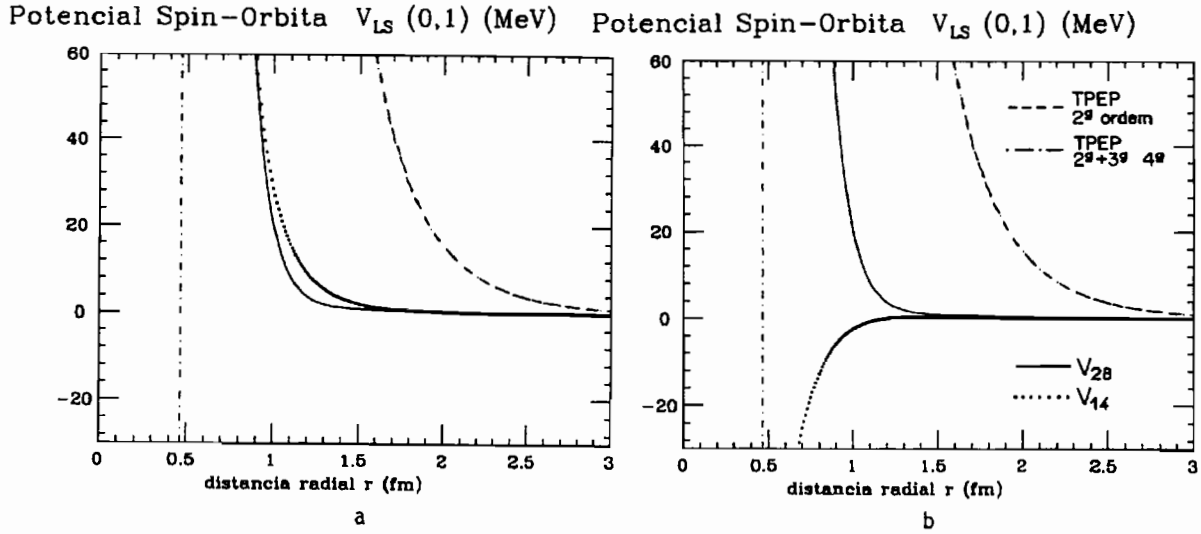


Figura 7.29: *Potencial spin-órbita para o canal (0,1). A estratégia de leitura desses gráficos é a mesma do potencial central.*

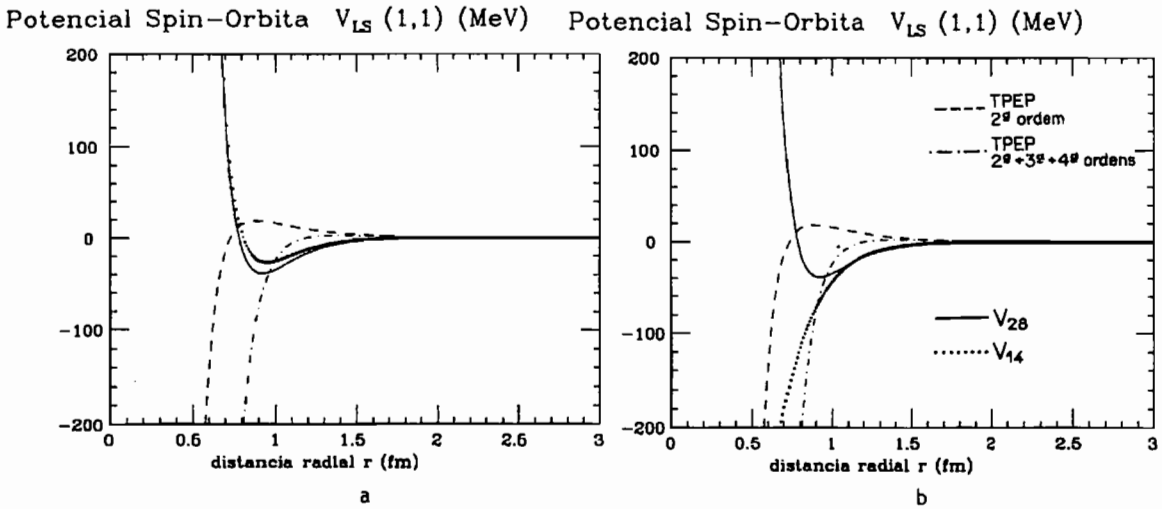


Figura 7.30: *Potencial spin-órbita para o canal (1,1).*

comparação para o termo spin-órbita.

Finalmente, discutimos o caso do potencial tensor, cuja componente isosingleto-tripleto é mostrada nas figuras 7.31a,b. A leitura da figura 7.31 segue o mesmo esquema

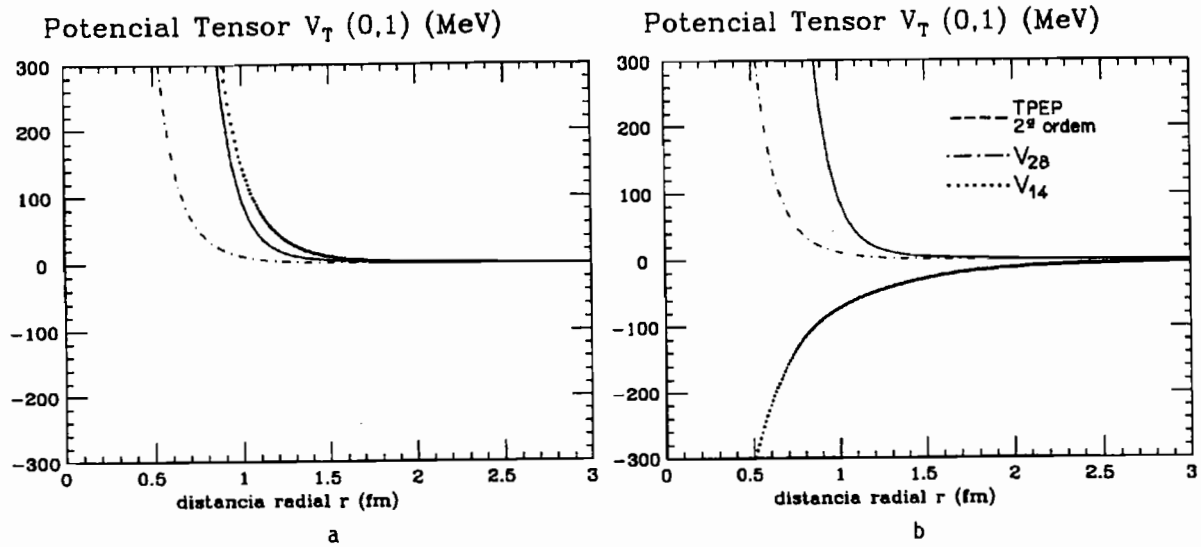


Figura 7.31: *Potencial tensor para o canal (0,1). A estratégia de leitura desses gráficos é a mesma do potencial central.*

das anteriores. Sabemos que o potencial tensor é fortemente influenciado pelo píon e pelo méson vetorial. Assim a troca de dois píons não-correlacionados desempenha um papel secundário para esse termo do potencial. Esse fato pode ser verificado nas figuras 7.31a-b, através da mudança de comportamento do potencial v_{14}. Em 7.31a, a diferença entre v_{14} e v_{28} é mínima, indicando que a contribuição da ressonância Δ é fraca nesse canal. Em 7.31b, o potencial total (v_{14}) torna-se atrativo devido à inclusão da troca de um píon e do cutoff gaussiano. Nosso potencial em segunda ordem reproduz v_{28} qualitativamente, discordando no raio do caroço repulsivo.

O potencial tensor isotripleto-tripleto é mostrado nas figuras 7.32a,b. Para esse canal tensorial (1,1), verifica-se novamente a importância do píon. A troca de dois píons não-correlacionados desempenha um papel secundário para esse termo do potencial, conforme mostram as figuras 7.32a-b, através da mudança de comportamento do potencial v_{14}. Em 7.32a, a diferença entre v_{14} e v_{28} é pequena, e pode ser atribuida à ressonância Δ. Em

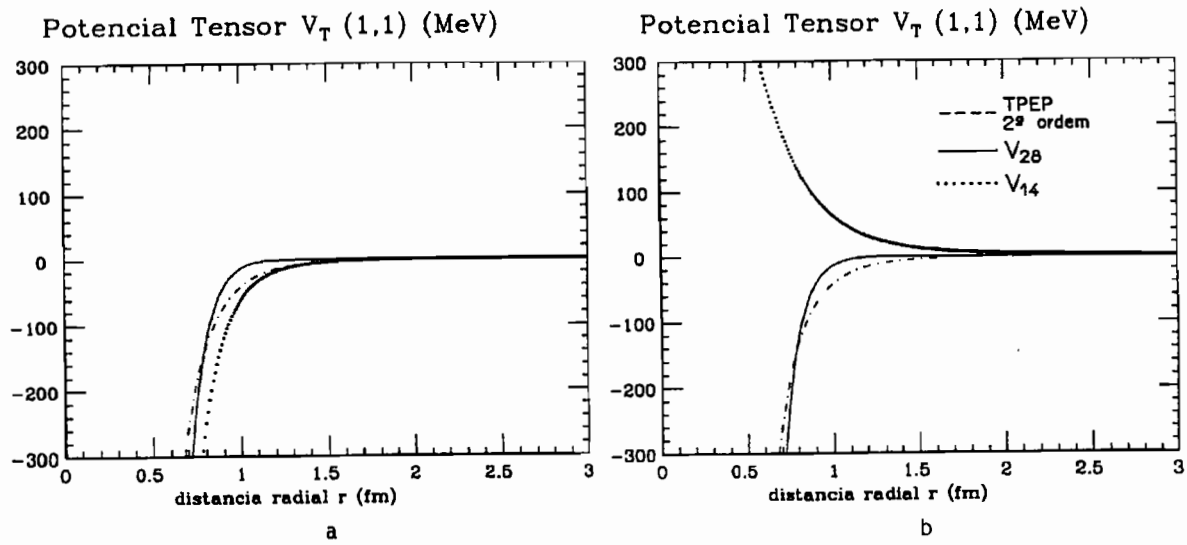


Figura 7.32: *Potencial tensor para o canal (1,1).*

7.32b, o potencial total (v_{14}) torna-se atrativo devido á inclusão da troca de um píon e do corte gaussiano. Nesse canal, o ajuste quantitativo entre nosso potencial e v_{28} é bem melhor que no canal (0,1), discordando apenas quanto à forma da função.

Capítulo 8

Conclusões e perspectivas

Neste trabalho calculamos o potencial NN devido à troca de dois píons, utilizando a realização não-linear da simetria quiral, implementada pela Lagrangiana fenomenológica de Weinberg.

O potencial foi calculado até um "loop", e mostrou uma série de diferenças estruturais em relação a outros os potenciais teóricos conhecidos.

A partir dos campos do píon e do nucleon, obtivemos a Lagrangiana quiral e os respectivos vértices de interação. Aqui surge a primeira diferença em relação aos métodos convencionais, pois essa Lagrangiana fornece vértices de interação de múltiplos píons com o nucleon. Foram utilizados os vértices de um e dois píons com o nucleon, que forneceram 8 diagramas de loop. Para agrupar esses diagramas, utilizamos a prescrição de Weinberg de expansão em potências do momento. Dessa forma obtivemos cinco diagramas de 2ª ordem, dois de 3ª ordem e um de 4ª ordem. No que diz respeito aos termos de segunda ordem, métodos convencionais utilizam apenas dois diagramas (caixa e cruzado), o que é inconsistente com a simetria quiral.

Cada diagrama de Feynman foi calculado de forma covariante, fornecendo a amplitude de transição relativística. O potencial, no espaço dos momentos, foi obtido a partir dessa amplitude, através do formalismo da equação de Bethe-Salpeter e do método da unitariedade elástica. Esse método permite a subtração, sem ambiguidades, da *iteração* da troca de um píon. O cálculo da iteração quiral mostrou diferenças substanciais em relação ao de Partovi e Lomon.

Para obtermos o potencial no espaço de configuração, efetuamos a redução não-relativística e posterior transformada de Fourier do potencial relativístico, e obtevemos componentes central, spin-órbita, tensor e spin-spin. O cálculo de cada diagrama e a

posterior soma geral mostraram uma série de fatos importantes.

Uma das conclusões deste trabalho é que, na interação NN, o vértice pseudovetorial entre o píon e o nucleon pode ser decomposto de forma análoga a que ocorre para o espalhamento πN. Essa decomposição gera uma soma de vários termos para o potencial, onde ocorrem vários cancelamentos. Em 2ª ordem, podemos concluir que o uso de $g_A = 1$ ocasiona um cancelamento total entre as diversas contribuições $\pi\pi$N isovetoriais, gerando um potencial tensor semelhante ao potencial de Partovi e Lomon, ao passo que os termos central e spin-órbita são diferentes. Um fato interessante que merece ser destacado é que os ppotenciais centrais obtidos são os resultados de cancelamentos importantes entre componentes escalares e isoescalares. Como consequência, o potencial central, em segunda ordem, é fortemente dominado pelo diagrama cruzado. O termo spin-órbita é dominado pelo diagrama caixa no canal (0,1) e produz uma resultante muito fraca no canal (1,1). Já para o termo tensorial obteve-se um resultado oposto, sendo a resultante no canal (0,1) fracamente positiva, ao passo que para o canal (1,1) ela é dada basicamente pelo diagrama cruzado.

Os termos de terceira e quarta ordem foram costruidos de forma isoescalar e suas contribuições geram termos central e spin-órbita, que são são negativas em ambos os casos.

A comparação direta entre a contribuição em 2ª ordem e a troca de um píon (OPEP) confirmou a dominância assintótica do OPEP, mas a região de transição entre o OPEP e o TPEP varia de acordo com o canal considerado, estando em torno de 2.5 fm.

A comparação do potencial em 2ª ordem e do potencial total (2ª +3ª +4ª ordens) com o potencial de Argonne permite-nos afirmar que, devido a concordância bastante boa (exceto para o canal central (1,1)) encontrada, nosso potencial pode ser usado em cálculos aplicativos, desde que aprimorado de forma adequada.

O estudo feito nesse trabalho constitui o ponto de partida para abordagens mais sofisticadas. Em particular, seria importante compatibilizar completamente as amplitudes usadas no cálculo do potencial NN com a fenomenologia da interação píon-nucleon. Gostaríamos, em particular, de destacar os seguintes pontos:

1. Estudo para $g_A \neq 1$

   O uso de $g_A = 1$ implicou na anulação das amplitudes $\mathcal{T}_4$, $\mathcal{T}_7$ e $\mathcal{T}_{8+11}$. Se $g_A \neq 1$,

esses termos fornecem

$$i(\mathcal{T}_4 + \mathcal{T}_7 + \mathcal{T}_{8+11}) = \left(\frac{g_A^2 - 1}{g_A^2}\right) 4\, g^4\, \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}\, (I_4 + I_7 + I_{8+11})\ .$$

Esses termos isovetoriais podem produzir potenciais central, spin-órbita, tensor e spin-spin. A presença desses vértices vetoriais pode influenciar o potencial a curtas distâncias.

2. Inclusão de ressonâncias bariônicas

   A inclusão da ressonância Δ nos estados intermediários, de maneira covariante e relativística é, ao contrário das outras mencionadas aqui, uma etapa de implementação mais demorada, mas necessária para o ajuste fenomenológico da interação.

3. Efeitos magnéticos

   Os efeitos magnéticos devido à ressonância ρ podem ser incluidos nos termos de terceira ordem, através de um novo termo na Lagrangiana quiral, dado por

$$\mathcal{L}_{mag} = g_{mag}\bar{\psi}\left(\frac{\mu_p - \mu_n}{2m}\right) i\sigma^{\mu\nu}\, \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\, \psi \cdot D_\mu \boldsymbol{\phi} \times D_\nu \boldsymbol{\phi}\ ,$$

   onde μ_p e μ_n são os momentos magnéticos anômalos do próton e do neutron.

4. Termo de quebra de simetria

   Os efeitos de quebra de simetria podem ser incluidos nos termos de segunda ordem, através de termos da forma

$$\mathcal{L}_{SB} = g_{SB}\bar{\psi}\psi\phi^2\ ,$$

   sendo g_{SB} proporcional à massa do píon.

Apêndice A

Unidades e notação relativística

A.1 Unidades

Em termos das unidades do S.I., as dimensões fundamentais, em função das quais todas as outras unidades são expressas, são massa (M), comprimento (L) e o tempo (T). Em teoria de campos relativística, as expressões e os cálculos são bastante simplificados se usarmos as chamadas "unidades naturais". Nesse sistema, escolhe-se a massa (M), a ação (A) e a velocidade (V) como dimensões fundamentais e fixa-se $\hbar$ e c como as unidades de ação e velocidade, respectivamente. Logo, as expressões no S.I. são trasformadas para essas unidades fazendo-se $\hbar = c = 1$. É interessante notar que em unidades naturais todas as grandezas tem dimensão de potências de M.

Sabendo que

$$L = \frac{A}{MV} \qquad \text{e} \qquad T = \frac{A}{MV^2}\,, \tag{A.1}$$

temos que, para um resultado geral expresso no S.I. vale

$$M^p L^q T^r = M^{p-q-r} A^{q+r} V^{-q-2r} \tag{A.2}$$

e, desta forma, em unidades naturais ele tem dimensão M^{p-q-r}. Nessas unidades, muitas grandezas tem a mesma dimensão. Por exemplo, a relação entre momento e energia para uma partícula, em unidades naturais se torna

$$E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2 = m^2 + \mathbf{k}^2\,, \tag{A.3}$$

e então temos que massa, momento, energia e número de onda tem todos a mesma dimensão natural M.

GRANDEZA	S.I.			UNIDADES NATURAIS $(M)^n$
	p	q	r	
Ação	1	2	-1	0
Velocidade	0	1	-1	0
Massa	0	0	0	1
Comprimento	0	1	0	-1
Tempo	0	0	1	-1
Densidade Lagrangiana ou Hamiltoniana	1	-1	-2	4
Constante de estrutura fina (α)	0	0	0	0
Carga elétrica	1/2	3/2	-1	0
Campo bosônico ϕ(x)	1/2	1/2	-1	1
Campo eletromagnético A^μ(x)	1/2	1/2	-1	1
Campo fermiônico ψ(x)	0	-3/2	0	3/2
Seção de choque σ	0	2	0	-2
Amplitude invariante $\mathcal{T}$	-3	-1	2	0

Tabela A.1: *Grandezas mais usadas na Física de Partículas e suas dimensões em unidades naturais. A dimensão da amplitude invariante depende do processo em estudo, sendo zero para o espalhamento de 2 corpos.*

A partir da expressão A.2 podemos gerar todas as grandezas em unidades naturais e algumas das mais importantes estão listadas na tabela A.1.

Ao se trabalhar com unidades naturais, pode-se obter um resultado numérico em qualquer sistema de unidades. Por exemplo, para se obter um resultado M^n no S.I., basta multiplicar o resultado por $\hbar^a c^b$ e calcular a e b de modo que a dimensão se mantenha correta.

A.2 Notação Relativística

Quadrivetores

Neste trabalho representamos um quadrivetor por

$$a^\mu = \{a_0, \mathbf{a}\} \tag{A.4}$$

Por exemplo, o quadrivetor espaço-tempo escreve-se $x^\mu = (ct, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x})$, pois faremos sempre uso das unidades naturais. As componentes de um quadrivetor são rotuladas por letras gregas e as componentes espaciais por letras latinas. Os vetores no espaço tridimensional são sempre escritos em negrito.

O tensor métrico $g^{\mu\nu}$ tem a forma

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{A.5}$$

sendo que grandezas covariantes são obtidas por

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu = \{a_0, -\mathbf{a}\}, \tag{A.6}$$

onde é usada a convenção de soma de Einstein associada à repetição dos índices. O tensor métrico contravariante $g^{\lambda\mu}$ é relacionado à $g_{\mu\nu}$ por

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = g^\lambda_\nu = \delta^\lambda_\nu \,, \tag{A.7}$$

onde δ^λ_ν é o delta de Kronecker que vale 1 para $\lambda = \nu$ e é nulo para $\lambda \neq \nu$.

De A.5 e A.7 temos que

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \,. \tag{A.8}$$

O produto escalar de dois quadrivetores é dado por

$$a \cdot b = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^\mu b_\mu = (a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \,, \tag{A.9}$$

e é invariante por transformações de Lorentz.

As derivadas covariantes e contravariantes são

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad e \qquad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \,, \tag{A.10}$$

e o quadridivergente de um vetor V^μ é

$$\partial_\mu V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\mu} , \tag{A.11}$$

enquanto que o quadrigradiente de uma função escalar ϕ transforma-se como um quadrivetor

$$\partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} . \tag{A.12}$$

A ação de A.11 sobre A.12 produz o operador d'Alambertiano

$$\Box\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi. \tag{A.13}$$

Estados

Os estados de uma partícula são normalizados covariantemente

$$< \mathbf{p}' \mid \mathbf{p} >= 2E\bar{\delta}^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) , \tag{A.14}$$

onde $\bar{\delta}^3 = (2\pi)^3\delta^3$ e $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Logo, os estados tem dimensão M^{-1}, que é diferente do caso não-relativístico

$$< \mathbf{p}' \mid \mathbf{p} >_{n.r.} = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) , \tag{A.15}$$

onde os estados tem dimensão $M^{-3/2}$. A relação de completeza covariante é

$$\int \frac{\bar{d}^3\mathbf{p}}{2E} \mid \mathbf{p} >< \mathbf{p} \mid = 1 , \tag{A.16}$$

com $\bar{d}^3 = \frac{d^3}{(2\pi)^3}$.

A.3 Férmions e a equação de Dirac

Spinores

Na mecânica quântica não-relativística, uma partícula de spin 1/2 é representada por um spinor de duas componentes, usualmente denotado por χ. Na mecânica quântica relativística a descrição da partícula no espaço de spin passa a ser feita por meio de um spinor de quatro componentes, dependente do momento $\mathbf{p}$ e representado neste trabalho por:

$$u^s(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \cdot \begin{pmatrix} (E+m)I \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \chi^s , \tag{A.17}$$

onde $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ e I é a identidade em duas dimensões, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, e $\boldsymbol{\sigma}$ indica o conjunto das matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.18}$$

Assim, o "produto escalar" $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$ é dado por

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix}. \tag{A.19}$$

No spinor $u^s(\mathbf{p})$ as matrizes I e $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$ multiplicam o spinor χ^s, de duas componentes e o resultado é um quadrivetor. Por exemplo, para s = -1/2 temos

$$u^{-1/2}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} 0 \\ E+m \\ p_1 - ip_2 \\ -p_3 \end{pmatrix}. \tag{A.20}$$

É interessante notar que no referencial da partícula, $\mathbf{p} = 0$; E = m , o spinor é dado por

$$u^s(0) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi^s \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{A.21}$$

onde o fator 2m é devido à normalização cavariante. Isso mostra que no referencial de repouso do férmion, o spinor de Dirac é muito parecido com o spinor de Pauli.

Matrizes γ

No formalismo relativístico são também utilizadas as matrizes γ^μ de Dirac, de 4x4 e com traço nulo. A propriedade dessas matrizes é a sua anticomutação [1]

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} . \tag{A.22}$$

Aqui adotamos a seguinte forma para as matrizes de Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \longrightarrow \gamma^0 = \gamma_0 ; \tag{A.23}$$

[1] Usamos chaves para a anticomutação e colchetes para a comutação .

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \gamma^k = -\gamma_k \ . \tag{A.24}$$

É possível construir o "produto escalar" dessas matrizes com um quadrivetor a^u, o qual representamos por $\not{a}$

$$\not{a} = a_\mu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} a_0 I & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a} & -a_0 I \end{pmatrix} . \tag{A.25}$$

Algumas combinações das matrizes γ são importantes

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} , \tag{A.26}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \ , \tag{A.27}$$

e as matrizes γ^5 tem as seguintes propriedades

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad , \quad (\gamma^5)^2 = I \quad ; \quad \gamma^{5+} = \gamma^5 \ . \tag{A.28}$$

Para partículas relativísticas de spin 1/2 uma amplitude descrevendo um processo físico contém sempre elementos cuja forma geral é

$$\bar{u}\ \Gamma\ u$$

com $\Gamma = I, \gamma^\mu, \gamma_5, \gamma^\mu\gamma_5$ e $\sigma^{\mu\nu}$ e qualquer outra combinação de matrizes γ pode ser reduzida para uma destas cinco. O termo $\bar{u}$ é o spin adjunto de u, ou seja, "uma matriz linha",

$$\bar{u}(\mathbf{p}) = u^+(\mathbf{p})\gamma^0 = \frac{1}{\sqrt{E+m}}\chi^+[(E+m), -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}]. \tag{A.29}$$

Assim, do ponto de vista matricial, uma amplitude física é sempre um <u>escalar</u> no espaço de spin, pois $(\bar{u}) \times (\Gamma) \times (u) \Rightarrow (4\times 1) \times (4\times 4) \times (1\times 4) = (1\times 1) =$ escalar.

