1.2

SOBRE O

MÉTODO DE ESPALHAMENTO INVERSO APLICADO A

EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO LINEAR

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
APRESENTADA AO INSTITUTO DE
FÍSICA DA USP POR
VALDECIR MARVULLE

ORIENTADOR: WALTER WRESZINSKI

Defesa em 27/04/89

Ao Vitório, Otília
e a Jú.

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Marvulle, Valdecir
Sobre o método de espalhamento inverso aplicado à equação de Schrödinger não linear. São Paulo, 1989.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares
Orientador: Prof. Dr. Walter Felipe Wreszinski

Unitermos: 1.Espalhamento Inverso; 2.Par de Lax; 3.Operadores J-auto-adjuntos.

USP/IF/SBI - 20/89

A aquela que muito mais que orientadora e amiga, foi um exemplo de humildade e de uma vida dedicada ao ensino e a ciência, e que me ensinou, sempre dentro deste espírito, os primeiros passos no campo da pesquisa. A minha homenagem a memória da professora Drª Carmem Lys Ribeiro Braga, a quem muito carinhosamente chamávamos de Tia Carmem.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de deixar aqui meu carinho para com todos aqueles que fizeram com que esta etapa pudesse chegar ao seu término. Em especial, a profª Mutsuko Kuscinski, primeira a me mostrar o quão bonita pode ser esta área de pesquisa a qual chamamos de Física-Matemática; ao prof. Josif Frenkel, que sempre se mostrou um amigo dedicado, principalmente nos momentos mais decisivos desta jornada; ao prof. Walter F. Wreszinski, ao qual seria diminuir em muito expressar minha gratidão a ele por palavras, pois suas idéias e dedicação foram a causa maior da realização deste trabalho.

Gostaria também de deixar um especial carinho ao pessoal da sala: Mônica, Pé, Marcelo, Tuca e Teoth, os quais, muito mais do que colegas em discussões que contribuíram na minha formação, foram sempre amigos sinceros e prestativos; ao Mário, pela convivência e incentivo durante estes anos; ao Zé Roberto, pela paciência com que me auxiliou no manuseio dos micros quando foi necessário; a Ana, que gentilmente se prontificou para o trabalho de datilografia desta dissertação.

Finalmente, a todos aqueles, e entre eles muitos que nem sequer têm idéia do que vem a ser pesquisa em Física, que contribuíram com o auxílio financeiro a mim destinado neste período, auxílio este que me foi repassado pela FAPESP.

RESUMO

Estudamos duas questões relacionadas à teoria geral do espalhamento inverso no contexto da Equação de Schorödinger não linear:

a) Quantos pares de Lax diferentes estão associados à mesma equação não linear, e qual é a relação entre eles?

b) Dado um operador linear L fixo, quantos pares de Lax diferentes existem associados a uma dada equação não linear? Mostramos que em geral há uma família não trivial desses últimos, mas que no caso especial da Equação de Schrödinger não linear apenas um satisfaz a certas condições naturais que garantem - através de um teorema que demonstramos - a isospectralidade de L. Finalmente, fornecemos um resumo daqueles aspectos da teoria matematicamente rigorosa do espalhamento inverso aplicada à equação de Schrödinger não linear desenvolvida por Tanaka que utilizam esse teorema.

ABSTRACT

In this work, we investigate two questions related to the general inverse scattering theory in the context of the nonlinear Schrödinger equation:

a) How many different Lax operators are associated to the same nonlinear equation, and what is the relationship between them?

b) Considering a fixed linear operator L, how many different Lax pairs are associated to a given nonlinear equation?

We show that in general there is a nontrivial family of the latter operators. However, in the particular case of the nonlinear Schrödinger equation, only one of them satisfies some natural conditions which guarantee - with the help of a theorem we demonstrate - the isospectrality of L. Finally, we summarize the aspects of the formal inverse scattering mathematical theory applied to the nonlinear Schrödinger equation developed by Tanaka which use this theorem.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Este trabalho teve como objetivo fazer um estudo formal do método de espalhamento inverso aplicado a equação de Schrödinger não linear, bem como obter algumas propriedades assintóticas temporais referentes as soluções da mesma. Portanto, um pequeno conhecimento prévio do método de espalhamento inverso seria aconselhável para um bom entendimento do mesmo. No entanto, para permitir uma pequena recordação sobre o assunto e para tornar mais clara a apresentação deste, colocamos no Capítulo I um resumo do que vem a ser este método, bem como referências aos trabalhos que lhe deram origem. Também no Capítulo 1, colocamos o problema geral que deu origem a esta dissertação (seção 2), resumindo os resultados obtidos.

No Capítulo 2, o problema já exposto no capítulo anterior, é agora estudado em detalhe. O resumo de alguns cálculos é apresentado no Apêndice A.

No Capítulo 3, apresentamos para comodidade do leitor, os aspectos fundamentais da teoria matemática do espalhamento inverso para a equação de Schrödinger não linear desenvolvida por Tanaka que utilizam o teorema demonstrado no Capítulo 2.

Tentamos colocar neste trabalho apenas os elementos essenciais que permitissem o entendimento daquilo que por nós foi realizado. No entanto, referências são dadas no decorrer desta dissertação, permitindo um maior esclarecimento àqueles que queiram se aprofundar mais neste assunto.

1. SOBRE O MÉTODO DE ESPALHAMENTO INVERSO E A EQUAÇÃO KdV

1.1. ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS E UMA PEQUENA INTRODUÇÃO AO MÉTODO DE ESPALHAMENTO INVERSO

Nas últimas duas décadas, importantes trabalhos têm sido feitos dentro do campo de estudo das equações diferenciais não lineares, em particular, as equações de evolução. Esses trabalhos culminaram numa técnica a qual permite resolver exatamente uma certa classe destas equações, quando estudadas juntamente com condições iniciais. A ela se deu o nome de Método de Espalhamento Inverso, e seu desenvolvimento permitiu descrevê-la sobre vários aspectos, seja sob o ponto de vista de uma generalização do método da Transformada de Fourier para resolução de equações diferenciais, seja como um sistema Hamiltoniano completamente integrável, ou dentro do campo da Análise Funcional, olhando-a como uma Teoria de Operadores*. Neste trabalho, o método de espalhamento inverso será tratado dando maior destaque a este último ponto de vista, apesar de todos estes enfoques estarem inter-relacionados.

