

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

Carvalho
M. C. Gomes
Gomes,

O ESPALHAMENTO NUCLEON-NUCLEON EM ENERGIAS INTERMEDIARIAS:
O PAPEL DO PION.

ORILDO LUIS BATTISTEL



Dissertação de mestrado
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

Data de Defesa 18/12/89

ORIENTADOR: Prof. Dr. MANOEL ROBERTO ROBILOTTA

SÃO PAULO

1989

SBI-IFUSP



305M810T1621

539.721

B336e

M

e.2

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Battistel, Orildo Luis

O espalhamento núcleon-núcleon em energias intermediárias: o papel do píon. São Paulo, 1989.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Experimental.

Área de Concentração: Física de Partículas Elementares

Orientador: Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta

Unitermos: 1.Píon; 2.OPEP, 3.Espalhamento núcleon-núcleon; 4.Potencial NN; 5.Potencial tensor.

USP/IF/SBI - 62/89

✓
{
Ao Alcides e à Irma
pela vida, pela família
e pelo amor.

À Damaris, ao Grégori
e ao Andrei.

AGRADECIMENTOS.

Ao Mané, pelo zelo e extrema dedicação durante estes três anos de orientação; pela amizade, pela física e pelas experiências transmitidas.

À melhor amiga Hatsumi, pela ajuda decisiva para a conclusão do trabalho, pela paciência e pelo carinho nestes tempos difíceis.

Aos grandes amigos Munir, Orimar, Carocha, Cecil, Mônica e todos os demais, pelas horas roubadas do seu convívio, pela amizade, discussão e colaboração que cada um prestou.

À Claudia e a Ellen pelo apoio nas questões burocráticas; à Lia e à Iracema pelos serviços sempre prestativos na secretaria.

Ao CNPq e à FAPESP pelo apoio financeiro.

À todos aqueles que foram meus professores, desde o primário, pela colaboração na minha formação, como profissional e como ser humano.

RESUMO.

A interação núcleon-núcleon é estudada por meio de um potencial semifenomenológico, composto de uma parte externa teórica, devida à troca de um pión, e uma parte interna, parametrizada de modo a reproduzir dados experimentais. São calculadas as funções de onda e as defasagens para o espalhamento NN as energias menores que 300 MeV. As soluções obtidas a partir da equação de Schrödinger são comparadas aos vários termos da série de Born, de modo a permitir a avaliação da influência da energia e do momento angular orbital sobre a sua convergência.

A componente do potencial devida à troca de um pión é separada, de modo que sua influência no espalhamento possa ser determinada. Como esperado, o pión é relativamente pouco importante em processos em onda S. Quando o momento angular é não nulo, a influência do pión é maior a energias mais baixas. Finalmente, a aproximação de Born descreve bem a contribuição do pión ao espalhamento.

ABSTRACT.

The nucleon-nucleon interaction is studied by means of a semiphenomenological potential, composed by a theoretical external part, due to one pion exchange, and an internal part, parametrized as to reproduce experimental data. The wave functions and phase shifts for energies below 300 MeV are calculated. Solutions of the Schrödinger equation are compared to the various terms of the Born series, so as to allow an assessment of the influence of both energy and angular momentum over its convergence. The component of the potential due to one pion exchange is separated so as to allow its influence over the scattering to be estimated. As expected, the pion is relatively less important in S wave processes. When the angular momentum is not zero, the pion influence is larger at low energies. Finally, the Born approximation produces a good description of the pion contribution to the scattering.

INDICE.

Pág.

INTRODUÇÃO.....	01
CAPITULO 1. A INTERAÇÃO NÚCLEON-NÚCLEON.....	16
1-I. Aspectos Qualitativos.....	16
1-II. O Potencial NN.....	19
1-II.a. A Estrutura Geral do Potencial NN.....	19
1-II.b. O OPEP.....	23
1-II.c. O Potencial SSCC.....	27
CAPITULO 2. TEORIA DE ESPALHAMENTO.....	32
2-I. A Equação de Schrödinger.....	32
2-II. A Função de Onda Assintótica.....	34
2-III. A Normalização.....	37
2-IV. A Forma Geral da Função de Onda.....	39
2-V. A Equação de Movimento.....	42
2-VI. A Função de Green.....	49
2-VII. A Série de Born.....	54
CAPITULO 3. ESPALHAMENTO NN.....	57
3-I. Estados de um sistema NN.....	57
3-II. As Equações radiais.....	60
3-III. O Dêuteron.....	62
CAPITULO 4. ESTUDO NUMÉRICO / RESULTADOS.....	66
4-I. O Estado 1S_0	67
4-II. O Estado $^3S_1 + ^3D_1$	73
4-III. O Estado 3P_1	78
4-IV. O Estado 3G_4	80
4-V. Conclusões.....	82
APÊNDICE A. AS FUNÇÕES DE BESSEL.....	84

APÊNDICE B. ATUAÇÃO DOS OPERADORES DO POTENCIAL SSCC.....86

REFERÊNCIAS.....89

INTRODUÇÃO

O estudo das interações nucleares se iniciou de fato em 1932, quando da descoberta do nêutron por Chadwick, apesar do próton e do próprio núcleo já serem conhecidos a partir dos trabalhos de Rutherford em 1911 e 1914. Naquele momento tomava-se contato com um dos problemas mais intrigantes da história da ciência: a força nuclear.

A primeira questão a ser levantada já significou uma ruptura no conhecimento até então disponível sobre os tipos de forças da natureza. A interação nuclear não poderia ser de origem eletromagnética, nem tampouco gravitacional, pois o núcleo é um sistema coeso formado por partículas positivas ou neutras com massas relativamente pequenas. Assim, a explicação desta coesão requer a introdução de um tipo novo de força.

Estudos posteriores mostraram que a energia de ligação por partícula de um núcleo inicialmente cresce com o aumento do número atômico; entretanto, isso deixa de acontecer à medida em que o número de partículas do núcleo vai-se tornando maior, indicando uma saturação. Isto mostra que uma partícula nuclear não interage com todas as outras presentes, mas somente com aquelas mais próximas. Dessa forma a força nuclear não tem longo alcance, como as outras já conhecidas.

Atualmente é fato bem estabelecido que a força nuclear é independente de carga e tem curto alcance. Do ponto de vista teórico, o modelo de maior sucesso é aquele que deriva a força nuclear a partir da troca de mésons entre as partículas do núcleo. Esse modelo não só explica as características qualitativas da interação, mas também proporciona resultados bastante satisfatórios. O presente trabalho se desenvolve no contexto desse modelo.

Historicamente o passo inicial da construção do modelo foi dado por Yukawa, em 1935. Ele sugeriu que uma partícula com massa intermediária entre a massa do próton e do elétron (por isso

chamada "méson") seria a responsável pela força nuclear. Ele derivou, a partir da teoria de campos, o potencial, que hoje leva o seu nome e é dado por;

$$\Phi(r) = \frac{ge^{-\mu r}}{4\pi r}$$

O qual proporciona uma elegante relação entre o alcance da interação e a massa da partícula trocada, incorporando teóricamente o alcance finito da força.

Em 1947/1948 o pión, com a massa prevista por Yukawa, foi encontrado por Ochiellini, Lattes e Powel, o que aumentou muito o interesse na idéia de troca de mésons.

Desse interesse resultaram importantes contribuições, como a dos físicos japoneses: Taketani, Nakamura e Sasaki, que propuseram dividir o alcance da força nuclear em três regiões distintas. Segundo eles, essas três regiões seriam:

I) Região Clássica ou de longo alcance - $r \geq 2fm$ - onde r é a distância entre o centro das duas partículas nucleares. Nesta região a troca de um pión seria predominante já que este é o méson mais leve.