A forma como o spinor se apresenta em A.29 é conhecida como "notação de duas componentes". Nesse trabalho, calculamos as amplitudes mantendo essa notação e a amplitude final é uma matriz (2×2) sanduichada entre spinores de Pauli.

Equação de Dirac

A equação de Dirac para uma partícula com quadrimomento $p = (p_0, \mathbf{p})$ e massa m é dada por

$$(\not{p} - m)u^s(\mathbf{p}) = 0, \tag{A.30}$$

que na notação de duas componentes é escrito na forma

$$\begin{pmatrix} (p_0 - m) & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -p_0 - m \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} E+m \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \end{pmatrix} \chi^s = 0, \tag{A.31}$$

ou seja

$$(p_0 - E)\frac{1}{\sqrt{E+m}}[(E+m)I - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}]\chi^s = 0\ , \tag{A.32}$$

que se anula se $p_0 = E$, ou seja, se a partícula estiver na <u>camada de massa</u>.

Para o spinor $\bar{u}$ a equação é

$$\bar{u}(\mathbf{p})(\not{p} - m) = 0 \tag{A.33}$$

A condição de normalização é definida por

$$\bar{u}^{s'}(\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) = 2m\delta_{ss'}\ . \tag{A.34}$$

Os operadores de projeção de energia estão relacionados com a relação de completeza

$$\sum_s u^s(\mathbf{p})\bar{u}^s(\mathbf{p}) = \not{p} + m\ , \tag{A.35}$$

e definidos como:

$$\Lambda^{\pm}(\mathbf{p}) = \frac{\pm\not{p} + m}{2m}\ . \tag{A.36}$$

Nesse trabalho utilizamos apenas os operadores de projeção de energia positiva (Λ^+), cujas propriedades derivam de A.30 e A.33

$$\Lambda^+ u_r(\mathbf{p}) = u_r(\mathbf{p}); \tag{A.37}$$

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})\Lambda^+(\mathbf{p}) = \bar{u}_r(\mathbf{p}), \tag{A.38}$$

e pelas quais mostra-se

$$\Lambda^+(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m}\sum_s u^s(\mathbf{p})\bar{u}^s(\mathbf{p})\ . \tag{A.39}$$

Apêndice B

Regularização covariante

Uma das regras de Feynman dadas na figura 4.2 é a integração no momento interno quando da presença de um loop.[1] Dependendo do número de potências do momento em cada vértice do loop e de sua geometria, a integral pode divergir quando o momento interno for infinito, fato conhecido como divergência ultravioleta. Para evitar essa divergência, recorre-se ao procedimento conhecido como regularização covariante [*Sca 79*], que consiste em cortar a integral em um momento máximo Λ ou subtrair de um propagador do loop o propagador de uma partícula fictícia de massa Λ. Ao final dos cálculos é necessário fazer $\Lambda \to \infty$, mas então o processo de regularização garante que a divergência não mais ocorre.

No procedimento de regularização covariante, o propagador do momento do "loop" é modificado para

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - \mu^2} + \sum_i \frac{a_i}{k^2 - \Lambda_i^2} \,, \tag{B.1}$$

onde o número de termos na somatória depende do grau de divergência do "loop". Os valores de Λ_i são tais que $\Lambda_i^2 >> \mu^2$ e a escolha dos a_i's é feita de tal modo que o propagador modificado, na região assintótica, possui um número suficiente de momentos internos no denominador tornando convergente a integral no "loop".

[1] A discussão que se segue baseia-se em [*Bat 92*].

Um regularizador

Quando a divergência na integral é logarítimica ou linear (grau zero ou um, respectivamente), é suficiente a presença de um único regularizador. Resta-nos escolher um valor conveniente de a. Temos que,

$$\frac{1}{k^2-\mu^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2-\mu^2} + \frac{a}{k^2-\Lambda^2}\,, \tag{B.2}$$

onde, o termo da direita é equivalente a

$$\frac{k^2-\Lambda^2+a(k^2-\mu^2)}{(k^2-\mu^2)(k^2-\Lambda^2)} = \frac{k^2(1+a)-\Lambda^2-a\mu^2}{(k^2-\mu^2)(k^2-\Lambda^2)}. \tag{B.3}$$

A escolha de $\underline{a}$ é feita de tal forma que o coeficiente de k^2 seja nulo. Assim temos que

$$a = -1 \tag{B.4}$$

e portanto, obtemos

$$\frac{1}{k^2-\mu^2} \Longrightarrow \frac{\mu^2-\Lambda^2}{(k^2-\Lambda^2)(k^2-\mu^2)} = \frac{1}{k^2-\mu^2}\left(\frac{\mu^2-\Lambda^2}{k^2-\Lambda^2}\right). \tag{B.5}$$

Pela expressão B.5, vemos que para recuperar o propagador original, sem regularizador, basta tomarmos o limite de $\Lambda \to \infty$.

Dois regularizadores

Quando a integral de loop apresenta divergência de ordem superior a um e menor que quatro, é preciso 2 regularizadores:

$$\frac{1}{k^2-\mu^2} \Longrightarrow \frac{1}{k^2-\mu^2} + \frac{a_1}{k^2-\Lambda_1^2} + \frac{a_2}{k^2-\Lambda_2^2}\,, \tag{B.6}$$

onde o termo da direita, após um pouco de álgebra, se torna

$$\frac{(1+a_1+a_2)k^4+[\Lambda_1^2+\Lambda_2^2+a_2(\Lambda_1^2+\mu^2)+a_1(\Lambda_2^2+\mu^2)]k^2}{(k^2-\mu^2)(k^2-\Lambda_1^2)(k^2-\Lambda_2^2)} +$$

$$+\quad \frac{\Lambda_1^2\Lambda_2^2+a_1\mu^2\Lambda_2^2+a_2\mu^2\Lambda_1^2}{(k^2-\mu^2)(k^2-\Lambda_1^2)(k^2-\Lambda_2^2)}. \tag{B.7}$$

A escolha de a_1 e a_2 deve ser feita de tal forma que, os coeficientes de k^4 e k^2 se anulem. Obtemos então

$$a_1 = \frac{\Lambda_2^2 - \mu^2}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2} \quad ; \quad a_2 = \frac{\Lambda_1^2 - \mu^2}{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2} \, . \tag{B.8}$$

Substituindo B.8 em B.6 obtemos

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - \mu^2} \times \left(\frac{\mu^2 - \Lambda_1^2}{k^2 - \Lambda_1^2}\right) \cdot \left(\frac{\mu^2 - \Lambda_2^2}{k^2 - \Lambda_2^2}\right) \, . \tag{B.9}$$

Como temos que $\Lambda_1^2 >> \mu^2$ e $\Lambda_2^2 >> \mu^2$, podemos tomar $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$ e então B.9 se torna

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - \mu^2} \times \left(\frac{\mu^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2}\right)^2 \, . \tag{B.10}$$

É possível mostrarmos que, para uma divergência de ordem superior a n e menor que $2n$, o regularizador fica

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - \mu^2} \times \left(\frac{\mu^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2}\right)^n \, . \tag{B.11}$$

Apêndice C

Cálculo das integrais de loop

O objetivo desse apêndice é calcular as integrais do capítulo 6.

Integral I_1

A integral I_1 é dada na expressão 6.14

$$I_1 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{I^{(1)} \cdot I^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)} \, .$$

Ela é divergente logaritmicamente e necessita da introdução de um regularizador,

$$I_1 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{I^{(1)} \cdot I^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)} \times \frac{(\mu^2-\Lambda^2)}{(k^2-\Lambda^2)} \, .$$

No capítulo 5, vimos que para a cinemática do espalhamento NN, o momento transferido é dado por $\Delta = p_1' - p_1 = p_2 - p_2'$. Assim, podemos escrever

$$k' = k + \Delta$$

e dessa forma reescrevemos I_1 como

$$I_1 = (\mu^2-\Lambda^2) I^{(1)} \cdot I^{(2)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\mu^2)(k^2-\Lambda^2)} . \tag{C.1}$$

Na resolução da integral I_1 e de todas as integrais quadridimensionais em k será utilizada a substituição de Feynman

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} = (n-1)! \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \delta(1-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_n)}{[\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n]^n} \tag{C.2}$$

onde $a_1, \cdots, a_n$ são polinômios de 2º grau em k e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são as chamadas "variáveis auxiliares de Feynman".

Nesse trabalho aparecerão, no máximo, 4 variáveis auxiliares. Chamando-as de ϵ, β, ζ e λ, substituimos C.2 em C.1 e obtemos ($n = 3$)

$$\begin{aligned} I_1 &= (\mu^2 - \Lambda^2) I^{(1)} \cdot I^{(2)}\, 2! \int d\epsilon\, d\beta\, d\zeta\, \delta(1 - \epsilon - \beta - \zeta) \\ &\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\{\epsilon(k^2 - \mu^2) + \beta[(k+\Delta)^2 - \mu^2] + \zeta(k^2 - \Lambda^2)\}^3} \end{aligned}$$

Na expressão anterior, a integração em ϵ é feita através da função delta. Rearranjando o denominador em potências de k e lembrando que $\epsilon + \beta + \zeta = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{(2\pi)^4} (\mu^2 - \Lambda^2)\, I^{(1)} \cdot I^{(2)}\, 2! \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \\ &\times \int d^4k \frac{1}{[k^2 + 2k \cdot (\beta\Delta) + \beta\Delta^2 - \mu^2(1-\zeta) - \zeta\Lambda^2]^3}. \end{aligned} \tag{C.3}$$

A integral em k é feita utilizando as expressões n-dimensionais de 't Hooft e Veltman, [*HV 79*]. Para o caso da expressão C.3, recorremos à igualdade

$$\int d^n p \frac{1}{(p^2 + 2p \cdot K + M^2)^m} = \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{(M^2 - K^2)^{m - \frac{n}{2}}} \cdot \frac{\Gamma(m - \frac{n}{2})}{\Gamma(m)}. \tag{C.4}$$

onde fazemos a identificação:

$$\begin{aligned} n &= 4 \qquad \text{(número de dimensões)} \\ m &= 3 \qquad \text{(número de binômios em k)} \\ K &= \beta\Delta \\ M^2 &= \beta\Delta^2 - \mu^2(1-\zeta) - \zeta\Lambda^2 \end{aligned}$$

e assim C.3 torna-se

$$I_1 = \frac{i}{(4\pi)^2} (\mu^2 - \Lambda^2)\, I^{(1)} \cdot I^{(2)} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \frac{1}{\Delta^2\beta(1-\beta) - \mu^2(1-\zeta) - \zeta\Lambda^2}.$$

Usando a definição de Δ dada em 5.9,

$$\Delta = (0, \mathbf{p}' - \mathbf{p}) = (0, \boldsymbol{\Delta}),$$

temos

$$\Delta^2 = -\boldsymbol{\Delta}^2,$$

e a integral fica

$$I_1 = \frac{i}{(4\pi)^2}\,(\Lambda^2 - \mu^2)\, I^{(1)} \cdot I^{(2)} \int_0^1 d\beta \int$$

onde o denominador D_1 é dado por

$$D_1 = \boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta) + \mu^2(1-\zeta) + \zeta$$

O estudo analítico desse denominador mostra que ele não pu
gração considerada.

Efetuemos, agora, a seguinte mudança de variáveis na ex

$$\alpha = \frac{2\beta}{1-\zeta} - 1\,, \quad \nu = \zeta \qquad \rightarrow \qquad \beta =$$

O jacobiano da transformação fornece

$$d\beta\, d\zeta = \frac{1-\nu}{2} d\alpha\, d\nu\,.$$

As mudanças na região de integração são indicadas na figu

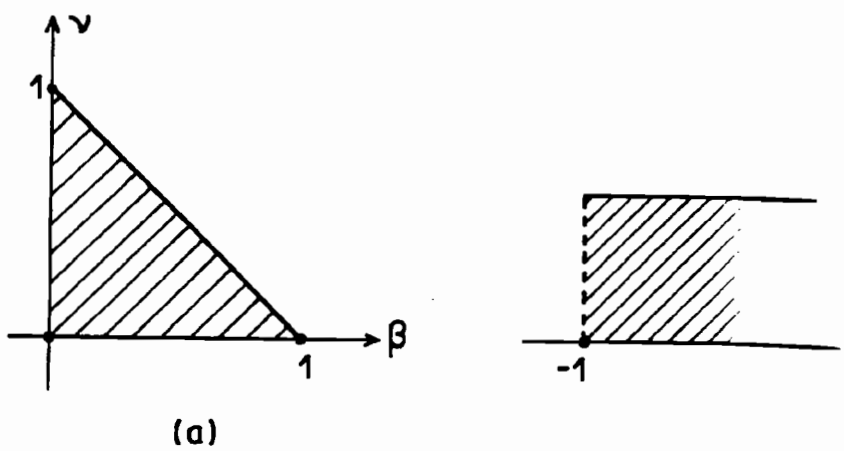


Figura C.1: *Região de integração (a) antiga e*

Aplicando essa mudança, a expressão C.5 torna-se

$$I_1 = \frac{\Lambda^2 - \mu^2}{(2\pi)^4}\, i\pi^2\, I^{(1)} \cdot I^{(2)}\, \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu \, \frac{}{\frac{\boldsymbol{\Delta}^2}{4}\,[1 - \alpha^2 +}$$

Definindo as funções

$$F_1 = \left[1-\alpha^2+\nu(1+\alpha)^2\right]^{-1}; \tag{C.9}$$

$$M_1 = 2\sqrt{F_1\left(\mu^2+\frac{\nu\Lambda^2}{1-\nu}\right)}; \tag{C.10}$$

a expressão C.8 assume uma forma mais simples

$$I_1 = \frac{i}{(4\pi)^2}\,(\Lambda^2-\mu^2)\,I^{(1)}\cdot I^{(2)}\,\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}d\alpha\int_0^1 d\nu\,\frac{4F_1}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2}.$$

Acertando as constantes, obtemos finalmente para a integral I_1

$$I_1 = \frac{2i}{(4\pi)^2}\,S_1\,I^{(1)}\cdot I^{(2)} \tag{C.11}$$

com

$$S_1 = (\Lambda^2-\mu^2)\int_{-1}^{1}d\alpha\int_0^1 d\nu\,\frac{F_1}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2}. \tag{C.12}$$

Integrais I_2 e I_3

As integrais I_2 e I_3 podem ser escritas como

$$\begin{aligned} I_2 &= I^{(1)}\gamma_\mu^{(2)}\,I^\mu \\ I_3 &= \gamma_\mu^{(1)}I^{(2)}\,I^\mu \end{aligned}$$

onde

$$I^\mu = \frac{1}{2m}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k^\mu}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2]}$$

A simetria da integral permite-nos escrever

$$\begin{aligned} I^\mu &= \frac{1}{2m}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k^\mu}{(k^2-\mu^2)}\left[\frac{1}{(k+\Delta)^2-\mu^2}-\frac{1}{(k-\Delta)^2-\mu^2}\right] \\ &= \frac{1}{2m}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k^\mu}{(k^2-\mu^2)}\left[\frac{-4k\cdot\Delta}{(k^2+\Delta^2-\mu^2)^2-(2k\cdot\Delta)^2}\right] \\ &= -\frac{1}{2m}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k^2g^{\mu\nu}\Delta_\nu}{(k^2-\mu^2)\,[(k^2+\Delta^2-\mu^2)^2-(2k\cdot\Delta)^2]} \end{aligned}$$

sendo que na última passagem usamos o resultado válido para uma função $f(k^2)$ qualquer

$$\int d^4k f(k^2)k^\mu k^\nu = \int d^4k f(k^2)\frac{k^2}{4}g^{\mu\nu}$$

Concluimos que I_2 e I_3 são proporcionais a $I^{(1)}\not{A}^{(2)}$ e $\not{A}^{(1)}I^{(2)}$, respectivamente. Usando a equação de Dirac, obtemos $\not{A}^{(i)} = 0$ e portanto

$$I_2 = I_3 = 0 \tag{C.13}$$

Integral I_4

A integral I_4 aparece em todos os diagramas de segunda ordem e é dada na expressão 6.16. Ela apresenta divergência quadrática, necessitando regularizador duplo.

$$I_4 = \frac{1}{(2m)^2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\not{k}^{(1)}\cdot\not{k}^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)} \times \left(\frac{\mu^2-\Lambda^2}{k^2-\Lambda^2}\right)^2 .$$

Para essa integral, deve ser utilizada a seguinte substituição de Feynman

$$\frac{1}{abc^2} = 3!\int \frac{d\beta\, d\zeta\, d\alpha\, \delta(1-\beta-\zeta-\alpha)\zeta}{[\alpha a\ +\beta b\ +\zeta c]^4} \tag{C.14}$$

através da qual I_4 se torna

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{(2\pi)^4}(\mu^2-\Lambda^2)^2\frac{\gamma^{\mu\,(1)}\gamma^{\nu\,(2)}}{(2m)^2}\,3!\int d^4k\, k_\mu k_\nu \\ &\times \int \frac{d\beta\, d\zeta\, d\alpha\, \delta(1-\beta-\zeta-\alpha)\,\zeta}{[\alpha(k^2-\mu^2)+\beta[(k+\Delta)^2-\mu^2]+\zeta(k^2-\Lambda^2)]^4} \end{aligned}$$

Integrando na variável α através da função δ e invertendo a ordem de integração, temos

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{(2\pi)^4}(\mu^2-\Lambda^2)^2\frac{\gamma^{\mu\,(1)}\gamma^{\nu\,(2)}}{(2m)^2}\,3!\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta} d\zeta\,\zeta \\ &\times \int d^4k\,\frac{k_\mu k_\nu}{[k^2+2k\cdot(\beta\Delta)+\beta\Delta^2-\mu^2(1-\zeta)-\zeta\Lambda^2]^4} \end{aligned}$$

A integral em k é feita utilizando as expressões de 't Hooft e Veltman. Para o caso dessa expressão, utilizamos a relação

$$\begin{aligned} \int d^np\frac{p_\mu p_\nu}{(p^2+2pK+M^2)^m} &= \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{(M^2-K^2)^{m-\frac{n}{2}}}\cdot\frac{1}{\Gamma(m)} \\ \times &\left\{\Gamma(m-\frac{n}{2})K_\mu K_\nu + \frac{1}{2}\Gamma(m-1-\frac{n}{2})\delta_{\mu\nu}(M^2-K^2)\right\}, \end{aligned} \tag{C.15}$$

com

$$\begin{aligned} n &= 4, \\ m &= 4, \\ K &= \beta\Delta\,, \\ M^2 &= \beta\Delta^2 - \mu^2(1-\zeta) - \zeta\Lambda^2\,. \end{aligned}$$

Substituindo esses valores na integral I_4, obtemos

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{1}{(2m)^2}(\mu^2-\Lambda^2)^2\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta} d\zeta\,\zeta \\ &\times \left\{\frac{\gamma^{\mu\,(1)}(\beta\Delta_\mu)\gamma^{\nu\,(2)}(\beta\Delta_\nu)}{[\Delta^2\beta(1-\beta)-\mu^2(1-\zeta)-\zeta\Lambda^2]^2}\right. \\ &+ \left.\frac{1}{2}\frac{\delta_{\mu\nu}\,\gamma^{\mu\,(1)}\gamma^{\nu\,(2)}}{[\Delta^2\beta(1-\beta)-\mu^2(1-\zeta)-\zeta\Lambda^2]}\right\} \end{aligned}$$

Aplicando a equação de Dirac, o numerador da primeira integral se anula, e obtemos então:

$$I_4 = -\frac{i}{(4\pi)^2}\frac{(\Lambda^2-\mu^2)^2}{(2m)^2}\frac{\gamma^{\mu\,(1)}\gamma_\mu^{(2)}}{2}\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta} d\zeta\,\zeta\frac{1}{D_1}$$

onde D_1 é dado em C.6. Efetuando a mudança de variáveis dada em C.7, obtemos finalmente:

$$I_4 = -\frac{i}{(4\pi)^2}\frac{(\Lambda^2-\mu^2)^2}{(2m)^2}\{\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} - \boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{(2)}\}\int_{-1}^1 d\alpha\int_0^1 d\nu\,\nu\frac{F_1}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2} \qquad \text{(C.16)}$$

onde F_1 e M_1 são dados em C.9 e C.10, respectivamente.

Integrais I_5, I_6 e I_{10}

As integrais I_5, I_6 e I_{10} são dadas por 6.19, 6.18 e 6.28. Elas são convergentes, não necessitando de regularizador.

$$\begin{aligned} I_5 &= 2m\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\not{k}^{(1)}I^{(2)}}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2][(p_1-k)^2-m^2]}\,, \\ I_6 &= 2m\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{I^{(1)}\,\not{k}^{(2)}}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2][(p_2+k)^2-m^2]}\,, \end{aligned}$$

$$I_{10} = 2m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{I^{(1)} \not{k}^{(2)}}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2][(p_2-k')^2-m^2]} .$$

Calculemos inicialmente I_5. Aplicando a substituição de Feynman, obtemos

$$I_5 = \frac{2m}{(2\pi)^4} \cdot \gamma^{\mu\,(1)} I^{(2)}\, 2! \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta$$

$$\times \int d^4k \frac{k_\mu}{[k^2 + 2k\cdot(\beta\Delta - \zeta p_1) + \beta\Delta^2 - \mu^2(1-\zeta)]^3}. \tag{C.17}$$

A integral em k é feita utilizando as expressões de 't Hooft e Veltman. Para o caso da expressão C.17, recorre-se à igualdade

$$\int d^n p \frac{p_\mu}{(p^2 + 2p\cdot K + M^2)^m} = \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{(M^2-K^2)^{m-\frac{n}{2}}}(-K_\mu)\cdot\frac{\Gamma(m-\frac{n}{2})}{\Gamma(m)} \tag{C.18}$$

onde fazemos a seguinte identificação:

$$\begin{aligned} n &= 4 \qquad \text{(número de dimensões)} \\ m &= 3 \qquad \text{(número de binômios em k)} \\ K &= \beta\Delta - \zeta p_1 \\ M^2 &= \beta\Delta^2 - \mu^2(1-\zeta) \end{aligned}$$

e assim utilizando C.18 em C.17 temos

$$I_5 = -\frac{2im}{(4\pi)^2}\gamma^{\mu\,(1)} I^{(2)} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta$$

$$\times \frac{(\beta\Delta_\mu - \zeta p_{1\,\mu})}{\Delta^2\beta(1-\beta) - \mu^2(1-\zeta) - m^2\zeta^2 + 2\beta\zeta(p_1\cdot\Delta)} \tag{C.19}$$

onde supusemos que os nucleons externos estão na camada de massa, $p_2^2 = m^2$. O numerador pode ser simplificado, utilizando-se a equação de Dirac

$$\gamma^{\mu\,(i)} p_\mu = \not{p}^{(i)} = m I^{(i)} \tag{C.20}$$

$$\gamma^{\mu\,(i)} \Delta_\mu = \not{\Delta}^{(i)} = \not{p}^{(i)} - \not{p}'^{,(i)} = 0 \tag{C.21}$$

Substituindo C.20 e C.21 em C.19, obtemos

$$I_5 = \frac{2im^2}{(4\pi)^2} I^{(1)}\cdot I^{(2)} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta\, \zeta$$

$$\times \frac{1}{\Delta^2\beta\left[1-\beta+2\zeta\frac{p_1\cdot\Delta}{\Delta^2}\right] - m^2\zeta^2 - \mu^2(1-\zeta)}. \tag{C.22}$$

O produto escalar $\frac{p_1 \cdot \Delta}{\Delta^2}$ entre colchetes no denominador de C.22 é dado pela expressão 5.17 e dá $-1/2$. Assim a integral se torna

$$I_5 = -\frac{2im^2}{(4\pi)^2} I^{(1)} \cdot I^{(2)} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta\, \zeta \frac{1}{D(\zeta^2)} \tag{C.23}$$

onde o denominador foi expresso em termos da função

$$D(x) = \boldsymbol{\Delta}^2 \beta(1-\beta-\zeta) + \mu^2(1-\zeta) + xm^2 \,. \tag{C.24}$$

Este denominador não possui polos no intervalo de integração considerado.