O primeiro trabalho dentro deste assunto surgiu em 1967, publicado por Gardner, Greene, Kruskal e Miura [1], os quais, através de uma transformação de coordenadas, conseguiram obter soluções analíticas do tipo sóliton para a equação KdV com certas condições iniciais. Podemos resumir seu trabalho nas seguintes etapas:

(i) através de uma transformada de coordenadas, que ficou conhecida como tranformada de Miura, eles mapearam a equação KdV no problema de autovalores associado a equação de Schrödinger, na qual a solução $u(x,t)$ da equação KdV era levada a fazer o papel de potencial da outra, ou seja: dada a equação KdV:

* Este ponto de vista tem como base [7], [8] e [17].

$$u_t - 6u\,u_x + u_{xxx} = 0$$

esta estava associada a equação de Schrödinger $\psi'' + (\lambda - u)\psi = 0$.

(ii) mostraram que a equação KdV era justamente a condição sobre o potencial da equação de Schrödinger para que este se tornasse isospectral, ou seja, para que o espectro desta última equação fosse independente do tempo. E como consequência, obtiveram também a evolução temporal dos outros dados de espalhamento, usando a condição inicial $u(x,0)$.

(iii) usando os dados de espalhamento obtidos para qualquer t e a teoria de espalhamento inverso para a equação de Schrödinger, obtiveram as soluções procuradas $u(x,t)$ da equação KdV.

Devido ao sucesso deste trabalho, várias questões surgiram naturalmente, tais como:

(i) existem outras equações, além da KdV, cujas soluções são potenciais isospectrais para a equação de Schrödinger?

(ii) Existem outros problemas de autovalores, para os quais podemos encontrar potenciais isospectrais que são soluções de alguma equação de evolução interessante?

(iii) dada uma equação de evolução para uma função $u(x,t)$, é possível encontrar um problema de autovalores para o qual $u(x,t)$ toma o papel de potencial isospectral?

Um dos mais importantes trabalhos publicado nesta época, e que esclarece muitas dúvidas relacionadas com as perguntas acima, foi publicado por Lax em 1968 [2], e já descreve o método de espalhamento inverso sob o ponto de vista da Teoria de Operadores. É o que apresentaremos a seguir.

1.2. SOBRE O PAR DE LAX

Em seu trabalho Lax, conseguiu formular uma teoria que assegurava, sob certas condições, a isospectralidade de operadores lineares, relacionando estes com equações de evolução não lineares analogamente a que GGKM havia feito para a KdV, relacionando - a com o operador de Schrödinger. Um dos pontos fundamentais de seu artigo é o teorema que define o par de operadores que ficou conhecido como par de Lax, o qual formulamos a seguir:

TEOREMA 1.1: Seja $L(t)$, $t \in \mathbb{R}$, uma família monoparamétrica de operadores auto-adjuntos definidos sobre um espaço de Hilbert H e continuamente diferenciável com respeito a t. O espectro $\sigma(L)$ é invariante com t se existe uma família de operadores antissimétricos $M(t)$ tal que:

(i) $$\frac{\partial L}{\partial t} = [M,L] \tag{1.1}$$

(ii) a equação operatorial

$$\frac{dU}{dt} = MU, \quad t > 0, \quad \text{com} \quad U(0) = I, \tag{1.2}$$

tem por solução uma família monoparamétrica de operadores unitários $U(t)$.

(iii) LU é diferenciável com respeito a t.

Corolário ao Teorema 1.1: Seja L auto-adjunto e M antissimétrico satisfazendo a condição (ii) do Teorema II.1. Suponha que L possua a seguinte estrutura:

$$L = L_o + L_u$$

onde $u(x,t)$ é uma função dependente do parâmetro t, L_o é independente de u e L_u é o operador multiplicação por u (L_u assume um papel análogo se L for um operador matricial). Seja K um operador defini do sobre H. Então, se:

$$[M, L] = K(u)$$

temos que L é isospectral para qualquer função u satisfazendo:

$$u_t = K(u) \tag{1.1a}$$

Este corolário é o elo de ligação entre a teoria isospectral de operadores de Lax e o método de espalhamento inverso, pois dada uma equação de evolução do tipo (1.1a) para uma função u(x,t), o primeiro passo para resolvê-la pelo método de espalhamento inverso é encontrar o par de Lax a ela relacionado, o qual satisfaz o Teorema 1.1 e respectivo corolário. A seguir, uma teoria de espalhamento inverso para o operador L deve ser formalizada. Isto feito, temos a equação (1.1a) resolvida pelo método de espalhamento inverso usando a C.I. u(x,0).

Assim procedendo, vários trabalhos foram feitos relacionando a cada tipo de equação de evolução o seu respectivo par de Lax. Podemos citar dentre eles, os operadores relacionados com a equação KdV, apresentados pelo próprio Lax em seu trabalho:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.3}$$

$$L = D^2 - u(x,t) \tag{1.4a}$$

$$M = -4(D^3 - \frac{3}{4} uD - \frac{3}{4} u_x) \tag{1.4b}$$

e os operadores apresentados por Zakharov-Shabat [3] para a resolução da equação de Schrödinger não linear:

$$iu_t + u_{xx} + X|u|^2 u = 0 \tag{1.5}$$

$$L = i \begin{bmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} D + \begin{bmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{bmatrix} \tag{1.6a}$$

$$M = ip \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} D^2 + i \begin{bmatrix} |u|^2/(1+p) & iu_x^* \\ -iu_x & -|u|^2/(1-p) \end{bmatrix}$$

$$\text{com } X = \frac{2}{1-p^2} \qquad (1.6b)$$

além da generalização deste último operador L feita pelo grupo AKNS [4] a qual resulta no estudo de, além destas já mencionadas, das equações KdV modoficada e sine-Gordon, entre outras.

No Capítulo 2 , que é o núcleo deste trabalho, estudamos duas questões fundamentais relacionadas à teoria geral do espalhamento inverso no contexto da equação de Schrödinger não linear:

a) Quantos pares de Lax diferentes estão associados à mesma equação não linear, e qual é a relação entre eles?

b) Dado um operador linear fixo, quantos pares de Lax diferentes existem, associados a uma dada equação não linear?

É pouco conhecido que além de (1.6a-b) existe outro par de Lax (L_T, M_T) para a equação de Schrödinger não linear (Tanaka[6]). Achamos a relação entre L_T e o L de (1.6a), que chamaremos de L_{ZT}, envolvendo naturalmente o operador $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ que ocorre na teoria de J-hermiticidade de Flaschka e Newell [9]. Em resposta a (b), encontramos famílias não triviais de segundos componentes M_T, M_{ZS} dos pares de Lax correspondentes a L_T e L_{ZS}. Mostramos ainda que apenas um dos componentes M - M_T - satisfaz a uma condição natural ligada ao operador J (J-antissimetria), formulada por Flaschka e Newell [9], que garante - através de um teorema que demonstramos (teorema 2.1) a isoespectralidade de L. Finalmente, no capítulo 3 apresentamos, por completeza, aqueles aspectos da teoria matemática do espalhamento inverso aplicada à equação de Schrödinger não linear desenvolvida por Tanaka [6] que utilizam o teorema demonstrado no Capítulo 2.