II) Região Dinâmica ou de alcance intermediário - $1fm \leq r \leq 2fm$. Esta é a região em que seriam mais importantes as trocas de mais de um méson. Atualmente sabe-se que nessa região são predominantes as trocas de dois pions e mésons mais pesados como ρ e ω .

III) Região fenomenológica ou de curto alcance - $r \leq 1fm$. Esta região foi tratada tradicionalmente pela inclusão de um caroço, mais ou menos duro dependendo do modelo. Hoje sabe-se que nesta região muitos processos podem contribuir, tanto múltiplas trocas de pions e mésons pesados como interações entre quarks e gluons, que determinam a estrutura interna das partículas.

Até a década de 40, entretanto, não existia uma dinâmica que fornecesse um corpo à teoria, e que permitisse a descrição qualitativa dos vários processos. Essa dinâmica surgiu em torno do início da década de 50, com o desenvolvimento da

eletrodinâmica Quântica (QED), em cujo contexto se inseriam os diagramas de Feynman como linguagem apropriada e na qual o fóton era o mediador das interações eletromagnéticas.

A QED serviu, e ainda serve, como fonte de analogia para o estudo das interações núcleon-núcleon (nome comum dado ao próton e ao nêutron no formalismo de isospin desenvolvido por Heisenberg). Por exemplo, na QED, espalhamento entre duas partículas carregadas pode ser representado da seguinte forma:

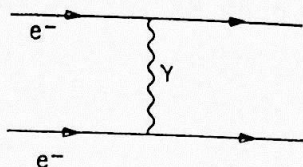


Figura 1. Diagrama de Feynman para o espalhamento de duas partículas carregadas.

Nesse gráfico as retas representam as partículas e a linha ondulada o fóton. Esse diagrama pode ser pensado como a absorção por parte de uma partícula de um fóton virtual emitido pela outra. Além de muito ilustrativa, a linguagem é precisa, já que essa interação corresponde a um potencial coulombiano, como requerido pela teoria eletromagnética.

Em analogia com a QED, a interação núcleon-núcleon pode ser representado por diagramas semelhantes, como o seguinte:

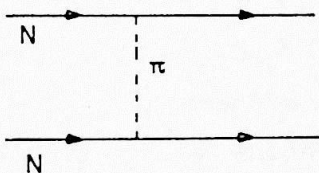


Figura 2. Diagrama de Feynman representando a troca de um pión entre dois nucleons.

O cálculo deste diagrama, mediado por uma partícula massiva leva, como se espera, a um potencial tipo Yukawa, cujo alcance é dado pela massa do pión.

Na década de 50 foi feito um grande esforço para se estender esse tipo de abordagem ao caso de trocas de mais de um pión, mas o sucesso não se repetiu imediatamente, devido a

problemas estruturais, que foram contornados por meio da simetria quiral e relações de dispersão.

Até a metade da década de 50 havia uma superposição muito grande entre as físicas nuclear e de partículas. A partir desta época, essas duas áreas passaram a se diferenciar bastante, tanto no que diz respeito ao conteúdo estudado como nos métodos teóricos empregados. Isso não quer dizer, entretanto, que esta separação seja total, pois o conhecimento do comportamento e interação das partículas é relevante para a compreensão de como elas se aglomeram em núcleos atômicos.

Um dos desenvolvimentos da física de partículas de maior relevância para o estudo dos núcleos teve início na década de 60, quando entraram em funcionamento os aceleradores de grande porte o que contribuiu muito para aumentar o número de partículas já conhecidas. Essa proliferação foi muito rápida e, em 1964 já se conheciam três famílias de partículas: A primeira família, era a do fóton, que só apresentava interações eletromagnética. A segunda família, englobava os léptons, e dela faziam parte o elétron, o muon e os respectivos neutrinos, era caracterizada pela presença de interações fracas e eletromagnética. A terceira família era constituída pelos hádrons, ou seja, partículas que tem todos os tipos de interações (forte, fraca e eletromagnética). Esta última família contém bárions, com spin semi-inteiro (férmions), como o próton, o nêutron e o lambda, e mésons com spin inteiro (bósons), tais como o pión e o ρ .

A descoberta de muitos hádrons novos tornou urgente a necessidade de se encontrar um critério para os ordenar. Algumas tentativas nesse sentido já haviam sido feitas anteriormente, como quando em 1949, Fermi e Yang propuseram que os píons fossem estados ligados de próton, antipróton, nêutron e antinêutron. Ainda em 1956 Sakata apresentou um modelo onde o próton, o nêutron e o lambda seriam partículas elementares, das quais os outros hádrons seriam compostos. Este modelo teve alguns sucessos, mas falhava ao tentar explicar alguns multipletos de isospin. No entanto, sua estrutura

matemática, a do grupo SU(3), seria aproveitada em 1961 por M. Gell-Man e Y. Ne'eman para compor o modelo que viria a ser o ponto de partida para a moderna teoria dos hádrons.

Em 1964 M. Gell-Mann e G. Zweig apresentam trabalhos propondo a possibilidade de os hádrons serem compostos por novas partículas, os quarks, que seriam em número de três, além de suas antipartículas. Segundo este modelo os mésons seriam compostos de um quark e um antiquark e os bárions de três quarks. Este modelo representou uma ruptura bastante drástica com os conceitos da época, pois previa a existência de cargas elétricas fracionárias, que nunca haviam sido observadas, e a sua aceitação plena só veio a ocorrer quando evidências empíricas foram produzidas. Em experiências realizadas em 1968 em Stanford e em 1970 no CERN, elétrons bastante energéticos (20 GeV) foram atirados sobre prótons resultando em violentas colisões, compatíveis com a existência de cargas puntiformes $q = \frac{1}{3}$ e $q = \frac{2}{3}$ em seu interior. Até o presente não foram descobertos quarks livres, pois, por razões ainda inexplicadas, sistemas compostos por essas partículas não ionizam.

Da tentativa de explicar as interações fortes entre os quarks surgiu a teoria hoje conhecida por Cromodinâmica Quântica (QCD), que descreve tal interação pela troca de 8 gluons entre eles. Até hoje não se conseguiu mostrar que a QCD é capaz de explicar por que ocorre o confinamento no interior dos hádrons, e a liberdade assintótica, fenômeno segundo o qual a força entre os quarks diminui quando a distância entre eles torna-se menor. Apesar disso, acredita-se amplamente que a QCD seja a teoria fundamental das interações fortes e, por isso, deveria, em princípio, ser capaz de explicar a interação núcleon-núcleon através da dinâmica quark-gluon. No entanto isto ainda está longe de ser possível, pois o caráter não perturbativo da QCD no regime de baixas energias, torna impossível o tratamento matemático desse problema.

No caso da física nuclear, o problema da

intratabilidade da QCD tem sido contornado pela introdução de modelos nela inspirados, tais como os de sacolas e o de potenciais entre quarks. Estes modelos, que de certa forma pretendem simular a QCD, introduzem forças confinantes que reproduzem razoavelmente bem as propriedades estáticas dos bárions, mas não descrevem de modo preciso a interação núcleon-núcleon.

Esse estágio de desenvolvimento da QCD faz com que no presente e num futuro próximo os únicos modelos quantitativos da interação NN sejam aqueles baseados nas trocas de mésons, e respaldados pela simetria quiral. Atualmente, os potenciais NN mais modernos são os desenvolvidos pelos grupos de Paris e de Bonn e que conseguem reproduzir de modo preciso as propriedades do dêuteron e milhares de dados para as defasagens do espalhamento NN em energias até 300 mev.

