UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

O Fator de Forma Píon-Núcleon: Simetria Quiral e Quarks Constituintes

Tese de doutorado submetida ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

Iberê Luiz Caldas
Prof. Iberê Luiz Caldas
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Claudio Masumi Maekawa

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Gastão Krein - IFT- UNESP
Prof. Dr. Emerson P. Pato - IF - USP
Profa. Dra. Marina Nielsen - IF- USP
Prof. Dr. Antonio Delfino -UFF-RJ
Profa. Dra. Victoria E. Herscovitz - UF -RS

Orientador: Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta
Co-orientador: Prof. Dr. Gastão Inácio Krein

São Paulo
1996

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Maekawa, Claudio Masumi
O Fator de Forma Pion-Núcleon, Simetria Quiral e Quarks Constituintes. São Paulo, 1996

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Experimental.
Área de Concentração:Física de Partículas Elementares.
Orientador: Prof. Dr. Manuel Roberto Robilotta

Unitermos: 1. Simetria Quiral; 2. Interação NN; 3. Quarks Constituintes; 4. Troca de Quarks; 5. Vértice Pion-Núcleon.

USP/IF/SBI - 12/96

À Célia que preencheu os espaços e me transformou para a nova etapa da minha vida ...

Agradecimentos

Ao Mané pela excelente oportunidade de aprendizado que me mostrou as alguras e alegrias de uma arte tão árdua, porém fascinante.

Ao Gastão pela grande colaboração que muito enriqueceu este aprendizado .

A Oka que tem feito por mim mais do que se pode esperar de uma mãe e ao meu falecido pai que deixou saudades. As minhas irmãs e familiares pelos empurrões que me ajudaram a continuar na luta.

A Dona Lola, minha amiga especial.

Ao meu tio Mário que me ajudou muito na minha formação

A Fatiminha, ao Joel faro fino, ao Arnaldo, a Isabella, ao Jaime, ao Sérgio, ao Dimi, a Sandraly , a Cida e Josuel (Xerox)... enfim, ao pessoal que conviveu e compartilhou comigo esta fase "pressionante".

A FAPESP pelo seu profissionalismo no apoio financeiro.

Ao CNPq pela complementação do apoio financeiro.

Índice

Resumo

Este trabalho analisa de perto os efeitos da simetria quiral no fator de forma pion-núcleon onde o núcleon é estruturado como sendo um aglomerado de quarks constituintes confinados por meio de um potencial harmônico.

O estudo é desenvolvido em etapas: Primeiro estudamos a equivalência entre a hipótese da "supressão de pares" e a simetria quiral num processo simples envolvendo pion, quark e uma partícula escalar. Verificamos que, neste caso, não há equivalência.

A seguir construímos os vértices elementares quark-pion próprios, onde eliminamos a possibilidade de dupla contagem de partículas que existe quando empregamos os estados ligados de quarks para obter o potencial NN. Utilizamos estes vértices para construirmos os diagramas que descrevem a troca de um pion entre quarks de aglomerados distintos. Calculamos as amplitudes e realizamos a redução para o limite não-relativístico obtendo o potencial quark-quark. Aplicamos, então, o potencial quark-quark na equação de Schrödinger que descreve o sistema de seis quarks na aproximação de aglomerados para obtermos o potencial NN no espaço de configuração. O fator de forma é obtido realizando-se a transformada de Fourier do potencial NN e, assim, podemos verificar que a simetria quiral gera correções importantes.

Além desta análise, estudamos o método de Fock-Tani aplicado ao caso onde os quarks trocam um pion entre si.

Abstract

This work analises very closely the chiral symmetry effects in the pion-nucleon form factor where the nucleon is constructed as a cluster of three quarks confined by an harmonic potential. Chiral symmetry shows that the microscopic interactions between quarks and diquarks must be considered.

The study is peformed step by step. First, we study the equivalence between the "pair supression" hypothesis and chiral symmetry in a elementary process with pion, quark and a scalar particle. In this case, our results show that the equivalence does not hold. Second, we obtain the form factor from the nucleon-nucleon potential expression applying a Fourier transformation on the potential in coordinate space. The nucleon potential is obtanied from the diagonalisation of the microscopic quark-quark potential using quark cluster bound states. The quark-quark potential is composed by one pion exchange between two quarks, quarks-diquarks and diquarks-diquarks. The processes are described by diagrams that are used to write relativistics amplitudes, then we reduce these amplitudes to the non relativistic limit to find the potencial. In order to avoid double counting, we extract the particle part from diquark vertices.

We also study the Fock-Tani method that is applied to the case with quark exchanges between clusters.

Capítulo 1

Introdução

Mesmo passadas seis décadas desde 1935 quando Yukawa [Yuk35] propôs o modelo onde uma partícula bosônica, o píon, intermedia a interação forte entre núcleons, esta interação é ainda um grande e fascinante desafio, pois não há uma teoria fechada para descrevê-la. Além disso, o modelo de Yukawa, conhecido hoje por OPEP[1] é o único que encontra uma grande aceitação para descrever a interação na região de longo alcance[2] ($> 2\ fm$).

A descrição da força nuclear entre dois núcleons, na região entre 1 e 2 fm, têm sido vigorosamente estudada desde a proposta original de Yukawa. Dois trabalhos, amplamente citados na literatura recente[3], sumarizam os trabalhos de duas escolas que estudam o problema de maneiras diferentes: o potencial de Paris [La+75], obtido através da teoria de dispersão, que não faz uso de lagrangianas, e o potencial de Bonn [Mac+87], que faz uso da teoria de campos. Por outro lado, para a região de curto alcance ($< 1\ fm$), estes potenciais, como outros tantos [Rei 68,Ris+75, Tou+75, Gro+90], lançam mão de fatores de forma fenomenológicos para levar em conta a estrutura do núcleon. No caso dos potenciais baseados na teoria de campos, os fatores de forma são do tipo monopólo com um parâmetro de corte Λ_n ($n = \pi, \omega, \rho$) ajustado para reproduzir os dados de deslocamentos de fase (phase shifts).

Com o advento da Cromodinâmica Quântica (QCD) [Mut 87] como teoria fundamental das interações fortes, naturalmente impôs-se a questão de descrever as interações entre os

[1]OPEP = One Pion Exchange Potencial.

[2]A divisão da interação em longo, médio e curto alcance foi proposta por Taketani e colaboradores [Tak+51] em 1951.

[3]Uma excelente discussão dos diversos trabalhos que antecederam estes dois se encontra na tese de doutorado de C. A. Rocha [Roc 93].

hádrons com base nesta teoria. A QCD é uma teoria de calibre não-abeliana $SU(3)$, cujos graus de liberdade fundamentais são os quarks (campos de matéria) e os glúons (campos de calibre). O fato de que a QCD apresenta a propriedade de liberdade assintótica, i.e., as interações entre quarks e glúons tornam-se fracas a curtíssimas distâncias, torna possível o emprego de técnicas perturbativas para os cálculos de diversos processos hadrônicos [Bha 88]. Na verdade, a crença de que a QCD seja a teoria fundamental das interações fortes vem, exatamente, do grande sucesso obtido por esta teoria na descrição de fenômenos hadrônicos envolvendo grandes transferências de energia e momento, pois estes processos caracterizam o regime de liberdade assintótica. Por outro lado, o tratamento perturbativo tradicional não pode ser empregado no regime de baixas energias devido a "escravidão infravermelha", a qual acredita-se seja causada pela conspiração entre a natureza intensa da interação e o caráter não-abeliano da QCD.

No regime não-perturbativo espera-se que dois fenômenos proeminentes ocorram: o confinamento dos quarks e glúons no interior dos hádrons e a quebra dinâmica da simetria quiral. O confinamento parece ser necessário devido ao fato de que quarks e glúons não foram "vistos" livres nos detetores, mesmo os dos mais potentes aceleradores de partículas existentes. E a relevância da quebra dinâmica da simetria quiral é devida a bem sucedida fenomenologia das interações hadrônicas a baixas energias. Esta fenomenologia é baseada na hipótese de que a simetria quiral é uma simetria fundamental das interações fortes e que o píon seja o (pseudo-) bóson de Goldstone da quebra espontânea desta simetria. Uma tentativa de se estudar este regime não-pertubativo a partir de primeiros princípios é a QCD na rede, onde os campos são definidos sobre um espaço-tempo discretizado (a rede) [Jaf 88, Rot 92]. Desta forma pode-se realizar os cálculos numéricamente porém, na prática, estes cálculos necessitam de grandes sistemas de computação (supercomputadores) e devido às limitações tecnológicas atuais, os resultados obtidos até o momento não são de uso prático.

Diante deste quadro, o uso de modelos fenomenológicos e métodos analíticos tem representado uma alternativa prática e mais simples para descrever a ainda nebulosa dinâmica não-perturbativa que envolve os quarks e glúons. A baixas energias, estes modelos procuram incorporar as propriedades de invariância quiral e o confinamento dos quarks e glúons. Na linha das descrições relativísticas, temos os modelos de sacola[4] como o MIT bag model [Joh 75] e suas versões quirais; Cloudy bag model [Mil+81, Tar 81] e little bag model [Rho+79]

[4] A sacola nada mais é do que a modelagem das condições de contorno aplicadas sobre a equação de movimento de quarks relativísticos.

que diferem no tamanho da sacola. Há também, os modelos que substituem as sacolas por potenciais relativísticos baseados na equação de Klein-Gordon [Gun+75] e na equação de Dirac [Weis+82]. A grande dificuldade destes modelos está em se eliminar as excitações do centro de massa que produzem linhas espúrias no espectro de massa hadrônico. Estas excitações são muitas vezes eliminadas de forma "ad hoc " nos modelos de sacola e por meio de aproximações nos demais. Existem ainda, as descrições baseadas em sólitons como o modelo de Skyrme [Coh 86, Mei+87, Bat 94], e outros tipos de sólitons [Goe+88, Gol+82]. Devido às complicações inerentes a cada um destes modelos, eles não têm sido muito usados para o estudo das interações entre hádrons [Tsu+93].

Uma descrição bem sucedida e de larga aplicação, tanto na espectroscopia de hádrons como nas interações entre hádrons, é baseada no modelo de quarks não-relativísticos, também conhecido como modelo de quarks constituintes, proposto por Dalitz em 1965 [Dal 65]. Os quarks constituintes diferem dos quarks da QCD (denominados de quarks de corrente) por serem massivos. Neste tipo de modelo, os bárions são compostos de três quarks com massas da ordem de 300 MeV, que estão confinados por uma força de longo alcance de tal maneira que o estado resultante seja um singleto de $SU(3)$ de cor e que interagem entre sí através de forças residuais (i.e. forças relativamente fracas). Os mésons são estados singletos de cor de pares de quark e antiquark massivos também confinados e que interagem residualmente. Originalmente a força residual que tem sido empregada é do tipo troca de um glúon.

O modelo de quarks constituintes acumula sucessos na descrição das propriedades de um hádron único, desde os hádrons constituídos por quarks leves (u, d e s) [Fai+68, Isg+77-79, Fas+83] a hádrons constituídos por quarks mais pesados (c e b) [Eic+78, Eic+80, Qui+77, Mar 80]. Versões semi-relativísticas têm sido aplicadas a mésons do tipo atômico, isto é, mésons formados por um quark pesado e um antiquark leve "orbitando" em torno do quark pesado [Kab+81]. No caso da interação NN, os pioneiros foram Ribeiro [Rib 80], Oka e Yazaki [Yas+79, Yas+81] e Fässler [Fas+83], os quais empregaram a técnica conhecida em Física Nuclear como "Resonating Group Method" (RGM). Neste tipo de cálculo a interação entre os quarks é suposta constituída por um potencial confinante mais um potencial residual que pode ser devido a troca de glúons. A possibilidade de troca de quarks entre os núcleons fornece a repulsão que existe a curtas distâncias no potencial NN. Mais recentemente, uma outra técnica foi empregada por Barnes e Swanson [Swa+92, Swa+93] para estudar a interação hádron-hádron no contexto de modelos de quarks constituintes. Existem também trabalhos que empregam aproximações estáticas ao problema do tipo Born-Oppenheimer ou Heitler-

London. Exemplos recentes deste tipo de cálculo são os de Holinde [Hol 84] e Holinde e Thomas [Hol+93].

Um dos problemas mais fascinantes na fenomenologia de baixas energias da QCD tem sido o entendimento do sucesso do modelo de quarks constituintes sob a luz da lagrangiana da QCD. Como dito antes, os quarks constituintes possuem propriedades diferentes dos quarks de corrente, entre elas a massa. Enquanto a massa dos quarks de corrente é da ordem de 10 MeV (na escala de 1 GeV), a massa dos quarks constituintes é da ordem de 300 MeV. Uma visão que está sendo cada vez mais aceita a respeito da validade do modelo está baseada na hipótese da quebra dinâmica da simetria quiral da QCD. A interação quark-glúon da QCD no regime de baixas energias, caracterizada pela escala de quebra de simetria quiral $\Lambda_\chi \sim 1$ GeV, torna-se extremamente forte e causa a desestabilização do vácuo frente à criação de partículas e anti-partículas. Esta desestabilização do vácuo produz o aparecimento de condensados de quarks e glúons e um quark se propagando neste vácuo adquire uma massa enorme em comparação com sua massa de corrente original. Se, por um momento, supormos que a massa de corrente dos quarks é zero, então a desestablização do vácuo produz quarks de massa da ordem de 300 MeV e, como consequência, a simetria quiral originalmente presente na lagrangiana da QCD é dinâmicamente quebrada. Por outro lado, pelo teorema de Goldstone, devem estar presentes no espectro a estas energias, bósons de massa zero com os números quânticos do gerador da simetria quebrada, a saber, bósons com os números quânticos do píon. Desta maneira, segue-se muito naturalmente a interpretação de que no mundo real, em que as massas dos quarks de corrente não são exatamente iguais a zero, o píon seja o pseudo-bóson de Goldstone da quebra de simetria quiral e por isso sua massa não é exatamente igual a zero mas é muito menor que as massas dos outros hádrons, como por exemplo o méson ρ. A esta escala de energias, o píon pode ser considerado como uma partícula puntual, pois sendo um estado ligado de um quark e um antiquark cujas massas são da ordem de 300 MeV, sua energia de ligação deve ser enorme para que a massa deste estado ligado seja aproximadamente zero. Como a força quark-glúon original foi "gasta" para desestabilizar o vácuo, o que permanece é uma força quark-glúon residual entre os quarks constituíntes. É claro, no entanto, que as interações entre quarks mediadas por píons devem então ser explicitamente considerados, pois os píons fazem parte do espectro de partículas a esta escala. Numa escala de energias ainda mais baixa, caracterizada por $\Lambda_{QCD} \sim 200$ MeV, as forças entre os quarks constituintes se desenvolvem de maneira a mantê-los confinados em estados singletos de cor. Como foi dito acima, esta visão do porquê do sucesso do modelo

de quarks constituintes está sendo considerada muito seriamente, tanto devido ao seu apelo estético como também por estar sendo corroborada por cálculos da QCD na rede [Gock 91] e modelos fenomenológicos do tipo Nambu–Jona-Lasinio estendidos [deRaf+93].

Talvez uma maneira apropriada de implementar a simetria quiral ao nível de quarks e glúons numa escala de energia $\Lambda_{QCD} < \Lambda < \Lambda_\chi$ é através do emprego de lagrangianas efetivas quirais, do mesmo modo que para escalas de energia abaixo da escala de confinamento, lagrangianas efetivas quirais envolvendo núcleons e píons são empregadas para estudar a interação núcleon-núcleon (NN) [Wei 90, Wei 91]. Uma lagrangiana contendo os termos de mais baixa dimensionalidade de uma teoria efetiva envolvendo quarks constituintes, glúons e píons foi apresentada por Manohar e Georgi [Geo+84].

Nos trabalhos pioneiros, e mesmo nos mais recentes, sobre a descrição da interação NN no contexto de modelos de quarks constituintes, não há uma grande preocupação com a simetria quiral. O presente trabalho está preocupado exata ente com este ponto, estudamos o papel da simetria quiral tanto na interação NN como no fator de forma πN. O núcleon é modelado como sendo um aglomerado de quarks confinados por meio de um potencial harmônico. Notamos que os tipos de potenciais usados para descrever o confinamento de quarks têm em comum a sua natureza escalar e nos perguntamos se a simetria quiral não teria algum efeito sobre o sistema potencial escalar+quark+píon.

Realizamos passo a passo o estudo desta questão. Primeiro analisamos o papel da simetria num processo simples: píon+quark→escalar+quark. Construímos os diagramas relevantes neste processo tanto para os casos com simetria quiral, como sem simetria quiral e verificamos que a simetria quiral produz um resultado melhor, pois a amplitude decorrente da simetria é bem menor do que a amplitude sem simetria. Usamos este processo para, também, verificar se a hipótese da "supressão de pares[5]" é equivalente à simetria quiral. Neste caso, a supressão de pares significa desprezar as contribuições oriundas dos antiquarks, e segundo uma corrente de físicos, isto deve ser feito, pois acredita-se que no limite não-relativístico os antiquarks não devem contribuir. De fato, a amplitude da supressão de pares é pequena, mas seu comportamento é muito diferente da amplitude quiral como mostraremos no capítulo 3.

Após estas análises passamos para o estudo do fator de forma πN, onde o núcleon é considerado como sendo constituído por tres quarks. O fator de forma é obtido aplicando-se a transformada de Fourier ao potencial NN obtido no espaço de configuração. O potencial, por sua vez, é obtido a partir da dinâmica de interação de um sistema de seis quarks descrita

[5] O termo "supressão de pares" vem da teoria mesônica para a interação NN, pois tem-se dois antinúcleons.

por uma equação de Schrödinger . O estado de seis quarks é descrito como sendo o produto direto dos estados de tres quarks antisimetrizados e estes estados de tres quarks são tomados como sendo os auto-estados da equação de Schrödinger para o sistema de tres quarks confinados. Escrevemos estes estados separando a coordenada coletiva das coordenadas internas. Supomos, a seguir, que o potencial de interação quark-quark do sistema de seis quarks, seja composto por uma parte confinante de curto alcance e por uma parte de longo alcance. Desta maneira, conseguimos separar o movimento coletivo do sistema de seis quarks da dinâmica interna. A dinâmica interna, por sua vez, pode ser separada em duas dinâmicas internas, cada uma restrita a um sistema de tres quarks, pois supomos que o potencial confinante é de curto alcance. Assim, quando multiplicamos à esquerda a equação de Schrödinger do sistema de seis quarks pela parte interna do estado de seis quarks e comparamos com uma equação para um sistema de dois corpos, podemos identificar o potencial de interação de dois núcleons como sendo o valor esperado do potencial quark-quark entre os estados internos do sistema de 6 quarks.

Para obter o potencial quark-quark construímos os diagramas que descrevem a troca de um píon entre os quarks e a partir deles obtemos as amplitudes relativísticas. Neste ponto, a simetria quiral contribui acrescentando diagramas de interação envolvendo diquarks, onde os diquarks são ligados por um potencial escalar. É neste acréscimo de diagramas que a simetria quiral mostra a sua importância, pois nestes diagramas envolvendo diquarks precisamos descontar a contribuição devida à parte de frequência positiva do campo do quark, uma vez que esta parte já está sendo levada em conta pelos estados de seis quarks da equação de Schrödinger. Descontada esta contribuição, resta a parte de frequência negativa que é devida aos antiquarks. Se seguíssemos a hipótese da supressão de pares estes diagramas envolvendo diquarks deveriam, então, ser desprezados. Mas os nossos resultados mostram que a contribuição destes diagramas é muito importante.

Após obter as amplitudes relativísticas fazemos a redução delas para o limite não-relativístico obtendo o potencial quark-quark que é usado na equação de Schrödinger para o sistema de 6 quarks. O estudo do fator de forma, é feito desprezando-se a possibilidade de haver trocas de constituintes entre os núcleons.

Com o intuíto de avaliar os efeitos da troca de quarks entre os núcleons, os quais, contrariamente aos efeitos descritos acima, são de curto alcance, vamos empregar o formalismo Fock-Tani (FT), o qual foi muito recentemente estendido da física atômica [Gir 71] para a física hadrônica [Had+96]. Este formalismo permite o emprego das técnicas usuais da teoria

quântica de campos, tais como diagramas de Feynman e funções de Green, para sistemas envolvendo partículas compostas. Além do interesse de avaliar o efeito da troca de quarks, nosso intuito ao empregar o formalismo FT nesta tese é mostrar como este pode ser empregado em cálculos mais sofisticados que venham a empregar modelos quirais envolvendo quarks, glúons e píons.

No caso em que há trocas simultâneas de píons e quarks entre núcleons, porém, não podemos extrair um fator de forma πN, pois os vértices envolvidos são do tipo $\pi N q$.

No capítulo 2 discutimos com mais detalhes a simetria quiral estabelecendo a base de conhecimentos aplicados ao longo desta tese. No capítulo 3, está a descrição detalhada do estudo da simetria quiral envolvendo quark, píon e partícula escalar. No capítulo 4 estão os cálculos para o estudo dos efeitos da simetria quiral no fator de forma πN. No capítulo 5 avaliamos a importância da troca de quarks entre núcleons no processo NN usando o formalismo FT. As conclusões e perspectivas futuras aparecem no capítulo 6.

Capítulo 2

Simetria quiral

Tratamos, aqui, da base de conhecimentos necessários ao entendimento da simetria quiral e da construção das lagrangianas efetivas usadas no estudo da interação NN.

2.1 Simetrias

As simetrias dos sistemas físicos determinam fortemente a sua dinâmica. Nos sistemas quânticos as simetrias têm sido a base para novas descobertas e reformulações de conceitos fundamentais, tal como o desenvolvimento da lei de conservação de paridade, que é relacionada à simetria quiral, objeto principal de nosso interesse.

As propriedades de simetria de um sistema estão, em geral, associadas a leis de conservação através do teorema de Noether. De uma forma ampla esse teorema afirma que, se as propriedades de um dado sistema se mantém invariantes sob transformações realizadas nos seus graus de liberdade, então há uma grandeza conservada associada a cada propriedade invariante. O teorema fornece, também, uma prescrição para se obter as grandezas conservadas a partir das transformações.

A ferramenta matemática que permite o estudo das simetrias na física é a chamada teoria de grupos. Um Grupo é uma estrutura algébrica abstrata que , em princípio, não precisa ter nenhuma conexão com a realidade física. Em geral, um grupo é constituído por um conjunto G de elementos quaisquer (números, vetores, matrizes, funções, etc) e por uma operação $\odot$ (soma, multiplicação, etc) que relaciona dois objetos de G e que deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. para dois elementos quaisquer g_1, g_2 de G que não sejam o elemento neutro, existe um

terceiro elemento g_3 de G, distinto dos primeiros, tais que $g_1 \odot g_2 = g_3$.

2. existe um elemento neutro g_0 em G tal que, para qualquer g_n de G, $g_n \odot g_0 = g_0 \odot g_n = g_n$.

3. existe um elemento inverso g_n^{-1} para qualquer g_n de G, tal que $g_n \odot g_n^{-1} = g_n^{-1} \odot g_n = g_0$.

4. a operação $\odot$ é associativa, ou seja, $g_1 \odot (g_2 \odot g_3) = (g_1 \odot g_2) \odot g_3$.

Se, além destas propriedades, a operação $\odot$ for comutativa, o grupo recebe a denominação de grupo abeliano ou comutativo.

No caso da física, se o sistema considerado se mantém simétrico por um conjunto de transformações que satisfazem as propriedades acima, então este conjunto recebe o nome de grupo de simetria. Existem várias classes de grupos, que diferem quanto à natureza dos elementos de G como, por exemplo, aqueles envolvendo as transformações discretas como a paridade e a reversão temporal, ou grupos constituídos por transformações contínuas, como as rotações. Os grupos contínuos e que contêm a identidade são conhecidos como grupo de Lie. No caso da mecânica quântica, as propriedades de hermiticidade e analiticidade são importantes e, por isso, as transformações unitárias têm papel relevante. Estas transformações estão associadas aos grupos de simetria unitária que, simbolicamente, são referidos por U ou SU.

Na teoria quântica de campos empregamos o formalismo lagrangiano para obter uma descrição manifestamente covariante dos sistemas físicos. Nessa abordagem os campos $\phi_r(x)$, que são funções das coordenadas e índices "internos ", representam os graus de liberdade dinâmicos.

A lagrangiana que descreve um dado sistema é dada por:

$$L = \int d\vec{x} \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu \phi_r(x)), \tag{2.1}$$

onde $\mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu \phi_r(x))$ é a densidade lagrangiana e $\partial_\mu \phi_r(x)$ é a derivada do campo. O caráter quântico de campos bosônicos é representado pelas relações de comutação canônicas[1].

$$\begin{aligned} [\phi_r(\vec{x},t), \phi_s(\vec{y},t)] &= 0, \\ [\phi_r(\vec{x},t), \Pi_s(\vec{y},t)] &= i\delta_{rs}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\ [\Pi_r(\vec{x},t), \Pi_s(\vec{y},t)] &= 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

[1]Para campos fermiônicos ao invés de relações de comutação são usadas as relações de anticomutação . Esta diferença em nada altera os resultados formais.

onde $\Pi_r(x)$ é o momento canonicamente conjugado ao campo, definido por:

$$\Pi_r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_r)}. \tag{2.3}$$

A partir do princípio de mínima ação, obtemos as equações da dinâmica do movimento, que nos permitem encontrar a forma explícita dos campos em função das coordenadas. Elas são as equações de Euler-Lagrange, dadas por:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r(x))} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r(x)}. \tag{2.4}$$

No caso das simetrias contínuas, é válido o teorema de Noether, que explora a relação entre uma simetria e a lagrangiana . Uma transformação local e infinitesimal de calibre dos campos $\phi_r(x)$ é dada por:

$$\phi_r(x) \longrightarrow \phi'_r(x) = \phi_r(x) - i\epsilon_\alpha(x) F^\alpha_r(\{\phi\}), \tag{2.5}$$

onde $\epsilon_\alpha(x)$ são funções infinitesimais[2] da variável x e F^α_r é um funcional dos campos. O índice α representa o número de funções independentes.

Na mecânica quântica, as transformações de calibre no espaço de Hilbert são implementadas por operadores unitários denotados por U e expressos como:

$$U = \exp\left(-i\epsilon_\alpha G^\alpha\right), \tag{2.6}$$

onde G^α é um operador hermitiano, denominado gerador da transformação. A transformação dos campos é representada por:

$$\phi'_r(x) = U\phi_r(x)U^{-1}. \tag{2.7}$$

Para transformações infinitesimais, o operador U pode ser escrito como

$$U = 1 - i\epsilon_\alpha G^\alpha + O(\epsilon^2), \tag{2.8}$$

e a transformação dos campos como:

$$\phi'_r(x) = U\phi_r(x)U^{-1} = \phi_r(x) - i\epsilon_\alpha \left[G^\alpha, \phi_r(x)\right] + O(\epsilon^2). \tag{2.9}$$

Assim, podemos escrever:

$$F^\alpha_r(\{\phi\}) = \left[G^\alpha, \phi_r(x)\right]. \tag{2.10}$$

[2]Quando as funções infinitesimais não dependem de x é dito que a transformação é global; se elas dependem de x, a transformação é local.

A variação da densidade lagrangiana decorrente de uma variação $\delta\phi_r$ dos campos é dada por:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\partial_\mu\delta\phi_r. \tag{2.11}$$

Substituindo $\delta\phi_r$ obtido de (2.5) e usando as equações de Euler-Lagrange chega-se a:

$$\delta\mathcal{L} = -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}F_r^\alpha(\{\phi\})\partial_\mu\epsilon_\alpha(x) + \epsilon_\alpha(x)\partial_\mu\left\{-i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}F_r^\alpha(\{\phi\})\right\}. \tag{2.12}$$

Definindo a corrente como sendo:

$$j_\mu^\alpha(x) = -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}F_r^\alpha(\{\phi\}) \tag{2.13}$$

e substituindo em (2.12), reescrevemos:

$$\delta\mathcal{L} = j_\mu^\alpha(x)\partial^\mu\epsilon_\alpha(x) + \epsilon_\alpha(x)\partial^\mu j_\mu^\alpha(x). \tag{2.14}$$

Esta equação fundamental representa o teorema de Noether, que estabelece que se a lagrangiana é invariante por um conjunto de transformações infinitesimais para $\epsilon^\alpha(x) = \epsilon^\alpha =$ constante, então a cada ϵ^α é associada uma corrente $j_\mu^\alpha(x)$, que é conservada, i.e.:

$$\partial^\mu j_\mu^\alpha(x) = 0. \tag{2.15}$$

As cargas generalizadas associadas a estas correntes, dadas por:

$$Q^\alpha = \int j_0^\alpha(x)d^3x, \tag{2.16}$$

são independentes do tempo.

As transformações infinitesimais mais relevantes na física são aquelas onde o funcional F_r^α é uma combinação linear dos campos, da forma:

$$F_r^\alpha(\{\phi\}) = l_{rs}^\alpha\phi_s(x), \tag{2.17}$$

sendo l_{rs}^α constantes. Usando (2.10), podemos escrever a relação de comutação dos geradores das transformações com os campos como:

$$[G^\alpha, \phi_r(x)] = l_{rs}^\alpha\phi_s(x). \tag{2.18}$$

Neste caso, a forma explícita da transformação dos campos é

$$\phi_r(x) \longrightarrow \phi_r'(x) = \phi_r(x) - i\epsilon_\alpha(x)l_{rs}^\alpha\phi_s(x), \tag{2.19}$$

as correntes são dadas por:

$$j_\mu^\alpha(x) = -il_{rs}^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \phi_s(x), \tag{2.20}$$

e as cargas são obtidas através da expressão:

$$Q^\alpha(t) = -il_{rs}^\alpha \int \Pi_r(x)\phi_s(x) d^3x. \tag{2.21}$$

Este resultado permite que se estabeleça uma conexão com a estrutura do grupo de simetria. Para tanto notamos que, usando as relações de comutação (2.2), podemos escrever a relação de comutação das cargas com os campos como

$$[Q^\alpha(t), \phi_r(\vec{x}, t)] = l_{rs}^\alpha \phi_s(\vec{x}, t), \tag{2.22}$$

Comparando com (2.18) podemos identificar $Q^\alpha \equiv G^\alpha$ onde G^α é o gerador do grupo.

2.2 A Simetria Quiral

Dentre as simetrias estudadas na física, a simetria quiral é uma das mais intrigantes e seu papel é fundamental no estudo das interações fortes. Entretanto, ela foi inicialmente desenvolvida no contexto das interações fracas.

O estudo das interações fracas teve início na década de 30 com a investigação dos processos de decaimento beta, que ocorrem em alguns núcleos radiativos e que pareciam violar as leis de conservação de energia e de momento angular. Esse fato levou Pauli, em 1931, a propôr a existência do neutrino. Fermi em 1934, acreditando nesta proposta, formulou, em analogia à interação corrente-fóton ($-ej_\mu A^\mu$) da QED, um modelo para descrever os decaimentos β, baseado numa lagrangiana da forma

$$\mathcal{L}_W = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_\mu(x) l^\mu(x) + h.c., \tag{2.23}$$

onde j_μ e l^μ são, respectivamente, as correntes hadrônica e leptônica, dadas por

$$\begin{aligned} j_\mu &= \bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n, \text{ corrente hadrônica,} \\ l^\mu &= \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_\nu, \text{ corrente leptônica.} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Nestas expressões $\bar{\psi}_p$, ψ_n, $\bar{\psi}_e$ e ψ_ν são os campos do próton, nêutron, elétron e neutrino, enquanto G_F é uma constante de acoplamento.

A lagrangiana (2.23) se tornou a base da teoria das interações fracas. Nas quatro décadas seguintes novos decaimentos por interações fracas foram descobertos[3], que levaram a modificações da lagrangiana original proposta por Fermi. Em 1936, por exemplo, Gamow e Teller [GT 36] propuseram a seguinte generalização para a lagrangiana de Fermi, mantendo a sua natureza escalar para satisfazer as condições de invariancia de Lorentz, reversão temporal e reflexão espacial:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{5} G_i(\bar{\psi}_p \Gamma_i \psi_n) \cdot (\bar{\psi}_e \Gamma_i \psi_\nu) + h.c., \tag{2.25}$$

onde $\Gamma_i = \mathrm{I}$ (escalar), γ_5(pseudo-escalar), γ_μ (vetor), $\sigma_{\mu\nu}$ (tensor) e $\gamma_5\gamma_\mu$ (vetor-axial). Os estudos feitos para se determinar as constantes de acoplamento desse modelo, revelaram que as constantes de acoplamento em processos leptônicos e hadrônicos eram bastante próximas umas das outras, o que trouxe o conceito de universalidade para as interações fracas.

Em meados da década de 50, os decaimentos $\theta \to \pi^+\pi^0$ e $\tau \to \pi^+\pi^+\pi^-$ intrigavam os físicos. Naquela época já se sabia que a paridade intrínseca dos píons é ímpar e a conservação da paridade levaria a um valor par para θ e ímpar para τ, sugerindo que elas seriam partículas distintas. Porém, por outro lado, as suas massas e as suas vidas-médias eram as mesmas. Na época, esse problema era conhecido como paradoxo $\theta - \tau$. O paradoxo foi resolvido em 1956 por Lee e Yang [LY 58], que propuseram uma série de experiências para verificar a conservação da paridade nas interações fracas, sugerindo que a paridade não é conservada. No ano seguinte Wu e colaboradores [Wu 57] confirmaram experimentalmente a não conservação da paridade nas interações fracas.

Para incorporar este novo fato na teoria, foram acrescentados à lagrangiana escalar (2.25) termos que formam pseudo-escalares, da forma

$$G_i'(\bar{\psi}_p \Gamma_i \psi_n) \cdot (\bar{\psi}_e \Gamma_i \gamma_5 \psi_\nu), \tag{2.26}$$

e a lagrangiana fraca completa se tornou

$$\mathcal{L}_w = G_i(\bar{\psi}_p \Gamma_i \psi_n) \cdot (\bar{\psi}_e \Gamma_i \psi_\nu) + G_i'(\bar{\psi}_p \Gamma_i \psi_n) \cdot (\bar{\psi}_e \Gamma_i \gamma_5 \psi_\nu) + h.c. \tag{2.27}$$

O esforço seguinte foi a determinação das diversas constantes de acoplamento. Com o auxílio do estudo das simetrias de carga, paridade e reversão temporal, os observáveis físicos foram expressos como uma combinação das várias constantes de acoplamento. As medidas

[3]Também foram descobertos os decaimentos por interações fortes e as propriedades que os caracterizam como a conservação da estranheza e outros números quânticos que não mencionaremos aqui.

experimentais destes observáveis levaram à forma V - A (Vetor - Axial) para a corrente leptônica, dada por

$$l^\mu = l^\mu_V - l^\mu_A \tag{2.28}$$

onde

$$l^\mu_V = \bar{\psi}_l(x)\gamma^\mu\psi_{\nu_l}(x) \tag{2.29}$$

$$l^\mu_A = \bar{\psi}_l(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi_{\nu_l}(x). \tag{2.30}$$

A componente l^μ_V é chamada de corrente vetorial leptônica e a componente l^μ_A é chamada de corrente axial. Assim, os decaimentos puramente leptônicos passaram a ser descritos pela seguinte lagrangiana universal

$$\mathcal{L}_W = -\frac{G}{\sqrt{2}} l_\mu l^\mu, \tag{2.31}$$

que não preserva a paridade.

Nos decaimentos fracos que envolvem hádrons e léptons, conhecidos como decaimentos semileptônicos, como é o caso do decaimento β, a lagrangiana fraca é dada por

$$\mathcal{L}_W = -\frac{G_V}{\sqrt{2}} j_\lambda l^\lambda, \tag{2.32}$$

onde a corrente hadrônica fraca tem a forma

$$j_\lambda = \bar{\psi}_n(x)\gamma_\lambda(1 - g_A\gamma_5)\psi_p(x), \tag{2.33}$$

com g_A sendo uma constante próxima de 1.

No fim da década de 50, a universalidade das interações fracas devidas às correntes vetoriais levou à hipótese da conservação dessas correntes, conhecida como CVC. Além disso, essas correntes foram associadas à simetria de isospin, cujas cargas $\mathcal{V}^a$ satisfazem a seguinte álgebra:

$$\left[\mathcal{V}^i, \mathcal{V}^j\right] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{V}^k. \tag{2.34}$$

Naquela época, sabia-se que as cargas axiais $\mathcal{A}^a$ se comportavam como um tripleto de isospin e, portanto, satisfaziam as relações de comutação

$$\left[\mathcal{V}^i, \mathcal{A}^j\right] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{A}^k. \tag{2.35}$$

Para fechar a álgebra, Gell-Mann postulou o seguinte comutador

$$\left[\mathcal{A}^i, \mathcal{A}^j\right] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{V}^k. \tag{2.36}$$

Reunindo as cargas vetoriais e axiais num só conjunto, obtém-se a álgebra quiral, que é dada pelos seguintes comutadores:

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{V}^i,\mathcal{V}^j\right] &= i\epsilon_{ijk}\mathcal{V}^k,\\ \left[\mathcal{A}^i,\mathcal{A}^j\right] &= i\epsilon_{ijk}\mathcal{V}^k,\\ \left[\mathcal{V}^i,\mathcal{A}^j\right] &= i\epsilon_{ijk}\mathcal{A}^k.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Esta álgebra é isomórfica à álgebra quiral $SU(2)_L \times SU(2)_R$, onde o índice L (left) indica as cargas levógiras e o R (right) as cargas dextrógiras. Este isomorfismo pode ser visto definindo as seguintes cargas:

$$\mathcal{Q}_L^i = \frac{1}{2}\left(\mathcal{V}^i - \mathcal{A}^i\right), \tag{2.38}$$

$$\mathcal{Q}_R^i = \frac{1}{2}\left(\mathcal{V}^i + \mathcal{A}^i\right). \tag{2.39}$$

que satisfazem as relações de comutação dadas por

$$\left[\mathcal{Q}_L^i,\mathcal{Q}_L^j\right] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{Q}_L^k, \tag{2.40}$$

$$\left[\mathcal{Q}_R^i,\mathcal{Q}_R^j\right] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{Q}_R^k, \tag{2.41}$$

$$\left[\mathcal{Q}_L^i,\mathcal{Q}_R^j\right] = 0. \tag{2.42}$$

No início dos anos 60, considerou-se a possibilidade de que a corrente axial, analogamente à vetorial, fosse conservada. Entretanto percebeu-se que, se isso acontecesse, o píon não poderia decair. Por isso, foi feita a hipótese de conservação parcial da corrente axial (PCAC), expressa como

$$\partial^\mu \vec{A}_\mu = f_\pi m_\pi^2 \vec{\pi}, \tag{2.43}$$

onde $\vec{A}_\mu$ é a corrente axial, $\vec{\pi}$ é o campo do píon, f_π e m_π são, respectivamente, a sua constante de decaimento e a sua massa.

Neste trabalho as transformações isovetoriais (U_V) e axiais (U_A) de um campo são implementadas pelos operadores unitários

$$U_V = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\mathcal{V}}}, \tag{2.44}$$

$$U_A = e^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{\mathcal{A}}}. \tag{2.45}$$

Assim, se os parâmetros forem infinitesimais, obtemos as seguintes expressões para as transformações de um campo ψ

$$\psi \rightarrow U\psi U^{-1} = \tag{2.46}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1 - i\lambda_a \mathcal{O}^a)\,\psi\,(1 + i\lambda_a \mathcal{O}^a) + \ldots \\
&= \psi - i\lambda_a\,[\mathcal{O}^a, \psi] + \ldots,
\end{aligned} \tag{2.47}
$$

onde $\vec{\mathcal{O}}$ é igual a $\vec{\mathcal{V}}$ ou $\vec{\mathcal{A}}$. Em geral representamos a variação do campo como

$$
\delta\psi = -i\lambda_a\,[\mathcal{O}^a, \psi]\,. \tag{2.48}
$$

2.3 Lagrangianas Quirais

No modelo adotado neste estudo, supomos que os núcleons sejam formados por quarks constituintes q, confinados por um campo escalar S, que também podem interagir por meio de trocas de píons. Por isso, a lagrangiana efetiva geral para este sistema tem a seguinte estrutura:

$$
\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{SB} + \mathcal{L}_{INT}, \tag{2.49}
$$

onde $\mathcal{L}_S$ e $\mathcal{L}_q$ representam as componentes para campos escalares e quarks; os termos $\mathcal{L}_M$ e $\mathcal{L}_{SB}$ correspondem à parte piônica, enquanto $\mathcal{L}_{INT}$ indica os vários termos de interação. A simetria quiral é um ingrediente fundamental das interações fortes e, por isso, vamos supor que todos os termos dessa lagrangiana, exceto $\mathcal{L}_{SB}$, sejam invariantes quirais. O termo $\mathcal{L}_{SB}$ representa a quebra de simetria e é responsável pelo aparecimento da massa do píon. Em geral, existem várias maneiras de se implementar a construção da parte simétrica da lagrangiana, por meio de realizações que podem ser lineares ou não lineares. Descrevemos, nesta seção, essas duas possibilidades de realização da simetria.

No nosso trabalho, o confinamento é atribuído a um campo escalar S, invariante quiral, cujas transformações vetorial e axial são dadas por:

$$
\delta^V S = 0, \tag{2.50}
$$

$$
\delta^A S = 0. \tag{2.51}
$$

A lagrangiana desse campo tem a forma:

$$
\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}(\partial_\mu S \partial^\mu S - m_S^2 S^2) - U(S) \tag{2.52}
$$

onde m_s é a massa do campo e $U\,(S)$ é um termo de auto-interação associado ao confinamento.

2.3.1 Píons e simetria quiral

Os píons formam um tripleto no espaço de isospin e, por isso, as componentes do seu campo $\vec{\pi}$ satisfazem a relação de comutação

$$\left[\mathcal{V}^i, \pi^j\right] = i\epsilon_{ijk}\pi^k. \tag{2.53}$$

Uma das características importantes da simetria quiral no setor piônico é que ela exige a existência de uma função escalar, necessária para que as relações de comutação internas entre as cargas do grupo $SU(2) \times SU(2)$ e o campo do píon sejam consistentes com as identidades de Jacobi. Tomemos, por exemplo, as relações de comutação

$$[\mathcal{A}_a, [\mathcal{A}_b, \pi_c]] + [\mathcal{A}_b, [\pi_c, \mathcal{A}_a]] = [[\mathcal{A}_a, \mathcal{A}_b], \pi_c]. \tag{2.54}$$

Usando as equações (2.37) e (2.53), obtemos

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_a, [\mathcal{A}_b, \pi_c]] + [\mathcal{A}_b, [\pi_c, \mathcal{A}_a]] &= i\epsilon_{abd}\left[\mathcal{V}_d, \pi_c\right] = i\epsilon_{abd}i\epsilon_{dce}\pi_e = \\ &= \delta_{bc}\pi_a - \delta_{ac}\pi_b. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Desta identidade, resulta que o comutador da carga axial com o campo do píon não pode se anular. Por outro lado, do ponto de vista da paridade, o comutador deve ser um escalar:

$$[\mathcal{A}_a, \pi_b] \rightarrow \text{função escalar}. \tag{2.56}$$

Historicamente, foram consideradas duas possibilidades para essa função escalar. Na primeira, ela é associada a um grau de liberdade independente, representado por um campo escalar e isocalar, denominado σ. Neste caso temos uma realização linear da simetria, que corresponde ao modelo conhecido como σ linear.

A segunda possibilidade consiste em se construir a função escalar a partir do próprio campo do píon, o que dá origem às realizações não lineares.

Neste trabalho, iniciamos a nossa discussão com o modelo σ-linear [Alf+73], desenvolvido no início da década de 60.

2.3.2 O modelo σ linear

Neste modelo, a realização da simetria quiral para o setor mesônico é feita acrescentando-se, às três componentes do campo do píon, um campo escalar e isoescalar, denominado σ. Para esse campo convenciona-se o seguinte comutador:

$$[\mathcal{A}_a, \pi_b] = i\delta_{ab}\sigma. \tag{2.57}$$

Usando novamente as identidades de Jacobi, obtemos:

$$[\mathcal{A}_a, \sigma] = -i\pi_a. \tag{2.58}$$

Usando os resultados da seção 2.2, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\delta^V \vec{\pi} &= -(\vec{\alpha} \wedge \vec{\pi}), && (2.59)\\
\delta^V \sigma &= 0, && (2.60)\\
\delta^A \vec{\pi} &= (\vec{\beta}\sigma), && (2.61)\\
\delta^A \sigma &= -\vec{\beta} \cdot \vec{\pi}, && (2.62)
\end{aligned}$$

Do ponto de vista teórico, esta realização é fundamental, pois corresponde à representação $(1/2, 1/2)$ do grupo $SU(2) \times SU(2)$.

Estes resultados indicam que quaisquer funções escalares, construídas com o quadrivetor euclidiano $(\sigma, \vec{\pi})$, serão invariantes quirais. Assim, a lagrangiana mesônica simétrica mais simples, envolvendo campos auto-interagentes, tem a forma:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi}) - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2. \tag{2.63}$$

A simetria dessa lagrangiana corresponde, pelo teorema de Noether, a uma corrente axial conservada que impede o decaimento do píon. A forma mais simples de se obter tal decaimento é através da hipótese de PCAC, onde a divergência da corrente axial é dada por

$$\partial \vec{A} = f_\pi m_\pi^2 \vec{\pi}. \tag{2.64}$$

Para que isto aconteça, a lagrangiana deve conter um termo de quebra de simetria, dado por [Gas+69]:

$$\mathcal{L}^{SB} = f_\pi m_\pi^2 \sigma. \tag{2.65}$$

Assim a lagrangiana do setor mesônico passa a ser:

$$\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{SB} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi}) - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 + f_\pi m_\pi^2 \sigma. \tag{2.66}$$

As equações de movimento para o píon e o sigma são dadas por

$$\begin{aligned}
(\partial^2 + \mu^2)\vec{\pi} &= \lambda^2(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)\vec{\pi}, && (2.67)\\
(\partial^2 + \mu^2)\sigma &= \lambda^2(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)\sigma + f_\pi m_\pi^2. && (2.68)
\end{aligned}$$

A lagrangiana (2.66) pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = T - V(\sigma, \vec{\pi}), \tag{2.69}$$

onde T é a componente cinética e $V(\sigma, \vec{\pi})$ é um potencial, dado por

$$V(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 - f_\pi m_\pi^2 \sigma, \tag{2.70}$$

que não contém derivadas dos campos. O termo de energia cinética é sempre positivo. Por isso, para se obter a configuração de menor energia, basta que se minimize o potencial, o que corresponde a

$$\frac{\partial V}{\partial \pi_i} = 0, \tag{2.71}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = 0. \tag{2.72}$$

Estas condições correspondem às equações de movimento (2.67-2.68) para campos independentes de x^μ, e podem ser escritas como

$$\lambda^2 \left[\alpha^2 - \sigma^2 - \vec{\pi}^2\right] \vec{\pi} = 0, \tag{2.73}$$

$$\lambda^2 \left[\alpha^2 - \sigma^2 - \vec{\pi}^2\right] \sigma - f_\pi m_\pi^2 = 0, \tag{2.74}$$

onde $\alpha^2 = \mu^2/\lambda^2$.

Este sistema de equações pode ter dois conjuntos de soluções, ilustrados nos gráficos da figura (2.1), onde desenhamos apenas as projeções nos eixos π e σ. No caso $\alpha^2 < 0$, mostrado na figura a, podemos ver que o mínimo ocorre para $\sigma = \vec{\pi} = 0$. No caso $\alpha^2 > 0$, os mínimos de $V(\sigma, \vec{\pi})$ ocorrem nos pontos $\pi = 0$ e $\sigma = v$, onde v é uma constante que satisfaz a equação

$$\lambda^2 \left(\alpha^2 v - v^3\right) = f_\pi m_\pi^2 \tag{2.75}$$

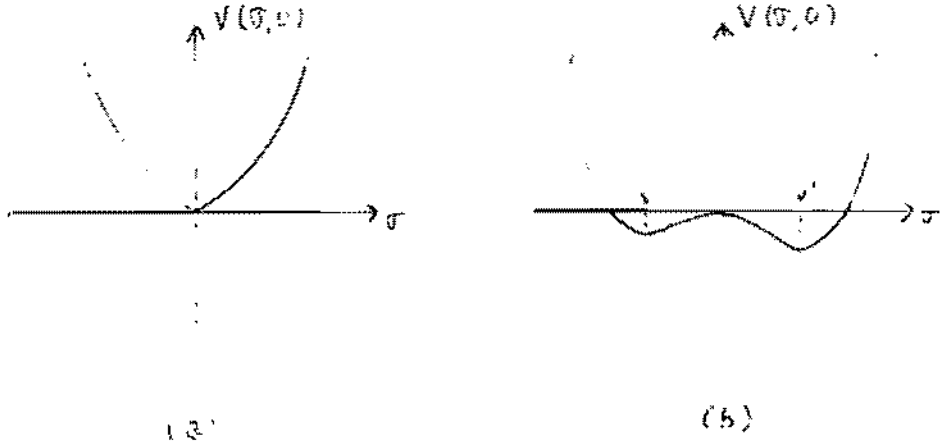
Resolvendo esta equação de forma aproximada e levando em conta que $f_\pi m_\pi^2$ é pequeno, temos duas soluções:

$$v \cong -\alpha - \frac{f_\pi m_\pi^2}{2\alpha^2\lambda^2}, \tag{2.76}$$

$$v' \cong \alpha - \frac{f_\pi m_\pi^2}{2\alpha^2\lambda^2}, \tag{2.77}$$

Como, para $\alpha > 0$, $v < v'$, temos um mínimo do potencial no ponto $\sigma = v'$ mostrado na figura b. É importante notar, entretanto, que a separação entre os estados nos pontos v e v' é pequena, sendo que eles se tornam degenerados quando $m_\pi = 0$.

Figura 2.1: Gráficos do potencial $V(\sigma, \pi)$.



Nessa situação, os mínimos de $V(\sigma, \vec{\pi})$ estariam sobre a circunferência $\sigma^2 + \pi^2 = \alpha^2$, dando origem ao chapéu mexicano, assim chamado devido à forma do gráfico em três dimensões. Neste caso, teríamos um número infinito de mínimos degenerados. Voltando ao caso massivo, notamos que, se α^2 for negativo, o modelo prevê que as massas do quarteto $(\sigma, \vec{\pi})$ serão degeneradas, um fato sem evidências experimentais. Por outro lado, quando α^2 é positivo, o modelo prevê que a constante v também é o valor esperado no vácuo do campo σ, entendendo-se como vácuo, o estado de menor energia do sistema. Neste estado não há partículas (quanta). Por isso é que se estuda a configuração de menor energia do sistema tratando-se os campos como graus de liberdade clássicos. Os efeitos quânticos são incorporados supondo-se que o campo σ seja composto por uma componente clássica v e por uma quântica σ':

$$\sigma = v + \sigma'. \tag{2.78}$$

Assim, a lagrangiana, enfatizando as componentes quânticas, é escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \vec{\pi})^2 - (\mu^2 - \lambda^2 v^2)\vec{\pi}^2\right] + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \sigma')^2 - (\mu^2 - 3\lambda^2 v^2)\sigma'^2\right] + \\ &+ \frac{\lambda^2}{4}(\vec{\pi}^2 + \sigma'^2)^2 + \lambda^2 v \sigma'(\vec{\pi}^2 + \sigma'^2) - \left(\mu^2 v - \lambda^2 v^3 - f_\pi m_\pi^2\right)\sigma'. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Usando-se a condição (2.75), o termo linear em σ' se anula, e obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \vec{\pi})^2 - m_\pi^2 \vec{\pi}^2\right] + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \sigma')^2 - m_\sigma^2 \sigma'^2\right] + \\ &+ \frac{\lambda^2}{4}(\vec{\pi}^2 + \sigma'^2)^2 + \lambda^2 v \sigma'(\vec{\pi}^2 + \sigma'^2). \end{aligned} \tag{2.80}$$

onde o píon e o sigma têm massas diferentes, dadas por:

$$m_\pi^2 = \mu^2 - \lambda^2 v^2, \tag{2.81}$$

$$m_\sigma^2 = \mu^2 - 3\lambda^2 v^2. \tag{2.82}$$

Desta lagrangiana deriva-se a seguinte expressão para a divergência da corrente axial:

$$\partial \vec{A} = v m_\pi^2 \vec{\pi}. \tag{2.83}$$

Usando a hipótese de PCAC, identificamos:

$$v = f_\pi. \tag{2.84}$$

Das equações (2.81), (2.82) e (2.84) podemos obter os parâmetros do modelo como funções dos "observáveis" f_π, m_π e m_σ:

$$\mu^2 = \frac{1}{2}\left(3m_\pi^2 - m_\sigma^2\right), \tag{2.85}$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2f_\pi^2}\left(m_\pi^2 - m_\sigma^2\right). \tag{2.86}$$

Para o setor dos quarks, temos as seguintes transformações para os seus campos, denotados por q:

$$\delta^V q = i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}q, \tag{2.87}$$

$$\delta^V \bar{q} = -i\bar{q}\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}, \tag{2.88}$$

$$\delta^A q = -i\vec{\beta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\gamma_5 q, \tag{2.89}$$

$$\delta^A \bar{q} = -i\bar{q}\gamma_5\vec{\beta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}. \tag{2.90}$$

A lagrangiana para este setor é escrita como:

$$\mathcal{L}_q = \bar{q} i\partial\!\!\!/ q. \tag{2.91}$$

Ela não contém um termo de massa, visto que uma densidade da forma $m\bar{q}q$ quebra a simetria quiral.

O termo de interação invariante méson-quark é dado por:

$$\mathcal{L}_{Mq} = -g_{\pi q}\bar{q}(\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\gamma_5)q, \tag{2.92}$$

onde $g_{\pi q}$ é a constante de acoplamento méson-quark e $\vec{\tau}$ o operador de isospin.

Aplicando a eq.(2.78) neste termo, obtemos:

$$\mathcal{L}_{Mq} = -m\bar{q}q - g_{\pi q}\bar{q}(\sigma' + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\gamma_5)q, \tag{2.93}$$

onde a massa do quark é dada por:

$$m = g_{\pi q} f_\pi. \tag{2.94}$$

O outro conjunto possível de interações para este sistema é o que descreve o acoplamento méson-quark-campo escalar, dado pela densidade:

$$\mathcal{L}_{MqS} = -g_S S\bar{q}(\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\gamma_5)q. \tag{2.95}$$

Usando novamente a eq. (2.78) podemos notar que esta expressão dá origem a uma interação entre os campos escalares e os quarks, além de termos de contato envolvendo vários bósons simultaneamente. Para tanto, escrevemos:

$$\mathcal{L}_{MqS} = -g_S f_\pi S\bar{q}q - g_S S\bar{q}\left(\sigma' + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\gamma_5\right)q. \tag{2.96}$$

Nas aplicações posteriores, é conveniente usarmos a definição:

$$g_{Sq} = g_S f_\pi. \tag{2.97}$$

Reunindo os resultados das equações (2.52), (2.80), (2.91), (2.93) e (2.96) temos a lagrangiana quiral:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu S\partial^\mu S - m_S^2 S^2) - U(S)\right] + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\vec{\pi})^2 - m_\pi^2\vec{\pi}^2\right] + \\ & + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\sigma')^2 - m_\sigma^2\sigma'^2\right] + \frac{(m_\pi^2 - m_\sigma^2)}{2{f_\pi}^2}\left[\frac{1}{4}(\vec{\pi}^2 + \sigma'^2)^2 + f_\pi\sigma'(\vec{\pi}^2 + \sigma'^2)\right] + \\ & + \left[\bar{q}i\partial\!\!\!/ q - m\bar{q}q\right] - \left[g_{\pi q}\bar{q}(\sigma' + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\gamma_5)q + g_{Sq}S\bar{q}q + g_S S\bar{q}(\sigma' + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\gamma_5)q\right].\end{aligned} \tag{2.98}$$

A realização linear leva a um modelo de lagrangiana fenomenologicamente simples e renormalizável, uma vez que não apresenta acoplamentos derivativos. Entretanto, ela prevê a existência da partícula sigma, não confirmada até hoje.[4]

[4] É conveniente notar, entretanto, que existem atualmente trabalhos afirmando que a partícula σ tem base empírica [Tör95].

2.3.3 As realizações não-lineares

Seguimos de perto, nesta seção, os trabalhos feitos por Weinberg em 1967 e 1968 [Wei 68], onde ele apresenta as realizações não lineares da simetria quiral. Segundo ele, o modelo linear esconde o fato de que os píons moles são emitidos em aglomerados por acoplamentos derivativos das linhas externas [Wei 66]. Para se implementar esta idéia partindo do modelo linear, é necessário realizar uma rotação quiral dependente do campo, que elimina o acoplamento não derivativo entre o σ e o $\vec{\pi}$ e troca-o pelo acoplamento derivativo não-linear do vetor de rotação quiral, identificado como um novo campo piônico. Além disso, a realização não linear trata a simetria quiral de forma nova e diversa das outras simetrias, pois a lagrangiana é construída para ser invariante sob transformações quirais que são expressas por matrizes de isospin e campos piônicos, e não em termos de matrizes de isospin e γ_5.

Ainda segundo Weinberg, a realização não linear não está presa a hipóteses sobre como os hádrons estão agrupados nos multipletos quirais. No caso do modelo σ linear, supõe-se que os núcleons estejam na representação linear $(1/2, 0) + (0, 1/2)$ de $SU(2) \times SU(2)$ e que o quociente g_A/g_V das constantes de acoplamento fraco não renormalizadas seja igual à unidade, ao passo que na realização não linear esta razão pode assumir qualquer valor.

A desvantagem da forma não-linear é o seu caráter não-renormalizável. Entretanto, Weinberg interpreta as lagrangianas como modelos efetivos muito úteis, que revelam o conteúdo dinâmico das interações e que reproduzem os resultados da álgebra de correntes de forma simples, bastando levar em conta apenas os diagramas em árvore. Na década de 70, Weinberg percebeu que se podia ir além da aproximação em árvore para processos envolvendo píons moles, pelo menos no setor puramente piônico [Wei 79]. Neste caso, as divergências ultravioletas oriundas dos loops piônicos podem ser absorvidas através da redefinição das constantes de acoplamento da lagrangiana, desde que se incluam todos os termos consistentes com a simetria quiral e as demais simetrias desejadas.

Nesta seção, denotamos o campo do píon por $\vec{\phi}$ e o campo do quark por ψ, para distinguí-los dos campos da realização linear, e os detalhes dos cálculos estão descritos em [Rob 89].

Em seu trabalho, Weinberg preocupa-se em formular uma lei de transformação a mais geral possível para o píon , sem detalhar a forma do campo que o descreve. Propõe, para a transformação axial, a seguinte forma geral:

$$[\mathcal{A}_a, \phi_b] = i f_{ab}(\vec{\phi}), \tag{2.99}$$

onde $f_{ab}(\vec{\phi})$ é uma função arbitrária do campo piônico.

Já a transformação de isospin têm a forma usual, dada por:

$$[\mathcal{V}_a, \phi_b] = i\epsilon_{abc}\phi_c. \tag{2.100}$$

Para determinar os vínculos impostos pela simetria à função $f_{ab}(\vec{\phi})$, Weinberg utiliza duas identidades de Jacobi, que relacionam de forma geral os comutadores da álgebra, e extrai a informação de que $f_{ab}(\vec{\phi})$ é um isotensor. Por ser uma função par, $f_{ab}(\vec{\phi})$ deve ser proporcional a um número par de campos do píon. Assim a forma isotensorial mais geral para $f_{ab}(\vec{\phi})$ é:

$$f_{ab}(\vec{\phi}) = \delta_{ab} f(\phi^2) + g(\phi^2)\phi_a\phi_b, \tag{2.101}$$

onde $f(\phi^2)$ e $g(\phi^2)$ são funções genéricas do campo do píon.

Aplicando (2.101) novamente nas mesmas identidades de Jacobi, ele obtém que $g(\phi^2)$ se relaciona com $f(\phi^2)$ pela expressão:

$$g(\phi^2) = \frac{1 + 2f(\phi^2)f'(\phi^2)}{f(\phi^2) - 2\phi^2 f'(\phi^2)}, \tag{2.102}$$

onde $f'(\phi^2) = \frac{\partial f(\phi^2)}{\partial \phi^2}$.

Desta forma, as transformações vetoriais e axiais do campo piônico são dadas por:

$$\delta^V \vec{\phi} = -\vec{\alpha} \wedge \vec{\phi}, \tag{2.103}$$

$$\delta^A \vec{\phi} = \vec{\beta} f(\phi^2) + \frac{1 + 2f(\phi^2)f'(\phi^2)}{f(\phi^2) - 2\phi^2 f'(\phi^2)} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{\phi}\right) \vec{\phi}. \tag{2.104}$$

Para outros campos, denotados por ψ, Weinberg também constrói transformações axiais genéricas. Aplicando a sua discussão ao nosso caso, identificamos ψ com o campo do quark constituinte. O comutador da carga vetorial com o campo ψ é dado pela forma usual:

$$[\mathcal{V}_b, \psi] = -\frac{\tau_b}{2}\psi, \tag{2.105}$$

Para a carga axial, Weinberg sugere a seguinte expressão:

$$[\mathcal{A}_b, \psi] = -v_{bc}\left(\phi^2\right)\frac{\tau_c}{2}\psi, \tag{2.106}$$

onde $v_{bc}\left(\phi^2\right)$ é uma função do campo do píon .

As identidades de Jacobi determinam que $v\left(\phi^2\right)$ tenha a forma de um isotensor de paridade negativa. Portanto $v\left(\phi^2\right)$ deve ser linear no campo do píon, e podemos escrever:

$$v_{bc}\left(\phi^2\right) = \epsilon_{bcd}\phi_d v\left(\phi^2\right), \tag{2.107}$$

onde $v(\phi^2)$ é uma função isoescalar. Usando esta expressão novamente nas identidades de Jacobi e com auxílio da função $f_{ab}(\vec{\phi})$, obtemos:

$$v\left(\phi^2\right) = \frac{1}{f(\phi^2) + \sqrt{f^2(\phi^2) + \phi^2}}. \tag{2.108}$$

Assim, as transformações vetoriais e axiais dos campos ψ e $\bar{\psi}$ são:

$$\delta^{\mathcal{V}}\psi = \frac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}\psi, \tag{2.109}$$

$$\delta^{\mathcal{V}}\bar{\psi} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}, \tag{2.110}$$

$$\delta^{\mathcal{A}}\psi = iv\vec{\beta}\cdot(\frac{\vec{\tau}}{2}\wedge\vec{\phi})\psi, \tag{2.111}$$

$$\delta^{\mathcal{A}}\bar{\psi} = -i\bar{\psi}v\vec{\beta}\cdot(\frac{\vec{\tau}}{2}\wedge\vec{\phi}). \tag{2.112}$$

Nas realizações não lineares usam-se derivadas covariantes, para a construção de componentes isoescalares invariantes quirais. Estas derivadas covariantes transformam-se como campos ψ e são construídas de tal forma a satisfazer as relações de comutação com as cargas vetoriais e axiais apropriadas.