Por último, uma observação que seria importante aqui destacar para levar o leitor a fazer uma análise mais detalhada sobre o operador L_{ZS} de Zakharov-Shabat é o fato de que este operador possui espectro contínuo igual a $\mathbb{R}$. Este fato é de grande importância, pois não possuindo espectro discreto não haveria solução do tipo sóliton para a equação de Schrödinger não linear. Para obter estas últimas soluções, estes autores se utilizam implicitamente de uma transformação de operadores (a qual descreveremos explicitamente no Capítulo 2), o que obrigou-os a redefinir o operador L_{ZS}. Entretanto, M_{ZS} não sofre nenhuma alteração, e a relação de Lax (1.1) não é mais satisfeita por esses operadores.

Numa visão mais física, podemos olhar para o operador L_{ZS} como sendo um operador matricial momento linear o qual é fácil mostrar que seu espectro é contínuo, somado a um operador A. No entanto, vamos mostrar que o espectro de L_{ZS} é igual a $\mathbb{R}$ de uma maneira mais formal.

Seja: $L_{ZS} = + i \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{pmatrix} = L_o + A$

em $L^2(\mathbb{R},dx) \oplus L^2(\mathbb{R},dx)$ e $u \in L^2(\mathbb{R},dx)$. L_o é autoadjunto $D(L_o) = D_p \oplus D_p$, onde $D_p = \{u \text{ a.c} \mid u' \in L^2(\mathbb{R},dx)\}$ e $\sigma(L_o) = \sigma_e(L_o) = \mathbb{R}$, onde σ_e denota espectro essencial e a.c. $\Rightarrow$ absolutamente contínuo.

Vamos mostrar inicialmente que $\sigma_e(L) = \sigma_e(L_o) = \mathbb{R}$. Logo o complemento $\sigma(L)/\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ em $\sigma(L)$ consiste de autovalores isolados de multiplicidade finita que só podem se acumular em $\mathbb{R}$. Mas como L é autoadjunto, $\sigma(L) \subseteq \mathbb{R}$, logo $\sigma(L) = \mathbb{R}$.

Para mostrar que $\sigma_e(L) = \sigma_e(L_o)$, usamos o resultado em T. Kato - [15], de que se A é L_o - compacto, $\sigma_e(L) = \sigma_e(L_o)$. Mas, se $\xi \notin \mathbb{R}$, $\| A(L_o-\xi)^{-1}\|^2_{H.S.} \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dp' \,|\tilde{u}\,(p-p')|^2 |(p'-\xi)|^{-2} =$

$= 2 \| u \|_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp |(p-\xi)^{-2} < \infty.$

c.q.d.

Feitas estas observações, passemos então ao capítulo seguinte.

2. UMA TEORIA FORMAL PARA O PAR DE LAX DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO LINEAR

2.1. ORIGEM DO PROBLEMA. O PAR DE LAX CORRETO

O primeiro trabalho analisando a equação de Schrödinger não linear(*) do ponto de vista da teoria de Lax foi escrito por Zakharov-Shabat [3], onde o par de Lax (1.6) é apresentado como o candidato para se resolver aquela equação pelo método de espalhamento inverso. Entretanto, ao começar a formular a teoria de espalhamento direto e inverso para o operador L, os autores utilizam-se da seguinte transformação:

$$L \to L' = S^{-1} L S$$

onde

$$S = \begin{bmatrix} 0 & (1-p)^{1/2} \quad e^{-i \frac{\lambda}{1-p^2} x} \\ (1+p)^{1/2} \; e^{-i \frac{\lambda}{1-p^2} x} & \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

passando então a estudar o seguinte problema de autovalores:

$$(S^{-1} L S) v = \lambda v$$

onde

$$S^{-1} L S = i \begin{bmatrix} (1-p) & 0 \\ 0 & (1+p) \end{bmatrix} D + \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^{1/2} u \\ \left(\frac{1+p}{1-p}\right)^{1/2} u^* & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{1+p} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{1-p} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

(*) Aplicações físicas envolvendo esta equação podem ser vistas em [13].

o qual, escrito em termos das componentes, toma a forma:

$$\begin{cases} v_{1_x} + i\tau v_1 = q\, v_2 & q = i \dfrac{u}{\sqrt{1-p^2}} \\ v_{2_x} - i\tau v_2 = -q^* v_1\,, & \tau = \dfrac{\lambda p}{1-p^2} \end{cases} \tag{2.3}$$

Mas (2.3) também pode ser escrito como:

$$L_T\; v = \xi v$$

$$\text{onde} \quad L_T = i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} D - i \begin{bmatrix} 0 & q \\ q^* & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4a}$$

ou seja, a teoria de espalhamento feita por Zakharov-Shabat se refere ao operador (2.4a), e não ao primeiramente apresentado por eles, isto é, o operador (1.6a). Mais ainda: se observarmos o operador L' (2.2), vemos que ele depende de seus próprios autovalores, sendo que o mesmo acontece com o operador transformado de M, que também dependerá parametricamente de λ. Portanto, este não é o melhor caminho para se estudar a equação de Schrödinger não linear pelo método de espalhamento inverso de maneira consistente.

Entretanto, encontramos no artigo de Tanaka [6], um novo par de operadores o qual é consistente com a teoria de Lax e que permite uma teoria de espalhamento direto e inverso formal e correta. Eles assumem a seguinte forma:

$$L_T = i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} D - i \begin{bmatrix} 0 & q \\ q^* & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4a}$$

$$M_T = i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} (D^2 + \frac{1}{2}|q|^2) - \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & q \\ q^* & 0 \end{bmatrix} D - \frac{i}{2} D \begin{bmatrix} 0 & q \\ q^* & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4b}$$

os quais, através de (1.1), reproduzem a equação:

$$iq_t + \frac{1}{2} q_{xx} + |q|^2 q = 0 \tag{2.5}$$

Porém, uma nova questão agora surge. Os operadores (2.4) não satisfazem as condições de Lax do teorema 1.1. Podemos então garantir a isospectralidade do operador L_T? No artigo de Tanaka, essa isospectralidade é simplesmente assumida como verdadeira, porém nenhum trabalho nesta direção é mencionado.