A história dos potenciais NN é paralela ao desenvolvimento da teoria mesônica e, por isso, suas características estão intimamente ligadas ao estágio da teoria no momento em que foram gerados. Dessa forma os potenciais podem ser divididos em três gerações, segundo suas características de precisão, solidez de sua base teórica e conteúdo dinâmico. A primeira geração de potenciais, desenvolvidos na década de 50, eram puramente fenomenológicos, sem vínculos teóricos além daqueles provenientes das simetrias de paridade, rotação nos espaços de configuração, spin e isospin; eram bastante imprecisos e reproduziam mal as propriedades do dêuteron.

Os potenciais da segunda geração, desenvolvidos na década de 60, onde se destacam os de Hamada-Johnston⁽¹⁾, Yale⁽²⁾ e Reid⁽³⁾, trouxeram um importante avanço teórico, já que a sua parte de longo alcance foi tomada como sendo devida à troca de um pión, usualmente chamada de OPEP (One Pion Exchange Potential). Nesses potenciais, as partes de médio e curto alcance eram parametrizadas. Essa abordagem permitiu a redução do número de parâmetros ajustados fenomenologicamente e o aumento da precisão. Esquemáticamente, temos:

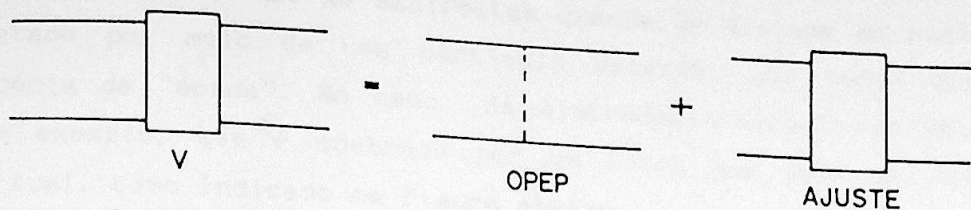


Figura 3. Contribuição do OPEP ao potencial NN.

A terceira geração de potenciais, desenvolvidos a partir da década de 70, compreende principalmente os trabalhos dos grupos de Bonn e Paris. Eles incluem, além do OPEP, contribuições de trocas de mésons mais pesados e também uma descrição detalhada da troca de dois píons. Estes potenciais são bastante precisos e contém relativamente poucos parâmetros livres para serem ajustados fenomenologicamente. Deste modo, podemos dizer que os potenciais desta geração são teóricos até a distância de 1fm, enquanto os da segunda geração o são até 2fm. Nestes potenciais foram calculadas as contribuições de diagramas do seguinte tipo:

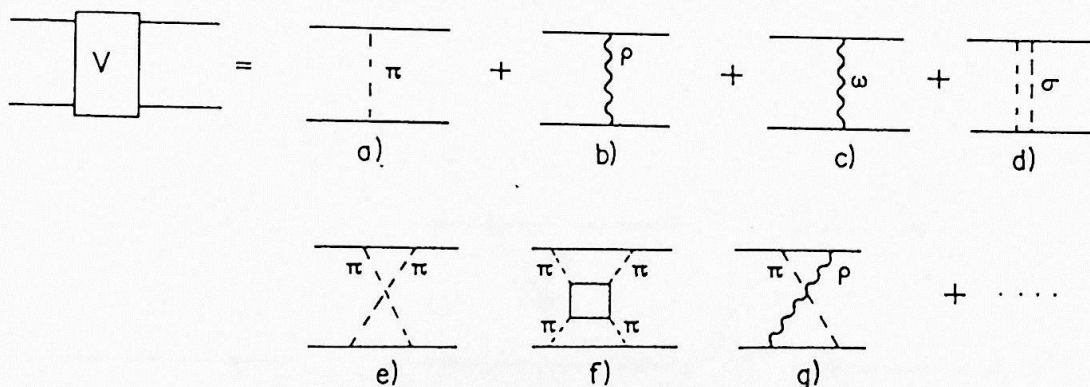


Figura 4. Conteúdo dinâmico dos modernos potenciais.

O modelo de trocas de mésons obteve sucesso quantitativo na descrição do dêuteron e do espalhamento NN. Além disso, ele mostrou-se importante como fonte de inspiração para a compreensão de outros fenômenos mais complexos, tais como as

correntes mesônicas de troca (MEC meson exchange currents)

As MEC se manifestam quando um sistema de nucleons é testado por meio de uma partícula externa, que serve como uma espécie de "sonda". No caso da eletrodesintegração do dêuteron, por exemplo, ele é quebrado por um fóton que pode ser real ou virtual, como indicado na figura abaixo:

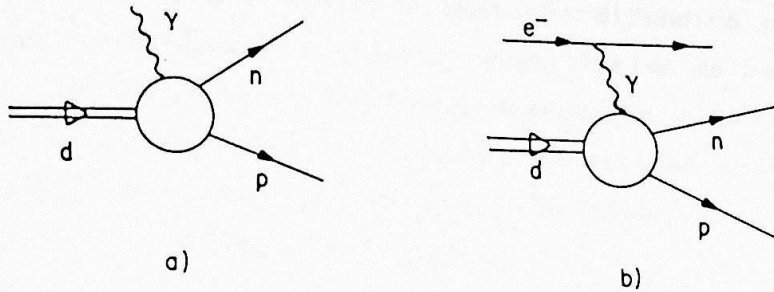


Figura 5. Eletrodesintegração do dêuteron por: a) fótons reais e b) fótons virtuais

A idéia das MEC é que o dêuteron, por ser um estado ligado nêutron-próton trocando mésons, pode ser quebrado quando o fóton atinge um dos nucleons, um méson em voo ou o vértice da interação, como ilustrado na figura 6:

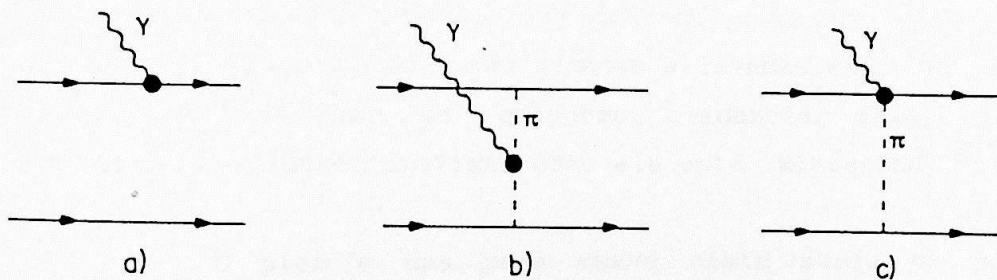


Figura 6. Interação eletromagnética de um sistema de dois nucleons.

O diagrama da figura a) é uma interação de impulso e as figuras b) e c) representam correntes de troca piônicas. Portanto, a importância das MEC e, de certa forma, a própria

presença dos mésons em sistemas nucleônicos, podem ser avaliadas pela relevância ou não da inclusão dos diagramas b) e c) no cálculo da secção de choque total de desintegração do dêuteron. O que se verificou de fato⁽⁴⁾ é que um acordo satisfatório com a experiência somente pode ser obtido quando a contribuição das correntes de troca mesônicas é incluída.

A teoria mesônica constitui, por tudo que foi mencionado, instrumento privilegiado para o estudo da física de poucos corpos. Ela é aceita e bastante difundida por que de fato funciona, permitindo o tratamento quantitativo de muitos problemas. É neste contexto teórico que se desenvolve o presente trabalho. Estamos particularmente interessados em estudar o papel do pión na interação NN, investigando seu comportamento em determinadas situações envolvendo poucos nucleons.