Utilizando a mesma mudança de variáveis dada em C.7 obtemos

$$I_5 = -\frac{4i}{(4\pi)^2} \cdot S_2 \tag{C.25}$$

com

$$S_2 = m^2 \int_{-1}^1 d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu^2)} \tag{C.26}$$

$$F_2 = \left[(1-\alpha^2)(1-\nu)\right]^{-1} \tag{C.27}$$

$$M(x) = 2\sqrt{F_2\left(\mu^2 + \frac{xm^2}{1-\nu}\right)} \tag{C.28}$$

Assim, I_5 está completamente definida.

O cálculo de I_6 pode ser efetuado notando-se que essa integral pode ser obtida a partir de I_5 pela substituição $(1) \to (2)$ e $p_1 \to -p_2$. Fazendo essa substituição em C.19 e lembrando que, pela equação 5.17, $p_1 \cdot \Delta = -p_2 \cdot \Delta$, concluimos que

$$I_6 = -I_5 \,. \tag{C.29}$$

A integral I_{10} é obtida, a partir de I_5 pela troca $(1) \to (2)$ e $p_1 \to p_2'$. Como $p_1 \cdot \Delta = p_2' \cdot \Delta$, verifica-se que

$$I_{10} = I_5 \tag{C.30}$$

Integrais I_7, I_8 e I_{11}

As integrais I_7, I_8 e I_{11} aparecem nas expressões 6.20, 6.21 e 6.29. Essas integrais são linearmente divergentes, necessitando de um regularizador.

$$I_7 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}^{(1)} \not{k}^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)[(p_1-k)^2-m^2]} \times \frac{\mu^2-\Lambda^2}{k^2-\Lambda^2} ;$$

$$I_8 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}^{(1)} \not{k}^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)[(p_2+k)^2-m^2]} \times \frac{\mu^2-\Lambda^2}{k^2-\Lambda^2} ;$$

$$I_{11} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}^{(1)} \not{k}^{(2)}}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)[(p_2-k')^2-m^2]} \times \frac{\mu^2-\Lambda^2}{k^2-\Lambda^2} .$$

Calculemos, inicialmente I_7. Utilizando a substituição de Feynman, C.2, obtemos

$$I_7 = \frac{\gamma^{\mu\,(1)}\gamma^{\nu\,(2)}}{(2\pi)^4}(\mu^2-\Lambda^2)\int d^4k\, k_\mu k_\nu\, 3!$$

$$\times \int \frac{d\beta\, d\zeta\, d\lambda\, d\epsilon\, \delta(1-\beta-\zeta-\lambda-\epsilon)}{\{\zeta[(p_1-k)^2-m^2]+\beta[(k+\Delta)^2-\mu^2]+\lambda(k^2-\Lambda^2)+\epsilon(k^2-\mu^2)\}^4}.$$

Integrando em ϵ e invertendo a ordem de integração obtemos

$$I_7 = \frac{\gamma^{\mu\,(1)}\gamma^{\nu\,(2)}}{(2\pi)^4}(\mu^2-\Lambda^2)\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_0^{1-\beta-\zeta} d\lambda$$

$$\times\ 3!\int d^4k \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2+2k(\beta\Delta-\zeta p_1)+\beta\Delta^2-\mu^2(1-\zeta-\lambda)-\lambda\Lambda^2]^4}. \qquad \text{(C.31)}$$

A integral em k é feita utilizando as expressões de 't Hooft e Veltman. Para o caso da expressão C.31 usamos C.15, com a seguinte identificação:

$$\begin{aligned} n &= 4 \qquad \text{número de dimensões,} \\ m &= 4 \qquad \text{número de binômios em k,} \\ K &= \beta\Delta-\zeta p_1, \\ M^2 &= \beta\Delta^2-\mu^2(1-\zeta-\lambda)-\lambda\Lambda^2. \end{aligned}$$

Assim, utilizando C.15 em C.31 temos

$$I_7 = \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4}(\mu^2-\Lambda^2)\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_0^{1-\beta-\zeta} d\lambda$$

$$\times \left\{ \frac{\gamma^{\mu\,(1)}(\beta\Delta_\mu-\zeta p_{1\,\mu})\gamma^{\nu\,(2)}(\beta\Delta_\nu-\zeta p_{1\,\nu})}{[(\mu^2-\Lambda^2)\lambda+\beta\Delta^2(1-\beta)-\mu^2(1-\zeta)-m^2\zeta^2+2\beta\zeta(p_1\cdot\Delta)]^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\gamma^{\mu\,(1)}\gamma^{\nu\,(2)}\delta_{\mu\nu}}{[(\mu^2-\Lambda^2)\lambda+\beta\Delta^2(1-\beta)-\mu^2(1-\zeta)-m^2\zeta^2+2\beta\zeta(p_1\cdot\Delta)]} \right\}$$

O numerador pode ser simplificado, utilizando-se a equação de Dirac

$$\not{p}_1^{(1)} = mI^{(1)}\,; \tag{C.32}$$

$$\not{p}_1^{(2)} = \not{W}^{(2)} - \not{p}_2^{(2)} = 2E\gamma^{0\,(2)} - mI^{(2)}\,. \tag{C.33}$$

Substituindo C.32 e C.33 em C.32, e usando 5.17 obtemos

$$\begin{aligned} I_7 &= \frac{im}{(4\pi)^2}(\mu^2-\Lambda^2)\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta\,\zeta^2 \int_0^{1-\beta-\zeta} d\lambda \\ &\times \left\{ \frac{\left[2E\; I^{(1)}\gamma^{0\,(2)} - mI^{(1)}\cdot I^{(2)}\right]}{\left[\boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\zeta-\beta)+m^2\zeta^2+\mu^2(1-\zeta)+\lambda(\Lambda^2-\mu^2)\right]^2} \right. \\ &- \left. \frac{1}{2}\frac{\gamma^{\mu\,(1)}\gamma_\mu^{(2)}}{\left[\boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\zeta-\beta)+m^2\zeta^2+\mu^2(1-\zeta)+\lambda(\Lambda^2-\mu^2)\right]} \right\} \end{aligned} \tag{C.34}$$

Efetuando a integração em λ obtemos

$$\begin{aligned} I_7 &= \frac{im}{(4\pi)^2}\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta\,\zeta^2 \\ &\times \left\{ \left(2E\; I^{(1)}\gamma^{0\,(2)} - mI^{(1)}\cdot I^{(2)}\right)\left[\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D(\zeta^2)}\right] - \frac{\gamma^{\mu\,(1)}\gamma_\mu^{(2)}}{2}\ln\left(\frac{D_2}{D(\zeta^2)}\right)\right\} \end{aligned} \tag{C.35}$$

onde $D(x)$ é dado em C.24 e D_2 por

$$D_2 = \boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta-\zeta)+\beta\mu^2+\zeta^2m^2+\Lambda^2(1-\beta-\zeta) \tag{C.36}$$

O cálculo de I_8 pode ser efetuado notando-se que essa integral pode ser obtida a partir de I_5 pela substituição $(1)\to(2)$ e $p_1 \to -p_2$. Fazendo essa substituição em C.19, usando a equação de Dirac

$$\not{p}_2^{(2)} = mI^{(2)}\,; \tag{C.37}$$

$$\not{p}_2^{(1)} = \not{W}^{(1)} - \not{p}_2^{(2)} = 2E\gamma^{0\,(1)} - mI^{(1)}\,. \tag{C.38}$$

e lembrando que, pela equação 5.17, $p_1\cdot\Delta = -p_2\cdot\Delta$, concluimos que

$$\begin{aligned} I_8 &= \frac{im}{(4\pi)^2}\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta\,\zeta^2 \\ &\times \left\{ \left(2E\;\gamma^{0\,(1)}I^{(2)} - mI^{(1)}\cdot I^{(2)}\right)\left[\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D(\zeta^2)}\right] - \frac{\gamma^{\mu\,(1)}\gamma_\mu^{(2)}}{2}\ln\left(\frac{D_2}{D(\zeta^2)}\right)\right\} \end{aligned} \tag{C.39}$$

A integral I_{11} é obtida, a partir de I_8 pela troca e $p_2 \to -p_2'$. Como $p_2 \cdot \Delta = -p_2' \cdot \Delta$, verifica-se que

$$I_{11} = I_8 \tag{C.40}$$

Integrais I_9 e I_{12}

As integrais I_9 e I_{12} são convergentes e aparecem nas expressões 6.22 (diagrama caixa) e 6.30 (diagrama cruzado), apresentando diferenças cinemáticas, pois a primeira corresponde ao canal de reação t e a segunda ao u. Essas integrais são complicadas, pois apresentam quatro propagadores, implicando em quatro variáveis auxiliares de Feynman. No cálculo da troca de dois píons no trabalho de Lomom e Partovi (PL), apenas essas duas integrais são responsáveis pelo potencial. Iniciamos o cálculo pela integral do diagrama tipo caixa

$$\begin{aligned} I_9 &= 4m^2\gamma^{\mu\,(1)}\gamma^{\nu\,(2)}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4} \\ &\times \frac{k_\mu k_\nu}{[(p_1-k)^2-m^2][(p_2+k)^2-m^2][(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\mu^2)}. \end{aligned}$$

Utilizando a substituição de Feynman, C.2, obtemos

$$\begin{aligned} I_9 &= \frac{4m^2}{(2\pi)^4}\gamma^{\mu\,(1)}\gamma^{\nu\,(2)}\int d^4k\, k_\mu k_\nu\, 3! \\ &\times \int\frac{d\beta\, d\nu\, d\lambda\, d\alpha\, \delta(1-\beta-\nu-\lambda-\alpha)}{\{\nu[(p_1-k)^2-m^2]+\beta[(k+\Delta)^2-\mu^2]+\lambda[(p_2+k)^2-m^2]+\alpha(k^2-\mu^2)\}^4}. \end{aligned}$$

Integrando em α e invertendo a ordem de integração obtemos

$$\begin{aligned} I_9 &= \frac{4m^2}{(2\pi)^4}\gamma^{\mu\,(1)}\gamma^{\nu\,(2)}\,3!\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta}d\nu\int_0^{1-\beta-\nu}d\lambda \\ &\times \int d^4k\frac{k_\mu k_\nu}{[k^2+2k(\beta\Delta-\nu p_1+\lambda p_2)+\beta\Delta^2-\mu^2(1-\nu-\lambda)]^4}. \end{aligned} \tag{C.41}$$

A integral em k é feita por meio das expressões 't Hooft e Veltman. Para o caso da expressão C.41, utilizamos a expressão C.15 com a seguinte correspondência

$$\begin{aligned} n &= 4, \\ m &= 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \beta\Delta - \nu p_1 + \lambda p_2, \\ M^2 &= \beta\Delta^2 - \mu^2(1-\nu-\lambda). \end{aligned}$$

Assim, utilizando C.15 em C.41, temos

$$\begin{aligned} I_9 &= \frac{4im^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\nu \int_0^{1-\beta-\nu} d\lambda \\ &\times \left\{ \frac{\gamma^{\mu\,(1)}(\beta\Delta_\mu - \nu p_{1\,\mu} + \lambda p_{2\,\mu})\gamma^{\nu\,(2)}(\beta\Delta_\nu - \nu p_{1\,\nu} + \lambda p_{2\,\nu})}{\left[\beta\Delta^2 - \mu^2(1-\nu-\lambda) - (\beta\Delta - \nu p_1 + \lambda p_2)^2\right]^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{\gamma^{\mu\,(1)}\gamma^{\nu\,(2)}\delta_{\mu\nu}}{2\left[\beta\Delta^2 - \mu^2(1-\nu-\lambda) - (\beta\Delta - \nu p_1 + \lambda p_2)^2\right]} \right\} \end{aligned} \tag{C.42}$$

O numerador pode ser simplificado utilizando-se a equação de Dirac, C.32 e C.37. Chamando de $-N$ o numerador da primeira parte de C.42, temos

$$\begin{aligned} -N &= \left[\beta \not{\Delta}^{(1)} - \nu \not{p}_1^{(1)} + \lambda \not{p}_2^{(1)}\right] \cdot \left[\beta \not{\Delta}^{(2)} - \nu \not{p}_1^{(2)} + \lambda \not{p}_2^{(2)}\right] \\ N &= \left[2\lambda E\gamma^{0\,(1)} - m(\nu+\lambda)I^{(1)}\right] \cdot \left[2\nu E\gamma^{0\,(2)} - m(\nu+\lambda)I^{(2)}\right] \end{aligned} \tag{C.43}$$

Agora vamos simplificar o denominador, o qual chamaremos de $-D$. Efetuando o quadrado e colocando Δ^2 em evidência, temos

$$\begin{aligned} -D &= \Delta^2\beta\left[1 - \beta - 2\lambda\frac{(\Delta\cdot p_2)}{\Delta^2} + 2\nu\frac{(\Delta\cdot p_1)}{\Delta^2}\right] - m^2(\nu^2+\lambda^2) + 2\nu\lambda p_1\cdot p_2 - \\ &- \mu^2(1-\nu-\lambda) \\ D &= \boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta-\nu-\lambda) - 4\nu\lambda E^2 + m^2(\nu+\lambda)^2 + \mu^2(1-\nu-\lambda) \end{aligned} \tag{C.44}$$

onde fizemos uso das relações 5.17 e de

$$p_1\cdot p_2 = 2E^2 - m^2 \tag{C.45}$$

e assim a integral I_9 fica

$$I_9 = -\frac{4im^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\nu \int_0^{1-\beta-\nu} d\lambda \cdot \left\{ \frac{N}{D^2} + \frac{\gamma^{\mu\,(1)}\gamma_\mu^{(2)}}{2D} \right\} \tag{C.46}$$

Efetuemos, agora, a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} \zeta &= \nu + \lambda \\ \epsilon &= \nu - \lambda \\ d\nu d\lambda &= \frac{1}{2}d\zeta d\epsilon \end{aligned} \tag{C.47}$$

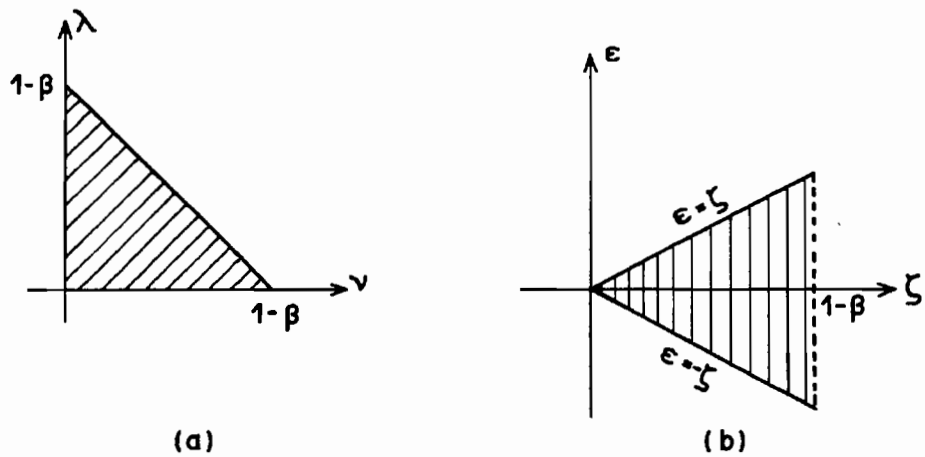


Figura C.2: *(a) antiga e (b) nova região de integração para a integral* I_9.

Na figura C.2 mostramos a antiga e a nova região de integração . Nessas novas variáveis, o numerador e o denominador ficam

$$\begin{aligned} N &= E^2(\zeta^2-\epsilon^2)\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} - m\zeta E[(\zeta-\epsilon)\gamma^{0\,(1)}\cdot I^{(2)} + (\zeta+\epsilon)I^{(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}] + \\ &+ m^2\zeta^2 I^{(1)}\cdot I^{(2)} \\ D_\square &= \boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta-\zeta) - \zeta^2(E^2-m^2) + \epsilon^2E^2 + \mu^2(1-\zeta) \end{aligned} \tag{C.48}$$

e desse modo a integral I_9 fica

$$I_9 = -\frac{4im^2}{(4\pi)^2}\,\frac{1}{2}\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta} d\zeta\int_{-\zeta}^{\zeta} d\epsilon\cdot\left\{\frac{N}{D_\square^2} + \frac{\gamma^{\mu\,(1)}\gamma_\mu^{(2)}}{2D_\square}\right\} \tag{C.49}$$

Integrando por partes o segundo termo de C.49 em ϵ, temos

$$\begin{aligned} I_9 = -\frac{4im^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{2}\Bigg\{&\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta} d\zeta\frac{\zeta\gamma^{\mu\,(1)}\gamma_\mu^{(2)}}{D(\zeta^2)} + \\ &+ \int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta} d\zeta\int_{-\zeta}^{\zeta} d\epsilon\,\frac{N+\epsilon^2E^2\gamma^{\mu\,(1)}\gamma_\mu^{(2)}}{D_\square^2}\Bigg\} \end{aligned} \tag{C.50}$$

onde $D_\square$ é dado por C.48 e $D(x)$ por C.24. No segundo numerador da equação C.50 ocorre um cancelamento envolvendo $\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}$ e o resultado fica sendo dado por

$$N + \epsilon^2E^2\gamma^{\mu\,(1)}\gamma_\mu^{(2)} = -\epsilon^2E^2\boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{(2)} + \zeta^2E^2\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} -$$

$$- \quad m\zeta E\left[\zeta(\gamma^{0\,(1)}\cdot I^{(2)} + I^{(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}) + \epsilon(I^{(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} - \gamma^{0\,(1)}\cdot I^{(2)})\right] + m^2\zeta^2 I^{(1)}\cdot I^{(2)}$$

Escrevendo a integral por completo, temos

$$\begin{aligned} I_9 &= -\frac{4im^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{2}\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta} d\zeta\left\{\frac{\zeta\gamma^{\mu\,(1)}\gamma_\mu^{(2)}}{D(\zeta^2)}\right. \\ &- \int_{-\zeta}^{\zeta} d\epsilon\frac{1}{D_\square^2}\left[\epsilon^2 E^2\gamma^{(1)}\cdot\gamma^{(2)} - \zeta^2 E^2\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} - m^2\zeta^2 I^{(1)}\cdot I^{(2)}\right. \\ &- \left.\left. m\zeta^2 E(\gamma^{0\,(1)}\cdot I^{(2)} - I^{(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}) + m\zeta E\epsilon(I^{(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} - \gamma^{0\,(1)}\cdot I^{(2)})\right]\right\} \end{aligned}$$

Observando a expressão anterior, vemos que o intervalo de integração em ϵ é simétrico, o que causa o anulamento das funções ímpares e nas funções pares torna possível a multiplicação da integral por 2, integrando de 0 à ζ. Assim, temos

$$\begin{aligned} I_9 &= -\frac{2im^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta} d\zeta\left\{\frac{\zeta\gamma^{\mu\,(1)}\gamma_\mu^{(2)}}{D(\zeta^2)} + \right. \\ &+ \left. 2\int_0^{\zeta} d\epsilon\frac{\zeta^2\left[E\gamma^{0\,(1)} - mI^{(1)}\right]\cdot\left[E\gamma^{0\,(2)} - mI^{(2)}\right] - \epsilon^2 E^2\gamma^{(1)}\cdot\gamma^{(2)}}{D_\square^2}\right\} \end{aligned} \tag{C.51}$$

onde $D_\square$ é dado por C.48. O estudo da dependência do denominador $D_\square$ com a energia mostra a existência de um polo no limiar, $E = m$, para $\beta = 0$, $\zeta = 1$ e $\epsilon = 0$. Entretanto, como veremos posteriormente, a iteração do OPEP apresenta um polo semelhante, cancelando a singularidade. Assim, modificações na expressão C.51 são feitas após subtrairmos a iteração.

Passemos agora ao cálculo de I_{12}. A diferença em relação a I_9 é que k é trocado por $-k'$. Dessa forma, os termos cruzados $p_2\cdot k$ são substituídos por $-p_2'\cdot k$ devido à conservação do quadrimomento. Efetuando essa mudança a partir de C.42, temos

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{4im^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta} d\nu\int_0^{1-\beta-\nu} d\lambda \\ &\times \left\{\frac{\gamma^{\mu\,(1)}(\beta\Delta_\mu - \nu p_{1\,\mu} - \lambda p_{2\,\mu}')\gamma^{\nu\,(2)}(\beta\Delta_\nu - \nu p_{1\,\nu} - \lambda p_{2\,\nu}')}{\left[\beta\Delta^2 - \mu^2(1-\nu-\lambda) - (\beta\Delta - \nu p_1 - \lambda p_2')^2\right]^2}\right. \\ &+ \left.\frac{\gamma^{\mu\,(1)}\gamma^{\nu\,(2)}\delta_{\mu\nu}}{2\left[\beta\Delta^2 - \mu^2(1-\nu-\lambda) - (\beta\Delta - \nu p_1 - \lambda p_2')^2\right]}\right\} \end{aligned}$$

Utilizando a equação de Dirac, o numerador pode ser escrito como

$$N = \left[2E\lambda\gamma^{0\,(1)} + m(\nu-\lambda)I^{(1)}\right]\cdot\left[2E\nu\gamma^{0\,(2)} - m(\nu-\lambda)I^{(2)}\right]$$

Trabalhando o denominador, e utilizando 5.17 obtemos

$$D = \boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta-\nu-\lambda) + 2\nu\lambda(\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}) + m^2(\nu+\lambda)^2 + \mu^2(1-\nu-\lambda)$$

onde fizemos uso de 5.27 e da relação

$$\begin{aligned} p_1\cdot p_2' &= m^2 + \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'\cdot\mathbf{p} \\ &= m^2 + 2\mathbf{Q}^2 \end{aligned}$$

Dessa forma, o denominador pode ser escrito como

$$D = \boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta-\nu-\lambda) + 4\nu\lambda\mathbf{Q}^{\mathbf{2}} + m^2(\nu+\lambda)^2 + \mu^2(1-\nu-\lambda)$$

Efetuando a mesma mudança de variáveis mostrada em C.47, obtemos

$$\begin{aligned} I_{12} = \frac{4im^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{2}\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta} d\zeta\int_{-\zeta}^{\zeta} d\epsilon\,\Bigg\{-\frac{\gamma^{\mu\,(1)}\gamma_\mu^{(2)}}{2D_{\bowtie}} \\ \times\ \frac{1}{D_{\bowtie}^2}\Big[\zeta^2E^2\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} + \epsilon\zeta E(I^{(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} - \gamma^{0\,(1)}\cdot I^{(2)}) \\ -\ \epsilon^2[E^2\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} + m^2I^{(1)}\cdot I^{(2)} - mE(I^{(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} + \gamma^{0\,(1)}\cdot I^{(2)})]\Big]\Bigg\} \end{aligned} \tag{C.52}$$

onde $D_{\bowtie}$ é dado por

$$D_{\bowtie} = \boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta-\zeta) + \zeta^2(m^2+\mathbf{Q}^2) - \epsilon^2\mathbf{Q}^2 + \mu^2(1-\zeta) \tag{C.53}$$

Na expressão anterior, temos uma função par em ϵ no denominador. No numerador, os termos ímpares se anulam e os termos pares passam a ter limite de integração de 0 a ζ, sendo a integral multiplicada por dois. Temos então a seguinte expressão para I_{12}:

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{2im^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta} d\zeta\int_0^{\zeta} d\epsilon\,\Bigg\{-\frac{\gamma^{\mu\,(1)}\gamma_\mu^{(2)}}{D_{\bowtie}} \\ &+ \frac{2}{D_{\bowtie}^2}\cdot\left\{\zeta^2E^2\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} - \epsilon^2\left[E\gamma^{0\,(1)} - mI^{(1)}\right]\cdot\left[E\gamma^{0\,(2)} - mI^{(2)}\right]\right\}\Bigg\} \end{aligned} \tag{C.54}$$

O estudo do denominador $D_{\bowtie}$ revela uma função bem comportada no limiar, que tende para $D(\zeta^2)$. A integral I_{12} pode ainda ser simplificada se operarmos a redução não-relativística. Isso é feito com detalhes no apêndice E.