Argumentos de análise funcional poderiam ser utilizados no sentido de se obter tal demonstração [14]. Entretanto, ao tentarmos achar relações entre o operador L_T de Tanaka e L_{ZS} de Zakharov-Shabat, o operador

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

surge naturalmente, e seguindo uma idéia apresentada por Flaschka-Newell [9], formulamos uma teoria, a qual denominamos de J-hermitiana, que nos permite demonstrar a isospectralidade do operador L_T apresentado para a resolução da equação de Schrödinger não linear pelo método de espalhamento inverso.

Apresentamos, a seguir, as relações por nós obtidas entre estes vários operadores, e que motivou a demonstração isospectral, que é apresentada no item posterior.

2.2. SOBRE O PAR DE LAX DE ZAKHAROV-SHABAT E O DE TANAKA, E RELAÇÕES ENTRE ELES.

Para podermos encontrar relações entre os dois pares de operadores para a equação de Schrödinger não linear citados até en tão, é necessário que eles reproduzam a mesma equação quando colocados na forma (1.1). Para isto, usaremos a seguinte transformação de coordenadas em (1.5) e (1.6):

$$p = 0 \qquad u = \frac{1}{\sqrt{2}}\, u' \qquad x = \sqrt{2}\; x' \tag{2.7}$$

obtendo então:

$$L = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} D + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{bmatrix} \tag{1.6-a*}$$

$$M = \frac{-i}{2} \begin{bmatrix} |u|^2 & iu^*_x \\ -iu_x & -|u|^2 \end{bmatrix} \tag{1.6-b*}$$

Encontramos assim, uma relação interessante entre (1.6-a*) e L_T (2.4a), que assumiu a forma:

$$J\, S^{-1}\, L\, S = L_T + \lambda J \tag{2.8}$$

onde S é a transformação (2.1) para p = 0, J é o operador (2.6) e $u = -iq$. Observem que aqui o operador J surgiu naturalmente.

Já entre os operadores M's (1.6b*) e (2.4b) não conseguimos encontrar nenhuma relação aparentemente simples. Entretanto, relações curiosas, tais como:

$$L_{T_t} \equiv [\, S^{-1} MS,\, L_T\,] - 2i \begin{bmatrix} 0 & q_x \\ q^*_x & 0 \end{bmatrix} L_T \tag{2.9}$$

nos levaram a seguinte questão: suponhamos que a equação:

$$L_t = [\, M, L\,] \tag{1.1}$$

determine uma única solução M a menos de um operador M' tal que:

$$[M', L] = 0$$

Portanto, existiriam $M'_{ZS} \neq F\mathbb{1} + \mu L_{ZS}$ e $M'_T \neq F\mathbb{1} + \mu L_T$ relacionados com os pares de Lax de Zakharov-Shabat e Tanaka, respectivamente, satisfazendo (2.10)? A resposta é sim, e encontramos

$$M'_{ZS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}(aD^2 - a|u|^2 + F) - 2ia \begin{bmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{bmatrix} D - ia \begin{bmatrix} 0 & u^*_x \\ u_x & 0 \end{bmatrix} + \mu L_{ZS} \qquad (2.11)$$

$$M'_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}(aD^2 + a|q|^2 + F) + a \begin{bmatrix} 0 & -q_x \\ q^*_x & 0 \end{bmatrix} + \mu L_T \qquad (2.12)$$

com a, F, μ constantes reais quaisquer (detalhes desses cálculos estão esboçados no Apêndice A). Note que excluindo $F\mathbb{1} + \mu_1 L_{ZS}$(respectivamente $F\mathbb{1} + \mu_2 L_T$) de (2.11)(respectivamente (2.12), temos a parte "não trivial" dos operadores que satisfazem a (2.10).

Isto nos foi surpreendente, principalmente se observarmos que o operador M do par de Lax nos dá a evolução temporal das autofunções do operador L (ver Lax e Tanaka). Portanto, qual seria o par de Lax que nos permitiria construir uma teoria formalmente correta? Lembremos, entretanto, que todo o formalismo do método de espalhamento inverso é baseado na isospectralidade do operador L. Portanto, seria necessário encontrar entre todos estes operadores, aquele par de Lax que nos garantisse esta propriedade. Assim procedendo, observamos que:

$$J\, L_T\, J = L_T^+ \qquad (2.13)$$

$$-J\, M_T\, J = M_T^+ \qquad (2.14)$$

onde J é o operador idempotente definido em (2.6). Isto nos levou a formular uma teoria que nos permitiu não só garantir a isospectralidade de L_T mas também escolher um único M, tal que esta isospectralidade seja possível, eliminando assim, a ambiguidade que aparentemente havia surgida.

2.3. SOBRE A ISOSPECTRALIDADE DE OPERADORES J-AUTO-ADJUNTOS

Vamos, primeiramente, definir o conceito de J-hermiticidade, onde J é um operador unitário e idempotente (i.e.$J^2 = I$).

Def. 1: Dizemos que:

(i) um operador L é J-auto-adjunto se:

$$L^+ = J\,L\,J$$

(ii) um operador M é J-anti-auto-adjunto se:

$$M^+ = -J\,M\,J$$

(iii) um operador U é J-unitário se $U^+ JU = J$.

Tendo em mãos estas definições, podemos agora citar o seguinte teorema, análogo ao Teorema 1.1:

TEOREMA 2.1: Seja L uma família a 1-parâmetro de operadores J-auto-adjuntos (parametrizados por t) definido densamente sobre um espaço de Hilbert H e continuamente diferenciável com respeito a t. Suponha existir uma família a 1-parâmetro de operadores J-anti-auto-adjuntos M tal que:

(i) $L_t = [\,M,L\,]$

(ii) a equação $\dfrac{dU}{dt} = MU$

tem como solução uma família a 1-parâmetro de operadores sobre H com U(t=0) J-unitário, para todo $t \geq 0$.

Então o espectro de L é invariante.

Antes de passarmos a demonstração deste teorema, vamos discutir a sua importância. Primeiramente, temos assegurado a isospectralidade do operador L de qualquer par de Lax que satisfaça a condição de J-hermiticidade, isospectralidade esta que é essencial para o desenvolvimento do método de espalhamento inverso. Em segundo lugar, este teorema nos dá um critério para escolher, entre os muitos operadores apresentados na seção anterior, aquele par de Lax que nos servirá para desenvolver o formalismo do método de espalhamento inverso para a equação de Schrödinger não linear: o unico par de Lax satisfazendo as condições de J-hermeticidade é aquele apresentado por Tanaka (2.4a-b).