Na linguagem de troca de mésons, como vimos anteriormente, as amplitudes de espalhamento são calculadas por meio de diagramas de Feynman, determinados pela teoria quântica de campos. Por outro lado, em física nuclear é conveniente o uso da equação de Schrödinger, onde as interações são representadas por potenciais. Estes dois modos de se abordar o problema tornam importante a tradução das duas linguagens.

No modo usual de se tratar a interação NN, o conteúdo dinâmico explícito da interação é perdido no processo de tradução, já que contribuições isoladas são somadas e levadas em conta todas de uma só vez. Por isso, se quisermos evidenciar alguma dessas contribuições precisamos analisar como ela está misturada com as demais.

O pión é uma peça chave neste mundo de poucos corpos. Dada a sua correspondência com a parte de longo alcance do potencial, ele está intimamente relacionado com as propriedades de núcleos leves que, como sabemos, são fracamente ligados. No dêuteron, por exemplo, dois observáveis denominados externos, o momento de quadrupolo Q e a razão assintótica das normalizações das ondas S e D, algumas vezes chamado η , são quase que exclusivamente

devidos a presença desse méson^(5,6)

Em 1957, Moravcsik sugeriu que todas as defasagens para ondas parciais com L maiores do que um certo L_{\max} , poderiam ser obtidas a partir do OPEP, por ele denominado OPEC (One Pion Exchange Contribution). Por exemplo, este L_{\max} para o potencial de Reid, desenvolvido em 1968, é igual a 5, sendo as defasagens para $L \geq 6$ obtidas a partir da troca de um pión. Atualmente, como no trabalho do potencial de Bonn,⁽⁷⁾ nota-se que para $L=4$ o OPEP consegue reproduzir as defasagens com bastante precisão.

Estamos interessados em saber qual a influência da troca de um pión para ondas parciais com valores de L médios e pequenos. Para isso devemos proceder a uma separação, dentro do potencial, da contribuição deste processo, evidenciando-a e, posteriormente, estudando a sua influência.

Além da motivação meramente conceitual/especulativa para esse estudo, existem outras ligadas ao uso de simetrias em problemas de energias intermediárias como, por exemplo, na interação de um fóton com um sistema de dois nucleons. Neste caso, o fóton vai sondar a distribuição de carga do sistema, que pode estar parada ou em movimento e, por isso, tem sentido se falar em densidade de carga (ρ) e densidade de corrente (J). Na relatividade estas são reunidas numa única quadricorrente $J^\mu = (\rho, J)$ que, segundo a mecânica quântica, deve satisfazer uma equação de continuidade, já que a carga elétrica é conservada.

Quando um fóton interage com um sistema de dois nucleons cuja interação mútua é desprezada, ele pode atingir um ou outro núcleon, como representamos na figura 7. Neste caso ao calcularmos J^μ verificamos⁽⁸⁾ que uma equação de continuidade é obedecida.

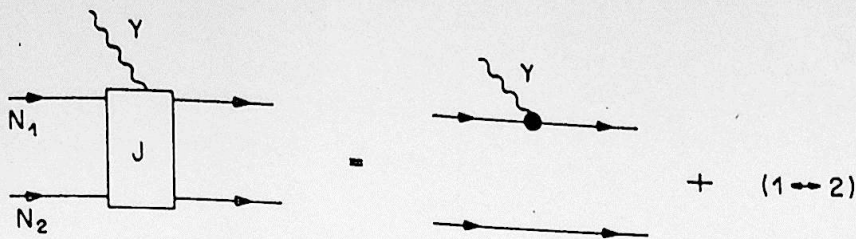


Figura 7. O fóton num sistema de dois nucleons sem interação. Ele pode atingir um outro nucleon. $(1 \leftrightarrow 2)$ significa o mesmo diagrama anterior trocando o nucleon 1 pelo 2.

A situação é diferente quando permitimos que os dois nucleons interajam, o que é equivalente a levar em conta as trocas mesônicas entre eles. Tal situação é mostrada na figura 8, onde as figuras b) e c), por exemplo, representam um fóton atingindo um núcleo em interação. O problema deste tipo de abordagem é que a divergência da amplitude obtida da soma dos diagramas a), b) e c) não é nula. Para restabelecer a invariância de gauge é preciso incluir simultaneamente os diagramas d) e f) que, como vimos, representam as correntes de troca.

Quando calculamos J^μ para os processos representados pelos diagramas b) a f), obtemos correntes que não satisfazem, separadamente, equações de continuidade. Entretanto, se levarmos em conta todos os processos juntos, isto é, se somarmos as correntes para os diagramas b), c), d) e f), acontecem cancelamentos e encontramos uma grandeza conservada. Esses cancelamentos decorrem da invariância de gauge das interações eletromagnéticas.

Este exemplo mostra que, em interações com fótons, é preciso levar em conta as famílias de diagramas que garantam a simetria. Esse tipo de argumento se aplica também aos diagramas envolvendo o ρ e nucleons. Quanto aos processos envolvendo o Δ , a situação é mais simples, pois eles são conservados separadamente.

Muitos diagramas contribuem para a interação de um fóton com um sistema de dois nucleons. Como está indicado na figura 8. Os processos representados nesta figura referem-se a nucleons livres. No caso típico da física nuclear, entretanto, esses dois nucleons estarão, ligados, como acontece, por exemplo, na