No caso da derivada covariante do campo piônico $D^\mu\vec{\phi}$, ela deve satisfazer as seguintes relações, válidas para campos de spin 1:

$$[\mathcal{V}_a, D^\mu\phi_b] = i\epsilon_{abc}D^\mu\phi_c, \tag{2.113}$$

$$[\mathcal{A}_a, D^\mu\phi_b] = i\epsilon_{bdc}v_{ac}D^\mu\phi_d. \tag{2.114}$$

Usando a covariância de Lorentz, podemos parametrizar $D^\mu\vec{\phi}$ como:

$$D^\mu\phi_a = d_{ab}\left(\phi^2\right)\partial^\mu\phi_b. \tag{2.115}$$

As relações de comutação (2.113) e (2.114) permitem-nos escrever:

$$d_{ab}\left(\phi^2\right) \propto \frac{1}{\sqrt{f^2(\phi^2)+\phi^2}}\delta_{ab} - 2\frac{(f'(\phi^2)+v(\phi^2)/2)}{f^2(\phi^2)+\phi^2}\phi_a\phi_b. \tag{2.116}$$

Portanto, a derivada covariante do campo piônico $D^\mu\vec{\phi}$ tem a forma:

$$D^\mu\vec{\phi} = K\left\{\frac{\partial^\mu\vec{\phi}}{\sqrt{f^2(\phi^2)+\phi^2}} - \frac{(f'(\phi^2)+v(\phi^2)/2)}{f^2(\phi^2)+\phi^2}\partial^\mu\phi^2\vec{\phi}\right\}, \tag{2.117}$$

As transformações vetoriais e axiais de $D^\mu\vec{\phi}$ são dadas por:

$$\delta^V D^\mu\vec{\phi} = -\vec{\alpha}\wedge D^\mu\vec{\phi}. \tag{2.118}$$

$$\delta^A D^\mu\vec{\phi} = v(\phi^2)(\vec{\beta}\wedge\vec{\phi})\wedge D^\mu\vec{\phi}. \tag{2.119}$$

Nesta abordagem, o isoescalar invariante quiral mais simples formado a partir de $D^\mu\vec{\phi}$ é

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}D_\mu\vec{\phi}D^\mu\vec{\phi}. \tag{2.120}$$

É preciso, agora, determinar o valor de K. Para isso expande-se (2.120) na variável ϕ^2, em torno de $\phi^2 = 0$, e impõe-se que o termo de primeira ordem possua a normalização usual 1/2, o que leva a

$$K = f(0). \tag{2.121}$$

Estuda-se, então, o termo de quebra de simetria, que é formado por qualquer isoescalar construído a partir do campo do píon

$$\mathcal{L}_{SB} = h\left(\phi^2\right), \tag{2.122}$$

onde $h(\phi^2)$ é uma função qualquer de ϕ^2; com este termo a divergência da corrente axial não se anula. Expandindo a expressão da divergência em torno de $\phi^2 = 0$, usando o fato de que

$$\left.\frac{\delta h(\phi^2)}{\delta\phi^2}\right|_{\phi^2=0} = -\frac{m_\pi^2}{2}, \tag{2.123}$$

e impondo a condição de PCAC, obtemos $f(0) = f_\pi$. Assim, concluímos que

$$K = f_\pi. \tag{2.124}$$

Para a construção das derivadas covariantes do campo ψ dos quarks, temos o seguinte comutador com a carga axial:

$$[A_b, D^\mu\psi] = -v_{bc}(\phi^2)\frac{\tau_c}{2}D^\mu\psi, \tag{2.125}$$

e a transformação axial é dada por:

$$\delta^A D^\mu\psi = iv(\phi^2)\vec{\beta}\cdot(\frac{\vec{\tau}}{2}\wedge\vec{\phi})D^\mu\psi. \tag{2.126}$$

Na parametrização de $D^\mu\psi$ supomos que tanto ψ como $\vec{\phi}$ possam carregar o índice de Lorentz. Assim, temos:

$$D^\mu\psi = \partial^\mu\psi + M_1\partial^\mu\phi^2\psi + iM_2\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot(\vec{\phi}\times\partial^\mu\vec{\phi})\psi. \tag{2.127}$$

Segundo Weinberg, é necessário apenas obter uma solução particular para esta equação. Ele tomou $M_1 = 0$ e impôs que (2.126) seja satisfeita, obtendo a seguinte forma para a derivada covariante:

$$D^\mu\psi = \left[\partial^\mu + \frac{iv(\phi^2)}{\sqrt{f^2(\phi^2)+\phi^2}}\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot(\vec{\phi}\times\partial^\mu\vec{\phi})\right]\psi. \tag{2.128}$$

Deste modo, as transformações desta derivada covariante são:

$$\delta^V D^\mu\psi = i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}D^\mu\psi, \tag{2.129}$$

$$\delta^A D^\mu\psi = iv\vec{\beta}\cdot(\frac{\vec{\tau}}{2}\wedge\vec{\phi})D^\mu\psi. \tag{2.130}$$

A lagrangiana simétrica dos quarks é dada por:

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}i\gamma_\mu D^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \tag{2.131}$$

onde m é a massa do férmion.

O termo de interação méson-quark, invariante sob as transformações não lineares, envolve um acoplamento pseudo-vetorial e é dado por

$$\mathcal{L}_{\pi q} = \frac{g_{\pi q}}{2m_q}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\vec{\tau}\psi\cdot D^\mu\vec{\phi}. \tag{2.132}$$

Para o acoplamento entre o campo escalar e o quark, adotamos:

$$\mathcal{L}_{Sq} = -g_{Sq}S\bar{\psi}\psi \tag{2.133}$$

onde g_{Sq} é a constante de acoplamento.

Neste modelo, portanto, a lagrangiana simétrica completa tem a forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu S\partial^\mu S - m_S^2S^2\right) - U(S)\right] + \left[\frac{1}{2}D_\mu\vec{\phi}D^\mu\vec{\phi}\right] \\ &+ \left[i\bar{\psi}\gamma_\mu D^\mu\psi - m_q\bar{\psi}\psi\right] + \left[\frac{g_{\pi q}}{2m_q}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\vec{\tau}\psi D^\mu\vec{\phi} - g_{Sq}S\bar{\psi}\psi\right].\end{aligned} \tag{2.134}$$

2.3.4 O modelo σ não-linear

Uma das conclusões importantes apresentadas por Weinberg em seu trabalho de 1968 é que as previsões obtidas a partir das lagrangianas não-lineares devem ser independentes da forma assumida pela função arbitrária $f(\phi^2)$. Por isso, nas aplicações pode-se escolher uma forma simples para esta função.

Realizando-se a seguinte escolha para a função arbitrária $f(\phi^2)$:

$$f(\phi^2) = \sqrt{f_\pi^2 - \phi^2}, \tag{2.135}$$

o setor dos píons desta realização passa a ter uma semelhança formal com o setor mesônico da realização linear.

Com esta escolha, as transformações vetoriais e axiais têm as seguintes formas:

$$\begin{aligned}
\delta^V \vec{\phi} &= -\vec{\alpha} \wedge \vec{\phi}, && (2.136)\\
\delta^V f(\phi^2) &= 0, && (2.137)\\
\delta^A \vec{\phi} &= \vec{\beta} f(\phi^2), && (2.138)\\
\delta^A f(\phi^2) &= -\vec{\beta} \cdot \vec{\phi}. && (2.139)
\end{aligned}$$

Comparando-se com as equações (2.59-2.62), pode-se ver que a função $f(\phi^2)$ nas equações (2.137 - 2.139) se comporta como o campo σ do modelo linear. Por esta semelhança, denominamos a realização com $f(\phi^2)$ dada por (2.135) de modelo σ não-linear. Por isso, neste caso, escrevemos:

$$\sigma \equiv f(\phi^2) = \sqrt{f_\pi^2 - \phi^2}. \tag{2.140}$$

Usando esta função na expressão (2.117) temos:

$$D^\mu \vec{\phi} = \partial^\mu \vec{\phi} - \frac{1}{\sigma + f_\pi} \partial^\mu \sigma \vec{\phi}. \tag{2.141}$$

Substituindo (2.141) em (2.120) obtemos:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\mu \vec{\phi} \partial^\mu \vec{\phi} + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma \right\}. \tag{2.142}$$

A forma desta expressão é idêntica ao termo cinético da lagrangiana do setor píon-sigma no modelo linear embora, neste caso, o campo σ não represente um grau de liberdade independente e não descreva uma partícula física. Do ponto de vista matemático, σ representa um vínculo entre os graus de liberdade piônicos.

Para o termo de quebra de simetria, escolhemos a mesma forma do modelo linear, dado pela equação (2.71):

$$\mathcal{L}^{SB} = f_\pi m_\pi^2 \sigma. \tag{2.143}$$

Assim a lagrangiana mesônica tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\mu \vec{\phi} \partial^\mu \vec{\phi} + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma \right\} + f_\pi m_\pi^2 \sigma. \tag{2.144}$$

Para introduzir os quarks no modelo σ não-linear, notamos que a substituição de (2.135) nas equações da seção anterior produzem as seguintes transformações para o seu campo:

$$\delta^V\psi = \frac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}\psi, \tag{2.145}$$

$$\delta^V\bar{\psi} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}, \tag{2.146}$$

$$\delta^A\psi = iv\vec{\beta}\cdot\left(\frac{\vec{\tau}}{2}\wedge\vec{\phi}\right)\psi, \tag{2.147}$$

$$\delta^A\bar{\psi} = -i\bar{\psi}v\vec{\beta}\cdot\left(\frac{\vec{\tau}}{2}\wedge\vec{\phi}\right), \tag{2.148}$$

onde v agora é dado por:

$$v\left(\phi^2\right) = \frac{1}{f_\pi+\sigma}. \tag{2.149}$$

A derivada covariante é:

$$D^\mu\psi = \left[\partial^\mu + \frac{iv}{f_\pi}\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\left(\vec{\phi}\wedge\partial^\mu\vec{\phi}\right)\right]\psi \tag{2.150}$$

e as suas transformações têm a forma:

$$\delta^V D^\mu\psi = i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}D^\mu\psi, \tag{2.151}$$

$$\delta^A D^\mu\psi = iv\vec{\beta}\cdot\left(\frac{\vec{\tau}}{2}\wedge\vec{\phi}\right)D^\mu\psi. \tag{2.152}$$

Usando (2.132) e (2.133), temos a seguinte lagrangiana completa:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu S\partial^\mu S - m_S^2S^2\right) - U(S)\right] + \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\phi}\partial^\mu\vec{\phi} + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + f_\pi m_\pi^2\sigma\right] + \\ &+ \left[\bar{\psi}i\gamma_\mu D^\mu\psi - m_q\bar{\psi}\psi\right] + \left[\frac{g_{\pi q}}{2m_q}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\vec{\tau}\psi\ D^\mu\vec{\phi} - g_{Sq}S\bar{\psi}\psi\right].\end{aligned} \tag{2.153}$$

2.3.5 O modelo híbrido

Existe uma outra possibilidade para se introduzir os quarks no modelo σ-não linear, pois podemos também adotar transformações lineares para os férmions. Neste caso, o campo do quark é denotado por q, e suas transformações são totalmente análogas às do modelo σ-linear. Elas são:

$$\delta^V q = i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}q, \tag{2.154}$$

$$\delta^V \bar{q} = -i\bar{q}\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}, \tag{2.155}$$

$$\delta^A q = -i\vec{\beta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\gamma_5 q, \tag{2.156}$$

$$\delta^A \bar{q} = -i\bar{q}\gamma_5\vec{\beta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}. \tag{2.157}$$

Como já vimos anteriormente, a lagrangiana para os quarks, invariante por essas transformações, é:

$$\mathcal{L} = i\bar{q}\partial\!\!\!/ q. \tag{2.158}$$

Como no caso do modelo σ-linear, não é possível a construção de um termo de massa invariante quiral. Os termos de interação que não violam a simetria são do tipo pseudoescalar, dados por:

$$\mathcal{L}_{PS} = -g_{\pi q}\bar{q}(\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\gamma_5)q - g_S\bar{q}S(\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\gamma_5)q. \tag{2.159}$$

Reunindo todas as componentes, chegamos à seguinte lagrangiana do modelo híbrido:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu S\partial^\mu S - m_S^2 S^2\right) - U(S)\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\vec{\phi}\partial^\mu\vec{\phi} + \partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma\right) + f_\pi m_\pi^2\sigma\right] + \\ &+ [\bar{q}i\partial\!\!\!/ q] - \left[g_{\pi q}\bar{q}(\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\gamma_5)q + g_S\bar{q}S(\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\gamma_5)q\right].\end{aligned} \tag{2.160}$$

Expandindo σ, temos:

$$\sigma = \sqrt{f_\pi^2 - \vec{\phi}^2} \sim f_\pi - \frac{\phi^2}{2f_\pi} + ... \tag{2.161}$$

Considerando apenas o primeiro termo da expansão (2.161) na lagrangiana (2.160) teremos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu S\partial^\mu S - m_S^2 S^2\right) - U(S)\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\vec{\phi}\partial^\mu\vec{\phi} - m_\pi^2\phi^2\right) + f_\pi^2 m_\pi^2\right] - \\ &+ [i\bar{q}\partial\!\!\!/ q - m_q\bar{q}q] - \left[g_{\pi q}\bar{q}(i\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\gamma_5)q + g_{Sq}\bar{q}Sq + g_S S\bar{q}(i\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\gamma_5)q\right] + ...,\end{aligned} \tag{2.162}$$

onde identificamos, como na equação (2.97) $g_{Sq} = g_S f_\pi$, a constante de acoplamento escalar-quark e $g_{\pi q} f_\pi = m_q$, a massa do quark.

2.3.6 Fórmulas

Para comodidade do leitor, coletamos nesta seção as equações mais importantes apresentadas nas seções anteriores:

<u>Modelo σ linear</u>.

$$\delta^V \vec{\pi} = -(\vec{\alpha} \wedge \vec{\pi}), \tag{2.163}$$
$$\delta^V \sigma = 0, \tag{2.164}$$
$$\delta^A \vec{\pi} = (\vec{\beta}\sigma), \tag{2.165}$$
$$\delta^A \sigma = -\vec{\beta} \cdot \vec{\pi}, \tag{2.166}$$

$$\delta^V q = i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} q, \tag{2.167}$$
$$\delta^V \bar{q} = -i\bar{q}\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}, \tag{2.168}$$
$$\delta^A q = -i\vec{\beta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}\gamma_5 q, \tag{2.169}$$
$$\delta^A \bar{q} = -i\bar{q}\gamma_5\vec{\beta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}. \tag{2.170}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu S \partial^\mu S - m_S^2 S^2) - U(S)\right] + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \vec{\pi})^2 - m_\pi^2 \vec{\pi}^2\right] + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \sigma')^2 - m_\sigma^2 \sigma'^2\right] \\ & + \frac{(m_\pi^2 - m_\sigma^2)}{2{f_\pi}^2}\left[\frac{1}{4}(\vec{\pi}^2 + \sigma'^2)^2 + f_\pi \sigma'(\vec{\pi}^2 + \sigma'^2)\right] + \left[\bar{q}i\partial\!\!\!/ q - m\bar{q}q\right] \\ & - \left[g_{\pi q}\bar{q}(\sigma' + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\gamma_5)q + g_{sq} S\bar{q}q + g_S S\bar{q}(\sigma' + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\gamma_5)q\right].\end{aligned} \tag{2.171}$$

<u>Modelo σ não-linear</u>.

$$\delta^V \vec{\phi} = -\vec{\alpha} \wedge \vec{\phi}, \tag{2.172}$$
$$\delta^V \sigma(\phi^2) = 0, \tag{2.173}$$
$$\delta^A \vec{\phi} = \vec{\beta}\sigma(\phi^2), \tag{2.174}$$
$$\delta^A \sigma(\phi^2) = -\vec{\beta} \cdot \vec{\phi}, \tag{2.175}$$

$$\delta^V \psi = \frac{i}{2}\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}\psi, \tag{2.176}$$
$$\delta^V \bar{\psi} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}, \tag{2.177}$$
$$\delta^A \psi = iv\vec{\beta} \cdot \left(\frac{\vec{\tau}}{2} \wedge \vec{\phi}\right)\psi, \tag{2.178}$$
$$\delta^A \bar{\psi} = -i\bar{\psi}v\vec{\beta} \cdot \left(\frac{\vec{\tau}}{2} \wedge \vec{\phi}\right), \tag{2.179}$$

onde

$$\sigma = \sqrt{f_\pi^2 - \phi^2}, \tag{2.180}$$

$$v = \frac{1}{f_\pi + \sigma}. \tag{2.181}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu S\partial^\mu S - m_S^2 S^2\right) - U(S)\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\vec{\phi}\partial^\mu\vec{\phi} + \partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma\right) + f_\pi m_\pi^2\sigma\right] + \\ &+ \left[\bar{\psi}i\gamma_\mu D^\mu\psi - m_q\bar{\psi}\psi\right] + \left[\frac{g_{\pi q}}{2m_q}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\vec{\tau}\psi D^\mu\vec{\phi} - g_{Sq}S\bar{\psi}\psi\right].\end{aligned} \tag{2.182}$$

<u>Modelo híbrido</u>.

$$\delta^V\vec{\phi} = -\vec{\alpha}\wedge\vec{\phi}, \tag{2.183}$$

$$\delta^V\sigma(\phi^2) = 0, \tag{2.184}$$

$$\delta^A\vec{\phi} = \vec{\beta}\sigma(\phi^2), \tag{2.185}$$

$$\delta^A\sigma(\phi^2) = -\vec{\beta}\cdot\vec{\phi}. \tag{2.186}$$

$$\delta^V q = i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}q, \tag{2.187}$$

$$\delta^V\bar{q} = -i\bar{q}\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}, \tag{2.188}$$

$$\delta^A q = -i\vec{\beta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\gamma_5 q, \tag{2.189}$$

$$\delta^A\bar{q} = -i\bar{q}\gamma_5\vec{\beta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}. \tag{2.190}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu S\partial^\mu S - m_S^2 S^2\right) - U(S)\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\vec{\phi}\partial^\mu\vec{\phi} - m_\pi^2\vec{\phi}^2\right) + f_\pi^2 m_\pi^2\right] - \\ &+ \left[\bar{q}i\partial\!\!\!/ q - m_q\bar{q}q\right] - \left[g_{\pi q}\bar{q}(i\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\gamma_5)q + g_{Sq}\bar{q}Sq + g_S S\bar{q}(i\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\gamma_5)q\right] + \ldots,\end{aligned} \tag{2.191}$$

<u>Constantes</u>.

$$g_{Sq} = g_s f_\pi, \tag{2.192}$$

$$m_q = g_{\pi q} f_\pi, \tag{2.193}$$

$$g_S = \frac{g_{Sq}g_{\pi q}}{m_q}. \tag{2.194}$$

A partir destas lagrangianas, obtemos as regras de Feynman no espaço dos momentos, necessárias aos cálculos das próximas seções . Essas regras são mostradas na figura a seguir.

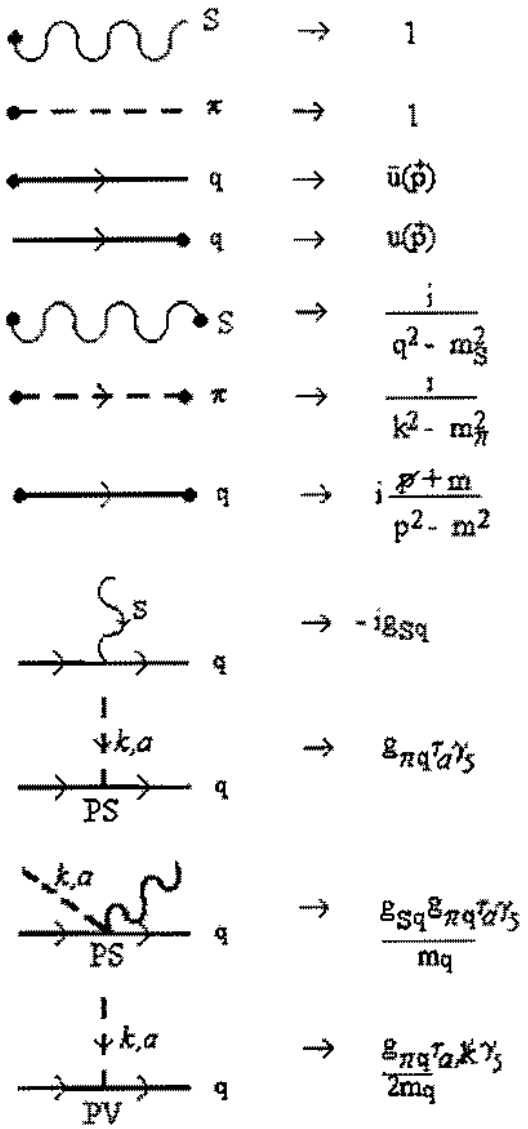


Figura 2.2: Regras de Feynman

Capítulo 3

O Modelo

3.1 O Núcleon.

Acredita-se, atualmente, que o núcleon seja uma estrutura constituída de três quarks que, em princípio, deveria ser tratada no contexto da teoria fundamental, a Cromodinâmica Quântica (QCD). A QCD é uma teoria inspirada na Eletrodinâmica Quântica (QED) já que, em ambas, os constituintes básicos são férmions de spin 1/2, que interagem por meio de bósons de calibre sem massa.

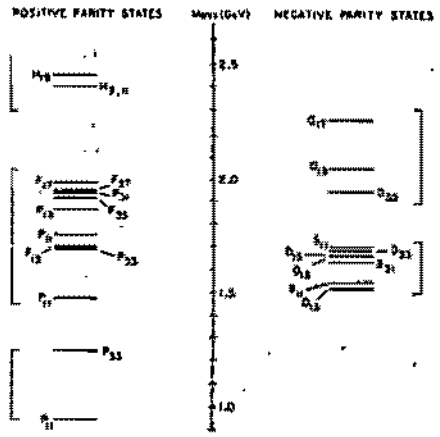
Na QED o quantum do campo é o fóton enquanto na QCD o quantum é denominado glúon, numa alusão à palavra inglesa "glue", que significa cola, pois uma das suas características marcantes é produzir uma atração muito forte, que chega a inibir a existência de quarks isolados. Uma diferença muito importante entre as duas teorias é que, na QED, os fótons não interagem entre si, enquanto na QCD os bósons de calibre são carregados e auto-interagentes. Esse fato, que decorre do caráter não abeliano da teoria, dificulta a aplicação de cálculos perturbativos a processos envolvendo quarks e glúons em baixas energias, pois neste regime as interações mais importantes são devidas a trocas de muitos glúons. Já no regime de altas energias (GeV), a propriedade da liberdade assintótica [Bha 88] permite a aplicação da teoria de pertubação pois os quarks, a pequenas distâncias, se comportam como se estivessem fracamente ligados e os processos envolvendo poucos glúons são dominantes.

A dificuldade de tratamento dos problemas em baixas energias levou ao uso de modelos fenomenológicos para descrever os quarks confinados que formam os hádrons. Um dos modelos propostos é conhecido como o modelo de sacola do MIT [Joh 75], onde quarks sem massa são confinados numa região delimitada por uma superfície imaginária, a sacola, que é

descrita por meio de condições de contorno aplicadas à equação de Dirac. O desenvolvimento desta proposta resultou em modelos de sacolas quirais [Bha 88], onde os hádrons são vistos como sendo constituídos por um caroço, descrito pela sacola, envolvido por uma nuvem de píons. Há também, o modelo proposto por Weise [Weis+82], baseado na equação de Dirac, onde um potencial confinante substitui as condições de contorno das sacolas e trata, de forma aproximada, o problema do movimento do centro de massa.

Outros modelos empregam os quarks constituintes, que diferem dos quarks da QCD por serem massivos, incorporando efeitos do vácuo. Um dos primeiros modelos desse tipo foi proposto na década de 60, por Dalitz [Dal 65]. Ele é baseado em quarks constituintes, não relativísticos, onde o confinamento é feito por meio de um potencial harmônico. Neste modelo o núcleon é descrito como sendo o estado fundamental do aglomerado de três quarks, acoplados de modo a se ter $J^P = \frac{1}{2}^+$ e $I = \frac{1}{2}$. Dalitz interpretou as ressonâncias N^*, descobertas naquele período, como excitações desse sistema de três quarks, como sugere a forma do espectro de massas mostrado na figura (3.1)[Dal 65][1] . Nesse gráfico, a linha assinalada por P_{11} representa o núcleon N(939) no seu estado fundamental e a linha P_{33} é a ressonância Δ (1236)[2].

Figura 3.1: Espectro de massa do núcleon.



Seguindo a tradição da física nuclear, o modelo de Dalitz empregou o estado fundamental do oscilador harmônico para descrever a parte espacial do estado do sistema de três quarks que constitui o núcleon. As partes de spin, isospin e cor, foram obtidas a partir do octeto com

[1] O espectro é resultado da organização das ressonâncias observadas nos experimentos de espalhamento πN.

[2] O número entre parênteses indica a massa média em MeV. Na notação P_{11}, por exemplo, o primeiro índice indica duas vezes o número quântico de isospin (2I) e o segundo, duas vezes o número de spin (2S). A letra P indica que o estado ocorre no espalhamento πN, com $l = 1$, no referencial de laboratório.

$J^P = \frac{1}{2}^+$, da representação 56 do grupo de simetria SU(6). Posteriormente, Faiman e Hendry [Fai+68] usaram o modelo para calcular as diversas larguras de decaimentos, supondo que estes ocorrem quando um quark emite um píon ou fóton. e obtiveram uma boa concordância com os dados experimentais.

O potencial harmônico também foi empregado na década de 70, por Isgur e Karl [Isg+77]. Usando as funções de onda harmônicas para diagonalizar as amplitudes de decaimento das interações hiperfinas, eles obtiveram uma excelente concordância com os dados experimentais para a parte do espectro de estados com paridade negativa. Posteriormente, estenderam estes cálculos para o espectro de estados de paridade positiva, percebendo que o potencial harmônico precisava ser ligeiramente modificado [Isg+78]. Fizeram, também, cálculos para os bárions com estranheza, supondo que a massa de um dos quarks fosse diferente da massa dos outros dois [Isg+79]. Eles obtiveram resultados significativos na reprodução dos dados experimentais indicando que, apesar de ser um modelo efetivo não-relativístico, o baseado no potencial harmônico é adequado ao estudo das propriedades hadrônicas.

Neste trabalho usamos o potencial harmônico para simular os efeitos não perturbativos da interação entre os quarks, pois ele tem a vantagem de ser simples. Além disso, ele permite a separação entre os movimentos do centro de massa e relativo dos quarks já que, ao se fixar o movimento coletivo, eliminam-se os estados espúrios provenientes das excitações do centro de massa. Nos modelos relativísticos este problema é mais complicado de ser resolvido [Weis+82, Bha 88].

Para formular o nosso problema, é preciso levar em consideração que o conceito de potencial não revela, em geral, o conteúdo dinâmico de uma dada interação. Para que possamos ver este conteúdo, precisamos entrar no contexto da teoria de campos. Supomos, por isso, que as interações entre os quarks sejam devidas a um campo escalar S, que simula interações não perturbativas, tais como as devidas a "glue-balls". Essas interações escalares são adequadas apenas ao tratamento dos estados fundamentais do sistema de três quarks, o núcleon; se quisermos que o espaço de Hilbert contenha outros estados, tais como a delta, é necessária a inclusão de interações entre os quarks que dependam do spin, que podem ser devidas a trocas de glúons [Isg+77] ou píons [Fas+83].

3.1.1 Potencial escalar

Nesta seção, abordamos o problema da relação entre os campos escalares S e o potencial harmônico. Como mencionamos anteriormente, a interação harmônica corresponde a

um efeito não perturbativo. Entretanto, para estabelecer a linguagem do problema, consideramos, inicialmente, a interação perturbativa entre dois quarks, devida à troca de uma partícula escalar de massa m_S. Este processo está representado na figura (3.2), onde também estão indicados os momentos das partículas.

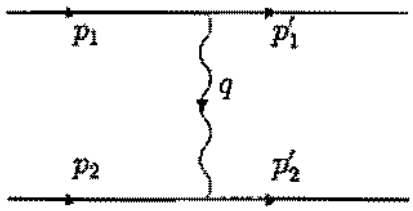


Figura 3.2: Diagrama da troca de um escalar entre quarks.

A conservação de quadrimomentos nos vértices superior e inferior, nos fornecem, respectivamente, as seguintes relações:

$$p_1^\mu = p_1^{\mu\prime} + q^\mu, \tag{3.1}$$

$$p_2^\mu = p_2^{\mu\prime} - q^\mu, \tag{3.2}$$

compatíveis com a conservação global:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1^{\mu\prime} + p_2^{\mu\prime}. \tag{3.3}$$

No sistema do centro de massa temos que:

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = -\vec{p}, \tag{3.4}$$

$$\vec{p}_1{}' = -\vec{p}_2{}' = -\vec{p}\,', \tag{3.5}$$

$$E_1 = E_2 = E_1' = E_2' = E. \tag{3.6}$$

Assim, podemos escrever:

$$p_1 = (E, \vec{p}), \tag{3.7}$$

$$p_2 = (E, -\vec{p}), \tag{3.8}$$

$$p_1' = (E, \vec{p}\,'), \tag{3.9}$$

$$p_2' = (E, -\vec{p}\,'), \tag{3.10}$$

$$q = (0, \vec{p} - \vec{p}\,'). \tag{3.11}$$

Usando as regras de Feynman da seção (2.3.3), obtemos a seguinte amplitude a partir do diagrama:

$$iT_S = -ig_{Sq}^2 \left[\bar{u}\left(\vec{p}\,'\right) u\left(\vec{p}\right)\right]^{(1)} \frac{1}{q^2 - m_S^2} \left[\bar{u}\left(\vec{p}\,'\right) u\left(\vec{p}\right)\right]^{(2)}. \tag{3.12}$$

As formas explícitas dos spinores, dadas no apêndice A, permitem-nos escrever:

$$\bar{u}\left(\vec{p}\,'\right) u\left(\vec{p}\right) = \frac{1}{E+m}\left[(E+m)^2 - \vec{p}\,' \cdot \vec{p} - i\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p}\,' \wedge \vec{p}\right)\right]. \tag{3.13}$$

Para quarks não-relativísticos, temos:

$$\bar{u}\left(\vec{p}\,'\right) u\left(\vec{p}\right) \cong 2m. \tag{3.14}$$

O fator $2m$ nesta expressão é um remanescente da normalização relativística covariante e, por isso, ele é eliminado na normalização não-relativística. Assim, no centro de massa e no limite não-relativístico, a amplitude é dada por:

$$T_S \underset{n.r.}{\longrightarrow} t_S = \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}^{\,2} + m_S^2}. \tag{3.15}$$

No contexto da teoria quântica de campos, a obtenção de uma amplitude de transição, não requer o uso do conceito de potencial, que é secundário. Por outro lado, se quisermos obter o mesmo resultado no contexto da mecânica quântica não-relativística, onde o conceito de potencial é prioritário, é preciso estabelecer uma regra de equivalência entre os dois formalismos. No presente caso, tal regra é obtida impondo-se que a amplitude de espalhamento, em primeira aproximação de Born, dada pelo valor esperado do potencial $\hat{V}_S$, calculado nos estados incidentes e emergentes do sistema NN, seja relacionada a t_S por:

$$\left\langle \vec{p}_1{}'\vec{p}_2{}' \middle| \hat{V}_S \middle| \vec{p}_1\vec{p}_2 \right\rangle \equiv -(2\pi)^3\, \delta\left(\vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' - \vec{p}_1 - \vec{p}_2\right) t_S. \tag{3.16}$$

A função delta nesta expressão representa a condição de conservação de momento.

Assim, no espaço dos momentos, temos que:

$$\left\langle \vec{p}_1{}'\vec{p}_2{}' \middle| \hat{V}_S \middle| \vec{p}_1\vec{p}_2 \right\rangle = -(2\pi)^3\, \delta\left(\vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' - \vec{p}_1 - \vec{p}_2\right) \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}^{\,2} + m_S^2}. \tag{3.17}$$

O potencial no espaço de configuração é obtido a partir das transformadas de Fourier apropriadas, produzindo o resultado:

$$\left\langle \vec{r}_1{}'\vec{r}_2{}' \middle| \hat{V}_S \middle| \vec{r}_1\vec{r}_2 \right\rangle = \delta\left(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_1\right) \delta\left(\vec{r}_2{}' - \vec{r}_2\right) V_S\left(\vec{r}\right), \tag{3.18}$$

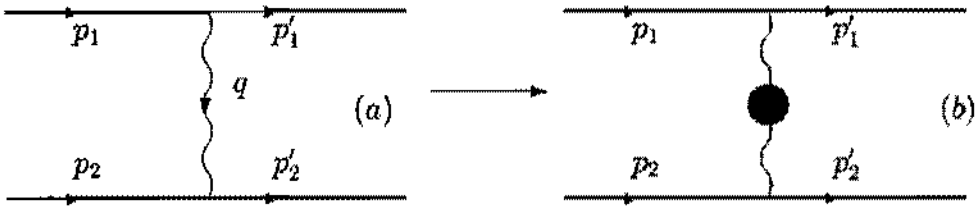


Figura 3.3: Diagrama (a) troca de um escalar entre quarks. (b) interações não perturbativas

onde $V_S(r)$ é o potencial perturbativo devido ao campo escalar.

$$V_S(\vec{r}) = -g_{Sq}^2 \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{\vec{q}^{\,2} + m_S^2} \tag{3.19}$$

e $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

Integrando por resíduos, obtemos:

$$\int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{\vec{q}^{\,2} + m_S^2} = \frac{m_S}{4\pi} \frac{e^{-m_s r}}{m_s r}. \tag{3.20}$$

O potencial, portanto, é dado por:

$$\left\langle \vec{r}_1{}' \vec{r}_2{}' \middle| \hat{V}_S \middle| \vec{r}_1 \vec{r}_2 \right\rangle = \delta(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_1)\, \delta(\vec{r}_2{}' - \vec{r}_2)\, V_S(r), \tag{3.21}$$

$$V_S(r) = -g_{Sq}^2 \frac{m_S}{4\pi} \frac{e^{-m_s r}}{m_s r}. \tag{3.22}$$

O cálculo perturbativo produz, como esperado, um potencial atrativo que decresce com a distância e que, portanto, não é adequado para simular o confinamento dos quarks. Atualmente, acredita-se que tal confinamento seja devido a efeitos não lineares, com base no estudo de vários modelos [Wil+94]. Neste trabalho, entretanto, não nos comprometemos com nenhum modelo particular, incorporando os efeitos não lineares por meio de um ansatz, que consiste em substituir, sempre que apropriado, a função perturbativa $V_S(r)$ por uma não perturbativa $W(r)$, dada por

$$W(r) = \frac{K}{2} \vec{r}^{\,2}. \tag{3.23}$$

Do ponto de vista diagramático, tal substituição é representada pela operação indicada na figura (3.3). Na figura (3.3), o "propagador" do segundo diagrama corresponde à transformada de Fourier da equação (3.23), formalmente escrita

$$t_H(q) = \int d\vec{r}\, \frac{K}{2} r^2\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}. \tag{3.24}$$

Esta equação tem significado puramente simbólico, já que a integral do lado direito é divergente[3]. Neste trabalho, usaremos essa expressão apenas em manipulações formais, sendo os resultados físicos obtidos no espaço de configuração.

3.2 A interação NN de médio e longo alcances

Para distâncias muito grandes, a interação NN é bem descrita tratando-se o núcleon como uma partícula puntiforme. A medida em que as distâncias diminuem, entretanto, a estrutura interna dos núcleons passa a se manifestar. Se considerarmos apenas o canal com os números quânticos do píon, os efeitos de médio e curto alcances correspondem a correções ao vértice píon-núcleon. Essas correções estão globalmente representadas na figura (3.4), onde a bolha no vértice do diagrama da esquerda sintetiza todos os processos que contribuem ao fator de forma. O primeiro diagrama da direita corresponde à interação do píon com um

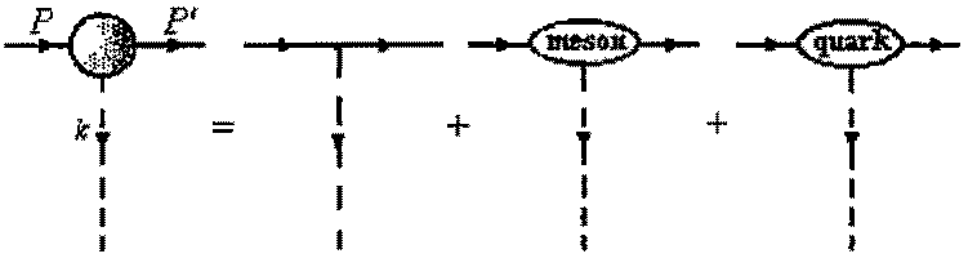


Figura 3.4: O vértice πN e suas correções.

núcleon puntiforme, o vértice indicado pela bolha "méson " representa as diversas correções envolvendo outros mésons e ressonâncias do núcleon e a bolha indicada pela palavra "quark ", sintetiza as correções de mais curto alcance, envolvendo os quarks constituintes.

As correções mesônicas estão esquematizadas na figura (3.5), onde o primeiro vértice depois da igualdade descreve o píon interagindo com o núcleon por meio de um "loop " $\rho - \pi$, o segundo descreve a correção devida à ressonância delta e as reticências representam outras correções de ordem superior na constante de acoplamento.

O cálculo das contribuições dos quarks ao fator de forma πN constitui um dos objetivos do presente trabalho. Para este cálculo adotamos o modelo dos quarks constituintes, confinados pelo potencial do oscilador harmônico, associado a campos escalares. Assim, a interação NN mediada pelo píon pode ser descrita pelos diagramas da figura (3.6), que indica que o

[3]Esta integral pode, formalmente, ser definida por meio de um limite de uma integral convergente.

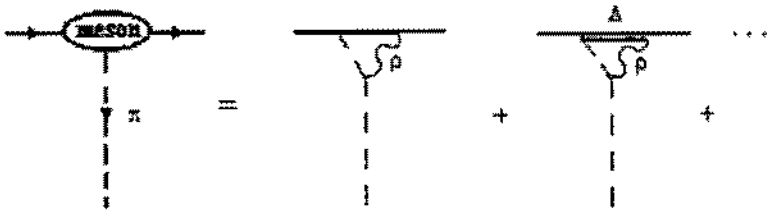


Figura 3.5: Alguns diagramas hadrônicos que contribuem ao fator de forma πN.

fator de forma envolve vários tipos de processos, representados globalmente à esquerda. Do lado direito da figura, o primeiro diagrama corresponde à contribuição dos operadores de um corpo, assim denominada porque o píon interage com um quark de cada vez, enquanto que o segundo representa a contribuição dos operadores de dois corpos, onde o píon externo interage com um diquark.

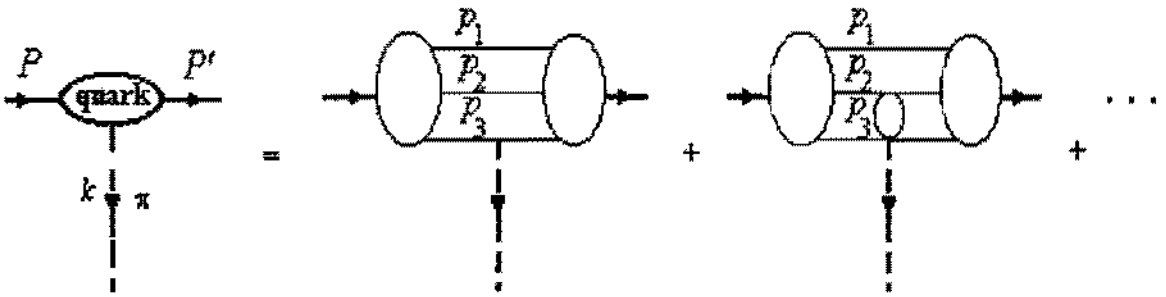


Figura 3.6: Correções devido aos quarks.

Os operadores de um corpo estão relacionados ao vértice elementar píon-quark e serão discutidos no capítulo 4. Quanto à interação píon-diquark, supomos que ela seja dada pelo diagrama a da figura (3.7), que envolve a amplitude do processo $\pi q \to Sq$. Em princípio, a interação píon-diquark poderia envolver também diagramas associados a correntes de troca, tais como os indicados pelos diagramas b e c na figura (3.7), onde o píon externo interage diretamente com as partículas escalares intermediárias. Entretanto, o diagrama b não contribui, pois um píon não pode se acoplar a um bóson escalar. Para verificar esta impossibilidade, consideramos, por exemplo, o modelo σ não linear, onde temos à nossa disposição as seguintes derivadas covariantes para o píon e para um bóson de isospin $\vec{t}$:

$$D^\mu \vec{\pi} = \alpha \partial^\mu \vec{\pi} + \beta \partial^\mu \pi^2 \vec{\pi}, \tag{3.25}$$

$$D^\mu B = \partial^\mu B + i\gamma \vec{t} \cdot (\vec{\pi} \wedge \partial^\mu \vec{\pi}) B. \tag{3.26}$$

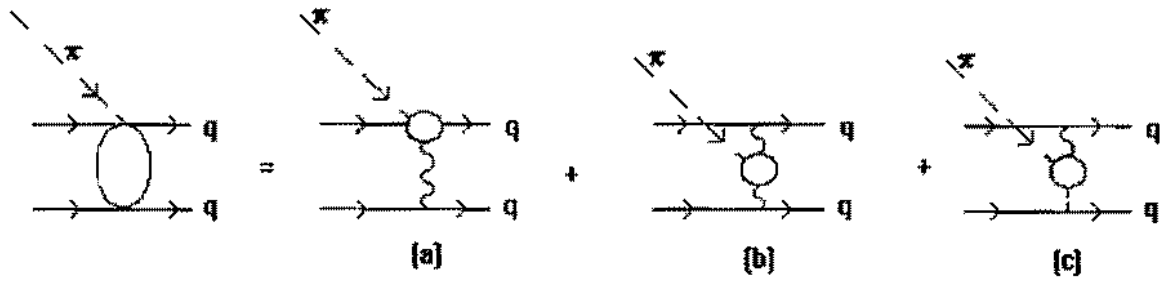


Figura 3.7: Interação píon-diquark.

No caso de B ser um bóson escalar, $\vec{t} = 0$ e não é possível a construção de um isovetor para ser acoplado a $D^{\mu}\vec{\pi}$. O diagrama c da figura (3.7), por outro lado, é viável, podendo ser descrito por uma lagrangiana do tipo $\mathcal{L}_{B\pi\pi} = g_{B\pi\pi} B D^{\mu}\vec{\pi} D_{\mu}\vec{\pi}$. Entretanto, diagramas deste tipo envolvem píons intermediários e não serão considerados neste trabalho.

3.2.1 O processo $\pi q \longrightarrow Sq$

Nesta seção, analisamos em detalhe o processo elementar $\pi q \longrightarrow Sq$, enfatizando o papel da simetria quiral. Para tanto, usamos o formalismo do modelo σ não-linear, considerando dois tipos de acoplamento píon-quark: o pseudo-escalar (PS), dado pela equação (2.92) e o pseudo-vetorial (PV), da equação (2.132). Em ambos os casos, o espalhamento pode ser representado pela figura (3.8), onde as variáveis cinemáticas estão indicadas. O quadrimomento

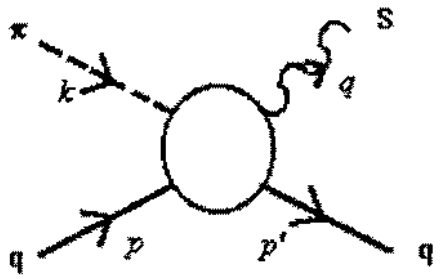


Figura 3.8: Interação $\pi q \rightarrow Sq$.

do píon com energia ω_{π} e momento $\vec{k}$ é denotado por $k = \left(\omega_{\pi}, \vec{k}\right)$; o da partícula escalar S, com energia ω_s e momento $\vec{q}_s$, é $q = (\omega_s, \vec{q}_s)$, o quark incidente tem quadrimomento $p = (E, \vec{p})$

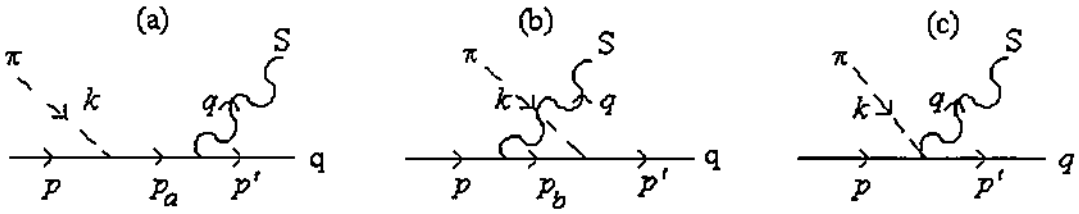


Figura 3.9: Caso PS: diagramas direto (a), cruzado (b) e de contacto (c).

e o emergente, $p' = (E', \vec{p}\,')$. A conservação de momento e energia é expressa pela equação:

$$k + p = q + p'. \tag{3.27}$$

Para partículas na camada de massa, valem as relações:

$$E = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} \tag{3.28}$$

$$E' = \sqrt{\vec{p}\,'^2 + m^2} \tag{3.29}$$

$$\omega_\pi = \sqrt{\vec{k}^2 + m_\pi^2} \tag{3.30}$$

$$\omega_s = \sqrt{\vec{q}^{\,2} + m_s^2}, \tag{3.31}$$

No referencial do centro de massa, temos:

$$\vec{p} = -\vec{k}, \tag{3.32}$$

$$\vec{p}\,' = -\vec{q}. \tag{3.33}$$

No caso do acoplamento PS, o processo é descrito pelo conjunto de diagramas mostrado na figura (3.9), onde o diagrama (a) é chamado de diagrama direto, o (b) de cruzado e o (c) de contacto.

Para os quarks virtuais nos diagramas (a) e (b), temos:

$$p_a = p + k, \tag{3.34}$$

$$p_b = p' - k. \tag{3.35}$$

A amplitude quiral T_{PS}, construída a partir dos diagramas da figura (3.9), é dada por:

$$T_{PS} = T_{PS}^{(a)} + T_{PS}^{(b)} + T_{PS}^{(c)}, \tag{3.36}$$

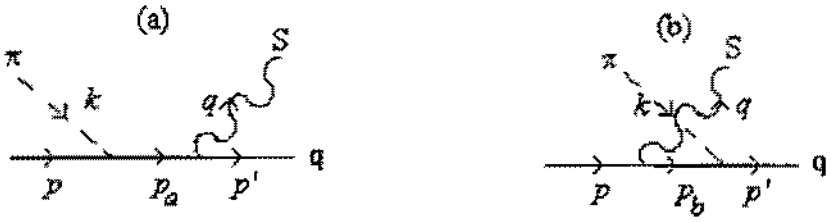


Figura 3.10: Caso PV. Diagramas direto (a) e cruzado (b).

onde:

$$T_{PS}^{(a)} = -ig_{Sq}g_{\pi q}\langle\tau_\alpha\rangle\,\bar{u}(\vec{p}\,')\frac{\not{p}_a+m}{p_a^2-m^2}\gamma_5 u(\vec{p}), \tag{3.37}$$

$$T_{PS}^{(b)} = -ig_{Sq}g_{\pi q}\langle\tau_\alpha\rangle\,\bar{u}(\vec{p}\,')\gamma_5\frac{\not{p}_b+m}{p_b^2-m^2}u(\vec{p}), \tag{3.38}$$

$$T_{PS}^{(c)} = \frac{-ig_{Sq}g_{\pi q}}{m}\langle\tau_\alpha\rangle\,\bar{u}(\vec{p}\,')\gamma_5 u(\vec{p}), \tag{3.39}$$

onde $\langle\tau_\alpha\rangle$ indica o valor esperado do operador de isospin .

Para o caso do acoplamento PV, temos o conjunto quiral de diagramas da figura (3.10), e a amplitude T_{PV} é dada por:

$$T_{PV} = T_{PV}^{(a)} + T_{PV}^{(b)}, \tag{3.40}$$

onde:

$$T_{PV}^{(a)} = -ig_{Sq}\frac{g_{\pi q}}{2m}\langle\tau_\alpha\rangle\,\bar{u}(\vec{p}\,')\frac{\not{p}_a+m}{p_a^2-m^2}\not{k}\gamma_5 u(\vec{p}), \tag{3.41}$$

$$T_{PV}^{(b)} = -ig_{Sq}\frac{g_{\pi q}}{2m}\langle\tau_\alpha\rangle\,\bar{u}(\vec{p}\,')\not{k}\gamma_5\frac{\not{p}_b+m}{p_b^2-m^2}u(\vec{p}). \tag{3.42}$$

Um aspecto notável deste cálculo é que os dois conjuntos quirais são equivalentes, como demonstramos a seguir. Tomando a amplitude $T_{PV}^{(a)}$ do diagrama direto do caso PV, substituíndo $\not{k} = \not{p}_a - \not{p}$ e usando as equações de Dirac (A.23) e (A.24), fatoramos $T_{PV}^{(a)}$ em:

$$T_{PV}^{(a)} = -ig_{Sq}g_{\pi q}\langle\tau_\alpha\rangle\,\bar{u}(\vec{p}\,')\frac{\not{p}_a+m}{p_a^2-m^2}\gamma_5 u(\vec{p}) - i\frac{g_{Sq}g_{\pi q}\langle\tau_\alpha\rangle}{2m}\bar{u}(\vec{p}\,')\gamma_5 u(\vec{p}). \tag{3.43}$$

Comparando com T_{PS}, equação (3.36), podemos ver que:

$$T_{PV}^{(a)} = T_{PS}^{(a)} + \frac{1}{2}T_{PS}^{(c)}. \tag{3.44}$$

Analogamente, para o diagrama cruzado do caso PV, obtemos a expressão:

$$T_{PV}^{(b)} = T_{PS}^{(b)} + \frac{1}{2}T_{PS}^{(c)}. \tag{3.45}$$

Portanto, temos que:

$$T_{PV} = T_{PV}^{(a)} + T_{PV}^{(b)} = T_{PS}^{(a)} + T_{PS}^{(b)} + T_{PS}^{(c)} = T_{PS}. \tag{3.46}$$

A equivalência entre as abordagens PS e PV indica que a amplitude para o processo $\pi q \to Sq$ depende apenas da simetria, e não do procedimento usado para implementá-la, um fato de importantes consequências físicas. Devido a esta equivalência, denominamos a amplitude para os dois casos por T_χ, onde o índice χ representa a palavra quiral. Assim, o nosso resultado para T_χ é expresso por:

$$T_\chi = -ig_{Sq}g_{\pi q}\left(\tau_\alpha\right)\bar{u}(\vec{p}\,')\left(\frac{\not{p}_a + m}{p_a^2 - m^2}\gamma_5 + \gamma_5\frac{\not{p}_b + m}{p_b^2 - m^2} + \frac{1}{m}\gamma_5\right)u(\vec{p}). \tag{3.47}$$

Usando (3.34) e (3.35) e as equações de Dirac, podemos reescrever:

$$T_\chi = -ig_{Sq}g_{\pi q}\left(\tau_\alpha\right)\bar{u}(\vec{p}\,')\left(\frac{\not{k}}{p_a^2 - m^2} + \frac{\not{k}}{p_b^2 - m^2} + \frac{1}{m}\right)\gamma_5 u(\vec{p}). \tag{3.48}$$

3.2.2 O papel da simetria quiral no processo $\pi q \to Sq$

Para a equivalência entre as amplitudes T_{PS} e T_{PV} discutida na seção anterior, é essencial o termo PS de contacto, normalmente ignorado nas várias abordagens deste problema. Para determinar a relevância numérica deste termo de contacto, escrevemos a amplitude para o processo $\pi q \to Sq$ como:

$$T(c) = -ig_{Sq}g_{\pi q}\left(\tau_\alpha\right)\left(\bar{u}(\vec{p}\,')\frac{\not{p}_a + m}{p_a^2 - m^2}\gamma_5 u(\vec{p}) + \bar{u}(\vec{p}\,')\gamma_5\frac{\not{p}_b + m}{p_b^2 - m^2}u(\vec{p}) + \frac{c}{m}\bar{u}(\vec{p}\,')\gamma_5 u(\vec{p})\right), \tag{3.49}$$

onde c é um parâmetro que pode adotar valores entre 0 e 1. Quando $c = 0$ perdemos completamente a simetria quiral e para $c = 1$ restauramos a simetria, obtendo $T(1) = T_\chi$.

Simplificamos $T(c)$, lembrando que $\not{p}_a = \not{k} + \not{p}$, $\not{p}_b = \not{p}' - \not{k}$, usando as equações de Dirac e definindo:

$$D \equiv \left(\frac{1}{p_a^2 - m^2} + \frac{1}{p_b^2 - m^2}\right); \tag{3.50}$$

podemos então, reescrever $T(c)$ como:

$$T(c) = -ig_{Sq}g_{\pi q}\left(\tau_\alpha\right)\bar{u}(\vec{p}\,')\left(D\not{k} + \frac{c}{m}\right)\gamma_5 u(\vec{p}). \tag{3.51}$$

A importância relativa dos vários termos pode ser determinada calculando-se a amplitude quadrática média de $T(c)$, dada por:

$$\left\langle |T(c)|^2 \right\rangle = \frac{1}{6}\frac{1}{2} \sum_{\alpha,s,s'} \sum_{\iota,\iota'} |T(c)|^2 , \tag{3.52}$$

onde os fatores $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{2}$ vêm, respectivamente, das médias sobre os estados iniciais de isospin (3 píons $\times$ 2 quarks) e de spin dos quarks. O termo $|T(c)|^2$ é dado por:

$$\begin{aligned} |T(c)|^2 &= -\left(g_{Sq} g_{\pi q}\right)^2 tr \left[\left\langle \eta_{\iota'}^{\dagger} \tau_\alpha \eta_\iota \right\rangle \left\langle \eta_\iota^{\dagger} \tau_\alpha \eta_{\iota'} \right\rangle\right] \times \\ &\times \left[\bar{u}^{s'}(\vec{p}\,') \left(D\not{k} + \frac{c}{m}\right) \gamma_5 u^s(\vec{p})\right] \times \\ &\times \left[\bar{u}^s(\vec{p}) \gamma_5 \left(D\not{k} + \frac{c}{m}\right) u^{s'}(\vec{p}\,')\right] , \end{aligned} \tag{3.53}$$

onde explicitamos o estado de isospin do quark, representando-o por η_ι, onde o índice s é relativo ao seu spin e onde $tr\,[...]$ representa o traço.

Substituindo $|T(c)|^2$ na amplitude média $\left\langle |T(c)|^2 \right\rangle$ e usando as seguintes propriedades:

$$\sum_\iota \eta_\iota \eta_\iota^{\dagger} = I_2, \tag{3.54}$$

$$\sum_\alpha \tau_\alpha \tau_\alpha = 3 I_2, \tag{3.55}$$

$$\sum_s u^s(\vec{p}) \bar{u}^s(\vec{p}) = (\not{p} + m) , \tag{3.56}$$

obtemos:

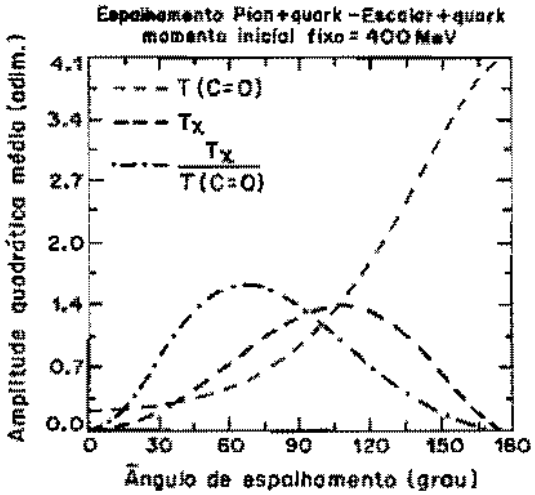
$$\begin{aligned} \left\langle |T(c)|^2 \right\rangle &= -\frac{1}{2} \left(g_{Sq} g_{\pi q}\right)^2 tr \left[(\not{p}' + m) \left(D\not{k} + \frac{c}{m}\right) \times \right. \\ &\left. \times (-\not{p} + m) \left(D\not{k} + \frac{c}{m}\right)\right] . \end{aligned} \tag{3.57}$$

Com auxílio das propriedades das matrizes gama, calculamos o traço e chegamos a:

$$\begin{aligned} \left\langle |T(c)|^2 \right\rangle &= -2 \left(\frac{g_{Sq} g_{\pi q}}{m}\right)^2 \left\{ D^2 m^2 \left[\left(p \cdot p' + m^2\right) k^2 - 2p \cdot k \;\; p' \cdot k\right] + \right. \\ &\left. + 2m^2 c D \left(p' - p\right) \cdot k + c^2 \left(m^2 - p' \cdot p\right) \right\} . \end{aligned} \tag{3.58}$$

Da cinemática obtemos as seguintes expressões, válidas para o sistema de centro de massa, onde $\left|\vec{k}\right| = |\vec{p}|$ e $|\vec{q}| = |\vec{p}\,'|$:

Figura 3.11: Gráfico de $\left\langle |T_\chi|^2 \right\rangle$, $\left\langle |T(c=0)|^2 \right\rangle$ e $r(\theta)$.



$$
\begin{aligned}
p \cdot k &= E\omega_\pi + \vec{k}^2, \\
p' \cdot k &= E'\omega_\pi + |\vec{q}| \left|\vec{k}\right| \cos\theta, \\
p' \cdot p &= E'E - |\vec{q}| \left|\vec{k}\right| \cos\theta,
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

onde θ é o ângulo de espalhamento entre $\vec{p}$ e $\vec{p}\,'$

Usando a conservação da energia, obtemos $|\vec{q}|$ em função das energias iniciais e das massas:

$$
\vec{q}^{\,2} = \frac{1}{4E_t^2}\left\{\left[(E_t+m)^2 - m_S^2\right]\left[(E_t-m)^2 - m_S^2\right]\right\}, \tag{3.60}
$$

$$
E_t = E + \omega_\pi. \tag{3.61}
$$

Um ponto especialmente interessante é o limiar de reação, para o qual temos os seguintes valores para $\vec{k}^2$:

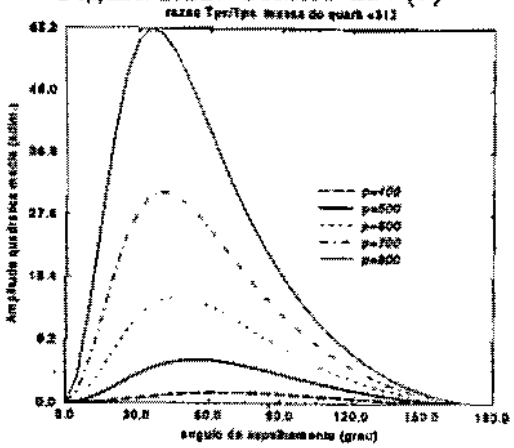
$$
\vec{k}^{\,2} = \frac{\left[(m+m_s)^2 + (m^2 - m_\pi^2)\right]^2}{4\,(m+m_s)^2} - m^2. \tag{3.62}
$$

Para investigar o papel da simetria quiral no processo $\pi q \to Sq$ definimos a razão:

$$
r(\theta) = \frac{\left\langle |T(c=1)|^2 \right\rangle}{\left\langle |T(c=0)|^2 \right\rangle},
$$

pois ela permite quantificar o papel da simetria quiral como o desvio do valor $r(\theta) = 1$. A figura (3.11) mostra as amplitudes T_χ e $T(c=0)$ e $r(\theta)$ para $m_S = 500$ MeV e a energia de 400 MeV, próxima do limiar. A figura (3.12), por outro lado, mostra $r(\theta)$ para vários valores da energia do píon com $m = 312\ MeV$ e $m_s = 500\ MeV$. A inspeção destas figuras

Figura 3.12: Gráfico de $r(\theta)$.



mostra que $r(\theta)$ é, em geral, bastante diferente de 1, indicando que a simetria quiral é muito relevante neste problema. Uma das características dessa simetria é que ela faz com que $r(\theta)$ seja aproximadamente nulo para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

3.2.3 Os antiquarks no processo $\pi q \to Sq$

Nas seções anteriores discutimos a relevância da simetria quiral no processo $\pi q \to Sq$, que usaremos no cálculo do fator de forma πN. Para completar o nosso estudo, passamos a enfocar a contribuição dos antiquarks para a amplitude deste processo. Esta discussão é motivada pelo fato de encontrarmos na literatura a afirmação de que a chamada "supressão de pares "[Mac 85, Mac+87] produz resultados equivalentes aos da simetria quiral. O argumento básico para a supressão de pares é o de que, em sistemas não relativísticos, processos envolvendo antipartículas não devem ter grande relevância. Por isso, as pessoas que defendem este ponto de vista propõem que se faça a subtração "ad hoc"de todas as contribuições dos antiquarks. No caso do processo $\pi q \to Sq$, as antipartículas estão presentes nos propagadores relativísticos dos quarks . Como as amplitudes T_{PV} e T_{PS} são equivalentes e o diagrama de contacto nesta última não contém quarks virtuais, é conveniente estudar a contribuição das antipartículas no caso PS. Por isso, decompomos a amplitude relativística em:

$$T_\chi = T_{PS}^{(+)} + T_{PS}^{(-)} + T_{PS}^{(c)}, \tag{3.63}$$

onde os índices $(+)$ e $(-)$ correspondem a partículas e antipartículas, presentes nos diagramas a e b da figura (3.9). É importante notar que esta decomposição é não covariante e, portanto, depende do referencial onde é feita.