Integral I_{13}

A integral I_{13} é dada por

$$I_{13} = I^{(1)} \cdot I^{(2)} \frac{2m}{\mu^3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k' \cdot k}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2]} \tag{C.55}$$

Chamando de $\mathcal{I}$ a integral que aparece nessa expressão, podemos abrir o numerador, obtendo

$$\mathcal{I} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\mu^2)} + \Delta^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\mu^2)}$$

A primeira integral é quadraticamente divergente e a segunda é linearmente divergente. Introduzindo os regularizadores necessários, somando e subtraindo Λ^2 no numerador da primeira integral e utilizando a seguinte fatoração

$$\frac{1}{(k^2-\mu^2)(k^2-\Lambda^2)} = \frac{1}{\mu^2-\Lambda^2}\left[\frac{1}{k^2-\mu^2} - \frac{1}{k^2-\Lambda^2}\right], \tag{C.56}$$

obtemos a soma

$$\mathcal{I} = (\mu^2-\Lambda^2)\mu^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\Lambda^2)} - \tag{C.57}$$

$$- (\mu^2-\Lambda^2)\Lambda^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\Lambda^2)^2} + \tag{C.58}$$

$$+ (\mu^2-\Lambda^2)\Delta^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\Lambda^2)} \tag{C.59}$$

Assim, a amplitude envolvendo I_{13} é dada por

$$I_{13} = I^{(1)} \cdot I^{(2)} \frac{2m}{\mu^3} (I_{13A} + I_{13B} + I_{13C}) \tag{C.60}$$

Integral I_{13A}

A integral I_{13A} é totalmente análoga à integral I_1, de modo que os mesmos passos podem ser seguidos. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} I_{13A} &= (\mu^2-\Lambda^2)\mu^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\Lambda^2)} \\ &= \frac{2i}{(4\pi)^2} \mu^2 S_1 \end{aligned} \tag{C.61}$$

com S_1 dado por C.12.

Integral I_{13B}

A integral I_{13B} é dada por

$$I_{13B} = -(\mu^2 - \Lambda^2)\Lambda^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+\Delta)^2 - \mu^2](k^2 - \Lambda^2)^2}$$

Para essa integral, deve ser utilizada a seguinte substituição de Feynman

$$\frac{1}{ab^2} = 2! \int \frac{d\beta\, d\zeta\, \delta(1-\beta-\zeta)\zeta}{[\beta a + \zeta b]^3} \tag{C.62}$$

Aplicando C.62 em I_{13B}, obtemos

$$I_{13B} = -(\mu^2 - \Lambda^2)\Lambda^2\, 2! \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d\beta\, d\zeta\, \delta(1-\beta-\zeta)\,\zeta}{[\beta[(k+\Delta)^2 - \mu^2] + \zeta(k^2 - \Lambda^2)]^3}$$

Integrando na variável ζ através da função δ e invertendo a ordem de integração, temos

$$I_{13B} = -\frac{(\mu^2 - \Lambda^2)\Lambda^2}{(2\pi^4)}\, 2! \int_0^1 d\beta\,(1-\beta) \int \mathrm{d}^4k\, \frac{1}{[k^2 + 2k\cdot(\beta\Delta) + \beta(\Delta^2 + \Lambda^2 - \mu^2) - \Lambda^2]^3}$$

Utilizando a expressão C.4 para o cálculo da integral em k, temos

$$I_{13B} = -i\frac{(\Lambda^2 - \mu^2)\Lambda^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 d\beta\, \frac{1-\beta}{D_3}\,,$$

onde D_3 é dado por

$$D_3 = \boldsymbol{\Delta}^2(1-\beta) + \beta\mu^2 + \Lambda^2(1-\beta) \tag{C.63}$$

Efetuando a seguinte mudança de variável $\rho = 2\beta - 1$, obtemos finalmente

$$I_{13B} = -\frac{i}{(4\pi)^2}\,\mu^2\, S_3 \tag{C.64}$$

onde

$$S_3 = (\Lambda^2 - \mu^2)\,\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \int_{-1}^1 \frac{d\rho}{1-\rho}\, \frac{1}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_2^2} \tag{C.65}$$

$$M_2 = \sqrt{\frac{2\mu^2}{1-\rho} + \frac{2\Lambda^2}{1+\rho}} \tag{C.66}$$

Integral I_{13C}

A integral I_{13C} é dada por

$$I_{13C} = (\mu^2 - \Lambda^2)\Delta^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k+\Delta)^2 - \mu^2](k^2 - \mu^2)(k^2 - \Lambda^2)}$$

Para esse caso, usamos a mesma substituição de Feynman de I_1, e integramos em k através de C.18, obtendo

$$I_{13C} = (\mu^2 - \Lambda^2)\Delta^\mu \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \frac{-\beta\Delta_\mu}{-\boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta) - \mu^2(1-\zeta) - \zeta\Lambda^2}$$

Acertando os coeficientes, e implementando a mudança de variáveis dada em C.7, obtemos para I_{13C}

$$I_{13C} = \frac{i}{(4\pi)^2}(\Lambda^2 - \mu^2) \int_{-1}^1 d\alpha \int_0^1 d\nu\, (1+\alpha)(1-\nu) F_1 \frac{\boldsymbol{\Delta}^2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_1^2} \tag{C.67}$$

onde F_1 e M_1 são dados por C.9 e C.10, respectivamente.

Quando potências pares do momento transferido aparecem no numerador, é conveniente transformar a fração em uma soma, com o objetivo de identificar termos independentes de $\boldsymbol{\Delta}$, que produzem apenas funções delta de Dirac no espaço de configuração. Assim, escrevemos

$$\frac{\boldsymbol{\Delta}^2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_1^2} = \left[1 - \frac{M_1^2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_1^2}\right] \tag{C.68}$$

Substituindo essa soma em I_{13C}, obtemos duas integrais das quais a primeira é independente de $\boldsymbol{\Delta}$, cujo cálculo resulta no valor 1; a segunda tem a forma

$$I_A = \frac{(\Lambda^2 - \mu^2)}{\mu^2} \int_{-1}^1 d\alpha \int_0^1 d\nu\, (1+\alpha)(1-\nu) F_1 \frac{M_1^2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_1^2}. \tag{C.69}$$

Assim, o resultado de I_{13C} é

$$I_{13C} = \frac{i}{(4\pi)^2}\mu^2 \left(\frac{\Lambda^2 - \mu^2}{\mu^2} - I_A\right) \tag{C.70}$$

Podemos ainda agrupar o resultado de I_{13A} com o de I_{13C}, escrevendo

$$I_{13A} + I_{13C} = \frac{i}{(4\pi)^2}\mu^2 \left[\frac{\Lambda^2 - \mu^2}{\mu^2} + S_4\right] \tag{C.71}$$

onde

$$S_4 = \frac{\Lambda^2 - \mu^2}{\mu^2} \int_{-1}^1 d\alpha \int_0^1 d\nu \left[2\mu^2 - (1+\alpha)(1-\nu)M_1^2\right] \frac{F_1}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_1^2}. \tag{C.72}$$

Integrais I_{14} e I_{16}

A soma das integrais I_{14} e I_{16} é dada por

$$I_{14} + I_{16} = \frac{1}{\mu^3}\left(\gamma^{\mu\,(1)} I^{(2)} + I^{(1)}\gamma^{\mu\,(2)}\right)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k'\cdot k\; k_\mu}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2]}$$

Chamando de I_μ a integral que aparece nesta expressão, podemos escrever

$$\begin{aligned}
I_\mu &= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-\mu^2)}\left[\frac{(k+\Delta)^\nu}{[(k+\Delta)^2-\mu^2]} - \frac{(k-\Delta)^\nu}{[(k-\Delta)^2-\mu^2]}\right] \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-\mu^2)}\left[\frac{-4k\cdot\Delta\; k^\nu}{(k^2-\Delta^2-\mu^2)^2-(2k\cdot\Delta)^2}\right] \\
&= -2\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k^2 k_\mu k_\nu \Delta_\mu}{(k^2-\mu^2)[(k^2+\Delta^2-\mu^2)-(2k\cdot\Delta)^2]} \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k^4\Delta_\mu}{(k^2-\mu^2)[(k^2+\Delta^2-\mu^2)-(2k\cdot\Delta)^2]}
\end{aligned}$$

Assim, I_{14} e I_{16} são proporcionais a $\not{\Delta}^{(1)} I^{(2)}$ e $I^{(1)}\not{\Delta}^{(2)}$, respectivamente, sendo ambos nulos. Portanto, para essas integrais temos

$$I_{14} = I_{16} = 0 \tag{C.73}$$

Integrais I_{15} e I_{17}

A soma das integrais I_{15} e I_{17} é dada por

$$\begin{aligned}
I_{15} + I_{17} &= \frac{4m^2}{\mu^3}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k'\cdot k}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2]}\times \\
&\times \left\{\frac{\not{k}^{(1)} I^{(2)}}{[(p_1-k)^2-m^2]} + \frac{I^{(1)}\not{k}^{(2)}}{[(p_2-k')^2-m^2]}\right\}
\end{aligned}$$

Expandindo o numerador, obtemos

$$\begin{aligned}
I_{15} + I_{17} &= \frac{4m^2}{\mu^3}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2]}\times \\
&\times \left\{\frac{\gamma^{\mu\,(1)} I^{(2)}\left(k^2 k_\mu + \Delta^\lambda k_\lambda k_\mu\right)}{[(p_1-k)^2-m^2]} + \frac{I^{(1)}\gamma^{\mu\,(2)}\left(k^2 k_\mu + \Delta^\lambda k_\lambda k_\mu\right)}{[(p_2-k')^2-m^2]}\right\}
\end{aligned}$$

Nas integrais acima temos divergências logaritmicas e lineares, sendo necessário o uso de um regularizador simples. Vamos abrir cada termo da soma em duas partes, que chamaremos de A e B. Lembrando que o primeiro termo da soma é devido a I_{15} e o segundo a I_{17}, temos:

$$I_{15} + I_{17} = \frac{4m^2}{\mu^3}\{I_{15A} + I_{15B} + I_{17A} + I_{17B}\} \tag{C.74}$$

onde

$$I_{15A} = (\mu^2 - \Lambda^2)\gamma^{\mu\,(1)} I^{(2)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 k_\mu}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2][(p_1-k)^2-m^2](k^2-\Lambda^2)}$$

$$I_{15B} = (\mu^2 - \Lambda^2)\gamma^{\mu\,(1)} I^{(2)}\, \Delta^\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda k_\mu}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2][(p_1-k)^2-m^2](k^2-\Lambda^2)}$$

$$I_{17A} = (\mu^2 - \Lambda^2) I^{(1)} \gamma^{\mu\,(2)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 k_\mu}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2][(p_2-k')^2-m^2](k^2-\Lambda^2)}$$

$$I_{17B} = (\mu^2 - \Lambda^2) I^{(1)} \gamma^{\mu\,(2)}\, \Delta^\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda k_\mu}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2][(p_2-k')^2-m^2](k^2-\Lambda^2)}$$

Nas expressões anteriores, vemos que I_{15A} é análoga a I_{17A}, diferindo apenas nos rótulos e propagadores dos nucleons, o mesmo ocorrendo entre I_{15B} e I_{17B}.

Integral I_{15A}

A integral I_{15A}, após a regularização e fatoração, se transforma em duas integrais, ambas bastante análogas a I_5, de modo que os mesmos passos podem ser seguidos. Assim obtemos

$$\begin{aligned}
I_{15A} &= (\mu^2 - \Lambda^2)\gamma^{\mu\,(1)} I^{(2)} \\
&\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 k_\mu}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2][(p_1-k)^2-m^2](k^2-\Lambda^2)} \\
&= \gamma^{\mu\,(1)} I^{(2)} \left\{ \mu^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2][(p_1-k)^2-m^2]} \right. \\
&- \left. \Lambda^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k+\Delta)^2-\mu^2][(p_1-k)^2-m^2](k^2-\Lambda^2)} \right\} \\
&= \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\mu^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \frac{\beta \not{\Delta}^{(1)} I^{(2)} - \zeta \not{p}^{(1)} I^{(2)}}{D(\zeta^2)} \right.
\end{aligned}$$

$$- \quad \Lambda^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \frac{\beta \not{\Delta}^{(1)} I^{(2)} - \zeta \not{p}^{(1)} I^{(2)}}{D_2} \Bigg]$$

onde $D(x)$ é dado em C.24 e D_2 em C.36. Aplicando a equação de Dirac no numerador e implementando a mudança de variáveis dada em C.7 vem

$$I_{15A} = -\frac{2im}{(4\pi)^2} I^{(1)} \cdot I^{(2)} \left[\frac{\mu^2}{m^2} S_2 - I_G \right] \tag{C.75}$$

com S_2 dado por C.26 e I_G dado por

$$I_G = \Lambda^2 \int_{-1}^1 d\alpha \int_0^1 d\nu \, \nu \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_3^2} \tag{C.76}$$

onde

$$M_3 = 2\sqrt{F_2 \left(\frac{m^2 \nu^2}{1-\nu} + \frac{1+\alpha}{2}\mu^2 + \frac{1-\alpha}{2}\Lambda^2 \right)} \tag{C.77}$$

e F_2 é dado por C.27.

Integral I_{15B}

A integral I_{15B}, após a regularização, guarda certa semelhança com I_9, sendo possível seguir os mesmos passos. Assim, temos

$$\begin{aligned}
I_{15B} &= (\mu^2 - \Lambda^2)\gamma^{\mu(1)} I^{(2)} \Delta^\nu \\
&\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\mu}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2][(p_1-k)^2-m^2](k^2-\Lambda^2)} \\
&= (\mu^2 - \Lambda^2)\gamma^{\mu(1)} I^{(2)} \Delta^\nu \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_0^{1-\beta-\zeta} d\lambda \\
&\times 3! \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\mu}{[k^2 + 2k(\beta\Delta - \zeta p_1) + \beta\Delta^2 - \lambda\Lambda^2 - (1-\zeta-\lambda)\mu^2]^4} \\
&= \frac{i}{(4\pi)^2}(\mu^2 - \Lambda^2) \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_0^{1-\beta-\zeta} d\lambda \\
&\times \left\{ \frac{\left(\beta \not{\Delta}^{(1)} - \zeta \not{p}_1^{(1)}\right) I^{(2)} \cdot (\beta\Delta^2 - \zeta p_1 \cdot \Delta)}{\left[\boldsymbol{\Delta}^2 \beta(1-\beta-\zeta) + m^2\zeta^2 + \mu^2(1-\zeta-\lambda) + \lambda\Lambda^2\right]^2} \right. \\
&- \left. \frac{1}{2} \frac{\not{\Delta}^{(1)} I^{(2)}}{\left[\boldsymbol{\Delta}^2 \beta(1-\beta-\zeta) + m^2\zeta^2 + \mu^2(1-\beta-\zeta) + \lambda\Lambda^2\right]} \right\}
\end{aligned}$$

Aplicando a equação de Dirac no numerador, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\beta \not{\Delta}^{(1)} - \zeta \not{p}^{(1)}\right) \cdot \left(\beta\Delta^2 - \zeta p_1 \cdot \Delta\right) &= -\zeta m \Delta^2 \left(\beta - \zeta \frac{p_1 \cdot \Delta}{\Delta^2}\right) I^{(1)} \\ &= m\zeta \boldsymbol{\Delta}^2 \left(\beta + \frac{\zeta}{2}\right) I^{(1)}\end{aligned}$$

onde fizemos uso da relação 5.17 e que $\not{\Delta}^{(1)} = 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned}I_{15B} &= \frac{im}{(4\pi)^2}(\mu^2 - \Lambda^2)\, I^{(1)} \cdot I^{(2)}\, \boldsymbol{\Delta}^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_0^{1-\beta-\zeta} d\lambda \\ &\times \left\{ \frac{\zeta\left(\beta + \frac{\zeta}{2}\right)}{\left[\boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta-\zeta) + m^2\zeta^2 + \mu^2(1-\zeta-\lambda) + \lambda\Lambda^2\right]^2} \right\}\end{aligned}$$

Integrando em λ por partes, obtemos

$$\begin{aligned}I_{15B} &= -\frac{im}{(4\pi)^2} I^{(1)} \cdot I^{(2)} \boldsymbol{\Delta}^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta\, \zeta \left(\beta + \frac{\zeta}{2}\right) \\ &\times \left[\frac{1}{D(\zeta^2)} - \frac{1}{D_2}\right]\end{aligned}$$

com $D(x)$ dado em C.24 e D_2 em C.36. Implementando a mudança de variáveis dada em C.7 vem

$$\begin{aligned}I_{15B} &= -\frac{im}{(4\pi)^2}\, I^{(1)} \cdot I^{(2)} \int_{-1}^1 d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu\, [1 + \alpha(1-\nu)]\, F_2 \\ &\times \left\{ \frac{\boldsymbol{\Delta}^2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu^2)} - \frac{\boldsymbol{\Delta}^2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_3^2} \right\} \qquad \text{(C.78)}\end{aligned}$$

onde F_2 é dado em C.27, $M(x)$ em C.28 e M_3 em C.77. Da mesma forma que em I_{13C}, é necessário fatorar o momento no numerador. Fazendo isso, obtemos

$$\begin{aligned}I_{15B} &= -\frac{im}{(4\pi)^2}\, I^{(1)} \cdot I^{(2)} \left\{ -I_H + \int_{-1}^1 d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu\, [1 + \alpha(1-\nu)]\, F_2 \right. \\ &+ \left. I_J - \int_{-1}^1 d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu\, [1 + \alpha(1-\nu)]\, F_2 \right\} \qquad \text{(C.79)}\end{aligned}$$

onde

$$I_H = \int_{-1}^1 d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu\, [1 + \alpha(1-\nu)]\, F_2 \frac{M^2(\nu^2)}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu^2)} \qquad \text{(C.80)}$$

$$I_J = \int_{-1}^1 d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu\, [1 + \alpha(1-\nu)]\, F_2 \frac{M_3^2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_3^2} \qquad \text{(C.81)}$$

Observando que os termos independentes de $\boldsymbol{\Delta}$ se cancelam, a expressão final para I_{15B} fica

$$I_{15B} = -\frac{im}{(4\pi)^2}\, I^{(1)} \cdot I^{(2)}\, [-I_H + I_J] \tag{C.82}$$

As integrais I_{17A} e I_{17B} são obtidas, a partir de I_{15A} e I_{15B}, respectivamente, pela troca $(1) \to (2)$ e $p_1 \to p_2'$. Como $p_1 \cdot \Delta = p_2' \cdot \Delta$, verifica-se que

$$I_{17A} = I_{15A} \qquad \text{e} \qquad I_{17B} = I_{15B} \tag{C.83}$$

Integral I_{18}

A integral I_{18} é dada por

$$I_{18} = \left(\frac{2m}{\mu^3}\right)^2 I^{(1)} \cdot I^{(2)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[(k+\Delta)\cdot k]^2}{(k^2-\mu^2)(k'^2-\mu^2)}$$

Esse termo é bastante complexo e possui divergência de quarta ordem. A simplificação da integral pode ser feita de maneira análoga às contribuições anteriores. Chamando de $\mathcal{I}$ essa integral, abrimos o produto escalar e o quadrado no numerador e colocamos os regularizadores necessários, obtendo

$$\mathcal{I} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^4}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2]} \times \frac{(\mu^2-\Lambda^2)^3}{(k^2-\Lambda^2)^3} + \tag{C.84}$$

$$+\ 2\Delta^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 k_\mu}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2]} \times \frac{(\mu^2-\Lambda^2)^2}{(k^2-\Lambda^2)^2} + \tag{C.85}$$

$$+\ \Delta^\theta \Delta^\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\theta k_\lambda}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2]} \times \frac{(\mu^2-\Lambda^2)^2}{(k^2-\Lambda^2)^2} \tag{C.86}$$

Assim, a amplitude envolvendo I_{18} é dada por

$$I_{18} = I^{(1)} \cdot I^{(2)} \left(\frac{2m}{\mu^3}\right)^2 (I_{18A} + I_{18B} + I_{18C}) \tag{C.87}$$

Vamos estudar as três integrais acima separadamente.

Integral I_{18A}

Nesta integral, podemos fatorar o denominador utilizando a relação

$$k^4 = (k^2-\Lambda^2)(k^2-\Lambda^2+2\Lambda^2) + \Lambda^4 \tag{C.88}$$

o que reduz a integral à

$$
\begin{aligned}
I_{18A} &= (\mu^2-\Lambda^2)^3\left\{\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\Lambda^2)}+\right.\\
&+ 2\Lambda^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\Lambda^2)^2}+\\
&+ \left.\Lambda^4\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\Lambda^2)^3}\right\}
\end{aligned}
$$

Utilizando a expressão C.56 podemos rearranjar os termos para obter

$$
\begin{aligned}
I_{18A} &= (\mu^2-\Lambda^2)^3\left\{\frac{\mu^4}{(\mu^2-\Lambda^2)^2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\Lambda^2)}-\right.\\
&- \frac{\Lambda^2(2\mu^2-\Lambda^2)}{(\mu^2-\Lambda^2)^2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\Lambda^2)^2}-\\
&- \left.\frac{\Lambda^4}{\mu^2-\Lambda^2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\Lambda^2)^3}\right\}
\end{aligned}
$$

Na expressão anterior, a última integral possui um regularizador em excesso, que pode ser eliminado. Dessa forma, a segunda e terceira integrais se igualam, o que nos permite escrever

$$
\begin{aligned}
I_{18A} &= (\mu^2-\Lambda^2)\left\{\mu^4\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-\mu^2)[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\Lambda^2)}-\right.\\
&- \left.2\mu^2\Lambda^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\Lambda^2)^2}\right\} \qquad \text{(C.89)}
\end{aligned}
$$

Nas integrais anteriores, a primeira é análoga a I_1 e a segunda a I_{13B}. Desse modo, obtemos

$$
I_{18A} = \frac{2i}{(4\pi)^2}\left[\mu^4 S_1 - \mu^4 S_3\right] \qquad \text{(C.90)}
$$

onde S_1 e S_3 são dadas por C.12 e C.65, respectivamente.

Integral I_{18B}

Nesta integral podemos somar e subtrair $\Lambda^2 k_\mu$ no numerador e utilizar a expressão C.56, para obter

$$
I_{18B} = 2\Delta^\mu(\mu^2-\Lambda^2)\left\{\mu^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k_\mu}{[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\mu^2)(k^2-\Lambda^2)}-\right.
$$

$$- \quad \Lambda^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\Lambda^2)^2} \Bigg\} \tag{C.91}$$

Nas integrais anteriores, a primeira é exatamente I_{13C}, enquanto que a segunda é análoga à I_{13B}. Dessa forma, obtemos

$$I_{18B} = \frac{2i\mu^4}{(4\pi)^2} \frac{(\Lambda^2-\mu^2)}{\mu^2} \left\{ (1-I_K) - \frac{\Lambda^2}{\mu^2}(1-I_P) \right\}$$

$$\text{onde} \qquad I_K = \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu \, (1+\alpha)(1-\nu) M_1^2(\nu) \frac{F_1}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_1^2(\nu)} \tag{C.92}$$

$$I_P = \int_{-1}^{1} d\rho \left[\frac{\mu^2}{1-\rho} + \frac{\Lambda^2}{1+\rho} \right] \frac{1}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_2^2} \tag{C.93}$$

com M_2 dado por C.66.