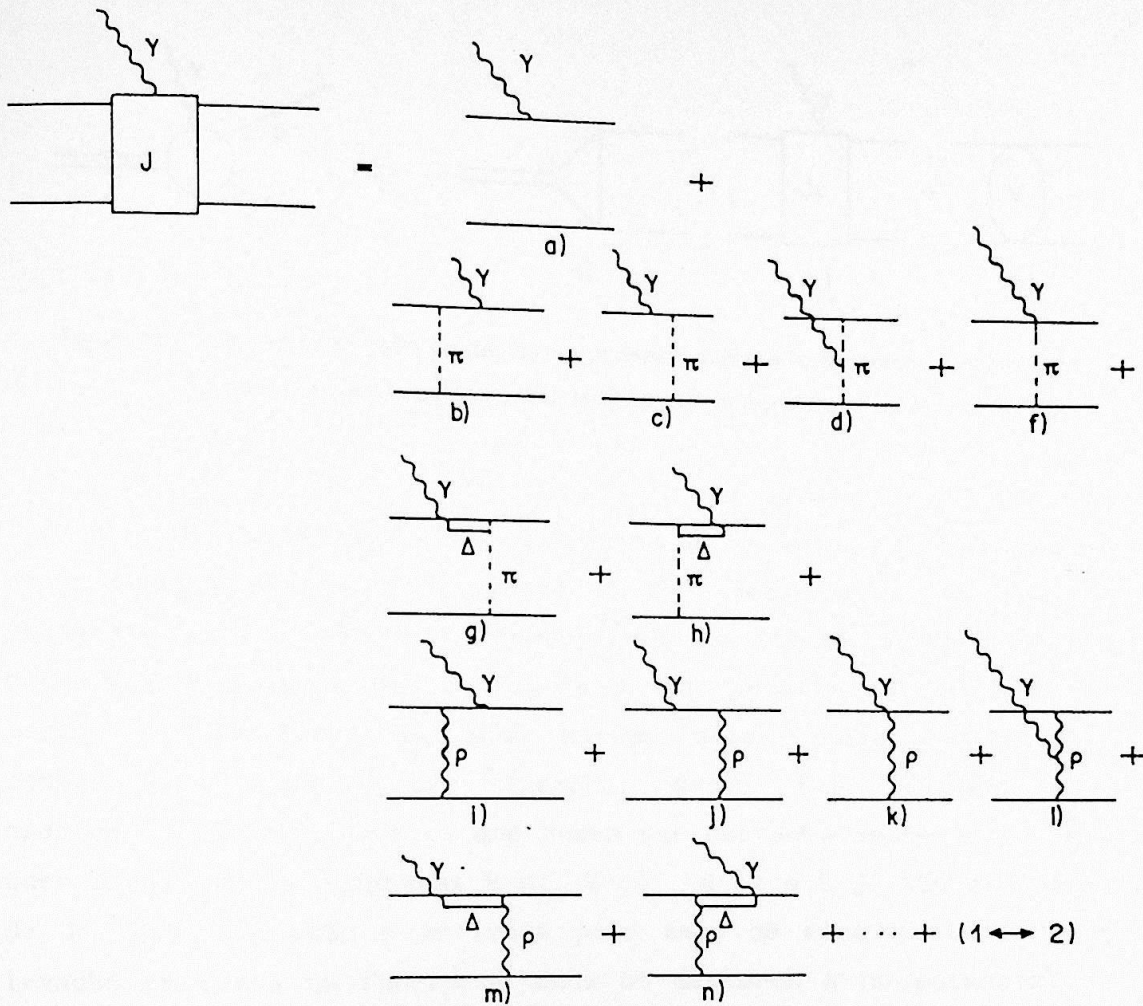


Figura 8. Interação de um fóton com um sistema de dois nucleons interagentes.

eletrodesintegração do dêuteron. Podemos representar esta situação ligando as pernas dos diagramas da figura 8, como mostramos na figura 9. Esta figura é bastante elucidativa do problema que nos interessa, pois ela mostra a necessidade de se estabelecer claramente o vínculo conceitual entre os conteúdos pionicos de J e o do potencial.

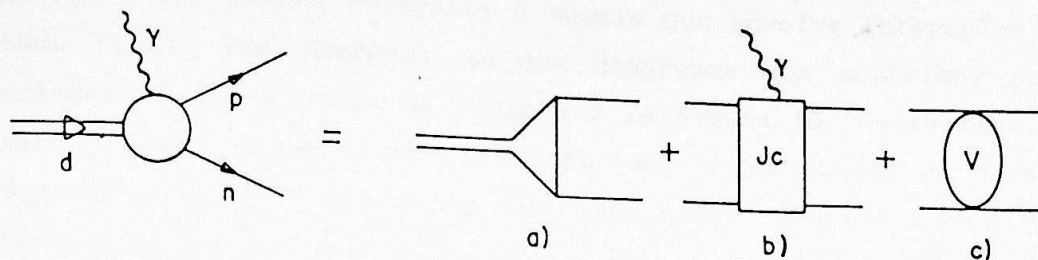


Figura 9. Eletrodesintegração do deuteron; podemos imaginar o processo dividido em três partes: a) o deuteron, b) interação eletromagnética e c) interação de estados finais.

O operador que representa a corrente eletromagnética no caso de dois nucleons ligados não é o mesmo que o do caso de nucleons livres. Assim J_c representado na figura 9 não leva em conta todos os diagramas da figura 8, mas somente aqueles que não podem ser separados cortando apenas duas linhas nucleônicas, denominados conexos, por exemplo, 8-d), 8-f) e etc... O operador J_c desconsidera os que podem ser cortados desse modo. Isso quer dizer que os diagramas 8-b), 8-c), 8-i) e 8-j) são excluídos de J_c . Esta exclusão é motivada pelo fato de eles já terem sido levados em conta na função de onda do deuteron e no potencial da interação final.

Desse modo alguns diagramas que faziam parte do vértice eletromagnético no caso de nucleons livres estarão ausentes de J_c , fazendo com que a sua divergência seja não-nula. Isso não quer dizer que a simetria de gauge do sistema como um todo seja impossível, já que os diagramas excluídos de J_c continuam presentes no potencial. Entretanto, para que a simetria seja respeitada, é

necessário que o conteúdo dinâmico de J_c seja estritamente coerente com o do potencial.

É este fato que torna muito importante o conhecimento do conteúdo dinâmico de um dado potencial NN, bem como a análise das contribuições efetivas das diversas trocas, e, em particular, do papel do pión.

Um outro problema onde uma compreensão detalhada da dinâmica NN se mostra relevante é aquele que envolve interações no estado final. Por exemplo, um dos diagramas que contribui para processos de dupla troca de carga é o da figura 10. Neste caso, o estado final é composto por três nêutrons e sua função de onda é muito complicada de se obter de modo exato. Isso faz com que informações obtidas por meio de métodos aproximados sejam muito importantes. Um dos nossos objetivos consiste em testar o uso de perturbação nesse processo.

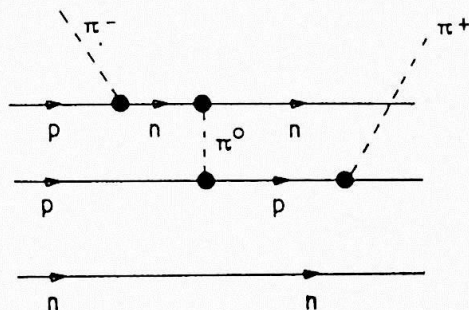


Figura 10. Diagrama que contribui a processos de dupla troca de carga.

Estudaremos o problema da interação NN comparando os resultados obtidos por meio de dois enfoques diferentes: calculando-se a solução exata via equação de Schrödinger e pela análise da convergência da série de Born.

Na medida em que a participação do pión for isolada no potencial se poderá verificar qual a sua colaboração efetiva na função de onda exata. Por outro lado, os termos da série perturbativa permitem a comparação das contribuições das repetições do processo de troca de um pión com as outras contidas no potencial.

A interação NN é composta de infinitos diagramas. Na abordagem baseada no potencial, esses infinitos diagramas são agrupados em duas categorias. Os diagramas conexos são usados para definir o potencial, enquanto que os desconexos são entendidos como as iterações desse potencial produzidas pela equação de Schrödinger.

Iniciamos o trabalho por uma descrição qualitativa da interação núcleon-núcleon que, juntamente com as considerações de simetria devem estar presentes no potencial. Faremos, em seguida, um breve estudo da teoria do espalhamento incluindo a força tensorial após o que, ele será especializado para o caso de dois nucleons, cujo tratamento requer a inclusão do espaço de isospin.

CAPITULO 1

A INTERACAO NUCLEON-NUCLEON

1-I) Aspectos Qualitativos.

Fenômenos envolvendo somente dois nucleons tem papel de destaque na física nuclear. Em 1953 Bethe⁽⁹⁾ estimou que, no quarto de século anterior, mais horas-homem de trabalho foram devotadas ao problema NN do que a qualquer outra questão científica na história da humanidade. Esse interesse é devido tanto à simplicidade matemática do problema de dois corpos como à expectativa de que as forças nucleares fossem aditivas. Deste modo, ao menos em princípio, um conhecimento completo do sistema de dois nucleons poderia levar a um entendimento das propriedades dos núcleos. Embora se saiba que a aditividade não é exatamente válida, pois ao adicionarmos uma terceira partícula a força entre elas não será a mesma que se as consideramos par a par, o estudo da interação NN ainda é uma importante fonte de informações dos sistemas nucleares, mais exatamente das forças nucleares.

Antes de iniciar o nosso estudo quantitativo, vamos mencionar algumas propriedades empíricas conhecidas da interação núcleon-núcleon que devem ser incorporados em qualquer abordagem teórica.