Assim sendo, com a isospectralidade do operador L_T garantida mais a teoria de espalhamento inverso para o mesmo apresentada por Tanaka, temos todos os requisitos formais para estudar a equação de Schrödinger não linear sob o ponto de vista do método de espalhamento inverso, o que falaremos mais no capítulo seguinte. Antes, porém, passemos a demonstração do teorema 2.1. Para isto, é necessário os seguintes lemas:

Lema 2.1: Seja U uma família a 1-parâmetro de operadores limitados a qual satisfaz:

$$\frac{dU}{dt} = MU$$

onde M é um operador J-antissimétrico. Então U é J-unitário para todo t se U(t=0) é J-unitário. Mais ainda, se U é J-unitário, então M é J-antissimétrico.

Dem.: Sejam v_1 e v_2 dois vetores pertencentes ao $D(U) \subset \mathcal{H}$ tal que $Uv \subset D(B)$, e definimos:

$$w_1 = UJv_1$$
$$w_2 = JUv_2 \tag{2.15}$$

Temos que:

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{dU}{dt} Jv_1 = MUJv_1 = Mw_1$$
$$\frac{dw_2}{dt} = J \frac{dU}{dt} v_2 = JMUv_2 = JMJw_2 \tag{2.16}$$

Portanto:

$$\frac{d}{dt}(w_1,w_2) = (Mw_1,w_2) + (w_1,JMJw_2) = (Mw_1,w_2) + (JM^+Jw_1,w_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(w_1,w_2) = (Mw_1,w_2) - (Mw_1,w_2) = 0$$

Mas $(w_1,w_2) = (UJv_1,JUv_2) = (UJv_1,JUv_2)_{t=0} = (v_1,v_2)$

$$\Rightarrow \quad U^+ JUJ = I \Rightarrow U^+ JU = J \Rightarrow U \text{ é J-unitário.}$$

Agora, se U é J-unitário:

$$U^+ JU = J \Rightarrow U_t^+ JU + U^+ JU_t = 0 \Rightarrow U_t = -JU^{+^{-1}} U_t^+ JU$$

Definimos $M = -JU^{+^{-1}} U_t^+J$, e temos que:

$$M^+ = -JU_tU^{-1} J = -JMUU^{-1} J \Rightarrow M^+ = -JMJ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \text{ é J-antissimétrico.}$$

c.q.d.

Lema 2.2: Se dois oparadores L e $\tilde{L}$ são equivalentes, isto é, existe um operador inversível tal que $U^{-1} LU = \tilde{L}$, então L e $\tilde{L}$ têm o mesmo espectro.

Dem.: Seja $\lambda \notin \sigma(\tilde{L})$ (espectro de $\tilde{L}$). Então $\lambda \in \rho(\tilde{L})$ (conjunto resolvente de $\tilde{L}$) e $(\tilde{L}+\lambda)$ tem um inverso $(\tilde{L}+\lambda)^{-1}$ contínuo. Portanto a solução de:

$$(\tilde{L} + \lambda)v = f \tag{2.17}$$

é única, sendo $v = (\tilde{L} + \lambda)^{-1}f$.

Consideremos o problema:

$$(L + \lambda)w = g \tag{2.18}$$

Multiplicando ambos os membros de (2.18) por U^{-1}, ficamos com:

$$U^{-1} Lw + \lambda U^{-1}w = U^{-1}g \Rightarrow \tilde{L}U^{-1}w + \lambda U^{-1}w = U^{-1}g$$

$$\Rightarrow (\tilde{L}+\lambda) U^{-1}w = U^{-1}g \quad \Rightarrow \quad U^{-1}w = (\tilde{L}+\lambda)^{-1} U^{-1}g$$

$$\Rightarrow \quad w = U(\tilde{L}+\lambda)^{-1} U^{-1}g$$

$$\Rightarrow \quad w = (L+\lambda)^{-1}g$$

o que significa que $\lambda \in \rho(L)$. Logo, $\lambda \notin \sigma(L)$.

Repetindo o raciocínio, mostramos que se $\lambda \in \rho(L) \Rightarrow \lambda \in \rho(\tilde{L})$. Isso quer dizer que os conjuntos resolventes de L e $\tilde{L}$ são os mesmos. Consequentemente, os espectros são os mesmos.

c.q.d.

Demonstração do Teorema: Estabeleçamos uma relação de equivalência entre L e um operador $\tilde{L}$ qualquer através do operador J-unitário U, cuja existência é garantida pela hipótese (ii) do Teorema 2.1 e o lema 2.1:

$$\tilde{L} = U^{-1} LU \Rightarrow U\tilde{L} = LU \tag{2.19}$$

Diferenciando em relação a t, temos:

$$U_t\tilde{L} + U\tilde{L}_t = L_tU + LU_t \tag{2.20}$$

Usando a hipótese (ii) e (2.19), temos que:

$$(ML - LM - L_t)U = -U\tilde{L}_t \tag{2.21}$$

Pela hipótese (i), o lado esquerdo desta equação é nulo.

Portanto:

$$\tilde{L}_t = 0,$$

ou seja, $\tilde{L}$ não depende de t, e consequentemente, seu espectro. Pelo Lema 2.2, temos que L tem o mesmo espectro de $\tilde{L}$, ou seja, L é isospectral. c.q.d.

O Lema 2.2 é o equivalente no caso de espaços de dimensão infinita do resultado bem conhecido em álgebra linear de que o espectro de um operador é invariante por transformações de semelhança (não necessariamente unitárias, conceito que está relacionado à definição de uma norma - a transformação de semelhança é um conceito puramente algébrico - veja, e.g.[12].

A hipótese (ii) do teorema foi formulada sem nos preocuparmos com problemas de domínios. A existência de soluções da equação:

$$\frac{dU(t)}{dt} = M(t)\ U(t)$$

é um problema bem estudado em análise funcional. Nos casos de in teresse $U(t=0) = \mathbb{1}$, que é trivialmente J-unitário, existem teoremas na literatura aplicáveis, por exemplo, ao caso de $M(t) = M_T(t)$ (veja [10]). No exemplo referente a equação de Schrödinger não linear desta última referência, M foi, entretanto, tomado como M_{ZS}. Embora o teorema demonstrado em [10] seja também aplicável a esse caso, ele é irrelevante, porque M_{ZS} é anti-autoadjunto; mas ele é essencial ao caso $M = M_T$ (que não é antiautoadjunto) e que é, como vimos, o caso fisicamente relevante.