Para se obter $T_{PS}^{(+)}$, discriminamos as partículas e antipartículas, escrevendo o propagador

da seguinte forma:

$$\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2}=\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{p^0}{E}\right)\sum_s u^s(\vec{p})\bar{u}^s(\vec{p})-\frac{1}{2}\left(1-\frac{p^0}{E}\right)\sum_s v^s(-\vec{p})\bar{v}^s(-\vec{p})\right]\frac{1}{(p^2-m^2)}, \quad (3.64)$$

onde $u^s(\vec{p})$ e $v^s(\vec{p})$ são os spinores livres dos quarks e antiquarks, p^0 é a componente zero do quadrimomento e $E=\sqrt{m^2+\vec{p}^2}$. Assim, esta decomposição também pode ser escrita como

$$\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2}=\frac{1}{2E}\left[\frac{1}{p^0-E}\sum_s u^s(\vec{p})\bar{u}^s(\vec{p})+\frac{1}{p^0+E}\sum_s v^s(-\vec{p})\bar{v}^s(-\vec{p})\right]. \quad (3.65)$$

Nesta expressão, o primeiro termo depois da igualdade representa partícula, o segundo, a antipartícula e ela pode ser representada graficamente como na figura (3.13). Substituindo

Figura 3.13: Propagadores com frequência positiva e negativa

a equação(3.65) na amplitude T_χ, dada por:

$$T_\chi=-ig_{Sq}g_{\pi q}\left(\tau_a\right)\bar{u}(\vec{p}\,')\left(\frac{\not{p}_a+m}{p_a^2-m^2}\gamma_5+\gamma_5\frac{\not{p}_b+m}{p_b^2-m^2}+\frac{1}{m}\gamma_5\right)u(\vec{p}), \quad (3.66)$$

podemos extrair a parte de frequência positiva, que corresponde a uma amplitude sem simetria quiral e com supressão de pares:

$$\begin{aligned} T_{PS}^{(+)} &= -ig_{Sq}g_{\pi q}\left\langle\tau_a\right\rangle\left[\frac{1}{2E_a}\bar{u}(\vec{p}\,')\frac{1}{p_a^0-E_a}u^s(\vec{p}_a)\bar{u}^s(\vec{p}_a)\gamma_5 u(\vec{p})+\right.\\ &\left.+\frac{1}{2E_b}\bar{u}(\vec{p}\,')\gamma_5\frac{1}{p_b^0-E_b}u^s(\vec{p}_b)\bar{u}^s(\vec{p}_b)u(\vec{p})\right]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Para os spinores intermediários, valem as relações:

$$u^s(\vec{p}_a)\bar{u}^s(\vec{p}_a) = E_a\gamma^0-\vec{\gamma}\cdot\vec{p}_a+m, \quad (3.68)$$

$$u^s(\vec{p}_b)\bar{u}^s(\vec{p}_b) = E_b\gamma^0-\vec{\gamma}\cdot\vec{p}_b+m. \quad (3.69)$$

Definindo os quadrivetores na camada de massa:

$$\tilde{p}_a = (E_a,\vec{p}_a), \quad (3.70)$$

$$\tilde{p}_b = (E_b,\vec{p}_b), \quad (3.71)$$

podemos escrever:

$$u^s(\vec{p}_a)\bar{u}^s(\vec{p}_a) = \not{p}_a + m, \tag{3.72}$$

$$u^s(\vec{p}_b)\bar{u}^s(\vec{p}_b) = \not{p}_b + m. \tag{3.73}$$

Substituindo estes resultados na equação (3.67), temos:

$$T_{PS}^{(+)} = -ig_{Sq}g_{\pi q}\left(\tau_\alpha\right)\bar{u}(\vec{p}\,')\left[\frac{(\not{p}_a + m)}{2E_a\left(p_a^0 - E_a\right)} + \frac{(-\not{p}_b + m)}{2E_b\left(p_b^0 - E_b\right)}\right]\gamma_5 u(\vec{p}). \tag{3.74}$$

Definindo:

$$d_a = \frac{1}{2E_a\left(p_a^0 - E_a\right)}, \tag{3.75}$$

$$d_b = \frac{1}{2E_b\left(p_b^0 - E_b\right)}, \tag{3.76}$$

escrevemos:

$$T_{PS}^{(+)} = -ig_{Sq}g_{\pi q}\left(\tau_\alpha\right)\bar{u}(\vec{p}\,')\left[d_a\left(\not{p}_a + m\right) + d_b\left(-\not{p}_b + m\right)\right]\gamma_5 u(\vec{p}). \tag{3.77}$$

Estamos interessados na amplitude quadrática média, dada por :

$$\langle\left|T_{PS}^{(+)}\right|^2\rangle = \frac{1}{6}\frac{1}{2}\sum_{\alpha,s,s'}\sum_{i,i'}\left|T_{PS}^{(+)}\right|^2. \tag{3.78}$$

Por isso, escrevemos:

$$\begin{aligned}\left|T_{PS}^{(+)}\right|^2 &= -\left(g_{Sq}g_{\pi q}\right)^2 tr\left[\left\langle\eta_{i'}^\dagger\tau_\alpha\eta_i\right\rangle\left\langle\eta_i^\dagger\tau_\alpha\eta_{i'}\right\rangle\right] \\ &\quad\times\bar{u}_{s'}(\vec{p}\,')\left[d_a\left(\not{p}_a + m\right) + d_b\left(-\not{p}_b + m\right)\right]\gamma_5 u_s(\vec{p}) \\ &\quad\times\bar{u}_s(\vec{p})\gamma_5\left[d_a\left(\not{p}_a + m\right) + d_b\left(-\not{p}_b + m\right)\right]u_{s'}(\vec{p}\,').\end{aligned} \tag{3.79}$$

Usando as equações (3.54-3.56), calculando o traço das matrizes de isospin e substituindo em (3.78), obtemos:

$$\begin{aligned}\langle\left|T_{PS}^{(+)}\right|^2\rangle &= -\frac{1}{2}\left(g_{Sq}g_{\pi q}\right)^2 tr\left\{\left(\not{p}' + m\right)\left[d_a\left(\not{p}_a + m\right) + d_b\left(-\not{p}_b + m\right)\right]\right. \\ &\quad\left.\times\left(-\not{p} + m\right)\left[d_a\left(\not{p}_a + m\right) + d_b\left(-\not{p}_b + m\right)\right]\right\};\end{aligned} \tag{3.80}$$

reescrevemos esta expressão como sendo:

$$\begin{aligned}\langle\left|T_{PS}^{(+)}\right|^2\rangle &= -\frac{1}{2}\left(g_{Sq}g_{\pi q}\right)^2 tr\left\{\left[d_a\left(\not{p}'\not{p}_a + m\left(\not{p}' + \not{p}_a\right) + m^2\right)\right.\right. \\ &\quad\left. + d_b\left(-\not{p}'\not{p}_b + m\left(\not{p}' - \not{p}_b\right) + m^2\right)\right] \\ &\quad\times\left[d_a\left(-\not{p}\not{p}_a + m\left(\not{p}_a - \not{p}\right) + m^2\right)\right. \\ &\quad\left.\left. + d_b\left(\not{p}\not{p}_b - m\left(\not{p} + \not{p}_b\right) + m^2\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{3.81}$$

Calculando o traço das matrizes, temos:

$$\begin{aligned}\langle\left|T_{PS}^{(+)}\right|^2\rangle &= -4\left(g_{sq}g_{\pi q}\right)^2\left\{d_a^2\left[-p'\cdot\tilde{p}_a\; p\cdot\tilde{p}_a + m^2\left(p'-p\right)\cdot\tilde{p}_a + m^4\right]\right.\\ &+d_a d_b\left[p'\cdot\tilde{p}_a\; p\cdot\tilde{p}_b - p'\cdot p\;\tilde{p}_a\cdot\tilde{p}_b + p'\cdot\tilde{p}_b\; p\cdot\tilde{p}_a\right.\\ &\left.+\, m^2\left(p'-p\right)\cdot\left(\tilde{p}_a-\tilde{p}_b\right) - m^2\left(p\cdot p' + \tilde{p}_a\cdot\tilde{p}_b\right) + m^4\right]\\ &\left.+\, d_b^2\left[-p'\cdot\tilde{p}_b\; p\cdot\tilde{p}_b + m^2\left(p-p'\right)\cdot\tilde{p}_b + m^4\right]\right\}. \qquad (3.82)\end{aligned}$$

Da cinemática no centro de massa, temos que:

$$\begin{aligned}p'\cdot p &= E'E - |\vec{q}|\left|\vec{k}\right|\cos\theta, && (3.83)\\ p\cdot\tilde{p}_a &= Em, && (3.84)\\ p\cdot\tilde{p}_b &= EE_b - \vec{k}^2 - |\vec{q}|\left|\vec{k}\right|\cos\theta, && (3.85)\\ p'\cdot\tilde{p}_a &= E'm, && (3.86)\\ p'\cdot\tilde{p}_b &= E'E_b - \vec{q}^{\,2} - |\vec{q}|\left|\vec{k}\right|\cos\theta, && (3.87)\\ \tilde{p}_a\cdot\tilde{p}_b &= mE_b, && (3.88)\\ E_b &= \sqrt{m^2 + \vec{q}^{\,2} + \vec{k}^2 + 2\left|\vec{k}\right||\vec{q}|\cos\theta}, && (3.89)\\ d_a &= \frac{1}{2m\left(p_a^0 - m\right)}, && (3.90)\\ d_b &= \frac{1}{2E_b\left(p_b^0 - E_b\right)}, && (3.91)\\ p_a^0 &= E + \omega_\pi, && (3.92)\\ p_b^0 &= E' - \omega_\pi. && (3.93)\end{aligned}$$

Como foi mencionado acima, a função $T_{PS}^{(+)}$ corresponde á amplitude sem simetria quiral e com supressão de pares. A amplitude dos antiquarks, por outro lado, é obtida da seguinte forma:

$$\langle\left|T_{PS}^{(-)}\right|^2\rangle = \langle\left|T(c=0) - T_{PS}^{(+)}\right|^2\rangle, \qquad (3.94)$$

onde $T(c=0)$ é a amplitude sem simetria quiral obtida na seção anterior.

Nos gráficos da figura (3.2.3) mostramos o comportamento das amplitudes $T_{PS}^{(+)}$, $T_{PS}^{(-)}$, T_χ e $T(c=0)$ para diferentes valores da massa do escalar e momentos próximos dos respectivos limiares de interação. Neles podemos verificar que as amplitudes devidas à supressão de pares e à simetria quiral têm a mesma ordem de magnitude, sendo ambas muito menores do que $T(c=0)$. Nos gráficos da figura (3.14), entretanto, podemos notar que T_χ e $T_{PS}^{(+)}$ são bastante diferentes entre si, sendo que esta diferença se acentua à medida em que nos

afastamos do limiar de interação . Além disso, a amplitude quiral depende mais fortemente do ângulo de espalhamento θ do que a amplitude com supressão de pares.

Assim, o nosso estudo permite concluir que não é correto supor que a supressão das antipartículas substitua a simetria quiral. Neste caso, ambas abordagens têm conteúdos físicos diferentes.

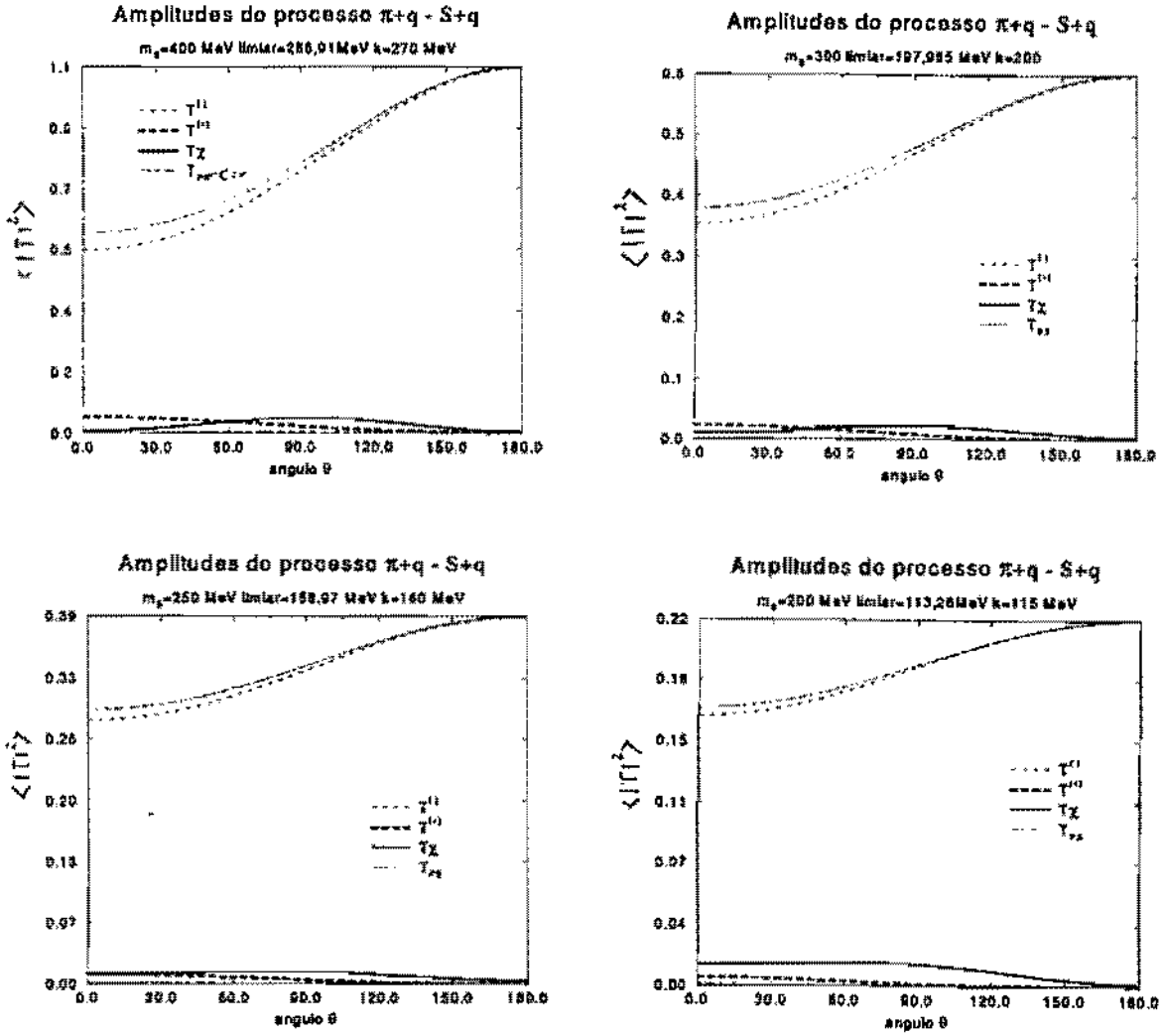


Figura 3.14: Comparação entre $T_{PS}^{(+)}$ e as amplitudes T_χ e T_{PS}.

3.2.4 Partículas virtuais

Nesta subseção, transformamos os mésons envolvidos no processo $\pi q \to Sq$ em partículas virtuais, e estudamos o comportamento da amplitude quiral. Isso é feito escrevendo-se os quadrimomentos dos mésons como

$$k = \left(k_0, \vec{k}\right), \tag{3.95}$$

$$q = \left(q_0, \vec{q}\right), \tag{3.96}$$

onde k_0 e q_0 podem, em princípio, ter quaisquer valores. Entretanto, nos casos que nos interessam neste estudo, essas variáveis têm valores muito pequenos: $k_0 \sim q_0 \sim 0$.

Para estudar o comportamento da amplitude quiral fora da camada de massa, é conveniente introduzirmos dois parâmetros, λ_π e λ_S, tais que

$$k = \left(k_0 = \lambda_\pi \omega_\pi, \vec{k}\right), \tag{3.97}$$

$$q = \left(q_0 = \lambda_S \omega_S, \vec{q}\right). \tag{3.98}$$

Assim, a variação desses parâmetros no intervalo entre 0 e 1 permite-nos acompanhar o comportamento da amplitude.

Usando a conservação de energia, obtemos

$$\vec{q}^{\,2} = (E + k_0 - q_0)^2 - m^2. \tag{3.99}$$

Com este resultado, construímos os vários produtos escalares que entram na expressão (3.58):

$$\begin{aligned}\left\langle |T(c)|^2 \right\rangle &= -2\left(\frac{g_{Sq} g_{\pi q}}{m}\right)^2 \left\{ D^2 m^2 \left[\left(p \cdot p' + m^2\right) k^2 - 2p \cdot k \; p' \cdot k\right] + \right. \\ &\quad \left. + 2m^2 D \left(p' - p\right) \cdot k + \left(m^2 - p' \cdot p\right) \right\},\end{aligned} \tag{3.100}$$

onde, temos que:

$$k^2 = \lambda_\pi^2 \omega_\pi^2 - \vec{k}^2, \tag{3.101}$$

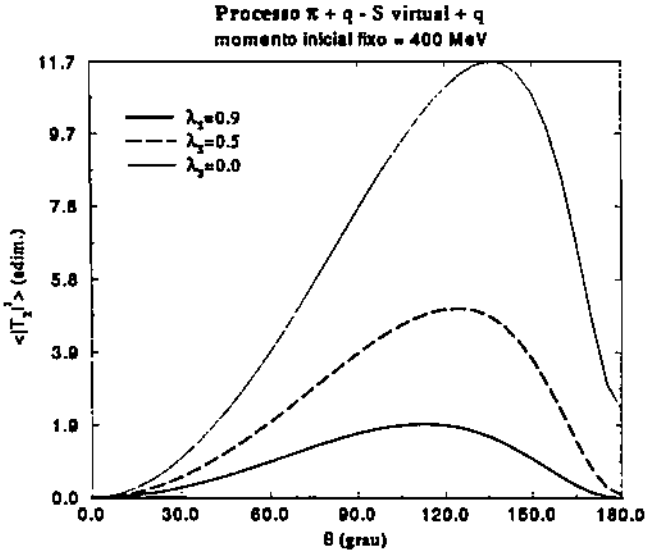
$$p \cdot k = \lambda_\pi E \omega_\pi + \vec{k}^2, \tag{3.102}$$

$$p' \cdot k = \lambda_\pi E' \omega_\pi + |\vec{q}| \left|\vec{k}\right| \cos\theta, \tag{3.103}$$

$$p' \cdot p = E' E - |\vec{q}| \left|\vec{k}\right| \cos\theta. \tag{3.104}$$

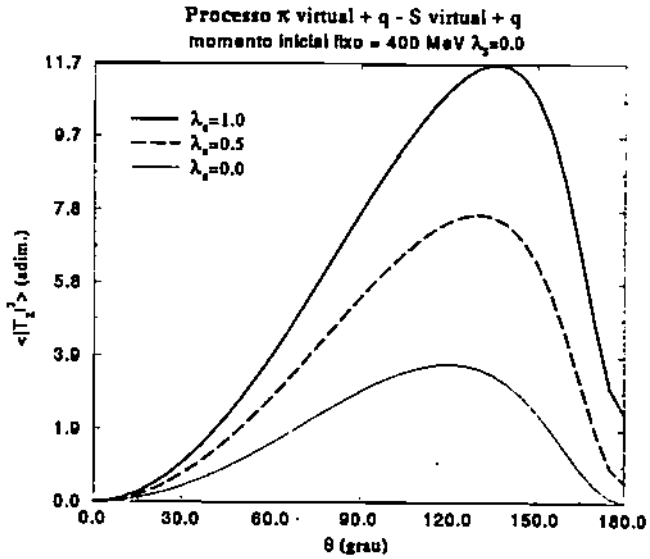
Inicialmente, realizamos a mudança sobre a partícula escalar S e obtemos os gráficos da figura (3.15). Neste gráfico podemos observar o crescimento da amplitude quiral a medida que λ_S decresce.

Figura 3.15: Caso $\lambda_\pi = 1$ e $\lambda_S \in [0,1]$.



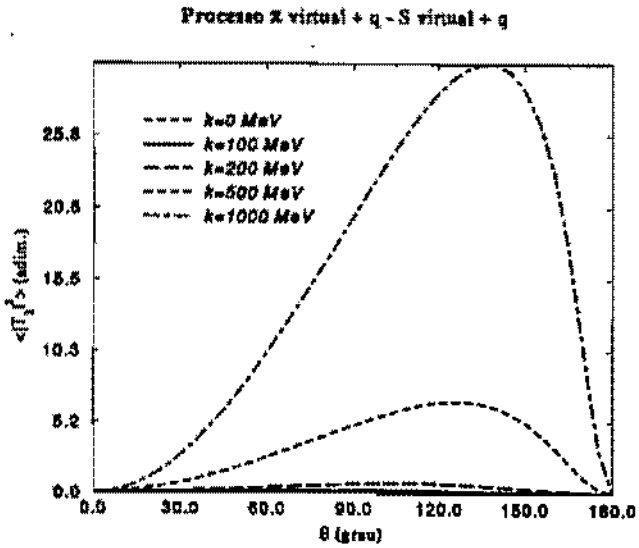
No gráfico da figura (3.16), temos o caso $\lambda_\pi \in [0,1]$ e $\lambda_S = 0$ e podemos observar que a amplitude quiral volta a decrescer à medida que λ_π decresce.

Figura 3.16: Caso $\lambda_\pi \in [0,1]$ e $\lambda_S = 0$.



No gráfico da figura (3.17), temos o caso $\lambda_S = 0$ e $\lambda_\pi = 0$ para diferentes valores de k. Neste gráfico observamos o crescimento a amplitude quiral a medida que k cresce, sendo que para $k = 0$ a amplitude é nula.

Figura 3.17: Caso $\lambda_\pi = 0$ e $\lambda_S = 0$.



3.2.5 Vértice píon-diquark.

O vértice obtido a partir da amplitude de interação entre um píon e um diquark é importante para o cálculo da contribuição dos operadores de dois corpos para o fator de forma píon-núcleon.

Aprendemos, no estudo do processo $\pi q \to Sq$, que as linguagens PV e PS produzem resultados equivalentes. Na construção dos diagramas para esse processo, usaremos a linguagem PS pois, como vimos, ela explicita a componente que resulta da simetria quiral. Os diagramas para a interação píon-diquark, considerados neste trabalho, estão representados na figura (3.18).

Destes diagramas obtemos a amplitude $T_{\pi d}$:

$$\begin{aligned} T_{\pi d} &= -i\left\{\frac{g_{Sq}^2}{q_1^2 - m_S^2}\left[g_{\pi q}\left(\tau_\alpha\right)_1 \bar{u}_{s1'}\left(\vec{p}_1{}'\right)\left(\frac{\not{k}}{p_a^2 - m^2} + \frac{\not{k}}{p_b^2 - m^2} + \frac{1}{m}\right)\gamma_5 u_{s1}\left(\vec{p}_1\right)\right]\right. \\ &\quad \times\left[\bar{u}_{s2'}\left(\vec{p}_2{}'\right) u_{s2}\left(\vec{p}_2\right)\right] + \frac{g_{Sq}^2}{q_2^2 - m_S^2}\left[\bar{u}_{s1'}\left(\vec{p}_1{}'\right) u_{s1}\left(\vec{p}_1\right)\right] \\ &\quad \left.\times\left[g_{\pi q}\left(\tau_\alpha\right)_2 \bar{u}_{s2'}\left(\vec{p}_2{}'\right)\left(\frac{\not{k}}{p_d^2 - m^2} + \frac{\not{k}}{p_e^2 - m^2} + \frac{1}{m}\right)\gamma_5 u_{s2}\left(\vec{p}_2\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.105}$$

onde valem as seguintes relações, obtidas a partir da conservação de quadrimomento nos vértices de cada diagrama:

$$p_a = p_1 + k, \tag{3.106}$$

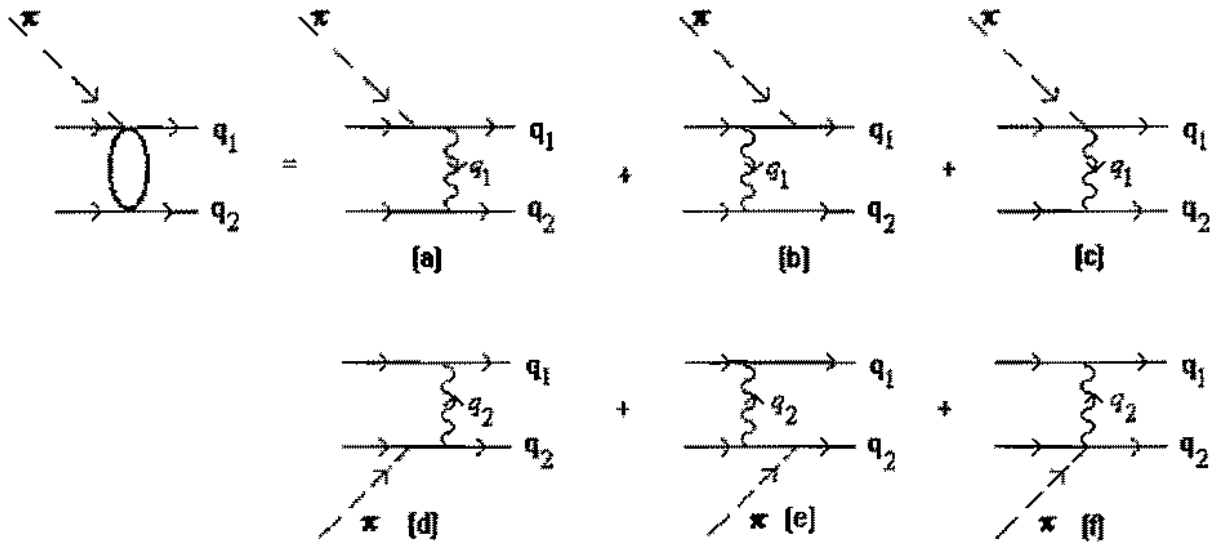


Figura 3.18: Diagramas quirais na linguagem PS para a interação πqq.

$$p_b = p_1' - k, \tag{3.107}$$

$$p_2 = p_2' - q_1, \tag{3.108}$$

$$p_d = p_2 + k, \tag{3.109}$$

$$p_e = p_2' - k, \tag{3.110}$$

$$p_1 = p_1' - q_2, \tag{3.111}$$

Devido à simetria entre os dois termos da equação (3.105), podemos reescrevê-la como:

$$\begin{aligned} T_{\pi d} &= -i\left\{\frac{g_{Sq}^2}{q_1^2 - m_S^2}\left[g_{\pi q}\left(\tau_\alpha\right)_1 \bar{u}_{s1'}\left(\vec{p}_1{}'\right)\left(\frac{\not{k}}{p_a^2 - m^2} + \frac{\not{k}}{p_b^2 - m^2} + \frac{1}{m}\right)\gamma_5 u_{s1}\left(\vec{p}_1\right)\right]\right. \\ &\quad \left.\times\left[\bar{u}_{s2'}\left(\vec{p}_2{}'\right) u_{s2}\left(\vec{p}_2\right)\right]\right\} + (1 \longleftrightarrow 2), \end{aligned} \tag{3.112}$$

No cálculo da contribuição da interação píon-diquark ao fator de forma píon-núcleon, devemos desconsiderar nos diagramas mostrados na figura (3.18), as componentes que contêm propagadores de núcleons de freqüência positiva. Esse procedimento é necessário para evitar dupla contagem, já que os processos envolvendo a propagação de quarks de freqüência positiva são automaticamente considerados quando os operadores de um corpo são interpostos entre funções de onda dos quarks ligados. Os diagramas remanescentes correspondem à amplitude própria $T_{\pi d}^{p}$. Como vimos na seção 3.2.3, a subtração da parte das partículas é feita sobre as amplitudes dos diagramas direto e cruzado, sendo que a equação (3.77) nos fornece a parte

imprópria. Assim, temos a seguinte parte imprópria:

$$T_{PS}^{(+)} = -i\left\{\frac{g_{Sq}^2}{q^2-m_S^2}\left[g_{\pi q}\left(\tau_\alpha\right)_1 \bar{u}_{s1'}(\vec{p}_1{}')\left(d_a\left(\not{p}_a+m\right)+d_b\left(-\not{p}_b+m\right)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.\gamma_5 u_{s1}(\vec{p}_1)\right]\left[\bar{u}_{s2'}\left(\vec{p}_2{}'\right)u_{s2}\left(\vec{p}_2\right)\right]\right\}+(1\longleftrightarrow 2)\,. \tag{3.113}$$

Subtraindo esta amplitude de T_d, obtemos:

$$T_{\pi d}^{\mathcal{P}} = -i\left\{\frac{g_{Sq}^2}{q_1^2-m_S^2}\left[g_{\pi q}\left(\tau_\alpha\right)_1 \bar{u}_{s1'}\left(\vec{p}_1{}'\right)\left(\frac{\not{k}}{p_a^2-m^2}-\frac{\left(\not{p}_a+m\right)}{2E_a\left(p_a^0-E_a\right)}+\frac{\not{k}}{p_b^2-m^2}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{\left(-\not{p}_b+m\right)}{2E_b\left(p_b^0-E_b\right)}+\frac{1}{m}\right)\gamma_5 u_{s1}\left(\vec{p}_1\right)\right]\left[\bar{u}_{s2'}\left(\vec{p}_2{}'\right)u_{s2}\left(\vec{p}_2\right)\right]\right\}+(1\longleftrightarrow 2)\,. \tag{3.114}$$

Trabalhando com os termos dentro dos colchetes, podemos simplificar esta expressão, reescrevendo:

$$\not{p}_a = \left(E_a-p_a^0\right)\gamma^0+\not{p}_a, \tag{3.115}$$
$$\not{p}_b = \left(E_b-p_b^0\right)\gamma^0+\not{p}_b, \tag{3.116}$$
$$p_a^2-m^2 = \left(p_a^0\right)^2-E_a^2, \tag{3.117}$$
$$p_b^2-m^2 = \left(p_b^0\right)^2-E_b^2. \tag{3.118}$$

Substituindo em $T_{\pi d}^{\mathcal{P}}$, temos:

$$T_{\pi d}^{\mathcal{P}} = -i\left\{\frac{g_{Sq}^2}{q_1^2-m_S^2}\left[g_{\pi q}\left(\tau_\alpha\right)_1 \bar{u}_{s1'}\left(\vec{p}_1{}'\right)\left(\frac{\not{k}}{\left(p_a^0\right)^2-E_a^2}+\frac{\gamma^0}{2E_a}-\frac{\left(\not{p}_a+m\right)}{2E_a\left(p_a^0-E_a\right)}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{\not{k}}{\left(p_b^0\right)^2-E_b^2}-\frac{\gamma^0}{2E_b}-\frac{\left(-\not{p}_b+m\right)}{2E_b\left(p_b^0-E_b\right)}+\frac{1}{m}\right)\gamma_5 u_{s1}\left(\vec{p}_1\right)\right]\left[\bar{u}_{s2'}\left(\vec{p}_2{}'\right)u_{s2}\left(\vec{p}_2\right)\right]\right\}$$
$$+(1\longleftrightarrow 2)\,. \tag{3.119}$$

Usando as conservações de quadrimomentos para reescrever $\not{p}_a$ e $\not{p}_b$ e com o auxílio das equações de Dirac, obtemos:

$$\left(\not{p}_a+m\right)\gamma_5 u_{s1}\left(\vec{p}_1\right) = \not{k}\gamma_5 u_{s1}\left(\vec{p}_1\right), \tag{3.120}$$
$$\bar{u}_{s1'}\left(\vec{p}_1{}'\right)\left(-\not{p}_b+m\right) = \bar{u}_{s1'}\left(\vec{p}_1{}'\right)\not{k}. \tag{3.121}$$

Reunindo os fatores comuns em γ^0 e $\not{k}$, chegamos a:

$$T_{\pi d}^{\mathcal{P}} = -i\frac{g_{Sq}^2}{q^2-m_S^2}\left\{g_{\pi q}\left(\tau_\alpha\right)_1 \bar{u}_{s1'}\left(\vec{p}_1{}'\right)\left[\gamma^0\left(\frac{E_b-E_a}{2E_aE_b}\right)+\frac{1}{m}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\not{k}\left(\frac{1}{2E_a\left(p_a^0+E_a\right)}+\frac{1}{2E_b\left(p_b^0+E_b\right)}\right)\right]\gamma_5 u_{s1}\left(\vec{p}_1\right)\right\}\left[\bar{u}_{s2'}\left(\vec{p}_2{}'\right)u_{s2}\left(\vec{p}_2\right)\right]$$
$$+(1\longleftrightarrow 2)\,. \tag{3.122}$$

Eliminando as contribuições devidas às pernas externas, obtemos o vértice próprio como sendo[4]:

$$\begin{aligned}\Gamma^{p}_{\pi d} &= \frac{g^2_{Sq}}{q_1^2 - m_S^2}\left\{g_{\pi q}\left(\tau_\alpha\right)\left[\gamma^0\left(\frac{E_b - E_a}{2E_aE_b}\right) + \frac{1}{m}\right.\right.\\ &\left.\left. - \not{k}\left(\frac{1}{2E_a\left(p_a^0 + E_a\right)} + \frac{1}{2E_b\left(p_b^0 + E_b\right)}\right)\right]\gamma_5\right\}^{(1)} I^{(2)} + (1 \longleftrightarrow 2)\,, \qquad (3.123)\end{aligned}$$

onde $I^{(2)}$ é a matriz identidade no espaço do quark 2.

Este resultado será usado na seção (4.5), para construir a parte de longo alcance da interação NN e o fator de forma πN.

[4]Nas convenções usadas neste trabalho, o vértice está relacionado à amplitude por $\bar{U}_1\bar{U}_2\Gamma U_1U_2 = iT$.

Capítulo 4

Fator de forma πN: mésons e quarks

A partir de um modelo onde o núcleon é constituído de tres quarks ligados por "molas", calculamos o fator de forma da interação πN de duas maneiras diferentes. Na mais simples delas, consideramos apenas a interação do pion externo com um dos quarks do núcleon. Na outra, incorporamos os efeitos da simetria quiral.

4.1 Conceitos e fenomenologia

No estudo da interação NN, os núcleons podem ser considerados puntiformes apenas a distâncias muito grandes. Já para distâncias médias e curtas, é preciso considerar a estrutura do núcleon, o que é feito por meio de fatores de forma. Em geral, existe um fator de forma e, consequentemente, um "tamanho", para cada tipo de interação. No caso eletromagnético, por exemplo, as interações com núcleons puntiformes são determinadas por elementos de matriz da forma

$$\langle p', J'^z, T'^z | J^\mu(0) | p, J^z, T^z \rangle = e\bar{u}^{J'^z}(\vec{p}\,') \gamma^\mu \frac{1}{2}(I + T_z) u^{J^z}(\vec{p}), \tag{4.1}$$

onde e é a carga elétrica, I e T_z denotam os valores esperados no espaço de isospin. Para partículas extensas, o vértice é alterado, mas preservando o seu carácter covariante. Assim, de forma mais geral possível, o vértice é escrito

$$\gamma^\mu \to \left[F_1\left(q^2\right)\gamma^\mu + \frac{iF_2\left(q^2\right)}{2M}\sigma^{\mu\nu}q_\nu \right], \tag{4.2}$$

sendo que $q = p' - p$ é o quadrimomento transferido, $F_1\left(q^2\right)$ e $F_2\left(q^2\right)$ são, respectivamente, os fatores de forma de Pauli e de Dirac. Eles são funções reais do quadrimomento $q^2 = q_\mu q^\mu$

e representam todo o nosso desconhecimento a respeito da região extensa onde ocorre a interação.

Normalmente, a constante de acoplamento do sistema é definida para os momentos correspondendo a todas as partículas na camada de massa. Por isso, no caso eletromagnético, temos:

$$F_1(0) = 1, \tag{4.3}$$

$$F_2(0) = 1. \tag{4.4}$$

Assim, os fatores de forma representam desvios em relação a essas condições, que podem ocorrer tanto na direção tipo-espaço, com $q^2 < 0$ como no tipo tempo, com $q^2 > 0$. Em geral, no caso de espalhamentos elásticos, os momentos transferidos são do tipo espaço.

Um outro conceito útil para representar o tamanho do núcleon é o seu raio quadrático médio, relacionado ao fator de forma por

$$\left\langle r^2 \right\rangle = \frac{-6}{F(q^2=0)} \left. \frac{\partial F(\vec{q}^{\,2})}{\partial \vec{q}^{\,2}} \right|_{\vec{q}^{\,2}=0}. \tag{4.5}$$

Existe uma certa arbitrariedade na definição dos fatores de forma e, no caso eletromagnético, é comum o uso dos fatores de forma elétrico e magnético de Sachs [Sac 62], que se relacionam aos fatores de forma de Fermi e de Dirac por

$$G_E\left(q^2\right) = F_1\left(q^2\right) + F_2\left(q^2\right)\frac{q^2}{4M^2}, \tag{4.6}$$

$$G_M\left(q^2\right) = F_1\left(q^2\right) + F_2\left(q^2\right). \tag{4.7}$$

Estes fatores de forma são normalizados no ponto $q^2 = 0$ que corresponde a fótons reais e às respectivas cargas e momentos magnéticos:

$$G_E^p(0) = 1, \quad G_M^p(0) = \mu_p = 2.79\mu_N, \tag{4.8}$$

$$G_E^n(0) = 0, \quad G_M^n(0) = \mu_n = -1.91\mu_N, \tag{4.9}$$

onde $\mu_N = e\hbar/(2M_p)$. Os melhores ajustes para estes fatores de forma são as expressões dipolares [Gal+71], dadas por

$$G_E^p\left(q^2\right) = \left(1 + \frac{q^2}{M_D^2}\right)^{-2}, \tag{4.10}$$

$$G_M^p\left(q^2\right) = \mu_p\left(1 + \frac{q^2}{M_D^2}\right)^{-2}, \tag{4.11}$$

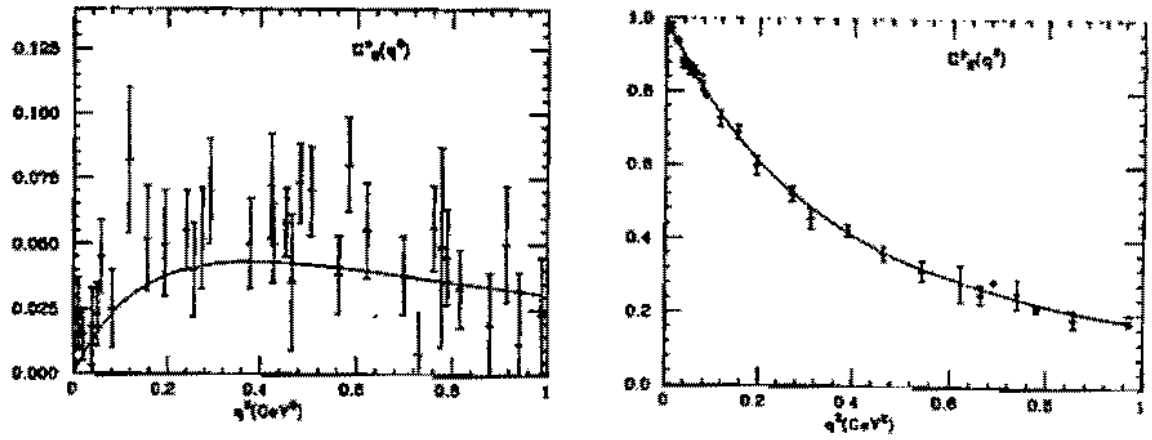


Figura 4.1: Ajuste teórico aos dados experimentais dos fatores de forma do neutron e do próton [Hoh+76, BZ 74].

$$G_M^n\left(q^2\right) = \mu_n\left(1+\frac{q^2}{M_D^2}\right)^{-2}, \tag{4.12}$$

$$G_E^n\left(q^2\right) = \frac{0.2q^2}{M_D^2}\left(1+\frac{1.13q^2}{M_D^2}\right)^{-1}\left|G_M^n\left(q^2\right)\right|, \tag{4.13}$$

com $M_D^2 = 0.71GeV^2$. Os gráficos da figura(4.1) mostram os ajustes deste fatores de forma aos dados experimentais.

No caso da interação πN, para a determinação do fator de forma, estuda-se a fonte do campo do píon, que é definida pela equação de movimento:

$$\left(\nabla^2 - m_\pi^2\right)\pi^a\left(\vec{r}\right) = J_\pi^a\left(\vec{r}\right), \tag{4.14}$$

onde a fonte $J_\pi^a\left(\vec{r}\right)$, tem a forma de:

$$J_\pi^a\left(\vec{r}\right) = g\bar{\psi}\left(\vec{r}\right)i\gamma^5\tau^a\psi\left(\vec{r}\right). \tag{4.15}$$

Isto sugere que o elemento de matriz para uma fonte puntiforme no espaço dos momentos, seja dado por:

$$\langle p', J'^z, T'^z\left|J_\pi^a(0)\right|p, J^z, T^z\rangle = ig\bar{u}^{J'^z}\left(\vec{p}\,'\right)\gamma^5\vec{T}_a u^{J^z}\left(\vec{p}\right). \tag{4.16}$$

Para núcleons extensos a constante g é modificada para:

$$g \rightarrow g\left(k^2\right) = gG\left(k^2\right), \tag{4.17}$$

sendo que $G(k^2)$ é o fator de forma. Existem muitas parametrizações possíveis para $G(k^2)$. Uma forma comumente adotada é:

$$G(k^2) = \left[\frac{\Lambda_M^2 - m_\pi^2}{\Lambda_M^2 - k^2}\right]^n, \tag{4.18}$$

onde Λ_M é um parâmetro fenomenológico, representando efetivamente o tamanho do núcleon. Esta forma é conhecida como fator de forma multipolar de ordem n. Outra expressão bastante usada é a gaussiana, dada por:

$$G(k^2) = \exp\frac{k^2 - m_\pi^2}{\Lambda_G^2}. \tag{4.19}$$

Analogamente ao caso eletromagnético, é possível definir o raio pseudo-escalar do núcleon pela relação:

$$\left\langle \vec{r}_\pi^{\,2} \right\rangle = \frac{-6}{G(0)} \left.\frac{\partial G\left(\vec{k}^2\right)}{\partial \vec{k}^2}\right|_{\vec{k}^2=0}. \tag{4.20}$$

Usando, por exemplo, $n = 1$ em (4.18) obtemos a forma monopolar de $G(k^2)$ e substituindo este último na expressão (4.20) para calcular o raio quadrático médio pseudo-escalar, obtemos:

$$\left\langle \vec{r}_\pi^{\,2} \right\rangle = \frac{6}{\Lambda_\pi^2}. \tag{4.21}$$

O grupo de Bonn [Mac+87] utiliza $\Lambda_\pi \sim 1.3GeV$, o que corresponde a um raio da interação πN de:

$$\sqrt{\langle \vec{r}_\pi^{\,2} \rangle} = 0.371\ fm. \tag{4.22}$$

Por outro lado, usando o valor exprerimental $\sqrt{\langle \vec{r}_\pi^{\,2} \rangle} = 0.54\ fm$ [DV 80], obtemos:

$$\Lambda_\pi = 0,895GeV. \tag{4.23}$$

4.2 O OPEP e o fator de forma πN

Nesta seção consideramos, inicialmente, a interação entre dois núcleons puntiformes devida à troca de um píon. O potencial correspondente é conhecido como OPEP (one pion exchange potential) e representado pelo diagrama de Feynman da figura (4.2), onde os núcleons designados por N_a e N_b, considerados puntuais, trocam um píon. A partir do diagrama constrói-se a seguinte amplitude relativística de Feynman no espaço dos momentos:

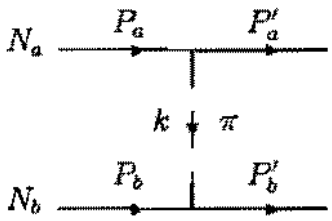


Figura 4.2: Diagrama do OPEP.

$$T_\pi = -\frac{g^2}{4M^2}\vec{T}^a \cdot \vec{T}^b [\bar{u}(\vec{P}')\not{k}\gamma_5 u(\vec{P})]^{(a)} \frac{1}{k^2 - m_\pi^2} [\bar{u}(\vec{P}')\not{k}\gamma_5 u(\vec{P})]^{(b)}. \tag{4.24}$$

onde g é a constante de acoplamento πN, m_π é a massa do píon, M é a massa do núcleon e $\vec{T}^a = \left\langle I^z \middle| \vec{T} \middle| I^z \right\rangle^{(a)}$ representa o valor esperado de isospin do núcleon a.

Para se obter o OPEP, convém irmos para o sistema do centro de massa, onde os quadrimomentos podem ser escritos como

$$\begin{aligned} P_a &= (E, \vec{P}), & P'_a &= (E, \vec{P}'), \\ P_b &= (E, -\vec{P}), & P'_b &= (E, -\vec{P}'), \\ & & k &= (0, \vec{P} - \vec{P}'). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Neste referencial temos, portanto,

$$\frac{1}{k^2 - m_\pi^2} = -\frac{1}{\vec{k}^2 + m_\pi^2}. \tag{4.26}$$

Empregando a notação de duas componentes do apêndice A para as matrizes e spinores de Dirac, obtemos

$$\begin{aligned} [\bar{u}(\vec{P}')\not{k}\gamma_5 u(\vec{P})] &= \frac{1}{E+M} \langle J^z | [-(E+M)\vec{\Sigma}\cdot\vec{k} - \vec{\Sigma}\cdot\vec{P}'(\vec{\Sigma}\cdot\vec{k})\vec{\Sigma}\cdot\vec{P}] | J^z \rangle = \\ &= -2M \langle J^z | \vec{\Sigma}\cdot\vec{k} | J^z \rangle . \end{aligned} \tag{4.27}$$

Notando que as amplitudes relativística T_π e não relativística t_π são relacionadas por

$$t_\pi \underset{n.r.}{\leftarrow} \frac{1}{4M^2} T_\pi, \tag{4.28}$$

obtemos

$$t_\pi = \frac{g^2}{4M^2}\vec{T}^a \cdot \vec{T}^b \, \vec{\Sigma}^a \cdot \vec{k} \frac{1}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} \vec{\Sigma}^b \cdot \vec{k}, \tag{4.29}$$

onde $\vec{\Sigma}^a = \langle J^z | \vec{\Sigma} | J^z \rangle^{(a)}$ é o valor esperado do spin do núcleon da linha a.

A expressão (4.24) representa uma amplitude de transição, em primeira ordem de perturbação, para o processo $N + N \rightarrow N + N$, onde a interação é mediada pelo píon. No contexto da teoria quântica de campos, a obtenção deste resultado não requer o uso do conceito de potencial, que é secundário. Por outro lado, se quisermos obter o mesmo resultado no contexto da mecânica quântica não-relativística, onde o conceito de potencial é prioritário, é preciso estabelecer uma regra de equivalência entre os dois formalismos. No presente caso, tal regra é obtida impondo-se que a amplitude de espalhamento em primeira aproximação de Born, dada pelo valor esperado do potencial calculado nos estados incidentes e emergentes do sistema NN, seja relacionada a t_π por:

$$< \vec{P}'_a \vec{P}'_b | \hat{V}_\pi | \vec{P}_a \vec{P}_b > \equiv -(2\pi)^3 \delta(\vec{P}'_a + \vec{P}'_b - \vec{P}_a - \vec{P}_b) t_\pi, \tag{4.30}$$

onde a delta vem da condição de conservação de momento.

Desta forma, podemos expressar o OPEP no espaço dos momentos como sendo

$$\begin{aligned} < \vec{P}'_a \vec{P}'_b | \hat{V}_\pi | \vec{P}_a \vec{P}_b >_{CM} \equiv & -(2\pi)^3 \delta(\vec{P}'_a + \vec{P}'_b - \vec{P}_a - \vec{P}_b) \frac{g^2}{4M^2} \times \\ & \times \vec{T}^a \cdot \vec{T}^b \; \vec{\Sigma}^a \cdot \vec{k} \frac{1}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} \vec{\Sigma}^b \cdot \vec{k}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Realizando a transformada de Fourier desta expressão, chega-se ao potencial no espaço de configuração:

$$< \vec{R}'_a \vec{R}'_b | \hat{V}_\pi | \vec{R}_a \vec{R}_b > = \delta(\vec{R}'_a - \vec{R}_a) \delta(\vec{R}'_b - \vec{R}_b) V_\pi(\vec{X}), \tag{4.32}$$

onde $\vec{X} = \vec{R}_a - \vec{R}_b$ e

$$V_\pi(\vec{X}) = -\frac{g^2}{4M^2} \vec{T}^a \cdot \vec{T}^b \Sigma_i^a \Sigma_j^b \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} k_i k_j \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{X}}}{\vec{k}^2 + m_\pi^2}. \tag{4.33}$$

Alternativamente, podemos escrever

$$V_\pi(\vec{X}) = \frac{g^2}{4M^2} \vec{T}^a \cdot \vec{T}^b \; \vec{\Sigma}^a \cdot \nabla_{\vec{X}} \; \vec{\Sigma}^b \cdot \nabla_{\vec{X}} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{X}}}{\vec{k}^2 + m_\pi^2}. \tag{4.34}$$

A integral em $\vec{k}$ é calculada por resíduos e resulta em

$$\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{X}}}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} = \frac{m_\pi}{4\pi} U_0(X), \tag{4.35}$$

$$U_0(X) = \frac{e^{-m_\pi X}}{m_\pi X}, \tag{4.36}$$

onde a função $U_0(X)$ é conhecida como função de Yukawa. Assim, o OPEP no espaço de configuração pode ser escrito como:

$$V_\pi(\vec{X}) = \left(\frac{g}{2M}\right)^2 \frac{m_\pi}{4\pi} \vec{\tau}^a \cdot \vec{\tau}^b \; \vec{\Sigma}^a \cdot \nabla_{\vec{X}} \; \vec{\Sigma}^b \cdot \nabla_{\vec{X}} \; \frac{e^{-m_\pi X}}{m_\pi X}. \tag{4.37}$$

A aplicação dos gradientes pode ser feita com o auxílio do seguinte resultado [Rob 87]:

$$\frac{\partial^2 U_0(X)}{\partial X_i \partial X_j} = \frac{m_\pi}{3} \left\{ \delta_{ij} \left[U_0(X) - \frac{4\pi}{m_\pi^3} \delta(\vec{X}) \right] + \left(\frac{3X_i X_j}{X^2} - \delta_{ij} \right) U_2(X) \right\}, \tag{4.38}$$

onde $U_2(X)$ é dada por:

$$U_2(X) = \left(1 + \frac{3}{m_\pi X} + \frac{3}{(m_\pi X)^2} \right) U_0(X). \tag{4.39}$$

Podemos, então, reescrever os operadores que envolvem os gradientes como sendo:

$$\vec{\Sigma}^a \cdot \nabla_{\vec{X}} \; \vec{\Sigma}^b \cdot \nabla_{\vec{X}} = \Sigma_i^a \Sigma_j^b \frac{\partial^2}{\partial_{X_i} \partial_{X_j}} \tag{4.40}$$

e usar (4.40) e (4.38) em (4.34) para obter a seguinte expressão fatorada, válida para núcleons puntiformes:

$$V_\pi = \frac{m_\pi}{12\pi} \left(\frac{g m_\pi}{2M} \right)^2 \vec{\tau}^a \cdot \vec{\tau}^b \left\{ \vec{\Sigma}^a \cdot \vec{\Sigma}^b [U_0(X) - \frac{4\pi}{m_\pi} \delta(\vec{X})] + S_{12} U_2(X) \right\} \tag{4.41}$$

onde o operador tensorial S_{12} é dado por:

$$S_{12} = 3\vec{\Sigma}^a \cdot \hat{X} \; \vec{\Sigma}^a \cdot \hat{X} - \vec{\Sigma}^a \cdot \vec{\Sigma}^b. \tag{4.42}$$

Este modelo dinâmico descreve muito bem a região de alcance maior que 2,5 fm, fornecendo o termo tensorial correto para explicar o momento de quadrupolo do dêuteron [Bal+94]. Para a descrição da região mais interna, é necessária a inclusão de fatores de forma.

Como vimos na seção 4.1, costuma-se introduzir esses fatores de forma fenomenologicamente, considerando-se as constantes de acoplamento como sendo dependentes do quadrimomento do píon:

$$g \rightarrow g(k^2) = gG(k^2), \tag{4.43}$$

onde $G(k^2)$ deve ser tal que $G(m_\pi^2) = 1$, para que o valor experimental da constante de acoplamento seja recuperado para píons na camada de massa.

A operação indicada na equação (4.43) permite-nos calcular as modificações ao OPEP devidas ao fator de forma. Para tanto, recalculamos a expressão (4.34), seguindo o trabalho de Batistel [Bat 94], e obtemos:

$$V_\pi(\vec{X},[G]) = \frac{g^2}{4M^2}\vec{T}^a\cdot\vec{T}^b\,\vec{\Sigma}^a\cdot\nabla_{\vec{X}}\,\vec{\Sigma}^b\cdot\nabla_{\vec{X}}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{X}}}{\vec{k}^2+m_\pi^2}G^2(\vec{k}^2). \tag{4.44}$$

A expressão $V_\pi(\vec{X},[G])$ indica que, agora, o potencial é uma função da distância e um funcional do fator de forma. Procedendo de forma análoga ao cálculo de (4.41), chegamos à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} V_\pi(\vec{X},[G]) &= \frac{1}{3}\left(\frac{gm_\pi}{2M}\right)^2\frac{m_\pi}{4\pi}\vec{T}^a\cdot\vec{T}^b\left\{\vec{\Sigma}^a\cdot\vec{\Sigma}^b[U_0(\vec{X},[G])-D(\vec{X},[G])]+\right.\\ &\left.+[3(\vec{\Sigma}^a\cdot\hat{X})(\vec{\Sigma}^b\cdot\hat{X})-\vec{\Sigma}^a\cdot\vec{\Sigma}^b]U_2(\vec{X},[G])\right\}, \end{aligned} \tag{4.45}$$

onde

$$\begin{aligned} D(X,[G]) &= \frac{4\pi}{m_\pi}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{X}\cdot\vec{k}}G^2(\vec{k}^2),\\ U_0(X,[G]) &= \frac{4\pi}{m_\pi}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\vec{k}^2+m_\pi^2}e^{-i\vec{X}\cdot\vec{k}}G^2(\vec{k}^2),\\ U_2(X,[G]) &= \frac{2\pi}{m_\pi^3}\left(\frac{3X_iX_j}{X^2}-\delta_{ij}\right)\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{(-k_ik_j)}{\vec{k}^2+m_\pi^2}e^{-i\vec{X}\cdot\vec{k}}G^2(\vec{k}^2). \end{aligned} \tag{4.46}$$

Assim, dada a função $G(\vec{k}^2)$, pode-se realizar a integração e obter o OPEP corrigido. Como G só depende do módulo de $\vec{k}$, podemos efetuar as integrações angulares, e obter

$$\begin{aligned} D(X,[G]) &= \frac{2}{\pi m_\pi^3}\int_0^\infty dk\vec{k}^2G^2(\vec{k}^2)j_0(kX),\\ U_0(X,[G]) &= \frac{2}{\pi m_\pi}\int_0^\infty dk\frac{\vec{k}^2}{\vec{k}^2+m_\pi^2}G^2(\vec{k}^2)j_0(kX),\\ U_2(X,[G]) &= \frac{2}{\pi m_\pi^3}\int_0^\infty dk\frac{\vec{k}^4}{\vec{k}^2+m_\pi^2}G^2(\vec{k}^2)j_2(kX). \end{aligned} \tag{4.47}$$

As funções $U_0(X,[G])$ e $U_2(X,[G])$ podem ser sintetizadas na seguinte forma

$$U_l(X,[G]) = \frac{2}{\pi m_\pi^{l+1}}\int_0^\infty dk\frac{\vec{k}^{l+2}}{\vec{k}^2+m_\pi^2}G^2(\vec{k}^2)j_l(kX). \tag{4.48}$$

Se desejarmos, podemos inverter essas expressões e recuperar o fator de forma, através dos seguintes resultados

$$G^2(\vec{k}^2) = m_\pi^3 \int_0^\infty dX X^2 D(X,[G]) j_0(kX), \tag{4.49}$$

$$G^2(\vec{k}^2) = \frac{m_\pi^{l+1}}{k^l}(\vec{k}^2 + m_\pi^2) \int_0^\infty dX X^2 U_l(X,[G]) j_l(kX). \tag{4.50}$$

De modo bastante geral, o potencial devido à troca de um píon, incluindo fatores de forma, é dado por

$$V_\pi(X,[G]) = \vec{T}^a \cdot \vec{T}^b[-\vec{\Sigma}^a \cdot \vec{\Sigma}^b V_0^-(X,[G]) + S_{12} V_2^-(X,[G])], \tag{4.51}$$

onde

$$V_l^-(X,[G]) = \frac{1}{6\pi^2 m_\pi^2}\left(\frac{g m_\pi}{2M}\right)^2 \int_0^\infty dk \frac{\vec{k}^4}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} G^2(\vec{k}^2) j_l(kX), \tag{4.52}$$

e o fator de forma pode ser obtido a partir das componentes do potencial através da expressão

$$G^2(\vec{k}^2) = \left(\frac{2M}{g m_\pi}\right)^2 \frac{12 m_\pi^2 \pi(\vec{k}^2 + m_\pi^2)}{\vec{k}^2} \int_0^\infty dX X^2 V_l^-(X,[G]) j_l(kX). \tag{4.53}$$

4.3 O potencial NN: a contribuição dos quarks

Descrevemos, aqui, o método utilizado para se obter o potencial núcleon-núcleon a partir dos graus de liberdade dos quarks, sem considerar a possibilidade de haver trocas de quarks entre os aglomerados. Partimos da equação de Schrödinger[1] independente do tempo para o sistema de dois núcleons puntiformes, localizados em $\vec{R}_a$ e $\vec{R}_b$, que interagem entre si por meio de um potencial $V_{NN}(\vec{R}_a - \vec{R}_b)$:

$$\left\{\frac{\nabla^2_{\vec{R}_a}}{2M} + \frac{\nabla^2_{\vec{R}_b}}{2M} + E_R\right\} \Phi\left(\vec{R}_a, \vec{R}_b\right) = V_{NN}(\vec{R}_a - \vec{R}_b)\Phi\left(\vec{R}_a, \vec{R}_b\right). \tag{4.54}$$

onde

$$\Phi\left(\vec{R}_a, \vec{R}_b\right) = \phi\left(\vec{R}_a, \vec{R}_b\right) |J, J^z\rangle |T, T^z\rangle. \tag{4.55}$$

e $|J, J^z\rangle |T, T^z\rangle$ são, respectivamente, estados de spin e isospin dados no apêndice C.

Supomos, em seguida, que cada núcleon seja um aglomerado de tres quarks constituintes, representados por q_1, q_2, q_3 para o núcleon a e q_4, q_5, q_6 para o núcleon b. Genericamente,

[1] Usamos o sistema de unidades naturais onde $\hbar = c = 1$.

denotamos as interações entre os quarks por $V_{qq}\left(q_1q_2q_3;q_4q_5q_6\right)$ e a equação de Schrödinger estacionária para este sistema de seis corpos é escrita como

$$\mathcal{H}|q_1q_2q_3;q_4q_5q_6>=E|q_1q_2q_3;q_4q_5q_6>, \tag{4.56}$$

onde

$$\mathcal{H}=\sum_{i=1}^{6}\left(-\frac{\nabla_i^2}{2m}\right)+V_{qq}\left(q_1q_2q_3;q_4q_5q_6\right), \tag{4.57}$$

pois supomos que todos os quarks têm a mesma massa m. A obtenção da solução geral da equação (4.56) é extremamente difícil e, por isso, torna-se necessário o uso de hipóteses simplificadoras.

A primeira hipótese que fazemos é a da aproximação de aglomerados, supondo que, para distâncias grandes e intermediárias, o vetor de estado do sistema de seis quarks possa ser aproximado pelo produto dos vetores de estado de dois aglomerados:

$$|q_1q_2q_3q_4q_5q_6\rangle=|q_1q_2q_3\rangle\otimes|q_4q_5q_6\rangle. \tag{4.58}$$

Do ponto de vista físico, esta hipótese corresponde à idéia de que, para as regiões consideradas, não ocorrem trocas de quarks de um aglomerado para outro.

Supomos, também, que o potencial V_{qq} seja composto por um termo harmônico W, de curto alcance, e por um termo Π, de longo alcance, associado à troca de um píon:

$$V_{qq}=W+\Pi. \tag{4.59}$$

Para podermos solucionar o problema, fazemos mais duas simplificações. A primeira delas consiste em supor que o potencial W só atue no interior de cada aglomerado, podendo ser desprezado entre quarks de aglomerados diferentes. Esta suposição é justificada pelo fato de W ser um potencial confinante, de curto alcance. Assim, escrevemos

$$W\cong W_a+W_b, \tag{4.60}$$

onde

$$W_i=\frac{3K}{2}\left(\vec{\rho}_i^{\,2}+\vec{\lambda}_i^2\right),\ i=a,b.$$

sendo $\vec{\rho}_i$ e $\vec{\lambda}_i$ as coordenadas internas definidas no apêndice B e dadas na figura (4.3). A segunda hipótese consiste em admitir que a ação do potencial Π, de longo alcance, seja mais

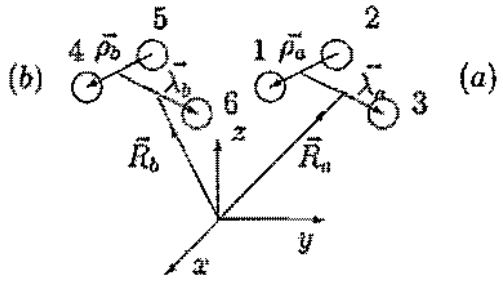


Figura 4.3: Sistema de aglomerados de quarks a e b.

importante entre quarks de aglomerados diferentes do que no interior de um aglomerado:

$$\Pi \cong \Pi_{ab} = \sum_{v=1}^{3} \sum_{w=4}^{6} \Pi^{vw} \left(\vec{r}_v \left(\vec{R}_a, \vec{\rho}_a, \vec{\lambda}_a \right) - \vec{r}_w \left(\vec{R}_b, \vec{\rho}_b, \vec{\lambda}_b \right) \right), \tag{4.61}$$

sendo Π^{vw} o potencial de longo alcance entre os quarks v e w, $\vec{r}_v \left(\vec{R}_a, \vec{\rho}_a, \vec{\lambda}_a \right)$ a coordenada do v-ésimo quark no aglomerado a e $\vec{r}_w \left(\vec{R}_b, \vec{\rho}_b, \vec{\lambda}_b \right)$ a coordenada do w-ésimo quark no aglomerado b, escritas em função das coordenadas mostradas na figura (4.3) e explicitadas nas equações B.5-7.