Integral I_{18C}

A integral I_{18C} não tem análoga anterior, e é dada por

$$I_{18C} = (\mu^2-\Lambda^2)^2 \Delta^\theta \Delta^\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\theta k_\lambda}{[(k+\Delta)^2-\mu^2](k^2-\mu^2)(k^2-\Lambda^2)^2} \tag{C.94}$$

Integrando em k obtemos

$$\begin{aligned} I_{18C} &= \frac{i}{(4\pi)^2}(\Lambda^2-\mu^2)^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \, \zeta \\ &\times \left\{ \frac{\Delta^\theta(\beta\Delta_\theta)\Delta^\lambda(\beta\Delta_\lambda)}{[-\Delta^2\beta^2 - \mu^2(1-\zeta) + \beta\Delta^2 - \zeta\Lambda^2]^2} \right. \\ &+ \left. \frac{\Delta^\theta\Delta^\lambda\delta_{\theta\lambda}}{2\,[-\beta^2\Delta^2 - \mu^2(1-\zeta) + \beta\Delta^2 - \zeta\Lambda^2]} \right\} \end{aligned}$$

Simplificando o numerador, vem

$$\begin{aligned} I_{18C} &= \frac{i}{(4\pi)^2}(\Lambda^2-\mu^2)^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \, \zeta \\ &\times \left\{ \frac{\beta^2\boldsymbol{\Delta}^4}{\left[\boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta) + \mu^2 + \zeta(\Lambda^2-\mu^2)\right]^2} \right. \\ &+ \left. \frac{\boldsymbol{\Delta}^2}{2\left[\boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta) + \mu^2(1-\zeta) + \zeta\Lambda^2\right]} \right\} \end{aligned} \tag{C.95}$$

Implementando a mudança de variáveis dada em C.7, obtemos

$$\begin{aligned} I_{18C} &= \frac{i}{(4\pi)^2}(\Lambda^2-\mu^2)^2 \times \\ &\times \left\{ 2\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu(1+\alpha)^2(1-\nu)F_1^2 \frac{\boldsymbol{\Delta}^4}{\left[\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2\right]^2} + \right. \\ &+ \left. \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu\, F_1) \frac{\boldsymbol{\Delta}^2}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2} \right\} \end{aligned}$$

Novamente precisamos fatorar as potências pares de $\boldsymbol{\Delta}$ no numerador. Usando a relação

$$\left[\frac{\boldsymbol{\Delta}^2}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2}\right]^2 = 1 - \frac{2M_1^2}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2} + \left[\frac{M_1^2}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2}\right]^2 \tag{C.96}$$

a integral I_{18C} se fatora na seguinte forma

$$\begin{aligned} I_{18C} &= \frac{\mu^4 i}{(4\pi)^2}\frac{(\Lambda^2-\mu^2)^2}{\mu^4}\left\{ 2\int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu(1+\alpha)^2(1-\nu)F_1^2 \right. \\ &\times \left[1 - \frac{2M_1^2}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2} + \frac{M_1^4}{\left[\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2\right]^2} \right] \\ &+ \left. \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu\, F_1 \left[1 - \frac{M_1^2}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever a integral I_{18C} na forma

$$I_{18C} = \frac{i\mu^4}{(4\pi)^2}\left\{ 2\left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)^2 - 4I_L + 2S_9 + C - I_N \right\} \tag{C.97}$$

onde

$$I_L = \left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu(1+\alpha)^2(1-\nu)F_1^2 \frac{M_1^2}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2} \tag{C.98}$$

$$S_9 = \left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu(1+\alpha)^2(1-\nu)F_1^2 \frac{M_1^4}{\left[\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2\right]^2} \tag{C.99}$$

$$I_N = \left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu F_1 \frac{M_1^2}{\boldsymbol{\Delta}^2+M_1^2} \tag{C.100}$$

$$C = \left(\frac{\Lambda^2-\mu^2}{\mu^2}\right)^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu F_1 \tag{C.101}$$

onde C é o termo independente de $\boldsymbol{\Delta}$.

Cálculo das integrais da iteração do OPEP

Calcularemos agora as integrais da iteração da troca de um píon.

Integral I_{I1}

O integrando da primeira integral da iteração é dado na expressão 6.121,

$$I_{I1} = -16m^4 \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3\mathbf{z} \, \frac{\gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)}}{E_{\mathbf{z}} \left[(\mathbf{z}-\mathbf{p}')^2 + \mu^2\right] \left[(\mathbf{z}-\mathbf{p})^2 + \mu^2\right]}.$$

Para usarmos a substituição de Feynman, é necessário utilizar a seguinte representação integral para o inverso de $E_{\mathbf{z}}$:

$$\frac{1}{E_{\mathbf{z}}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Theta}{\Theta^2 + E_{\mathbf{z}}^2}. \tag{C.102}$$

Nessas condições, I_{I1} se torna

$$\begin{aligned} I_{I1} &= -16m^4 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta \int \mathrm{d}^3\mathbf{z} \\ &\times \frac{\gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)}}{\left[(\mathbf{z}-\mathbf{p})^2 + \mu^2\right] \left[(\mathbf{z}-\mathbf{p}')^2 + \mu^2\right] \left[\Theta^2 + E_{\mathbf{z}}^2\right]} \end{aligned}$$

Utilizando a substituição de Feynman, equação C.2, obtemos

$$\begin{aligned} I_{I1} &= -16m^4 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\pi} 2! \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta \int \mathrm{d}^3\mathbf{z} \, \gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)} \\ &\times \int \frac{d\nu d\beta d\alpha \, \delta(1-\beta-\nu-\alpha)}{\left\{\alpha \left[(\mathbf{z}-\mathbf{p})^2 + \mu^2\right] + \beta \left[(\mathbf{z}-\mathbf{p}')^2 + \mu^2\right] + \nu \left[\Theta^2 + \mathbf{z}^2 + m^2\right]\right\}^3} \end{aligned}$$

onde usamos $E_{\mathbf{z}}^2 = \mathbf{z}^2 + m^2$. O denominador da expressão anterior merece estudo detalhado. Efetuando a multiplicação e os quadrados, temos

$$D = \mathbf{z}^2 - 2\mathbf{z} \cdot (\beta\mathbf{p}' + \alpha\mathbf{p}) + \beta\mathbf{p}'^2 + \alpha\mathbf{p}^2 + \mu^2(\alpha+\beta) + (1-\alpha-\beta)(\Theta^2 + m^2)$$

onde integramos na variável ν através da função δ. Na expressão do denominador é interessante completar o quadrado em z,

$$D = \left[\mathbf{z} - (\beta\mathbf{p}' + \alpha\mathbf{p})\right]^2 - (\beta\mathbf{p}' + \alpha\mathbf{p})^2 + \beta\mathbf{p}'^2 + \alpha\mathbf{p}^2 + \mu^2(\alpha+\beta) + (1-\alpha-\beta)(\Theta^2 + m^2),$$

o que nos permite deslocar a origem da variável z

$$z \longrightarrow z - (\beta \mathbf{p}' + \alpha \mathbf{p}) . \tag{C.103}$$

Desse modo, a integral I_{I1} fica

$$\begin{aligned} I_{I1} &= -4 \left(\frac{m}{\pi}\right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta \int \mathrm{d}^3\mathbf{z} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\alpha \\ &\times \frac{\gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)}}{\left\{\mathbf{z}^2 - (\beta \mathbf{p}' + \alpha \mathbf{p})^2 + \beta \mathbf{p}'^2 + \alpha \mathbf{p}^2 + \mu^2(\alpha+\beta) + (1-\alpha-\beta)(\Theta^2+m^2)\right\}^3} \end{aligned}$$

Mudando o rótulo das variáveis da seguinte forma

$$\zeta = 1 - \beta - \alpha \tag{C.104}$$

obtemos

$$\begin{aligned} I_{I1} &= -4 \left(\frac{m}{\pi}\right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta \int \mathrm{d}^3\mathbf{z} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \\ &\times \frac{\gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)}}{\left\{\mathbf{z}^2 - [\beta(\mathbf{p}'-\mathbf{p}) - \zeta \mathbf{p}]^2 + \beta(\mathbf{p}'-\mathbf{p})^2 + \zeta \mathbf{p}^2 + \mu^2(1-\zeta) + \zeta(\Theta^2+m^2)\right\}^3} . \end{aligned}$$

Expressando $\mathbf{z}$ em coordenadas esféricas, a parte angular fornece 4π. A integral no módulo de z pode ser feita por partes, o que fornece

$$\begin{aligned} I_{I1} &= -4\pi \left(\frac{m}{\pi}\right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta \int_0^{\infty} dz \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \\ &\times \frac{\gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)}}{\left\{z^2 - [\beta(\mathbf{p}'-\mathbf{p}) - \zeta \mathbf{p}]^2 + \beta(\mathbf{p}'-\mathbf{p})^2 + \zeta \mathbf{p}^2 + \mu^2(1-\zeta) + \zeta(\Theta^2+m^2)\right\}^2} . \end{aligned}$$

Utilizando as variáveis de soma e subtração dos momentos, equações 5.27 e 5.28, obtemos

$$\begin{aligned} I_{I1} &= -4\pi \left(\frac{m}{\pi}\right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta \int_0^{\infty} dz \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \\ &\times \frac{\gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)}}{\left\{z^2 + \boldsymbol{\Delta}^2 \beta(1-\beta-\zeta) + (1-\zeta)\zeta(\mathbf{Q}^2 + \boldsymbol{\Delta}^2/4) + \mu^2(1-\zeta) + \zeta(\Theta^2+m^2)\right\}^2} . \end{aligned}$$

Efetuando a mudança de variáveis

$$z = \epsilon E, \tag{C.105}$$

e lembrando que $\mathbf{Q}^2 + \boldsymbol{\Delta}^2/4 = \mathbf{p}^2 = E^2 - m^2$, obtemos

$$I_{I1} = -\left(\frac{m}{\pi}\right)^2 \frac{4Em^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta \int_0^{\infty} d\epsilon \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \, \frac{\gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)}}{\{D_\square + \zeta(\Theta^2 + E^2)\}^2}. \tag{C.106}$$

onde $D_\square$ é dado em C.48 e a integração em Θ será feita posteriormente.

Integral I_{I2}

A segunda integral da iteração possui o integrando dado na expressão 6.122,

$$I_{I2} = -\frac{16m^4}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3\mathbf{z} \, \frac{\left(\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \mathbf{z} + mI^{(1)}\right) \gamma^{0\,(2)} - \gamma^{0\,(1)} \left(\boldsymbol{\gamma}^{(2)} \cdot \mathbf{z} - mI^{(2)}\right)}{[(\mathbf{z} - \mathbf{p}')^2 + \mu^2]\,[(\mathbf{z} - \mathbf{p})^2 + \mu^2]\,(E^2 - E_{\mathbf{z}}^2)} \tag{C.107}$$

A resolução dessa integral segue exatamente os mesmos passos da anterior. Como não existe $E_{\mathbf{z}}$ no denominador, a variável Θ não aparece. Além disso, a translação da origem de z introduz variáveis de Feynman no numerador da integral. Ao integrarmos $\mathbf{z}$ em todo o espaço, as funções ímpares de z se anulam, o que elimina o vetor $\mathbf{z}$ no numerador da integral. Assim, I_{I2} fornece

$$I_{I2} = \left(\frac{m}{\pi}\right)^2 4Em^2 \int_0^{\infty} d\epsilon \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \, \frac{N_1}{D_\square^2}\,, \tag{C.108}$$

onde

$$N_1 = 2(1-\zeta)E\gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)} + m\zeta(\gamma^{0\,(1)} \cdot I^{(2)} + I^{(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)})\,. \tag{C.109}$$

Integral I_{I3}

A terceira integral da iteração possui integrando dado na expressão 6.123,

$$I_{I3} = -\frac{16m^4}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3\mathbf{z} \, \frac{\left(\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \mathbf{z} + mI^{(1)}\right) \left(\boldsymbol{\gamma}^{(2)} \cdot \mathbf{z} - mI^{(2)}\right) - E^2 \gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)}}{[(\mathbf{z} - \mathbf{p}')^2 + \mu^2]\,[(\mathbf{z} - \mathbf{p})^2 + \mu^2]\; E_{\mathbf{z}}\; (E^2 - E_{\mathbf{z}}^2)} \tag{C.110}$$

Essa integral é um pouco mais complicada que as anteriores. Seguindo o mesmo procedimento de I_{IA}, introduzimos a variável Θ e realizamos a substituição de Feynman, obtendo

$$I_{I3} = \frac{16m^4}{(2\pi)^3} \frac{3!}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta \int \mathrm{d}^3\mathbf{z} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\alpha \int_0^{1-\alpha-\beta} d\nu \frac{N}{D^3}$$

onde

$$
\begin{aligned}
N &= \left[\gamma^{(1)}\cdot(\mathbf{z}+\alpha\mathbf{p}+\beta\mathbf{p}')+mI^{(1)}\right]\left[\gamma^{(2)}\cdot(\mathbf{z}+\alpha\mathbf{p}+\beta\mathbf{p}')-mI^{(2)}\right]-E^2\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\\
D &= \mathbf{z}^2-(\beta\mathbf{p}'+\alpha\mathbf{p})^2+\beta\mathbf{p}'^2+\alpha\mathbf{p}^2+\mu^2(\alpha+\beta)+\nu(m^2-E^2)\\
&+ (1-\alpha-\beta-\nu)(\Theta^2+m^2)
\end{aligned}
$$

A integração em $\mathbf{z}$ é feita utilizando-se coordenadas esféricas, com o auxílio da relação

$$
\begin{aligned}
\gamma_i^{(1)}\gamma_j^{(2)}\delta_{lm}\int d\Omega\, z_i z_j z_l z_m &= \gamma_i^{(1)}\gamma_j^{(2)}\delta_{lm}\int d\Omega\,\frac{z^4}{15}\cdot(\delta_{ij}\delta_{lm}+\delta_{il}\delta_{jm}+\delta_{im}\delta_{jl})\\
&= \frac{1}{3}\int d\Omega z^4\gamma^{(1)}\cdot\gamma^{(2)}
\end{aligned}
$$

Após a integração angular, integramos em z por partes para obter

$$
I_{I3}=\frac{m^4}{\pi^4}8\pi\int_{-\infty}^{\infty}d\Theta\int_0^{\infty}dz\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta}d\alpha\int_0^{1-\alpha-\beta}d\nu\frac{N}{D^3}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
N &= z^2\gamma^{(1)}\cdot\gamma^{(2)}+\left[\gamma^{(1)}\cdot(\alpha\mathbf{p}+\beta\mathbf{p}')+mI^{(1)}\right]\\
&\times \left[\gamma^{(2)}\cdot(\alpha\mathbf{p}+\beta\mathbf{p}')-mI^{(2)}\right]-E^2\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\\
D &= z^2-(\beta\mathbf{p}'+\alpha\mathbf{p})^2+\beta\mathbf{p}'^2+\alpha\mathbf{p}^2+\mu^2(\alpha+\beta)-\nu(\Theta^2+E^2)\\
&+ (1-\alpha-\beta)(\Theta^2+m^2)
\end{aligned}
$$

Integrando na variável ν obtemos duas integrais, sendo possível eliminar a variável Θ em uma delas através da relação C.102. Efetuando as mudanças de variáveis dadas em C.104 e C.105, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_{I3} &= \left(\frac{m}{\pi}\right)^2 4m^2\int_0^{\infty}d\epsilon\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta}d\zeta\\
&\times \left\{-\frac{N_2}{D_\square^2}+\frac{E}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\Theta\frac{1}{E^2+\Theta^2}\frac{N_2}{\{D_\square+\zeta(E^2+\Theta^2)\}^2}\right\}
\end{aligned}
\tag{C.111}
$$

onde $D_\square$ é dado por C.48 e N_2 por

$$
N_2=\left[(1-\zeta)\gamma^{0\,(1)}E+\zeta mI^{(1)}\right]\left[(1-\zeta)\gamma^{0\,(2)}+\zeta mI^{(2)}\right]+E^2\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}-\epsilon^2E^2\gamma^{(1)}\cdot\gamma^{(2)}
\tag{C.112}
$$

onde no numerador foi utilizada a equação de Dirac e introduzida a variável $\boldsymbol{\Delta}$.

Integral I_{I4}

A quarta integral da iteração possui o integrando dado na expressão 6.124. Essa integral e as três seguintes não existem no trabalho de PL e são devidas ao uso do acoplamento pseudovetor no acoplamento πN.

$$I_{I4} = -\frac{16m^3}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\mathbf{z}\,\frac{\gamma^{0\,(1)}\cdot I^{(2)} + I^{(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}}{[(\mathbf{z}-\mathbf{p}')^2+\mu^2]\,[(\mathbf{z}-\mathbf{p})^2+\mu^2]} \tag{C.113}$$

Repetindo os mesmos passos das integrais anteriores, obtemos

$$I_{I4} = -\left(\frac{m}{\pi}\right)^2 4Em\int_0^\infty d\epsilon\int_0^1 d\beta\,\frac{\gamma^{0\,(1)}\cdot I^{(2)} + I^{(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}}{D_\beta}\,, \tag{C.114}$$

onde

$$D_\beta = \boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta) + \epsilon^2E^2 + \mu^2 \tag{C.115}$$

Integral I_{I5}

A quinta integral da iteração possui integrando dado na expressão 6.125,

$$\begin{aligned} I_{I5} &= \frac{16m^3}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\mathbf{z}\,\frac{1}{E_\mathbf{z}\,[(\mathbf{z}-\mathbf{p}')^2+\mu^2]\,[(\mathbf{z}-\mathbf{p})^2+\mu^2]}\Big\{\Big(\boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\mathbf{z}I^{(2)} - I^{(1)}\boldsymbol{\gamma}^{(2)}\cdot\mathbf{z}\Big) \\ &+ E\left(\gamma^{0\,(1)}\cdot I^{(2)} + I^{(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right) + 2m\left(I^{(1)}\cdot I^{(2)} + \gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right)\Big\} \end{aligned} \tag{C.116}$$

Repetindo os mesmos passos anteriores, obtemos

$$I_{I5} = \left(\frac{m}{\pi}\right)^2\frac{4Em}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\Theta\int_0^\infty d\epsilon\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta} d\zeta\,\frac{N_{IC}}{\{D_\square + \zeta(E^2+\Theta^2)\}^2} \tag{C.117}$$

onde $D_\square$ é dado por C.48 e N_{IC} por

$$N_{IC} = (2-\zeta)E\left(\gamma^{0\,(1)}\cdot I^{(2)} + I^{(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right) + 2m\left(\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} + \zeta I^{(1)}\cdot I^{(2)}\right) \tag{C.118}$$

Integral I_{I6}

A sexta integral da iteração possui integrando dado na expressão 6.126,

$$I_{I6} = \frac{16m^3}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\mathbf{z}\,\frac{N}{[(\mathbf{z}-\mathbf{p}')^2+\mu^2]\,[(\mathbf{z}-\mathbf{p})^2+\mu^2]\,(E^2-E_\mathbf{z}^2)} \tag{C.119}$$

onde o numerador é dado por

$$\begin{aligned} N &= (E^2+m^2)\left(\gamma^{0\,(1)}\cdot I^{(2)}+I^{(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right)+2mE\left(I^{(1)}\cdot I^{(2)}+\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right) \\ &+ E\left(\gamma^{(1)}\cdot\mathbf{z}I^{(2)}-I^{(1)}\gamma^{(2)}\cdot\mathbf{z}\right)+m\left(\gamma^{(1)}\cdot\mathbf{z}\gamma^{0\,(2)}-\gamma^{0\,(1)}\gamma^{(2)}\cdot\mathbf{z}\right) \end{aligned}$$

Repetindo os mesmos passos anteriores, obtemos

$$I_{I6}=-\left(\frac{m}{\pi}\right)^2 4Em\int_0^\infty d\epsilon\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta}d\zeta\,\frac{N_{ID}}{D_\square^2} \tag{C.120}$$

onde $D_\square$ é dado por C.48 e N_{ID} por

$$\begin{aligned} N_{ID} &= 2mE\left[\zeta I^{(1)}\cdot I^{(2)}+(2-\zeta)\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right] \\ &+ \left[m^2\zeta+(2-\zeta)E^2\right]\left(\gamma^{0\,(1)}\cdot I^{(2)}+I^{(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right) \end{aligned} \tag{C.121}$$

Integral I_{I7}

A sétima e última integral da iteração possui integrando dado na expressão 6.127,

$$I_{I7}=-\frac{16m^3E}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\mathbf{z}\,\frac{N}{[(\mathbf{z}-\mathbf{p}')^2+\mu^2]\,[(\mathbf{z}-\mathbf{p})^2+\mu^2]\;E_{\mathbf{z}}\;(E^2-E_{\mathbf{z}}^2)} \tag{C.122}$$

onde N é dado por

$$\begin{aligned} N &= (E^2+m^2)\left(\gamma^{0\,(1)}\cdot I^{(2)}+I^{(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right)+2mE\left(I^{(1)}\cdot I^{(2)}+\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right) \\ &+ \gamma^{(1)}\cdot\mathbf{z}\left(EI^{(2)}+m\gamma^{0\,(2)}\right)-\gamma^{(2)}\cdot\mathbf{z}\left(EI^{(1)}+m\gamma^{0\,(1)}\right) \end{aligned}$$

Repetindo os mesmos passos anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} I_{I7} &= \left(\frac{m}{\pi}\right)^2 4Em\int_0^\infty d\epsilon\int_0^1 d\beta\int_0^{1-\beta}d\zeta \\ &\times \left\{\frac{N_{ID}}{D_\square^2}-\frac{E}{\pi}\int_{-\infty}^\infty d\Theta\frac{1}{E^2+\Theta^2}\frac{N_{ID}}{\{D_\square+\zeta(E^2+\Theta^2)\}^2}\right\} \end{aligned} \tag{C.123}$$

onde $D_\square$ é dado por C.48 e N_{ID} por C.121

Expressões finais para a iteração

As expressões da iteração podem ser simplificadas. Examinando a primeira metade da expressão de I_{IC}, equação C.111, vemos que podemos agupá-la com I_{IB}. Por outro lado,

a primeira metade da integral I_{I7} cancela-se com a integral I_{I6}. Além disso, as integrais em Θ podem ser realizadas. Vamos seguir como exemplo o termo proporcional à $\gamma^{(1)}.\gamma^{(2)}$ na integral I_{IC}.

$$I_\Theta = -\frac{4m^4}{\pi^2}\frac{E}{\pi}\int_0^\infty d\epsilon \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_{-\infty}^\infty d\Theta \frac{\epsilon^2 E^2 \gamma^{(1)}\cdot\gamma^{(2)}}{[E^2+\Theta^2]\,[D_\square + \zeta(E^2+\Theta^2)]^2}$$

Vamos implementar a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \Theta &= t\cos\phi \\ \epsilon &= \frac{\sqrt{\zeta}}{E}\, t\,\mathrm{sen}\phi\,. \end{aligned}$$

Com essa mudança, a integral torna-se

$$I_\Theta = -\frac{4m^4}{\pi^2}\frac{E^3}{\pi}\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_0^\infty dt \int_0^\pi d\phi \frac{\sqrt{\zeta}\, t\,(\zeta/E^2)\, t^2 \mathrm{sen}^2\phi\, \gamma^{(1)}\cdot\gamma^{(2)}}{\mathrm{D}_t^2\,(\mathrm{t}^2\cos^2\phi + \mathrm{E}^2)}$$

onde

$$D_t = \boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta-\zeta) - \zeta^2(E^2-m^2) + \zeta(t^2+E^2) + (1-\zeta)\mu^2$$

Integrando em ϕ obtemos

$$I_\Theta = -\frac{4m^4}{\pi^2}\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_0^\infty dt \frac{\zeta^{3/2}\, t}{D_t^2}\left[\frac{\sqrt{E^2+t^2}}{E} - 1\right]\gamma^{(1)}\cdot\gamma^{(2)}$$

Com a seguinte mudança de variáveis

$$\sqrt{t^2+E^2} = \frac{\epsilon E}{\sqrt{\zeta}}\,,$$

o denominador D_t se transforma em $D_\square$ e a integral torna-se

$$I_\Theta = -\frac{4m^4}{\pi^2}\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_{\sqrt{\zeta}}^\infty d\epsilon\, \frac{E^2\gamma^{(1)}\cdot\gamma^{(2)}}{D_\square^2}\left(\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{\zeta}\right)$$

Integrando por partes em ϵ, obtemos finalmente

$$I_\Theta = -\frac{4m^4}{\pi^2}\frac{1}{2}\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_{\sqrt{\zeta}}^\infty d\epsilon\, \frac{\gamma^{(1)}\cdot\gamma^{(2)}}{D_\square}$$

Repetindo os mesmos passos para as outras integrais em Θ, obtemos o seguinte conjunto de integrais para a iteração

$$
\begin{aligned}
I_I &= \left(\frac{m}{\pi}\right)^2 \left\{ -2m^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \frac{\gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)}}{D_\zeta} \right. && \text{(C.124)} \\
&+ 4m^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_0^\infty d\epsilon \frac{N_{IA}}{D_\Box^2} && \text{(C.125)} \\
&- 2m^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_{\sqrt{\zeta}}^\infty d\epsilon \left[\frac{\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)}}{D_\Box} - 2\frac{N_{IB}}{D_\Box^2} \right] && \text{(C.126)} \\
&- 4Em \int_0^\infty d\epsilon \int_0^1 d\beta \frac{\gamma^{0\,(1)} \cdot I^{(2)} + I^{(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)}}{D_\beta} && \text{(C.127)} \\
&+ 2m \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \frac{N_{IC}}{D_\zeta} && \text{(C.128)} \\
&\left. - 4Em \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_{\sqrt{\zeta}}^\infty d\epsilon \frac{N_{ID}}{D_\Box^2} \right\} && \text{(C.129)}
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
D_\Box &= \boldsymbol{\Delta}^2 \beta(1-\beta-\zeta) + \mu^2(1-\zeta) - \zeta^2(E^2 - m^2) + \epsilon^2 E^2 \\
D_\zeta &= \boldsymbol{\Delta}^2 \beta(1-\beta-\zeta) + \mu^2(1-\zeta) - \zeta^2(E^2 - m^2) + \zeta E^2 \\
D_\beta &= \boldsymbol{\Delta}^2 \beta(1-\beta) + \epsilon^2 E^2 + \mu^2 \\
N_{IA} &= \epsilon^2 E^2 \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)} - \zeta^2 \left[E\gamma^{0\,(1)} - mI^{(1)} \right] \cdot \left[E\gamma^{0\,(2)} - mI^{(2)} \right] \\
N_{IB} &= E^2 \gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)} + \left[(1-\zeta) E\gamma^{0\,(1)} + m\zeta I^{(1)} \right] \cdot \left[(1-\zeta) E\gamma^{0\,(2)} + m\zeta I^{(2)} \right] \\
N_{IC} &= (2-\zeta) E \left(\gamma^{0\,(1)} \cdot I^{(2)} + I^{(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)} \right) + 2m \left(\gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)} + \zeta I^{(1)} \cdot I^{(2)} \right) \\
N_{ID} &= 2mE \left[\zeta I^{(1)} \cdot I^{(2)} + (2-\zeta) \gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)} \right] + \left[m^2 \zeta + (2-\zeta) E^2 \right] \\
&\times \left(\gamma^{0\,(1)} \cdot I^{(2)} + I^{(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)} \right)
\end{aligned}
$$

onde as três primeiras integrais são análogas ao trabalho de LP e as três últimas aparecem devido ao uso do acoplamento derivativo para a interação πN.