3. A TEORIA MATEMÁTICA DE ESPALHAMENTO INVERSO APLICADA À EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO LINEAR

Nesse capítulo apresentamos aqueles aspectos da teoria matemática do espalhamento inverso aplicada à equação de Schrödinger não linear desenvolvida por Tanaka (ref. [6]), que utiliza o teorema do capítulo anterior. Nesse desenvolvimento faremos algumas pequenas simplificações no trabalho de Tanaka sugeridas por [5]. É interessante observar que [6] é a única teoria matematicamente rigorosa de espalhamento inverso aplicada à equação de Schrödinger não linear. Como já discutimos as modificações introduzidas por Tanaka [6] no trabalho de Zakharov e Shabat [3] para obter uma teoria matematicamente rigorosa são qualitativamente profundas, estruturalmente mais sérias que as correções feitas por Deift e Trubowitz [5] ao trabalho fundamental de Faddeev [14] sobre a equação de K-dV.

Vamos mostrar primeiramente como obter a função potencial u(x,t) dos dados de espalhamento, utilizando uma equação integral matricial análoga a de Marchenko, e, a seguir, como os dados de espalhamento evoluem no tempo para um potencial satisfazendo a equação de Schrödinger não linear. Na secção seguinte, usaremos estes dados para obter o decaimento temporal das funções u(x,t).

3.1.A. AS FUNÇÕES DE JOST

Seja L_T o operador (2.4a) e o problema de auto-valores:

$$L_T\, y = \tau y\,, \qquad \tau = \xi + i\eta \tag{3.1}$$

onde y é um vetor coluna $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ com norma dada por:

$$\| y \|_C = \max(\sup|y_1|,\ \sup|y_2|)$$

É fácil demonstrar que se y é solução de (3.1) então $y^{\#} = \begin{bmatrix} y_2^* \\ -y_1^* \end{bmatrix}$, onde y_i^* denota o complexo conjugado de y_i, é solução de:

$$L_T\, y^{\#} = \tau^*\, y^{\#} .$$

Igualmente trivial é a proposição de que, se y e z são soluções de (3.1), então o Wronskiano, definido por:

$$W\,[y,z] = y_1 z_2 - y_2 z_1 \tag{3.2}$$

é constante em x!

Vamos apenas considerar soluções de (3.1) para Im $\tau \geq 0$. Soluções análogas podem ser obtidas para Im $\tau \leq 0$.

Analisando o comportamento assintótico de (3.1) (supondo, que $\lim_{x \to \pm\infty} q(x) = 0$), obtemos que: o comportamento assintótico das soluções deve ser:

$$\psi^+ \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\tau x}, \qquad x \to \infty$$

$$\psi^- \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\tau x}, \qquad x \to -\infty$$

sugerindo-nos escrever as soluções de (3.1) na forma:

$$\psi_+(x,\tau) = h_+(x,\tau)\, e^{i\tau x}, \quad \lim_{x\to\infty} h_+(x,\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.3a}$$

$$\psi_-(x,\tau) = h_-(x,\tau)\, e^{-i\tau x}, \quad \lim_{x\to-\infty} h_-(x,\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.3b}$$

Substituindo (3.3) em (3.1), obtemos que as funções $h_{\pm}(x,\tau)$, as quais chamaremos de soluções de Jost, devem satisfazer:

$$h_+'(x,\tau) = \begin{bmatrix} -2i\tau & u \\ -u^* & 0 \end{bmatrix} h_+ \tag{3.4a}$$

$$h_-'(x,\tau) = \begin{bmatrix} 0 & u \\ -u^* & 2i\tau \end{bmatrix} h_- \tag{3.4b}$$

onde $h'(x,\tau) = \dfrac{dh}{dx}(x,\tau)$.

Transformando (3.4) em equações integrais, utilizando Funções de Green, obtemos:

$$h_+(x,\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_x^\infty G_+(x-y)\; U(y)\; h_+(y,\tau)dy, \qquad (3.5a)$$

$$h_-(x,\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_{-\infty}^x G-(x,y)\; U(y)\; h_-(y,\tau)dy, \qquad (3.5b)$$

onde:

$$G_+(x-y) = \begin{bmatrix} -e^{-2i\tau(x-y)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U(g) = \begin{bmatrix} 0 & u(y) \\ u^*(y) & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_-(x-y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e^{+2i\tau(x.y)} \end{bmatrix}$$

Observem que (3.5a-b) são equações do tipo Volterra, que podem ser resolvidas por aproximações sucessivas:

$$h_+(x,\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} h_+^{(n)}\;(x,\tau) \qquad (3.6)$$

onde:

$$h_+^{(n)}(x,\tau) = \int_{x<x_1<\ldots<x_n}^{\infty} dx_1\ldots dx_n\; G_+(x-x_1)\; U(x_1)\ldots G_+(x_{n-1}-x_n)\; U(x_n) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

É clássica a demonstração [5] de que:

$$|h_+^{(n)}| \leq \frac{\left(\int_x^\infty |u(x_1)\ dx_1 \right)^n}{n!} \qquad (3.7)$$

implicando em:

$$|h_+(x,\tau)| \leq e^{\sigma_+(x)} \qquad (3.8a)$$

onde $\sigma_+(x) = \int_x^\infty dx_1\ |u(x_1)|$

Analogamente:

$$|h_-(x,\tau)| \leq e^{\sigma_-(x)} \qquad (3.8b)$$

onde $\sigma_-(x) = \int_{-\infty}^x dx_1\ |u(x_1)|$

Como cada termo da série de $h\underline{+}(x,\tau)$ é contínua para $\text{Im}\ \tau \geq 0$, limitada e analítica para $\text{Im}\ \tau > 0$, concluímos que a série convergirá para uma função a qual é analítica para $\text{Im}\ \tau > 0$ e contínua para $\text{Im}\ \tau \geq 0$.

Suponto ainda que:

$$\sup_{\eta > 0}.\ \left(\int |\ h_{\underline{+}}(\xi + i\eta) - h_{\underline{+}}^o|^2\ d\xi \right)^{1/2} < \infty \qquad (3.9)$$

onde $h_+^o = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $h_-^o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

temos então que $h_{\underline{+}}(x,\tau) - h_{\underline{+}}^o$ são funções de Hardy [11] e poderemos escrevê-las como:

$$h_+(x,\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^\infty \beta_+(x,y)\ e^{2i\tau y}\ dy \qquad (3.10a)$$

$$h_-(x,\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_{-\infty}^0 \beta_-(x,y)\ e^{-2i\tau y}\ dy \qquad (3.10b)$$

Substituindo (3.10a-b) nas equações integrais (3.5a-b) para $h_{\pm}(x,\tau)$, encontramos que:

$$\beta_{+1}(x,y) + \int_x^{x+y} u(z)\, \beta_{+2}(z,x+y-z)\, dz = -u(x+y)$$

$$\beta_{+2}(x,y) - \int_x^{\infty} u^*(z)\, \beta_{+1}(z,y)\, dz = 0 \qquad (3.11)$$

$$\beta_{-1}(x,y) - \int_{-\infty}^{x} u(z)\, \beta_{-2}(z,y)\, dz = 0$$

$$\beta_{-2}(x,y) + \int_{x+y}^{x} u^*(z)\, \beta_{-1}(z,x+y-z)\, dz = -u^*(x+y) \qquad (3.12)$$

de onde vemos facilmente que o potencial u é reproduzido por:

$$u(x) = -\beta_{+1}(x,0) = -\beta^*_{-2}(x,0) \qquad (3.13)$$

Encontramos em Tanaka teoremas (Teo. 1.4) que nos garantem a existência do núcleo $\beta_{\pm}$, bem como nos dá estimativas sobre ele e suas derivadas. Portanto, temos também garantido a existência das soluções de Jost.