Assim, o potencial V_{qq} pode ser reescrito como

$$V_{qq} \cong W_a + W_b + \Pi_{ab}. \tag{4.62}$$

Em princípio, o espaço de Hilbert do nosso problema, no contexto da aproximação de aglomerados (equação 4.58), deveria envolver núcleons, ressonâncias Roper [Wil 71], deltas e todos os demais estados de tres quarks. Entretanto, o tratamento exato do setor de tres quarks é bastante complexo, e recorremos novamente a uma hipótese simplificadora, truncando o espaço de Hilbert e restringindo-nos apenas aos estados dos núcleons. Assim, denotando os estados dos núcleons a e b por $|N_a\rangle$ e $|N_b\rangle$, temos:

$$|q_1 q_2 q_3\rangle \cong |N_a\rangle, \tag{4.63}$$

$$|q_4 q_5 q_6\rangle \cong |N_b\rangle. \tag{4.64}$$

Para as coordenadas dos quarks, adotamos as definições mostradas na figura (4.3) e detalhadas no apêndice B. Cada um dos núcleons obedece a uma equação de Schrödinger para o sistema de tres quarks, discutida em detalhes no apêndice D. Por exemplo, para o núcleon a, temos:

$$\mathcal{H}_a |N_a\rangle = E_a |N_a\rangle, \tag{4.65}$$

onde a hamiltoniana $\mathcal{H}_a$ na representação de coordenadas:

$$\mathcal{H}_a = -\frac{\nabla^2_{R_a}}{6m} - \frac{\nabla^2_{\rho_a}}{2m} - \frac{\nabla^2_{\lambda_a}}{2m} + \frac{3K}{2}(\vec{\rho}_a{}^2 + \vec{\lambda}_a^2), \tag{4.66}$$

descreve um sistema de tres quarks ligados, dois a dois, por molas de constante K. A energia E_a é dada por (D.46)

$$E_a = \frac{\vec{P}_a^2}{2\,(3m)} + 3\omega, \tag{4.67}$$

onde

$$\omega = \sqrt{\frac{3K}{m}} \tag{4.68}$$

O estado $|N_a\rangle$ para núcleons livres, obtido no apêndice D, é representado por $\Psi_a\left(\vec{R}, \vec{\rho}, \vec{\lambda}\right)$:

$$\begin{aligned} \Psi_a\left(\vec{R}, \vec{\rho}, \vec{\lambda}\right) &= \frac{\alpha_a^3}{\pi^{3/2}} \frac{e^{i\vec{P}_a \cdot \vec{R}_a}}{3^{3/4}\,(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{\alpha_a^2}{2}(\vec{\rho}_a{}^2 + \vec{\lambda}_a^2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2}, S_a^z &> {}_{ms}|\frac{1}{2}, I_a^z >_{ms} + |\frac{1}{2}, S_a^z >_{ma} |\frac{1}{2}, I_a^z >_{ma}), \end{aligned} \tag{4.69}$$

onde ms = misto simétrico e ma = misto antisimétrico. A descrição do núcleon b é totalmente análoga. Com estas hipóteses, a equação para o sistema de seis quarks (vide 4.57) toma a forma de

$$[\mathcal{H}_a + \mathcal{H}_b + \Pi_{ab}]\,|\Psi_{a,b}\rangle = E\,|\Psi_{a,b}\rangle\,. \tag{4.70}$$

Para se obter o potencial núcleon-núcleon em função das variáveis dos quarks, precisamos estabelecer a relação entre as equações (4.54) e (4.70). Começando pela parte de spin e isospin, construímos o estado do sistema de dois núcleons em função dos estados dos dois aglomerados como sendo

$$|J, J^z\rangle\,|T, T^z\rangle = \sum_{S_a^z, S_b^z = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{I_a^z, I_b^z = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \langle S_a^z, S_b^z | J^z\rangle\,\langle I_a^z, I_b^z | T^z\rangle\,|S_a^z, I_a^z\rangle\,|S_b^z, I_b^z\rangle\,, \tag{4.71}$$

onde, usando a notação da equação (D.15), temos:

$$\begin{aligned} \left|S_a^z, I_a^z\right\rangle |S_b^z, I_b^z\rangle &= \frac{1}{2}(|\frac{1}{2}, S_a^z >_{ms} |\frac{1}{2}, I_a^z >_{ms} + |\frac{1}{2}, S_a^z >_{ma} |\frac{1}{2}, I_a^z >_{ma}) \\ \times(|\frac{1}{2}, S_b^z &> {}_{ms}|\frac{1}{2}, I_b^z >_{ms} + |\frac{1}{2}, S_b^z >_{ma} |\frac{1}{2}, I_b^z >_{ma} \end{aligned} \tag{4.72}$$

A estrutura da parte espacial do estado de dois aglomerados, pode ser expressa da seguinte forma:

$$|\Psi_{a,b}\rangle = \phi\left(\vec{R}_a, \vec{R}_b\right)\left|\varphi_{a,b}\left(\vec{\rho}, \vec{\lambda}\right)\right\rangle, \tag{4.73}$$

onde $\left|\varphi_{a,b}\left(\vec{\rho},\vec{\lambda}\right)\right\rangle$ representa os graus de liberdade internos no espaço de configuração e é dado por

$$\left|\varphi_{a,b}\left(\vec{\rho},\vec{\lambda}\right)\right\rangle = \frac{\alpha_a^3}{\pi^{3/2}}\frac{\alpha_b^3}{\pi^{3/2}}\exp\left(-\frac{\alpha_a^2}{2}(\vec{\rho}_a{}^2+\vec{\lambda}_a^2)\right)\exp\left(-\frac{\alpha_b^2}{2}(\vec{\rho}_b{}^2+\vec{\lambda}_b^2)\right) \tag{4.74}$$

Assim, o estado de dois aglomerados toma a forma de

$$|\Psi_{a,b}\rangle = \phi\left(\vec{R}_a,\vec{R}_b\right)\left|\varphi_{a,b}\left(\vec{\rho},\vec{\lambda}\right)\right\rangle|J,J^z\rangle\,|T,T^z\rangle\,. \tag{4.75}$$

Multiplicando (4.70) à esquerda por $<\varphi_{a,b}\left(\vec{\rho},\vec{\lambda}\right)|$ e integrando sobre as variáveis internas, obtemos um resultado com a mesma estrutura da equação (4.54)

$$\left\{\frac{\nabla^2_{R_a}}{6m}+\frac{\nabla^2_{R_b}}{6m}+E_R\right\}\Phi\left(\vec{R}_a,\vec{R}_b\right) = V_{NN}(\vec{R}_a,\vec{R}_b)\Phi\left(\vec{R}_a,\vec{R}_b\right) \tag{4.76}$$

onde

$$V_{NN}(\vec{R}_a,\vec{R}_b) = \left\langle\varphi_{a,b}\left(\vec{\rho},\vec{\lambda}\right)\right|\Pi_{ab}\left|\varphi_{a,b}\left(\vec{\rho},\vec{\lambda}\right)\right\rangle \tag{4.77}$$

e

$$E_R = E - 6\omega \tag{4.78}$$

Desta forma obtemos, a partir das interações microscópicas entre quarks, o potencial macroscópico entre núcleons. Substituindo (4.74) em (4.77), temos

$$V_{NN}(\vec{R}_a,\vec{R}_b)\,|J,J^z\rangle\,|T,T^z\rangle = \frac{\alpha_a^6\alpha_b^6}{\pi^6}\int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2(\vec{\rho}_a^2+\vec{\lambda}_a^2)-\alpha_b^2(\vec{\rho}_b^2+\vec{\lambda}_b^2)}\Pi_{ab}\,|J,J^z\rangle\,|T,T^z\rangle\,. \tag{4.79}$$

4.4 O potencial NN: operadores de um corpo

Nesta seção vamos supor que a interação entre os quarks de aglomerados distintos seja devida somente à troca de um píon. Assim, adotamos para o potencial Π_{ab} a expressão do OPEP, dada pela equação (4.34)

$$\Pi_{ab} = \sum_{v=1}^{3}\sum_{w=4}^{6}\Pi^{qq}_{vw}, \tag{4.80}$$

onde

$$\Pi^{qq}_{vw} = -\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2\vec{\tau}_v\cdot\vec{\tau}_w\sigma^i_v\sigma^j_w\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{k^ik^j}{\vec{k}^2+m_\pi^2}e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_v-\vec{r}_w)}. \tag{4.81}$$

Este resultado foi obtido trocando, na equação (4.33), as grandezas relativas aos núcleons $\vec{\Sigma}^a$, $\vec{T}^a$, $g, M, \vec{R}_a$ e $\vec{R}_b$, pelas respectivas grandezas dos quarks, $\vec{\sigma}_v, \vec{\tau}_v, g_{\pi q}, m, \vec{r}_v$ e $\vec{r}_w$. É importante lembrar que, nesta expressão, $v = 1, 2, 3$ e $w = 4, 5, 6$, indicando que o potencial corresponde a operadores de um corpo para cada um dos aglomerados.

Substituindo esta expressão em V_{NN} temos

$$\begin{aligned} V_{NN}(\vec{R}_a, \vec{R}_b)\,|J, J^z\rangle\,|T, T^z\rangle &= -\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{\alpha_a^6}{\pi^3}\frac{\alpha_b^6}{\pi^3}\left\{\sum_{v=1}^{3}\sum_{w=4}^{6}\sigma_v^i\tau_v^l\sigma_w^j\tau_w^l\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{k^i\,k^j}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\right. \\ &\quad \times\left.\int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2(\vec{\rho}_a^2+\lambda_a^2)-\alpha_b^2(\vec{\rho}_b^2+\lambda_b^2)}e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_v-\vec{r}_w)}\right\} \\ &\quad \times|J, J^z\rangle\,|T, T^z\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.82}$$

Estamos interessados em escrever o operador V como função dos graus de liberdade do núcleon. Para tanto, consideramos inicialmente os setores de spin e isospin, usando (4.71) e os seguintes resultados obtidos no apêndice E:

$$\sigma_v^i\tau_v^l\,|S_a^z, I_a^z\rangle = \frac{5}{9}\Sigma_i^a\,T_l^a\,|S_a^z, I_a^z\rangle + ..., \tag{4.83}$$

$$\sigma_w^j\tau_w^l\,|S_b^z, I_b^z\rangle = \frac{5}{9}\Sigma_j^b\,T_l^b\,|S_b^z, I_b^z\rangle + ..., \tag{4.84}$$

onde i, j e l referem-se às componentes cartesianas dos operadores. Temos, portanto

$$\begin{aligned} V_{NN}(\vec{R}_a, \vec{R}_b)\,|J, J^z\rangle\,|T, T^z\rangle &= -\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{\alpha_a^6}{\pi^3}\frac{\alpha_b^6}{\pi^3}\sum_{v=1}^{3}\sum_{w=4}^{6}\left(\frac{5}{9}\right)^2\vec{T}^a\cdot\vec{T}^b\,\Sigma_i^a\Sigma_j^b\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{k^i\,k^j}{\vec{k}^2+m_\pi^2} \\ &\quad \times\int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2(\vec{\rho}_a^2+\lambda_a^2)-\alpha_b^2(\vec{\rho}_b^2+\lambda_b^2)}e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_v-\vec{r}_w)} \\ &\quad \times|J, J^z\rangle\,|T, T^z\rangle + ... \end{aligned} \tag{4.85}$$

Nesta expressão, as reticências indicam outros estados de spin e isospin que, no contexto das aproximações adotadas neste trabalho, serão omitidos.

Usando as relações do apêndice B, expressamos a diferença $\vec{r}_v - \vec{r}_w$ como:

$$(\vec{r}_v - \vec{r}_w) = (\vec{R}_a - \vec{R}_b) + c_{v\rho}\vec{\rho}_a + c_{v\lambda}\vec{\lambda}_a - c_{w\rho}\vec{\rho}_b - c_{w\lambda}\vec{\lambda}_b. \tag{4.86}$$

onde os coeficientes $c_{x\rho}$, e $c_{x\lambda}$, são dados por:

x	$c_{x\rho}$	$c_{x\lambda}$
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
2	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
3	0	$-\frac{2}{\sqrt{6}}$
4	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
5	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
6	0	$-\frac{2}{\sqrt{6}}$

(4.87)

Para simplificar a equação (4.85), consideramos o operador potencial e escrevemos:

$$V_{NN}(\vec{R}_a, \vec{R}_b) = -\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{m_\pi}{4\pi} \sum_{v=1}^{3} \sum_{w=1}^{6} \left(\frac{5}{9}\right)^2 \vec{\mathcal{T}}^a \cdot \vec{\mathcal{T}}^b \, \Sigma_i^a \Sigma_j^b U_{vw}^{ij}, \tag{4.88}$$

sendo:

$$U_{vw}^{ij} = \frac{4\pi}{m_\pi} \frac{\alpha_a^6}{\pi^3} \frac{\alpha_b^6}{\pi^3} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{R}_a - \vec{R}_b)} I_{vw}, \tag{4.89}$$

onde I_{vw} é a integral gaussiana dada por:

$$I_{vw} = \int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2(\vec{\rho}_a^2 + \lambda_a^2) - \alpha_b^2(\vec{\rho}_b^2 + \lambda_b^2) - i\vec{k}\cdot\left(c_{v\rho}\vec{\rho}_a + c_{v\lambda}\vec{\lambda}_a - c_{w\rho}\vec{\rho}_b - c_{w\lambda}\vec{\lambda}_b\right)}. \tag{4.90}$$

A integral I_{vw} é obtida no apêndice F, equação (F.4), e tem o seguinte resultado, independente de v e w:

$$I_{vw} = \frac{\pi^6}{\alpha_a^6 \alpha_b^6} e^{-\vec{k}^2\left(\frac{1}{6\alpha_a^2} + \frac{1}{6\alpha_b^2}\right)}. \tag{4.91}$$

Substituindo este resultado em (4.89) e definindo $\vec{X} \equiv \vec{R}_a - \vec{R}_b$ (equação B.13), temos

$$U_{vw}^{ij} = \frac{4\pi}{m_\pi} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{k^i k^j e^{-i\vec{k}\cdot\vec{X} - \frac{\vec{k}^2}{6}A}}{\vec{k}^2 + m_\pi^2}, \tag{4.92}$$

onde

$$A = \frac{1}{\alpha_a^2} + \frac{1}{\alpha_b^2}. \tag{4.93}$$

Consequentemente, o potencial entre os dois aglomerados é dado por

$$V_{NN}(X) = -\left(\frac{5}{3}\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{m_\pi}{4\pi} \vec{\mathcal{T}}^a \cdot \vec{\mathcal{T}}^b \, \vec{\Sigma}_i^a \vec{\Sigma}_j^b \left(\frac{4\pi}{m_\pi} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{k^i k^j e^{-i\vec{k}\cdot\vec{X} - \frac{\vec{k}^2}{6}A}}{\vec{k}^2 + m_\pi^2}\right). \tag{4.94}$$

Para simplificar o integrando, escrevemos

$$V_{NN}(X) = \left(\frac{5}{3}\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{m_\pi}{4\pi} \vec{\mathcal{T}}^a \cdot \vec{\mathcal{T}}^b \, \vec{\Sigma}^a \cdot \vec{\nabla}_X \, \vec{\Sigma}^b \cdot \vec{\nabla}_X \left(\frac{4\pi}{m_\pi} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{X} - \frac{\vec{k}^2}{6}A}}{\vec{k}^2 + m_\pi^2}\right). \tag{4.95}$$

A integral nesta expressão pode ser obtida analiticamente. Para tanto, escrevemos

$$I(X) = \frac{4\pi}{m_\pi} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{X} - \frac{\vec{k}^2}{6}A}}{\vec{k}^2 + m_\pi^2}. \tag{4.96}$$

Integrando $I(X)$ nos ângulos, obtemos

$$I(X) = \frac{2}{\pi m_\pi} \int dk \frac{k^2 e^{\frac{-k^2}{6}A}}{k^2 + m_\pi^2} j_0(kX), \tag{4.97}$$

onde aqui $k = \left|\vec{k}\right|$ e $j_0(kX)$ é a função de Bessel esférica, dada por:

$$j_0(kX) = \frac{\sin(kX)}{kX}. \tag{4.98}$$

A integral em k é extraída da tabela de integrais [Gra+94], cujo resultado é

$$\begin{aligned} I(X) &= -\frac{4\pi}{m_\pi} \frac{\exp\left(\frac{A}{6}m_\pi^2\right)}{8\pi X} \left[2\sinh m_\pi X + e^{-m_\pi X} erf\left(m_\pi\sqrt{A/6} - \frac{X}{2\sqrt{A/6}}\right) - \right. \\ &- \left. e^{m_\pi X} erf\left(m_\pi\sqrt{A/6} + \frac{X}{2\sqrt{A/6}}\right)\right], \end{aligned} \tag{4.99}$$

onde $erf(z)$ é a função erro de z.

Este resultado permite-nos escrever o potencial NN no espaço de configuração como:

$$V_{NN}(X) = \left(\frac{5}{3}\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{m_\pi}{4\pi} \vec{T}^a \cdot \vec{T}^b \, \vec{\Sigma}^a \cdot \vec{\nabla}_X \, \vec{\Sigma}^b \cdot \vec{\nabla}_X I(\vec{X}). \tag{4.100}$$

Analisamos, agora, o comportamento do potencial $V_{NN}(X)$ a grandes distâncias. Para isso usamos as seguintes propriedades da função erro:

$$erf(-z) = -erf(z), \tag{4.101}$$

$$erf(\infty) \cong 1. \tag{4.102}$$

Aplicando estes resultados em $I(X)$, temos:

$$I(X) \underset{x\to\infty}{\Rightarrow} \exp\left(\frac{m_\pi^2}{6\alpha_a^2}\right) \exp\left(\frac{m_\pi^2}{6\alpha_b^2}\right) \frac{e^{-m_\pi X}}{m_\pi X} \tag{4.103}$$

e o potencial para $X \to \infty$ é , então:

$$V_{NN}(X) \underset{x\to\infty}{\Rightarrow} \left(\frac{5}{3}\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{m_\pi}{4\pi} \exp\left(\frac{m_\pi^2}{6\alpha_a^2}\right) \exp\left(\frac{m_\pi^2}{6\alpha_b^2}\right) \vec{T}^a \cdot \vec{T}^b \, \vec{\Sigma}^a \cdot \vec{\nabla}_X \, \vec{\Sigma}^b \cdot \vec{\nabla}_X \frac{e^{-m_\pi X}}{m_\pi X}. \tag{4.104}$$

Assim, como esperado, o potencial entre os núcleons extensos reduz-se a uma forma semelhante à do OPEP para núcleons puntiformes, dada pela equação (4.37). Podemos explorar esta semelhança para obter uma relação entre as constantes de acoplamento πN e πq no aglomerado a:

$$\frac{5}{3}\frac{g_{\pi q}}{2m}\exp\left(\frac{m_\pi^2}{6\alpha_a^2}\right) = \frac{g}{2M}. \tag{4.105}$$

Para o aglomerado b, obtemos uma expressão totalmente análoga. Este resultado é idêntico ao obtido por Thomas e Holinde [Hol+93] e ele pode ser usado para se obter um valor para $g_{\pi q}$, dependente do parâmetro α_a que representa o tamanho do núcleon. Este resultado sugere que reescrevamos a expressão do potencial como:

$$\begin{aligned} V_{NN}(X) &= \left(\frac{5}{3}\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \exp\left(m_\pi^2\frac{A}{6}\right)\vec{T}^a\cdot\vec{T}^b\,\vec{\Sigma}^a\cdot\vec{\nabla}_X\,\vec{\Sigma}^b\cdot\vec{\nabla}_X \\ &\times\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{\exp\left(-i\vec{k}\cdot\vec{X}-\left(\vec{k}^2+m_\pi^2\right)\frac{A}{6}\right)}{\vec{k}^2+m_\pi^2}. \end{aligned} \tag{4.106}$$

Usando (4.105), temos:

$$V_{NN}(X) = \left(\frac{g}{2M}\right)^2\vec{T}^a\cdot\vec{T}^b\,\vec{\Sigma}^a\cdot\vec{\nabla}_X\,\vec{\Sigma}^b\cdot\vec{\nabla}_X\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{\exp\left(-i\vec{k}\cdot\vec{X}-\left(\vec{k}^2+m_\pi^2\right)\frac{A}{6}\right)}{\vec{k}^2+m_\pi^2}. \tag{4.107}$$

Comparando com (4.44) podemos identificar a contribuição ao fator de forma πN de cada núcleon, gerado pelo modelo de quarks constituintes, como sendo:

$$\tilde{G}_{a,b}(\vec{k}^2) = \exp\left(-\frac{\vec{k}^2+m_\pi^2}{6\alpha_{a,b}^2}\right). \tag{4.108}$$

Assim, o modelo produz um fator de forma gaussiano, dado por (4.19), com o parâmetro $\Lambda_G = \sqrt{6}\alpha_a$. É interessante compararmos (4.108) com o fator de forma monopolar. Isso pode ser feito expandindo-se tanto esta equação como a parametrização multipolar (4.18) em série:

$$\exp-\left(\frac{\vec{k}^2}{6\alpha_a^2}+\frac{m_\pi^2}{6\alpha_a^2}\right) \cong 1-\frac{\vec{k}^2+m_\pi^2}{6\alpha_a^2}+\ldots, \tag{4.109}$$

$$\frac{\Lambda_M^2-m_\pi^2}{\Lambda_M^2+\vec{k}^2} \cong 1-\frac{\vec{k}^2+m_\pi^2}{\Lambda_M^2}+\ldots. \tag{4.110}$$

Estes resultados permitem-nos concluir que o modelo também prevê $\Lambda_M = \sqrt{6}\alpha_a$.

4.5 Os potenciais entre quarks e diquarks

Estudamos, na seção anterior, a contribuição ao fator de forma πN dos processos devidos à troca de um píon entre dois quarks pertencentes a núcleons diferentes. Naqueles cálculos, não detalhamos se o tipo do vértice πq era pseudo-escalar ou pseudo-vetorial, pois ambos convergem para o mesmo resultado.

Nesta seção, consideramos o caso onde o píon interage com um diquark no interior do núcleon. De forma análoga à da seção anterior, obtemos inicialmente a contribuição da troca de um píon às interações quark-diquark, diquark-quark e diquark-diquark. Na figura (4.4), mostramos os diagramas dos processos envolvendo quarks e diquarks que contribuem para a interação NN.

No primeiro diagrama depois da igualdade, temos uma interação quark-quark com duas partículas espectadoras (quarks 2 e 5). O segundo e terceiro diagramas representam as duas possibilidades da interação quark-diquark com um quark espectador, enquanto que o quarto diagrama descreve a interação diquark-diquark. Os quarks espectadores não participam da interação e não contribuem para a parte própria da amplitude. Assim, para as amplitudes próprias, temos:

$$T^{qq} = [\bar{u}(\vec{p}_1{}')\Gamma_1^{\pi q}u(\vec{p}_1)]\,\frac{1}{k^2-m_\pi^2}\,[\bar{u}(\vec{p}_4{}')\Gamma_4^{\pi q}u(\vec{p}_4)]\,, \tag{4.111}$$

$$T^{qd} = \left[\bar{u}(\vec{p}_2{}')\bar{u}(\vec{p}_1{}')\Gamma_1^{\pi d}u(\vec{p}_1)u(\vec{p}_2)\right]\frac{1}{k^2-m_\pi^2}\,[\bar{u}(\vec{p}_4{}')\Gamma_4^{\pi q}u(\vec{p}_4)]\,, \tag{4.112}$$

$$T^{dq} = [\bar{u}(\vec{p}_1{}')\Gamma_1^{\pi q}u(\vec{p}_1)]\,\frac{1}{k^2-m_\pi^2}\left[\bar{u}(\vec{p}_5{}')\bar{u}(\vec{p}_4{}')\Gamma_4^{\pi d}u(\vec{p}_4)u(\vec{p}_5)\right]\,, \tag{4.113}$$

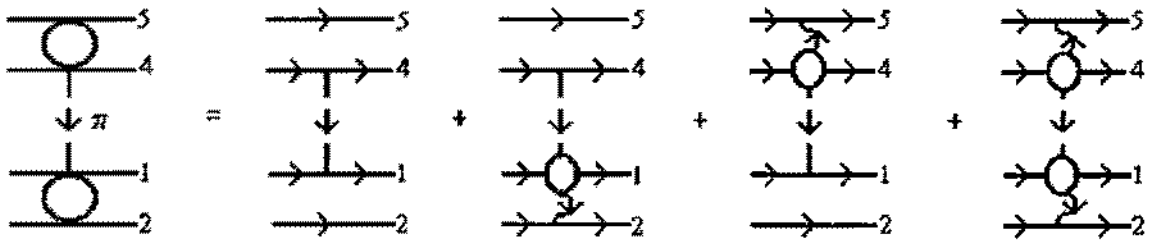


Figura 4.4: Potencial diquark-diquark total para a troca de um píon decomposto em suas diversas contribuições.

$$T^{dd} = \left[\bar{u}(\vec{p}_2{}')\bar{u}(\vec{p}_1{}')\Gamma_1^{\pi d}u(\vec{p}_1)u(\vec{p}_2)\right]\frac{1}{k^2-m_\pi^2}\left[\bar{u}(\vec{p}_5{}')\bar{u}(\vec{p}_4{}')\Gamma_4^{\pi d}u(\vec{p}_4)u(\vec{p}_5)\right], \quad (4.114)$$

onde os vértices pion-quark são do tipo PS e dados pelas equações:

$$\Gamma_1^{\pi q} = g_{\pi q}\left\langle\tau_\alpha\right\rangle_1\gamma_5, \quad (4.115)$$

$$\Gamma_4^{\pi q} = g_{\pi q}\left\langle\tau_\alpha\right\rangle_4\gamma_5. \quad (4.116)$$

Como no caso da seção anterior, o uso do acoplamento PV produz o mesmo resultado para as interações do pion com um único quark. Para as interações pion diquark, usamos os resultados do capítulo 3, equação (3.123).

$$\begin{aligned}\Gamma_1^{\pi d} &= \frac{g_{Sq}^2}{q_1^2-m_S^2}\left\{g_{\pi q}\left\langle\tau_\alpha\right\rangle\left[\frac{\gamma^0\left(E_b-E_a\right)}{2E_aE_b}+\frac{1}{m}\right.\right.\\ &\left.\left.-\not{k}\left(\frac{1}{2E_a\left(p_a^0+E_a\right)}+\frac{1}{2E_b\left(p_b^0+E_b\right)}\right)\right]\gamma_5\right\}^{(1)}I^{(2)}, \quad (4.117)\\ \Gamma_4^{\pi d} &= \frac{g_{Sq}^2}{q_4^2-m_S^2}\left\{g_{\pi q}\left\langle\tau_\alpha\right\rangle\left[\frac{\gamma^0\left(E_e-E_d\right)}{2E_dE_e}+\frac{1}{m}\right.\right.\\ &\left.\left.+\not{k}\left(\frac{1}{2E_d\left(p_d^0+E_d\right)}+\frac{1}{2E_e\left(p_e^0+E_e\right)}\right)\right]\gamma_5\right\}^{(4)}I^{(5)}, \quad (4.118)\end{aligned}$$

Para estas expressões valem as relações cinemáticas[2]

$$\begin{aligned}p_a &= \left(E_1+\omega_\pi,\vec{p}_1+\vec{k}\right),\\ E_a &= \sqrt{m^2+\vec{p}_a{}^2},\\ p_b &= \left(E_1'+\omega_\pi,\vec{p}_1'-\vec{k}\right),\\ E_b &= \sqrt{m^2+\vec{p}_b{}^2},\\ p_d &= \left(E_4-\omega_\pi,\vec{p}_4-\vec{k}\right),\\ E_d &= \sqrt{m^2+\vec{p}_d{}^2},\\ p_e &= \left(E_4'+\omega_\pi,\vec{p}_4'+\vec{k}\right),\\ E_e &= \sqrt{m^2+\vec{p}_e{}^2},\\ q_1 &= p_1-p_1'+k=p_2'-p_2,\\ q_4 &= p_4-p_4'-k=p_5'-p_5. \quad (4.119)\end{aligned}$$

A contribuição devida à amplitude T^{qq} já foi considerada na seção (4.4), no caso dos operadores de um corpo, e não será considerada novamente.

[2]Válidas sómente para os vértices πd.

No cálculo das amplitudes restantes, encontramos os seguintes tipos de produtos internos de espinores:

$$\bar{u}(\vec{p}_n{}')u(\vec{p}_n) = \frac{1}{\sqrt{E_n'+m}\sqrt{E_n+m}}\chi_n^{\dagger\prime}\left[(E_n'+m)(E_n+m) - \vec{\sigma}_n\cdot\vec{p}_n{}'\vec{\sigma}_n\cdot\vec{p}_n\right]\chi_n, \quad (4.120)$$

$$\bar{u}(\vec{p}_n{}')\gamma_5 u(\vec{p}_n) = \frac{1}{\sqrt{E_n'+m}\sqrt{E_n+m}}\chi_n^{\dagger\prime}\left[(E_n'+m)\,\vec{\sigma}_n\cdot\vec{p}_n - (E_n+m)\,\vec{\sigma}_n\cdot\vec{p}_n{}'\right]\chi_n, \quad (4.121)$$

$$\bar{u}(\vec{p}_n{}')\not{k}\gamma_5 u(\vec{p}_n) = \frac{1}{\sqrt{E_n'+m}\sqrt{E_n+m}}\chi_n^{\dagger\prime}\Big[-(E_n'+m)(E_n+m)\,\vec{\sigma}_n\cdot\vec{k}$$
$$+k^0(E_n+m)\,\vec{\sigma}_n\cdot\vec{p}_n{}' + k^0(E_n'+m)\,\vec{\sigma}_n\cdot\vec{p}_n - \vec{\sigma}_n\cdot\vec{p}_n{}'\,\vec{\sigma}_n\cdot\vec{k}\,\vec{\sigma}_n\cdot\vec{p}_n\Big]\chi_n, \quad (4.122)$$

$$\bar{u}(\vec{p}_n{}')\gamma^0\gamma_5 u(\vec{p}_n) = \frac{1}{\sqrt{E_n'+m}\sqrt{E_n+m}}\chi_n^{\dagger\prime}\left[(E_n'+m)\,\vec{\sigma}_n\cdot\vec{p}_n + (E_n+m)\,\vec{\sigma}_n\cdot\vec{p}_n{}'\right]\chi_n. \quad (4.123)$$

No limite não relativístico, obtemos as expressões aproximadas:

$$\bar{u}(\vec{p}_n{}')u(\vec{p}_n) \cong 2m\,\langle I\rangle, \quad (4.124)$$

$$\bar{u}(\vec{p}_n{}')\gamma_5 u(\vec{p}_n) \cong \langle\vec{\sigma}\rangle_n\cdot(\vec{p}_n - \vec{p}_n{}'), \quad (4.125)$$

$$\bar{u}(\vec{p}_n{}')\not{k}\gamma_5 u(\vec{p}_n) \cong -2m\,\langle\vec{\sigma}\rangle_n\cdot\vec{k}, \quad (4.126)$$

$$\bar{u}(\vec{p}_n{}')\gamma^0\gamma_5 u(\vec{p}_n) \cong \langle\vec{\sigma}\rangle_n\cdot(\vec{p}_n + \vec{p}_n{}'). \quad (4.127)$$

onde $\langle\vec{\sigma}\rangle_n = \chi_n^{\dagger\prime}\vec{\sigma}\chi_n$ é o elemento de matriz do operador de isospin do quark n e $\langle I\rangle = \chi_n^{\dagger\prime}I_2\chi_n$, sendo I_2 a matriz identidade 2×2. Os propagadores, neste limite, têm a forma:

$$\frac{1}{k^2 - m_\pi^2} \cong -\frac{1}{\vec{k}^2 + m_\pi^2}, \quad (4.128)$$

$$\frac{1}{q_n^2 - m_S^2} \cong -\frac{1}{\vec{q}_n{}^2 + m_S^2}. \quad (4.129)$$

Para obter as amplitudes não relativísticas, devemos dividir as contrações de espinores por $2m$, pois empregamos uma normalização covariante. Este procedimento produz as correspondências:

$$\bar{u}(\vec{p}_n{}')u(\vec{p}_n) \underset{n.r.}{\longrightarrow} \langle I\rangle_n, \quad (4.130)$$

$$\bar{u}(\vec{p}_n{}')\gamma_5 u(\vec{p}_n) \underset{n.r.}{\longrightarrow} \frac{1}{2m}\langle\vec{\sigma}\rangle_n\cdot(\vec{p}_n - \vec{p}_n{}'), \quad (4.131)$$

$$\bar{u}(\vec{p}_n{}')\not{k}\gamma_5 u(\vec{p}_n) \underset{n.r.}{\longrightarrow} -\langle\vec{\sigma}\rangle_n\cdot\vec{k}, \quad (4.132)$$

$$\bar{u}(\vec{p}_n{}')\gamma^0\gamma_5 u(\vec{p}_n) \underset{n.r.}{\longrightarrow} \frac{1}{2m}\langle\vec{\sigma}\rangle_n\cdot(\vec{p}_n + \vec{p}_n{}'). \quad (4.133)$$

Para calcular os limites não relativísticos das amplitudes T^{qq}, T^{qd}, T^{dq} e T^{dd}, partimos dos vértices dados pelas equações (4.115-4.118) e usamos os resultados (4.130-4.133), obtendo as seguintes correspondências não relativísticas:

$$\bar{u}(\vec{p}_1{}')\Gamma_1^{\pi q}u(\vec{p}_1) \underset{n.r.}{\longrightarrow} -\frac{g_{\pi q}}{2m}\left(\tau_\alpha\right)_1\left(\vec{\sigma}\right)_1\cdot\vec{k}, \tag{4.134}$$

$$\bar{u}(\vec{p}_4{}')\Gamma_4^{\pi q}u(\vec{p}_4) \underset{n.r.}{\longrightarrow} \frac{g_{\pi q}}{2m}\left(\tau_\alpha\right)_4\left(\vec{\sigma}\right)_4\cdot\vec{k}, \tag{4.135}$$

$$\begin{aligned}\bar{u}(\vec{p}_2{}')\bar{u}(\vec{p}_1{}')\Gamma_1^{\pi d}u(\vec{p}_1)u(\vec{p}_2) \underset{n.r.}{\longrightarrow} -\frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2+m_S^2}\Bigg\{g_{\pi q}\left\langle\tau_\alpha\right\rangle_1\Bigg[\frac{\left\langle\vec{\sigma}\right\rangle_1\cdot\left(\vec{p}_1+\vec{p}_1{}'\right)}{4m}\left(\frac{E_b-E_a}{E_aE_b}\right)\\ +\frac{\left\langle\vec{\sigma}\right\rangle_1\cdot\left(\vec{p}_1-\vec{p}_1{}'\right)}{2m^2}+\left\langle\vec{\sigma}\right\rangle_1\cdot\vec{k}\left(\frac{1}{2E_a\left(p_a^0+E_a\right)}+\frac{1}{2E_b\left(p_b^0+E_b\right)}\right)\Bigg]\Bigg\}\left\langle I\right\rangle_2,\end{aligned} \tag{4.136}$$

$$\begin{aligned}\bar{u}(\vec{p}_5{}')\bar{u}(\vec{p}_4{}')\Gamma_4^{\pi d}u(\vec{p}_4)u(\vec{p}_5) \underset{n.r.}{\longrightarrow} -\frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_4{}^2+m_S^2}\Bigg\{g_{\pi q}\left\langle\tau_\alpha\right\rangle_4\Bigg[\frac{\left\langle\vec{\sigma}\right\rangle_4\cdot\left(\vec{p}_4+\vec{p}_4{}'\right)}{4m}\left(\frac{E_c-E_d}{E_dE_e}\right)\\ +\frac{\left\langle\vec{\sigma}\right\rangle_4\cdot\left(\vec{p}_4-\vec{p}_4{}'\right)}{2m^2}-\left\langle\vec{\sigma}\right\rangle_4\cdot\vec{k}\left(\frac{1}{2E_d\left(p_d^0+E_d\right)}+\frac{1}{2E_e\left(p_e^0+E_e\right)}\right)\Bigg]\Bigg\}\left\langle I\right\rangle_5.\end{aligned} \tag{4.137}$$

Usando as equações (4.119), temos:

$$E_a \underset{n.r.}{\longrightarrow} m\left(1+\frac{\vec{p}_a{}^2}{2m^2}+\ldots\right), \tag{4.138}$$

o mesmo ocorrendo para E_b, E_d e E_e. Assim, podemos escrever

$$\frac{E_b-E_a}{E_aE_b}\sim\frac{E_e-E_d}{E_dE_e}\sim\frac{\vec{p}^{\,2}}{m^3}. \tag{4.139}$$

Este resultado permite-nos concluir que os fatores proporcionais a γ^0 nas equações (4.117 e 4.118) são muito menores que os demais e podem, portanto, ser desprezados.

As relações (4.119) permitem-nos escrever:

$$\frac{1}{2E_a\left(p_a^0+E_a\right)}+\frac{1}{2E_b\left(p_b^0+E_b\right)}=\frac{1}{2E_a\left(E_1+\omega_\pi+E_a\right)}+\frac{1}{2E_b\left(E_1'-\omega_\pi+E_b\right)}. \tag{4.140}$$

Tomando o limite n.r. desta expressão e considerando apenas os termos dominantes, temos:

$$\frac{1}{2E_a\left(p_a^0+E_a\right)}+\frac{1}{2E_b\left(p_b^0+E_b\right)}\sim\frac{1}{4m^2}+\frac{1}{4m^2}=\frac{1}{2m^2}, \tag{4.141}$$

pois $\omega_\pi=E_n-E_n'\sim\vec{p}^{\,2}/m$. Analogamente:

$$\frac{1}{2E_d\left(p_d^0+E_d\right)}+\frac{1}{2E_e\left(p_e^0+E_e\right)}\sim\frac{1}{2m^2}. \tag{4.142}$$

Usando estes resultados nas equações (4.134 - 4.137), temos:

$$\bar{u}(\vec{p}_1{}')\Gamma_1^{\pi q}u(\vec{p}_1) \underset{n.r.}{\rightarrow} -\frac{g_{\pi q}}{2m}\langle\tau_\alpha\rangle_1\langle\vec{\sigma}\rangle_1\cdot\vec{k}, \tag{4.143}$$

$$\bar{u}(\vec{p}_4{}')\Gamma_4^{\pi q}u(\vec{p}_4) \underset{n.r.}{\rightarrow} \frac{g_{\pi q}}{2m}\langle\tau_\alpha\rangle_4\langle\vec{\sigma}\rangle_4\cdot\vec{k}, \tag{4.144}$$

$$\begin{aligned}\bar{u}(\vec{p}_2{}')\bar{u}(\vec{p}_1{}')\Gamma_1^{\pi d}u(\vec{p}_1)u(\vec{p}_2) \underset{n.r.}{\rightarrow} &- \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2+m_S^2}\left\{g_{\pi q}\langle\vec{\tau}_\alpha\rangle_1\left[\frac{\langle\vec{\sigma}\rangle_1\cdot\left(\vec{p}_1-\vec{p}_1{}'+\vec{k}\right)}{2m^2}\right]\right\}\langle I\rangle_2\\ = &- \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2+m_S^2}\left\{g_{\pi q}\langle\vec{\tau}_\alpha\rangle_1\left[\frac{\langle\vec{\sigma}\rangle_1\cdot\vec{q}_1}{2m^2}\right]\right\}\langle I\rangle_2,\end{aligned} \tag{4.145}$$

$$\begin{aligned}\bar{u}(\vec{p}_5{}')\bar{u}(\vec{p}_4{}')\Gamma_4^{\pi d}u(\vec{p}_4)u(\vec{p}_5) \underset{n.r.}{\rightarrow} &- \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_4{}^2+m_S^2}\left\{g_{\pi q}\langle\vec{\tau}_\alpha\rangle_4\left[\frac{\langle\vec{\sigma}\rangle_4\cdot\left(\vec{p}_4-\vec{p}_4{}'-\vec{k}\right)}{2m^2}\right]\right\}\langle I\rangle_5\\ = &- \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_4{}^2+m_S^2}\left\{g_{\pi q}\langle\vec{\tau}_\alpha\rangle_4\left[\frac{\langle\vec{\sigma}\rangle_4\cdot\vec{q}_4}{2m^2}\right]\right\}\langle I\rangle_5.\end{aligned} \tag{4.146}$$

Assim, as amplitudes não relativísticas são

$$t^{qq} = \left[-\frac{g_{\pi q}}{2m}\langle\tau_\alpha\rangle_1\langle\vec{\sigma}\rangle_1\cdot\vec{k}\right]\frac{-1}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\left[\frac{g_{\pi q}}{2m}\langle\tau_\alpha\rangle_4\langle\vec{\sigma}\rangle_4\cdot\vec{k}\right], \tag{4.147}$$

$$\begin{aligned}t^{qd} = &\frac{-g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2+m_S^2}\left[g_{\pi q}\langle\tau_\alpha\rangle_1\left(\frac{1}{2m^2}\langle\vec{\sigma}\rangle_1\cdot\vec{q}_1\right)\langle I\rangle_2\right]\frac{-1}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\\ &\times\left[\frac{g_{\pi q}}{2m}\left(\langle\tau_\alpha\rangle_4\langle\vec{\sigma}\rangle_4\cdot\vec{k}\right)\langle I\rangle_5\right],\end{aligned} \tag{4.148}$$

$$\begin{aligned}t^{dq} = &-\left[\frac{g_{\pi q}}{2m}\left(\langle\tau_\alpha\rangle_1\langle\vec{\sigma}\rangle_1\cdot\vec{k}\right)\langle I\rangle_2\right]\frac{-1}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\left[g_{\pi q}\langle\tau_\alpha\rangle_4\left(\frac{1}{2m^2}\langle\vec{\sigma}\rangle_4\cdot\vec{q}_4\right)\langle I\rangle_5\right]\\ &\times\frac{-g_{Sq}^2}{\vec{q}_4{}^2+m_S^2},\end{aligned} \tag{4.149}$$

$$\begin{aligned}t^{dd} = &\frac{-g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2+m_S^2}\left[g_{\pi q}\langle\tau_\alpha\rangle_1\left(\frac{1}{2m^2}\langle\vec{\sigma}\rangle_1\cdot\vec{q}_1\right)\langle I\rangle_2\right]\frac{-1}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\\ &\times\left[g_{\pi q}\langle\tau_\alpha\rangle_4\left(\frac{1}{2m^2}\langle\vec{\sigma}\rangle_4\cdot\vec{q}_4\right)\langle I\rangle_5\right]\frac{-g_{Sq}^2}{\vec{q}_4{}^2+m_S^2}.\end{aligned} \tag{4.150}$$

Rearranjando os vários termos, obtemos as seguintes amplitudes no espaço dos momentos:

$$t^{qq} = \left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2\langle\vec{\tau}\rangle_1\cdot\langle\vec{\tau}\rangle_4\left[\langle\vec{\sigma}\rangle_1\cdot\vec{k}\right]\frac{1}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\left[\langle\vec{\sigma}\rangle_4\cdot\vec{k}\right], \tag{4.151}$$

$$t^{qd} = \left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2\frac{1}{m}\langle\vec{\tau}\rangle_1\cdot\langle\vec{\tau}\rangle_4\frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2+m_S^2}\left[\langle\vec{\sigma}\rangle_1\cdot\vec{q}_1\langle I\rangle_2\right]\frac{1}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\left[\langle\vec{\sigma}\rangle_4\cdot\vec{k}\right], \tag{4.152}$$

$$t^{dq} = -\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{1}{m} \langle\vec{\tau}\rangle_1 \cdot \langle\vec{\tau}\rangle_4 \left[\langle\vec{\sigma}\rangle_1 \cdot \vec{k}\right] \frac{1}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} \left[\langle\vec{\sigma}\rangle_4 \cdot \vec{q}_4 \langle I\rangle_5\right] \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_4{}^2 + m_S^2}, \quad (4.153)$$

$$t^{dd} = -\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{1}{m^2} \langle\vec{\tau}\rangle_1 \cdot \langle\vec{\tau}\rangle_4 \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2 + m_S^2} \left[\langle\vec{\sigma}\rangle_1 \cdot \vec{q}_1 \langle I\rangle_2\right] \frac{1}{\vec{k}^2 + m_\pi^2}$$
$$\times \left[\langle\vec{\sigma}\rangle_4 \cdot \vec{q}_4 \langle I\rangle_5\right] \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_4{}^2 + m_S^2}, \quad (4.154)$$

A amplitude t^{qq} é análoga à equação (4.31) e, como mencionamos anteriormente, representa o OPEP no espaço dos momentos.

Para obter os potenciais no espaço de configuração, é preciso efetuar as tranformadas de Fourier das equações acima.

Consideramos, inicialmente, o caso da componente do potencial quark-diquark correspondente à interação entre as partículas 1,2 e 4, obtida a partir da amplitude t^{qd} dada pela equação (4.152). O potencial no espaço dos momentos é escrito como

$$\left\langle p_1', p_2', p_4' \middle| V^{qd} \middle| p_1, p_2, p_4 \right\rangle = -(2\pi)^3 \delta\left(\vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' + \vec{p}_4{}' - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_4\right) t^{qd}. \quad (4.155)$$

Consequentemente, no espaço de configuração, temos

$$\left\langle \vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}', \vec{r}_4{}', \middle| V^{qd} \middle| \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_4 \right\rangle = -(2\pi)^3 \int \frac{d\vec{p}_1{}' d\vec{p}_2{}' d\vec{p}_4{}' d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{p}_4}{(2\pi)^{3\times3} (2\pi)^{3\times3}}$$
$$\exp\left\{-i\left[\vec{p}_1{}' \cdot \vec{r}_1{}' + \vec{p}_2{}' \cdot \vec{r}_2{}' + \vec{p}_4{}' \cdot \vec{r}_4{}' - \vec{p}_1 \cdot \vec{r}_1 - \vec{p}_2 \cdot \vec{r}_2 - \vec{p}_4 \cdot \vec{r}_4\right]\right\}$$
$$\delta\left(\vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' + \vec{p}_4{}' - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_4\right)$$
$$\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{1}{m} \langle\vec{\tau}\rangle_1 \cdot \langle\vec{\tau}\rangle_4 \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2 + m_S^2} \left[\langle\vec{\sigma}\rangle_1 \cdot \vec{q}_1 \langle I\rangle_2\right] \frac{1}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} \left[\langle\vec{\sigma}\rangle_4 \cdot \vec{k}\right], \quad (4.156)$$

onde $\vec{q}_1$ e $\vec{k}$ são relacionados aos momentos dos quarks pelas equações (4.119).

Para efetuar a integração, fazemos a seguinte mudança de variáveis:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{Q}_1 = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_1{}'}{2}, \\ \vec{s} = \vec{p}_1 - \vec{p}_1{}', \end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{p}_1 = \vec{Q}_1 + \frac{\vec{s}}{2}, \\ \vec{p}_1{}' = \vec{Q}_1 - \frac{\vec{s}}{2}, \end{array}\right. \quad (4.157)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{Q}_2 = \frac{\vec{p}_2 + \vec{p}_2{}'}{2}, \\ \vec{q}_1 = \vec{p}_2{}' - \vec{p}_2, \end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{p}_2 = \vec{Q}_2 - \frac{\vec{q}_1}{2}, \\ \vec{p}_2{}' = \vec{Q}_2 + \frac{\vec{q}_1}{2}, \end{array}\right. \quad (4.158)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{Q}_4 = \frac{\vec{p}_4 + \vec{p}_4{}'}{2}, \\ \vec{k} = \vec{p}_4 - \vec{p}_4{}', \end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{p}_4 = \vec{Q}_4 + \frac{\vec{k}}{2}, \\ \vec{p}_4{}' = \vec{Q}_4 - \frac{\vec{k}}{2}. \end{array}\right. \quad (4.159)$$

Substituindo em (4.156) e trabalhando o expoente, temos

$$\left\langle \vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}', \vec{r}_4{}' \middle| V^{qd} \middle| \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_4 \right\rangle = -(2\pi)^3 \left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{1}{m} \langle\vec{\tau}\rangle_1 \cdot \langle\vec{\tau}\rangle_4 \int \frac{d\vec{Q}_1 d\vec{Q}_2 d\vec{Q}_4 d\vec{s} d\vec{q}_1 d\vec{k}}{(2\pi)^{3\times3} (2\pi)^{3\times3}}$$

$$\times e^{-i\left[\vec{Q}_1\cdot\left(\vec{r}_1{}'-\vec{r}_1\right)+\vec{Q}_2\cdot\left(\vec{r}_2{}'-\vec{r}_2\right)+\vec{Q}_4\cdot\left(\vec{r}_4{}'-\vec{r}_4\right)-\frac{\vec{k}}{2}\cdot\left(\vec{r}_1{}'+\vec{r}_1\right)+\frac{\vec{q}_1}{2}\cdot\left(\vec{r}_2{}'+\vec{r}_2\right)-\frac{\vec{k}}{2}\cdot\left(\vec{r}_4{}'+\vec{r}_4\right)\right]}$$

$$\times\delta\left(\vec{q}_1-\vec{s}-\vec{k}\right)\frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2+m_S^2}\left[\langle\vec{\sigma}\rangle_1\cdot\vec{q}_1\langle I\rangle_2\right]\frac{1}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\left[\langle\vec{\sigma}\rangle_4\cdot\vec{k}\right]. \tag{4.160}$$

Integrando em $\vec{Q}_n$ obtemos deltas em $\vec{r}_n{}'-\vec{r}_n$:

$$\begin{aligned}\left\langle\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}',\vec{r}_4{}'\left|V^{qd}\right|\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_4\right\rangle &= -(2\pi)^3\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2\frac{1}{m}\langle\vec{\tau}\rangle_1\cdot\langle\vec{\tau}\rangle_4\,\delta\left(\vec{r}_1{}'-\vec{r}_1\right)\delta\left(\vec{r}_2{}'-\vec{r}_2\right)\\ &\times\delta\left(\vec{r}_4{}'-\vec{r}_4\right)\int\frac{d\vec{s}d\vec{q}_1d\vec{k}}{(2\pi)^{3\times3}}e^{i\left\{\vec{s}\cdot\vec{r}_1-\vec{q}_1\cdot\vec{r}_2+\vec{k}\cdot\vec{r}_4\right\}}\delta\left(\vec{q}_1-\vec{s}-\vec{k}\right)\\ &\times\frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2+m_S^2}\left[\langle\vec{\sigma}\rangle_1\cdot\vec{q}_1\langle I\rangle_2\right]\frac{1}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\left[\langle\vec{\sigma}\rangle_4\cdot\vec{k}\right],\end{aligned} \tag{4.161}$$

onde usamos o fato que o potencial só é não nulo para $\vec{r}_n{}'=\vec{r}_n$. Integrando em $\vec{s}$, temos

$$\left\langle\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}',\vec{r}_4{}'\left|V^{qd}\right|\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_4\right\rangle=-\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2\frac{1}{m}\langle\vec{\tau}\rangle_1\cdot\langle\vec{\tau}\rangle_4\,\delta\left(\vec{r}_1{}'-\vec{r}_1\right)\delta\left(\vec{r}_2{}'-\vec{r}_2\right)\delta\left(\vec{r}_4{}'-\vec{r}_4\right)$$

$$\times\int\frac{d\vec{q}_1d\vec{k}}{(2\pi)^6}e^{i\left\{-\vec{q}_1\cdot\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)+\vec{k}\cdot\left(\vec{r}_4-\vec{r}_1\right)\right\}}\frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2+m_S^2}\left[\langle\vec{\sigma}\rangle_1\cdot\vec{q}_1\langle I\rangle_2\right]\frac{1}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\left[\langle\vec{\sigma}\rangle_4\cdot\vec{k}\right]. \tag{4.162}$$

Reagrupando os termos, chegamos a seguinte forma para o potencial

$$\left\langle\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}',\vec{r}_4{}'\left|V^{qd}\right|\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_4\right\rangle=-\delta\left(\vec{r}_1{}'-\vec{r}_1\right)\delta\left(\vec{r}_2{}'-\vec{r}_2\right)\delta\left(\vec{r}_4{}'-\vec{r}_4\right)\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2\frac{1}{m}\langle\vec{\tau}\rangle_1\cdot\langle\vec{\tau}\rangle_4\langle I\rangle_2$$

$$\times\int\frac{d\vec{q}_1}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{q}_1\cdot\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)}\left[\langle\vec{\sigma}\rangle_1\cdot\vec{q}_1\right]\frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2+m_S^2}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot\left(\vec{r}_4-\vec{r}_1\right)}\left[\langle\vec{\sigma}\rangle_4\cdot\vec{k}\right]\frac{1}{\vec{k}^2+m_\pi^2}. \tag{4.163}$$

Para o potencial diquak-quark, um desenvolvimento totalmente análogo leva a

$$\left\langle\vec{r}_1{}',\vec{r}_4{}',\vec{r}_5{}'\left|V^{dq}\right|\vec{r}_1,\vec{r}_4,\vec{r}_5\right\rangle=\delta\left(\vec{r}_1{}'-\vec{r}_1\right)\delta\left(\vec{r}_4{}'-\vec{r}_4\right)\delta\left(\vec{r}_5{}'-\vec{r}_5\right)\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2\frac{1}{m}\langle\vec{\tau}\rangle_1\cdot\langle\vec{\tau}\rangle_4\langle I\rangle_5$$

$$\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{k}\cdot\left(\vec{r}_1-\vec{r}_4\right)}\left[\langle\vec{\sigma}\rangle_1\cdot\vec{k}\right]\frac{1}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\int\frac{d\vec{q}_4}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{q}_4\cdot\left(\vec{r}_5-\vec{r}_4\right)}\left[\langle\vec{\sigma}\rangle_4\cdot\vec{q}_4\right]\frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_4{}^2+m_S^2}. \tag{4.164}$$

No caso do potencial diquark-diquark, partimos da expressão válida para os quarks 1,2 e 4,5:

$$\left\langle\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}',\vec{r}_4{}',\vec{r}_5{}'\left|V^{dd}\right|\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_4,\vec{r}_5\right\rangle=-(2\pi)^3\int\frac{d\vec{p}_1{}'d\vec{p}_2{}'d\vec{p}_4{}'d\vec{p}_5{}'d\vec{p}_1d\vec{p}_2d\vec{p}_4d\vec{p}_5}{(2\pi)^{3\times4}(2\pi)^{3\times4}} \tag{4.165}$$

$$\exp\left\{-i\left[\vec{p}_1{}'\cdot\vec{r}_1{}'+\vec{p}_2{}'\cdot\vec{r}_2{}'+\vec{p}_4{}'\cdot\vec{r}_4{}'+\vec{p}_5{}'\cdot\vec{r}_5{}'-\vec{p}_1\cdot\vec{r}_1-\vec{p}_2\cdot\vec{r}_2-\vec{p}_4\cdot\vec{r}_4-\vec{p}_5\cdot\vec{r}_5\right]\right\}$$

$$\delta\left(\vec{p}_1{}'+\vec{p}_2{}'+\vec{p}_4{}'+\vec{p}_5{}'-\vec{p}_1-\vec{p}_2-\vec{p}_4-\vec{p}_5\right)$$

$$\left\{-\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2\frac{1}{m^2}\langle\vec{\tau}\rangle_1\cdot\langle\vec{\tau}\rangle_4\frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2+m_S^2}\left[\langle\vec{\sigma}\rangle_1\cdot\vec{q}_1\langle I\rangle_2\right]\frac{1}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\left[\langle\vec{\sigma}\rangle_4\cdot\vec{q}_4\langle I\rangle_5\right]\frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_4{}^2+m_S^2}\right\}.$$

Para realizar a integração, usamos as variáveis:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{Q}_1=\frac{\vec{p}_1+\vec{p}_1{}'}{2},\\ \vec{s}=\vec{p}_1-\vec{p}_1{}',\end{array}\right\}\leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{p}_1=\vec{Q}_1+\frac{\vec{s}}{2},\\ \vec{p}_1{}'=\vec{Q}_1-\frac{\vec{s}}{2},\end{array}\right. \tag{4.166}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{Q}_2=\frac{\vec{p}_2+\vec{p}_2{}'}{2},\\ \vec{q}_1=\vec{p}_2{}'-\vec{p}_2,\end{array}\right\}\leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{p}_2=\vec{Q}_2-\frac{\vec{q}_1}{2},\\ \vec{p}_2{}'=\vec{Q}_2+\frac{\vec{q}_1}{2},\end{array}\right. \tag{4.167}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{Q}_4=\frac{\vec{p}_4+\vec{p}_4{}'}{2},\\ \vec{z}=\vec{p}_4-\vec{p}_4{}',\end{array}\right\}\leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{p}_4=\vec{Q}_4+\frac{\vec{z}}{2},\\ \vec{p}_4{}'=\vec{Q}_4-\frac{\vec{z}}{2},\end{array}\right. \tag{4.168}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{Q}_5=\frac{\vec{p}_5+\vec{p}_5{}'}{2},\\ \vec{q}_4=\vec{p}_5{}'-\vec{p}_5,\end{array}\right\}\leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{p}_5=\vec{Q}_5-\frac{\vec{q}_4}{2},\\ \vec{p}_5{}'=\vec{Q}_5+\frac{\vec{q}_4}{2},\end{array}\right. \tag{4.169}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}&\left\langle\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}',\vec{r}_4{}',\vec{r}_5{}'\left|V^{dd}\right|\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_4,\vec{r}_5\right\rangle=(2\pi)^3\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2\frac{1}{m^2}\left\langle\vec{\tau}\right\rangle_1\cdot\left\langle\vec{\tau}\right\rangle_4\\&\times\int\frac{d\vec{Q}_1d\vec{Q}_2d\vec{Q}_4d\vec{Q}_5d\vec{s}d\vec{q}_1d\vec{z}d\vec{q}_4}{(2\pi)^{3\times4}(2\pi)^{3\times4}}e^{-i\left[\vec{Q}_1\cdot\left(\vec{r}_1{}'-\vec{r}_1\right)+\vec{Q}_2\cdot\left(\vec{r}_2{}'-\vec{r}_2\right)+\vec{Q}_4\cdot\left(\vec{r}_4{}'-\vec{r}_4\right)+\vec{Q}_5\cdot\left(\vec{r}_5{}'-\vec{r}_5\right)\right]}\\&\times e^{-i\left[-\frac{\vec{s}}{2}\cdot\left(\vec{r}_1{}'+\vec{r}_1\right)+\frac{\vec{q}_1}{2}\left(\vec{r}_2{}'+\vec{r}_2\right)-\frac{\vec{z}}{2}\left(\vec{r}_4{}'+\vec{r}_4\right)+\frac{\vec{q}_4}{2}\cdot\left(\vec{r}_5{}'+\vec{r}_5\right)\right]}\delta\left(\vec{q}_1+\vec{q}_4-\vec{s}-\vec{z}\right)\\&\times\frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2+m_S^2}\left[\left\langle\vec{\sigma}\right\rangle_1\cdot\vec{q}_1\left\langle I\right\rangle_2\right]\frac{1}{\left(\vec{z}-\vec{q}_4\right)^2+m_\pi^2}\left[\left\langle\vec{\sigma}\right\rangle_4\cdot\vec{q}_4\left\langle I\right\rangle_5\right]\frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_4{}^2+m_S^2},\end{aligned} \tag{4.170}$$

onde $\vec{k}=\vec{q}_1-\vec{s}=\vec{z}-\vec{q}_4$. Integrando em $\vec{Q}_n$, temos:

$$\begin{aligned}&\left\langle\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}',\vec{r}_4{}',\vec{r}_5{}'\left|V^{dd}\right|\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_4,\vec{r}_5\right\rangle=(2\pi)^3\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2\frac{1}{m^2}\left\langle\vec{\tau}\right\rangle_1\cdot\left\langle\vec{\tau}\right\rangle_4\\&\times\delta\left(\vec{r}_1{}'-\vec{r}_1\right)\delta\left(\vec{r}_2{}'-\vec{r}_2\right)\delta\left(\vec{r}_4{}'-\vec{r}_4\right)\delta\left(\vec{r}_5{}'-\vec{r}_5\right)\\&\times\int\frac{d\vec{s}d\vec{q}_1d\vec{z}d\vec{q}_4}{(2\pi)^{3\times4}}e^{-i\left[\vec{q}_1\cdot\vec{r}_2-\vec{s}\cdot\vec{r}_1+\vec{q}_4\cdot\vec{r}_5-\vec{z}\cdot\vec{r}_4\right]}\delta\left(\vec{q}_1+\vec{q}_4-\vec{s}-\vec{z}\right)\\&\frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2+m_S^2}\left[\left\langle\vec{\sigma}\right\rangle_1\cdot\vec{q}_1\left\langle I\right\rangle_2\right]\frac{1}{\left(\vec{z}-\vec{q}_4\right)^2+m_\pi^2}\left[\left\langle\vec{\sigma}\right\rangle_4\cdot\vec{q}_4\left\langle I\right\rangle_5\right]\frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_4{}^2+m_S^2}.\end{aligned} \tag{4.171}$$

Integrando em $\vec{s}$ com auxílio da delta, obtemos:

$$\begin{aligned}&\left\langle\vec{r}_1{}',\vec{r}_2{}',\vec{r}_4{}',\vec{r}_5{}'\left|V^{dd}\right|\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_4,\vec{r}_5\right\rangle=\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2\frac{1}{m^2}\left\langle\vec{\tau}\right\rangle_1\cdot\left\langle\vec{\tau}\right\rangle_4\\&\times\delta\left(\vec{r}_1{}'-\vec{r}_1\right)\delta\left(\vec{r}_2{}'-\vec{r}_2\right)\delta\left(\vec{r}_4{}'-\vec{r}_4\right)\delta\left(\vec{r}_5{}'-\vec{r}_5\right)\\&\times\int\frac{d\vec{q}_1d\vec{z}d\vec{q}_4}{(2\pi)^{3\times3}}e^{-i\left[\vec{q}_1\cdot\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)+\vec{z}\cdot\left(\vec{r}_1-\vec{r}_4\right)+\vec{q}_4\cdot\left(\vec{r}_5-\vec{r}_1\right)\right]}\\&\times\frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2+m_S^2}\left[\left\langle\vec{\sigma}\right\rangle_1\cdot\vec{q}_1\left\langle I\right\rangle_2\right]\frac{1}{\left(\vec{z}-\vec{q}_4\right)^2+m_\pi^2}\left[\left\langle\vec{\sigma}\right\rangle_4\cdot\vec{q}_4\left\langle I\right\rangle_5\right]\frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_4{}^2+m_S^2}.\end{aligned} \tag{4.172}$$

Realizando a mudança de variáveis $\vec{z} = \vec{k} + \vec{q}_4$, desacoplamos as duas últimas integrais e obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}', \vec{r}_4{}', \vec{r}_5{}' \middle| V^{dd} \middle| \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_4, \vec{r}_5 \right\rangle = \left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{1}{m^2} \langle \vec{\tau} \rangle_1 \cdot \langle \vec{\tau} \rangle_4 \langle I \rangle_2 \langle I \rangle_5 \\
&\times \delta\left(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_1\right) \delta\left(\vec{r}_2{}' - \vec{r}_2\right) \delta\left(\vec{r}_4{}' - \vec{r}_4\right) \delta\left(\vec{r}_5{}' - \vec{r}_5\right) \\
&\times \int \frac{d\vec{q}_1}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}_1 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)} \left[\langle \vec{\sigma} \rangle_1 \cdot \vec{q}_1\right] \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2 + m_S^2} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_4)} \frac{1}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} \\
&\times \int \frac{d\vec{q}_4}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}_4 \cdot (\vec{r}_5 - \vec{r}_4)} \left[\langle \vec{\sigma} \rangle_4 \cdot \vec{q}_4\right] \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_4{}^2 + m_S^2}.
\end{aligned} \tag{4.173}$$

Os resultados obtidos nesta seção indicam que os potenciais entre quarks e diquarks são todos locais, já que têm a forma de um conjunto de funções-delta multiplicando fatores, que representam os potenciais a serem usados diretamente na equação de Schrödinger. Eles serão usados como operadores, assim eles são reescritos na forma:

$$\begin{aligned}
\Pi^{qd}_{4,(1,2)} &= -\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{1}{m} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_4 I_2 \int \frac{d\vec{q}_1}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}_1 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)} \left[\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q}_1\right] \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2 + m_S^2} \\
&\quad \times \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_4 - \vec{r}_1)} \left[\vec{\sigma}_4 \cdot \vec{k}\right] \frac{1}{\vec{k}^2 + m_\pi^2},
\end{aligned} \tag{4.174}$$

$$\begin{aligned}
\Pi^{dq}_{(4,5),1} &= \left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{1}{m} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_4 I_5 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_4)} \left[\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k}\right] \frac{1}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} \\
&\quad \times \int \frac{d\vec{q}_4}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}_4 \cdot (\vec{r}_5 - \vec{r}_4)} \left[\vec{\sigma}_4 \cdot \vec{q}_4\right] \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_4{}^2 + m_S^2},
\end{aligned} \tag{4.175}$$

$$\begin{aligned}
\Pi^{dd}_{(4,5),(1,2)} &= \left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{1}{m^2} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_4 I_2 I_5 \int \frac{d\vec{q}_1}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}_1 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)} \left[\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q}_1\right] \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_1{}^2 + m_S^2} \\
&\quad \times \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_4)} \frac{1}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} \int \frac{d\vec{q}_4}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}_4 \cdot (\vec{r}_5 - \vec{r}_4)} \left[\vec{\sigma}_4 \cdot \vec{q}_4\right] \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_4{}^2 + m_S^2}
\end{aligned} \tag{4.176}$$

onde, agora, os símbolos $\vec{\sigma}$ e $\vec{\tau}$ representam operadores de spin e isospin.