A energia de ligação por partícula de um núcleo pesado não depende do número atômico Z . Esse fato é interpretado como um indício de que a força NN não pode ser de longo alcance como o potencial coulombiano e que um núcleon não interage com todos os outros presentes num núcleo grande, mas somente com aqueles mais próximos. Esse fenômeno, conhecido como saturação da força nuclear, indica que a interação é preferencialmente de curto alcance. Do ${}^4\text{He}$ até núcleos pesados a energia de ligação por partícula aumenta somente por volta de 1mev, ou seja, a saturação é alcançada quando 4 partículas são colocadas

juntas e o alcance da força é aproximadamente igual ao raio da partícula alfa.

A estabilidade dos núcleos, por outro lado, mostra que a interação NN é atrativa, pelo menos em uma certa região. Este caráter atrativo é confirmado no espalhamento NN; por exemplo, a análise das defasagens do estado 1S_0 (usamos a notação espectroscópica $(2s+1)l_J$) mostrado na figura 11, mostra que a baixas energias a defasagem é positiva, o que corresponde a atração na parte externa do potencial. Esta figura sugere também que a força nuclear tem características repulsivas a curtas distâncias: a defasagem se torna negativa para energias altas, o que corresponde a uma repulsão a distâncias pequenas, já que em um estado de $l=0$ não atua a barreira centrífuga. Daqui se conclui, então, que a força nuclear é atrativa nas regiões de longo e médio alcance e é repulsiva na região de curto alcance.

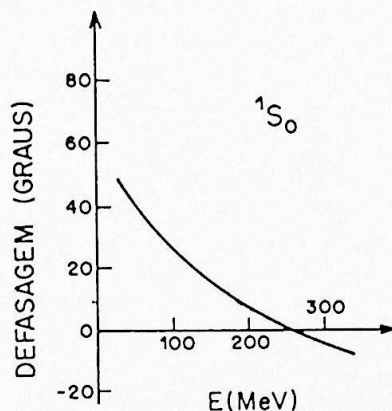


Figura 11. Defasagem da onda parcial 1S_0 .

Outra característica importante da força nuclear é que ela é dependente do spin. Isto foi proposto inicialmente por Wigner em 1935 para explicar a discrepância entre os valores medidos experimentalmente e os calculados teoricamente para a secção de choque do espalhamento NN. Este tipo de força discrimina o comportamento dos estados singlete e tripleto. A interação NN

apresenta uma componente spin-órbita, que influencia os estados em que o operador S.L é não nulo, ou seja $S \neq 0$ e $l \neq 0$, as defasagens de estados tais como 3G_4 e 3D_2 só podem ser explicados com a inclusão de uma forte força spin-órbita.

Um aspecto fundamental da interação NN é que ela tem uma componente tensorial. Embora todos os termos da parametrização geral do potencial, que será apresentada a seguir, sejam importantes, o termo tensorial desempenha um papel de profundas implicações nesta interação, como se pode ver no estudo do dêuteron. As primeiras tentativas de se explicar o dêuteron foram feitas por meio de potencial central atrativo. No entanto, um potencial puramente radial é esfericamente simétrico e prevê um momento de quadrupolo nulo para o sistema. O dêuteron possui, entretanto um momento de quadrupolo não nulo, indicando que a interação nêutron-próton, não é puramente central e que a função de onda que a descreve não pode ser um estado de $l=0$ puro, como se acreditava inicialmente.

Outro fato que comprova esta conclusão provém dos valores experimentais para os momentos magnéticos do próton (μ_p), do nêutron (μ_n) e do dêuteron (μ_d), que obedecem a relação: $\mu_d \neq \mu_p + \mu_n$. Este resultado indica a existência de uma probabilidade não nula de se encontrar o dêuteron em um estado com l diferente de zero.

Portanto uma força puramente central não é capaz de explicar as propriedades do dêuteron, o que nos leva a admitir que a interação núcleon-núcleon tem uma componente não central.

De fato, como se sabe hoje, o dêuteron é um estado ligado nêutron-próton com momento angular total $J=1$, spin total $S=1$ e uma mistura de momento angular orbital $l=0$ e $l=2$. A probabilidade da onda D ($l=2$) é relativamente pequena, cerca de 5%, mas isso não quer dizer que a parte tensorial seja fraca em relação à parte central. Para que o potencial central sozinho fosse capaz de ligar o dêuteron, ele precisaria ser três vezes mais forte.

1-II) O POTENCIAL NUCLEON-NUCLEON

O potencial desempenha um papel fundamental no estudo não-relativístico, via equação de Schrödinger, da interação núcleon-núcleon. Ele permite a determinação das funções de onda do sistema de dois nucleons, através da qual podemos encontrar as defasagens e os demais parâmetros do espalhamento.

Discutiremos em seguida a estrutura geral do potencial, que incorpora as características qualitativas da interação NN discutidas anteriormente. Essa estrutura é expressa em termos de operadores moldados pelas simetrias do problema. Apresentaremos também o potencial utilizado no estudo quantitativo que nos propusemos a realizar.

1-II.a) A ESTRUTURA GERAL DO POTENCIAL NN

O potencial NN depende fortemente dos canais de spin (S) e isospin (T) onde ele atua, por isso, é diferente para cada subespaço (S,T). A sua estrutura geral é determinada pelas simetrias por transformações de paridade (reflexão) e rotações nos espaços de configuração, spin e isospin.

Além disso, a localidade do potencial é uma característica importante, já que potenciais dependentes da velocidade levam a expressões com gradientes tornando-se mais complicados. Alguns potenciais incluíram esta dependência, mas o que se sabe é que a baixas energias ela é certamente desprezível. Assim, excluindo os gradientes, temos a disposição para construir o potencial, a coordenada relativa r , o operador de momento angular L e os operadores de spin dos dois nucleons $\vec{\sigma}^1$ e $\vec{\sigma}^2$. Estes últimos satisfazem a álgebra das matrizes de Pauli:

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \quad i, j = x, y, z$$

$$\vec{\sigma} \times \vec{\sigma} = 2i \vec{\sigma} \quad (\sigma_x)^2 = (\sigma_y)^2 = (\sigma_z)^2 = 1$$

Sua representação matricial é:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Os operadores r , L e $\vec{\sigma}^1$ e $\vec{\sigma}^2$ devem ser combinados de modo a formarem escalares. As formas mais simples que o potencial pode conter⁽¹⁰⁾ são as formas centrais $V(r)$, onde $r = |\vec{r}|$, e $(\vec{\sigma}^1 \cdot \vec{\sigma}^2)V(r)$. Por outro lado, termos da forma $(\vec{\sigma}^1 \cdot \vec{r})$ e $(\vec{\sigma}^2 \cdot \vec{r})$ não servem, pois não são invariantes por reflexão, já que, neste caso: $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ e $\vec{\sigma} \rightarrow \vec{\sigma}$ e com isso $(\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) \rightarrow -(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})$. Pelo mesmo argumento não são permitidas as formas: $(\vec{\sigma}^1 \times \vec{\sigma}^2) \cdot \vec{r}$ e $\vec{r} \cdot \vec{l}$. No entanto estas combinações denominadas pseudoescalares podem ser consideradas em potências pares de \vec{r} .

Polinômios em σ devem ser usados com cautela, para se evitar redundância, já que satisfazem a seguinte relação:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

Estes, por exemplo, são operadores redundantes:

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{r})^2 = (\hat{r} \cdot \hat{r}) + i\vec{\sigma} \cdot (\hat{r} \times \hat{r}) = 1$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{r})^3 = (\vec{\sigma} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma} \cdot \hat{r})^2 = (\vec{\sigma} \cdot \hat{r})$$

onde $|\hat{r}| = 1$.