Apêndice D

O espalhamento πN

A confirmação da importância da simetria quiral nos processos hadrônicos ocorreu no estudo do espalhamento píon-nucleon a baixas energias [*Wei 66*]. O parâmetro de mais baixa energia do espalhamento πN elástico é o chamado "comprimento de espalhamento", que descreve o limiar do processo, onde todas as partículas estão em repouso. Sua expressão é dada por

$$a^{\pm} = \frac{1}{8\pi(m+\mu)} \mid \mathcal{T}^{\pm} \mid_{limiar} , \tag{D.1}$$

onde $\mathcal{T}$ é a amplitude de espalhamento do processo e μ e m são as massas do píon e do nucleon, respectivamente. Os índices $\pm$ se referem aos dois possíveis canais de isospin.

A maneira tradicional de se efetuar os cálculos para a amplitude $\mathcal{T}$ é considerar os diagramas da figura D.1. Porém, o cálculo utilizando os diagramas da figura D.1 leva aos

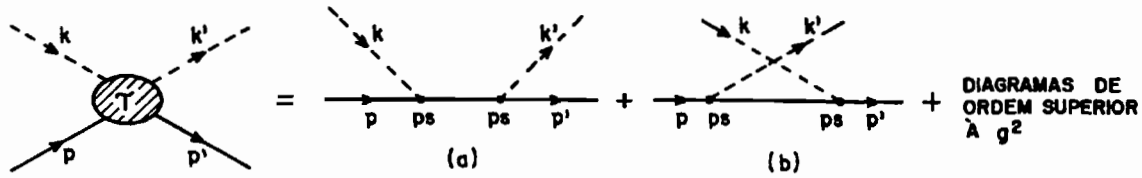


Figura D.1: *Diagramas que contribuem para a amplitude πN, em ordem de g^2, onde o acoplamento πN é do tipo pseudo-escalar (PS). A maneira pela qual se obtém os vértices de interação a partir da Lagrangiana é mostrada no capítulo 4.*

seguintes comprimentos de espalhamento

$$a^+ = -1.84\mu^{-1}; \qquad a^- = 0.136\mu^{-1} \ ,$$

sendo que os valores experimentais fornecem $-0.015\mu^{-1}$ e $0.097\mu^{-1}$ respectivamente. Esse resultado é muito ruim, principalmente para a^+, e revela que algum ingrediente está faltando.

No contexto do modelo σ linear, a amplitude πN é dada pelos diagramas da figura D.2, pois a Lagrangiana possui termos de interação πN, $\pi\sigma$ e σN. Os dois primeiros diagramas

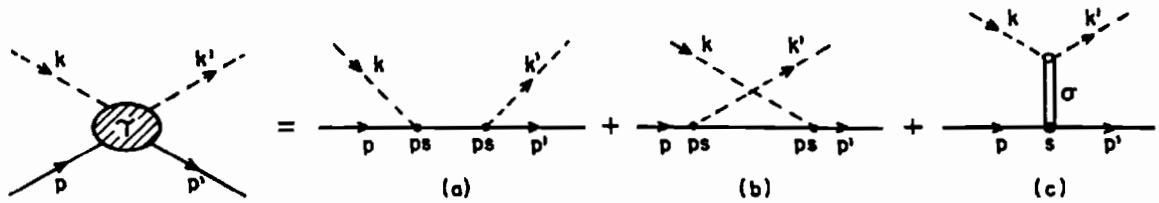


Figura D.2: *Diagramas que contribuem para a amplitude πN, em ordem de g^2, onde o acoplamento πN é derivado da Lagrangiana do modelo σ linear, sendo também do tipo pseudo-escalar. A novidade em relação ao modelo anterior está na "partícula" σ.*

são iguais aos anteriores, e a novidade fica por conta do terceiro diagrama. Com a sua inclusão, o comprimento de espalhamento a^- (que não era muito diferente do experimental) não muda e para a^+ obtemos

$$a^+ = -0.010\mu^{-1} \ .$$

Isso significa que a simetria quiral é responsável por um cancelamento que tem como consequência um valor pequeno para a^+, da mesma ordem de magnitude do valor experimental. Os valores teóricos de a^+ e a^- podem ser melhorados quando ampliamos o modelo introduzindo ressonâncias mesônicas e bariônicas.

No entanto, a realização linear da simetria quiral apresenta problemas. Para fornecer valores compatíveis com a álgebra de correntes, o modelo σ linear necessita que o méson σ tenha massa ao redor de 500 MeV e largura um pouco maior que sua massa. Essa ressonância σ, extremamente larga, nunca foi observada. Além disso, como a simetria quiral determina cancelamentos entre os vários diagramas de Feynman, parece que a abordagem linear é um tanto redundante.

A realização não-linear da simetria quiral resolve esses problemas por meio das transformações dos campos dos píons e dos nucleons, mostradas no capítulo 3. Essas transformações geram vértices píon-nucleon com diferentes números de píons e, dentro desse novo contexto não-linear, o espalhamento πN é dado pelos diagramas da figura D.3. O

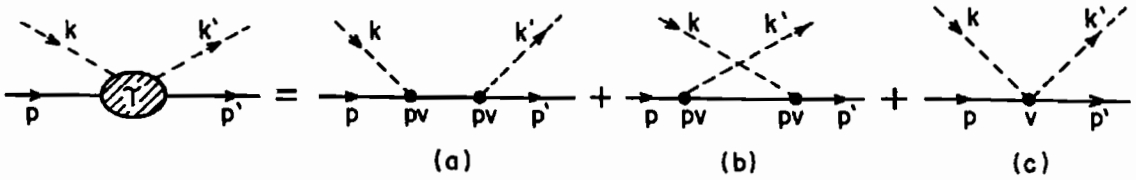


Figura D.3: *Diagramas que contribuem para a amplitude πN, em ordem de g^2, requeridos pela realização não-linear da simetria quiral. Aqui, o vértice de interação πN é do tipo pseudovetor (PV). O vértice (V) representa a interação isovetorial de dois píons com o nucleon.*

cálculo explicito de cada diagrama estabelece uma relação entre os mundos linear e não-linear [*Rob 89*], concretizada através das equivalências mostradas na figura D.4. Nesta

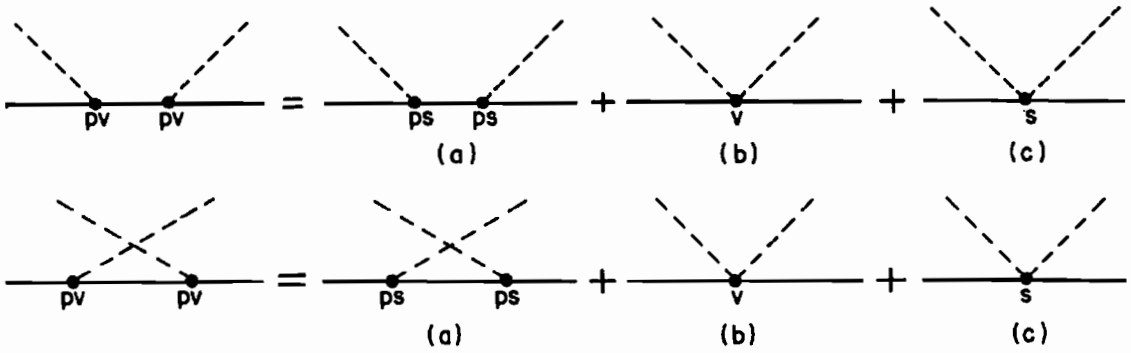


Figura D.4: *Decomposição do vértice pseudovetor em termos dos vértices pseudoescalar, vetorial e escalar.*

figura, o vértice "V" é o mesmo da figura D.3c, e o vértice "S" pode ser entendido como sendo o da figura D.2c, no limite da massa do méson σ indo para infinito.

"Substituindo" os diagramas da figura D.4 em D.3, observamos dois fatos: (a) se fizermos $g_A = 1.0$, a soma dos diagramas de vértice "V" se anula e obtemos o mesmo resultado da realização linear com $\mu_\sigma \to \infty$, e (b) se usarmos o valor experimental para g_A, a contribuição do vértice vetorial ocasiona uma correção da ordem de 30% no comprimento de espalhamento a^-, deixando a^+ inalterado.

Esse estudo do espalhamento πN permite concluir que a realização linear com $\mu_\sigma \to \infty$ é equivalente à realização não-linear com $g_A = 1.0$. Esse fato se manifesta também na interação NN, conforme pode ser visto no capítulo 7.

Apêndice E

Detalhes da redução não-relativística

Neste apêndice, damos detalhes da redução não-relativística das amplitudes $\mathcal{T}_i$. De início, vamos reduzir os sanduíches de espinores de Dirac.

Redução dos espinores

A representação covariante do espinor de Dirac usada nesse trabalho é dada nas expressões A.17 e A.29. Vamos construir a partir delas todos os sanduíches necessários.

1. $I^{(1)} \cdot I^{(2)}$

$$
\begin{aligned}
I^{(1)} &= \frac{1}{2m} \cdot \bar{u}(\mathbf{p}')u(\mathbf{p}) \\
&= \frac{1}{2m} \cdot \frac{\chi^+}{\sqrt{E+m}} \cdot [(E+m) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}] \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{bmatrix} E+m \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \end{bmatrix} \chi \\
&= \frac{E+m}{2m} \cdot \left[1 - \frac{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{p}' \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{p}}{(E+m)^2} \right] ,
\end{aligned}
$$

onde o índice $\sigma^{(i)}$ indica o valor esperado de *sigma* para o nucleon i.

Utilizando a relação :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) , \tag{E.1}$$

obtemos:

$$I^{(1)} = \frac{E+m}{2m} \cdot \left[1 - \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} + i\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot (\mathbf{p}' \wedge \mathbf{p})}{(E+M)^2}\right] ,$$

que pode ser reescrito, utilizando as variáveis $\boldsymbol{\Delta}$ e $\mathbf{Q}$

$$I^{(1)} = \frac{E+m}{2m} \cdot \left[1 - \frac{\mathbf{Q}^2 - \boldsymbol{\Delta}^2/4 + i\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot (\boldsymbol{\Delta} \wedge \mathbf{Q})}{(E+M)^2}\right] .$$

Efetuando a redução não-relativística, temos:

$$I^{(1)} = 1 - i\frac{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot (\boldsymbol{\Delta} \wedge \mathbf{Q})}{4m^2}$$

O cálculo para $I^{(2)}$ é totalmente análogo e fornece

$$I^{(2)} = 1 - i\frac{\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot (\boldsymbol{\Delta} \wedge \mathbf{Q})}{4m^2}$$

Assim temos:

$$I^{(1)} \cdot I^{(2)} = 1 - i\frac{(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot (\boldsymbol{\Delta} \wedge \mathbf{Q})}{4m^2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot (\boldsymbol{\Delta} \wedge \mathbf{Q})\boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\boldsymbol{\Delta} \wedge \mathbf{Q})}{16m^4} ,$$

onde o último termo é de ordem superior e pode ser desprezado. Potanto temos:

$$I^{(1)} \cdot I^{(2)} = 1 - \frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2} , \tag{E.2}$$

onde

$$\boldsymbol{\Omega}_{so} = i\frac{(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)})}{2} \cdot (\boldsymbol{\Delta} \wedge \mathbf{Q}) = i\,\mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\Delta} \wedge \mathbf{Q}) \tag{E.3}$$

é o operador spin-órbita no espaço dos momentos.

2. $\gamma^{0(1)} \cdot \gamma^{0(2)}$

$$\begin{aligned} \gamma^{0(1)} &= \frac{1}{2m}\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^0 u(\mathbf{p}) \\ &= \frac{E+m}{2m}\left[1 + \frac{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{p}'\,\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{p}}{(E+m)^2}\right] \end{aligned}$$

Efetuando a redução não-relativística e implementando as variáveis $\boldsymbol{\Delta}$ e $\mathbf{Q}$ obtemos:

$$\gamma^{0\,(1)} = 1 + i\frac{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot (\boldsymbol{\Delta} \wedge \mathbf{Q})}{4m^2} \,.$$

Efetuando o mesmo cálculo para o nucleon (2) obtemos:

$$\gamma^{0\,(2)} = 1 + i\frac{\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot (\boldsymbol{\Delta} \wedge \mathbf{Q})}{4m^2} \,.$$

Então, o produto se torna:

$$\gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)} = 1 + \frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2} \tag{E.4}$$

3. $\gamma^{0\,(1)} \cdot I^{(2)} + I^{(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)}$

$$\begin{aligned} \gamma^{0\,(1)} \cdot I^{(2)} &= \left[1 + i\frac{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot (\boldsymbol{\Delta} \wedge \mathbf{Q})}{4m^2}\right] \cdot \left[1 - i\frac{\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot (\boldsymbol{\Delta} \wedge \mathbf{Q})}{4m^2}\right] \\ &= 1 + i\frac{(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot (\boldsymbol{\Delta} \wedge \mathbf{Q})}{4m^2} \,. \end{aligned}$$

Analogamente

$$I^{(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)} = 1 - i\frac{(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot (\boldsymbol{\Delta} \wedge \mathbf{Q})}{4m^2}$$

Assim, temos:

$$\gamma^{0\,(1)} \cdot I^{(2)} + \gamma^{0\,(1)} \cdot I^{(2)} = 2 \tag{E.5}$$

Uma outra conbinação que aparece é

$$[\gamma^{0\,(1)} - I^{(1)}] \cdot [\gamma^{0\,(2)} - I^{(2)}] = \gamma^{0\,(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)} - (\gamma^{0\,(1)} \cdot I^{(2)} + I^{(1)} \cdot \gamma^{0\,(2)}) + I^{(1)} \cdot I^{(2)} \quad , \tag{E.6}$$

que é nula no limite não-relativístico.

4. $\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)}$

Estudemos inicialmente o produto de $\boldsymbol{\gamma}$ por um vetor qualquer $\mathbf{A}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{2m} \bar{u}(\mathbf{p}') \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}\, u(\mathbf{p}) \\
&= \frac{1}{2m} \frac{\chi^+}{E+m} \cdot [E + m - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'] \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E+m \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \end{bmatrix} \chi \\
&= \frac{1}{2m} \cdot \left[\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{A}\, \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{p} + \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{p}'\, \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{A} \right] \cdot
\end{aligned}
$$

Utilizando a relação E.1 obtemos:

$$
\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2m} \cdot \left[\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + i\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{p}) + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{A} + i\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot (\mathbf{p}' \wedge \mathbf{A}) \right] \cdot
$$

Isolando $\mathbf{A}$ temos

$$
\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}}{2m} \cdot \left[\mathbf{p}' + \mathbf{p} + i\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \wedge (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \right]
$$

Eliminando $\mathbf{A}$ e introduzindo as variáveis $\boldsymbol{\Delta}$ e $\mathbf{Q}$ obtemos

$$
\boldsymbol{\gamma}^{(1)} = \frac{1}{2m} \cdot [2\mathbf{Q} + i\, \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \wedge \boldsymbol{\Delta}]
$$

Analogamente para o nucleon (2) obtemos:

$$
\boldsymbol{\gamma}^{(2)} = -\frac{1}{2m} \cdot [2\mathbf{Q} + i\, \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \wedge \boldsymbol{\Delta}]
$$

O que nos permite calcular o produto

$$
\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)} = -\frac{1}{4m^2} \cdot \{4\mathbf{Q}^2 + 2i\mathbf{Q} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \wedge \boldsymbol{\Delta} - (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \wedge \boldsymbol{\Delta})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \wedge \boldsymbol{\Delta})\}
$$

Utilizando a relação

$$
(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \,, \tag{E.7}
$$

obtemos:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)} &= -\left\{ \frac{\mathbf{Q}^2}{m^2} + 2i \frac{(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot (\boldsymbol{\Delta} \wedge \mathbf{Q})}{4m^2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \boldsymbol{\Delta}^2}{4m^2} \right. \\
&+ \left. \frac{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\Delta}\, \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\Delta}}{4m^2} \right\}
\end{aligned}
$$

Efetuando a redução não-relativística, obtemos:

$$\gamma^{(1)} \cdot \gamma^{(2)} = -\frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{m^2} + \frac{\boldsymbol{\Delta}^2 \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}}{6m^2} + \frac{\boldsymbol{\Delta}^2 \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} - 3\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\Delta}\, \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\Delta}}{12m^2} \ ,$$

onde o segundo termo é o operador spin-spin e o terceiro o operador tensorial no espaço dos momentos. Assim, temos:

$$\gamma^{(1)} \cdot \gamma^{(2)} = -\frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{m^2} + \frac{\boldsymbol{\Omega}_{ss}}{6m^2} + \frac{\boldsymbol{\Omega}_T}{12m^2} \tag{E.8}$$

o que termina nossos cálculos com as matrizes de Dirac. Estudamos agora a redução de cada amplitude separadamente.

Redução não-relativística das integrais

Calculamos agora o potencial não-relativístico no espaço dos momentos, para cada amplitude:

Amplitude $\mathcal{T}_1$

A amplitude $\mathcal{T}_1$ é dada na expressão 6.67:

$$\mathcal{T}_1 = \frac{12g^4}{(4\pi)^2}\, S_1\, I^{(1)} \cdot I^{(2)} \ .$$

Efetuando a redução, obtemos:

$$V_1 = -\frac{3g^4}{(4\pi)^2} \frac{S_1}{m^2} \left[1 - \frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right] \tag{E.9}$$

onde S_1 é dada em 6.64. Essa integral e todas as integrais dependentes de Λ não se modificam com a redução, pois não dependem da energia E ou do momento $\mathbf{Q}$.

Amplitude $\mathcal{T}_{5+6+10}$

A amplitude $\mathcal{T}_{5+6+10}$ é dada na expressão 6.75:

$$\mathcal{T}_{5+6+10} = -\frac{48g^4}{(4\pi)^2}\, S_2\, I^{(1)} \cdot I^{(2)} \ .$$

Efetuando a redução, obtemos

$$V_{5+6+10} = \frac{12g^4}{(4\pi)^2} \frac{S_2}{m^2} \left[1 - \frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right] \tag{E.10}$$

Amplitude $\mathcal{T}_9 - \mathcal{T}_I$

A subtração da iteração da amplitude $\mathcal{T}_9$ é mostrada na página 125:

$$\mathcal{T}_9 - \mathcal{T}_I = \left[3 - 2\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}\right] \frac{g^4}{(4\pi)^2} \{I_{9A} + I_{9B} + I_{9C} + I_{9D} + I_{9E} + I_{9F} + I_{9G} + I_{9H}\}$$

Vamos estudar cada uma das integrais acima.

1. I_{9A}

$$I_{9A} = 2m^2 \gamma^{\mu\,(1)} \gamma_\mu^{(2)} \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \, \frac{\zeta}{D(\zeta^2)}$$

onde $D(x)$ é dado em C.24. Implementando as variáveis α e ν dadas na página 195 e efetuando a redução não-relativística, obtemos

$$I_{9A} \to \frac{S_2}{m^2} \cdot \gamma^{\mu\,(1)} \gamma_\mu^{(2)}$$

onde

$$\gamma^{\mu\,(1)} \gamma_\mu^{(2)} = \left[1 + 3\frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2} - \frac{\boldsymbol{\Omega}_{ss}}{6m^2} - \frac{\boldsymbol{\Omega}_T}{12m^2}\right]$$

e S_2 é dado por 6.72.

2. I_{9B}

Essa integral é resultado da subtração da amplitude 9 da iteração, onde o polo se cancelou

$$\begin{aligned} I_{9B} &= -4m^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_\zeta^\infty d\epsilon \frac{1}{D_\square^2} \\ &\times \left\{\zeta^2 [E\gamma^{0\,(1)} - mI^{(1)}]\,[E\gamma^{0\,(2)} - mI^{(2)}] - \epsilon^2 E^2 \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)}\right\} \end{aligned}$$

onde $D_\square$ é dado por C.48. A redução fornece o numerador

$$N = \zeta^2 m[\gamma^{0\,(1)} - I^{(1)}]\,[\gamma^{0\,(2)} - I^{(2)}] - \epsilon^2 m^2 \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)} = -\epsilon^2 m^2 \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \, .$$

O denominador fica

$$\begin{aligned} D_\square &= \boldsymbol{\Delta}^2 \beta(1\beta - \zeta) - \zeta^2(E^2 - m^2) + E^2\epsilon^2 + \mu^2(1 - \zeta) \\ D_\square &\to D(\epsilon^2) = \boldsymbol{\Delta}^2 \beta(1 - \beta\zeta) + m^2\epsilon^2 + \mu^2(1 - \zeta) \end{aligned}$$

Assim temos:

$$I_{9B} \to m^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta\, \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)} I_\epsilon$$

onde I_ϵ pode ser integrado por partes

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \int_\zeta^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^2}{[\boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta-\zeta) + m^2\epsilon^2 + \mu^2(1-\zeta)]^2} \\ &= \frac{1}{2m^2}\left[\frac{\zeta}{D(\zeta^2)} + \int_\zeta^\infty d\epsilon \frac{1}{D(\epsilon^2)}\right] \end{aligned}$$

Redefinindo a variável ϵ via $\epsilon \to \epsilon/\zeta$ obtemos

$$I_{9B} \to \frac{1}{2}\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta\, \zeta \left[\frac{1}{D(\zeta^2)} + \int_1^\infty d\epsilon\, \frac{1}{D(\epsilon^2\zeta^2)}\right]$$

onde usamos a função $D(x)$. Introduzindo as variáveis α e ν obtemos finalmente

$$I_{9B} \to \frac{1}{m^2}\left[S_2 + S_{10}\right] \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)}$$

com $\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)}$ dado por E.8, S_2 por 6.72 e

$$S_{10} = m^2 \int_{-1}^1 d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu \int_1^\infty d\epsilon\, \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu^2\epsilon^2)} \tag{E.11}$$

e foi feito uso da função $M(x)$ dada em C.28

3. I_{9C}

$$I_{9C} = -2m^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_{\sqrt{\zeta}}^\infty d\epsilon \cdot \frac{\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)}}{D_\Box}$$

Redefinindo a variável ϵ via $\epsilon \to \epsilon/\sqrt{\zeta}$ e implementando a redução não-relativística, vem

$$I_{9C} \to -\frac{1}{2}\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta\, \sqrt{\zeta} \int_1^\infty d\epsilon \frac{\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)}}{D(\zeta\epsilon^2)}$$

Implementando as variáveis α e ν, obtemos:

$$I_{9C} \to -\frac{S_{11}}{m^2}\, \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)}$$

onde $\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)}$ é dado por E.8 e S_{11} por

$$S_{11} = m^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu \sqrt{\nu} \int_1^\infty d\epsilon \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu\epsilon^2)} \tag{E.12}$$

onde usamos a função $M(x)$.