Nestes resultados os índices entre parênteses indicam as partículas que formam o diquark, sendo que o primeiro índice refere-se à interação com o píon e o segundo, ao vértice escalar.

Generalizando para índices quaisquer, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Pi^{qd}_{w,(v,y)} &= -\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{1}{m} \vec{\tau}_v \cdot \vec{\tau}_w I_y \int \frac{d\vec{q}_v}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}_v \cdot (\vec{r}_y - \vec{r}_v)} \left[\vec{\sigma}_v \cdot \vec{q}_v\right] \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_v{}^2 + m_S^2} \\
&\quad \times \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_w - \vec{r}_v)} \left[\vec{\sigma}_w \cdot \vec{k}\right] \frac{1}{\vec{k}^2 + m_\pi^2},
\end{aligned} \tag{4.177}$$

$$\Pi^{dq}_{(w,z),v} = \left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{1}{m}\vec{\tau}_v \cdot \vec{\tau}_w I_z \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_v-\vec{r}_w)} \left[\vec{\sigma}_v \cdot \vec{k}\right] \frac{1}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} \tag{4.178}$$
$$\times \int \frac{d\vec{q}_w}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}_w\cdot(\vec{r}_z-\vec{r}_w)} \left[\vec{\sigma}_w \cdot \vec{q}_w\right] \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_w^{\,2} + m_S^2},$$

$$\Pi^{dd}_{(w,z),(v,y)} = \left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{1}{m^2}\vec{\tau}_v \cdot \vec{\tau}_w I_y I_z \int \frac{d\vec{q}_v}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}_v\cdot(\vec{r}_y-\vec{r}_v)} \left[\vec{\sigma}_v \cdot \vec{q}_v\right] \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_v^{\,2} + m_S^2} \tag{4.179}$$
$$\times \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_v-\vec{r}_w)} \frac{1}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} \int \frac{d\vec{q}_w}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}_w\cdot(\vec{r}_z-\vec{r}_w)} \left[\vec{\sigma}_w \cdot \vec{q}_w\right] \frac{g_{Sq}^2}{\vec{q}_w^{\,2} + m_S^2},$$

onde $v, y = 1, 2, 3$ e $w, z = 4, 5, 6$. Nestas formas, esses potenciais são totalmente análogos ao OPEP usado na equação (4.81).

4.6 O potencial NN: operadores de dois corpos

Nesta seção, calculamos o potencial NN, devido às interações quark-diquark e diquark-diquark, que representam a contribuição da simetria quiral ao problema e devem ser adicionados aos resultados da seção 4.4. Para tanto, partimos da equação 4.61 e escrevemos o potencial Π_{ab} entre os aglomerados a e b como

$$\Pi^{\chi}_{ab} = \sum_{v=1}^{3}\sum_{w=4}^{6} \Pi^{qq}_{vw} + \sum_{w=4}^{6}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3'} \Pi^{qd}_{w(v,y)} + \sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6'}\sum_{v=1}^{3} \Pi^{dq}_{(w,z)v} + \sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3'}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6'} \Pi^{dd}_{(w,z)(v,y)} \tag{4.180}$$

onde as funções Π são dadas pelas equações (4.81) e (4.177-179) e o símbolo $\sum'$ indica uma soma onde o índice da somatória imediatamente anterior é excluído. A contribuição Π^{qq} já foi considerada na seção 4.4. Os demais termos são designados genéricamente por $\bar{\Pi}_{ab}$,

$$\bar{\Pi}_{ab} = \sum_{w=4}^{6}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3'} \Pi^{qd}_{w(v,y)} + \sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6'}\sum_{v=1}^{3} \Pi^{dq}_{(w,z)v} + \sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3'}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6'} \Pi^{dd}_{(w,z)(v,y)}$$

e dados por

$$\bar{\Pi}_{ab} = -\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \left\{ \frac{1}{m}\sum_{w=4}^{6}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3'} \vec{\tau}_v \cdot \vec{\tau}_w \right.$$
$$\times \left\{ \int \frac{d\vec{q}_v}{(2\pi)^3} \frac{g_{Sq}^2 e^{-i\vec{q}_v\cdot(\vec{r}_y-\vec{r}_v)}}{\vec{q}_v^{\,2} + m_S^2} (\vec{\sigma}_v \cdot \vec{q}_v) \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_v-\vec{r}_w)}}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} \left(\vec{\sigma}_w \cdot \vec{k}\right) \right.$$
$$-\frac{1}{m}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6'}\sum_{v=1}^{3} \vec{\tau}_v \cdot \vec{\tau}_w \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_v-\vec{r}_w)}}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} \left(\vec{\sigma}_v \cdot \vec{k}\right) \int \frac{d\vec{q}_w}{(2\pi)^3} \frac{g_{Sq}^2 e^{-i\vec{q}_w\cdot(\vec{r}_z-\vec{r}_w)}}{\vec{q}_w^2 + m_S^2} (\vec{\sigma}_w \cdot \vec{q}_w)$$

$$-\frac{1}{m^2}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6\prime}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3\prime}\vec{\tau}_v\cdot\vec{\tau}_w\int\frac{d\vec{q}_v}{(2\pi)^3}\frac{g_{Sq}^2e^{-i\vec{q}_v\cdot(\vec{r}_y-\vec{r}_v)}}{\vec{q}_v^{\,2}+m_S^2}\left(\vec{\sigma}_v\cdot\vec{q}_v\right)\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_v-\vec{r}_w)}}{\vec{k}^2+m_\pi^2}$$
$$\int\frac{d\vec{q}_w}{(2\pi)^3}\frac{g_{Sq}^2e^{-i\vec{q}_w\cdot(\vec{r}_z-\vec{r}_w)}}{\vec{q}_w^{\,2}+m_S^2}\left(\vec{\sigma}_w\cdot\vec{q}_w\right)\Bigg\}. \tag{4.181}$$

Para obter a contribuição ao potencial NN, usamos $\bar{\Pi}_{ab}$ na equação (4.79), encontrando

$$\bar{V}_{NN}\left(\vec{R}_a,\vec{R}_b\right)|J,J_z\rangle|T,T_z\rangle=-\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2\frac{\alpha_a^6\alpha_b^6}{\pi^3\pi^3}\int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2\left(\vec{\rho}_a^2+\vec{\lambda}_a^2\right)-\alpha_b^2\left(\vec{\rho}_b^2+\vec{\lambda}_b^2\right)}$$
$$\times\Bigg\{\frac{1}{m}\sum_{w=4}^{6}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3\prime}\vec{\tau}_v\cdot\vec{\tau}_w\int\frac{d\vec{q}_v}{(2\pi)^3}\frac{g_{Sq}^2e^{-i\vec{q}_v\cdot(\vec{r}_y-\vec{r}_v)}}{\vec{q}_v^{\,2}+m_S^2}\left(\vec{\sigma}_v\cdot\vec{q}_v\right)\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_v-\vec{r}_w)}}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\left(\vec{\sigma}_w\cdot\vec{k}\right)$$
$$-\frac{1}{m}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6\prime}\sum_{v=1}^{3}\vec{\tau}_v\cdot\vec{\tau}_w\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_v-\vec{r}_w)}}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\left(\vec{\sigma}_v\cdot\vec{k}\right)\int\frac{d\vec{q}_w}{(2\pi)^3}\frac{g_{Sq}^2e^{-i\vec{q}_w\cdot(\vec{r}_z-\vec{r}_w)}}{\vec{q}_w^2+m_S^2}\left(\vec{\sigma}_w\cdot\vec{q}_w\right)$$
$$-\frac{1}{m^2}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6\prime}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3\prime}\vec{\tau}_v\cdot\vec{\tau}_w\int\frac{d\vec{q}_v}{(2\pi)^3}\frac{g_{Sq}^2e^{-i\vec{q}_v\cdot(\vec{r}_y-\vec{r}_v)}}{\vec{q}_v^{\,2}+m_S^2}\left(\vec{\sigma}_v\cdot\vec{q}_v\right)\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_v-\vec{r}_w)}}{\vec{k}^2+m_\pi^2}$$
$$\int\frac{d\vec{q}_w}{(2\pi)^3}\frac{g_{Sq}^2e^{-i\vec{q}_w\cdot(\vec{r}_z-\vec{r}_w)}}{\vec{q}_w^{\,2}+m_S^2}\left(\vec{\sigma}_w\cdot\vec{q}_w\right)\Bigg\}|J,J^z\rangle|T,T^z\rangle \tag{4.182}$$

Para efetuar a integração em $\vec{q}$, trocamos $\vec{\sigma}\cdot\vec{q}$ por $i\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}_{(\vec{r}_i-\vec{r}_j)}$

$$\bar{V}_{NN}\left(\vec{R}_a,\vec{R}_b\right)|J,J_z\rangle|T,T_z\rangle=-\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2\frac{\alpha_a^6\alpha_b^6}{\pi^3\pi^3}\int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2\left(\vec{\rho}_a^2+\vec{\lambda}_a^2\right)-\alpha_b^2\left(\vec{\rho}_b^2+\vec{\lambda}_b^2\right)}$$
$$\times\Bigg\{\frac{1}{m}\sum_{w=4}^{6}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3\prime}\vec{\tau}_v\cdot\vec{\tau}_w\left(i\vec{\sigma}_v\cdot\vec{\nabla}_{(\vec{r}_y-\vec{r}_v)}\int\frac{d\vec{q}_v}{(2\pi)^3}\frac{g_{Sq}^2e^{-i\vec{q}_v\cdot(\vec{r}_y-\vec{r}_v)}}{\vec{q}_v^{\,2}+m_S^2}\right)\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_v-\vec{r}_w)}}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\vec{\sigma}_w\cdot\vec{k}$$
$$-\frac{1}{m}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6\prime}\sum_{v=1}^{3}\vec{\tau}_v\cdot\vec{\tau}_w\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_v-\vec{r}_w)}}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\vec{\sigma}_v\cdot\vec{k}\left(i\vec{\sigma}_w\cdot\vec{\nabla}_{(\vec{r}_z-\vec{r}_w)}\int\frac{d\vec{q}_w}{(2\pi)^3}\frac{g_{Sq}^2e^{-i\vec{q}_w\cdot(\vec{r}_z-\vec{r}_w)}}{\vec{q}_w^{\,2}+m_S^2}\right)$$
$$-\frac{1}{m^2}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6\prime}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3\prime}\vec{\tau}_v\cdot\vec{\tau}_w\left(i\vec{\sigma}_v\cdot\vec{\nabla}_{(\vec{r}_y-\vec{r}_v)}\int\frac{d\vec{q}_v}{(2\pi)^3}\frac{g_{Sq}^2e^{-i\vec{q}_v\cdot(\vec{r}_y-\vec{r}_v)}}{\vec{q}_v^{\,2}+m_S^2}\right)\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_v-\vec{r}_w)}}{\vec{k}^2+m_\pi^2}$$
$$\times\left(i\vec{\sigma}_w\cdot\vec{\nabla}_{(\vec{r}_z-\vec{r}_w)}\int\frac{d\vec{q}_w}{(2\pi)^3}\frac{g_{Sq}^2e^{-i\vec{q}_w\cdot(\vec{r}_z-\vec{r}_w)}}{\vec{q}_w^{\,2}+m_S^2}\right)\Bigg\}|J,J^z\rangle|T,T^z\rangle. \tag{4.183}$$

Como discutimos no capítulo 3, as integrais em $\vec{q}_v$ e $\vec{q}_w$ representam o potencial perturbativo devido à troca de uma partícula escalar, dado pela equação (3.19):

$$\int\frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3}\frac{g_{Sq}^2e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{\vec{q}^{\,2}+m_S^2}=-V_S\left(\vec{r}\right). \tag{4.184}$$

Por isso, para levar os efeitos não-perturbativos em consideração, fazemos a seguinte substituição na equação (4.183)

$$\int\frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3}\frac{g_{Sq}^2e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{\vec{q}^{\,2}+m_S^2}\rightarrow-W\left(r\right)=-\frac{K}{2}r^2. \tag{4.185}$$

O gradiente deste potencial é dado por

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} W(r) = K\vec{r}, \tag{4.186}$$

o que nos permite escrever

$$\begin{aligned}
&\bar{V}_{NN}\left(\vec{R}_a, \vec{R}_b\right)|J, J_z\rangle|T, T_z\rangle = -\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{\alpha_a^6\alpha_b^6}{\pi^3\pi^3}\int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2\left(\vec{\rho}_a^2+\vec{\lambda}_a^2\right)-\alpha_b^2\left(\vec{\rho}_b^2+\vec{\lambda}_b^2\right)} \\
&\times\left\{-i\frac{K_a}{m}\sum_{w=4}^{6}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3\prime}\vec{\tau}_v\cdot\vec{\tau}_w\vec{\sigma}_v\cdot\left(\vec{r}_y-\vec{r}_v\right)\left(\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\vec{k}\cdot\left(\vec{r}_v-\vec{r}_w\right)}}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\vec{\sigma}_w\cdot\vec{k}\right)\right. \\
&+i\frac{K_b}{m}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6\prime}\sum_{v=1}^{3}\vec{\tau}_v\cdot\vec{\tau}_w\left(\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\vec{k}\cdot\left(\vec{r}_v-\vec{r}_w\right)}}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\vec{\sigma}_v\cdot\vec{k}\right)\vec{\sigma}_w\cdot\left(\vec{r}_z-\vec{r}_w\right) \\
&\left.-i^2\frac{K_aK_b}{m^2}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6\prime}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3\prime}\vec{\tau}_v\cdot\vec{\tau}_w\left(\vec{\sigma}_v\cdot\left(\vec{r}_y-\vec{r}_v\right)\right)\left(\vec{\sigma}_w\cdot\left(\vec{r}_z-\vec{r}_w\right)\right)\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\vec{k}\cdot\left(\vec{r}_v-\vec{r}_w\right)}}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\right\} \\
&\times|J, J^z\rangle|T, T^z\rangle.
\end{aligned} \tag{4.187}$$

Rearranjando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
&\bar{V}_{NN}\left(\vec{R}_a, \vec{R}_b\right)|J, J_z\rangle|T, T_z\rangle = -\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \frac{\alpha_a^6\alpha_b^6}{\pi^3\pi^3}\left\{-i\frac{K_a}{m}\sum_{w=4}^{6}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3\prime}\tau_v^l\tau_w^l\sigma_v^i\sigma_w^j\right. \\
&\times\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{k^j}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2\left(\vec{\rho}_a^2+\vec{\lambda}_a^2\right)-\alpha_b^2\left(\vec{\rho}_b^2+\vec{\lambda}_b^2\right)-i\vec{k}\cdot\left(\vec{r}_v-\vec{r}_w\right)}\left(\vec{r}_y-\vec{r}_v\right)^i \\
&+i\frac{K_b}{m}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6\prime}\sum_{v=1}^{3}\tau_v^l\tau_w^l\sigma_v^i\sigma_w^j\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{k^i}{\vec{k}^2+m_\pi^2} \\
&\times\int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2\left(\vec{\rho}_a^2+\vec{\lambda}_a^2\right)-\alpha_b^2\left(\vec{\rho}_b^2+\vec{\lambda}_b^2\right)-i\vec{k}\cdot\left(\vec{r}_v-\vec{r}_w\right)}\left(\vec{r}_z-\vec{r}_w\right)^j \\
&-i^2\frac{K_aK_b}{m^2}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6\prime}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3\prime}\tau_v^l\tau_w^l\sigma_v^i\sigma_w^j\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\vec{k}^2+m_\pi^2} \\
&\times\left.\int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2\left(\vec{\rho}_a^2+\vec{\lambda}_a^2\right)-\alpha_b^2\left(\vec{\rho}_b^2+\vec{\lambda}_b^2\right)-i\vec{k}\cdot\left(\vec{r}_v-\vec{r}_w\right)}\left(\vec{r}_y-\vec{r}_v\right)^i\left(\vec{r}_z-\vec{r}_w\right)^j\right\} \\
&\times|J, J^z\rangle|T, T^z\rangle
\end{aligned} \tag{4.188}$$

Aplicando as equações (4.83-84) para os operadores de spin e isospin dos quarks, obtemos uma expressão em função dos operadores dos núcleons

$$\begin{aligned}
&\bar{V}_{NN}\left(\vec{R}_a, \vec{R}_b\right)|J, J_z\rangle|T, T_z\rangle = -\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\frac{5}{9}\right)^2 \frac{\alpha_a^6\alpha_b^6}{\pi^3\pi^3}\left\{-i\frac{K_a}{m}\sum_{w=4}^{6}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3\prime}\vec{T}^a\cdot\vec{T}^b\Sigma_i^a\Sigma_j^b\right. \\
&\times\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{k^j}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2\left(\vec{\rho}_a^2+\vec{\lambda}_a^2\right)-\alpha_b^2\left(\vec{\rho}_b^2+\vec{\lambda}_b^2\right)-i\vec{k}\cdot\left(\vec{r}_v-\vec{r}_w\right)}\left(\vec{r}_y-\vec{r}_v\right)^i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+i\frac{K_b}{m}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6\prime}\sum_{v=1}^{3}\vec{T}^a\cdot\vec{T}^b\Sigma_i^a\Sigma_j^b\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{k^i}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\\
&\times\int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2\left(\vec{\rho}_a^2+\vec{\lambda}_a^2\right)-\alpha_b^2\left(\vec{\rho}_b^2+\vec{\lambda}_b^2\right)-i\vec{k}\cdot\left(\vec{r}_v-\vec{r}_w\right)}\left(\vec{r}_z-\vec{r}_w\right)^j\\
&-i^2\frac{K_aK_b}{m^2}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6\prime}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3\prime}\vec{T}^a\cdot\vec{T}^b\Sigma_i^a\Sigma_j^b\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\vec{k}^2+m_\pi^2}\\
&\times\int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2\left(\vec{\rho}_a^2+\vec{\lambda}_a^2\right)-\alpha_b^2\left(\vec{\rho}_b^2+\vec{\lambda}_b^2\right)-i\vec{k}\cdot\left(\vec{r}_v-\vec{r}_w\right)}\left(\vec{r}_y-\vec{r}_v\right)^i\left(\vec{r}_z-\vec{r}_w\right)^j\Bigg\}\\
&\times\left|J,J^z\right\rangle\left|T,T^z\right\rangle. \qquad (4.189)
\end{aligned}
$$

Usando as relações do apêndice B, reescrevemos:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_v-\vec{r}_w &= \left(\vec{R}_a-\vec{R}_b\right)+c_{v\rho}\vec{\rho}_a+c_{v\lambda}\vec{\lambda}_a-c_{w\rho}\vec{\rho}_b-c_{w\lambda}\vec{\lambda}_b, && (4.190)\\
\vec{r}_y-\vec{r}_v &= \left(c_{y\rho}-c_{v\rho}\right)\vec{\rho}_a+\left(c_{y\lambda}-c_{v\lambda}\right)\vec{\lambda}_a, && (4.191)\\
\vec{r}_z-\vec{r}_w &= \left(c_{z\rho}-c_{w\rho}\right)\vec{\rho}_b+\left(c_{z\lambda}-c_{w\lambda}\right)\vec{\lambda}_b, && (4.192)
\end{aligned}
$$

onde os coeficientes $c_{x\rho}$ e $c_{x\lambda}$ são dados na tabela (4.87). Assim, o potencial numa forma análoga à equação (4.88) é dado por:

$$
\begin{aligned}
&\bar{V}_{NN}\left(\vec{R}_a,\vec{R}_b\right)\left|J,J_z\right\rangle\left|T,T_z\right\rangle=-\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\frac{5}{9}\right)^2\frac{m_\pi}{4\pi}\vec{T}^a\cdot\vec{T}^b\Sigma_i^a\Sigma_j^b\\
&\times\Bigg\{-i\frac{K_a}{m}\sum_{w=4}^{6}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3\prime}U^{ij}_{w(v,y)}+i\frac{K_b}{m}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6\prime}\sum_{v=1}^{3}U^{ij}_{(w,z)v}\\
&-i^2\frac{K_aK_b}{m^2}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6\prime}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3\prime}U^{ij}_{(w,z)(v,y)}\left|J,J^z\right\rangle\left|T,T^z\right\rangle\Bigg\}. \qquad (4.193)
\end{aligned}
$$

Neste resultado, as funções U são análogas à dada pela equação (4.89):

$$
\begin{aligned}
U^{ij}_{w(v,y)} &= \frac{4\pi}{m_\pi}\frac{\alpha_a^6\alpha_b^6}{\pi^3\pi^3}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{k^je^{-i\vec{k}\cdot\left(\vec{R}_a-\vec{R}_b\right)}}{\vec{k}^2+m_\pi^2}I^i_{w,(v,y)},\\
U^{ij}_{(w,z)v} &= \frac{4\pi}{m_\pi}\frac{\alpha_a^6\alpha_b^6}{\pi^3\pi^3}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{k^ie^{-i\vec{k}\cdot\left(\vec{R}_a-\vec{R}_b\right)}}{\vec{k}^2+m_\pi^2}I^j_{(w,z),v},\\
U^{ij}_{(w,z)(v,y)} &= \frac{4\pi}{m_\pi}\frac{\alpha_a^6\alpha_b^6}{\pi^3\pi^3}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\vec{k}\cdot\left(\vec{R}_a-\vec{R}_b\right)}}{\vec{k}^2+m_\pi^2}I^{ij}_{(w,z),(v,y)}, \qquad (4.194)
\end{aligned}
$$

onde $I^i_{w,(v,y)}$, $I^j_{(w,z),v}$ e $I^{ij}_{(w,z),(v,y)}$ são integrais gaussianas:

$$
I^i_{w,(v,y)} = \int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2\left(\vec{\rho}_a^2+\vec{\lambda}_a^2\right)-\alpha_b^2\left(\vec{\rho}_b^2+\vec{\lambda}_b^2\right)-i\vec{k}\cdot\left(c_{v\rho}\vec{\rho}_a+c_{v\lambda}\vec{\lambda}_a-c_{w\rho}\vec{\rho}_b-c_{w\lambda}\vec{\lambda}_b\right)} \qquad (4.195)
$$

$$
\begin{aligned}
& \times \left[\left(c_{y\rho} - c_{v\rho} \right) \vec{\rho}_a + \left(c_{y\lambda} - c_{v\lambda} \right) \vec{\lambda}_a \right]^i , \\
I^i_{(w,z),v} &= \int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2\left(\vec{\rho}_a^2+\vec{\lambda}_a^2\right)-\alpha_b^2\left(\vec{\rho}_b^2+\vec{\lambda}_b^2\right)-i\vec{k}\cdot\left(+c_{v\rho}\vec{\rho}_a+c_{v\lambda}\vec{\lambda}_a-c_{w\rho}\vec{\rho}_b-c_{w\lambda}\vec{\lambda}_b\right)} \\
& \times \left[\left(c_{z\rho} - c_{w\rho} \right) \vec{\rho}_b + \left(c_{z\lambda} - c_{w\lambda} \right) \vec{\lambda}_b \right]^j , \\
I^{ij}_{(w,z),(v,y)} &= \int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2\left(\vec{\rho}_a^2+\vec{\lambda}_a^2\right)-\alpha_b^2\left(\vec{\rho}_b^2+\vec{\lambda}_b^2\right)-i\vec{k}\cdot\left(c_{v\rho}\vec{\rho}_a+c_{v\lambda}\vec{\lambda}_a-c_{w\rho}\vec{\rho}_b-c_{w\lambda}\vec{\lambda}_b\right)} \\
& \times \left\{ \left[\left(c_{y\rho} - c_{v\rho} \right) \vec{\rho}_a + \left(c_{y\lambda} - c_{v\lambda} \right) \vec{\lambda}_a \right]^i \left[\left(c_{z\rho} - c_{w\rho} \right) \vec{\rho}_b + \left(c_{z\lambda} - c_{w\lambda} \right) \vec{\lambda}_b \right]^j \right\} .
\end{aligned}
\tag{4.196, 4.197}
$$

Estas integrais são calculadas no apêndice F e os resultados são dados pelas equações (F.20, F.21 e F.28)

$$
\begin{aligned}
I^i_{w,(v,y)} &= i\frac{\pi^3}{\alpha_a^6}\frac{\pi^3}{\alpha_b^6}\frac{k^i}{2\alpha_a^2}e^{-\vec{k}^2\left(\frac{1}{6\alpha_a^2}+\frac{1}{6\alpha_b^2}\right)} , \\
I^i_{(w,z),v} &= -i\frac{\pi^3}{\alpha_b^6}\frac{\pi^3}{\alpha_a^6}\frac{k^i}{2\alpha_b^2}e^{-\vec{k}^2\left(\frac{1}{6\alpha_a^2}+\frac{1}{6\alpha_b^2}\right)} , \\
I^{ij}_{(w,z),(v,y)} &= \frac{\pi^3}{\alpha_a^6}\frac{\pi^3}{\alpha_b^6}\frac{k^i}{2\alpha_a^2}\frac{k^j}{2\alpha_b^2}e^{-\vec{k}^2\left(\frac{1}{6\alpha_a^2}-\frac{1}{6\alpha_b^2}\right)} .
\end{aligned}
\tag{4.198}
$$

Substituindo estes resultados em $V_{NN}\left(\vec{R}_a, \vec{R}_b\right)|J, J_z\rangle|T, T_z\rangle$ chegamos a

$$
\begin{aligned}
& \bar{V}_{NN}\left(\vec{R}_a, \vec{R}_b\right)|J, J_z\rangle|T, T_z\rangle = -\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\frac{5}{9}\right)^2 \vec{T}^a \cdot \vec{T}^b \Sigma_i^a \Sigma_j^b \\
& \times \left\{ \frac{1}{2m}\frac{K_a}{\alpha_a^2}\sum_{w=4}^{6}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3\prime}\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{k^j k^i}{\vec{k}^2+m_\pi^2}e^{-i\vec{k}\cdot\left(\vec{R}_a-\vec{R}_b\right)-\vec{k}^2\left(\frac{1}{6\alpha_a^2}+\frac{1}{6\alpha_b^2}\right)} \right. \\
& + \frac{1}{2m}\frac{K_b}{\alpha_b^2}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6\prime}\sum_{v=1}^{3}\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{k^j k^i}{\vec{k}^2+m_\pi^2}e^{-i\vec{k}\cdot\left(\vec{R}_a-\vec{R}_b\right)-\vec{k}^2\left(\frac{1}{6\alpha_a^2}+\frac{1}{6\alpha_b^2}\right)} \\
& \left. + \frac{1}{4m^2}\frac{K_a K_b}{\alpha_a^2\alpha_b^2}\sum_{w=4}^{6}\sum_{z=4}^{6\prime}\sum_{v=1}^{3}\sum_{y=1}^{3\prime}\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{k^i k^j}{\vec{k}^2+m_\pi^2}e^{-i\vec{k}\cdot\left(\vec{R}_a-\vec{R}_b\right)-\vec{k}^2\left(\frac{1}{6\alpha_a^2}+\frac{1}{6\alpha_b^2}\right)} \right\} \\
& |J, J^z\rangle|T, T^z\rangle .
\end{aligned}
\tag{4.199}
$$

A constante K pode ser eliminada desta expressão, usando o resultado do apêndice D:

$$
\frac{K}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{3m} . \tag{4.200}
$$

Realizando as somatórias, chegamos a

$$
\bar{V}_{NN}\left(\vec{R}_a, \vec{R}_b\right)|J, J_z\rangle|T, T_z\rangle = -\left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\frac{5}{9}\right)^2 \vec{T}^a \cdot \vec{T}^b \Sigma_i^a \Sigma_j^b
$$

$$\times \left[\frac{18}{2m}\frac{\alpha_a^2}{3m}+\frac{18}{2m}\frac{\alpha_b^2}{3m}+\frac{36}{4m^2}\frac{\alpha_a^2}{3m}\frac{\alpha_b^2}{3m}\right]$$
$$\times \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{k^i k^j}{\vec{k}^2+m_\pi^2}e^{-i\vec{k}\cdot\left(\vec{R}_a-\vec{R}_b\right)-\vec{k}^2\left(\frac{1}{6\alpha_a^2}-\frac{1}{6\alpha_b^2}\right)}$$
$$\times \left|J,J^z\right\rangle\left|T,T^z\right\rangle. \tag{4.201}$$

Usando a definição $\vec{X}=\vec{R}_a-\vec{R}_b$, reescrevemos o potencial como

$$\begin{aligned}\bar{V}_{NN}\left(\vec{X}\right)\left|J,J_z\right\rangle\left|T,T_z\right\rangle &= \left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\frac{5}{3}\right)^2\frac{m_\pi}{4\pi}\vec{T}^a\cdot\vec{T}^b\vec{\Sigma}^a\cdot\vec{\nabla}_X\vec{\Sigma}^b\cdot\vec{\nabla}_X\\ &\times\left[\frac{1}{3m^2}\left(\alpha_a^2+\alpha_b^2\right)+\frac{1}{m^2}\frac{\alpha_a^2}{3m}\frac{\alpha_b^2}{3m}\right]I\left(X\right)\\ &\times\left|J,J^z\right\rangle\left|T,T^z\right\rangle,\end{aligned} \tag{4.202}$$

onde $I\left(X\right)$ é a mesma integral que ocorre no processo quark-quark, e dada pela equação (4.99). Este resultado representa a contribuição dos operadores de dois corpos ao potencial núcleon-núcleon devido à troca de um píon.

4.7 A simetria quiral no fator de forma πN

O objetivo deste capítulo é estudar o efeito da simetria quiral no fator de forma. Para tanto, reunimos os resultados das seções 4.4 e 4.6, equações (4.100) e (4.202), para o potencial e obtemos

$$\begin{aligned}V_{NN}\left(\vec{X}\right)\left|J,J_z\right\rangle\left|T,T_z\right\rangle &= \left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\frac{5}{3}\right)^2\left[1+\frac{1}{3m^2}\left(\alpha_a^2+\alpha_b^2\right)+\frac{\alpha_a^2}{3m^2}\frac{\alpha_b^2}{3m^2}\right]\frac{m_\pi}{4\pi}\\ &\times\vec{T}^a\cdot\vec{T}^b\vec{\Sigma}^a\cdot\vec{\nabla}_X\vec{\Sigma}^b\cdot\vec{\nabla}_X I\left(X\right)\left|J,J^z\right\rangle\left|T,T^z\right\rangle.\end{aligned} \tag{4.203}$$

Considerando apenas o operador potencial, podemos sintetizar este resultado na forma

$$\begin{aligned}V_{NN}\left(\vec{X}\right) &= \left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\frac{5}{3}\right)^2\left(1+\frac{\alpha_a^2}{3m^2}\right)\left(1+\frac{\alpha_b^2}{3m^2}\right)\frac{m_\pi}{4\pi}\\ &\times\ \vec{T}^a\cdot\vec{T}^b\vec{\Sigma}^a\cdot\vec{\nabla}_X\vec{\Sigma}^b\cdot\vec{\nabla}_X\, I\left(X\right).\end{aligned} \tag{4.204}$$

Para grandes distâncias, vimos na seção 4.4 que $I\left(X\right)$ é dado por

$$I\left(X\right)\underset{X\to\infty}{\Rightarrow}\exp\left(\frac{m_\pi^2}{6\alpha_a^2}\right)\exp\left(\frac{m_\pi^2}{6\alpha_b^2}\right)\frac{e^{-m_\pi X}}{m_\pi X} \tag{4.205}$$

e assim, o potencial para grandes distâncias é

$$\begin{aligned} V_{NN}\left(\vec{X}\right) &= \left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\frac{5}{3}\right)^2 \frac{m_\pi}{4\pi} \exp\left(\frac{m_\pi^2}{6\alpha_a^2} + \frac{m_\pi^2}{6\alpha_b^2}\right)\left(1+\frac{\alpha_a^2}{3m^2}\right)\left(1+\frac{\alpha_b^2}{3m^2}\right) \\ &\times \vec{T}^a \cdot \vec{T}^b \vec{\Sigma}^a \cdot \vec{\nabla}_X \vec{\Sigma}^b \cdot \vec{\nabla}_X \frac{e^{-m_\pi X}}{m_\pi X}. \end{aligned} \tag{4.206}$$

De forma análoga à da seção 4.4, comparamos esta expressão com o OPEP e obtemos, para o aglomerado a, a seguinte relação entre as constantes de acoplamente πN e πq:

$$\frac{5}{3}\frac{g_{\pi q}}{2m} \exp\left(\frac{m_\pi^2}{6\alpha_a^2}\right)\left(1+\frac{\alpha_a^2}{3m^2}\right) = \frac{g}{2M}. \tag{4.207}$$

Trocando o índice a por b, teremos uma relação análoga para o aglomerado b. Em comparação com o resultado obtido por Thomas e Holinde [Hol+93], equação (4.105), podemos perceber que a simetria quiral acrescenta o termo $\alpha_a^2/(3m^2)$ para cada aglomerado. Seguindo o procedimento da seção 4.4, reescrevemos o potencial na forma:

$$\begin{aligned} V_{NN}\left(\vec{X}\right) &= \left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\frac{5}{3}\right)^2 \frac{m_\pi}{4\pi} e^{m_\pi^2 \frac{A}{6}} \left(1+\frac{\alpha_a^2}{3m^2}\right)\left(1+\frac{\alpha_b^2}{3m^2}\right) \\ &\times \vec{T}^a \cdot \vec{T}^b \vec{\Sigma}^a \cdot \vec{\nabla}_X \vec{\Sigma}^b \cdot \vec{\nabla}_X \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{X} - \left(\vec{k}^2 + m_\pi^2\right)\frac{A}{6}}}{\vec{k}^2 + m_\pi^2}. \end{aligned} \tag{4.208}$$

Usando (4.207), temos:

$$V_{NN}\left(\vec{X}\right) = \left(\frac{g}{2M}\right)^2 \vec{T}^a \cdot \vec{T}^b \vec{\Sigma}^a \cdot \vec{\nabla}_X \vec{\Sigma}^b \cdot \vec{\nabla}_X \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{X} - \left(\vec{k}^2 + m_\pi^2\right)\frac{A}{6}}}{\vec{k}^2 + m_\pi^2}. \tag{4.209}$$

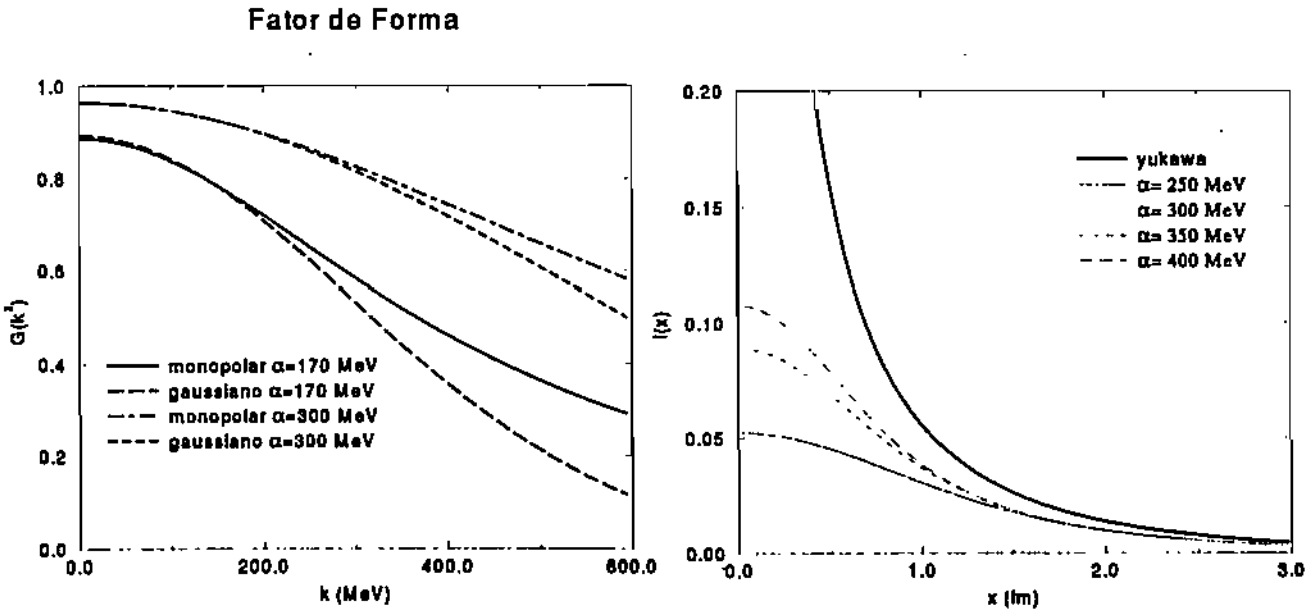
Esta expressão é idêntica à equação (4.107) da contribuição do operador de um corpo e resulta num mesmo fator de forma πN gaussiano, dada pela equação (4.108):

$$\tilde{G}_a\left(\vec{k}^2\right) = \exp\left(-\frac{\vec{k}^2 + m_\pi^2}{6\alpha_a^2}\right). \tag{4.210}$$

A discussão apresentada neste capítulo mostrou que a simetria quiral é responsável pela inclusão de processos envolvendo diquarks na interação entre dois núcleons devida à troca de um píon. Os nossos cálculos indicam que as contribuições oriundas da simetria quiral são numéricamente importantes, pois têm a mesma ordem de magnitude dos efeitos associados às interações entre quarks isolados. Num modelo onde quarks constituintes são confinados por meio de um potencial harmônico, a simetria quiral produz correções à constante de acoplamento πN, mas não ao fator de forma.

Para exemplificar os efeitos devidos ao fator de forma, no gráfico (a) da figura (4.5) comparamos os fatores de forma do nosso modelo e a aproximação monopolar, para dois valores diferentes de α_a. No gráfico (b), comparamos a função de Yukawa $\frac{1}{4\pi}U_0(X)$ com a nossa função $\exp\left(\frac{A}{6}m_\pi^2\right)I(X)$, supondo que $\alpha_a = \alpha_b = \alpha$ e usando diferentes valores de α. A inspeção do gráfico (a) mostra que o fator de forma monopolar inicia acompanhando o gaussiano, mas decresce menos rapidamente, separando-se deste à medida que k aumenta. Podemos ver, também, que quanto menor o parâmetro α, mais cedo o fator de forma gaussiano se separa do monopolar. No gráfico (b) podemos ver nitidamente, que o nosso fator de forma regulariza o potencial na origem, e que o tamanho do núcleon influencia o seu alcance.

Figura 4.5: Os efeitos do tamanho do núcleon; (a) nos fatores de forma gaussiano e monopolar; (b) na função $\exp\left(\frac{A}{6}m_\pi^2\right)I(X)$ e Yukawa, onde o valor $\alpha = 380\ MeV$ é o valor próximo ao usado por Isgur e Karl [Isg+77].



Capítulo 5

O método Fock-Tani

Estudamos, até aqui, os efeitos dos graus de liberdade de quarks no fator de forma πN e constatamos a importância da simetria quiral no estudo da interação nuclear de longo e médio alcance.

Na região de curto alcance, como dissemos, precisamos levar em conta os efeitos da troca de constituintes entre os núcleons, pois nesta região há a sobreposição entre os estados de dois núcleons possibilitando a troca de quarks entre eles. Para este estudo, aplicamos o método Fock-Tani que foi desenvolvido para a física atômica [Gir 71] e que recentemente vem sendo aplicado à física de hádrons, onde já há estudos feitos para mésons [Szp 96] e para bárions [Had 95]. Este formalismo emprega as técnicas usuais da teoria quântica de campos ao problema de partículas compostas e resolve, de forma sistemática, os problemas gerados por esta natureza composta.

Neste capítulo aplicamos o método ao caso onde os quarks trocam um píon, mas sem considerar os processos envolvendo os diquarks.

5.1 O formalismo

Descrevemos, resumidamente, o formalismo nesta seção, ao passo que os detalhes da discussão podem ser vistos no trabalho de tese de D. Hadjimichef [Had 95].

Numa visão esquemática o que se faz é, primeiro: toma-se um espaço ideal **I** gerado por estados ideais $|\Omega)$ e que contém operadores ideais de núcleons $(n_a,\, n_a^\dagger)$ tais que

$$\begin{aligned} |\Omega) &= n_a^\dagger\,|0)\,, \\ \left\{n_a, n_b^\dagger\right\} &= \delta_{ab}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\{n_a, n_b\} = \left\{n_a^\dagger, n_b^\dagger\right\} = 0.$$

Segundo: identifica-se um espaço ampliado **A** como um produto direto do espaço de Fock **F** e do espaço ideal **I**, **A**=**F**⊗**I**. Os operadores de quarks em **A** são, por definição, cinemáticamente independentes dos operadores ideais, i.e.:

$$\{n_a, q_\mu\} = 0. \tag{5.2}$$

A seguir, toma-se um subespaço **Ifock** em **A** isomórfico ao de Fock e que não possua estados ideais, ou seja

$$|\Omega\rangle \in \textbf{Ifock}, \text{ tal que } n_a\,|\Omega\rangle = 0. \tag{5.3}$$

Esta equação (5.3) é importante por assegurar que não há dupla contagem em **A** e é denominada de *condição subsidiária*.

Por último, aplica-se uma transformação unitária sobre **Ifock** para obter o subespaço **FT** contido em **A**, **Ifock**=U^{-1}**FT**, onde temos

$$\text{para } |\Omega\rangle \in \textbf{Ifock} \text{ temos } |\Omega) \in \textbf{FT}, \text{ tal que } |\Omega) = U^{-1}\,|\Omega\rangle\,. \tag{5.4}$$

O operador unitário U é definido de tal maneira que o estado de um núcleon $|a>$ é transformado no estado de um núcleon ideal $|a)$:

$$|a>= N_a^\dagger|0>\longrightarrow |a) = n_a^\dagger|0) \equiv U^{-1}|a>\,. \tag{5.5}$$

O subespaço **FT** é formado por operadores ideais que satisfazem as relações de comutação canônicas usuais e que estão relacionados com os operadores físicos do subespaço **Ifock** por meio de uma transformação unitária, portanto os elementos de matriz e produtos escalares são preservados na troca de representação

$$\langle\Omega|\Omega\rangle = (\Omega|\Omega)\,, \tag{5.6}$$

$$\langle\Omega\,|\mathcal{O}|\,\Omega\rangle = (\Omega\,|\mathcal{O}_{FT}|\,\Omega)\,. \tag{5.7}$$

onde $\mathcal{O}$ representa um operador qualquer.

Para o caso de um núcleon a, o seu estado no subespaço **Ifock** é representado por

$$\left|\vec{P}_a, S^z, T^z\right\rangle = N_a^\dagger\,|0\rangle\,, \tag{5.8}$$

onde $\vec{P}_a$ é o momento do núcleon a, S^z a terceira componente do seu spin, T^z a terceira componente do seu isospin, $N_a^\dagger$ é o operador de criação do núcleon e $|0\rangle$ é o vácuo.

Como modelo para o operador composto $N_a^\dagger$, adotamos

$$N_a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3!}}\Psi_a^{\mu_1\mu_2\mu_3} q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger, \tag{5.9}$$

onde a repetição dos índices indica a soma sobre eles e $\Psi_a^{\mu_1\mu_2\mu_3}$ é a função de onda do aglomerado de tres quarks. As relações de anticomutação destes operadores resultam em

$$\{N_a, N_b\} = 0, \tag{5.10}$$

$$\left\{N_a, N_b^\dagger\right\} = \delta_{ab} - \Delta_{ab}, \tag{5.11}$$

onde

$$\Delta_{ab} = 3\Psi_a^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_b^{\mu_1\mu_2\nu_3} q_{\nu_3}^\dagger q_{\mu_3} - \frac{3}{2}\Psi_a^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_b^{\mu_1\nu_2\nu_3} q_{\nu_3}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3}.$$

O operador : Δ_{ab} : provém da natureza composta do núcleon e é o fator, como dissemos, responsável pelas complicações nos cálculos. O efeito desta mesma natureza composta do núcleon pode ser observada, também, nas seguintes relações de anticomutação

$$\{q_\mu, N_a\} = 0, \tag{5.12}$$

$$\left\{q_\mu, N_a^\dagger\right\} = \sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_a^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger. \tag{5.13}$$

Para um operador $\mathcal{O}$ qualquer, as equações (5.4) e (5.7) nos permitem escrever :

$$\mathcal{O}_{FT}^\dagger = U^{-1}\mathcal{O}^\dagger U, \tag{5.14}$$

$$\mathcal{O}_{FT} = U^{-1}\mathcal{O}U. \tag{5.15}$$

O operador U é usualmente escrito como:

$$U = e^{\epsilon F}, \tag{5.16}$$

onde ϵ é um parâmetro infinitesimal e F terá uma estrutura que permita a interpretação de U como sendo uma rotação, ou seja, para um operador $\mathcal{O}$ do subespaço **Ifock** a aplicação de U leva a um operador $\mathcal{O}(\epsilon)$, tal que:

$$\mathcal{O}(0) = \mathcal{O}, \tag{5.17}$$

$$\mathcal{O}(-\pi/2) = U^{-1}(-\pi/2)\,\mathcal{O}\,U(-\pi/2),\ \mathcal{O}(-\pi/2) \in \mathbf{FT}. \tag{5.18}$$

A estrutura de F que atende a estas exigências, para o nosso caso, é dada por:

$$F = n_a^\dagger O_a - O_a^\dagger n_a. \tag{5.19}$$

onde:

$$O_a^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} O_a^{\dagger(n)}, \tag{5.20}$$

$$O_a = \sum_{n=0}^{\infty} O_a^{(n)}. \tag{5.21}$$

Para encontrarmos $O_a^{(n)}$ usamos as relações de anticomutação impondo que elas devam ser canônicas. Partindo de $O_a^{(0)} = N_a$, temos que:

$$\left\{N_a, N_b^\dagger\right\} = \delta_{ab} - \Delta_{ab} \tag{5.22}$$

e procuramos por $O_a^{(1)}$ que cancele Δ_{ab}. O termo $O_a^{(1)}$ que satisfaz esta exigência é:

$$O_a^{(1)} = \frac{1}{2}\Delta_{ab} N_b. \tag{5.23}$$

Assim, até $n = 1$, O_a é dado por:

$$O_a \equiv N_b + \frac{1}{2}\Delta_{ab} N_b. \tag{5.24}$$

Observe que Δ_{ab} contém duas funções de onda ($\Delta_{ab} \propto \Psi_a^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_b^{\mu_1\mu_2\mu_3}$). Substituindo esta expressão no anticomutador, encontramos:

$$\left\{N_a, N_b^\dagger\right\} = \delta_{ab} + o\left(\Psi^{(4)}\right),$$

onde $o\left(\Psi^{(4)}\right)$ é proporcional a quatro funções de onda. Repetindo este procedimento encontramos os demais $O_a^{(n)}$ e a série é truncada até a ordem desejada na função de onda, que no nosso caso vai até $n = 2$:

$$O_a \equiv N_a + \frac{1}{2}\Delta_{ab} N_b - \frac{1}{2} N_b^\dagger \left[\Delta_{bc}, N_a\right] N_c. \tag{5.25}$$

Com estas ferramentas, partimos de uma hamiltoniana definida no espaço **Ifock**, que descreve a dinâmica microscópica dos quarks e aplicamos a transformação U para chegarmos a uma hamiltoniana que descreve a dinâmica dos bárions. A aplicação de U sobre a hamiltoniana de quarks, implica na sua aplicação sobre os operadores de criação e aniquilação dos quarks. Esta aplicação de U é feita pelo método da equação de movimento.

Derivando a equação (5.16) encontramos:

$$\frac{d\mathcal{O}(\epsilon)}{d\epsilon} = U^{-1}(\epsilon)\left[\mathcal{O}, F\right] U(\epsilon) = \left[\mathcal{O}, F(\epsilon)\right], \tag{5.26}$$

que tem a forma de uma equação de movimento para operadores.

Assim a aplicação de U sobre q_μ nos leva a:

$$\frac{dq_\mu(\epsilon)}{d\epsilon} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\,\Psi_b^{\mu\mu_2\mu_3}\, q^\dagger_{\mu_2}(\epsilon) q^\dagger_{\mu_3}(\epsilon) n_b(\epsilon). \tag{5.27}$$

No lado direito da expressão (5.27) aparece o operador de bárions $n_b(\epsilon)$, cuja equação de movimento é:

$$\frac{dn_a(\epsilon)}{d\epsilon} = O_a(\epsilon). \tag{5.28}$$

Para resolver (5.28) precisamos encontrar a equação para $O_a(\epsilon)$:

$$\frac{dO_a(\epsilon)}{d\epsilon} = -n_a(\epsilon) \tag{5.29}$$

e encontramos um sistema de equações diferenciais acopladas. Uma vez que F é uma série em Ψ, os operadores de bárions e quarks também são escritos na forma de uma série em Ψ :

$$\begin{aligned} O_a(\epsilon) &= \sum_{i=1}^{\infty} O_a^{(i)}(\epsilon), \\ n_a(\epsilon) &= \sum_{i=1}^{\infty} n_a^{(i)}(\epsilon), \\ q_\mu(\epsilon) &= \sum_{i=1}^{\infty} q_\mu^{(i)}(\epsilon). \end{aligned} \tag{5.30}$$

e o sistema de equações é resolvido consistentemente, ordem a ordem, com auxílio das condições iniciais (5.17).

As equações (5.28) e (5.29) podem ser integradas, resultando em:

$$O_a(\epsilon) = O_a \cos\epsilon - n_a \sin\epsilon, \tag{5.31}$$

$$n_a(\epsilon) = O_a \sin\epsilon + n_a \cos\epsilon. \tag{5.32}$$

Estas equações podem ser escritas ordem a ordem:

$$O_a^{(0)}(\epsilon) = N_a \cos\epsilon - n_a \sin\epsilon, \tag{5.33}$$

$$O_a^{(1)}(\epsilon) = 0, \tag{5.34}$$

$$O_a^{(2)}(\epsilon) = \frac{1}{2}\Delta_{ac} N_c \cos\epsilon, \tag{5.35}$$

$$O_a^{(3)}(\epsilon) = -\frac{1}{2} N_c^\dagger [\Delta_{cd}, N_a] N_d \cos\epsilon \tag{5.36}$$

e

$$
\begin{aligned}
n_a^{(0)}(\epsilon) &= N_a \sin\epsilon + N_a \cos\epsilon, && (5.37)\\
n_a^{(1)}(\epsilon) &= 0, && (5.38)\\
n_a^{(2)}(\epsilon) &= \frac{1}{2}\Delta_{ac} N_c \sin\epsilon, && (5.39)\\
n_a^{(3)}(\epsilon) &= -\frac{1}{2} N_c^\dagger [\Delta_{cd}, N_a] N_d \sin\epsilon. && (5.40)
\end{aligned}
$$

Resolvendo o sistema de equações acopladas até a terceira ordem em Ψ, obtemos o operador de quark q_μ até esta ordem:

$$
\begin{aligned}
q_\mu^{(3)}(\epsilon) = {} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_c^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger \Delta_{cb}\left[2N_b(\cos\epsilon - 1) - n_b \sin\epsilon\right] + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_c^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_d^{*\nu_1\nu_2\nu_3}\Psi_b^{\mu\mu_2\nu_3}\\
& \times \Big[N_c^\dagger N_d^\dagger q_{\mu_1} q_{\mu_3} q_{\nu_2} q_{\nu_1} N_b(\cos\epsilon - \cos^2\epsilon) + N_c^\dagger N_d^\dagger q_{\mu_1} q_{\mu_3} q_{\nu_2} q_{\nu_1} n_b(\cos\epsilon\sin\epsilon - \sin\epsilon)\\
& + n_c^\dagger N_d^\dagger q_{\mu_1} q_{\mu_3} q_{\nu_2} q_{\nu_1} N_b \cos\epsilon\sin\epsilon - n_c^\dagger N_d^\dagger q_{\mu_1} q_{\mu_2} q_{\nu_2} q_{\nu_1} n_b \sin^2\epsilon\Big]\\
& + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\left[2\Psi_c^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_d^{\mu_1\mu_2\nu_3}\Psi_b^{\mu\nu_2\mu_3} - \Psi_c^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_d^{\mu_1\nu_2\nu_3}\Psi_b^{\mu\mu_2\mu_3}\right]\\
& \times \Big\{n_c^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger n_d n_b \sin^3\epsilon + N_c^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger N_d N_b(1 - \cos\epsilon + \cos^2\epsilon - \cos^3\epsilon)\\
& + n_c^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger N_d N_b(-\cos\epsilon\sin\epsilon + \cos^2\epsilon\sin\epsilon)\\
& + N_c^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger N_d n_b(\sin\epsilon - \cos\epsilon\sin\epsilon + \cos^2\epsilon\sin\epsilon)\\
& + n_c^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger N_d n_b(\sin^2\epsilon - \cos\epsilon\sin^2\epsilon) + N_c^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger n_d N_b \cos^2\epsilon\sin\epsilon\\
& - N_c^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger n_d n_b \cos\epsilon\sin^2\epsilon - n_c^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger n_d N_b \cos\epsilon\sin^2\epsilon\Big\}\\
& - 3\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_c^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_d^{\mu_1\nu_2\nu_3}\Psi_b^{\mu\nu_2\mu_3}\Big\{n_c^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} n_d n_b \sin^3\epsilon\\
& + N_c^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} N_d N_b(1 - \cos\epsilon + \cos^2\epsilon - \cos^3\epsilon)\\
& + N_c^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} N_d n_b(\sin\epsilon - \cos\epsilon\sin\epsilon + \cos^2\epsilon\sin\epsilon)\\
& + n_c^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} N_d N_b(-\cos\epsilon\sin\epsilon + \cos^2\epsilon\sin\epsilon)\\
& + n_c^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} N_d n_b(\sin^2\epsilon - \cos\epsilon\sin^2\epsilon)\\
& + N_c^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} n_d N_b \cos^2\epsilon\sin\epsilon\\
& - N_c^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} n_d n_b \cos\epsilon\sin^2\epsilon - n_c^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} n_d N_b \cos\epsilon\sin^2\epsilon\Big\}. \qquad (5.41)
\end{aligned}
$$

Os detalhes deste cálculo e de sua discussão se encontram em [Had 95].

Assim, a aplicação da transformação Fock-Tani sobre a hamiltoniana de quarks:

$$\mathcal{H}_{FT} = U^{-1} H_{qq} U, \qquad (5.42)$$

gerando uma hamiltoniana $\mathcal{H}_{FT}$, consiste em substituir os operadores de quarks em H_{qq} por $q_\mu^{(3)}(\frac{\pi}{2})$ e $q_\mu^{\dagger(3)}(\frac{\pi}{2})$, onde tomamos $\epsilon = \frac{\pi}{2}$ em $q_\mu^{(3)}(\epsilon)$ e $q_\mu^{\dagger(3)}(\epsilon)$ para obter os operadores de quarks no espaço FT. Observe que os novos operadores de quarks possuem dependência nos operadores de núcleons ideais, isto gera uma $\mathcal{H}_{FT}$ com a seguinte estrutura

$$\mathcal{H}_{FT} = \mathcal{H}_{\text{quark-quark}} + \mathcal{H}_{\text{núcleon-quark}} + \mathcal{H}_{\text{núcleon-núcleon}}, \tag{5.43}$$

onde $\mathcal{H}_{\text{núcleon-núcleon}}$ é a parte que desejamos.

5.2 A troca de quarks entre núcleons

A componente da hamiltoniana de Fock-Tani que descreve os núcleons é dada por

$$\mathcal{H}_{FT} = T(a)\, n_a^\dagger n_a + \frac{1}{2} V(ab;dc)\, n_a^\dagger n_b^\dagger n_c n_d. \tag{5.44}$$

O termo do potencial em (5.44) é constituído por 5 partes

$$\frac{1}{2} V(ab;dc)\, n_a^\dagger n_b^\dagger n_c n_d = \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{5} V_n\right\} n_a^\dagger n_b^\dagger n_c n_d \tag{5.45}$$

onde

$$\begin{aligned}
V_1 &= 9\Psi_a^{*\mu\mu_2\mu_3}\Psi_b^{*\nu\nu_2\nu_3}\Psi_c^{\rho\nu_2\nu_3}\Psi_d^{\sigma\mu_2\mu_3} V(\mu\nu;\sigma\rho), && (5.46)\\
V_2 &= -36\Psi_a^{*\mu\mu_2\mu_3}\Psi_b^{*\nu\nu_2\nu_3}\Psi_c^{\rho\nu_2\mu_3}\Psi_d^{\sigma\mu_2\nu_3} V(\mu\nu;\sigma\rho), && (5.47)\\
V_3 &= -9\Psi_a^{*\mu\mu_2\mu_3}\Psi_b^{*\nu\nu_2\nu_3}\Psi_c^{\sigma\nu_2\nu_3}\Psi_d^{\rho\mu_2\mu_3} V(\mu\nu;\sigma\rho), && (5.48)\\
V_4 &= 18\Psi_a^{*\mu\nu\mu_3}\Psi_b^{*\nu_1\nu_2\nu_3}\Psi_c^{\rho\nu_2\nu_3}\Psi_d^{\nu_1\sigma\mu_3} V(\mu\nu;\sigma\rho), && (5.49)\\
V_5 &= -18\Psi_a^{*\mu\mu_2\mu_3}\Psi_b^{*\nu_1\nu_2\nu}\Psi_c^{\nu_1\nu_2\mu_3}\Psi_d^{\sigma\mu_2\rho} V(\mu\nu;\sigma\rho). && (5.50)
\end{aligned}$$

Na figura (5.1) mostramos a representação diagramática de cada termo.

Nestas expressões os fatores do tipo $\Psi_a^{\mu_1\mu_2\mu}$ por exemplo, são a função dos Clebsh-Gordon do núcleon a dada por:

$$\Psi_a^{\mu_1\mu_2\mu} = N(\vec{P}_a)\delta\left(\vec{P}_a - \vec{p}_{\mu_1} - \vec{p}_{\mu_2} - \vec{p}_\mu\right)\phi(\vec{p}_{\mu_1})\phi(\vec{p}_{\mu_2})\phi(\vec{p}_\mu)G_a, \tag{5.51}$$

onde $\vec{p}_\mu$ representa o trimomento do quark μ, $\vec{P}_a$ o trimomento do núcleon a, com $\phi(\vec{p}_\mu)$ e $N(\vec{P}_a)$ dados por:

$$\phi(\vec{p}_{\mu_1}) = \frac{1}{\pi^{3/4}\alpha^{3/2}}\exp\left(\frac{-\vec{p}_{\mu_1}}{2\alpha^2}\right),\ N(\vec{P}_a) = (3\pi\alpha^2)^{3/4}\exp\left(\frac{\vec{P}_a^2}{6\alpha^2}\right) \tag{5.52}$$

e α é o parâmetro do oscilador harmônico. A parte G_a representa as funções no espaço interno do núcleon descritas no apêndice D e que tem a forma:

$$G_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|S^z\rangle_{ms} |I^z\rangle_{ms} + |S^z\rangle_{ma} |I^z\rangle_{ma} \right) |C\rangle \,, \tag{5.53}$$

onde reescrevemos o singleto de cor na forma:

$$|C\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon^{\mu_1\mu_2\mu} |\mu_1\mu_2\mu\rangle \,, \tag{5.54}$$

e onde $|\mu_1\rangle = |r, y \text{ ou } g\rangle$ se $\mu_1 = 1, 2$ ou 3 e $\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu}$ é o tensor de Levi-Civita.

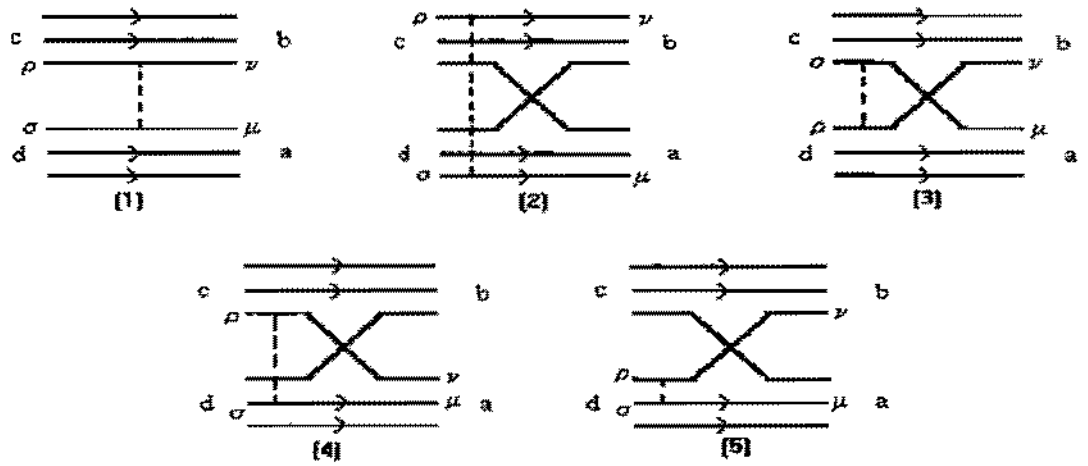


Figura 5.1: Representação diagramática das componentes do potencial.