3.1.B. DADOS DE ESPALHAMENTO E A EQUAÇÃO INTEGRAL FUNDAMENTAL

No item anterior, introduzimos a função $\beta_{\pm}(x,y)$ a qual está relacionada diretamente com o potencial u(x).

Vamos agora mostrar como obter a função $\beta_{\pm}(x)$ diretamente dos dados de espalhamento, dos quais passamos a definir somente o coeficiente de reflexão, que está relacionado com as soluções sem -sóliton. Para as modificações necessárias para tratar soluções com sóliton, referímo-nos ao artigo de Tanaka [6].

Seja $\tau = \xi$ real. Neste caso, $\psi_+^{\#}$ e ψ_+ são soluções L.I. de (3.1), e seu Wronskiano deve ser constante. Utilizando os comportamentos assintóticos das funções acima, obtemos que:

$$W [\psi_+ , \psi_+^{\#}] = -1, \quad \text{para} \quad \tau = \xi \tag{3.14a}$$

Analogamente:

$$W [\psi_- , \psi_-^{\#}] = -1, \quad \text{para} \quad \tau = \xi \tag{3.14b}$$

Assim sendo, poderemos expandir $\psi_-(x,\xi)$ como uma combinação linear de $\psi_+(x,\xi)$ e $\psi_+^{\#}(x,\xi)$.

$$\psi_-(x,\xi) = a(\xi)\, \psi_+^{\#}(x,\xi) + b(\xi)\, \psi_+(x,\xi) \tag{3.15a}$$

Analogamente:

$$\psi_+(x,\xi) = c(\xi)\, \psi_-^{\#}(x,\xi) + d(\xi)\, \psi_-(x,\xi) \tag{3.15b}$$

Facilmente se demonstra que:

$$a(\xi) = W [\psi_- , \psi_+] \qquad b(\xi) = - W [\psi_- , \psi_+^{\#}] \tag{3.16}$$

$$a(\xi) = - c(\xi) \qquad b(\xi) = d^*(\xi) \tag{3.17}$$

Substituindo (3.15b) em (3.15a) e utilizando as relações (3.17), obtemos:

$$|a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2 = 1 \tag{3.18}$$

Supondo $a(\xi) \neq 0$ para $\xi \in \mathbb{R}$, definimos:

$$r_+(\xi) = \frac{b(\xi)}{a(\xi)} \quad \text{e} \quad r_-(\xi) = \frac{d(\xi)}{c(\xi)} \tag{3.19}$$

os quais serão chamados coeficientes de reflexão.

Observem que estamos considerando apenas o espectro contínuo do operador L_T, já que o espectro discreto está relacionado com soluções do tipo sóliton, os quais não consideraremos aqui.

Encontramos em Tanaka [6] condições que nos permite considerar $r_{\pm}(\xi) \varepsilon L^2$, desde que o potencial $u(x) \varepsilon S$, o espaço das funções C^{∞} rapidamente decrescentes com todas as suas derivadas. Assim sendo, definimos a função:

$$\Omega_{\pm}(x) = \frac{L}{\pi} \int r_{\pm}(\xi)\, e^{\pm 2i\xi x}\, d\xi \tag{3.20}$$

transformada de Fourier de $r_{\pm}(\xi)$ em L^2.

Escrevendo (3.15a) em termos das funções de Jost, chega-se a identidade:

$$a^{-1}(\xi)\; h_-(x,\xi) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ h_+(x,\xi) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^{\#} + r_+(\xi)\, e^{2i\xi x}\, h_+(x,\xi) \tag{3.21}$$

Desprezando o lado esquerdo de (3.21) que está relacionado com o espectro discreto (ver Tanaka), e aplicando a transformada de Fourier ao lado direito, obtemos:

$$\beta_+^{\#}(x,y) + \int_0^{\infty} \Omega_+(x+y+z)\; \beta_+(x,z)dz + \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_+(x+y) \end{bmatrix} = 0 \tag{3.22a}$$

Analogamente, partindo de (3.15b), encontramos:

$$\beta_-^{\#}(x,y) + \int_{-\infty}^{0} \Omega_-(x+y+z)\; \beta_-(x,z)dz + \begin{bmatrix} \Omega_-(x+y) \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{3.22b}$$

As equações (3.22) são conhecidas como equações de Marchenko, restrita aqui apenas a parte referente ao espectro contínuo de L_T.

Encontramos ainda em Tanaka teoremas (teo. 4.2) que nos garantem a existência e unicidade para as soluções de (3.22) para $\Omega(x)$ limitado e integrável.

3.1.C. EVOLUÇÃO TEMPORAL DOS DADOS DE ESPALHAMENTO PARA U(X,T) SATISFAZENDO A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO LINEAR

Seja L_T dependente do tempo através do potencial $u(x,t)$, o qual consideraremos satisfazer a equação de Schrödinger não linear. Portanto, do Capítulo 2 temos que L_T é isospectral.