4. I_{9D}

$$I_{9D} = -2m^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta\, \zeta^{-1/2} \cdot \frac{1}{D_\zeta} \gamma^{0(1)} \cdot \gamma^{0(2)}$$

Na redução não-relativística, o denominador D_ζ dado por 6.140 se transforma na função $D(\zeta)$. Logo, implementando as variáveis α e ν temos

$$I_{9D} \to -\frac{S_{12}}{m^2}\left[1 + \frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right] \tag{E.13}$$

onde

$$S_{12} = m^2 \int_{-1}^{1} d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu^{-1/2} \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu)} \tag{E.14}$$

5. I_{9E}

$$\begin{aligned} I_{9E} &= 4m^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_{\sqrt{\zeta}}^\infty d\epsilon \frac{1}{D_\square^2} \\ &\times \left\{\left[(1-\zeta)E\gamma^{0(1)} + m\zeta I^{(1)}\right]\left[(1-\zeta)E\gamma^{0(2)} + m\zeta I^{(2)}\right] + E^2\gamma^{0(1)} \cdot \gamma^{0(2)}\right\} \end{aligned}$$

Com a redução não-relativística, o numerador e o denominador ficam:

$$\begin{aligned} N &= m^2\left\{\left[(1-\zeta)\gamma^{0(1)} + \zeta I^{(1)}\right]\left[(1-\zeta)\gamma^{0(2)} + \zeta I^{(2)}\right] + \gamma^{0(1)} \cdot \gamma^{0(2)}\right\} \\ &= 2m^2\left[1 + (1-\zeta)\frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right] \qquad \text{(E.15)} \\ D &\to D(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Redefinindo ϵ, vem

$$I_{9E} \to m^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \sqrt{\zeta} \int_1^\infty d\epsilon \frac{N}{D^2(\zeta\epsilon^2)}$$

A integral em ϵ pode ser parcialmente efetuada através da seguinte substituição:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(Ax^2+B)^2} = \frac{1}{2A}\left[\frac{1}{A+B} - \int_1^\infty \frac{dx}{x^2(Ax^2+B)}\right] \tag{E.16}$$

Obtemos então

$$\begin{aligned} I_{9E} \;\rightarrow\; & \frac{1}{2}\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta\, \zeta^{-1/2}\, \frac{N}{D(\zeta)} \\ - \; & \frac{1}{2}\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta\, \zeta^{-1/2} \int_1^\infty \frac{d\epsilon}{\epsilon^2}\, \frac{N}{D(\zeta\epsilon^2)} \end{aligned}$$

Implementando as variáveis α e ν, obtemos

$$I_{9E} \rightarrow \frac{1}{m^2}\{S_{12}\, N \; - \; S_{13}\, N\} \tag{E.17}$$

onde N é dado em E.15 com ν no lugar de ζ e S_{13} por

$$S_{13} = m^2 \int_{-1}^1 d\alpha \int_0^1 d\nu\, \nu^{-1/2} \int_1^\infty \frac{d\epsilon}{\epsilon^2} \frac{F_2}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu\epsilon^2)} \tag{E.18}$$

e o numerador N pertence à integral em ν.

6. I_{9F}

$$I_{9F} = -4E\,m \int_0^1 d\beta \int_0^\infty d\epsilon\, \frac{\gamma^{0(1)} \cdot I^{(2)} + I^{(1)} \cdot \gamma^{0(2)}}{\boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta) + \epsilon^2 E^2 + \mu^2}$$

Efetuando a redução não-relativística, e introduzindo a mudança $\rho = 2\beta - 1$, temos:

$$I_{9F} \rightarrow -4m^2\, S_{14}$$

onde

$$S_{14} \;=\; m^2 \int_{-1}^1 d\rho \int_0^\infty d\epsilon \frac{F_3}{\boldsymbol{\Delta}^2 + M_4^2} \tag{E.19}$$

$$M_4 \;=\; 2\sqrt{F_3\,(\mu^2 + m^2\epsilon^2)} \tag{E.20}$$

$$F_3 \;=\; [(1+\rho)(1-\rho)]^{-1} \tag{E.21}$$

7. I_{9G}

$$
\begin{aligned}
I_{9G} &= 2m\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta\, \zeta^{-1/2}\frac{1}{D_\zeta} \\
&\times \left\{(2-\zeta)E\left(\gamma^{0\,(1)}\cdot I^{(2)} + I^{(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right) + 2m\left(\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} + \zeta\, I^{(1)}\cdot I^{(2)}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

O numerador apresenta a seguinte redução :

$$
N = 2m\left[3 + (1-\zeta)\frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right]
$$

Implementando as variáveis α e ν, obtemos:

$$
I_{9G} \to 2\frac{S_{12}}{m^2}\left[3 + (1-\nu)\frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right]
$$

onde S_{12} é dado por E.14.

8. I_{9H}

$$
\begin{aligned}
I_H = -4E\,m\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_{\sqrt{\zeta}}^{\infty} d\epsilon\, \frac{1}{D_\Box^2} \\
\times \left\{2mE\left[\zeta I^{(1)}\cdot I^{(2)} + (2-\zeta)\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right] + \left(m^2\zeta + (2-\zeta)E^2\right)\right. \\
\times \left.\left(\gamma^{0\,(1)}\cdot I^{(2)} + I^{(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

Implementando a redução no numerador e no denominador, obtemos:

$$
\begin{aligned}
N &\to 2m^2\left[2 + \zeta I^{(1)}\cdot I^{(2)} + (2-\zeta)\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right] \\
D_\Box &\to D(\epsilon^2)
\end{aligned}
$$

Redefinindo ϵ, vem

$$
\begin{aligned}
I_{9H} &\to -2m^2\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta\zeta^{1/2}\int_1^{\infty} d\epsilon\frac{1}{D^2(\zeta\epsilon^2)} \\
&\times \left\{2 + \zeta I^{(1)}\cdot I^{(2)} + (2-\zeta)\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right\}
\end{aligned}
$$

Implementando a mesma substituição dada em E.16, obtemos

$$I_{9H} \rightarrow -\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta\, \zeta^{-1/2} \frac{\left[2+\zeta I^{(1)}\cdot I^{(2)} + (2-\zeta)\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right]}{D(\zeta)}$$

$$+ \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \zeta^{-1/2} \int_1^\infty \frac{d\epsilon}{\epsilon^2} \frac{\left[2+\zeta I^{(1)}\cdot I^{(2)} + (2-\zeta)\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right]}{D(\zeta\epsilon^2)}$$

Introduzindo as variáveis α e ν, obtemos

$$I_{9H} \rightarrow -\frac{2}{m^2}\left\{S_{12} - S_{13}\right\}\left[2+\nu I^{(1)}\cdot I^{(2)} + (2-\nu)\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right]$$

onde S_{12} e S_{13} são dados por E.14 e E.18.

Vamos agora somar todos os termos do potencial $V_9 - V_I$

$$V_9 - V_I = -[3-2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}]\frac{g^4}{(4\pi)^2}\frac{1}{m^2}\left\{S_2\ \left[\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} - \boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{(2)}\right]\right.$$

$$+\ (S_2 + S_{10})\,\boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{(2)} - S_{11}\,\boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{(2)} - S_{12}\,\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}$$

$$+\ S_{12}\ \left\{\left[(1-\nu)\gamma^{0\,(1)} + \nu I^{(1)}\right]\left[(1-\nu)\gamma^{0\,(2)} + \nu I^{(2)}\right] + \gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right\}$$

$$+\ -S_{13}\ \left[\left((1-\nu)\gamma^{0\,(1)} + \nu I^{(1)}\right)\left((1-\nu)\gamma^{0\,(2)} + \nu I^{(2)}\right) + \gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right] - S_{14}$$

$$+\ 2\,S_{12}\ \left[2 + (1-\nu)\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} + \nu I^{(1)}\cdot I^{(2)}\right] - 2S_{12}\ \left[2 + (2-\nu)\,\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right.$$

$$\left.+\ \nu I^{(1)}\cdot I^{(2)}\right] + 2\,S_{13}\ \left[2 + (2-\nu)\,\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} + \nu\, I^{(1)}\cdot I^{(2)}\right]\Big\}$$

Eliminando os termos semelhantes, obtemos

$$V_9 - V_I = -[3-2\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)}]\frac{g^4}{(4\pi m)^2}\left\{S_2\,\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} + S_{10}\,\boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{(2)} - S_{11}\,\boldsymbol{\gamma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{(2)}\right.$$

$$+\ S_{12}\ \left[\left((1-\nu)\gamma^{0\,(1)} + \nu I^{(1)}\right)\left((1-\nu)\gamma^{0\,(2)} + \nu I^{(2)}\right) - 2\left(\nu + (1-\nu)\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)}\right)\right]$$

$$+\ -S_{13}\ \left[\left((1-\nu)\gamma^{0\,(1)} + \nu I^{(1)}\right)\left((1-\nu)\gamma^{0\,(2)} + \nu I^{(2)}\right)\right.$$

$$\left.\left.+\ (-3+2\nu)\gamma^{0\,(1)}\cdot\gamma^{0\,(2)} - 2\nu I^{(1)}\cdot I^{(2)} - 4\right] - S_{14}\right\} \qquad \text{(E.22)}$$

onde a variável ν faz parte do integrando de S_{12} e S_{13}.

Amplitude $\mathcal{T}_{12}$

Essa amplitude é devida ao diagrama cruzado e é dada na equação 6.79. Ela possui duas integrais que rotularemos pelas letras A e B:

$$\mathcal{T}_{12} = -[3 + 2\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}] \cdot \frac{g^4}{(4\pi)^2} \{I_{12A} + I_{12B}\}$$

1. I_{12A}

$$\begin{aligned} I_{12A} &= -2m^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_0^{\zeta} d\epsilon\, \gamma^{\mu\,(1)}\gamma_{\mu}^{(2)} \\ &\times \left\{\boldsymbol{\Delta}^2\beta(1-\beta-\zeta) + \zeta^2(m^2 + \mathbf{Q}^2) - \epsilon^2\mathbf{Q}^2 + \mu^2(1-\zeta)\right\}^{-1} \end{aligned}$$

Para realizarmos esta integral, integramos em ϵ, obtendo como resultado um logarítmo, no qual aplicamos a redução relativística.

$$I_\epsilon = \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{(\lambda^2 - \mathbf{Q}^2\epsilon^2)} = \frac{1}{\mathbf{Q}^2}\sqrt{\frac{\mathbf{Q}^2}{\lambda^2}}\,\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\mathbf{Q}^2/\lambda^2}\cdot\zeta}{1-\sqrt{\mathbf{Q}^2/\lambda^2}\cdot\zeta}\right)$$

Como $\mathbf{Q}^2/\lambda^2$ é da ordem de $\mathbf{Q}^2/m^2$, essa razão é bem pequena no limite não-relativístico. Assim, temos:

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \approx x + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

e portanto

$$I_\epsilon = \frac{1}{\mathbf{Q}^2}\sqrt{\frac{\mathbf{Q}^2}{\lambda^2}}\sqrt{\frac{\mathbf{Q}^2}{\lambda^2}}\cdot\zeta \cong \frac{\zeta}{\lambda^2}$$

Logo, obtemos:

$$I_{12A} \to -\frac{1}{2}\int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \cdot \frac{\zeta}{D(\zeta^2)}\gamma^{\mu(1)}\gamma_{\mu}^{(2)}\,.$$

Introduzindo as variáveis α e ν vem:

$$I_{12A} \to -\frac{S_2}{m^2}\left[1 + \frac{3\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2} - \frac{\boldsymbol{\Omega}_{ss}}{6m^2} - \frac{\boldsymbol{\Omega}_T}{12m^2}\right]$$

cujo resultado é idêntico ao de I_{9A}.

2. I_{12B}

$$
\begin{aligned}
I_{12B} &= 4m^2 \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \int_0^{\zeta} d\epsilon \\
&\times \frac{\zeta^2 E^2 \gamma^{0(1)} \cdot \gamma^{0(2)} - \epsilon^2 [E\gamma^{0(1)} - mI^{(1)}][E\gamma^{0(2)} - mI^{(2)}]}{[\boldsymbol{\Delta}^2 \beta(1-\beta\zeta) + \zeta^2(m^2 + \mathbf{Q}^2) - \epsilon^2 \mathbf{Q}^2 + \mu^2(1-\zeta)]^2}.
\end{aligned}
$$

Efetuando a redução relativística, o 2º termo no numerador se cancela. Repetimos então o mesmo processo da integral anterior, e obtemos:

$$
I_{12B} \to m^2 \cdot \int_0^1 d\beta \int_0^{1-\beta} d\zeta \cdot \frac{\zeta^3 \gamma^{0(1)} \cdot \gamma^{0(2)}}{D^2(\zeta^2)}
$$

Implementando as variáveis α e ν obtemos:

$$
I_{12B} \to 8\frac{S_{15}}{m^2} \left[1 + \frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right]
$$

onde

$$
S_{15} = m^4 \int_{-1}^1 d\alpha \int_0^1 d\nu \cdot \frac{\nu^3}{1-\nu} \cdot \frac{F_2^2}{[\boldsymbol{\Delta}^2 + M^2(\nu^2)]^2} \tag{E.23}
$$

Somando os dois termos, obtemos:

$$
V_{12} = -[3 + 2\boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}] \frac{g^4}{(4\pi m)^2} \left\{ -S_2 \left[\gamma^{0(1)} \cdot \gamma^{0(2)} - \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(2)}\right] + 8\, S_{15}\, \gamma^{0(1)} \cdot \gamma^{0(2)} \right\} \tag{E.24}
$$

Amplitude $\mathcal{T}_{13}$

A amplitude $\mathcal{T}_{13}$ é dada na equação 6.90:

$$
\mathcal{T}_{13} = \frac{12g^2}{(4\pi)^2} G\mu^3 \left(\frac{2m}{\mu}\right) \left[\frac{\Lambda^2 - \mu^2}{\mu^2} - S_3 + S_4\right] I^{(1)} \cdot I^{(2)} .
$$

Efetuando a redução obtemos

$$
V_{13} = -\frac{3g^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{2m}{\mu}\right) \frac{G\mu^3}{m^2} \left[\frac{\Lambda^2 - \mu^2}{\mu^2} - S_3 + S_4\right] \left[1 - \frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right] \tag{E.25}
$$

onde S_3 e S_4 são dados por 6.72 e 6.87, respectivamente.

Amplitude $\mathcal{T}_{15+17}$

A amplitude $\mathcal{T}_{15+17}$ é dada na equação 6.101:

$$\mathcal{T}_{15+17} = -\frac{6g^2}{(4\pi)^2}\, G\mu^3 \left(\frac{2m}{\mu}\right)^3 \{S_5 - S_6\}\; I^{(1)} \cdot I^{(2)} \,.$$

Efetuando a redução, obtemos

$$V_{15+17} = \frac{3g^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{2m}{\mu}\right)^3 \frac{G\mu^3}{2m^2} \{S_5 - S_6\} \left[1 - \frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right] \tag{E.26}$$

onde S_5 e S_6 são dados em 6.99 e 6.100.

Amplitude $\mathcal{T}_{18}$

A amplitude $\mathcal{T}_{18}$ é dada na expressão 6.111:

$$\mathcal{T}_{18} = \frac{12}{(4\pi)^2}\, G^2\mu^6 \left(\frac{2m}{\mu}\right)^2 \{S_7 + S_8 + S_9 + C\}\; I^{(1)} \cdot I^{(2)} \,.$$

Efetuando a redução, obtemos

$$V_{18} = -\frac{3}{(4\pi)^2} \left(\frac{2m}{\mu}\right)^2 \frac{G^2\mu^6}{m^2} \{S_7 + S_8 + S_9 + C\} \left[1 - \frac{\boldsymbol{\Omega}_{so}}{2m^2}\right] \tag{E.27}$$

onde as integrais S_7, S_8 e S_9 são dadas por 6.108, 6.112 e 6.114.

Referências

[*AG 54*] R. Arnowitt e S. Gasiorowicz, *Phys. Rev.* **94**, 1057 (1954).

[*AL 73*] E.S. Abers e B.W. Lee, *Phys. Lett. C* **9**, 1 (1973).

[*Alf+ 73*] V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan e C. Rossetti, *Currents in Hadrons Physics*, North-Holland, Amsterdam (1973).

[*ALV 60*] D. Amati, E. Leader e B. Vitale, *Nuovo Cimento* **17**, 68; **18**, 409,458 (1960).

[*ALV 63*] D. Amati, E. Leader e B. Vitale, *Phys. Rev.* **130**, 750 (1963).

[*ANW 83*] G.S. Adkins, C.R. Nappi e E. Witten, *Nucl. Phys.* **B228**, 552 (1983).

[*Arn 87*] R.A. Arndt, *Interactive Dial-in Program SAID*, versão do outono de 1987.

[*Arn+ 83*] R.A. Arndt, L.D. Roper, R.A. Bryan, R.B. Clark, B.J. VerWest e P. Signell, *Phys. Rev.* **D28**, 97 (1983).

[*Bat 89*] Orildo L. Battistel, *Dissertação de Mestrado*, IFUSP (1989)

[*Bat 92*] Orimar A. Batisttel, Comunicação Particular (1992).

[*BB 71*] J. Binstock e R.A. Bryan, *Phys. Rev.* **D4**, 1341 (1971).

[*BCC 73*] D.V. Bugg, A.A. Carter e J.R. Carter, *Phys. Lett.* **44B**, (1973).

[*BCP 36*] G. Breit, E. Condon e R. Present, *Phys. Rev.* **50**, 825 (1936).

[*BD 64*] J.D. Bjorken e S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1964).

[*BD 65*] J.D. Bjorken e S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York (1965).

[*BDR 63*] R.A. Bryan, C.R. Dismukes e W. Ramsey, *Nucl. Phys.* **45**, 353 (1963).

[*Bet 40*] H.A. Bethe, *Phys. Rev.* **57**, 260,390 (1940).

[*Bet 49*] H.A. Bethe, *Phys. Rev.* **76**, 38 (1949).

[*BF 36*] G. Breit e E. Feenberg, *Phys. Rev.* **50**, 850 (1936).

[*BG 72*] R.A. Bryan e A. Gersten, *Phys. Rev.* **D6**, 341 (1972).

[*BGG 53*] K.A. Brueckner, M. Gell-Mann e M. Goldberger, *Phys. Rev.* **90**, 476 (1953).

[*Bha 38*] H.J. Bhabha, *Proc. R. Soc. (London)* **A166**, 501 (1938).

[*Bha 39*] H.J. Bhabha, *Nature* **143**, 276 (1939).

[*BHM 81*] X. Bagnoud, K. Holinde e R. Machleidt, *Phys. Rev.* **C24**, 1143 (1981).

[*BHM 84*] X. Bagnoud, K. Holinde e R. Machleidt, *Phys. Rev.* **C29**, 1792 (1984).

[*Bin 71*] J. Binstock, *Phys. Rev.* **D3**, 1139 (1971).

[*BJ 76*] G.E. Brown e A.D. Jackson, *The Nucleon-Nucleon Interaction*, North-Holland, Amsterdam (1976).

[*BJK 69*] G.E. Brown, A. Jackson e T. Kuo, *Nucl. Phys.* **A133**, 481 (1969).

[*BL 82*] J. Bystricky e F. Lehar, *Nucleon-Nucleon Scattering Data*, Phys. Data **11-1, 11-3**, (1978-1982).

[*BM 90*] R. Brockmann e R. Machleidt, *Phys. Rev. C* **42**, 1965 (1990).

[*BR 79*] G.E. Brown e M. Rho, *Phis. Lett* **82B**, 177 (1979).

[*BR 92*] J.L. Ballot e M.R. Robilotta, *Phys. Rev. C*, **45**, 986, 990 (1992).

[*Bre+ 60*] G. Breit, M.H. Hull, K.E. Lassila e K.D. Pyatt, *Phys. Rev.* **120**, 2227 (1960).

[*Bre 37*] G. Breit, *Phys. Rev.* **51**, 248 (1937).

[*Bre 60a*] G. Breit, *Proc. Natl. Acad. Sci. (US)* **46**, 746 (1960).

[*Bre 60b*] G. Breit, *Phys. Rev.* **120**, 287 (1960).

[*Bre 62*] G. Breit, *Rev. Mod. Phys.* **34**, 776 (1962).

[*Bro 79*] G.E. Brown, em *Mesons in Nuclei* (M. Rho e D.H. Wilkinson, eds.), Vol. I, pag. 330, North-Holland, Amsterdam (1979).

[*BRV 79*] G.E. Brown, M. Rho e V. Vento, *Phys. Lett.* **84B**, 383 (1979).

[*BS 38*] G. Breit e J.R. Stehn, *Phys. Rev.* **53**, 459 (1938).

[*BS 64*] R.A. Bryan e B.L. Scott, *Phys. Rev.* **135**, B434 (1964).

[*BS 66*] R. Blankenbecler e R. Sugar, *Phys. Rev.* **142**, 1051, (1966).

[*Bug 85*] D.V. Bugg, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **35**, 295 (1985).

[*BW 53*] K.A. Brueckner e K.M. Watson, *Phys. Rev.* **90**, 699; **92**, 1023 (1953).

[*Cal+ 68*] C. Callan, S. Colleman, J. Wess e B. Zumino, *Phys. Rev.* **177**, 2247 (1968).

[*Cam 77*] D.K. Campbell, *Les Houches, Ecole D'Été de Physique Theorique*, R. Bailan, M. Rho e G. Ripka eds., North-Holland (1978).

[*CDR 72*] M. Chemtob, J.W. Durso e D.O. Riska, *Nucl. Phys.* **B38**, 141 (1972).

[*CDR 83*] H.T. Coelho, T.K. Das e M.R. Robilotta, *Phys. Rev. C* **28**, 1812 (1983).

[*CF 60*] J.M. Charap e S.P. Fubini, *Nuovo Cimento* **15**, 73 (1960).

[*CG 34*] J. Chadwick e M. Goldhaber, *Nature* **134**, 237 (1934).

[*Cha 32*] J. Chadwick, *Proc. R. Soc. (London)* **A136**, 692 (1932).

[*Cha+ 57*] O. Chamberlain, E. Segrè, R.D. Tripp, C. Wiegand e T.J. Ypsilantis, *Phys. Rev.* **105**, 288 (1957).

[*Che+ 57*] G.F. Chew, M.L. Goldberger, F.E. Low e Y. Nambu, *Phys. Rev.* **106**, 1377 (1957).

[*Che 61*] G.F. Chew, *S-Matrix Theory of Strong Interactions*, Benjamin, New York (1961).

[*Cho+ 74a*] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson e C.B. Thorn, *Phys. Rev. D* **10**, 2599 (1974).

[*Cho+ 74b*] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C.B. Thorn e V.F. Weisskopf, *Phys. Rev. D* **9**, 3471 (1974).

[*CKP 83*] J. Carlson, J. Kogut e V.R. Pandharipande, *Phys. Rev. D* **27**, 233 (1983).

[*Cla 86*] B.C. Clark, em *Relativistic Dynamics and Quark-Nuclear Physics* (M.B. Johnson e A. Picklesimer, eds.), pag. 302, Wiley, New York (1986).

[*Clo 79*] F.E. Close, *An Introduction to Quarks and Partons* New York, Academic (1979).

[*CO 79*] D.V. Cheng e G.K. O'Neill, *Elementary Particle Physics - An Introduction*, Addison-Wesley, Reading Massachusetts (1979).

[*CPP 47*] M. Conversi, E. Pancini e O. Piccioni, *Phys. Rev.* **71**, 209,557 (1947).

[*CT 60*] J.M. Charap e M.J. Tausner, *Nuovo Cimento* **18**, 316 (1960).

[*CV 63*] W.N. Cottingham e R. Vinh Mau, *Phys. Rev.* **130**, 735 (1963).

[*Cve+ 83*] M. Cvetic, B. Golli, N. Mankoc-Borstnik e M. Rosina, *Nucl. Phys.* **A395**, 349 (1983).

[*CWZ 68*] S. Coleman, J. Wess e B. Zumino, *Phys. Rev.* **177**, 2239 (1968).

[*Czi+ 59*] P. Cziffra, M.H. MacGregor, M.J. Moravcsik e H.P. Stapp, *Phys. Rev.* **114**, 880 (1959).

[*DeG+ 75*] T. DeGrand, R.L. Jaffe, K. Johnson e J. Kiskis, *Phys. Rev. D* **12**, 2060 (1975).

[*DeT 78*] C.E. DeTar, *Phys. Rev. D* **17**, 302, 323 (1978).

[*Dub+ 82*] R. Dubois, D. Axen, R. Keeler, M. Comyn, G.A. Ludgate, J.R. Richardson, N.M. Stewart, A.S. Clough, D.V. Bugg e J.A. Edington, *Nucl.Phys.*, **A337**, 554 (1982).