O termo $V(\mu\nu;\sigma\rho)$ descreve a interação entre pares de quarks que, no nosso caso, será devido à troca de um píon e tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} V(\mu\nu;\sigma\rho) &= -\frac{g_{\pi q}^2}{4m^2} \delta\left(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu - \vec{p}_\sigma - \vec{p}_\rho\right) \frac{1}{m_\pi^2 + (\vec{p}_\rho - \vec{p}_\nu)^2} \times \\ &\times \; \delta^C_{\mu\sigma} \delta^C_{\nu\rho} \tau^a_{\mu\sigma} \tau^a_{\nu\rho} \; \sigma^i_{\mu\sigma} (\vec{p}_\rho - \vec{p}_\nu)^i \sigma^j_{\nu\rho} (\vec{p}_\rho - \vec{p}_\nu)^j \,, \end{aligned} \tag{5.55}$$

onde $\tau^a_{\mu\sigma}$ é a componente do operador de isospin do quark representado pela linha $\mu\sigma$ nos diagramas da figura(5.1), $\sigma^i_{\mu\sigma}$ é a componente do operador de spin do mesmo quark, $\delta^C_{\mu\sigma}$ é a delta de Dirac que atua sómente sobre as funções de cor, $g_{\pi q}$ é a constante de acoplamento píon-quark e m_π é a massa do píon.

A componente V_1 (eq.:5.46) é denominado de termo direto por descrever a troca de um píon entre quarks de aglomerados distintos sem ocorrer a troca de quarks entre os mesmos

aglomerados. Os demais termos incluem as diversas possibilidades de haver trocas de quarks entre os aglomerados e são denominados de termos de troca.

Cada componente V_n do potencial é escrito como um produto de fatores:

$$V_n = v^{ij}(n)\, I_C(n)\, O^{ij}_{ST}(n), \tag{5.56}$$

onde $v^{ij}(n)$ é o fator espacial, $I_C(n)$ é o fator de cor e $I^{ij}_{ST}(n)$ o de spin-isospin. Estes fatores são calculados separadamente.

5.3 Fatores de cor e spin-isospin

Uma vez que supomos que a interação entre quarks (5.55) independe dos graus de liberdade de cor, os fatores de cor são dados por

$$I_C(1) = \frac{1}{36}\epsilon_a^{*\mu\mu_2\mu_3}\epsilon_b^{*\nu\nu_2\nu_3}\delta^C_{\mu\sigma}\delta^C_{\nu\rho}\epsilon_c^{\rho\nu_2\nu_3}\epsilon_d^{\sigma\mu_2\mu_3} = 1, \tag{5.57}$$

$$I_C(2) = \frac{1}{36}\epsilon_a^{*\mu\mu_2\mu_3}\epsilon_b^{*\nu\nu_2\nu_3}\delta^C_{\mu\sigma}\delta^C_{\nu\rho}\epsilon_c^{\rho\nu_2\mu_3}\epsilon_d^{\sigma\mu_2\nu_3} = \frac{1}{3} \tag{5.58}$$

$$I_C(3) = \frac{1}{36}\epsilon_a^{*\mu\mu_2\mu_3}\epsilon_b^{*\nu\nu_2\nu_3}\delta^C_{\mu\sigma}\delta^C_{\nu\rho}\epsilon_c^{\sigma\nu_2\nu_3}\epsilon_d^{\rho\mu_2\mu_3} = \frac{1}{3} \tag{5.59}$$

$$I_C(4) = \frac{1}{36}\epsilon_a^{*\mu\nu\mu_3}\epsilon_b^{*\nu_1\nu_2\nu_3}\delta^C_{\mu\sigma}\delta^C_{\nu\rho}\epsilon_c^{\rho\nu_2\nu_3}\epsilon_d^{\nu_1\sigma\mu_3} = -\frac{1}{3} \tag{5.60}$$

$$I_C(5) = \frac{1}{36}\epsilon_a^{*\mu\mu_2\mu_3}\epsilon_b^{*\nu_1\nu_2\nu}\delta^C_{\mu\sigma}\delta^C_{\nu\rho}\epsilon_c^{\nu_1\nu_2\mu_3}\epsilon_d^{\sigma\mu_2\rho} = \frac{1}{3}. \tag{5.61}$$

Para o cálculo dos fatores $I_{ST}(n)$, reescrevemos a parte de spin e isospin da interação entre quarks (5.55), na forma

$$\tau^a_{\mu\sigma}\tau^a_{\nu\rho}\ \sigma^i_{\mu\sigma}(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\nu)^i\sigma^j_{\nu\rho}(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\nu)^j. \tag{5.62}$$

Assim, os fatores de spin e isospin são

$$I^{ij}_{ST}(1) = \left\langle S^z, I^z \middle| \tau^a_3\tau^a_6\ \sigma^i_3\sigma^j_6 \middle| S^z, I^z \right\rangle, \tag{5.63}$$

$$I^{ij}_{ST}(2) = \left\langle S^z, I^z \middle| \hat{P}_{36}\tau^a_1\tau^a_4\ \sigma^i_1\sigma^j_4 \middle| S^z, I^z \right\rangle, \tag{5.64}$$

$$I^{ij}_{ST}(3) = \left\langle S^z, I^z \middle| \hat{P}_{36}\tau^a_3\tau^a_6\ \sigma^i_3\sigma^j_6 \middle| S^z, I^z \right\rangle, \tag{5.65}$$

$$I^{ij}_{ST}(4) = \left\langle S^z, I^z \middle| \hat{P}_{36}\tau^a_2\tau^a_6\ \sigma^i_2\sigma^j_6 \middle| S^z, I^z \right\rangle, \tag{5.66}$$

$$I^{ij}_{ST}(5) = \left\langle S^z, I^z \middle| \hat{P}_{36}\tau^a_2\tau^a_3\ \sigma^i_2\sigma^j_3 \middle| S^z, I^z \right\rangle, \tag{5.67}$$

sendo $\hat{P}_{36}$ o operador de permutação que atua sobre os quarks 3 e 6, dado por

$$\hat{P}_{36} = \frac{1}{4}\left(1 + \tau^b_3\tau^b_6\right)\left(1 + \sigma^k_3\sigma^k_6\right). \tag{5.68}$$

Substituindo a expressão de $\hat{P}_{36}$ nas expressões de $I_{ST}(i)$, obtemos os seguintes operadores

$$\hat{O}^{ij}_{ST}(1) = \sigma^i_3\tau^a_3\ \sigma^j_6\tau^a_6 \tag{5.69}$$

$$\hat{O}^{ij}_{ST}(2) = \frac{1}{4}\left(\sigma^i_1\tau^a_1\ \sigma^j_4\tau^a_4 + \sigma^k_3\sigma^i_1\tau^a_1\ \sigma^k_6\sigma^j_4\tau^a_4 + \sigma^i_1\tau^a_1\tau^b_3\ \sigma^j_4\tau^a_4\tau^b_6 + \sigma^i_1\tau^a_1\sigma^k_3\tau^b_3\ \sigma^j_4\tau^a_4\sigma^k_6\tau^b_6\right) \tag{5.70}$$

$$\hat{O}^{ij}_{ST}(3) = \frac{1}{4}\left(\sigma^i_3\tau^a_3\ \sigma^j_6\tau^a_6 + \sigma^k_3\sigma^i_3\tau^a_3\ \sigma^k_6\sigma^j_6\tau^a_6 + \sigma^i_3\tau^b_3\tau^a_3\ \sigma^j_6\tau^b_6\tau^a_6 + \tau^b_3\sigma^k_3\sigma^i_3\tau^a_3\ \sigma^k_6\sigma^j_6\tau^b_6\tau^a_6\right) \tag{5.71}$$

$$\hat{O}^{ij}_{ST}(4) = \frac{1}{4}\left(\sigma^i_2\tau^a_2\ \sigma^j_6\tau^a_6 + \sigma^k_3\sigma^i_2\tau^a_2\ \sigma^k_6\sigma^j_6\tau^a_6 + \tau^b_3\tau^a_2\sigma^i_2\ \sigma^j_6\tau^b_6\tau^a_6 + \sigma^k_3\sigma^i_2\tau^b_3\tau^a_2\ \sigma^k_6\tau^b_6\sigma^j_6\tau^a_6\right) \tag{5.72}$$

$$\hat{O}^{ij}_{ST}(5) = \frac{1}{4}\left(\sigma^i_2\tau^a_2\ \sigma^j_3\tau^a_3 + \sigma^i_2\sigma^k_3\sigma^j_3\tau^a_2\tau^a_3\ \sigma^k_6 + \sigma^i_2\sigma^j_3\tau^a_2\tau^b_3\tau^a_3\ \tau^b_6 + \sigma^i_2\sigma^k_3\sigma^j_3\tau^a_2\tau^b_3\tau^a_3\ \sigma^k_6\tau^b_6\right) \tag{5.73}$$

Usando as regras de substituição obtidas por Thomas e Holinde [Hol 93] e descritas no apêndice E, chegamos a

$$\hat{O}^{ij}_{ST}(1) = \frac{25}{81}T^a_A T^a_B \Sigma^i_B \Sigma^j_B, \tag{5.74}$$

$$\hat{O}^{ij}_{ST}(2) = \frac{1}{36}\left[\delta_{ij}\left(\frac{25}{3} + \frac{1}{9}T^a_A T^a_B + 2T^a_A T^a_B \Sigma^k_A \Sigma^k_B\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{7}{3}T^a_A T^a_B\right)\Sigma^i_A \Sigma^j_B\right], \tag{5.75}$$

$$\hat{O}^{ij}_{ST}(3) = \frac{1}{36}\left[\delta_{ij}\left(27 - 3\Sigma^k_A \Sigma^k_B - T^a_A T^a_B + \frac{25}{9}T^a_A T^a_B \Sigma^k_A \Sigma^k_B\right) + \left(6 - \frac{50}{9}T^a_A T^a_B\right)\Sigma^i_A \Sigma^j_B\right], \tag{5.76}$$

$$\hat{O}^{ij}_{ST}(4) = \frac{1}{36}\left[\delta_{ij}\left(15 + \frac{1}{3}T^a_A T^a_B + \frac{10}{3}T^a_A T^a_B \Sigma^k_A \Sigma^k_B\right) + \left(1 - \frac{5}{9}T^a_A T^a_B\right)\Sigma^i_A \Sigma^j_B\right], \tag{5.77}$$

$$\hat{O}^{ij}_{ST}(5) = \frac{1}{36}\left[\delta_{ij}\left(15 + \frac{1}{3}T^a_A T^a_B + \frac{10}{3}T^a_A T^a_B \Sigma^k_A \Sigma^k_B\right) + \left(1 - \frac{5}{9}T^a_A T^a_B\right)\Sigma^i_A \Sigma^j_B\right]. \tag{5.78}$$

5.4 Fatores espaciais

Descrevemos, com maiores detalhes, os procedimentos de cálculo dos fatores $v^{ij}(1)$ e $v^{ij}(2)$, enquanto que, para os demais fatores, apresentamos apenas os resultados, uma vez que os cálculos destes últimos são completamente análogos ao do fator $v^{ij}(2)$. Os fatores são obtidos, mais facilmente, no espaço dos momentos.

O fator $v^{ij}(1)$ é oriundo da componente (5.46) do potencial:

$$V_1 = 9\Phi_a^{*\mu\mu_2\mu_3}\Phi_b^{*\nu\nu_2\nu_3}\Phi_c^{\rho\nu_2\nu_3}\Phi_d^{\sigma\mu_2\mu_3}V(\mu\nu;\sigma\rho). \tag{5.79}$$

Assim, $v^{ij}(1)$ tem a forma:

$$\begin{aligned} v^{ij}(1) &= N\int d\vec{p}_{\mu_3}d\vec{p}_{\mu_2}d\vec{p}_{\nu_3}d\vec{p}_{\nu_2}d\vec{p}_{\mu}d\vec{p}_{\nu}d\vec{p}_{\sigma}d\vec{p}_{\rho}U^{ij}(\vec{p}_\rho-\vec{p}_\nu)\phi^*(\vec{p}_\mu)\phi^*(\vec{p}_\nu)\phi(\vec{p}_\sigma)\phi(\vec{p}_\rho) \\ &\times|\phi(\vec{p}_{\mu_3})|^2|\phi(\vec{p}_{\mu_2})|^2|\phi(\vec{p}_{\nu_3})|^2|\phi(\vec{p}_{\nu_2})|^2\delta(\vec{P}_a-\vec{p}_{\mu_3}-\vec{p}_{\mu_2}-\vec{p}_\mu)\delta(\vec{P}_b-\vec{p}_{\nu_3}-\vec{p}_{\nu_2}-\vec{p}_\nu) \\ &\times\delta(\vec{P}_c-\vec{p}_{\nu_3}-\vec{p}_{\nu_2}-\vec{p}_\rho)\delta(\vec{P}_d-\vec{p}_{\mu_3}-\vec{p}_{\mu_2}-\vec{p}_\sigma)\delta(\vec{p}_\mu+\vec{p}_\nu-\vec{p}_\sigma-\vec{p}_\rho). \end{aligned} \tag{5.80}$$

onde:

$$N \equiv 9N^*(\vec{P}_a)N^*(\vec{P}_b)N(\vec{P}_c)N(\vec{P}_d), \tag{5.81}$$

$$U^{ij}(\vec{p}_\rho-\vec{p}_\nu) = -\frac{g_\pi^2}{4m^2}\frac{(\vec{p}_\rho-\vec{p}_\nu)^i(\vec{p}_\rho-\vec{p}_\nu)^j}{m_\pi^2+(\vec{p}_\rho-\vec{p}_\nu)^2}. \tag{5.82}$$

Usando as quatro últimas deltas, obtemos que $\vec{p}_{\mu_3}+\vec{p}_{\mu_2}+\vec{p}_\mu = \vec{P}_c+\vec{P}_d-\vec{P}_b$ e substituindo na primeira função delta, extraímos uma delta global $\delta(\vec{P}_a+\vec{P}_b-\vec{P}_c-\vec{P}_d)$ na expressão de $v^{ij}(1)$ e temos que

$$\begin{aligned} v^{ij}(1) &= N\delta(\vec{P}_a+\vec{P}_b-\vec{P}_c-\vec{P}_d)\int d\vec{p}_{\mu_3}d\vec{p}_{\mu_2}d\vec{p}_{\nu_3}d\vec{p}_{\nu_2}d\vec{p}_{\mu}d\vec{p}_{\nu}d\vec{p}_{\sigma}d\vec{p}_{\rho}U^{ij}(\vec{p}_\rho-\vec{p}_\nu) \\ &\times\phi^*(\vec{p}_\mu)\phi^*(\vec{p}_\nu)\phi(\vec{p}_\sigma)\phi(\vec{p}_\rho)|\phi(\vec{p}_{\mu_3})|^2|\phi(\vec{p}_{\mu_2})|^2|\phi(\vec{p}_{\nu_3})|^2|\phi(\vec{p}_{\nu_2})|^2 \\ &\times\delta(\vec{P}_b-\vec{p}_{\nu_3}-\vec{p}_{\nu_2}-\vec{p}_\nu)\delta(\vec{P}_c-\vec{p}_{\nu_3}-\vec{p}_{\nu_2}-\vec{p}_\rho) \\ &\times\delta(\vec{P}_d-\vec{p}_{\mu_3}-\vec{p}_{\mu_2}-\vec{p}_\sigma)\delta(\vec{p}_\mu+\vec{p}_\nu-\vec{p}_\sigma-\vec{p}_\rho). \end{aligned} \tag{5.83}$$

Reescrevemos, então, as demais deltas na forma de integrais e agrupamos nos momentos dos quarks, obtendo

$$\begin{aligned} v^{ij}(1) &= \delta(\vec{P}_a+\vec{P}_b-\vec{P}_c-\vec{P}_d)\frac{N}{(2\pi)^{12}}\int d\vec{R}_1d\vec{R}_2d\vec{R}_3d\vec{R}_4e^{-i(\vec{P}_b\cdot\vec{R}_1+\vec{P}_c\cdot\vec{R}_2+\vec{P}_d\cdot\vec{R}_3)} \\ &\times\int d\vec{p}_\nu\phi^*(\vec{p}_\nu)e^{i\vec{p}_\nu\cdot(\vec{R}_1-\vec{R}_4)}\int d\vec{p}_\rho\phi(\vec{p}_\rho)e^{i\vec{p}_\rho\cdot(\vec{R}_4+\vec{R}_2)}U^{ij}(\vec{p}_\rho-\vec{p}_\nu) \\ &\times\int d\vec{p}_\mu\phi^*(\vec{p}_\mu)e^{(-i\vec{p}_\mu\cdot\vec{R}_4)}\int d\vec{p}_\sigma\phi(\vec{p}_\sigma)e^{i\vec{p}_\sigma\cdot(\vec{R}_3+\vec{R}_4)} \\ &\times\int d\vec{p}_{\mu_3}|\phi(\vec{p}_{\mu_3})|^2e^{i\vec{p}_{\mu_3}\cdot\vec{R}_3}\int d\vec{p}_{\mu_2}|\phi(\vec{p}_{\mu_2})|^2e^{i\vec{p}_{\mu_2}\cdot\vec{R}_3} \\ &\times\int d\vec{p}_{\nu_3}|\phi(\vec{p}_{\nu_3})|^2e^{i\vec{p}_{\nu_3}\cdot(\vec{R}_1+\vec{R}_2)}\int d\vec{p}_{\nu_2}|\phi(\vec{p}_{\nu_2})|^2e^{i\vec{p}_{\nu_2}\cdot(\vec{R}_1+\vec{R}_2)}. \end{aligned} \tag{5.84}$$

Realizando a seguinte substituição de variável: $\vec{p}_p = \vec{q} + \vec{p}_\nu$, obtemos

$$\begin{aligned} v^{ij}(1) &= \frac{N}{(2\pi)^{12}}\delta(\vec{P}_a + \vec{P}_b - \vec{P}_c - \vec{P}_d)\int d\vec{q}U^{ij}(\vec{q})\int(\prod_{i=1}^{4} d\vec{R}_i)e^{i\vec{q}\cdot(\vec{R}_2+\vec{R}_4)}e^{-i\vec{P}_b\cdot\vec{R}_1 - i\vec{P}_c\cdot\vec{R}_2 - i\vec{P}_d\cdot\vec{R}_3} \\ &\times \int d\vec{p}_\nu\phi^*(\vec{p}_\nu)\phi(\vec{q}+\vec{p}_\nu)e^{i\vec{p}_\nu\cdot(\vec{R}_1+\vec{R}_2)}\int d\vec{p}_{\mu_3}|\phi(\vec{p}_{\mu_3})|^2 e^{i\vec{p}_{\mu_3}\cdot\vec{R}_3}\int d\vec{p}_{\mu_2}|\phi(\vec{p}_{\mu_2})|^2 e^{i\vec{p}_{\mu_2}\cdot\vec{R}_3} \\ &\times \int d\vec{p}_{\nu_3}|\phi(\vec{p}_{\nu_3})|^2 e^{i\vec{p}_{\nu_3}\cdot(\vec{R}_1+\vec{R}_2)}\int d\vec{p}_{\nu_2}|\phi(\vec{p}_{\nu_2})|^2 e^{i\vec{p}_{\nu_2}\cdot(\vec{R}_1+\vec{R}_2)}\int d\vec{p}_\mu\phi^*(\vec{p}_\mu)e^{-i\vec{p}_\mu\cdot\vec{R}_4} \\ &\times \int d\vec{p}_\sigma\phi(\vec{p}_\sigma)e^{i\vec{p}_\sigma\cdot(\vec{R}_3+\vec{R}_4)}. \end{aligned} \tag{5.85}$$

Nesta expressão encontramos tres tipos de integrações a saber

$$\begin{aligned} &\int d\vec{p}_{\mu_3}e^{i\vec{p}_{\mu_3}\cdot\vec{R}_3}|\phi(\vec{p}_{\mu_3})|^2 = e^{-\frac{\alpha^2}{4}\vec{R}_3^2}, \\ &\int d\vec{p}_\mu e^{i\vec{p}_\mu\cdot\vec{R}_4}\phi^*(\vec{p}_\mu) = (4\alpha^2\pi)^{\frac{3}{4}}e^{-\frac{\alpha^2}{2}\vec{R}_4^2}, \\ &\int d\vec{p}_\nu e^{i\vec{p}_\nu\cdot(\vec{R}_1+\vec{R}_2)}\phi^*(\vec{p}_\nu)\phi(\vec{p}_\nu+\vec{q}) = e^{-\frac{\vec{q}^2}{4\alpha^2}-\frac{i\vec{q}}{2}\cdot(\vec{R}_1+\vec{R}_2)-\frac{\alpha^2}{4}(\vec{R}_1+\vec{R}_2)^2}. \end{aligned} \tag{5.86}$$

Substituindo (5.86) em $v^{ij}(1)$, chegamos a

$$\begin{aligned} v^{ij}(1) &= \frac{N}{(2\pi)^{12}}\delta(\vec{P}_a + \vec{P}_b - \vec{P}_c - \vec{P}_d)(4\alpha^2\pi)^{\frac{3}{2}}\int d\vec{q}e^{-\frac{\vec{q}^2}{4\alpha^2}}U^{ij}(\vec{q}) \\ &\times \int d\vec{R}_1 e^{\left[-\frac{3\alpha^2}{4}\vec{R}_1^2 - i\left(\frac{\vec{q}}{2}+\vec{P}_b\right)\cdot\vec{R}_1\right]} \\ &\times \int d\vec{R}_2 e^{-\frac{3\alpha^2}{4}\left[\vec{R}_2^2+\left(2\vec{R}_1+\frac{4}{3\alpha^2}i\vec{P}_c-\frac{2i}{3\alpha^2}\vec{q}\right)\cdot\vec{R}_2\right]} \\ &\times \int d\vec{R}_3 e^{\left(-\alpha^2\vec{R}_3^2 - i\vec{P}_d\cdot\vec{R}_3\right)}\int d\vec{R}_4 e^{-\alpha^2\left[\vec{R}_4^2+\left(\vec{R}_3-i\frac{\vec{q}}{\alpha^2}\right)\cdot\vec{R}_4\right]}. \end{aligned} \tag{5.87}$$

As integrais em espaciais são do tipo gaussiano dados no apêndice e realizando-as, temos

$$\begin{aligned} v^{ij}(1) &= \delta(\vec{P}_a + \vec{P}_b - \vec{P}_c - \vec{P}_d)\frac{N}{(3\pi\alpha^2)^3}\int d\vec{q}U^{ij}(\vec{q})e^{-\frac{\vec{q}^2}{2\alpha^2}} \\ &\times e^{-\frac{1}{12\alpha^2}\left[(2\vec{P}_d+\vec{q})^2-(\vec{q}-2\vec{P}_c)^2\right]}\delta(\vec{q}+\vec{P}_b-\vec{P}_c). \end{aligned} \tag{5.88}$$

Devido a $\delta(\vec{q}+\vec{P}_b-\vec{P}_c)$ a integração em $\vec{q}$ desta expressão é trivial. Substituindo N dado por (5.81), chegamos ao seguinte resultado

$$v^{ij}(1) = 9\delta(\vec{P}_a + \vec{P}_b - \vec{P}_c - \vec{P}_d)e^{\left[\frac{\vec{P}_b^2}{6\alpha^2}-\frac{\vec{P}_a^2}{2\alpha^2}-\frac{\vec{P}_d^2}{6\alpha^2}-\frac{\vec{P}_c^2}{2\alpha^2}+\frac{\vec{P}_c\cdot\vec{P}_b}{\alpha^2}-\frac{\vec{P}_d\cdot\vec{P}_c}{3\alpha^2}+\frac{\vec{P}_d\cdot\vec{P}_b}{3\alpha^2}\right]}U^{ij}(\vec{P}_c-\vec{P}_b), \tag{5.89}$$

onde $\vec{P}_a$, $\vec{P}_b$ são os trimomentos dos núcleons emergentes e $\vec{P}_c$, $\vec{P}_d$ são os trimomentos dos núcleons incidentes.

Usando as seguintes variáveis do sistema do centro de massa:

$$\begin{aligned}
\vec{P}_a &= \vec{P}' + \frac{\vec{S}'}{2}, \\
\vec{P}_b &= -\vec{P}' + \frac{\vec{S}'}{2}, \\
\vec{P}_c &= -\vec{P} + \frac{\vec{S}}{2}, \\
\vec{P}_d &= \vec{P} + \frac{\vec{S}}{2},
\end{aligned} \tag{5.90}$$

e substituindo a expressão de $U^{ij}(\vec{P}_c - \vec{P}_b)$ em $v^{ij}(1)$, chegamos ao seguinte resultado final (a menos de uma $\delta\left(\vec{S}' - \vec{S}\right)$ global)

$$v^{ij}(1) = -\frac{9g_\pi^2}{4m^2} e^{-\frac{(\vec{P}'-\vec{P})^2}{3\alpha^2}} \frac{1}{m_\pi^2 + \left(\vec{P}' - \vec{P}\right)^2} \left(\vec{P}' - \vec{P}\right)^i \left(\vec{P}' - \vec{P}\right)^j. \tag{5.91}$$

O fator $v^{ij}(2)$ vem da seguinte componente do potencial:

$$V_2 = -36\Phi_a^{*\mu\mu_2\mu_3}\Phi_b^{*\nu\nu_2\nu_3}\Phi_c^{\rho\nu_2\mu_3}\Phi_d^{\sigma\mu_2\nu_3} V(\mu\nu;\sigma\rho) \tag{5.92}$$

Assim, $v^{ij}(2)$ é:

$$\begin{aligned}
v^{ij}(2) = & -4N\delta\left(\vec{P}_a + \vec{P}_b - \vec{P}_c - \vec{P}_d\right) \int d\vec{p}_{\mu_3} d\vec{p}_{\mu_2} d\vec{p}_{\nu_3} d\vec{p}_{\nu_2} d\vec{p}_\mu d\vec{p}_\nu d\vec{p}_\sigma d\vec{p}_\rho U^{ij}(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\nu) \\
& \times |\phi(\vec{p}_{\mu_3})|^2 |\phi(\vec{p}_{\mu_2})|^2 |\phi(\vec{p}_{\nu_2})|^2 |\phi(\vec{p}_{\nu_2})|^2 \phi^*(\vec{p}_\mu)\phi^*(\vec{p}_\nu)\phi(\vec{p}_\sigma)\phi(\vec{p}_\rho) \\
& \times\delta\left(\vec{P}_b - \vec{p}_\nu - \vec{p}_{\nu_2} - \vec{p}_{\nu_3}\right) \delta\left(\vec{P}_c - \vec{p}_\rho - \vec{p}_{\nu_2} - \vec{p}_{\mu_3}\right) \\
& \times\delta\left(\vec{P}_d - \vec{p}_\sigma - \vec{p}_{\mu_2} - \vec{p}_{\nu_3}\right) \delta\left(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu - \vec{p}_\sigma - \vec{p}_\rho\right).
\end{aligned} \tag{5.93}$$

onde já extraímos uma delta global. Escrevendo as deltas restantes na forma integral e agrupando nos momentos, obtemos:

$$\begin{aligned}
v^{ij}(2) = & -\frac{4N}{(2\pi)^{12}}\delta\left(\vec{P}_a + \vec{P}_b - \vec{P}_c - \vec{P}_d\right) \int d\vec{R}_1 d\vec{R}_2 d\vec{R}_3 d\vec{R}_4 e^{-i\left(\vec{P}_b\cdot\vec{R}_1 + \vec{P}_c\cdot\vec{R}_2 + \vec{P}_d\cdot\vec{R}_3\right)} \\
& \times \int d\vec{p}_\mu \phi^*(\vec{p}_\mu) e^{-i\vec{p}_\mu\cdot\vec{R}_4} \int d\vec{p}_\nu \phi^*(\vec{p}_\nu) e^{-i\vec{p}_\nu\cdot\left(\vec{R}_4 - \vec{R}_1\right)} U^{ij}(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\nu) \\
& \times \int d\vec{p}_\rho \phi(\vec{p}_\rho) e^{i\vec{p}_\rho\cdot\left(\vec{R}_2 + \vec{R}_4\right)} \int d\vec{p}_\sigma \phi(\vec{p}_\sigma) e^{i\vec{p}_\sigma\cdot\left(\vec{R}_3 + \vec{R}_4\right)} \\
& \times \int d\vec{p}_{\mu_3} |\phi(\vec{p}_{\mu_3})|^2 e^{i\vec{p}_{\mu_3}\cdot\vec{R}_2} \int d\vec{p}_{\mu_2} |\phi(\vec{p}_{\mu_2})|^2 e^{i\vec{p}_{\mu_2}\cdot\vec{R}_3} \\
& \times \int d\vec{p}_{\nu_3} |\phi(\vec{p}_{\nu_3})|^2 e^{i\vec{p}_{\nu_3}\cdot\left(\vec{R}_1 + \vec{R}_3\right)} \int d\vec{p}_{\nu_2} |\phi(\vec{p}_{\nu_2})|^2 e^{i\vec{p}_{\nu_2}\cdot\left(\vec{R}_2 + \vec{R}_1\right)}.
\end{aligned} \tag{5.94}$$

Substituindo $\vec{p}_\rho = \vec{q} + \vec{p}_\nu$, vem:

$$\begin{aligned} v^{ij}(2) &= -\frac{4N}{(2\pi)^{12}}\delta\left(\vec{P}_a + \vec{P}_b - \vec{P}_c - \vec{P}_d\right)\int d\vec{R}_1 d\vec{R}_2 d\vec{R}_3 d\vec{R}_4 e^{-i\left(\vec{P}_b\cdot\vec{R}_1 + \vec{P}_c\cdot\vec{R}_2 + \vec{P}_d\cdot\vec{R}_3\right)} \\ &\times \int d\vec{q} U^{ij}(\vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot\left(\vec{R}_2+\vec{R}_4\right)} \int d\vec{p}_\mu \phi^*(\vec{p}_\mu) e^{-i\vec{p}_\mu\cdot\vec{R}_4} \\ &\times \int d\vec{p}_\nu \phi^*(\vec{p}_\nu)\phi(\vec{q}+\vec{p}_\nu) e^{i\vec{p}_\nu\cdot\left(\vec{R}_1+\vec{R}_2\right)} \int d\vec{p}_\sigma \phi(\vec{p}_\sigma) e^{i\vec{p}_\sigma\cdot\left(\vec{R}_3+\vec{R}_4\right)} \\ &\times \int d\vec{p}_{\mu_3} \left|\phi(\vec{p}_{\mu_3})\right|^2 e^{i\vec{p}_{\mu_3}\cdot\vec{R}_3} \int d\vec{p}_{\mu_2} \left|\phi(\vec{p}_{\mu_2})\right|^2 e^{i\vec{p}_{\mu_2}\cdot\vec{R}_3} \\ &\times \int d\vec{p}_{\nu_3} \left|\phi(\vec{p}_{\nu_3})\right|^2 e^{i\vec{p}_{\nu_3}\cdot\left(\vec{R}_1+\vec{R}_3\right)} \int d\vec{p}_{\nu_2} \left|\phi(\vec{p}_{\nu_2})\right|^2 e^{i\vec{p}_{\nu_2}\cdot\left(\vec{R}_2+\vec{R}_1\right)} \end{aligned} \tag{5.95}$$

e integrando nos momentos, temos:

$$\begin{aligned} v^{ij}(2) &= -4N\frac{\left(4\alpha^2\pi\right)^{3/2}}{(2\pi)^{12}}\delta\left(\vec{P}_a + \vec{P}_b - \vec{P}_c - \vec{P}_d\right)\int d\vec{q} e^{-\frac{\vec{q}^2}{4\alpha^2}} U^{ij}(\vec{q}) \\ &\times \int d\vec{R}_1 e^{-\left(\frac{3\alpha^2}{4}\right)\vec{R}_1^2 - \frac{i\vec{q}}{2}\cdot\vec{R}_1 - i\vec{P}_b\cdot\vec{R}_1} \\ &\times \int d\vec{R}_2 e^{-\frac{3\alpha^2}{4}\left[\vec{R}_2^2 + \left(\frac{4}{3}\vec{R}_1 + \frac{2i}{3\alpha^2}\left(2\vec{P}_c - \vec{q}\right)\right)\cdot\vec{R}_2\right]} \\ &\times \int d\vec{R}_3 e^{-\alpha^2\left[\vec{R}_3^2 + \frac{1}{2}\left(\vec{R}_1 + \frac{2i\vec{P}_d}{\alpha^2}\right)\cdot\vec{R}_3\right]} \int d\vec{R}_4 e^{-\alpha^2\left[\vec{R}_4^2 + \left(\vec{R}_3 - \frac{i\vec{q}}{\alpha^2}\right)\cdot\vec{R}_4\right]}. \end{aligned} \tag{5.96}$$

Integrando nsa coordenadas espaciais e substituindo N (equação 5.81), chegamos a:

$$\begin{aligned} v^{ij}(2) &= -36\left(\frac{3}{4\pi\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}}\delta(\vec{P}_a + \vec{P}_b - \vec{P}_d - \vec{P}_c) e^{\left[\frac{\vec{P}_a^2}{6\alpha^2} - \frac{7\vec{P}_b^2}{12\alpha^2} - \frac{\vec{P}_c^2}{2\alpha^2} - \frac{\vec{P}_d^2}{4\alpha^2} + \frac{\vec{P}_b\cdot\vec{P}_c}{\alpha^2} + \frac{\vec{P}_b\cdot\vec{P}_d}{2\alpha^2} - \frac{\vec{P}_c\cdot\vec{P}_d}{3\alpha^2}\right]} \\ &\times \int d\vec{q} U^{ij}(\vec{q}) e^{\left[-\frac{\vec{q}^2}{\alpha^2} - \frac{\vec{q}}{\alpha^2}\cdot\left(\vec{P}_b - \vec{P}_c\right)\right]}. \end{aligned} \tag{5.97}$$

Mudando para as variáveis do sistema do centro de massa (5.90):

$$v^{ij}(2) = -36\left(\frac{3}{4\pi\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\left[-\frac{5}{12\alpha^2}\left(\vec{P}'^2 + \vec{P}^2\right) + \frac{\vec{P}\cdot\vec{P}'}{2\alpha^2}\right]} \int d\vec{q} U^{ij}(\vec{q}) e^{\left[-\frac{\vec{q}^2}{\alpha^2} - \frac{\vec{q}\cdot\left(\vec{P} - \vec{P}'\right)}{\alpha^2}\right]}. \tag{5.98}$$

Os resultados para $v^{ij}(3)$, $v^{ij}(4)$ e $v^{ij}(5)$ são obtidos seguindo um procedimento análogo ao cálculo de $v^{ij}(2)$.

Reunindo os resultados para os fatores espaciais, temos:

$$v^{ij}(1) = 9N_{dir}U^{ij}(\vec{P}_c - \vec{P}_b), \tag{5.99}$$

$$v^{ij}(2) = -36N_{troca}\int d\vec{q} U^{ij}(\vec{q}) e^{\left[-\frac{\vec{q}^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}\vec{q}\cdot\left(\vec{P}_b - \vec{P}_c\right)\right]}, \tag{5.100}$$

$$v^{ij}(3) = -9N_{troca}\int d\vec{q}U^{ij}(\vec{q})e^{\left[-\frac{3\vec{q}^2}{4\alpha^2}-\frac{1}{2\alpha^2}\vec{q}\cdot(\vec{P}_b-\vec{P}_d)\right]}, \tag{5.101}$$

$$v^{ij}(4) = 18N_{troca}\int d\vec{q}U^{ij}(\vec{q})e^{\left[-\frac{11\vec{q}^2}{16\alpha^2}+\frac{1}{4\alpha^2}\vec{q}\cdot(\vec{P}_b+\vec{P}_d-2\vec{P}_c)\right]}, \tag{5.102}$$

$$v^{ij}(5) = -18N_{troca}\int d\vec{q}U^{ij}(\vec{q})e^{\left[-\frac{11\vec{q}^2}{16\alpha^2}-\frac{1}{4\alpha^2}\vec{q}\cdot(3\vec{P}_b-2\vec{P}_c-\vec{P}_d)\right]}, \tag{5.103}$$

onde

$$N_{troca} = \left(\frac{3}{4\pi\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}}\delta(\vec{P}_a+\vec{P}_b-\vec{P}_d-\vec{P}_c)e^{\left[\frac{\vec{P}_a^2}{6\alpha^2}-\frac{7\vec{P}_b^2}{12\alpha^2}-\frac{\vec{P}_d^2}{4\alpha^2}-\frac{\vec{P}_c^2}{2\alpha^2}+\frac{\vec{P}_b\cdot\vec{P}_c}{\alpha^2}+\frac{\vec{P}_b\cdot\vec{P}_d}{2\alpha^2}-\frac{\vec{P}_c\cdot\vec{P}_d}{3\alpha^2}\right]} \tag{5.104}$$

$$N_{dir} = \delta(\vec{P}_a+\vec{P}_b-\vec{P}_c-\vec{P}_d)e^{\left[\frac{\vec{P}_a^2}{6\alpha^2}-\frac{\vec{P}_b^2}{2\alpha^2}-\frac{\vec{P}_d^2}{6\alpha^2}-\frac{\vec{P}_c^2}{2\alpha^2}+\frac{\vec{P}_c\cdot\vec{P}_b}{\alpha^2}-\frac{\vec{P}_d\cdot\vec{P}_c}{3\alpha^2}+\frac{\vec{P}_d\cdot\vec{P}_b}{3\alpha^2}\right]}. \tag{5.105}$$

No referencial do centro de massa, estas expressões são dadas por

$$v^{ij}(1) = 9N_{dir}U^{ij}(\vec{P}'-\vec{P}), \tag{5.106}$$

$$v^{ij}(2) = -36N_{troca}\int d\vec{q}U^{ij}(\vec{q})e^{\left[-\frac{\vec{q}^2}{\alpha^2}-\frac{\vec{q}\cdot(\vec{P}-\vec{P}')}{\alpha^2}\right]}, \tag{5.107}$$

$$v^{ij}(3) = -9N_{troca}\int d\vec{q}U^{ij}(\vec{q})e^{\left[-\frac{3\vec{q}^{\,2}}{4\alpha^2}+\frac{\vec{q}\cdot(\vec{P}'+\vec{P})}{2\alpha^2}\right]}, \tag{5.108}$$

$$v^{ij}(4) = 18N_{troca}\int d\vec{q}U^{ij}(\vec{q})e^{\left[-\frac{11\vec{q}^{\,2}}{16\alpha^2}+\frac{\vec{q}\cdot(3\vec{P}-\vec{P}')}{4\alpha^2}\right]}, \tag{5.109}$$

$$v^{ij}(5) = -18N_{troca}\int d\vec{q}U^{ij}(\vec{q})e^{\left[-\frac{11\vec{q}^{\,2}}{16\alpha^2}-\frac{\vec{q}\cdot(\vec{P}-2\vec{P}')}{4\alpha^2}\right]}, \tag{5.110}$$

com

$$N_{troca} = \left(\frac{3}{4\pi\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}}e^{\left[-\frac{5}{12\alpha^2}(\vec{P}'^{\,2}+\vec{P}^2)+\frac{\vec{P}\cdot\vec{P}'}{2\alpha^2}\right]}, \tag{5.111}$$

$$N_{dir} = e^{-\frac{(\vec{P}'-\vec{P})^2}{3\alpha^2}}. \tag{5.112}$$

5.5 O potencial V_{FT} não-local

Reunindo os resultados das seções anteriores, temos para as componentes do potencial

$$V_1 = 9N_{dir}\hat{O}^{ij}_{ST}(1)\,U^{ij}(\vec{P}'-\vec{P}), \tag{5.113}$$

$$V_2 = -36N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}^{ij}_{ST}(2)\int d\vec{q}U^{ij}(\vec{q})e^{\left[-\frac{\vec{q}^2}{\alpha^2}+\frac{\vec{q}\cdot(\vec{P}'-\vec{P})}{\alpha^2}\right]}, \tag{5.114}$$

$$V_3 = -9N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}^{ij}_{ST}(3)\int d\vec{q}U^{ij}(\vec{q})e^{\left[-\frac{3\vec{q}^{\,2}}{4\alpha^2}+\frac{\vec{q}\cdot(\vec{P}'+\vec{P})}{2\alpha^2}\right]}, \tag{5.115}$$

$$V_4 = -18N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}^{ij}_{ST}(4)\int d\vec{q}U^{ij}(\vec{q})e^{\left[-\frac{11\vec{q}^{\,2}}{16\alpha^2}+\frac{\vec{q}\cdot(3\vec{P}-\vec{P}')}{4\alpha^2}\right]}, \tag{5.116}$$

$$V_5 = -18N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}^{ij}_{ST}(5)\int d\vec{q}U^{ij}(\vec{q})e^{\left[-\frac{11\vec{q}^{\,2}}{16\alpha^2}+\frac{\vec{q}\cdot(3\vec{P}'-\vec{P})}{4\alpha^2}\right]}, \tag{5.117}$$

onde

$$U^{ij}(\vec{Q}) = -\frac{g_\pi^2}{4m^2}\frac{Q^iQ^j}{m_\pi^2+\vec{Q}^2}, \tag{5.118}$$

e

$$\hat{O}^{ij}_{ST}(1) = \frac{25}{81}T^a_AT^a_B\Sigma^i_B\Sigma^j_B, \tag{5.119}$$

$$\hat{O}^{ij}_{ST}(2) = \frac{1}{36}\left[\delta_{ij}\left(\frac{25}{3}+\frac{1}{9}T^a_AT^a_B+2T^a_AT^a_B\Sigma^k_A\Sigma^k_B\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{7}{3}T^a_AT^a_B\right)\Sigma^i_A\Sigma^j_B\right] \tag{5.120}$$

$$\begin{aligned}\hat{O}^{ij}_{ST}(3) &= \frac{1}{36}\left[\delta_{ij}\left(27-3\Sigma^k_A\Sigma^k_B-T^a_AT^a_B+\frac{25}{9}T^a_AT^a_B\Sigma^k_A\Sigma^k_B\right)\right.\\ &\quad\left.+\left(6-\frac{50}{9}T^a_AT^a_B\right)\Sigma^i_A\Sigma^j_B\right],\end{aligned} \tag{5.121}$$

$$\hat{O}^{ij}_{ST}(4) = \frac{1}{36}\left[\delta_{ij}\left(15+\frac{1}{3}T^a_AT^a_B+\frac{10}{3}T^a_AT^a_B\Sigma^k_A\Sigma^k_B\right)+\left(1-\frac{5}{9}T^a_AT^a_B\right)\Sigma^i_A\Sigma^j_B\right], \tag{5.122}$$

$$\hat{O}^{ij}_{ST}(5) = \hat{O}^{ij}_{ST}(4). \tag{5.123}$$

5.6 A aproximação local

Para realizarmos a aproximação local redefinimos

$$\begin{aligned}\vec{k} &= \vec{P}'-\vec{P},\\ \vec{t} &= \frac{1}{2}\left(\vec{P}'+\vec{P}\right).\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\vec{P}' &= \vec{t}+\frac{\vec{k}}{2},\\ \vec{P} &= \vec{t}-\frac{\vec{k}}{2}.\end{aligned} \tag{5.124}$$

Antes de substituir as novas variáveis, reescrevemos N_{troca} como

$$N_{troca} = \left(\frac{3}{4\pi\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left[-\frac{5}{12\alpha^2}\left(\vec{P}'-\vec{P}\right)^2-\frac{1}{3\alpha^2}\vec{P}'\cdot\vec{P}\right], \tag{5.125}$$

Substituindo (5.124) em N_{troca} e N_{dir}, temos

$$\begin{aligned} N_{troca} &= \left(\frac{3}{4\pi\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{1}{3\alpha^2}\vec{k}^2 - \frac{1}{3\alpha^2}\vec{t}^{\,2}\right], \\ N_{dir} &= \exp\left[-\frac{\vec{k}^2}{3\alpha^2}\right]. \end{aligned}$$

Substituindo nas componentes do potencial, obtemos:

$$V_1 = 9N_{dir}\hat{O}^{ij}_{ST}(1)\,U^{ij}(\vec{k}), \tag{5.126}$$

$$V_2 = -36N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}^{ij}_{ST}(2)\int d\vec{q}\,U^{ij}(\vec{q})\exp\left[-\frac{\vec{q}^{\,2}}{\alpha^2} + \frac{\vec{q}\cdot\vec{k}}{\alpha^2}\right], \tag{5.127}$$

$$V_3 = -9N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}^{ij}_{ST}(3)\int d\vec{q}\,U^{ij}(\vec{q})\exp\left[-\frac{3\vec{q}^{\,2}}{4\alpha^2} + \frac{\vec{q}\cdot\vec{t}}{\alpha^2}\right], \tag{5.128}$$

$$V_4 = -18N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}^{ij}_{ST}(4)\int d\vec{q}\,U^{ij}(\vec{q})\exp\left[-\frac{11\vec{q}^{\,2}}{16\alpha^2} + \frac{\vec{q}\cdot\left(2\vec{t}-2\vec{k}\right)}{4\alpha^2}\right], \tag{5.129}$$

$$V_5 = -18N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}^{ij}_{ST}(5)\int d\vec{q}\,U^{ij}(\vec{q})\exp\left[-\frac{11\vec{q}^{\,2}}{16\alpha^2} + \frac{\vec{q}\cdot\left(2\vec{t}+2\vec{k}\right)}{4\alpha^2}\right]. \tag{5.130}$$

Na aproximação local, desprezamos os termos em $\vec{t}$, obtendo:

$$\begin{aligned} N_{troca} &= \left(\frac{3}{4\pi\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{\vec{k}^2}{3\alpha^2}\right] = \left(\frac{3}{4\pi\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}} N_{dir} \\ N_{dir} &= \exp\left[-\frac{\vec{k}^2}{3\alpha^2}\right], \end{aligned}$$

Nas componentes do potencial resulta:

$$V_1 = 9N_{dir}\hat{O}^{ij}_{ST}(1)\,U^{ij}(\vec{k}), \tag{5.131}$$

$$V_2 = -36N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}^{ij}_{ST}(2)\int d\vec{q}\,U^{ij}(\vec{q})e\left[-\frac{\vec{q}^{\,2}}{\alpha^2} + \frac{\vec{q}\cdot\vec{k}}{\alpha^2}\right], \tag{5.132}$$

$$V_3 = -9N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}^{ij}_{ST}(3)\int d\vec{q}\,U^{ij}(\vec{q})e\left[-\frac{3\vec{q}^{\,2}}{4\alpha^2}\right], \tag{5.133}$$

$$V_4 = -18N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}^{ij}_{ST}(4)\int d\vec{q}\,U^{ij}(\vec{q})e\left[-\frac{11\vec{q}^{\,2}}{16\alpha^2} - \frac{\vec{q}\cdot\vec{k}}{2\alpha^2}\right], \tag{5.134}$$

$$V_5 = -18N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}^{ij}_{ST}(5)\int d\vec{q}\,U^{ij}(\vec{q})e\left[-\frac{11\vec{q}^{\,2}}{16\alpha^2} + \frac{\vec{q}\cdot\vec{k}}{2\alpha^2}\right]. \tag{5.135}$$

Substituindo $U^{ij}(\vec{q})$ em V_n, temos:

$$V_1 = -9\frac{g_\pi^2}{4m^2}N_{dir}\hat{O}_{ST}^{ij}(1)\frac{k^ik^j}{m_\pi^2+\vec{k}^2}, \tag{5.136}$$

$$V_2 = 36\frac{g_\pi^2}{4m^2}N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}_{ST}^{ij}(2)\int d\vec{q}\frac{q^iq^j}{m_\pi^2+\vec{q}^2}\exp\left[-\frac{\vec{q}^{\,2}}{\alpha^2}+\frac{\vec{q}\cdot\vec{k}}{\alpha^2}\right], \tag{5.137}$$

$$V_3 = 9\frac{g_\pi^2}{4m^2}N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}_{ST}^{ij}(3)\int d\vec{q}\frac{q^iq^j}{m_\pi^2+\vec{q}^2}\exp\left[-\frac{3\vec{q}^{\,2}}{4\alpha^2}\right], \tag{5.138}$$

$$V_4 = 18\frac{g_\pi^2}{4m^2}N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}_{ST}^{ij}(4)\int d\vec{q}\frac{q^iq^j}{m_\pi^2+\vec{q}^2}\exp\left[-\frac{11\vec{q}^{\,2}}{16\alpha^2}-\frac{\vec{q}\cdot\vec{k}}{2\alpha^2}\right], \tag{5.139}$$

$$V_5 = 18\frac{g_\pi^2}{4m^2}N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}_{ST}^{ij}(5)\int d\vec{q}\frac{q^iq^j}{m_\pi^2+\vec{q}^2}\exp\left[-\frac{11\vec{q}^{\,2}}{16\alpha^2}+\frac{\vec{q}\cdot\vec{k}}{2\alpha^2}\right]. \tag{5.140}$$

Devido à simetria pela troca de $\vec{q}$ por $-\vec{q}$ no integrando de V_5 e como $\hat{O}_{ST}^{ij}(5)=\hat{O}_{ST}^{ij}(4)$, encontramos $V_4=V_5$. Assim, o potencial $V(ab;cd)$ passa a ser dado por:

$$V(ab;cd) = V_1+V_2+V_3+2V_4, \tag{5.141}$$

onde as componentes V_n são:

$$V_1 = -9\frac{g_\pi^2}{4m^2}N_{dir}\hat{O}_{ST}^{ij}(1)\frac{k^ik^j}{m_\pi^2+k^2}, \tag{5.142}$$

$$V_2 = 36\frac{g_\pi^2}{4m^2}N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}_{ST}^{ij}(2)\,I^{ij}\left(\alpha^{-2},\alpha^{-2},k\right), \tag{5.143}$$

$$V_3 = 9\frac{g_\pi^2}{4m^2}N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}_{ST}^{ij}(3)\,I^{ij}\left(\frac{3}{4\alpha^2},0,k\right), \tag{5.144}$$

$$V_4 = 18\frac{g_\pi^2}{4m^2}N_{troca}\frac{1}{3}\hat{O}_{ST}^{ij}(4)\,I^{ij}\left(\frac{11}{16\alpha^2},-\frac{1}{2\alpha^2},k\right), \tag{5.145}$$

onde usaremos $k=\left|\vec{k}\right|$ daqui por diante e a integral I^{ij} tem a forma:

$$\begin{aligned}
I^{ij}(A,B,k) &= \delta^{ij}J(A,B,k)+\frac{k^ik^j}{k^2}K(A,B,k),\\
J(A,B,k) &= \frac{4\pi}{B^3}\left(-\frac{1}{k^3}u(A,B,k)+\frac{B}{k^2}v(A,B,k)\right),\\
K(A,B,k) &= \frac{4\pi}{B^3}3\left[\frac{1}{k^3}u(A,B,k)-\frac{B}{k^2}v(A,B,k)+\frac{B^2}{3k}w(A,B,k)\right].
\end{aligned}$$

com $u(A,B,k)$, $v(A,B,k)$ e $w(A,B,k)$ definidas por:

$$u(A,B,k) = \int_0^\infty dq\frac{q}{m_\pi^2+\vec{q}^2}\exp\left[-A\vec{q}^{\,2}\right]\sinh(Bqk), \tag{5.146}$$

$$v(A,B,k) = \int_0^\infty dq \frac{\vec{q}^2}{m_\pi^2+\vec{q}^2} \exp\left[-A\vec{q}^{\,2}\right] \cosh(Bqk), \tag{5.147}$$

$$w(A,B,k) = \int_0^\infty dq \frac{\vec{q}^6}{m_\pi^2+\vec{q}^2} \exp\left[-A\vec{q}^{\,2}\right] \sinh(Bqk), \tag{5.148}$$

onde $q = |\vec{q}|$. A expressão da integral $I^{ij}\left(\frac{3}{4\alpha^2}, 0, k\right)$ é obtida tomando-se o limite $B \to 0$ em $I^{ij}(A,B,k)$.

Vamos, agora, trabalhar com a expressão de $V(ab;cd)$ para reescrevê-la na forma usada pela física nuclear, i.e., fatorada por canais de spin e isospin. Para tanto redenominamos $V(ab;cd)$ por $V_{NN}(k)$ e a expressão (5.141), para:

$$V_{NN}(k) = \sum_{n=1}^{5} \hat{O}^{ij}_{ST}(n)\, v^{ij}_n(k), \tag{5.149}$$

com

$$v^{ij}_n\left(\vec{k}\right) = \delta^{ij} f_n(k) + \frac{k^i k^j}{k^2} g_n(k) \tag{5.150}$$

onde as funções $f_n(k)$ e $g_n(k)$ são dadas por

$$f_1(k) = 0, \tag{5.151}$$

$$g_1(k) = -9\frac{g_\pi^2}{4m^2} N_{dir} \frac{k^2}{m_\pi^2+k^2}, \tag{5.152}$$

$$f_2(k) = 36\frac{g_\pi^2}{4m^2}\frac{1}{3} N_{dir} \left(\frac{3}{4\pi\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}} J\left(\alpha^{-2}, \alpha^{-2}, k\right) \tag{5.153}$$

$$g_2(k) = 36\frac{g_\pi^2}{4m^2}\frac{1}{3} N_{dir} \left(\frac{3}{4\pi\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}} K\left(\alpha^{-2}, \alpha^{-2}, k\right), \tag{5.154}$$

$$f_3(k) = 9\frac{g_\pi^2}{4m^2} N_{dir} \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4\pi\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}} J\left(\frac{3}{4\alpha^2}, 0, k\right), \tag{5.155}$$

$$g_3(k) = 0, \tag{5.156}$$

$$f_{4,5}(k) = 18\frac{g_\pi^2}{4m^2} N_{dir} \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4\pi\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}} J\left(\frac{11}{16\alpha^2}, \frac{-1}{2\alpha^2}, k\right) \tag{5.157}$$

$$g_{4,5}(k) = 18\frac{g_\pi^2}{4m^2} N_{dir} \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4\pi\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}} K\left(\frac{11}{16\alpha^2}, \frac{-1}{2\alpha^2}, k\right), \tag{5.158}$$

$$N_{dir} = \exp\left[-\frac{\vec{k}^2}{3\alpha^2}\right]. \tag{5.159}$$

Substituindo os operadores $\hat{O}^{ij}_{ST}(n)$ dados pelas equações (5.119 - 5.122) em (5.149) e reagrupando por operadores de spin e isospin, chegamos à seguinte expressão:

$$V_{NN}(k) = \frac{25}{108} v_2^{ii}\left(\vec{k}\right) + \frac{3}{4} v_3^{ii}\left(\vec{k}\right) + \frac{5}{6} v_4^{ii}\left(\vec{k}\right) + \mathcal{T}_A^a \mathcal{T}_B^a \left(\frac{1}{324} v_2^{ii}\left(\vec{k}\right) - \frac{1}{36} v_3^{ii}\left(\vec{k}\right) + \frac{1}{54} v_4^{ii}\left(\vec{k}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{12}\Sigma_A^k\Sigma_B^k v_3^{ii}\left(\vec{k}\right)+\Sigma_A^i\Sigma_B^j\left(\frac{1}{6}v_3^{ij}\left(\vec{k}\right)+\frac{1}{108}v_2^{ij}\left(\vec{k}\right)+\frac{1}{18}v_4^{ij}\left(\vec{k}\right)\right)$$
$$+\mathcal{T}_A^a\mathcal{T}_B^a\Sigma_A^k\Sigma_B^k\left(\frac{1}{18}v_2^{ii}\left(\vec{k}\right)+\frac{25}{324}v_3^{ii}\left(\vec{k}\right)+\frac{5}{27}v_4^{ii}\left(\vec{k}\right)\right)-\frac{25}{162}\mathcal{T}_A^a\mathcal{T}_B^a\Sigma_A^i\Sigma_B^j v_3^{ij}\left(\vec{k}\right)$$
$$+\mathcal{T}_A^a\mathcal{T}_B^a\Sigma_B^i\Sigma_B^j\left(\frac{25}{81}v_1^{ij}\left(\vec{k}\right)+\frac{7}{324}v_2^{ij}\left(\vec{k}\right)-\frac{5}{162}v_4^{ij}\left(\vec{k}\right)\right), \tag{5.160}$$

Nesta expressão já podemos ver claramente, as diversas contribuições que os diagramas de troca fornecem para os diferentes canais de spin e isospin do potencial NN. Estas contribuições ficarão mais claras no espaço de configuração.

5.7 O potencial no espaço de configuração

Além de evidenciar melhor a contribuição dos diagramas de troca, mostrando efetivamente em quais canais cada diagrama contribui, o potencial no espaço de configuração permite-nos, também, analisar se sua natureza é atrativa ou repulsiva e em quais distâncias e canais estas propriedades ocorrem.

A expressão do potencial neste espaço é dada pela transformada de Fourier de $V_{NN}(k)$, ou seja:

$$V_{NN}(R)=\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}V_{NN}(k)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}}, \tag{5.161}$$

e substituindo $V_{NN}(k)$, obtemos:

$$V_{NN}(R)=\sum_{n=1}^{5}\hat{O}_{ST}^{ij}(n)\,v_n^{ij}(R), \tag{5.162}$$

onde

$$v_n^{ij}\left(\vec{R}\right)=\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}v_n^{ij}(k)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}}. \tag{5.163}$$

Substituindo (5.150) na expressão de $v_n^{ij}\left(\vec{R}\right)$, temos:

$$v_n^{ij}\left(\vec{R}\right)=\delta^{ij}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}f_n(k)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}}+\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{k^ik^j}{k^2}g_n(k)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}}. \tag{5.164}$$

Substituindo k^i por $i\frac{\partial}{\partial R^i}$, podemos reescrever esta expressão como:

$$v_n^{ij}\left(\vec{R}\right)=\delta^{ij}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}f_n(k)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}}-\frac{\partial}{\partial R^i}\frac{\partial}{\partial R^j}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2}g_n(k)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}}. \tag{5.165}$$

Uma vez que as funções $f_n(k)$ e $g_n(k)$, não têm dependencia angular, podemos realizar a integração nos ângulos e as derivadas $\frac{\partial}{\partial R^i}\frac{\partial}{\partial R^j}$ podem ser reescritas na seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial R^i}\frac{\partial}{\partial R^j} = \frac{\delta^{ij}}{3}\left(\frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial R^2}\right) - \left(\frac{3R^iR^j}{R^2} - \delta^{ij}\right)\frac{1}{3}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R} - \frac{\partial^2}{\partial R^2}\right). \tag{5.166}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} v_n^{ij}\left(\vec{R}\right) &= \delta^{ij}2\left[\int \frac{k^2dk}{(2\pi)^2}f_n(k)\,j_0(kR) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial R^2}\right)\int \frac{dk}{(2\pi)^2}g_n(k)\,j_0(kR)\right] \\ &+2\left(\frac{3R^iR^j}{R^2} - \delta^{ij}\right)\frac{1}{3}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R} - \frac{\partial^2}{\partial R^2}\right)\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2}g_n(k)\,j_0(kR). \end{aligned} \tag{5.167}$$

Aplicando as derivadas em R sobre $j_0(kR)$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial R}j_0(kR) = -kj_1(kR), \tag{5.168}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}j_0(kR) = k^2\left(\frac{2}{3}j_2(kR) - \frac{1}{3}j_0(kR)\right), \tag{5.169}$$

ou seja:

$$\left(\frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial R^2}\right)j_0(kR) = -k^2j_0(kR), \tag{5.170}$$

$$\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R} - \frac{\partial^2}{\partial R^2}\right)j_0(kR) = -k^2j_2(kR). \tag{5.171}$$

Assim $v_n^{ij}\left(\vec{R}\right)$ é:

$$v_n^{ij}\left(\vec{R}\right) = \delta^{ij}f_n(R) + \left(\frac{3R^iR^j}{R^2} - \delta^{ij}\right)g_n(R). \tag{5.172}$$

onde:

$$f_n(R) = \frac{2}{(2\pi)^2}\int k^2dk\left(f_n(k) + \frac{1}{3}g_n(k)\right)j_0(kR), \tag{5.173}$$

$$g_n(R) = -\frac{2}{3(2\pi)^2}\int k^2d\vec{k}g_n(k)\,j_2(kR) \tag{5.174}$$

Substituindo (5.172) em (5.162), temos:

$$\begin{aligned} V_{NN}(R) &= \frac{25}{81}T_A^aT_B^a\Sigma_B^i\Sigma_B^if_1(R) + \frac{25}{81}T_A^aT_B^a\Sigma_B^i\Sigma_B^j\left(\frac{3R^iR^j}{R^2} - \delta^{ij}\right)g_1(R), \\ &+\frac{1}{36}\left[3\left(\frac{25}{3} + \frac{1}{9}T_A^aT_B^a + 2T_A^aT_B^a\Sigma_A^k\Sigma_B^k\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{7}{3}T_A^aT_B^a\right)\Sigma_A^i\Sigma_B^i\right]f_2(R) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{36}\frac{1}{3}\left(1+\frac{7}{3}\mathcal{T}_A^a\mathcal{T}_B^a\right)\Sigma_A^i\Sigma_B^j\left(\frac{3R^iR^j}{R^2}-\delta^{ij}\right)g_2(R)\\
&+\frac{1}{36}\left[3\left(27-3\Sigma_A^k\Sigma_B^k-\mathcal{T}_A^a\mathcal{T}_B^a+\frac{25}{9}\mathcal{T}_A^a\mathcal{T}_B^a\Sigma_A^k\Sigma_B^k\right)\right.\\
&\left.+\left(6-\frac{50}{9}\mathcal{T}_A^a\mathcal{T}_B^a\right)\Sigma_A^i\Sigma_B^i\right]f_3(R)\\
&+\frac{1}{36}\left(6-\frac{50}{9}\mathcal{T}_A^a\mathcal{T}_B^a\right)\Sigma_A^i\Sigma_B^j\left(\frac{3R^iR^j}{R^2}-\delta^{ij}\right)g_3(R)\\
&+\frac{2}{36}\left[3\left(15+\frac{1}{3}\mathcal{T}_A^a\mathcal{T}_B^a+\frac{10}{3}\mathcal{T}_A^a\mathcal{T}_B^a\Sigma_A^k\Sigma_B^k\right)+\left(1-\frac{5}{9}\mathcal{T}_A^a\mathcal{T}_B^a\right)\Sigma_A^i\Sigma_B^i\right]f_4(R)\\
&+\frac{2}{36}\left(1-\frac{5}{9}\mathcal{T}_A^a\mathcal{T}_B^a\right)\Sigma_A^i\Sigma_B^j\left(\frac{3R^iR^j}{R^2}-\delta^{ij}\right)g_4(R) \qquad (5.175)
\end{aligned}
$$

onde o operador tensor é dado por:

$$
\hat{S}_{AB}\equiv\Sigma_A^i\Sigma_B^j\left(\frac{3R^iR^j}{R^2}-\delta^{ij}\right). \qquad (5.176)
$$

Reagrupando por operadores, o potencial é dado por:

$$
\begin{aligned}
V_{NN}(R) &= V_0(R)+\Sigma_A^i\Sigma_B^iV_{\Sigma\Sigma}(R)+\hat{S}_{AB}V_{S_{AB}}(R)\\
&\quad+\mathcal{T}_A^a\mathcal{T}_B^a\left(V_{\mathcal{T}\mathcal{T}}(R)+\Sigma_B^i\Sigma_B^iV_{\mathcal{T}\Sigma}(R)+\hat{S}_{AB}V_{\mathcal{T}S_{AB}}(R)\right). \qquad (5.177)
\end{aligned}
$$

e nesta expressão, as componentes do potencial são dadas por

$$
\begin{aligned}
V_0(R) &= \frac{25}{36}f_2(R)+\frac{9}{4}f_3(R)+\frac{5}{2}f_4(R), && (5.178)\\
V_{\Sigma\Sigma}(R) &= \frac{1}{108}f_2(R)-\frac{1}{12}f_3(R)+\frac{1}{18}f_4(R), && (5.179)\\
V_{\mathcal{T}\mathcal{T}}(R) &= \frac{1}{108}f_2(R)-\frac{1}{12}f_3(R)+\frac{1}{18}f_4(R), && (5.180)\\
V_{\mathcal{T}\Sigma}(R) &= \frac{25}{81}f_1(R)+\frac{61}{324}f_2(R)+\frac{25}{324}f_3(R)+\frac{85}{162}f_4(R), && (5.181)\\
V_{S_{AB}}(R) &= \frac{1}{108}g_2(R)+\frac{1}{6}g_3(R)+\frac{1}{18}g_4(R), && (5.182)\\
V_{\mathcal{T}S_{AB}}(R) &= \frac{25}{81}g_1(R)+\frac{7}{324}g_2(R)-\frac{25}{162}g_3(R)-\frac{5}{162}g_4(R). && (5.183)
\end{aligned}
$$

As funções $f_n(R)$ e $g_n(R)$ são as seguintes integrais:

$$
\begin{aligned}
f_1(R) &= \frac{C}{2\pi^2}\int k^2dk\left(-3N_{\text{dir}}\frac{k^2}{m_\pi^2+k^2}\right)j_0(kR), && (5.184)\\
f_2(R) &= \frac{2C}{\pi}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int k^2dkN_{\text{dir}}\int_0^\infty dq\frac{q}{m_\pi^2+q^2}\frac{4q^2}{\alpha k}e^{\left[-\frac{q^2}{\alpha^2}\right]}\sinh\left(\frac{qk}{\alpha^2}\right)j_0(kR), && (5.185)\\
f_3(R) &= \frac{2C}{\pi}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int k^2dkN_{\text{dir}}\int_0^\infty dq\frac{q}{m_\pi^2+q^2}\frac{3q^3}{\alpha^3}e^{\left[-\frac{3q^2}{4\alpha^2}\right]}j_0(kR), && (5.186)
\end{aligned}
$$

$$f_4(R) = \frac{2C}{\pi}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty k^2 dk N_{dir}\int_0^\infty dq \frac{q}{m_\pi^2+q^2}\frac{4q^2}{\alpha k}e^{\left[-\frac{11\vec{q}^{\,2}}{16\alpha^2}\right]}\sinh\left(\frac{qk}{2\alpha^2}\right)j_0(kR) \quad (5.187)$$

$$g_1(R) = \frac{C}{2\pi^2}\int_0^\infty k^2 dk\left(3N_{dir}\frac{k^2}{m_\pi^2+k^2}\right)j_2(kR), \quad (5.188)$$

$$g_2(R) = \frac{2C}{\pi}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty k^2 dk N_{dir}\int_0^\infty dq \frac{q}{m_\pi^2+q^2}e^{\left[-\frac{\vec{q}^{\,2}}{\alpha^2}\right]}$$
$$\times\left[\frac{12q\alpha}{k^2}\cosh\left(\frac{qk}{\alpha^2}\right)-\left(\frac{12\alpha^3}{k^3}+\frac{4q^2}{\alpha k}\right)\sinh\left(\frac{qk}{\alpha^2}\right)\right]j_2(kR), \quad (5.189)$$

$$g_4(R) = \frac{2C}{\pi}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty k^2 dk N_{dir}\int_0^\infty dq \frac{q}{m_\pi^2+q^2}e^{\left[-\frac{11}{16\alpha^2}\vec{q}^{\,2}\right]}$$
$$\times\left[\frac{24q\alpha}{k^2}\cosh\left(\frac{qk}{2\alpha^2}\right)-\left(\frac{48\alpha^3}{k^3}+\frac{4q^2}{\alpha k}\right)\sinh\left(\frac{qk}{2\alpha^2}\right)\right]j_2(kR), \quad (5.190)$$

onde

$$C = \frac{g_\pi^2}{4m^2}, \quad (5.191)$$

$$N_{dir} = \exp\left[-\frac{\vec{k}^2}{3\alpha^2}\right]. \quad (5.192)$$

Para uma melhor análise, reescrevemos o potencial como sendo

$$V_{NN}(R) = V_c(R) + \hat{S}_{AB}V_{S_{AB}}(R) + \mathcal{T}_A^a\mathcal{T}_B^a\hat{S}_{AB}V_{\mathcal{T}S_{AB}}(R), \quad (5.193)$$

onde

$$V_c(R) = V_0(R) + \Sigma_A^i\Sigma_B^i V_{\Sigma\Sigma}(R) + \mathcal{T}_A^a\mathcal{T}_B^a V_{\mathcal{T}\mathcal{T}}(R) + \mathcal{T}_A^a\mathcal{T}_B^a\Sigma_B^i\Sigma_B^i V_{\mathcal{T}\Sigma}(R). \quad (5.194)$$

A seguir, apresentamos os gráficos da componente central $V_c(R)$ do potencial no canal $S=0$, $T=1$, onde analisamos com mais detalhes as diversas contribuições dos diagramas de troca e do efeito do termo de contacto que emerge da interação entre quarks mediada por um píon.