Para termos da forma: $(\vec{\sigma}^1 \times \vec{r})(\vec{\sigma}^2 \times \vec{r})$ devemos lembrar da relação:

$$(\vec{A} \times \vec{B})(\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

Portanto:

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma}^1 \times \hat{r})(\vec{\sigma}^2 \times \hat{r}) &= (\vec{\sigma}^1 \cdot \vec{\sigma}^2)(\hat{r} \cdot \hat{r}) - (\vec{\sigma}^1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^2 \cdot \hat{r}) \\ &= (\vec{\sigma}^1 \cdot \vec{\sigma}^2) - (\vec{\sigma}^1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^2 \cdot \hat{r}) \end{aligned}$$

A combinação $(\vec{\sigma}^1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^2 \cdot \hat{r})$ pelo fato de depender do ângulo entre $\vec{\sigma}$ e \vec{r} , é uma forma não central. Ela é essencialmente o único escalar a ser considerado para se construir o operador mais geral de um termo não central para o potencial. Este termo é usualmente representado por $V(r)S_{12}$, onde S_{12} é um operador tensorial de ordem 2 dado por:

$$S_{12} = 3(\hat{\sigma}^1 \cdot \hat{r})(\hat{\sigma}^2 \cdot \hat{r}) - \hat{\sigma}^1 \cdot \hat{\sigma}^2$$

Uma característica de S_{12} é que o seu valor médio sobre todas as direções se anula.

As relações de comutação de S_{12} com outros operadores importantes são dadas por:

$$[S^2, S_{12}] = [J^2, S_{12}] = [J_z, S_{12}] = 0$$

$$[S_z, S_{12}] \neq 0 \quad [L, S_{12}] \neq 0 \quad [L_z, S_{12}] \neq 0$$

Esses resultados nos mostram que uma hamiltoniana contendo tal operador terá como constantes de movimento os autovalores de S , J e J_z .

O fato de S_{12} não comutar com L^2 tem implicações importantes, não apenas por que l não é uma constante de movimento, mas também por que ele gera equações radiais acopladas. Como S_{12} não é diagonal para certos valores de l , ele tem elementos de matriz não nulo entre estados com momentos orbitais l e $l+2$.

Outra propriedade importante do operador S_{12} é que ele se anula quando aplicado em um estado singlete ($S=0$). Um aspecto complementar deste resultado é que, quando aplicado a um estado tripleto ($S=1$), ele deve gerar novamente um estado tripleto. Deste modo, S_{12} não tem elementos de matriz para S diferentes, o que é coerente com o fato de ele comutar com S^2 .

Essas propriedades de S_{12} fazem com que a sua ação seja bastante interessante, como veremos a seguir.

Os operadores J e J_z são constantes de movimento, o que nos permite trabalhar com as suas autofunções. Um estado $|J M_J\rangle$ pode ser escrito em termos de produtos de $|S m_S\rangle$ e $|l m_l\rangle$, autofunções de S^2 e L^2 respectivamente, ou seja:

$$|J M_J\rangle = \sum_{m_l, m_S} \langle l S m_l m_S | J M_J \rangle |l m_l\rangle |S m_S\rangle$$

Onde $J=1+S$, $M_j=m_s+m_l$. $|l m_l\rangle$ são os harmônicos esféricos $Y_L^{m_l}$, $|S m_s\rangle$ são as funções de onda de spin $\chi_S^{m_s}$ e $\langle l S m_l m_s | J M_j \rangle$ são os coeficientes de Clebsch Gordan, que dão o peso dos acoplamentos.

Os estados tripleto para um sistema de duas partículas de spin $\frac{1}{2}$ são dadas por:

$$\begin{aligned} |1 1\rangle &= \downarrow\downarrow \\ |1 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\ |1 -1\rangle &= \uparrow\uparrow \end{aligned}$$

Tomemos, por exemplo, o caso de $l=0$ com spins paralelos, $|1 1\rangle$. A ação de S_{12} sobre este estado produz um outro com $l=2$ e componente $m_l=2$. Como S_{12} não muda o spin total e J_z é uma constante de movimento, a projeção do spin deve ser -1 ou seja:

$$S_{12} \left[Y_0^0 |11\rangle \right] \rightarrow Y_2^2 |1-1\rangle$$

Isso quer dizer que neste caso particular o operador tensorial promove uma mudança da orientação dos spins das duas partículas. Esquemáticamente teríamos:

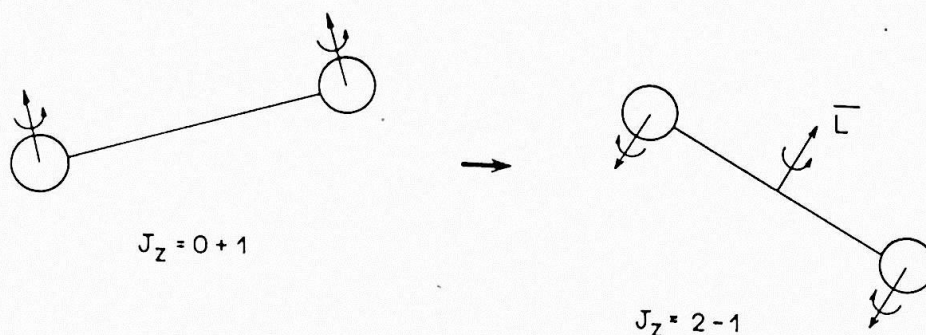


Figura 12. Ação do operador S_{12} .

As considerações de simetria apresentadas permitem a construção da forma mais geral possível do potencial. Essa forma geral, entretanto, somente foi utilizada em épocas recentes, sendo que os primeiros potenciais tinham forma bastante mais simples. Por exemplo, a forma empregada por Gammel Cristhian e Thaler⁽¹¹⁾:

$$V = V_c(r) + V_l(r)S_{12}$$

O termo spin-órbita foi introduzido por Wigner:

$$V = V_c(r) + V_T(r)S_{12} + V_{LS}L \cdot S$$

O modelo de Hamada-Johnston, por outro lado, era dado por:

$$V = V_c(r) + V_T(r)S_{12} + V_{LS}(r)L \cdot S + V_{LL}(r)L_{12}$$

onde: $L_{12} = \left[\delta_{LJ} + (\vec{\sigma}^1 \cdot \vec{\sigma}^2) \right] L^2 - (L \cdot S)^2$

O potencial usado pelo grupo de Yale já tem uma forma moderna:

$$V = V_c(r) + V_T(r)S_{12} + V_{LS}(r)L \cdot S + V_q(r) \left[(L \cdot S)^2 + L \cdot S - L^2 \right]$$

Com pequenas alterações, essas duas últimas formas são aquelas usadas até hoje.

É comum nos referirmos a esses termos do potencial de uma maneira global da seguinte forma:

$$V(r) = \sum_{\nu} O_{\nu} V_{\nu}(r)$$

onde O_{ν} representa cada um dos operadores listados no potencial.

1-II.b) O OPEP.

A troca de um pión, como vimos anteriormente, é o processo mais simples e mais bem conhecido da interação NN. É bem estabelecido, com suficiente suporte experimental, que ele é o responsável pela parte de longo alcance da força nuclear. Apresentações didáticas do cálculo da parte do potencial devida à troca de um pión podem ser encontradas na literatura⁽⁸⁾. Mencionaremos aqui, com um propósito ilustrativo, alguns dos aspectos envolvidos neste cálculo.