[*Duc 78*] I. Duck, *Phys. Lett.* **77B**, 223 (1978).

[*Edm 57*] A.R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press, New Jersey (1957).

[*EO 31*] P. Ehrenfest e J. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **37**, 333 (1931).

[*ER 83*] T.E.O. Ericson e M. Rosa-Clot, *Nucl. Phys.* **A405**, 497 (1983).

[*ER 85*] T.E.O. Ericson e M. Rosa-Clot, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **35**, 271 (1985).

[*Eri 84*] T.E.O. Ericson, *Comments Nucl. Part. Phys.* **13**, 157 (1984).

[*Erk 74*] K. Erkelenz, *Phys. Rep.* **13C**, 191 (1974).

[*Erw+ 61*] A.R. Erwin, R. March, W.D. Walker e E. West, *Phys. Rev. Lett.* **6**, 628 (1961).

[*EW 41*] L. Eisenbud e W. Wigner, *Proc. Natl. Acad. Sci. (U.S.)* **27**, 281 (1941).

[*Fer 34*] E. Fermi, *Z. Phys.* **88**, 161 (1934).

[*Fer 54*] E. Fermi, *Nuovo Cimento* **I1**, 407 (1954).

[*Fey 49*] R.P. Feynman, *Phys. Rev.* **76**, 749,769 (1949).

[*FF 59*] W.R. Frazer e J.R. Fulco, *Phys. Rev. Lett.* **2**, 365 (1959).

[*FF 60*] W.R. Frazer e J.R. Fulco, *Phys. Rev.* **117**, 1609 (1960).

[*FG 58*] R.P. Feynman e M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* **109**, 193 (1958).

[*FH 85*] Y. Fujiwara e K.T. Hecht, *Nucl. Phys.* **A444**, 541 (1985).

[*FH 86a*] Y. Fujiwara e K.T. Hecht, *Phys. Lett.* **171B**, 17 (1986).

[*FH 86b*] Y. Fujiwara e K.T. Hecht, *Nucl. Phys.* **A451**, 625; **A456**, 669 (1986).

[*FH 87*] Y. Fujiwara e K.T. Hecht, *Nucl. Phys.* **A462**, 621 (1987).

[*FK 81*] R.C. Fernow e A.D. Krisch, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **31**, 107 (1981).

[*FL 64*] H. Feshbach e E.L. Lomon, *Ann. Phys. (N.Y.)* **29**, 19 (1964).

[*FL 78*] R. Friedberg e T.D. Lee, *Phys Rev. D* **18**, 2623 (1978).

[*Fri 81*] J.L. Friar, *Nucl. Phys.* **A353**, 233c (1981).

[*FT 75*] J. Fleischer e J.A. Tjon, *Nucl. Phys.* **B84**, 375 (1975).

[*FT 77*] J. Fleischer e J.A. Tjon, *Phys. Rev.* **D15**, 2537 (1977).

[*FT 80*] J. Fleischer e J.A. Tjon, *Phys. Rev.* **D21**, 87 (1980).

[*GCT 57*] J.L. Gammel, R.S. Christian e R.M. Thaler, *Phys. Rev.* **105**, 311 (1957).

[*Gel 62*] M. Gell-Mann, *phys. Rev.* **125**, 1067 (1962).

[*GG 69*] S. Gaziorowicz e D.A. Geffen, *Rev. Mod. Phys.* **41**, 531 (1969).

[*GK 62*] N.K. Glendenning e G. Kramer, *Phys. Rev.* **126**, 2159 (1962).

[*GL 48*] E. Gardner e C.M.G. Lattes, *Science* **107**, 270 (1948).

[*GL 51*] M. Gell-Mann e F.E. Low, *Phys. Rev.* **84**, 1232 (1951).

[*GL 60*] M. Gell-Mann e M. Lévi, *Nuovo Cimento* **16**, 705 (1960).

[*GN 64*] M. Gell-Mann e Y. Ne'eman, *The Eightfold Way*, Benjamin, New York (1964).

[*Gol 61*] J. Goldstone, *Nuovo Cimento* **19**, 15 (1961).

[*Gre 67*] A.E.S. Green, *Rev. Mod. Phys.* **39**, 495 (1967).

[*Gro 76*] F. Gross, *Few Body Dynamics* pg. 523, A.N. Mitra et al edts, North-Holland, Amsterdam (1976).

[*Gro 84*] F. Gross, *Nucl. Phys.* **A416**, 387c (1984).

[*GS 65*] A.E.S. Green e R.D. Sharma, Phys. Rev. Lett. **14**, 380 (1965).

[*GS 67*] A.E.S. Green e R.D. Sawada, Nucl. Phys. **B2**, 267 (1967).

[*GT 36*] G. Gamow e E. Teller, Phys. Rev., **49**, 895 (1936).

[*GT 57*] J.L. Gammel e R.M. Thaler, Phys. Rev. **107**, 291,1339 (1957).

[*GT 58*] M.L. Goldberger e S.B. Treinman, *Phys. Rev.* **111**, 354 (1958).

[*GT 60*] J.L. Gammel e R.M. Thaler, *Prog. Elem. Part. Cosmic Ray Phys.* **5**, 97 (1960).

[*GTG 71*] A. Gersten, R. Thompson e A.E.S. Green, *Phys. Rev.* **D3**, 2076 (1971).

[*Gup 60*] S.N. Gupta, *Phys. Rev.* **117**, 1146 (1960).

[*GW 82*] R. Goldflam e L. Wilets, *Phys. Rev. C* **25**, 1951 (1982)¿

[*GZ 57*] S.S. Gershtein e Y.B. Zeldovich, [ETF 29, 658 (1955)], trans.:*Sov. Phys. JEPT* **2**, 576 (1957).

[*Hei 32*] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **77**, 1 (1932).

[*HH 29*] W. Heitler e G.Herzberg, *Naturwissenschaften* **17**, 673 (1929).

[*HJ 62*] T. Hamada e I.D. Johnston, *Nucl. Phys.* **34**, 382 (1962).

[*HJS 49*] O. Haxel, J.H.D. Jensen e H.E, Suess, *Phys. Rev.* **75**, 1766 (1949).

[*HLM 61*] N. Hoshizaki, I. Lin e S. Machida, *Prog. Theor. Phys.* **26**, 680 (1961).

[*HM 62*] N. Hoshizaki e S. Machida, *Progr. Theoret. Phys. (Kyoto)* **27**, 288 (1962).

[*HM 75*] K. Holinde e R. Machleidt, *Nucl. Phis.* **A247**, 495 (1975).

[*HM 76*] K. Holinde e R. Machleidt, *Nucl. Phys.* **A256**, 479,497 (1976).

[*HM 77*] K. Holinde e R. Machleidt, *Nucl. Phys.* **A280**, 429 (1977).

[*HM 81*] K. Holinde e R. Machleidt, *Nucl. Phys.* **A372**, 349, (1981).

[*HM 84*] F. Halzen e A.D. Martin, *Quarks and Leptons* Wiley, New York (1984).

[*Hol+ 78*] K. Holinde, R. Machleidt, M.R. Anastasio, A. Faessler e H. Müther, *Phys. Rev.* **C18**, 870 (1978).

[*Hol+ 79*] K. Holinde, R. Machleidt, M.R. Anastasio, A. Faessler e H. Müther, *Phys. Rev.* **C19**, 948 (1979).

[*Hol+ 81*] K. Holinde, R. Machleidt, M.R. Anastasio, A. Faessler e H. Müther, *Phys. Rev.* **C24**, 1159 (1981).

[*HT 62*] E.M. Henley e W. Thirring, *Elementary Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York (1962).

[*HV 79*] G. t'Hooft e M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B153**, 365 (1979).

[*IK 77*] N. Isgur e G. Karl, *Phys. Lett.* **72B**, 109 (1977).

[*IK 79*] N. Isgur e G. Karl, *Phys. Rev. D* **19**, 2653; **20**, 1191 (1979).

[*Iwa+ 55*] J. Iwadare, S. Otsuki, R. Tanagaki e R. Watari, *Prog. Theor. Phys. (Kyoto)* **15**, 86 (1955).

[*Iwa+ 56*] J. Iwadare, S. Otsuki, R. Tanagaki e R. Watari, *Prog. Theor. Phys. (Kyoto)* **16**, 455 (1956).

[*IZ 80*] C. Itzykson e J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York (1980).

[*Jas 51*] R. Jastrow, Phys. Rev. **81**, 165 (1951).

[*JH 44*] J.M. Jauch e N. Hu, *Phys. Rev.* **65**, 289 (1944).

[*JRV 75*] A.D. Jackson, D.O. Riska e B. Verwest, *Nucl. Phys.* **A249**, 397 (1975).

[*Kal 64*] G. Källen, *Elementary Particle Physics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1964).

[*Kel+ 39*] J. Kellog, I. Rabi, N.F. Ramsey e J. Zacharias, *Phys. Rev.* **55**, 318; **56**, 728 (1939).

[*Kel+ 40*] J. Kellog, I. Rabi, N.F. Ramsey e J. Zacharias, *Phys. Rev.* **57**, 667 (1949).

[*Kem 38a*] N. Kemmer, *Proc. R. Soc. (London)* **A166**, 127 (1938).

[*Kem 38b*] N. Kemmer, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **34**, 354 (1938).

[*Kem 39*] N. Kemmer, *Proc. R. Soc. (London)* **A173**, 91 (1939).

[*Kle 58*] A. Klein, *Prog. Theor. Phys. (Kyoto)* **20**, 357 (1958).

[*Kri 85*] A.D. Krish, *Lecture at the School on High Energy Spin Physics*, Lake Louise, Canada (1985).

[*Lac+ 75*] M. Lacombe, B. Loiseau, J.M. Richard, R. Vinh Mau, P. Pires e R. de Tourreil, *Phys. Rev.* **D12**, 1495 (1975).

[*Lac+ 80*] M. Lacombe, B. Loiseau, J.M. Richard, R. Vinh Mau, J. Côté, P. Pires e R. de Tourreil, *Phys. Rev.* **C21**, 861 (1980).

[*Las+ 62*] K.E. Lassila, M.H. Hull, H.M. Ruppel, F.A. McDonald e G.E. Breit, *Phys. Rev.* **126**, 881 (1962).

[*Lee 72*] B.J. Lee, *Chiral Dynamics*, Gordon and Breach, New York (1972).

[*Lib 77*] D.A. Liberman, *Phys. Rev. D* **16**, 1542 (1977).

[*Lom 76*] E.L. Lomon, *Phys. Rev.* **D14**, 2402 (1976).

[*Lom 80*] E.L. Lomon, *Phys. Rev.* **D22**, 229 (1980).

[*LOP 47*] C.M.G. Lattes, G.P.S. Occhialini e C.F. Powell, *Nature* **160**, 453,486 (1947).

[*LP 81*] I.E. Lagaris e V.R. Pandharipande, *Nucl. Phys.* **A359**, 331 (1981).

[*LY 56*] T.D. Lee e C.N. Yang, *Phys. Rev.* **104**, 254 (1956).

[*Mac 67*] S. Machida, *Prog. Theor. Phys. (Kyoto), Suppl.* **67**, 91 (1967).

[*Mac 86*] R. Machleidt, em *Relativistic Dynamics and Quark-Nuclear Physics* (M.B. Johnson e A. Picklesimer, eds.), Pag. 71, Wiley, New York (1986).

[*Mac 89*] R. Machleidt, em *Advances in Nuclear Physics* (J.W. Negele e E. Vogt, eds.), Vol. 20, pag. 189, Plenum Press, New York (1989).

[*Mag+ 61*] B.C. Maglić, L.W. Alvarez, A.H. Rosenfeld e M.L. Stevenson, Phys. Rev. Lett. **7**, 178 (1961).

[*Maj 33*] E. Majorana, *Z. Phys.* **82**, 137 (1933).

[*Man 55*] S. Mandelstam, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A223**, 248 (1955).

[*Man 58*] S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **112**, 1344 (1958).

[*Man 62*] S. Mandelstam, *Rep. Prog. Phys.* **25** (1962).

[*MAW 69*] M.H. MacGregor, R.A. Arndt e R.A. Wright, *Phys. Rev.* **182**, 1714 (1969).

[*May 49*] M.G. Mayer, *Phys. Rev.* **75**, 1969 (1949).

[*MHE 87*] R. Machleidt, K. Holinde e C. Elster, *Phys. Rep.* **149**, 1 (1987).

[*MI 83*] K. Maltman e N. Isgur, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1827 (1983).

[*MI 84*] K. Maltman e N. Isgur, *Phys. Rev. D* **29**, 952 (1984).

[*Mil 84*] G.A. Miller, em *International Review of Nuclear Physics* (W. Weise, ed.), World Scientific, Singapore (1984), Vol. I, Pag. 190.

[*MJ 55*] M.G. Mayer e J.H.D. Jensen, *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure*, Wiley, New York (1955).

[*MN 61*] M.J. Moravcsik e H.P. Noyes, *Ann. Nucl. Sci.* **11**, 95 (1961).

[*Mor 63*] M.J. Moravcsik, *The Two-Nucleon Interaction*, Claredon Press, Oxford (1951).

[*MR 40*] C. Møller e R. Rosenfeld, *Kgl. Danske Vid. Selskab, Math.-Fys. Medd.* **17**, N^{o}·8 (1940).

[*MTT 80*] G.A. Miller, A.W. Thomas e S. Theberge, *Phys. Lett.* **91B**, 192 (1980).

[*MZ 86*] U.G. Meissner e I. Zahed, em *Advances in Nuclear Physics* (J.W. Negele e E. Vogt, eds.), Vol 17, pag. 143, Plenum Press, New York (1986).

[*NA 37*] S.H. Neddermeyer e C.D. Anderson, *Phys. Rev.* **51**, 884 (1937).

[*Nam 57*] Y. Nambu, *Phys. Rev.* **106**, 1366 (1957).

[*Nam 60*] Y. Nambu, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 380 (1960).

[*NJ 61*] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345, **124**, 246 (1961).

[*NRS 78*] M.M. Nagels, T.A. Rijken e J.J. de Swart, *Phys, Rev.* **D17**, 768 (1978).

[*Nut 76*] W.T. Nutt, *Ann. Phys. (N.Y.)* **100**, 490 (1976).

[*NW 75*] W.T. Nutt e L. Wilets, *Phys. Rev.* **D7**, 110 (1975).

[*Occ+ 47*] G.P.S. Occhialini, C.F. Powell, C.M.G. Lattes e H. Muirhead, *Nature*, **159**, 186,694 (1947).

[*OCR 54*] C.L. Oxley, W.F. Cartwright e J. Rouvina, *Phys. Rev.* **93**, 806 (1954).

[*OM 58*] S. Okubo e R.E. Marshak, *Ann. Phys. (N.Y.)* **4**, 166 (1958).

[*OO 75*] M.G. Olsson e E.T Osypowski, *Nucl. Phys.* **B101**, 136 (1975).

[*Pag 75*] H. Pagels, *Phys. Lett. C* **16**, 219 (1975).

[*Pau 33*] W. Pauli, *Proc. Solvay Congr.*, pag. 324, (1933).

[*Pau 46*] W. Pauli, *Meson Theory of Nuclear Forces*, Interscience, New York (1946).

[*PDG 74*] Particle Data Group, *Phys. Lett.* **50B**, 6,74 (1974).

[*PDG 76*] Particle Data Group, *Rev. Mod. Phys.* **48**, S26,S114 (1976).

[*PL 70*] M.H. Partovi e E.L. Lomon, *Phys. Rev.* **D2**, 1999 (1970).

[*PL 72*] M.H. Partovi e E.L. Lomon, *Phys. Rev.* **D5**, 1192 (1972).

[*Pol 58*] J.C. Polkinghorne, *Nuovo Cimento* **8**, 179 (1958).

[*Pol 80*] J.C. Polkinghorne, *Models of High Energy Process*, Cambridge University Press (1980).

[*Pro 36*] A. Proca, *J. Phys. Radium* **7**, 347 (1936)

[*Rei 68*] R.V. Reid, *Ann. Phys. (N.Y.)* **50**, 411 (1968).

[*Rob 87*] M.R. Robilotta, em *Processos Mesônicos em Física Nuclear*, III Escola de Verão "Jorge André Swieca", editado pela SBF (1987).

[*Rob 89*] M.R. Robilotta, em *Apostila do Curso de Física de Hádrons II*, IFUSP, (1989).

[*Rho 91*] M. Rho, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1275 (1991)

[*Rom 69*] P. Roman, *Introduction to Quantum Field Theory*, Wiley, New York (1969).

[*Ros 45*] L. Rosenfeld, *Nature* **145**, 141 (1945).

[*Ros 48*] L. Rosenfeld, *Nuclear Forces*, North-Holland, Amsterdam (1948).

[*RS 41a*] W. Rarita e J. Schwinger, *Phys. Rev.* **59**, 436,556 (1941).

[*Rut 11*] E. Rutherford, *Phil. Mag.* **21**, 669 (1911).

[*RV 69*] J. Reif e M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B13**, 545 (1969).

[*RW 89*] G. Rasche e W.S. Woolcock, *Proceedings of the Third Physics Summer School on Nuclear and Particle Physics*, pg. 160, C.J. Burden e B.A. Robson eds., World Scientific, Singapore (1989).

[*Sak 60a*] J.J. Sakurai, *Ann. Phys. (N.Y.)* **11**, 1 (1960).

[*Sak 60b*] J.J. Sakurai, *Phys. Rev.* **119**, 1784 (1960).

[*Sak 60c*] J.J. Sakurai, *Nuovo Cimento* **16**, 388 (1960).

[*Sak 64*] J.J. Sakurai, *Invariance Principles and Elementary Particles*, Princeton University Press, New Jersey (1964).

[*Sal 68*] A. Salam, *Elementary Particle Theory*, N. Svartholm ed., Almquist and Forlag, Stockolm (1968).

[*Saw+ 62*] S. Sawada, T. Ueda, W. Watari e M. Yonezawa, *Prog. Theor. Phys.* **28**, 991 (1962).

[*SB 51*] E.E. Salpeter e H.A. Bethe, *Phys. Rev.* **84**, 1232 (1951).

[*Sca 79*] M.D. Scadron, Advanced Quantum Theory Spring-Verlag, New York, (1979).

[*Sch 42*] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **61**, 387 (1942).

[*Sch 51*] J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **37** (1951).

[*Sch 58*] J. Schwinger, *Ann. Phys. (N.Y.)* **2**, 407 (1958).

[*Sch 61*] S.S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, Row, Peterson and Co., Evanston, Illinois (1961).

[*Sch 67*] J. Schwinger, *Phys. Lett. B* **24**, 473 (1967).

[*Sch 72*] G. Schierholz, *Nucl. Phys.* **B40**, 335 (1972).

[*SH 68*] H. Sugawara e F. von Hippel, *Phys. Rev.* **172**, 1764 (1968).

[*Shi 89*] K. Shimizu, *Rep. Prog. Phys.* **52**, 1 (1989).

[*Sky 62*] T.H.R. Skyrme, *Nucl. Phys.* **31**, 556 (1962).

[*SS 37*] J.C. Street e E.C. Stevenson, *Phys. Rev.* **51**, 1005A (1937).

[*Sup 55*] *Prog. Theor. Phys. (Kyoto), Suppl.* **1** e **2** (1955).

[*Sup 56*] *Prog. Theor. Phys. (Kyoto), Suppl.* **3** (1956).

[*Sup 67*] *Prog. Theor. Phys. (Kyoto), Suppl.* **39** (1967).

[*SW 63*] A. Scotti e D.Y. Wong, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 142 (1963).

[*SW 65*] A. Scotti e D.Y. Wong, *Phys. Rev.* **138**, 145 (1965).

[*SYM 57*] H.P. Stapp, T.J. Ypsilantis e N. Metropolis, *Phys. Rev.* **105**, 302 (1957).

[*THH 36*] M. Tuve, N. Heydenburg e L. Hafstad, *Phys. Rev.* **50**, 806 (1936).

[*Tho 13*] J.J. Thomson, *Rays of Positive Eletricity*, Longmans, Green, New York (1913).

[*Tho 70*] R.H. Thompson, *Phys. Rev.* **D1**, 110 (1970).

[*Tho 83*] A.W. Thomas, em *Advances in Nuclear Physics* (J.W. Negele e E. Vogt, eds.), Vol. 13, Pag. 1, Plenum Press, New York (1983).

[*Tjo 87*] J.A. Tjon, *Nucl. Phys.* **A463**, 157c (1987).

[*TMO 52*] M. Taketani, S. Machida e S. Onuma, *Prog. Theor. Phys. (Kyoto)* **7**, 45 (1952).

[*TNS 51*] M. Taketani, S. Nakamura e M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. (Kyoto)* **6**, 581 (1951).

[*TRS 75*] R. de Tourreil, B. Rouben e D.W.L. Sprung, *Nucl. Phys.* **A242**, 445 (1975).

[*TS 73*] R. de Tourreil e D.W.L. Sprung, *Nucl. Phys.* **A201**, 193 (1973).

[*TTM 80*] S. Theberge, A.W. Thomas e G.A. Miller, *Phys. Rev. D* **22**, 2838 (1980).

[*Vin 79*] R. Vinh Mau, em *Mesons in Nuclei* (M. Rho e D.H. Wilkinson, eds.), Vol I, Pag 151, North-Holland, Amsterdam (1979).

[*Vin+ 73*] R. Vinh Mau, J.M. Richard, B. Loiseau, M. Lacombe e W.N. Cottingham, *Phys. Lett.* **44B**, 1 (1973).

[*WA 52*] L. Wolfeinstein e J. Ashkin, *Phys. Rev.* **85**, 947 (1952).

[*WB 52*] V.F. Weisskopf e J.M. Blatt, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, New York (1952).

[*Wei 66*] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **17**, 616 (1966).

[*Wei 67*] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 188 (1967).

[*Wei 67b*] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967).

[*Wei 68*] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **166**, 1568 (1968).

[*Wei 79*] S. Weinberg, *Physica* **96A**, 327 (1979).

[*Wei 87*] W. Weise, *Progr. Part. Nucl. Phys.* **20**, 113 (1987).

[*Wei 90*] S. Weinberg, *Phys. Lett. B* **251**, 288 (1990).

[*Wei 91*] S. Weinberg, *Nucl. Phys.* **B363**, 3 (1991).

[*Wen 49*] G. Wenzel, *Quantum Theory of Fields*, Intersience, New York (1949).

[*Wic 38*] G. Wick, *Nature* **142**, 993 (1938).

[*Wig 33*] E. Wigner, *Phys. Rev.* **43**, 252 (1933).

[*Wil 63*] R. Wilson, *The Nucleon-Nucleon Interaction*, Interscience, New York (1963).

[*Wit 83*] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B223**, 422, 433 (1983).

[*WJ 72*] R. Woloshyn e A.D. Jackson, *Nucl. Phys.* **A185**, 131 (1972).

[*Wol 56*] L. Wolfeinstein, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **6**, 43 (1953).

[*Won 59*] D.Y. Wong, *Phys. Rev. Lett.* **2**, 406 (1959).

[*Won 86*] C.W. Wong, *Phys. Rep.* **136**, 1 (1986).

[*WS 80*] C.S. Warke e R. Shanker, *Phys. Rev. C* **21**, 2643 (1980).

[*WSA 84*] R.B. Wiringa, R.A. Smith e T.L.Ainsworth, *Phys. Rev. C* **29**, 1207 (1984).

[*Ynd 83*] F.J. Yndurráin, *Quantum Chromodynamics*, Springer, New York (1983).

[*YS 37*] H. Yukawa e S. Sakata, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn* **19**, 1084 (1937).

[*YST 38*] H. Yukawa, S. Sakata e M. Taketani, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn* **20**, 319 (1938).

[*Yuk 35*] H. Yukawa, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn* **17**, 48 (1935).

[*Yuk 37*] H. Yukawa, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn* **19**, 712 (1937).

[*Yuk+ 38*] H. Yukawa, S. Sakata, M. Kobayashi e M. Taketani, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn* **20**, 720 (1938).

[*YZ 84*] Y.W. Yu e Z.Y. Zhang, *Nucl. Phys.* **A426**, 557 (1984).

[*ZB 86*] I. Zahed e G.E. Brown, *Phys. Rep.* **142**, 1 (1986).

[*ZT 81*] M.J. Zuilhof e J.A. Tjon, *Phys. Rev. C* **24**, 736 (1981).

[*ZT 82*] M.J. Zuilhof e J.A. Tjon, *Phys. Rev. C* **26**, 1277 (1982).