Figura 5.2: Comparação entre o termo de contacto e de troca para S=0 e T=1

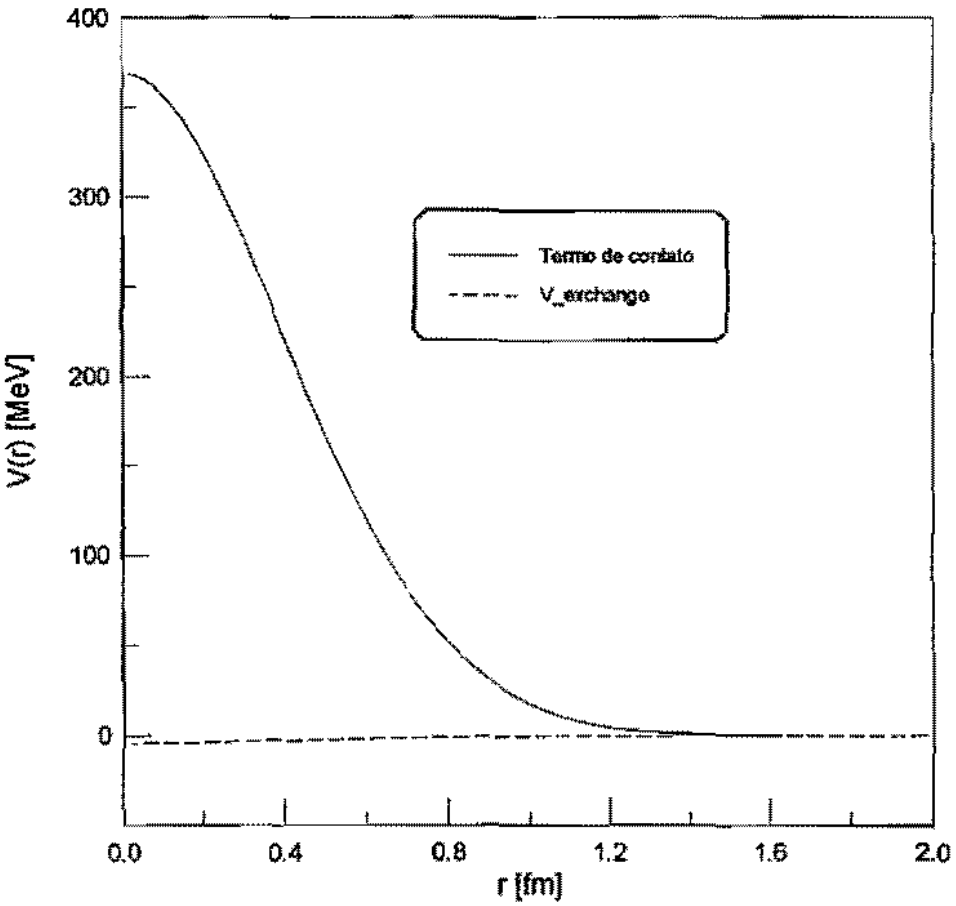
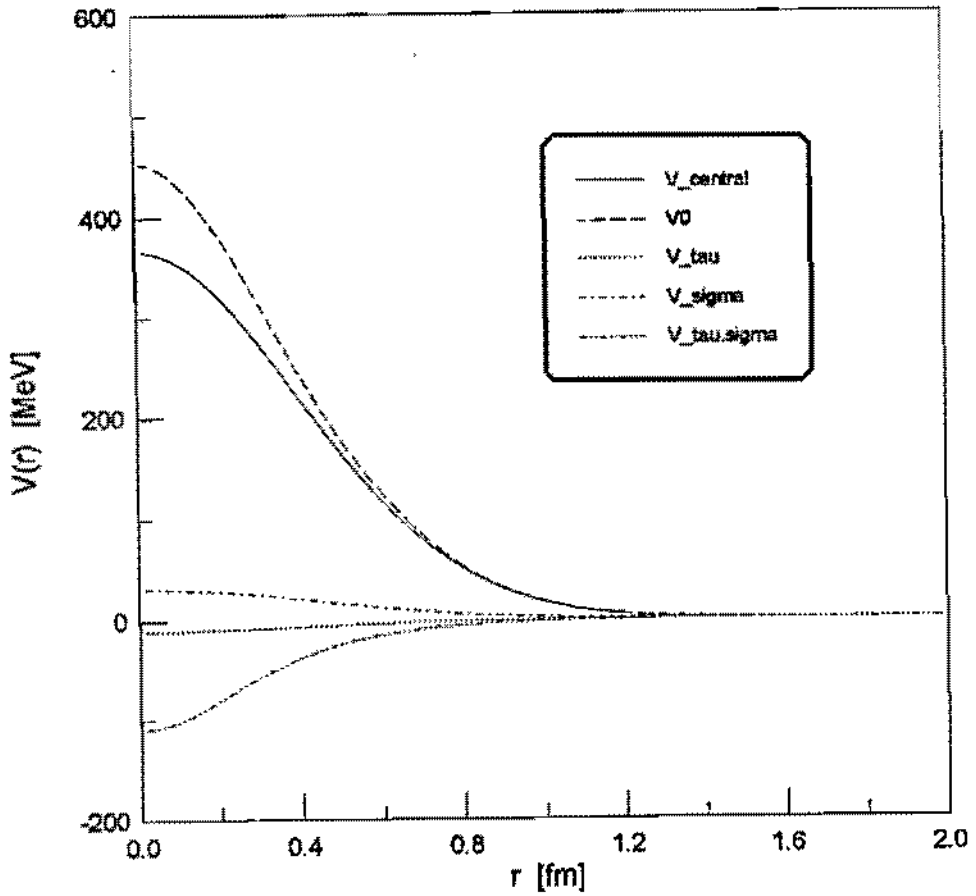


Figura 5.3: O potencial central e suas componentes para S=0 e T=1



No gráfico da figura (5.2) podemos observar que o termo de contacto é importante para produzir a repulsão a curtas distâncias, enquanto que a componente sem este termo que denominamos de termo de troca gera uma atração desprezível. Na figura (5.3) podemos ver as diversas contribuições ao potencial central no canal $S = 0, T = 1$. Neste gráfico podemos observar que à curta distância, as componentes V_0 e V_{TT} são repulsivas e que $V_{\Sigma\Sigma}$ e $V_{T\Sigma}$ são atrativas. O comportamento global de V_c é repulsivo à curtas distâncias neste canal caindo rápidamente a zero em torno de 1.2 fm. O interessante deste estudo, são os termos adicionais V_0, V_{TT}, $V_{\Sigma\Sigma}$ e $V_{S_{AB}}$ oriundos das trocas de quarks entre aglomerados, mostrando a riqueza desta dinâmica de quarks.

Estes gráficos, corroboram a idéia de que a troca de quarks é um efeito de curtíssimo alcance e que o termo de contacto presente no OPEP é muito importante.

Capítulo 6

Conclusões

O tema central deste trabalho é a relação entre a estrutura do núcleon e as características da interação entre dois núcleons. Na sua primeira parte, estudamos o papel da simetria quiral no fator de forma πN, supondo o núcleon como um aglomerado de tres quarks constituintes. Para implementar a simetria quiral, empregamos tres formas de lagrangianas, que incluíam um campo escalar-isoescalar, responsável pelo confinamento, campos piônicos nas realizações linear e não-linear e dois tipos de acoplamento para a interação píon-quark: pseudo-escalar e pseudo-vetorial. Mostramos explicitamente que as duas formas de acoplamento são equivalentes e que os nossos resultados não dependem do modo de implementação da simetria.

Com a finalidade de entender os efeitos da simetria quiral num sistema envolvendo quarks, píons e partícula escalar, estudamos o processo elementar $\pi q \leftrightarrow Sq$ e observamos que a amplitude quiral comporta-se de forma muito diferente da amplitude sem simetria (fig. 3.11, pag. 50). Para o momento inicial fixo em 400 MeV, a amplitude quiral T_χ em função do ângulo de espalhamento θ inicia em zero para $\theta = 0°$, cresce até um valor máximo ($T_\chi = 1,4$)em torno de $\theta = 100°$ e decresce novamente a zero para $\theta = 180°$, enquanto que a amplitude sem simetria $T(c = 0)$ inicia em torno de $0,2$, cresce lentamente até $1,4$ para $\theta = 100°$ e cresce rapidamente para $4,1$ em $\theta = 180°$. A razão $r(\theta) = T_\chi/T(c = 0)$ evidencia esta diferença entre as duas amplitudes, pois sua curva em nenhum momento se comporta como uma reta horizontal localizada no valor $r(\theta) = 1$, mesmo para diferentes valores de momentos iniciais (vide fig.3.12). Podemos perceber que, no seu comportamento geral, a amplitude quiral é menor do a amplitude sem a simetria. Isto nos mostra a relevância da simetria quiral neste processo elementar.

Outra amplitude que também é pequena vem da hipótese da supressão de pares [Mac

85, Mac+87]. Esta hipótese supõe que as antipartículas devam ser eliminadas do cálculo. Comparamos, então, a amplitude quiral com a da supressão de pares (fig 3.14, pag. 55) e pudémos verificar que ambas são pequenas, porém a amplitude quiral depende mais fortemente do ângulo θ do que a amplitude da supressão de pares, pois a da supressão de pares é quase uma reta decrescente. Nos gráficos da fig. 3.14 é interessante notar também, que a amplitude das antipartículas possui um comportamento muito próximo da amplitude sem a simetria quiral. Concluímos que é falsa a idéia da equivalência entre as duas abordagens. Além disso, estudando a amplitude quiral para os casos onde o píon e o escalar são colocados fora da camada de massa, mostramos que o comportamento geral da amplitude quiral muda pouco. Assim, é possível constatar o papel determinante da simetria num processo envolvendo quarks, píons e partícula escalar.

No estudo do fator de forma πN, usamos a partícula escalar como uma mediadora que "simula" a interação confinante entre dois quarks e denominamos este sistema quark-escalar-quark de diquark. A simetria quiral evidencia a importância dos diagramas envolvendo estes diquarks no vértice πN, pois para quarks ligados, a família quiral mínima de diagramas não é mais apenas composta do diagrama árvore onde temos um píon interagindo com um quark, mas contém também os diagramas onde o píon interage com o diquark.

Na obtenção dos vértices píon-diquark $\Gamma_{\pi d}$ foi necessário extrair a parte de frequência positiva do propagador do quark, para evitar a dupla contagem que ocorreria quando o vértice é empregado no cálculo do potencial NN, pois esta parte de frequência positiva junto com a troca do escalar representa um sistema de quarks ligados que já é levado em conta quando usamos a função de onda do estado ligado de três quarks. Além disso, é feito uma aproximação não-relativística para o vértice, onde desprezamos termos que são iguais ou maiores do que $\vec{p}^2/m^3$, com $m = 300\,MeV$ e $|\vec{p}| < 600 MeV$, i.e., termos da ordem ou menores que $0,01 MeV^{-1}$. Em face dos resultados obtidos, esta aproximação em nada influencia os resultados, pois os diagramas contendo diquarks produzem correções ao OPEP da mesma ordem de magnitude dos efeitos da interação quark-quark considerada tradicionalmente. Estas correções quirais são proporcionais a (α^2/m^2) para as amplitudes envolvendo quark e diquark e $(\alpha^2/m^2)^2$ para a amplitude diquark-diquark. Como pode ocorrer que α seja muito próximo da massa do quark m, a razão α/m pode estar próxima da unidade e as correções têm, portanto, a mesma magnitude dos efeitos da interação quark-quark.

Nos cálculos do capítulo 4, obtivemos um resultado bastante geral para o operador po-

tencial, incorporado na seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{NN}\left(\vec{R}_a,\vec{R}_b\right) &= \left(\frac{g_{\pi q}}{2m}\right)^2 \int d\vec{r}_a^{\,int} d\vec{r}_b^{\,int} \left|\Psi\left(\vec{r}_a^{\,int}\right)\right|^2 \left|\Psi\left(\vec{r}_b^{\,int}\right)\right|^2 \\ &\times \left\{ \frac{1}{m} \sum_{quark} \sum_{diquark} \vec{\tau}_v \cdot \vec{\tau}_w \left[\vec{\sigma}_v \cdot \vec{\nabla} V_{conf}\left(\vec{r}_a^{\,int}\right)\right] \left[\vec{\sigma}_w \cdot \vec{\nabla} U\left(\vec{r}_{ab}\right)\right] \right. \\ &- \frac{1}{m} \sum_{quark} \sum_{diquark} \vec{\tau}_v \cdot \vec{\tau}_w \left[\vec{\sigma}_v \cdot \vec{\nabla} U\left(\vec{r}_{ab}\right)\right] \left[\vec{\sigma}_w \cdot \vec{\nabla} V_{conf}\left(\vec{r}_b^{\,int}\right)\right] \\ &\left. + \frac{1}{m^2} \sum_{diquark} \sum_{diquark} \vec{\tau}_v \cdot \vec{\tau}_w \left[\vec{\sigma}_v \cdot \vec{\nabla} V_{conf}\left(\vec{r}_a^{\,int}\right)\right] U\left(\vec{r}_{ab}\right) \left[\vec{\sigma}_w \cdot \vec{\nabla} V_{conf}\left(\vec{r}_b^{\,int}\right)\right] \right\},\end{aligned} \tag{6.1}$$

onde $\vec{r}_{ab}$ é a coordenada relativa entre quarks de aglomerados distintos, $\vec{r}_a^{\,int}$ e $\vec{r}_b^{\,int}$ representam as partes internas das coordenadas relativas entre quarks dos aglomerados a e b respectivamente.

Esta expressão é a forma geral da contribuição dos quark-diquark e diquark-diquark ao potencial NN, onde V_{conf} representa o potencial confinante. A partir dela, continuamos o nosso estudo supondo que o potencial harmônico fosse o responsável pelo confinamento ($V_{conf} \rightarrow V_{OH}$). Isto torna os cálculos muito mais simples, pois a ação do gradiente sobre o potencial harmônico produz uma dependência linear na coordenada relativa entre dois quarks ($\vec{\nabla} V_{conf} \rightarrow \vec{\nabla} V_{OH} \propto \vec{r}$), permitindo que as integrações nas coordenadas internas sejam feitas separadamente e de forma analítica.

Os nossos cálculos mostraram que, no caso do potencial harmônico, o papel da simetria quiral consiste em modificar a constante de acoplamento píon-quark, sem alterar o fator de forma. Entretanto, o resultado geral mostrado acima permite concluir que se escolhermos um outro potencial confinante, que não produza um termo linear na coordenada após a aplicação do gradiente, teremos contribuições ao fator de forma. Assim, apesar do potencial harmônico não ser um potencial realístico, ele possibilitou-nos perceber o papel da simetria quiral de forma mais detalhada nos processos envolvendo quarks, píons e partículas escalares.

O procedimento empregado neste trabalho pode ser estendido, permitindo correções devido as trocas de outros mésons, além do píon. No caso de potenciais confinantes harmônicos, podemos prever, desde já, que os fatores de forma não serão afetados.

Nesta primeira parte, usamos a hipótese de que os estados pré e pós reação são os mesmos uma vez que não há troca de constituintes e a plausibilidade desta hipótese é verificada quando comparamos o potencial gerado apenas pelo diagrama direto com o potencial gerado pelo mesmo diagrama obtido usando-se o método de Fock-Tani, pois os dois potênciais são

idênticos.

Com relação à este aspecto, o método de Fock-Tani vai mais longe, pois permite estudar as situações onde o uso desta hipótese não é muito adequado, como nos casos da produção de partículas charmosas a partir de partículas sem charme.

Um outro aspecto interessante do método de Fock-Tani, está na forma como as equações de movimento de operadores são resolvidas, ela nos inspira com a idéia de uma expansão na densidade de superposição das funções de onda.

O potencial obtido no método Fock-Tani não é local e, com o objetivo de obter um potencial no espaço de coordenadas que depende somente da coordenada relativa entre os núcleons, empregamos a redução local de Barnes e Swanson [Swa+93]. No caso da troca de um glúon (ao invés da troca de um píon), o efeito da redução local é da ordem de 5% nos deslocamentos de fase das ondas $^1S_0$ e $^3S_1$, conforme pode ser visto comparando-se as figuras para os deslocamentos de fase em [Kre+96] e [Swa+93]. É claro, no entanto, que seria interessante avaliar os efeitos da não-localidade nos deslocamentos de fase para este caso de troca de píons.

Pudemos, então, estudar os efeitos da troca de quarks na interação NN e o método de Fock-Tani corrobora a idéia de que, a troca de quarks é de curtíssimo alcance ($\sim 0,6\ fm$) e produz repulsão no canal $S = 0$ e $T = 1$ para o potencial central. Mostra, também que o termo de contacto presente no potencial entre quarks devido à troca de um píon, é a principal fonte para esta repulsão e, portanto, não pode ser descartado como é feito no âmbito da teoria mesônica.

O passo seguinte, é estudarmos o efeito da simetria quiral nos processos envolvendo trocas de quarks e procurarmos a aplicação de funções de onda mais realísticas. Além disso, Manohar e Georgi [Geo+84], mostrou que numa escala de energia intermediária entre a escala da quebra da simetria quiral $\Lambda_{\chi SB} \sim 1GeV$ e a escala de confinamento $\Lambda_{conf} \sim 200MeV$, faz sentido utilizar teorias efetivas para descrever a interação forte e propôs uma lagrangiana efetiva para esta escala inermediária. O emprego deste tipo de modelo para o estudo da interação NN nos parece um projeto extremamente interessante.

Um outro rumo que podemos seguir é continuarmos o nosso estudo da simetria quiral no vértice píon-núcleon, levando em conta processos envolvendo píons intermediários, trocas de outros mésons, ressonâncias deltas, etc.

Um outro passo é aplicarmos o estudo realizado na primeira parte ao caso do trítio. Estudano o problema da absorção do píon por um sistema de três férmions.

Apêndice A

Unidades e Convenções

Unidades

Usamos as unidades naturais onde as constantes de Planck e da velocidade da luz no vácuo são consideradas como sendo iguais à unidade.

$$\hbar = c = 1. \tag{A.1}$$

Assim, as grandezas tem dimensão de potencias da massa M^n. Na tabela a seguir listamos algumas grandezas de interêsse e as respectivas potências

Grandezas	n
Ação	0
velocidade	0
massa	1
comprimento	-1
tempo	-1
dens. lagrangiana ou hamiltoniana	4
campos π e σ	1
campo do quark q	$\frac{3}{2}$
campo escalar S	1
f_π	1
$g_{\pi q}$	0
g_S	-1
g_{Sq}	0
K	3
$u(\vec{p})$	$\frac{1}{2}$

(A.2)

Notação

Neste trabalho usamos as letras gregas μ, ν, λ como índices de quadrivetores e as letras latinas i, j, k para as componentes cartesianas dos trivetores.

Os núcleons são designados por a, b, c, d e usamos as seguintes letras maiúsculas para os graus de liberdade dos núcleons:

$\vec{R}_a =$ coordenada do núcleon a
$\vec{P}_a =$ momento do núcleon a
$S =$ spin total do núcleon
$S^z =$ terceira componente de S
$I =$ isospin do núcleon
$I^z =$ terceira componente de I
$\vec{\Sigma} =$ operador de spin
$\vec{T} =$ operador de isospin

(A.3)

Os quarks são designados por $v = 1, 2, 3$ e $w = 4, 5, 6$ e os seus graus de liberdade são

dados pelas seguintes letras minúsculas:

$\vec{r}_v =$	coordenada do quark v
$\vec{p}_v =$	momento do quark v
$s =$	spin total do quark
$s^z =$	terceira componente de s
$\iota =$	isospin total do quark
$\iota^z =$	terceira componente de ι
$\vec{\sigma} =$	operador de spin
$\vec{\tau} =$	operador de isospin

(A.4)

Os graus de liberdade do sistema de dois núcleons são designados pelas seguintes letras maiúsculas:

$\vec{S} =$	coordenada do CM
$\vec{X} =$	coordenada relativa de dois núcleons
$\vec{P}_S =$	momento do CM
$\vec{P}_X =$	momento relativo de dois núcleons
$J =$	momento angular total
$J^z =$	terceira componente de J
$T =$	isospin total de dois núcleons
$T^z =$	terceira componente de T

(A.5)

onde CM significa Centro de Massa.

No sistema de tres quarks, usamos a seguinte notação

$\vec{R} =$	coordenada do CM de tres quarks
$\vec{\rho} =$	coordenada relativa entre dois quarks
$\vec{\lambda} =$	coordenada entre o CM de dois quarks e o terceiro quark
$\vec{P} =$	momento conjugado à $\vec{R}$
$\vec{p}_\rho =$	momento conjugado à $\vec{\rho}$
$\vec{p}_\lambda =$	momento conjugado à $\vec{\lambda}$

(A.6)

Vetores e tensores

Denotamos um quadrivetor contravariante por

$$a^\mu \equiv \{a_0, \vec{a}\} \tag{A.7}$$

onde o trivetor $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ é a parte espacial e a_0 é a parte temporal. Nas unidades do S.I., escreve-se $x^\mu = (ct, \vec{x})$ para o quadrivetor de posição, enquanto que nas unidades naturais (U.N.), ele é descrito por $x^\mu = (t, \vec{x})$.

Os versores são denotados com um acento circunflexo:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{a}; \tag{A.8}$$

onde

$$a = |\vec{a}|. \tag{A.9}$$

O tensor métrico é dado por

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{A.10}$$

e os quadrivetores covariantes a_μ se relacionam com os quadrivetores contravariantes por

$$a_\mu = g_{\mu\nu}a^\nu = \{a_0, -\vec{a}\}, \tag{A.11}$$

onde a convenção de soma de Einstein é empregada.

Os tensores métricos contravariantes e covariantes se relacionam por

$$g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu=}g^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu, \tag{A.12}$$

onde $\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & \mu = \nu, \\ 0 & \mu \neq \nu. \end{cases}$

O produto escalar em quatro dimensões é dado por

$$\mathsf{a} \cdot \mathsf{b} = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^\mu b_\mu = (a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}) \tag{A.13}$$

As derivadas covariantes e contravariantes são denotadas por

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ e } \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{A.14}$$

Assim o quadridivergente de um quadrivetor V^μ é dado por

$$\partial_\mu V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\mu}, \tag{A.15}$$

e o quadrigradiente de uma função escalar ϕ é

$$\partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}. \tag{A.16}$$

Aplicando (A.14) sobre (A.16) obtemos o operador d'Alambertiano

$$\Box \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\mu} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi. \tag{A.17}$$

Normalização

Os estados de uma partícula relativística são normalizados covariantemente

$$< \vec{p}\,'|\vec{p} >= 2E \frac{\delta(\vec{p}' - \vec{p})}{(2\pi)^3}, \tag{A.18}$$

onde $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, enquanto que a normalização não relativística é

$$< \vec{p}'|\vec{p} >_{n.r.} = \delta(\vec{p}' - \vec{p}). \tag{A.19}$$

A relação de completeza covariante é dada por

$$\int \frac{d\vec{p}}{2E(2\pi)^3} |\vec{p} >< \vec{p}| = I. \tag{A.20}$$

Matrizes de Pauli

As matrizes de Pauli são dadas por

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{A.21}$$

Essas matrizes obedecem à relação

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I + i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \tag{A.22}$$

onde I é a matriz identidade em duas dimensões.

Com base nesta propriedade obtém-se

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}), \tag{A.23}$$

onde $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores quaisquer.

Matrizes de Dirac

As matrizes de Dirac são matrizes 4x4 e neste trabalho adotamos as formas

$$\gamma^0 = \begin{Bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{Bmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{Bmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{Bmatrix}. \tag{A.24}$$

Elas satisfazem relações de anticomutação:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \tag{A.25}$$

O produto escalar das matrizes γ^μ com um quadrivetor a_μ qualquer é representado por

$$a_\mu \gamma^\mu = a^\mu \gamma_\mu = \not{a}. \tag{A.26}$$

A partir das matrizes gama pode-se obter

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{Bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{Bmatrix}, \tag{A.27}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \tag{A.28}$$

As matrizes γ^0, γ_5 e σ^{ij} são hermitianas enquanto que γ^k e σ^{0i} são anti-hermitianas. A matriz γ_5 tem as seguintes propriedades

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = I. \tag{A.29}$$

Spinores de Dirac

Os spinores de Dirac, na notação de duas componentes, são dados por

$$u^s(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{bmatrix} (E+m)I \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \end{bmatrix} \chi^s, \tag{A.30}$$

$$u^{\dagger s}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \chi^{\dagger s} \begin{bmatrix} (E+m)I, & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \end{bmatrix}, \tag{A.31}$$

onde os estados de spin são dados por

$$\chi^+ \equiv |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}> \equiv \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \chi^- \equiv |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}> \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{A.32}$$

Estes spinores satisfazem a equação de Dirac

$$(\not{p} - m)u(\vec{p}) = 0, \tag{A.33}$$

$$\bar{u}(\vec{p})(\not{p} - m) = 0, \tag{A.34}$$

onde $\bar{u}(\vec{p}) = u^\dagger(\vec{p})\gamma^0$. A condição de normalização dos spinores é

$$\bar{u}^{s'}(\vec{p})u^s(\vec{p}) = 2m\delta_{s's}. \tag{A.35}$$

A relação de completeza para spinores de freqüência positiva é dada por

$$\sum_s u^s(\vec{p})\bar{u}^s(\vec{p}) = \not{p} + m. \tag{A.36}$$

Transformadas de Fourier

A convenção para as transformadas de Fourier para uma partícula é:

$$f(\vec{r}) = \int d\vec{p}\frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}}{(2\pi)^{3/2}}\tilde{f}(\vec{p}), \tag{A.37}$$

$$\tilde{f}(\vec{p}) = \int d\vec{r}\frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}}}{(2\pi)^{3/2}}f(\vec{r}). \tag{A.38}$$

Campos

Campo do píon

$$\pi(\vec{x},t) = \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}\left[a_\tau(k)e^{-ik\cdot x} + a_\tau^\dagger(k)e^{ik\cdot x}\right] \tag{A.39}$$

Regras para obtenção dos vértices

Para obtermos os vértices de interação realizamos as seguintes derivações nos campos:

$$i\frac{\partial^3\mathcal{L}_S}{\partial\phi\partial\psi\partial\psi} = -ig_{S_q}, \quad i\frac{\partial^3\mathcal{L}_{PS}}{\partial\psi\partial\pi\partial\psi} = g_{\pi q}\tau_\alpha\gamma_5, \quad i\frac{\partial^3\mathcal{L}_{PV}}{\partial\psi\partial\pi\partial\psi} = \frac{g_{\pi q}}{2m}\not{k}\gamma_5\tau_\alpha \tag{A.40}$$

Apêndice B

Cinemática

Apresentamos, neste apêndice, os dois conjuntos de coordenadas que utilizamos para descrever a cinemática dos sistemas de três quarks ou de dois núcleons e, também, as relações que nos permitem trafegar de um conjunto de coordenadas para o outro. O primeiro conjunto envolve apenas coordenadas externas enquanto o segundo conjunto mistura coordenadas externas e internas.

Sistema de três quarks

Consideramos os três quarks com massas iguais a m. No referencial do laboratório a posição do quark i com relação à origem é descrita pelo vetor externo $\vec{r}_i$ como se vê na figura (B.1).

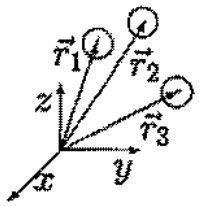


Figura B.1: Coordenadas externas no referencial do laboratório.

Os momentos canônicamente conjugados a estes vetores são definidos por:

$$\vec{p}_i = m\,\dot{\vec{r}}_i, \tag{B.1}$$

onde o ponto indica a derivação com relação ao tempo.

O outro conjunto de coordenadas usado para descrever o sistema de três quarks, que mistura coordenadas externas com internas, está ilustrado na figura (B.2). Nele temos os seguintes vetores de posição:

$\vec{R}$ = coordenada externa do centro de massa do sistema de tres quarks,
$\vec{\rho}$ = coordenada relativa entre os quarks 1 e 2,
$\vec{\lambda}$ = coordenada do quark 3 em relação ao centro de massa do sistema de quarks 1 e 2.

Os momentos conjugados a estes vetores são:

$$\vec{P} = 3m\dot{\vec{R}}, \tag{B.2}$$

$$\vec{p}_\rho = m\dot{\vec{\rho}}, \tag{B.3}$$

$$\vec{p}_\lambda = m\dot{\vec{\lambda}}. \tag{B.4}$$

Os vetores de posição deste conjunto se relacionam com o primeiro da seguinte forma:

$$\vec{R} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3), \tag{B.5}$$

$$\vec{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \tag{B.6}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3), \tag{B.7}$$

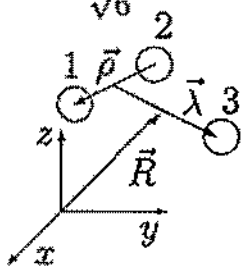


Figura B.2: Conjunto de coordenadas mistas

e o Jacobiano destas transformações é $|J| = 3\sqrt{3}$. As relações inversas são dadas por:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{\vec{\rho}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{\lambda}}{\sqrt{6}}, \tag{B.8}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{\vec{\rho}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{\lambda}}{\sqrt{6}}, \tag{B.9}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{R} - \frac{2\vec{\lambda}}{\sqrt{6}}. \tag{B.10}$$

Os momentos deste segundo conjunto em relação aos momentos do primeiro são dados por:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3, \tag{B.11}$$

$$\vec{p}_\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2), \tag{B.12}$$

$$\vec{p}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - 2\vec{p}_3) \tag{B.13}$$

e as relações inversas destes momentos têm a forma:

$$\vec{p}_1 = \frac{\vec{P}}{3} + \frac{\vec{p}_\rho}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{p}_\lambda}{\sqrt{6}}, \tag{B.14}$$

$$\vec{p}_2 = \frac{\vec{P}}{3} - \frac{\vec{p}_\rho}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{p}_\lambda}{\sqrt{6}}, \tag{B.15}$$

$$\vec{p}_3 = \frac{\vec{P}}{3} - \frac{2\vec{p}_\lambda}{\sqrt{6}}. \tag{B.16}$$

B.1 Sistema de dois núcleons

Consideramos o sistema formado por dois núcleons de mesma massa M. A coordenada do núcleon a no referencial do laboratório é denotada por $\vec{R}_a$ e a do núcleon b é $\vec{R}_b$, como pode-se ver no primeiro gráfico da figura (B.3).

Os momentos conjugados às coordenadas neste sistema são dados por:

$$\vec{P}_a = M\vec{R}_a \text{ e } \vec{P}_b = M\vec{R}_b. \tag{B.17}$$

De maneira análoga à seção anterior, temos o conjunto de coordenadas mistas onde os vetores de posição para os núcleons têm a forma:

$\vec{S}$ = coordenada do CM dos dois núcleons,

$\vec{X}$ = coordenada relativa entre dois núcleons.

Os respectivos momentos conjugados são definidos por:

$$\vec{P}_S = M_t \vec{S}, \tag{B.18}$$

$$\vec{P}_X = M_r \vec{X}, \tag{B.19}$$

onde:

$$M_t = M_a + M_b = 2M,$$
$$M_r = \frac{M_a M_b}{M_t} = \frac{M}{2}.$$

Os vetores de posição deste conjunto relacionam-se com os vetores do primeiro por meio das seguintes equações:

$$\vec{S} = \frac{\vec{R}_a + \vec{R}_b}{2}, \tag{B.20}$$

$$\vec{X} = \vec{R}_a - \vec{R}_b \tag{B.21}$$

e suas respectivas relações inversas são:

$$\vec{R}_a = \vec{S} + \frac{\vec{X}}{2}, \tag{B.22}$$

$$\vec{R}_b = \vec{S} - \frac{\vec{X}}{2}. \tag{B.23}$$

Os momentos deste conjunto em função do primeiro têm a forma:

$$\vec{P}_S = \vec{P}_a + \vec{P}_b, \tag{B.24}$$

$$\vec{P}_X = \frac{\vec{P}_a - \vec{P}_b}{2} \tag{B.25}$$

e suas respectivas relações inversas são:

$$\vec{P}_a = \frac{\vec{P}_S}{2} + \vec{P}_X, \tag{B.26}$$

$$\vec{P}_b = \frac{\vec{P}_S}{2} - \vec{P}_X. \tag{B.27}$$

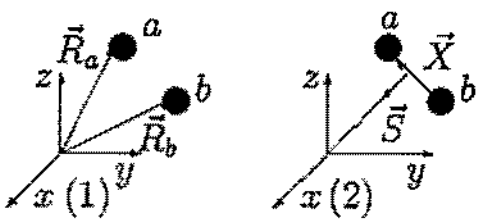


Figura B.3: 1) coordenadas externas. 2) coordenadas mistas.

Apêndice C

O estado de dois núcleons

O estado $|NN>$, do sistema de dois núcleons que interagem entre si por meio de um potencial V_{NN}. é dado pelo seguinte produto direto de componentes em tres espaços

$$|NN>=|\text{configuração}>\otimes|spin>\otimes|isospin> . \tag{C.1}$$

A componente no espaço de configuração depende do modelo adotado para o potencial. enquanto que a estrutura dos espaços internos é dada pelo produto direto das componentes de spin e isospin de cada núcleon. Por envolver dois férmions idênticos, o estado $|NN>$ deve ser antisimétrico pela troca de dois núcleons.

Veremos, primeiramente, a componente nos espaços internos e, a seguir, a componente no espaço de configuração.

Espaço interno

Um núcleon tem isospin $I = 1/2$ e as suas duas projeções da terceira componente, I^z, podem ser representadas por

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_I = p, \tag{C.2}$$

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_I = n, \tag{C.3}$$

correspondendo ao próton e ao nêutron.

Assim, o estado de dois núcleons pode ter isospin total $T = 1$ ou $T = 0$. Para $T = 1$ temos os seguintes estados simétricos:

$$|1,1\rangle_T = pp, \tag{C.4}$$

$$|1,0\rangle_T = \frac{1}{\sqrt{2}}(pn + np), \tag{C.5}$$

$$|1,-1\rangle_T = nn. \tag{C.6}$$

Para $T = 0$ temos o singleto antisimétrico

$$|0,0\rangle_T = \frac{1}{\sqrt{2}}(pn - np). \tag{C.7}$$

O spin de um núcleon é $S = 1/2$, tendo duas projeções que representamos por: $\uparrow$ e $\downarrow$. Analogamente ao caso anterior, o estado de dois núcleons pode ter spin total $J = 1$ e $J = 0$. No caso $J = 1$ existem os seguintes estados simétricos:

$$|1,1\rangle_J = \uparrow\uparrow, \tag{C.8}$$

$$|1,0\rangle_J = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow), \tag{C.9}$$

$$|1,-1\rangle_J = \downarrow\downarrow \tag{C.10}$$

e para o singleto antisimétrico $J = 0$, temos:

$$|0,0\rangle_J = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow). \tag{C.11}$$

A componente do estado de dois núcleons no espaço interno admite, portanto, as quatro combinações:

$$|spin> \otimes |isospin> = \begin{cases} |1,J^z\rangle_J\,|1,T^z\rangle_T\,, \\ |1,J^z\rangle_J\,|0,0\rangle_T\,, \\ |0,0\rangle_J\,|1,T^z\rangle_T\,, \\ |0,0\rangle_J\,|0,0\rangle_T\,. \end{cases} \tag{C.12}$$

O espaço de configuração

O estado de dois núcleons de massas idênticas e iguais a M, com posições $\vec{R}_a$ e $\vec{R}_b$, que interagem entre si por meio de um potencial dependente da coordenada relativa $\vec{R}_a - \vec{R}_b$, é descrito pelo seguinte vetor de estado no espaço de configuração

$$|\text{configuração}> = \Phi\left(\vec{R}_a, \vec{R}_b\right). \tag{C.13}$$

Este estado satisfaz a equação de Schrödinger estática, dada por:

$$\mathcal{H}\Phi\left(\vec{R}_a, \vec{R}_b\right) = E\Phi\left(\vec{R}_a, \vec{R}_b\right), \tag{C.14}$$

onde a hamiltoniana é

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{P}_a^2}{2M} + \frac{\vec{P}_b^2}{2M} + V(\vec{R}_a - \vec{R}_b). \tag{C.15}$$

Usando as coordenadas $\vec{S}$ e $\vec{X}$ definidas no apêndice B, transformamos esta hamiltoniana para:

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{P}_S^2}{4M} + \frac{\vec{P}_X^2}{M} + V(\vec{X}), \tag{C.16}$$

e o vetor de onda passa a ser escrito como:

$$|\text{configuração} >= \Phi\left(\vec{S}, \vec{X}\right). \tag{C.17}$$

Reescrevendo o auto-vetor e o auto-valor da energia E, nas seguintes formas:

$$\Phi\left(\vec{S}, \vec{X}\right) = S\left(\vec{S}\right) X\left(\vec{X}\right), \tag{C.18}$$

$$E = E_S + E_X, \tag{C.19}$$

separamos a interação de dois núcleons em dois problemas independentes: a dinâmica do centro de massa, sem forças externas:

$$-\frac{\nabla_S^2}{4M} S\left(\vec{S}\right) = E_S S\left(\vec{S}\right), \tag{C.20}$$

e a dinâmica interna:

$$\left\{-\frac{\nabla_X^2}{M} + V(\vec{X})\right\} X\left(\vec{X}\right) = E_X X\left(\vec{X}\right). \tag{C.21}$$

A dinâmica do centro de massa tem como solução:

$$S\left(\vec{S}\right) = A_S e^{i\vec{P}_S \cdot \vec{S}}, \tag{C.22}$$

onde $\vec{P}_S^2 = 4ME_S$ e A_S é uma constante de normalização. A solução da dinâmica interna depende da forma da interação adotada.

Resumo

O vetor de estado completo do sistema de dois núcleons é escrita como:

$$|NN\rangle = \Phi\left(\vec{S},\vec{X}\right)|J,J^z,T,T^z\rangle = S\left(\vec{S}\right)X\left(\vec{X}\right)|J,J^z> |T,T^z\rangle\,. \tag{C.23}$$

Apêndice D

A função de onda do núcleon

O estado do núcleon a, simbolizado por $|N_a>$, é dado pelo produto direto de componentes em quatro espaços diferentes: configuração, spin, isospin (sabor) e cor:

$$|N_a> = |\text{configuração}> \otimes |spin> \otimes |sabor> \otimes |cor> \tag{D.1}$$

Por ser um férmion, o núcleon deve ser representado por um estado antissimétrico pela troca das partículas que o constituem. No espaço de cor a componente dovetor de estado do núcleon é antissimétrica, por analogia à da delta. A componente no espaço de configuração, como veremos adiante, é simétrica, pois os núcleons são os bárions de mais baixa energia do espectro de massa e correspondem ao estado fundamental. Consequentemente a componente conjunta nos espaços de spin e sabor deve ser simétrica.

Por serem partes de um produto direto, as componentes de $|N_a>$ são independentes entre si, possibilitando que sejam estudadas separadamente. Veremos primeiramente as formas das componentes nos espaços internos de cor, spin e sabor e a seguir estudaremos a componente no espaço de configuração.

Espaços internos

No espaço da simetria SU(3) de cor, os quarks podem ter tres graus de liberdade, denotados por: vermelho(r=red), amarelo(y=yellow) e verde(g=green). O estado antissimétrico de cor é dado pelo singleto, que tem a forma

$$|cor> = \frac{1}{\sqrt{6}}[ryg - rgy + gry - yrg + ygr - gyr]. \tag{D.2}$$

No espaço de sabor consideramos apenas os bárions não estranhos, os núcleons. e nos limitamos ao grupo de simetria SU(2), tendo os quarks dois graus de liberdade, denotados por u e d. Neste espaço temos as seguintes possibilidades de estados com tres quarks: $uuu, uud, udu, duu, udd, ddu$, dud e ddd. Estes estados podem ser classificados de acordo com o isospin total do sistema, que pode ser $I = 3/2$ ou $I = 1/2$.

Os estados de isospin $I = 3/2$ são simétricos por trocas de partículas e dados por

$$\left|\Delta^{++}\right\rangle = uuu, \tag{D.3}$$

$$\left|\Delta^{+}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}[uud + udu + duu], \tag{D.4}$$

$$\left|\Delta^{0}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}[duu + dud + udd], \tag{D.5}$$

$$\left|\Delta^{-}\right\rangle = ddd. \tag{D.6}$$

Os estados de isospin total $I = 1/2$ têm simetria mista e são classificados de acordo com a simetria do par (1,2). Os estados de simetria mista-simétrica (ms) e mista-antissimétrica (ma) pela troca do par (1,2) são representados por $|I^z\rangle_{ms}$ e $|I^z\rangle_{ma}$ respectivamente. Assim para os núcleons temos os seguintes estados de isospin:

<u>Próton</u>:

$$|p\rangle_{ms} = \frac{1}{\sqrt{6}}[(ud + du)u - 2uud], \tag{D.7}$$

$$|p\rangle_{ma} = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)u. \tag{D.8}$$

<u>Neutron</u>:

$$|n\rangle_{ms} = -\frac{1}{\sqrt{6}}[(ud + du)d - 2ddu], \tag{D.9}$$

$$|n\rangle_{ma} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(du - ud)d. \tag{D.10}$$

O espaço de spin é análogo ao de isospin bastando apenas que efetuemos as trocas de u por $\uparrow$ e d por $\downarrow$. Assim, os estados de spin para os núcleons são dados por

<u>$S^z = +\frac{1}{2}$</u>:

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_{ms} = \frac{1}{\sqrt{6}}[(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)\uparrow - 2\uparrow\uparrow\downarrow], \tag{D.11}$$

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_{ma} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\uparrow. \tag{D.12}$$

$\underline{S^z = -\frac{1}{2}}$:

$$|\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\rangle_{ms} = -\frac{1}{\sqrt{6}}[(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)\downarrow - 2\downarrow\downarrow\uparrow], \tag{D.13}$$

$$|\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\rangle_{ma} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow)\downarrow . \tag{D.14}$$

A combinação dos estados de spin e sabor que resulta num estado do núcleon globalmente simétrico, com terceiras componentes S^z e I^z, tem a forma

$$|spin> \otimes |sabor> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|S, S^z\rangle_{ms} |I, I^z\rangle_{ms} + |S, S^z\rangle_{ma} |I, I^z\rangle_{ma}). \tag{D.15}$$

Explicitando as partes dos espaços internos, temos

$$|S, S^z, I, I^z, C> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|S, S^z\rangle_{ms} |I, I^z\rangle_{ms} + |S, S^z\rangle_{ma} |I, I^z\rangle_{ma}) |C\rangle . \tag{D.16}$$

A determinação do vetor de estado nas variáveis espaciais requer um modelo para a interação entre os quarks, e é feita a seguir.

O espaço de configuração

Neste trabalho consideramos o bárion como um aglomerado formado por três quarks constituintes, todos com a mesma massa m e ligados por uma interação harmônica, proporcional à distancia de separação entre os pares de quarks. A forma desta interação, em função das coordenadas $\vec{r}_v$ dos quarks, é:

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \frac{K}{2}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2 + |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^2), \tag{D.17}$$

onde K é a constante harmônica e o estado do aglomerado neste espaço é denotado por:

$$|\text{configuração}> \equiv |\Psi_E\rangle . \tag{D.18}$$

A Hamiltoniana do sistema é escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{\vec{p}_3^2}{2m} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3), \tag{D.19}$$

sendo a equação de Schrödinger estacionária dada por:

$$\mathcal{H} |\Psi_E\rangle = E |\Psi_E\rangle . \tag{D.20}$$

Usando-se as coordenadas $\vec{R}, \vec{\rho}$ e $\vec{\lambda}$, definidas no apêndice B, a equação de Schrödinger (D.20) pode ser escrita como

$$\left\{-\left[\frac{\nabla_R^2}{6m}+\frac{\nabla_\rho^2}{2m}+\frac{\nabla_\lambda^2}{2m}\right]+\frac{3K}{2}(\vec{\rho}^2+\vec{\lambda}^2)\right\}|\Psi_E\rangle = E\,|\Psi_E\rangle\,. \tag{D.21}$$

Uma vez que o potencial não depende de $\vec{R}$ e a sua dependência nas coordenadas internas é dada por uma soma de dois termos desacoplados, reescrevemos o autovetor e o autovalor da energia como

$$|\Psi_E >= |E_R > |E_\rho > |E_\lambda >, \tag{D.22}$$

$$E = E_R + E_\rho + E_\lambda. \tag{D.23}$$

Fazendo isto, encontramos tres equações diferenciais independentes:

$$-\frac{\nabla_R^2}{6m}|E_R >= E_R|E_R > \tag{D.24}$$

$$\left\{-\frac{\nabla_\rho^2}{2m}+\frac{3K}{2}\vec{\rho}^2\right\}|E_\rho >= E_\rho|E_\rho > \tag{D.25}$$

$$\left\{-\frac{\nabla_\lambda^2}{2m}+\frac{3K}{2}\vec{\lambda}^2\right\}|E_\lambda >= E_\lambda|E_\lambda > \tag{D.26}$$

A primeira equação descreve a dinâmica do centro de massa. Na ausência de forças externas, a sua solução tem a forma:

$$R\left(\vec{R}\right) = \left\langle\vec{R}|E_R\right\rangle = A_R \exp\left(i\vec{P}_a\cdot\vec{R}\right), \tag{D.27}$$

onde $\vec{P}_a^2 = 6mE_R$ e A_R é uma constante de normalização.

As duas outras equações descrevem a dinâmica interna do sistema, são idênticas entre si e iguais à equação do oscilador harmônico tridimensional.

Para se resolver o oscilador harmônico tridimensional, definimos $\omega \equiv \sqrt{3K/m}$ e reescrevemos (D.25) na representação de coordenadas esféricas, da seguinte forma:

$$\left[-\frac{1}{2m\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho})+\frac{\hat{L}^2}{2m\rho^2}+\frac{m\omega^2\rho^2}{2}\right]\Upsilon\left(\vec{\rho}\right) = E_\rho\Upsilon\left(\vec{\rho}\right), \tag{D.28}$$

onde:

$$\hat{L}^2 = -\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})\right] \tag{D.29}$$

é o operador momento angular, cujos auto-estados são os harmônicos esféricos $Y_{lm}(\theta,\phi)$

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta,\phi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta,\phi). \tag{D.30}$$

Escrevendo-se $\Upsilon(\vec{\rho}) = u(\rho)Y_{lm}(\theta,\phi)$, separamos a parte radial da parte angular em (D.28) e obtemos:

$$\left[-\frac{1}{2m\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}) + \frac{l(l+1)}{2m\rho^2} + \frac{m\omega^2\rho^2}{2}\right]u(\rho) = E_\rho u(\rho) \tag{D.31}$$

Esta equação pode ser reescrita em termos das variáveis adimensionais $x \equiv \sqrt{m\omega}\rho$ e $\nu \equiv 2E_\rho/\omega$ como

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{l(l+1)}{x^2} - x^2 + \nu\right]u(x) = 0 \tag{D.32}$$

Definindo a função $f(x)$ através da relação:

$$u(x) = x^l \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) f(x), \tag{D.33}$$

obtemos

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \left[\frac{(l+1)}{x} - x\right]\frac{\partial f(x)}{\partial x} + [\nu - 1 - 2(l+1)]f(x) = 0. \tag{D.34}$$

Usando uma nova função $w(z) = f(x)$, com $z = x^2$, obtemos a equação associada de Laguerre:

$$z\frac{d^2w(z)}{dz^2} + (p+1-z)\frac{dw(z)}{dz} + (q-p)w(z) = 0, \tag{D.35}$$

onde $p = \frac{1}{2} + l$ e $q = \frac{1}{4}(\nu - 1 + 2l)$. As suas soluções são os polinômios de Laguerre $L^p_{q-p}(z)$.

Alguns valores especiais dos polinômios são:

$$\begin{aligned} L^p_0(z) &= 1 \\ L^p_1(z) &= p + 1 - z \end{aligned} \tag{D.36}$$

A quantização da energia vem da condição

$$q - p = N, \tag{D.37}$$

onde N é um número inteiro, o que nos permite escrever

$$E_\rho = \omega(2N + l + \frac{3}{2}). \tag{D.38}$$

Assim, a solução da equação radial (D.31) é

$$u(\rho) = A_\rho(\alpha\rho)^{l_\rho}\exp\left(-\frac{(\alpha\rho)^2}{2}\right)L^{\frac{1}{2}+l_\rho}_{N_\rho}(\alpha^2\rho^2) \tag{D.39}$$

onde $\alpha^2 = m\omega$, $\omega = \sqrt{3K/m}$ e A_ρ é um fator de normalização. Reunindo as soluções radiais e angulares, temos que

$$\Upsilon(\vec{\rho}) = A_\rho(\alpha\rho)^{l_\rho}\exp\left(-\frac{(\alpha\rho)^2}{2}\right)L^{\frac{1}{2}+l_\rho}_{N_\rho}(\alpha^2\rho^2)Y_{l_\rho m_\rho}(\theta_\rho,\phi_\rho). \tag{D.40}$$

De modo análogo, obtemos $\Lambda\left(\vec{\lambda}\right)$ trocando $\rho \to \lambda$ na expressão acima.

A solução completa para o aglomerado de tres quarks é, portanto,

$$\begin{aligned}\Psi_E\left(\vec{R},\vec{\rho},\vec{\lambda}\right) = \quad & A\exp\left(i\vec{P}_a\cdot\vec{R}\right)(\alpha\rho)^{l_\rho}\exp\left(-\frac{(\alpha\rho)^2}{2}\right)L_{N_\rho}^{\frac{1}{2}+l_\rho}(\alpha^2\rho^2)Y_{l_\rho m_\rho}(\theta_\rho,\phi_\rho)\\ & (\alpha\lambda)^{l_\lambda}\exp\left(-\frac{(\alpha\lambda)^2}{2}\right)L_{N_\lambda}^{\frac{1}{2}+l_\lambda}(\alpha^2\lambda^2)Y_{l_\lambda m_\lambda}(\theta_\lambda,\phi_\lambda)\end{aligned} \tag{D.41}$$

onde A é uma constante de normalização global.

Como o núcleon é considerado o estado de mais baixa energia do bárion, toma-se o estado fundamental do aglomerado para descrevê-lo. Assim para $N_\rho = N_\lambda = 0$, $l_\rho = l_\lambda = 0$ o estado do núcleon no espaço de configuração corresponde a

$$\Psi_{\vec{P}_a}\left(\vec{R},\vec{\rho},\vec{\lambda}\right) = A\exp\left(i\vec{P}_a\cdot\vec{R}\right)\exp\left[-\frac{\alpha^2}{2}(\rho^2+\lambda^2)\right]Y_{00}(\theta_\rho,\phi_\rho)Y_{00}(\theta_\lambda,\phi_\lambda). \tag{D.42}$$

A normalização no espaço de configuração é dada por

$$|J| < \Psi_{\vec{P}'_a}\left(\vec{R},\vec{\rho},\vec{\lambda}\right)|\Psi_{\vec{P}_a}\left(\vec{R},\vec{\rho},\vec{\lambda}\right) >= \delta^3(\vec{P}'_a - \vec{P}_a), \tag{D.43}$$

com $J = 3\sqrt{3}$. Isto nos permite determinar a constante de normalização como

$$A = \frac{4\pi\alpha^3}{12^{3/4}\pi^3}. \tag{D.44}$$

Com $Y_{00}(\theta,\phi) = \left(\sqrt{4\pi}\right)^{-1}$ reduzimos a expressão (D.42) para

$$\Psi_{\vec{P}_a}\left(\vec{R},\vec{\rho},\vec{\lambda}\right) = \frac{\alpha^3}{12^{3/4}\pi^3}\exp\left(i\vec{P}_a\cdot\vec{R} - \frac{\alpha^2}{2}(\rho^2+\lambda^2)\right). \tag{D.45}$$

A energia total do sistema de tres quarks no estado fundamental é

$$\begin{aligned}E &= \frac{\vec{P}_a^2}{6m} + \frac{3}{2}\omega + \frac{3}{2}\omega\\ &= \frac{\vec{P}_a^2}{2M} + \left(\frac{\vec{P}_a^2}{6m} - \frac{\vec{P}_a^2}{2M} + \frac{3}{2}\omega + \frac{3}{2}\omega\right)\end{aligned} \tag{D.46}$$

Portanto

$$M = 3m + 3\omega. \tag{D.47}$$

Reunindo os resultados (D.45) e (D.16), temos para o estado do núcleon a a seguinte expressão

$$\begin{aligned}\Psi_{\vec{P}_a}\left(\vec{R},\vec{\rho},\vec{\lambda}\right)|S^z,T^z,C > \; &= \frac{\alpha^3}{3^{3/4}\pi^{3/2}}\frac{e^{i\vec{P}_a\cdot\vec{R}}}{(2\pi)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}(\rho^2+\lambda^2)\right)\times\\ &\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|S^z\rangle_{ms}|I^z\rangle_{ms} + |S^z\rangle_{ma}|I^z\rangle_{ma}\right)|C\rangle.\end{aligned} \tag{D.48}$$

O espaço dos momentos

Para obter a função de onda do núcleon no espaço dos momentos, efetuamos a transformada de Fourier da expressão (D.45)

$$\Psi_{\vec{P}_a}\left(\vec{P}_R,\vec{p}_\rho,\vec{p}_\lambda\right) = \frac{\alpha^3|J|}{(3\pi^2)^{3/4}}\int\frac{d\vec{R}}{(2\pi)^3}\frac{d\vec{\rho}d\vec{\lambda}}{(2\pi)^3}\exp\left[-i\left(\vec{P}_R-\vec{P}_a\right)\cdot\vec{R}\right]\times$$
$$\times\exp\left[\frac{\alpha^2\vec{\rho}^2}{2}+i\vec{p}_\rho\cdot\vec{\rho}+\frac{\alpha^2\vec{\lambda}^2}{2}+i\vec{p}_\lambda\cdot\vec{\lambda}\right], \tag{D.49}$$

Realizando as integrações obtemos

$$\Psi_{\vec{P}_a}\left(\vec{P}_R,\vec{p}_\rho,\vec{p}_\lambda\right) = \frac{3^{3/4}}{(\pi\alpha^2)^{3/2}}\delta(\vec{P}_R-\vec{P}_a)\exp-\frac{1}{2\alpha^2}(\vec{p}_\rho^{\,2}+\vec{p}_\lambda^{\,2}), \tag{D.50}$$

Uma outra forma útil para este resutado é a seguinte:

$$\Psi_{\vec{P}_a}\left(\vec{P}_R,\vec{p}_\rho,\vec{p}_\lambda\right) = \frac{3^{3/4}e^{\vec{P}_a^2/(6\alpha^2)}}{(\pi\alpha^2)^{3/2}}\delta(\vec{P}_R-\vec{P}_a)\exp\left[-\frac{\vec{P}_R^{\,2}}{6\alpha^2}-\frac{1}{2\alpha^2}(\vec{p}_\rho^{\,2}+\vec{p}_\lambda^{\,2})\right]. \tag{D.51}$$

Este estado é normalizado por:

$$\frac{1}{|J|}<\Psi_{\vec{P}_a'}\left(\vec{P}_R,\vec{p}_\rho,\vec{p}_\lambda\right)|\Psi_{\vec{P}_a}\left(\vec{P}_R,\vec{p}_\rho,\vec{p}_\lambda\right)>=\delta(\vec{P}_a'-\vec{P}_a). \tag{D.52}$$

Usando as relações (B.14), podemos reescrever a (D.51), em termos dos momentos $\vec{p}_v$ de cada quark:

$$\Psi_{\vec{P}_a}(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3) = N(\vec{P}_a)\delta(\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3-\vec{P}_a)\phi(\vec{p}_1)\phi(\vec{p}_2)\phi(\vec{p}_3); \tag{D.53}$$

as funções $\phi(p_v)$ representam os estados de quarks individuais e são dadas por:

$$\phi(\vec{p}_v) = \frac{\exp-(\vec{p}_v^{\,2}/2\alpha^2)}{(\alpha^2\pi)^{3/4}}; \tag{D.54}$$

a função $N(\vec{P}_a)$ que serve para acertar a normalização é dada por

$$N(\vec{P}_a) = (3\pi\alpha)^{3/4}\exp\left(\frac{\vec{P}_a^2}{6\alpha^2}\right). \tag{D.55}$$

Resumo

Em resumo, temos a seguinte expressão para a função de onda do núcleon a livre, no espaço de configuração:

$$\Psi_{\vec{P}_a}\left(\vec{R},\vec{\rho},\vec{\lambda}\right)|S,S^z,I,I^z,C> = \left(\frac{\alpha^4}{3\pi^2}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{e^{i\vec{P}_a\cdot\vec{R}}}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}(\rho^2+\lambda^2)\right) \times \tag{D.56}$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{2}}(|S,S^z)_{ms}|I,I^z)_{ms}+|S,S^z)_{ma}|I,I^z)_{ma})|C\rangle$$

No espaço dos momentos, temos:

$$\Psi_{\vec{P}_a}\left(\vec{P}_R,\vec{p}_\rho,\vec{p}_\lambda\right)|S,S^z,I,I^z,C> = \left(\frac{3}{\alpha^4\pi^2}\right)^{\frac{3}{4}} \exp\frac{\vec{P}_a^2}{6\alpha^2}\delta(\vec{P}_R-\vec{P}_a)\times \tag{D.57}$$
$$\times\exp\left(-\frac{\vec{P}_R^2}{6\alpha^2}-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\vec{p}_\lambda^2+\vec{p}_\rho^2\right)\right)\times$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{2}}(|S,S^z)_{ms}|I,I^z)_{ms}+|S,S^z)_{ma}|I,I^z)_{ma})|C)\,.$$

onde $\alpha^2 = m\omega$, $\omega = \sqrt{3K/m}$ e m é a massa do quark.