Derivando a equação (3.1) em relação a t, temos:

$$\frac{dL_T}{dt}\,\psi_{\pm} + L_T\,\frac{d\psi_{\pm}}{dt} = \tau\,\frac{d\psi_{\pm}}{dt}$$

Usando a relação (1.1) onde M é o operador de Tanaka (2.46), temos:

$$L\left(\frac{d\psi_{\pm}}{dt} - M\psi_{\pm}\right) = \tau\left(\frac{d\psi_{\pm}}{dt} - M\psi_{\pm}\right) \tag{3.23}$$

Assumindo a unicidade das funções de Jost, temos que:

$$C\psi_{\pm} = \frac{d\psi_{\pm}}{dt} - M\psi_{\pm}, \tag{3.24}$$

onde C é uma constante qualquer. Usando o comportamento assintótico (3.3), concluímos que:

$$\frac{d\psi_{\pm}(x,t,\tau)}{dt} - M\,{}_{\pm}(x,t,\tau) = \mp\, i\tau^2\psi_{\pm}(x,t,\tau) \tag{3.24a}$$

Diferenciando (3.15a) e usando (3.24a), obtemos:

$$\frac{da(\xi,t)}{dt}\ \psi_{+}^{\#}(x,t,\xi) + \left[\frac{db(\xi,t)}{dt} - 2i\xi^{2}b(\xi,t)\right]\psi_{+}(x,\xi,t) = 0 \tag{3.25}$$

Como $\psi_{+}^{\#}$ e ψ_{+} são L.I. para ξ real, temos:

$$a(\xi,t) = a(\xi,\ 0) \quad \text{e} \quad b(\xi,t) = b(\xi,0)\ e^{2i\xi^{2}t} \tag{3.26}$$

o que nos leva a concluir que:

$$r_{\pm}\ (\xi,t) = r_{\pm}\ (\xi,0)\ e^{\pm 2i\xi^{2}t} \tag{3.27}$$

Mostra-se (ver [6]) que este coeficiente de reflexão dependente do tempo define uma função $\Omega_{\pm}(x,t)$ dada por (3.20) a qual satisfaz (3.22), onde t toma apenas o papel de um parâmetro. E então poderemos obter u(x,t) de uma equação análoga a (3.13), o que encerra o objetivo deste método em questão aplicado a resolução da equação de Schrödinger não linear.

APÊNDICE A

Observando os operadores envolvidos (L_T, M_T, L_{ZS}, M_{ZS}), supusemos ser o operador M' matricial diferencial de 1ª ou 2ª ordem com algumas componentes nulas, e obrigando-o a satisfazer $[L,M'] = 0$, obtivemos condiçẽos sobre as componentes não nulas.

O único operador cujas componentes não se anularam por completo, era da forma:

$$M = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} D^2 + \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix} D + \begin{bmatrix} f & g \\ h & j \end{bmatrix} \qquad (A.1)$$

onde a, b, c, d, f, g, h, j são funções do parâmetro x.

Partindo primeiramente da relação:

$$[L_T, M] = 0$$

obtivemos as seguintes condições sobre as funções acima:

i) $f_x - uh + c\,u^*_x + g\,u^* = 0$

ii) $u\,d = c\,u^*$

iii) $a_x = 0$

iv) $u^*f + h_x - bu^*_{xx} - ju^* = 0$

v) $d_x + 2h = 2bu^*_x$

vi) $u^*a + 2d = bu^*$

vii) $g_x - uj + a\,u_{xx} + fu = 0$

viii) $c_x + 2g + 2a\,u_x = 0$

ix) $2c + a\,u = u\,b$

x) $-u^*g - j_x + du_x + hu = 0$

xi) $b_x = 0$

Resolvendo este sistema, obtemos:

$d = c = 0$ $\qquad f = a|u|^2 + F$

$a = b = \text{constante}$ $\qquad g = -a\, u_x$

$h = au_x^*$ $\qquad j = a|u|^2 + F$

Daí, podemos construir o operador M_T'.

Procedendo de maneira análoga com o operador L_{ZS}, ob_
tivemos as equações:

i) $if_x + u^*h - cu_x - gu = 0$

ii) $u^*d = cu$

iii) $a_x = 0$

iv) $uf + i\,h_x - bu_{xx} - ju = 0$

v) $id_x = 2bu_x$

vi) $ua = bu$

vii) $i\,g_x + u^*j - au^*_{xx} - fu^* = 0$

viii) $ic_x = 2au^*_x$

ix) $u^*b = au^*$

x) $ug + ij_x - du_x^* - hu^* = 0$

xi) $b_x = 0$

De onde encontramos:

$a = b = \text{constante}$ $\qquad f = -a|u|^2 + F$

$c = -2iau^*$ $\qquad g = -ia\,u_x^*$

$d = -2iau$ $\qquad j = -a|u|^2 + F$

$h = -ia\,u_x$

Novamente daí construímos M'_{ZS}.

BIBLIOGRAFIA

[1] *C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura*, Method for solving the Korteweg - de Vries equation. Phys. Rev. Lett, 19, 1095 (1967).

[2] *P.D. Lax*, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Comm. Pure Appl. Math. 21, 467 (1968).

[3] *V.E. Zakharov, A.B. Shabat*, Exact theory of two dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in monlinear media. Soviet Phys. JETP 34,1,63 (1972).

[4] *M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur*, The inverse scattering transform - Fourier Analysis for Nonlinear problems. Studies Appl. Math. 53, 249 (1974).

[5] *P. Deift, E. Trubowitz*, Inverse Scattering on the Line. Comm. Pure Appl. Math. 32, 121 (1979).

[6] *S. Tanaka*, Nonlinear Schrödinger Equation and Modified KdV Equation; Construction of Solutions in Terms of Scattering Data. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 10, 329 (1975).

[7] *R. Jost and W.Kohn*, Phys. Rev. 87, 977 (1952).
______________, Phys. Rev. 88, 382 (1952).

[8] *I.M. Gel'fand, B.M. Levitan*, On the determination of a differential equation from its spectral function. AMST 1, 253 (1955).

[9] *H. Flaschka, A.C. Newell*, Integrable Systems of Nonlinear Evolution Equations, Lect. Notes in Math. 515, 355 (1975).

[10] *H.M.A. de Castro, W.F. Wreszinski*, The isospectral property for a family of non-self-adjoint operators, J.Math. Phys. 24, 2277 (1983).

[11] *H. Dym and H.P. Mckean* - Gaussian processes, function theory and the inverse spectral problem - New York, Academic Press (1976).

[12] *G. Birkhoff and S. Maclane* - A survey of modern algebra - New York, Macmillan (1941).

[13] *W.A. Strauss* - Mathematical Aspects of classical nonlinear field equations. Lect. Notes Phys. 98, 123 (1979).

[14] *L.D. Faddeev*, Properties of the S-matrix of the one dimensional Schrödinger equation. Amer. Math. Soc. Transl. 2 65, 139 (1967).

[15] *T. Kato*, Perturbation Theory for Linear Operators, Theorem 5.35, chap. IV, 244. Springer, Berlin (1966).

[16] *V. Eckhaus, A. Van Harten*, The Inverse Scattering Transformation and the Theory of Solitons - Mathematics Studies 50, North-Holland (1983).

[17] *V.A. Marchenko*, The construction of the potential energy from the phases of the scattered waves. Math. Rev. 17, 740 (1955). Dokl. Akad. Nauk. SSSR 104, 695 (1955).