Apêndice E

Spin e Isospin: quarks e núcleons

Neste apêndice, obtemos as relações utilizadas nos nossos cálculos entre os operadores dos quarks e dos núcleons no espaço de spin e isospin. Inicialmente, estabelecemos a notação utilizada para os estados de quarks e núcleons. A seguir, descrevemos algumas propriedades dos operadores de spin e de isospin, indicando o procedimento usado para obter as relações entre os operadores de quarks e núcleons.

Estados de isospin.

Representamos o estado de isospin dos quarks por $|\iota, \iota^z\rangle$ onde ι é o isospin total e ι^z a sua projeção na terceira componente. Restringimo-nos aos quarks não estranhos que têm $\iota = \frac{1}{2}$, e correspondem a dois estados de ι^z distintos, conhecidos por $u = \left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle$ e $d = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$. Os estados de isospin $|I, I^z\rangle$ dos núcleons e deltas, obtidos no apêndice D, são reproduzidos na tabela a seguir:

$\|\Delta^{++}\rangle_s$	$=$	$\left\|\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right\rangle$	$=$	uuu
$\|\Delta^{+}\rangle_s$	$=$	$\left\|\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{3}}udu + \frac{1}{\sqrt{3}}duu + \frac{1}{\sqrt{3}}uud$
$\|\Delta^{0}\rangle_s$	$=$	$\left\|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{3}}dud + \frac{1}{\sqrt{3}}udd + \frac{1}{\sqrt{3}}ddu$
$\|\Delta^{-}\rangle_s$	$=$	$\left\|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$	$=$	ddd
$\|p\rangle_{ms}$	$=$	$\left\|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{6}}udu + \frac{1}{\sqrt{6}}duu - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}uud$
$\|n\rangle_{ms}$	$=$	$\left\|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$	$=$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}dud - \frac{1}{\sqrt{6}}udd + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}ddu$
$\|p\rangle_{ma}$	$=$	$\left\|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{2}}udu - \frac{1}{\sqrt{2}}duu$
$\|n\rangle_{ma}$	$=$	$\left\|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$	$=$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}dud + \frac{1}{\sqrt{2}}udd$

(E.1)

Invertendo essas expressões, obtemos:

$$
\begin{array}{|c|c|l|}
\hline
uuu & = & |\Delta^{++}\rangle_s \\
\hline
uud & = & \frac{1}{\sqrt{3}}|\Delta^{+}\rangle_s - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|p\rangle_{ms} \\
\hline
udu & = & \frac{1}{\sqrt{3}}|\Delta^{+}\rangle_s + \frac{1}{\sqrt{6}}|p\rangle_{ms} + \frac{1}{\sqrt{2}}|p\rangle_{ma} \\
\hline
duu & = & \frac{1}{\sqrt{3}}|\Delta^{+}\rangle_s + \frac{1}{\sqrt{6}}|p\rangle_{ms} - \frac{1}{\sqrt{2}}|p\rangle_{ma} \\
\hline
udd & = & \frac{1}{\sqrt{3}}|\Delta^{0}\rangle_s - \frac{1}{\sqrt{6}}|n\rangle_{ms} + \frac{1}{\sqrt{2}}|n\rangle_{ma} \\
\hline
dud & = & \frac{1}{\sqrt{3}}|\Delta^{0}\rangle_s - \frac{1}{\sqrt{6}}|n\rangle_{ms} - \frac{1}{\sqrt{2}}|n\rangle_{ma} \\
\hline
ddu & = & \frac{1}{\sqrt{3}}|\Delta^{0}\rangle_s + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|n\rangle_{ms} \\
\hline
ddd & = & |\Delta^{-}\rangle_s \\
\hline
\end{array}
\tag{E.2}
$$

Estados de spin

O estado de spin dos quarks é denotado por $|s, s^z\rangle$, sendo $s = \frac{1}{2}$ e $s^z = \pm\frac{1}{2}$, resumidos na forma de $\uparrow = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ e $\downarrow = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$. Os estados de spin dos núcleons são representados por $|S, S^z\rangle$ e são totalmente análogos aos de isospin. Temos, portanto, a tabela:

$$
\begin{array}{|c|c|l|}
\hline
\uparrow\uparrow\uparrow & = & \left|\frac{3}{2}\right\rangle_s \\
\hline
\uparrow\uparrow\downarrow & = & \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_s - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_{ms} \\
\hline
\uparrow\downarrow\uparrow & = & \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_s + \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_{ms} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_{ma} \\
\hline
\downarrow\uparrow\uparrow & = & \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_s + \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_{ms} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_{ma} \\
\hline
\uparrow\downarrow\downarrow & = & \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{2}\right\rangle_s - \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ms} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ma} \\
\hline
\downarrow\uparrow\downarrow & = & \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{2}\right\rangle_s - \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ms} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ma} \\
\hline
\downarrow\downarrow\uparrow & = & \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{2}\right\rangle_s + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ms} \\
\hline
\downarrow\downarrow\downarrow & = & \left|\frac{-3}{2}\right\rangle_s \\
\hline
\end{array}
\tag{E.3}
$$

E.1 Estados de spin-isospin

O estado de spin-isospin dos núcleons é denotado por $|S^z, I^z\rangle$ e para o caso do próton com spin S^z, temos:

$$|S^z, p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S^z\rangle_{ms}|p\rangle_{ms} + \frac{1}{\sqrt{2}}|S^z\rangle_{ma}|p\rangle_{ma}\,; \tag{E.4}$$

o estado do nêutron é dado por:

$$|S^z, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S^z\rangle_{ms}|n\rangle_{ms} + \frac{1}{\sqrt{2}}|S^z\rangle_{ma}|n\rangle_{ma}\,. \tag{E.5}$$

Operadores

Os operadores de isospin de quarks são dados por τ_v^i, onde $i = x$, y, z representa as componentes cartesianas e $v = 1, 2, 3$ corresponde ao índice do quark. A sua ação sobre os estados de um quark é dada por

$$\begin{aligned} \tau^x u &= d, \\ \tau^x d &= u, \\ \tau^y u &= -id, \\ \tau^y d &= iu, \\ \tau^z u &= u, \\ \tau^z d &= -d. \end{aligned} \tag{E.6}$$

Os operadores de isospin dos núcleons são denotados por $\mathcal{T}^i$ e as suas propriedades são análogas às de τ^i. Para determinar a sua ação sobre os estados dos núcleons, basta trocar τ^i por $\mathcal{T}^i$ e os estados u e d por p e n, respectivamente, nas expressões acima. Para o operador de spin dos quarks σ^i temos

$$\begin{aligned} \sigma^x \uparrow &= \downarrow, \\ \sigma^x \downarrow &= \uparrow, \\ \sigma^y \uparrow &= -i \downarrow, \\ \sigma^i \downarrow &= i \uparrow, \\ \sigma^i \uparrow &= \uparrow, \\ \sigma^i \downarrow &= - \downarrow . \end{aligned} \tag{E.7}$$

O operador de spin dos núcleons é dado por Σ^i que, como no caso anterior, tem propriedades análogas a σ^i.

Quarks e núcleons: relações entre operadores

Nesta seção obtemos as seguintes relações, que são utilizadas para relacionar as ações dos operadores de spin e isospin de quarks e núcleons.

$$\begin{aligned}
&\text{a) } \tau_v^i \left|S^z, I^z\right\rangle \equiv \frac{1}{3}T^i \left|S^z, I^z\right\rangle + ..., \\
&\text{b) } \sigma_v^i \left|S^z, I^z\right\rangle \equiv \frac{1}{3}\Sigma^i \left|S^z, I^z\right\rangle + ..., \\
&\text{c) } \sigma_v^i \tau_v^j \left|S^z, I^z\right\rangle \equiv \frac{5}{9}\Sigma^i T^j \left|S^z, I^z\right\rangle + ..., \\
&\text{d) } \sigma_v^i \tau_w^j \left|S^z, I^z\right\rangle \equiv -\frac{1}{9}\Sigma^i T^j \left|S^z, I^z\right\rangle + ..., \; v \neq w.
\end{aligned} \tag{E.8}$$

onde as reticências indicam outros estados diferentes dos núcleons. Estas relações são obtidas aplicando-se os operadores de quarks nos estados dos aglomerados e relacionando o resultado com os operadores dos núcleons. A seguir apresentamos alguns exemplos de como elas foram obtidas.

Propriedades a) e b)

Começando pela propriedade a), temos que

$$\tau_v^i \left|S^z, I^z\right\rangle = \left|S^z\right\rangle_{ms} \tau_v^i \left|I^z\right\rangle_{ms} + \left|S^z\right\rangle_{ma} \tau_v^i \left|I^z\right\rangle_{ma}. \tag{E.9}$$

Calculando as componentes do lado direito da igualdade para o caso $i = x$ e $\left|I^z\right\rangle = \left|p\right\rangle$ temos, para o estado ms :

$$\tau_v^x \left|p\right\rangle_{ms} = \tau_v^x \left(\frac{1}{\sqrt{6}}udu + \frac{1}{\sqrt{6}}duu - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}uud\right). \tag{E.10}$$

Para $v = 1, 2$ e 3, encontramos, respectivamente

$$\begin{aligned}
\tau_1^x \left|p\right\rangle_{ms} &= \frac{1}{\sqrt{6}}ddu + \frac{1}{\sqrt{6}}uuu - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}dud = \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\Delta^{++}\right\rangle_s - \frac{1}{\sqrt{18}}\left|\Delta^0\right\rangle_s + \frac{2}{3}\left|n\right\rangle_{ms} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|n\right\rangle_{ma},
\end{aligned} \tag{E.11}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2^x \left|p\right\rangle_{ms} &= \frac{1}{\sqrt{6}}uuu + \frac{1}{\sqrt{6}}ddu - \sqrt{\frac{2}{3}}udd = \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\Delta^{++}\right\rangle_s - \frac{1}{\sqrt{18}}\left|\Delta^0\right\rangle_s + \frac{2}{3}\left|n\right\rangle_{ms} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left|n\right\rangle_{ma},
\end{aligned} \tag{E.12}$$

$$\begin{aligned}\tau_3^x\left|p\right\rangle_{ms} &= \frac{1}{\sqrt{6}}udd+\frac{1}{\sqrt{6}}dud-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}uuu= \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left|\Delta^{++}\right\rangle_s+\frac{\sqrt{2}}{3}\left|\Delta^0\right\rangle_s-\frac{1}{3}\left|n\right\rangle_{ms}.\end{aligned} \tag{E.13}$$

No caso do estado ma, obtemos.

$$\tau_v^x\left|p\right\rangle_{ma}=\tau_v^x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}udu-\frac{1}{\sqrt{2}}duu\right), \tag{E.14}$$

que corresponde aos seguintes resultados:

$$\begin{aligned}\tau_1^x\left|p\right\rangle_{ma} &= \frac{1}{\sqrt{2}}ddu-\frac{1}{\sqrt{2}}uuu= \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\Delta^{++}\right\rangle_s+\frac{1}{\sqrt{6}}\left|\Delta^0\right\rangle_s+\frac{1}{3}\left|n\right\rangle_{ms},\end{aligned} \tag{E.15}$$

$$\begin{aligned}\tau_2^x\left|p\right\rangle_{ma} &= \frac{1}{\sqrt{2}}uuu-\frac{1}{\sqrt{2}}ddu= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\Delta^{++}\right\rangle_s\right)-\frac{1}{\sqrt{6}}\left|\Delta^0\right\rangle_s+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|n\right\rangle_{ms},\end{aligned} \tag{E.16}$$

$$\tau_3^x\left|p\right\rangle_{ma} = \frac{1}{\sqrt{2}}udd-\frac{1}{\sqrt{2}}dud=\left|n\right\rangle_{MA}. \tag{E.17}$$

Assim temos que $\tau_v^x\left|S^z,p\right\rangle$, para os vários valores de v, resulta em:

$$\begin{aligned}\tau_1^x\left|S^z,p\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}\left|S^z\right\rangle_{ms}\left|n\right\rangle_{ms}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|S^z\right\rangle_{ms}\left|n\right\rangle_{ma}+\frac{1}{\sqrt{6}}\left|S^z\right\rangle_{ms}\left|\Delta^{++}\right\rangle_s\right. \\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\left|S^z\right\rangle_{ma}\left|\Delta^{++}\right\rangle_s-\frac{1}{\sqrt{18}}\left|S^z\right\rangle_{ms}\left|\Delta^0\right\rangle_s-\frac{1}{\sqrt{6}}\left|S^z\right\rangle_{ma}\left|\Delta^0\right\rangle_s+ \\ &\quad \left.+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|S^z\right\rangle_{ma}\left|n\right\rangle_{ms}\right),\end{aligned} \tag{E.18}$$

$$\begin{aligned}\tau_2^x\left|S^z,p\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}\left|S^z\right\rangle_{ms}\left|n\right\rangle_{ms}-\frac{1}{\sqrt{3}}\left|S^z\right\rangle_{ms}\left|n\right\rangle_{ma}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|S^z\right\rangle_{ma}\left|n\right\rangle_{ms}+\right. \\ &\quad +\frac{1}{\sqrt{6}}\left|S^z\right\rangle_{ms}\left|\Delta^{++}\right\rangle_s-\frac{1}{\sqrt{2}}\left|S^z\right\rangle_{ma}\left|\Delta^{++}\right\rangle_s-\frac{1}{\sqrt{18}}\left|S^z\right\rangle_{ms}\left|\Delta^0\right\rangle_s- \\ &\quad \left.-\frac{1}{\sqrt{6}}\left|S^z\right\rangle_{ma}\left|\Delta^0\right\rangle_s\right),\end{aligned} \tag{E.19}$$

$$\begin{aligned}\tau_3^x\left|S^z,p\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left|S^z\right\rangle_{ms}\left\{-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left|\Delta^{++}\right\rangle_s+\frac{\sqrt{2}}{3}\left|\Delta^0\right\rangle_s-\frac{1}{3}\left|n\right\rangle_{ms}\right\}+ \\ &\quad +\frac{1}{\sqrt{2}}\left|S^z\right\rangle_{ma}\left|n\right\rangle_{ma}.\end{aligned} \tag{E.20}$$

Realizando o produto escalar destes resultados com $\langle S^z, n|$, temos

$$\langle S^z, n| \tau_1^x |S^z, p\rangle = \frac{1}{3}, \tag{E.21}$$

$$\langle S^z, n| \tau_2^x |S^z, p\rangle = \frac{1}{3}, \tag{E.22}$$

$$\langle S^z, n| \tau_3^x |S^z, p\rangle = \frac{1}{3}. \tag{E.23}$$

Estes resultados são compactados em

$$\langle S^z, n| \tau_v^x |S^z, p\rangle = \frac{1}{3}, \tag{E.24}$$

válido para qualquer v. Alternativamente, podemos escrever

$$\tau_v^x |S^z, p\rangle = \frac{1}{3} |S^z, n\rangle + ... = \frac{1}{3} T^x |S^z, p\rangle + ... \tag{E.25}$$

Procedendo de maneira análoga para $\tau_v^y |S^z, p\rangle$ e $\tau_v^z |S^z, p\rangle$ encontramos:

$$\tau_v^y |S^z, p\rangle = -\frac{1i}{3} |S^z, n\rangle + ... = \frac{1}{3} T^y |S^z, p\rangle + ..., \tag{E.26}$$

$$\tau_v^z |S^z, p\rangle = \frac{1}{3} |S^z, p\rangle + ... = \frac{1}{3} T^z |S^z, p\rangle + ... \tag{E.27}$$

Em resumo, temos que

$$\tau_v^i |S^z, p\rangle = \frac{1}{3} T^i |S^z, p\rangle + ... , \tag{E.28}$$

onde T^i é o operador de isospin para núcleons. Para o caso do neutron, verificamos explicitamente o mesmo tipo de comportamento, ou seja:

$$\tau_v^i |S^z, n\rangle = \frac{1}{3} T^i |S^z, n\rangle + ... \tag{E.29}$$

Reunindo os resultados (E.28) e (E.29) temos

$$\tau_v^i |S^z, I^z\rangle = \frac{1}{3} T^i |S^z, I^z\rangle + ... \tag{E.30}$$

O caso do operador de spin é totalmente análogo ao do isospin; basta que troquemos τ_v^i por σ_v^i e os estados da tabela (E.2) pelos correspondentes da tabela (E.3), para encontrarmos como resultados as seguintes relações:

$$\sigma_v^i |\frac{1}{2}, I^z\rangle = \frac{1}{3} \Sigma^i |\frac{1}{2}, I^z\rangle + ... , \tag{E.31}$$

$$\sigma_v^i | -\frac{1}{2}, I^z\rangle = \frac{1}{3} \Sigma^i | -\frac{1}{2}, I^z\rangle + ... \tag{E.32}$$

Estas equações resultam em

$$\sigma_v^i |S^z, I^z\rangle = \frac{1}{3} \Sigma^i |S^z, I^z\rangle + ... \tag{E.33}$$

Propriedades c) e d)

Para obter tais resultados, aplicamos σ_v^i sobre os estados $|S^z\rangle_\xi$ e τ_w^j sobre os estados $|I^z\rangle_\xi$, onde ξ indica a simetria. Assim para um estado genérico do núcleon, escrevemos:

$$\sigma_v^i \tau_w^j |S^z, I^z\rangle = \sigma_v^i |S^z\rangle_{ms} \tau_w^j |I^z\rangle_{ms} + \sigma_v^i |S^z\rangle_{ma} \tau_w^j |I^z\rangle_{ma} . \tag{E.34}$$

Para o caso $\sigma_v^y \tau_w^x \left|\frac{1}{2}, n\right\rangle$, por exemplo, temos:

$$\sigma_v^y \tau_w^x |\frac{1}{2}, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_v^y |\frac{1}{2}\rangle_{ms} \tau_w^x |n\rangle_{ms} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_v^y |\frac{1}{2}\rangle_{ma} \tau_w^x |n\rangle_{ma}. \tag{E.35}$$

As ações dos operadores individuais são dadas por:

$\sigma_1^y \left\|\frac{1}{2}\right\rangle_{ms}$	$=$	$\frac{-i}{\sqrt{3}} \left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ma} - \frac{2i}{3} \left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ms} + \frac{i}{3\sqrt{2}} \left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_s + \frac{i}{\sqrt{6}} \left\|\frac{3}{2}\right\rangle_s$
$\sigma_2^y \left\|\frac{1}{2}\right\rangle_{ms}$	$=$	$\frac{i}{\sqrt{3}} \left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ma} - \frac{2i}{3} \left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ms} + \frac{i}{3\sqrt{2}} \left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_s + \frac{i}{\sqrt{6}} \left\|\frac{3}{2}\right\rangle_s$
$\sigma_3^y \left\|\frac{1}{2}\right\rangle_{ms}$	$=$	$\frac{i}{3} \left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ms} - \frac{2i}{3\sqrt{2}} \left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_s - \frac{2i}{\sqrt{6}} \left\|\frac{3}{2}\right\rangle_s$
$\sigma_1^y \left\|\frac{1}{2}\right\rangle_{ma}$	$=$	$-\frac{i}{\sqrt{3}} \left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ms} - \frac{i}{\sqrt{6}} \left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_s - \frac{i}{\sqrt{2}} \left\|\frac{3}{2}\right\rangle_s$
$\sigma_2^y \left\|\frac{1}{2}\right\rangle_{ma}$	$=$	$\frac{i}{\sqrt{3}} \left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ms} + \frac{i}{\sqrt{6}} \left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_s + \frac{i}{\sqrt{2}} \left\|\frac{3}{2}\right\rangle_s$
$\sigma_3^y \left\|\frac{1}{2}\right\rangle_{ma}$	$=$	$-i \left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ma}$

(E.36)

$\tau_1^x \|n\rangle_{ms}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \|p\rangle_{ma} + \frac{2}{3} \|p\rangle_{ms} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \|\Delta^+\rangle_s - \frac{1}{\sqrt{6}} \|\Delta^-\rangle_s$
$\tau_2^x \|n\rangle_{ms}$	$=$	$-\frac{1}{\sqrt{3}} \|p\rangle_{ma} + \frac{2}{3} \|p\rangle_{ms} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \|\Delta^+\rangle_s - \frac{1}{\sqrt{6}} \|\Delta^-\rangle_s$
$\tau_3^x \|n\rangle_{ms}$	$=$	$-\frac{1}{3} \|p\rangle_{ms} - \frac{2}{3\sqrt{2}} \|\Delta^+\rangle_s + \frac{2}{\sqrt{6}} \|\Delta^-\rangle_s$
$\tau_1^x \|n\rangle_{ma}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \|p\rangle_{ms} - \frac{1}{\sqrt{6}} \|\Delta^+\rangle_s + \frac{1}{\sqrt{2}} \|\Delta^-\rangle_s$
$\tau_2^x \|n\rangle_{ma}$	$=$	$-\frac{1}{\sqrt{3}} \|p\rangle_{ms} + \frac{1}{\sqrt{6}} \|\Delta^+\rangle_s - \frac{1}{\sqrt{2}} \|\Delta^-\rangle_s$
$\tau_3^x \|n\rangle_{ma}$	$=$	$\|p\rangle_{ma}$

(E.37)

Reunindo os resultados das duas tabelas e considerando apenas os estados do neutron e proton, temos:

$\sigma_1^y\tau_1^x$	$\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{7i}{9}\left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ms}\|p\rangle_{ms} - \frac{i}{3}\left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ma}\|p\rangle_{ma}\right)$
$\sigma_1^y\tau_2^x$	$\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{i}{9}\left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ms}\|p\rangle_{ms} + \frac{i}{3}\left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ma}\|p\rangle_{ma}\right)$
$\sigma_1^y\tau_3^x$	$\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2i}{9}\left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ms}\|p\rangle_{ms}$
$\sigma_2^y\tau_1^x$	$\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{i}{9}\left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ms}\|p\rangle_{ms} + \frac{i}{3}\left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ma}\|p\rangle_{ma}\right)$
$\sigma_2^y\tau_2^x$	$\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{7i}{9}\left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ms}\|p\rangle_{ms} - \frac{i}{3}\left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ma}\|p\rangle_{ma}\right)$
$\sigma_2^y\tau_3^x$	$\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2i}{9}\left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ms}\|p\rangle_{ms}$
$\sigma_3^y\tau_1^x$	$\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2i}{9}\left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ms}\|p\rangle_{ms}$
$\sigma_3^y\tau_2^x$	$\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2i}{9}\left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ms}\|p\rangle_{ms}$
$\sigma_3^y\tau_3^x$	$\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{i}{9}\left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ms}\|p\rangle_{ms} - i\left\|\frac{-1}{2}\right\rangle_{ma}\|p\rangle_{ma}\right)$

(E.38)

Realizando o produto escalar com $\left\langle -\frac{1}{2},p\right|$ temos

$\left\langle -\frac{1}{2},p\right\|\sigma_1^x\tau_1^x\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$-\frac{5i}{9}$
$\left\langle -\frac{1}{2},p\right\|\sigma_1^x\tau_2^x\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$\frac{i}{9}$
$\left\langle -\frac{1}{2},p\right\|\sigma_1^x\tau_3^x\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$\frac{i}{9}$
$\left\langle -\frac{1}{2},p\right\|\sigma_2^x\tau_1^x\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$\frac{i}{9}$
$\left\langle -\frac{1}{2},p\right\|\sigma_2^x\tau_2^x\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$-\frac{5i}{9}$
$\left\langle -\frac{1}{2},p\right\|\sigma_2^x\tau_3^x\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$\frac{i}{9}$
$\left\langle -\frac{1}{2},p\right\|\sigma_3^x\tau_1^x\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$\frac{i}{9}$
$\left\langle -\frac{1}{2},p\right\|\sigma_3^x\tau_2^x\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$\frac{i}{9}$
$\left\langle -\frac{1}{2},p\right\|\sigma_3^x\tau_3^x\left\|\frac{1}{2},n\right\rangle =$	$-\frac{5i}{9}$

(E.39)

Observando a tabela (E.39) podemos inferir as seguintes relações:

$$\sigma_v^y\tau_v^x|\frac{1}{2},n\rangle \equiv \frac{5}{9}\Sigma^y T^x|\frac{1}{2},n\rangle + \dots , \tag{E.40}$$

$$\sigma_v^y\tau_w^x|\frac{1}{2},n\rangle \equiv -\frac{1}{9}\Sigma^y T^x|\frac{1}{2},n\rangle + \dots , \; v \neq w. \tag{E.41}$$

Este resultado é válido também para as demais combinações $\sigma_v^i\tau_w^j$, bem como para outros estados de spin e isospin, conforme verificamos explicitamente. Assim de modo genérico, temos:

$$\sigma_v^i\tau_v^j\,|S^z,I^z\rangle \equiv \frac{5}{9}\Sigma^i T^j\,|S^z,I^z\rangle + \dots , \tag{E.42}$$

$$\sigma_v^i\tau_w^j\,|S^z,I^z\rangle \equiv -\frac{1}{9}\Sigma^i T^j\,|S^z,I^z\rangle + \dots , \; v \neq w. \tag{E.43}$$

Regras de substituição para Spin e Isospin

Os operadores na coluna da esquerda estão na base de quarks e os da coluna da direita são os correspondentes operadores de núcleons. Os índices n, m, l denotam os quarks; i, j, k e a, b, c, são componentes vetoriais de $\vec{\sigma}$ e $\vec{\tau}$, respectivamente.

1) $\sum_{n=1}^{3} 1_n \longrightarrow 3I_N$

2) $\sum_{n=1}^{3} \sigma_n^i \longrightarrow \sigma_N^i$

3) $\sum_{n=1}^{3} \tau_n^a \longrightarrow \tau_N^a$

4) $\sum_{n=1}^{3} \sigma_n^i \tau_n^a \longrightarrow \frac{5}{3}\sigma_N^i \tau_N^a$

5) $\sum_{n\neq m=1}^{3} \sigma_n^i \sigma_m^j \longrightarrow -2\delta_{ij} I_N$

6) $\sum_{n\neq m=1}^{3} \sigma_n^i \tau_m^a \longrightarrow -\frac{2}{3}\sigma_N^i \tau_N^a$

7) $\sum_{n\neq m=1}^{3} \sigma_n^i \sigma_m^j \tau_n^a \longrightarrow \frac{2}{3}\delta_{ij}\tau_N^a$

8) $\sum_{n\neq m\neq l=1}^{3} \sigma_n^i \sigma_m^j \tau_l^a \longrightarrow -\frac{10}{3}\delta_{ij}\tau_N^a$

9) $\sum_{n\neq m\neq l=1}^{3} \sigma_n^i \sigma_m^j \sigma_l^k \longrightarrow -2(\delta_{ij}\sigma_N^k + \delta_{jk}\sigma_N^i + \delta_{ki}\sigma_N^j)$

10) $\sum_{n\neq m\neq l=1}^{3} \sigma_n^i \sigma_m^j \sigma_l^k \tau_l^a \longrightarrow -\frac{10}{3}\delta_{ij}\sigma_N^k \tau_N^a + \frac{2}{3}\delta_{jk}\sigma_N^i \tau_N^a + \frac{2}{3}\delta_{ki}\sigma_N^j \tau_N^a$

11) $\sum_{n\neq m=1}^{3} \sigma_n^i \sigma_m^j \tau_n^a \tau_m^b \longrightarrow \frac{10}{3}\delta_{ij}\delta_{ab} I_n - 2\epsilon_{ijq}\epsilon_{abr}\sigma_N^q \tau_N^r$

12) $\sum_{n\neq m\neq l=1}^{3} \sigma_n^i \sigma_m^j \sigma_l^k \tau_n^a \tau_m^b \longrightarrow \frac{2}{3}\delta_{ab}(5\delta_{ij}\sigma_N^k - \delta_{jk}\sigma_N^i - \delta_{ki}\sigma_N^j) - 2\epsilon_{ijk}\epsilon_{abr}\tau_N^r$

13) $\sum_{n\neq m\neq l=1}^{3} \sigma_n^i \sigma_m^j \sigma_l^k \tau_n^a \tau_m^b \tau_l^c \longrightarrow \frac{10}{3}(\delta_{ij}\delta_{ab}\sigma_N^k \tau_N^c + \delta_{jk}\delta_{bc}\sigma_N^i \tau_N^a +$
$+\delta_{ki}\delta_{ca}\sigma_N^j \tau_N^b) - 2\epsilon_{ijk}\epsilon_{abc} - \frac{2}{3}\delta_{ab}\tau_N^c \left(\delta_{ik}\sigma_N^j + \delta_{kj}\sigma_N^i\right) + \delta_{ca}\tau_N^b \left(\delta_{ij}\sigma_N^k + \delta_{jk}\sigma_N^i\right) +$
$+\delta_{bc}\tau_N^a \left(\delta_{ij}\sigma_N^k + \delta_{ik}\sigma_N^j\right)$

14) $\sum_{n=1}^{3} \sigma_n^i \sigma_n^j \tau_n^a \rightarrow \delta_{ij}\tau_N^a + \frac{5}{3}i\epsilon_{ijk}\sigma_N^k \tau_N^a$

15) $\sum_{n\neq m=1}^{3} \tau_n^a \tau_m^b \rightarrow -2\delta_{ab} I_N$

16) $\sum_{n\neq m=1}^{3} \tau_n^a \tau_m^b \sigma_n^i \rightarrow \frac{2}{3}\delta_{ab}\sigma_N^i$

17) $\sum_{n=1}^{3} \sigma_n^i \tau_n^a \tau_n^b \rightarrow \delta_{ab}\sigma_N^i + \frac{5}{3}i\epsilon_{abc}\tau_N^b \sigma_N^i$

18) $\sum_{n=1}^{3} \sigma_n^i \tau_n^a \sigma_n^j \tau_n^b = 3\delta_{ij}\delta_{ab} + i\delta_{ij}\epsilon_{abc}\tau_N^c + i\delta_{ab}\epsilon_{ijk}\sigma_N^k - \frac{5}{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{abc}\sigma_N^k \tau_N^c$

Apêndice F

Integrais Gaussianas

Neste apêndice efetuamos as integrações gaussianas empregadas no capítulo 4. Estas integrais dependem dos coeficientes $c_{x\rho}$ e $c_{y\lambda}$, que relacionam as coordenadas dos quarks $\vec{r}_i$ com as variáveis de Jacobi $\vec{\rho}$ e $\vec{\lambda}$, como discutido no apêndice B. Esses coeficientes são dados na tabela (F.1)

x	$c_{x\rho}$	$c_{x\lambda}$
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
2	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
3	0	$-\frac{2}{\sqrt{6}}$
4	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
5	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
6	0	$-\frac{2}{\sqrt{6}}$

(F.1)

e satisfazem as seguintes condições,

$$c_{x\rho}^2 + c_{x\lambda}^2 = \frac{2}{3}, \tag{F.2}$$

$$\left(c_{y\rho} - c_{x\rho}\right) c_{v\rho} + \left(c_{y\lambda} - c_{x\lambda}\right) c_{x\lambda} = -1, \tag{F.3}$$

$$\left[\left(c_{x\rho} - c_{y\rho}\right) c_{x\rho} + \left(c_{x\lambda} - c_{y\lambda}\right) c_{x\lambda}\right] = 1, \tag{F.4}$$

válidas para quaisquer x e y, x diferente de y.

Caso quark-quark

A integral I_{vw}, para a interação quark-quark dada pela equação (4.68) é escrita como

$$I_{vw} = \int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2(\vec{\rho}_a^2+\vec{\lambda}_a^2)-\alpha_b^2(\vec{\rho}_b^2+\vec{\lambda}_b^2)-i\vec{k}\cdot\left(c_{v\rho}\vec{\rho}_a+c_{v\lambda}\vec{\lambda}_a-c_{w\rho}\vec{\rho}_b-c_{w\lambda}\vec{\lambda}_b\right)}. \tag{F.5}$$

As integrações em $\vec{\rho}$ e $\vec{\lambda}$ são do seguinte tipo:

$$\int d\vec{z} e^{-\alpha^2 \vec{z}^2 \pm i\vec{b}\cdot\vec{z}} = \left(\frac{\pi}{\alpha^2}\right)^{3/2} e^{\left(-\frac{\vec{b}^2}{4\alpha^2}\right)}. \tag{F.6}$$

onde $\vec{b} = c_{v\rho}\vec{k},\ c_{v\lambda}\vec{k},\ c_{w\rho}\vec{k},\ c_{w\lambda}\vec{k}$. Assim, as integrações nestas variáveis resultam em:

$$I_{vw} = \frac{\pi^6}{\alpha_a^6 \alpha_b^6} \exp\left[-\left(\frac{c_{v\rho}\vec{k}}{2\alpha_a}\right)^2 - \left(\frac{c_{v\lambda}\vec{k}}{2\alpha_a}\right)^2 - \left(\frac{c_{w\rho}\vec{k}}{2\alpha_b}\right)^2 - \left(\frac{c_{w\lambda}\vec{k}}{2\alpha_b}\right)^2\right]. \tag{F.7}$$

Para os diversos valores dos coeficientes $c_{x\rho}$ e $c_{x\lambda}$ dados na tabela (F.1), encontramos um mesmo resultado para a integração anterior, que é dada por

$$I_{vw} = \frac{\pi^3 \pi^3}{\alpha_a^6 \alpha_b^6} e^{-\vec{k}^2\left(\frac{1}{6\alpha_a^2} + \frac{1}{6\alpha_b^2}\right)}. \tag{F.8}$$

F.1 Caso quark-diquark

As integrais da interação entre quarks e diquarks da seção 4.6 são dadas por

$$\begin{aligned} I^i_{w(v,y)} &= \int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2\left(\vec{\rho}_a^2 + \vec{\lambda}_a^2\right) - \alpha_b^2\left(\vec{\rho}_b^2 + \vec{\lambda}_b^2\right) - i\vec{k}\cdot\left(c_{v\rho}\vec{\rho}_a + c_{v\lambda}\vec{\lambda}_a - c_{w\rho}\vec{\rho}_b - c_{w\lambda}\vec{\lambda}_b\right)} \\ &\times \left[\left(c_{y\rho} - c_{v\rho}\right)\rho_a^i + \left(c_{y\lambda} - c_{v\lambda}\right)\lambda_a^i\right], \end{aligned} \tag{F.9}$$

$$\begin{aligned} I^j_{(w,z)v} &= \int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2\left(\vec{\rho}_a^2 + \vec{\lambda}_a^2\right) - \alpha_b^2\left(\vec{\rho}_b^2 + \vec{\lambda}_b^2\right) - i\vec{k}\cdot\left(c_{v\rho}\vec{\rho}_a + c_{v\lambda}\vec{\lambda}_a - c_{w\rho}\vec{\rho}_b - c_{w\lambda}\vec{\lambda}_b\right)} \\ &\times \left[\left(c_{z\rho} - c_{w\rho}\right)\rho_b^j + \left(c_{z\lambda} - c_{w\lambda}\right)\lambda_b^j\right]. \end{aligned} \tag{F.10}$$

Cada uma das integrais se desacopla em um produto de quatro integrais independentes

$$\begin{aligned} I^i_{w(v,y)} &= \left\{\int d\vec{\rho}_a \left(c_{y\rho} - c_{v\rho}\right)\rho_a^i e^{-\alpha_a^2\vec{\rho}_a^2 - ic_{v\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_a} \int d\vec{\lambda}_a e^{-\alpha_a^2\vec{\lambda}_a^2 - ic_{v\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_a}\right. \\ &+ \left.\int d\vec{\lambda}_a \left(c_{n\lambda} - c_{v\lambda}\right)\lambda_a^i e^{-\alpha_a^2\vec{\lambda}_a^2 - ic_{v\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_a} \int d\vec{\rho}_a e^{-\alpha_a^2\vec{\rho}_a^2 - ic_{v\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_a}\right\} \\ &\times \int d\vec{\rho}_b e^{-\alpha_b^2\left(\vec{\rho}_b^2 + \vec{\lambda}_b^2\right) + ic_{w\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_b + ic_{w\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_b}, \end{aligned} \tag{F.11}$$

$$\begin{aligned} I^j_{(w,z)v} &= \left\{\int d\vec{\rho}_b \left(c_{z\rho} - c_{w\rho}\right)\rho_b^j e^{-\alpha_b^2\vec{\rho}_b^2 + ic_{w\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_b} \int d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_b^2\vec{\lambda}_b^2 + ic_{w\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_b}\right. \\ &+ \left.\int d\vec{\lambda}_b \left(c_{z\lambda} - c_{w\lambda}\right)\lambda_b^j e^{-\alpha_b^2\vec{\lambda}_b^2 + ic_{w\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_b} \int d\vec{\rho}_b e^{-\alpha_b^2\vec{\rho}_b^2 + ic_{w\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_b}\right\} \\ &\times \int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a e^{-\alpha_a^2\left(\vec{\rho}_a^2 + \vec{\lambda}_a^2\right) - ic_{v\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_a - ic_{v\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_a}. \end{aligned} \tag{F.12}$$

Trocando ρ^i e λ^i por $i\frac{\partial}{\partial k^i}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I^i_{w(v,y)} &= i\left\{\frac{(c_{y\rho}-c_{v\rho})}{c_{v\rho}}\left[\frac{\partial}{\partial k^i}\int d\vec{\rho}_a e^{-\alpha_a^2\vec{\rho}_a^2-ic_{v\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_a}\right]\int d\vec{\lambda}_a e^{-\alpha_a^2\vec{\lambda}_a^2-ic_{v\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_a}\right.\\
&\left.+\frac{(c_{y\lambda}-c_{v\lambda})}{c_{v\lambda}}\left[\frac{\partial}{\partial k^i}\int d\vec{\lambda}_a e^{-\alpha_a^2\vec{\lambda}_a^2-ic_{v\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_a}\right]\int d\vec{\rho}_a e^{-\alpha_a^2\vec{\rho}_a^2-ic_{v\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_a}\right\}\\
&\times\int d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_b^2(\vec{\rho}_b^2+\vec{\lambda}_b^2)+ic_{w\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_b+ic_{w\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_b}, \qquad \text{(F.13)}\\
I^j_{(w,z)v} &= -i\left\{\frac{(c_{z\rho}-c_{w\rho})}{c_{w\rho}}\left[\frac{\partial}{\partial k^j}\int d\vec{\rho}_b e^{-\alpha_b^2\vec{\rho}_b^2+ic_{w\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_b}\right]\int d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_b^2\vec{\lambda}_b^2+ic_{w\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_b}\right.\\
&\left.+\frac{(c_{z\lambda}-c_{w\lambda})}{c_{w\lambda}}\left[\frac{\partial}{\partial k^j}\int d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_b^2\vec{\lambda}_b^2+ic_{w\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_b}\right]\int d\vec{\rho}_b e^{-\alpha_b^2\vec{\rho}_b^2+ic_{w\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_b}\right\}\\
&\times\int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a e^{-\alpha_a^2(\vec{\rho}_a^2+\vec{\lambda}_a^2)-ic_{v\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_a-ic_{v\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_a}. \qquad \text{(F.14)}
\end{aligned}
$$

As integrais são do tipo gaussiano e têm a forma geral dada pela equação (F.6). Reunindo os resultados, temos

$$
\begin{aligned}
I^i_{w(v,y)} &= i\frac{\pi^3}{\alpha_a^6}\frac{\pi^3}{\alpha_b^6}\left\{\frac{(c_{y\rho}-c_{v\rho})}{c_{v\rho}}\frac{\partial}{\partial k^i}e^{-\left(\frac{c_{v\rho}\vec{k}}{2\alpha_a}\right)^2}+\frac{(c_{y\lambda}-c_{v\lambda})}{c_{v\lambda}}\frac{\partial}{\partial k^i}e^{-\left(\frac{c_{v\lambda}\vec{k}}{2\alpha_a}\right)^2}\right\}\\
&\times e^{\left[-\left(\frac{c_{v\rho}\vec{k}}{2\alpha_a}\right)^2-\left(\frac{c_{w\rho}\vec{k}}{2\alpha_b}\right)^2-\left(\frac{c_{w\lambda}\vec{k}}{2\alpha_b}\right)^2\right]}, \qquad \text{(F.15)}\\
I^j_{(w,z)v} &= -i\frac{\pi^3}{\alpha_b^6}\frac{\pi^3}{\alpha_a^6}\left\{\frac{(c_{z\rho}-c_{w\rho})}{c_{w\rho}}\frac{\partial}{\partial k^j}e^{-\left(\frac{c_{w\rho}\vec{k}}{2\alpha_b}\right)^2}+\frac{(c_{z\lambda}-c_{w\lambda})}{c_{w\lambda}}\frac{\partial}{\partial k^j}e^{-\left(\frac{c_{w\lambda}\vec{k}}{2\alpha_b}\right)^2}\right\}\\
&\times e^{\left[-\left(\frac{c_{w\rho}\vec{k}}{2\alpha_b}\right)^2-\left(\frac{c_{v\rho}\vec{k}}{2\alpha_a}\right)^2-\left(\frac{c_{v\lambda}\vec{k}}{2\alpha_a}\right)^2\right]}. \qquad \text{(F.16)}
\end{aligned}
$$

Aplicando a derivada na gaussiana, temos

$$
\frac{\partial}{\partial k^i}e^{-\left(\frac{c_{v\rho}\vec{k}}{2\alpha_a}\right)^2}=-\frac{c_{v\rho}^2k^i}{2\alpha_a^2}e^{-\left(\frac{c_{v\rho}\vec{k}}{2\alpha_a}\right)^2}. \qquad \text{(F.17)}
$$

Substituindo nas integrais, chegamos a

$$
\begin{aligned}
I^i_{w(v,y)} &= -i\frac{\pi^3}{\alpha_a^6}\frac{\pi^3}{\alpha_b^6}e^{\left[-\left(\frac{c_{v\rho}\vec{k}}{2\alpha_a}\right)^2-\left(\frac{c_{v\lambda}\vec{k}}{2\alpha_a}\right)^2-\left(\frac{c_{w\rho}\vec{k}}{2\alpha_b}\right)^2-\left(\frac{c_{w\lambda}\vec{k}}{2\alpha_b}\right)^2\right]}\\
&\times\left\{(c_{y\rho}-c_{v\rho})\,c_{v\rho}+(c_{n\lambda}-c_{v\lambda})\,c_{v\lambda}\right\}\frac{k^i}{2\alpha_a^2}, \qquad \text{(F.18)}\\
I^j_{(w,z)v} &= i\frac{\pi^3}{\alpha_b^6}\frac{\pi^3}{\alpha_a^6}e^{\left[-\left(\frac{c_{v\rho}\vec{k}}{2\alpha_a}\right)^2-\left(\frac{c_{v\lambda}\vec{k}}{2\alpha_a}\right)^2-\left(\frac{c_{w\rho}\vec{k}}{2\alpha_b}\right)^2-\left(\frac{c_{w\lambda}\vec{k}}{2\alpha_b}\right)^2\right]}\\
&\times\left\{(c_{z\rho}-c_{w\rho})\,c_{w\rho}+(c_{z\lambda}-c_{w\lambda})\,c_{w\lambda}\right\}\frac{k^j}{2\alpha_b^2}. \qquad \text{(F.19)}
\end{aligned}
$$

Usando as condições (F.2) e (F.4), encontramos os seguintes resultados, independentes dos índices dos quarks

$$I^{i}_{w(v,y)} = i\frac{\pi^3}{\alpha_a^6}\frac{\pi^3}{\alpha_b^6}\frac{k^i}{2\alpha_a^2}e^{-\vec{k}^2\left(\frac{1}{6\alpha_a^2}+\frac{1}{6\alpha_b^2}\right)}, \tag{F.20}$$

$$I^{j}_{(w,z),v} = -i\frac{\pi^3}{\alpha_b^6}\frac{\pi^3}{\alpha_a^6}\frac{k^j}{2\alpha_b^2}e^{-\vec{k}^2\left(\frac{1}{6\alpha_a^2}+\frac{1}{6\alpha_b^2}\right)}. \tag{F.21}$$

Caso diquark-diquark

A integral para o termo diquark-diquark é dada pela equação (4.172)

$$\begin{aligned} I^{ij}_{(v,y)(w,z)} = & \int d\vec{\rho}_a d\vec{\lambda}_a d\vec{\rho}_b d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_a^2\left(\vec{\rho}_a^2+\vec{\lambda}_a^2\right)-\alpha_b^2\left(\vec{\rho}_b^2+\vec{\lambda}_b^2\right)-i\vec{k}\cdot\left(c_{v\rho}\vec{\rho}_a+c_{v\lambda}\vec{\lambda}_a-c_{w\rho}\vec{\rho}_b-c_{w\lambda}\vec{\lambda}_b\right)} \\ & \times\left\{\left(\left(c_{y\rho}-c_{v\rho}\right)\rho_a^i+\left(c_{y\lambda}-c_{v\lambda}\right)\lambda_a^i\right)\right. \\ & \times\left.\left(\left(c_{z\rho}-c_{w\rho}\right)\rho_b^j+\left(c_{z\lambda}-c_{w\lambda}\right)\lambda_b^j\right)\right\}. \end{aligned} \tag{F.22}$$

Colecionando os termos comuns, escrevemos

$$\begin{aligned} I^{ij}_{(v,y)(w,z)} = & \left[\left(c_{y\rho}-c_{v\rho}\right)\int d\vec{\rho}_a e^{-\alpha_a^2\vec{\rho}_a^2-ic_{v\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_a}\rho_a^i\int d\vec{\lambda}_a e^{-\alpha_a^2\vec{\lambda}_a^2-ic_{v\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_a}+\right. \\ & \left.+\left(c_{y\lambda}-c_{v\lambda}\right)\int d\vec{\rho}_a e^{-\alpha_a^2\vec{\rho}_a^2-ic_{v\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_a}\int d\vec{\lambda}_a e^{-\alpha_a^2\vec{\lambda}_a^2-ic_{v\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_a}\lambda_a^i\right] \\ & \times\left[\left(c_{z\rho}-c_{w\rho}\right)\int d\vec{\rho}_b e^{-\alpha_b^2\vec{\rho}_b^2+ic_{w\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_b}\rho_b^j\int d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_b^2\vec{\lambda}_b^2+ic_{w\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_b}+\right. \\ & \left.+\left(c_{z\lambda}-c_{w\lambda}\right)\int d\vec{\rho}_b e^{-\alpha_b^2\vec{\rho}_b^2+ic_{w\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_b}\int d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_b^2\vec{\lambda}_b^2+ic_{w\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_b}\lambda_b^j\right]. \end{aligned} \tag{F.23}$$

Trocando ρ_a^i, ρ_b^j, λ_a^i e λ_b^j por derivadas sobre componentes de $\vec{k}$, temos

$$\begin{aligned} I^{ij}_{(v,y)(w,z)} = & i\left[\frac{\left(c_{y\rho}-c_{v\rho}\right)}{c_{v\rho}}\left(\frac{\partial}{\partial k^i}\int d\vec{\rho}_a e^{-\alpha_a^2\vec{\rho}_a^2-ic_{v\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_a}\right)\int d\vec{\lambda}_a e^{-\alpha_a^2\vec{\lambda}_a^2-ic_{v\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_a}+\right. \\ & \left.+\frac{\left(c_{y\lambda}-c_{v\lambda}\right)}{c_{v\lambda}}\int d\vec{\rho}_a e^{-\alpha_a^2\vec{\rho}_a^2-ic_{v\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_a}\left(\frac{\partial}{\partial k^i}\int d\vec{\lambda}_a e^{-\alpha_a^2\vec{\lambda}_a^2-ic_{v\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_a}\right)\right] \\ & \times -i\left[\frac{\left(c_{z\rho}-c_{w\rho}\right)}{c_{w\rho}}\left(\frac{\partial}{\partial k^j}\int d\vec{\rho}_b e^{-\alpha_b^2\vec{\rho}_b^2+ic_{w\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_b}\right)\int d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_b^2\vec{\lambda}_b^2+ic_{w\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_b}+\right. \\ & \left.+\frac{\left(c_{z\lambda}-c_{w\lambda}\right)}{c_{w\lambda}}\int d\vec{\rho}_b e^{-\alpha_b^2\vec{\rho}_b^2+ic_{w\rho}\vec{k}\cdot\vec{\rho}_b}\left(\frac{\partial}{\partial k^j}\int d\vec{\lambda}_b e^{-\alpha_b^2\vec{\lambda}_b^2+ic_{w\lambda}\vec{k}\cdot\vec{\lambda}_b}\right)\right]. \end{aligned} \tag{F.24}$$

As integrações gaussianas produzem

$$
\begin{aligned}
I^{ij}_{(v,y)(w,z)} &= \frac{\pi^3}{\alpha_a^2}\frac{\pi^3}{\alpha_b^2}\left\{\left(\frac{c_{y\rho}-c_{v\rho}}{c_{v\rho}}\right)\left[\frac{\partial}{\partial k^i}e^{\frac{-(c_{v\rho}\vec{k})^2}{4\alpha_a^2}}\right]e^{\left(\frac{-(c_{v\lambda}\vec{k})^2}{4\alpha_a^2}\right)}+\right.\\
&\left.+\left(\frac{c_{y\lambda}-c_{v\lambda}}{c_{v\lambda}}\right)e^{\left(\frac{-(c_{v\rho}\vec{k})^2}{4\alpha_a^2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial k^i}e^{\frac{-(c_{v\lambda}\vec{k})^2}{4\alpha_a^2}}\right)\right\}\\
&\times\left\{\left(\frac{c_{z\rho}-c_{w\rho}}{c_{w\rho}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial k^j}e^{\frac{-(c_{w\rho}\vec{k})^2}{4\alpha_b^2}}\right)e^{\left(\frac{-(c_{w\lambda}\vec{k})^2}{4\alpha_b^2}\right)}+\right.\\
&\left.+\left(\frac{c_{z\lambda}-c_{w\lambda}}{c_{w\lambda}}\right)e^{\left(\frac{-(c_{w\rho}\vec{k})^2}{4\alpha_b^2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial k^j}e^{\frac{-(c_{w\lambda}\vec{k})^2}{4\alpha_b^2}}\right)\right\}. \qquad \text{(F.25)}
\end{aligned}
$$

Aplicando as derivadas, obtemos

$$
\begin{aligned}
I^{ij}_{(v,y)(w,z)} &= \frac{\pi^3}{\alpha_a^2}\frac{\pi^3}{\alpha_b^2}\frac{k^i}{2\alpha_a^2}\left\{(c_{y\rho}-c_{v\rho})\,c_{v\rho}\exp\left(-\frac{\vec{k}^2}{4\alpha_a^2}\left(c_{v\rho}^2+c_{v\lambda}^2\right)\right)+\right.\\
&\left.+(c_{y\lambda}-c_{v\lambda})\,c_{v\lambda}\exp\left(-\frac{\vec{k}^2}{4\alpha_a^2}\left(c_{v\rho}^2+c_{v\lambda}^2\right)\right)\right\}\\
&\times\frac{k^j}{2\alpha_b^2}\left\{(c_{z\rho}-c_{w\rho})\,c_{w\rho}\left(\exp\frac{-\vec{k}^2}{4\alpha_b^2}\left(c_{w\rho}^2+c_{w\lambda}^2\right)\right)+\right.\\
&\left.+(c_{z\lambda}-c_{w\lambda})\,c_{w\lambda}\exp\left(\frac{-\vec{k}}{4\alpha_b^2}\left(c_{w\rho}^2+c_{w\lambda}^2\right)\right)\right\}. \qquad \text{(F.26)}
\end{aligned}
$$

Colocando as exponenciais em evidência

$$
\begin{aligned}
I^{ij}_{(v,y),(w,z)} &= \frac{\pi^3}{\alpha_a^2}\frac{\pi^3}{\alpha_b^2}\frac{k^i}{2\alpha_a^2}e^{-\frac{\vec{k}^2}{4\alpha_a^2}\left(c_{v\rho}^2+c_{v\lambda}^2\right)}\left[(c_{y\rho}-c_{v\rho})\,c_{v\rho}+(c_{y\lambda}-c_{v\lambda})\,c_{v\lambda}\right]\\
&\times\frac{k^j}{2\alpha_b^2}e^{\frac{-\vec{k}^2}{4\alpha_b^2}\left(c_{w\rho}^2+c_{w\lambda}^2\right)}\left[(c_{z\rho}-c_{w\rho})\,c_{w\rho}+(c_{z\lambda}-c_{w\lambda})\,c_{w\lambda}\right] \qquad \text{(F.27)}
\end{aligned}
$$

e usando as equações (F.2) e (F.3), chegamos a

$$
I^{ij}_{(v,y),(w,z)} = \frac{\pi^3}{\alpha_a^2}\frac{\pi^3}{\alpha_b^2}\frac{k^i}{2\alpha_a^2}\frac{k^j}{2\alpha_b^2}e^{\left[-\vec{k}^2\left(\frac{1}{\alpha_a^2}-\frac{1}{\alpha_b^2}\right)\right]}. \qquad \text{(F.28)}
$$

Apêndice G

Referências

[**Alf+73**] V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan, C. Rosseti, *Currents in Hadron Physics*, North-Holland Publ. Co. (1973).

[**Bal+94**] J. L. Ballot e M. R. Robilotta, *J. Phys.* G20:1599-1613, (1994).

[**Bat 94**] O.L. Batistel, *Fenomenologia hadrônica no modelo de Skyrme*, Tese de doutoramento apresentada no Instituto de Física da USP, (1994).

[**Bha 88**] R. K. Bhaduri, *Lecture Notes and Supplements in Phys.*, vol 22, J.D. Jackson and D. Pines Editors, Addison-Wesley Publ. Co. Inc., (1988).

[**BZ 74**] S. Blatnik e N. Zovko, *Acta Phys. Austriaca* 39:62, (1974).

[**Coh 86**] T. D. Cohen, *Phys. Rev.* D34:2187, (1986).

[**Com 73**] E. D. Commins, *Weak Interactions*, ed. McGraw-Hill, Inc., NY, (1973).

[**Dal 65**] R. H. Dalitz, *Les Houches Lectures*, Gordon and Breach Science Publ. Inc.,NY (1965).

[**deRaf+93**] J. Bijnens, Ch. Bruno and E. de Rafael, *Nucl. Phys.* B390:501 (1993); D. Espriu, E. de Rafael and J. Taron, *Nucl. Phys.* B345:22 (1990); B355:278(E) (1990).

[**DV 80**] C. A. Domingues e B. J. Verwest, *Phys. Lett B* 89: 333, (1980).

[**Eic+78**] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane e T. M. Yan, *Phys. Rev.* D17:3090 (1978).

[**Eic+80**]E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane e T. M. Yan, *Phys. Rev.* D21:203 (1980).

[**Fai+68**] D. Faiman e A. W. Hendry, *Phys. Rev.* 1273:1720, (1968).

[**Fas+83**] A. Faessler and F. Fernandez, *Phys. Lett.* 124B:145 , (1983).

[**Gas+69**] S. Gasiorowicz, D. A. Geffen,*Rev. of Mod. Phys.* 3:531, (1969).

[**Geo+84**] A. Manohar e H. Georgi, *Nucl. Phys.* B234:189, (1984).

[**Gir 71**] M.D. Girardeau, *Phys. Rev. Lett.* 27:1416, (1971); *J. Math. Phys.*, 16:1901 (1975).

[**Gir+89**] J. C. Straton and M. D. Girardeau, *Phys. Rev.* A40:2991, (1989).

[**Gol+82**] R. Goldflam e L. Wilets, *Phys. Rev.* D25:1951, (1982).

[**Gock 91**] A. Gocksch, *Phys. Rev. Lett.* 67:1701 (1991).

[**Goe+88**] P. Alberto, E. Ruiz Arriola, M. Fiolhais, F. Grümmer, J. N. Urbano e K. Goeke, *Phys. Lett.* B208:75, (1988).

[**Gra 94**] I. S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, A. Jeffrey Editor, Academic Press, Inc. 5ª edição, (1994).

[**Gri 87**] D. Griffiths, *Introd. to Elementary Particles*, ed. John Wiley & Sons, NY, (1987).

[**Gro+90**] F. Gross, J. W. Van Orden e K. Holinde, *Phys. Rev.* C41:R1909, (1990).

[**GT 36**] G. Gamow and E. Teller, *Phys. Rev.* 49:895, (1936).

[**Gun+75**] J. F. Gunnion e L. F. Li, *Phys. Rev.* D12:3583, (1975).

[**Had 95**] D. Hadjimichef,*Formalismo de Fock-Tani para a física hadrônica.* Tese de doutoramento apresentada no Instituto de Física Teórica da UNESP. (1995).

[**Had+96**] D. Hadjimichef, G. Krein, S. Szpigel e J.S. da Veiga, *Phys. Lett.* B367:317, (1996).

[**Hoh+76**] G. Höhler et al, *Nucl. Phys.* B114:505 (1976).

[**Hol 84**] K. Holinde, *Nucl. Phys.* A415:477-496, (1984).

[**Hol+93**] G. Q. Liu, M. Swift, A. W. Thomas e K. Holinde, *Nucl Phys.* A 556:331-354, (1993).

[**Isg+77**] N. Isgur and G. Karl, *Phys Lett* 72:109-113, (1977).

[**Isg +78**] N. Isgur and G. Karl, *Phys. Rev.* D19:2653, (1978).

[**Isg +79**] N. Isgur and G. Karl, *Phys. Rev.* D20:1191, (1979).

[**Jaf 88**] R.L. Jaffe, *Nucl. Phys.* A478:3, (1988).

[**Joh 75**] K. Johnson, *Acta Phys. Polonica* B6:865, (1975).

[**Kab+81**] M. Kaburagi, M. Kawaguchi, T. Morii, T. Kitazoe e J. Morishita, *Z. Phys.* C9:213, (1981).

[**Kre+96**] D. Hadjimichef, G. Krein, S. Szpigel, J. S. da Veiga, *Phys. Lett.* B367:317, (1996).

[**La+75**] M. Lacombe, B. Loiseau, J.M. Richard, R. Vinh Mau, P. Pires and R. de Tourreil,*Phys. Rev.* D12:1495, (1975).

[**Lee 72**] B. W. Lee, *Chiral Dynamics: Documents on Modern Physics*, Gordon and Breach, Science Publishers Inc., (1972).

[**Lib 77**] D. A. Liberman, *Phys. Rev.* D16:1542, (1977).

[**LY 58**] C.N. Yang, *Science* 127:565-568, (1958); T.D. Lee, *Science* 127:569- 573, (1958).

[**Mac 85**] R. Machleidt, *Lectures presented at the Workshop on Relativistic Dynamics and Quark-Nucleon Physics*, Los Alamos, (1985).

[**Mac+87**] R. Machleidt, K. Holinde and C. Elster,*Phys. Rep.* 149:1, (1987).

[**Mar+78**] W. Marciano and H. Pagels, *Phys. Rep.* 36:137, (1978).

[**Mar 80**] A. Martin, *Phys. Lett.* B93:338, (1980).

[**Mei+87**] N. Kaiser, U. G. Meissner e W. Weise, *Phys. Lett.*, B198:319, (1987).

[**Mil+81**] G.A. Miller, A. W. Thomas e S. Theberge, *Phys. Rev.*, D24:752, (1981).

[**Mut 87**] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Sci. Lect. Not. in Phys., Vol. 5, W.S., Singapore, (1987).

[**Qui+77**] C. Quigg e J. L. Rosner, *Phys. Lett.* B71:153, (1977).

[**Rei 68**] R.V. Reid, *Ann. Phys.* (NY)50:411, (1968).

[**Rho+79**] G. E. Brown e M. Rho, *Phys. Lett.*, B82:177, (1979).

[**Rib 80**] J.E.T.F. Ribeiro, *Z. Phys. C* 5:27, (1980).

[**Ris+75**] A.D.R. Jackson, D.O. Riska e B. Verwest, *Nucl. Phys.*, A249:397, (1975).

[**Roc 93**] C. A. Rocha, *Potencial núcleon-núcleon devido à troca de dois píons: o papel da simetria quiral.* Tese de doutoramento apresentada no Instituto de Física da USP, (1993).

[**Rob 87**] M. R. Robilotta. *Notas de aula da III Escola de Verão Jorge André Swieca*, Petrópolis, (1987).

[**Rob 89**] M. R. Robilotta,*Apostila do curso de Física de Hádrons II*, IFUSP, (1989).

[**Rom69**] P. Roman,*Introduction to Quantum Field Theory*, John Wiley and Sons, Inc., (1969).

[**Rot 92**] H. J. Roth, *Lattice Gauge Theories, an Introduction*, World Sci. lec. Not. in Phys., Vol 43, W.S., Singapore, (1992).

[**Shi 89**] K. Shimizu, *Rep. Prog. Phys.* 52:1-56, (1989).

[**Swa+92**] E. S. Swanson e T.Barnes, *Phys. Rev. D* 46:131-159, (1992).

[**Swa+93**] E. S. Swanson, S. Capstick, M. D. Kovarik e T.Barnes, *Phys. Rev. C* 48:539-552, (1993).

[**Szp 96**] S. Szpigel, *Interação méson-méson no formalismo de Fock-Tani.* Tese de doutoramento apresentada no Instituto de Física da USP, (1996)

[**Tak+51**] M. Taketani, S. Machida e S. Onuma, *Prog. Theor. Phys.* 6:581, (1951).

[**Tar 81**] C. De Tar, *Phys. Rev.* D24:752, (1981).

[**Tör+95**] N. A. Törnqvist, M. Roos, *preprint hep-ph/9511210* (1995).

[**Tou+75**] R. de Tourreil, B. Rouben e D.W.Z. Sprung, *Nucl. Phys.* A242:445, (1975).

[**Tsu+93**] S. N. Mukherjee, R. Nag, S. Sanyal, T. Morii, J. Norishita e M. Tsuge, *Phys. Rep.* 231:201, (1993).

[**Weis+82**] R.Tegen, R. Brockmann e W. Weise, *Z. Phys. A* 307:339-350, (1982).

[**Wei 66**] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 16:879, (1966).

[**Wei 67**] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 18:188, (1967).

[**Wei 68**] S. Weinberg, *Phys. Rev.* 166:1568, (1968).

[**Wei 79**] S. Weinberg. *Physica* 96A:327, (1979).

[**Wei 90**] S. Weinberg, *Phys. Lett.* B 251:288 (1990);

[**Wei 91**] S. Weinberg, *Nucl. Phys.* B 363:3 (1991).

[**Wil 71**] W. S. C. Williams, *An Introduction to Elementary Particles*, Pure and Applied Phys., Vol 12, Ed.: H. S. W. Massey and K. A. Brueckner, Academic Press, NY and London, (1971).

[**Wil+94**] L. Wilets and W. Koepf, *Phys Rev.* C50:614, (1994).

[**Wu+ 57**] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes and R.P. Hudson, *Phys. Rev.* 105:1413, (1957).

[**Yaz+79**] M. Oka e K. Yazaki, *Phys. Lett.* 92b:41-44, (1979).

[**Yaz+81**] M. Oka e K. Yazaki, *Prog. of Theor. Phys.*, 66:556-587, (1981).

[**Yaz+83**] M. Oka e K. Yazaki, *Nucl. Phys.* A402:477-490, (1983).

[**Yaz+89**] S. Takeuchi. K. Shimizu e K Yazaki, *Nucl. Phys.* A504:777-796, (1989).

[**Yuk 35**] H. Yukawa, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.* 17:48, (1935).