A primeira etapa do cálculo consiste na obtenção da matriz de transição T_{π} , para o processo de espalhamento elástico NN devido à troca de um pión, representado na figura 13.

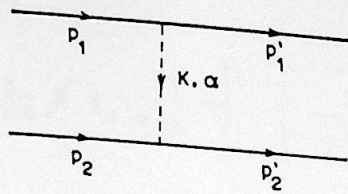


Figura 13. Diagrama de Feynman que contribui ao OPEP.

O quadrimomento do pión é k e o dos nucleons p e p' ; por conveniência os nucleons são tomados como sendo livres, o que faz com que seus quadrimomentos satisfaçam a relação: $p=(E,p)$, onde:

$$E = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}.$$

Quando os nucleons são não-relativísticos, temos:

$$E \cong m + \frac{p^2}{2m}$$

A conservação do momento e energia é respeitada em cada vértice, o que nos permite escrever:

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = P'_1 + k \\ P_2 + k = p'_2 \end{array} \right\} P_1 + P_2 = P'_1 + P'_2$$

No sistema centro de massa temos: $p_1 = -p_2$ e $p_1' = -p_2'$ que, em conjunto com as equações anteriores, fornecem:

$$E_1 = E_2 = E_1' = E_2'$$

Com isso temos:

$$\begin{array}{ll} p_1 = (E, \vec{p}) & p_2 = (E, -\vec{p}) \\ p_1' = (E, -\vec{p}') & p_2' = (E, -\vec{p}') \\ k = (0, \vec{p} - \vec{p}') \end{array}$$

O pión não está na camada de massa, pois $k^2 \neq \mu^2$, onde μ é a massa do pión. Assim o pión trocado é, necessariamente, virtual.

Depois das considerações cinemáticas, "lemos" o diagrama da figura 13 de acordo com as regras de Feynman, e obtemos uma expressão para a matriz de transição deste processo, com a

seguinte forma:

$$T\pi = \left[N' \left(-\frac{g}{2m} \not{k} \gamma_5 \tau_\alpha \right) N \right]^{(1)} \left[\frac{1}{k^2 - \mu^2} \right] \left[N' \left(-\frac{g}{2m} \not{k} \gamma_5 \tau_\alpha \right) N \right]^{(2)}$$

Os três colchetes representam a seguinte estrutura:

[vértice do núcleon 1]*[propagador do pión]*[vértice do núcleon 2]

Na expressão acima $N(\vec{p})$ indica a função de onda do núcleon nos espaços de spin e isospin: $N(\vec{p}) = u(\vec{p}) \otimes \eta$; $\not{k} = \gamma_\mu k^\mu$, γ_μ e γ_5 são matrizes de Dirac; g indica a constante de acoplamento πN . Representando por $\vec{\tau}^{(1)}$ o valor esperado do operador de isospin na linha do núcleon 1, podemos escrever:

$$T\pi = \frac{-g^2}{4m^2} (\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}) \left[\bar{U} \not{k} \gamma_5 U \right]^{(1)} \frac{1}{k^2 + \mu^2} \left[\bar{U} \not{k} \gamma_5 U \right]^{(2)}$$

A próxima etapa do cálculo é a obtenção do limite não relativístico. Para tanto é aconselhável reescrever essa amplitude na notação de duas componentes, onde as matrizes e spinores de Dirac são expressos em termos de matrizes e spinores de Pauli. A redução não-relativística de $T\pi$ é feita lembrando-se que, neste limite, temos: $|\vec{p}| \approx |\vec{p}'| \approx |\vec{k}| \approx \mu$, $E \approx m$. Após algumas manipulações algébricas encontramos:

$$T\pi \xrightarrow{\text{N.R.}} t\pi = \frac{g^2}{4m^2} (\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}) (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{k}) \frac{1}{k^2 + \mu^2} \vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{k}$$

onde $\vec{\sigma}^{(1)}$ é o valor esperado de $\vec{\sigma}$ entre os spinores κ^+ e κ do núcleon 1.

Na mecânica quântica relativística não existe um operador relativístico que possa ser diretamente transformado num

potencial, por isso, o potencial NN é definido como sendo o operador que, empregado num cálculo não-relativístico em aproximação de Born, produz uma amplitude de espalhamento idêntica àquela derivada a partir da teoria de campos.

No espaço dos momentos o OPEP é então definido por:

$$\langle P'_1 P'_2 | \hat{V}\pi | P_1 P_2 \rangle_{CM} = - (2\pi)^3 \delta^3(P'_1 + P'_2 - P_1 - P_2) t\pi$$

onde a função δ traduz a conservação de momento. A partir deste resultado calcula-se o potencial no espaço de configuração, o que é realizado por meio da transformada de Fourier da equação acima, o que fornece:

$$\langle r'_1, r'_2 | \hat{V}\pi | r_1 r_2 \rangle = - \frac{1}{(2\pi)^3} \delta^3(r'_1, r'_2) \delta^3(r_2, r_1) V\pi(r)$$

onde r é a coordenada relativa: $\vec{r} = \vec{r}_1 = \vec{r}_2$ e $V\pi(r)$ é o potencial devido à troca de um píon:

$$V\pi(r) = - \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{-ik \cdot r} \left\{ \frac{g^2}{4m^2} \frac{\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}}{\tau^{(1)} \tau^{(2)}} \frac{1}{k^2 + \mu^2} \vec{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{k} \right\}$$

Para explicitar o conteúdo de momento angular desta expressão, reescrevemos:

$$V\pi(r) = - \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{-ik \cdot r} \left\{ \frac{1}{3} \frac{g^2}{4m^2} \frac{\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}}{\tau^{(1)} \tau^{(2)}} \frac{1}{k^2 + \mu^2} \left[\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} + \right. \right. \\ \left. \left. (3\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{k} \vec{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{k} - \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}) \right] \right\}$$

A integração pode ser efetuada analiticamente produzindo a expressão do OPEP:

$$V\pi(\mathbf{r}) = \frac{1}{3} \left[\frac{g\mu}{2m} \right]^2 \frac{\mu}{4\pi} \vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)} \left\{ \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} \left[U(r) - \frac{4\pi}{\mu^3} \delta^3(\mathbf{r}) \right] + \right. \\ \left. \left[3\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{r}} \vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{\mathbf{r}} - \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} \right] U_2(r) \right\}$$

onde $U(r)$ é a função de Yukawa, dado por:

$$U(r) = \frac{e^{-\mu r}}{\mu r}$$

e $U_2(r)$ é:

$$U_2(r) = \left[1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{\mu^2 r^2} \right] \frac{e^{-\mu r}}{\mu r}$$

A expressão do OPEP dada acima tem um termo tensorial, já que o coeficiente de $U_2(r)$ é o operador S_{12} .

A última etapa do cálculo é comparar o resultado obtido com a parametrização geral do potencial, de modo a identificar as várias contribuições devidas à troca de um pión. Fazendo isso, concluímos que o OPEP contribui aos potenciais central e tensor com pesos que dependem do canal de spin e isospin considerado.

É importante notar que este cálculo foi efetuado para nucleons puntiformes, o que se reflete no fato de as funções $U(r)$ e $U_2(r)$ divergirem na origem. Em geral, essas divergências são eliminadas por meio de fatores de forma.

1-II.c) O POTENCIAL SSCC.

Os cálculos numéricos efetuados neste trabalho são baseados no potencial local SSC (Super Soft Core), construído por R. de Turreil e D.W.L. Sprung⁽¹²⁾. Esse potencial contém um termo

OPEP regularizado na origem, e um conjunto de termos parametrizados, de modo a produzir um ajuste de boa qualidade das propriedades do dêuteron e dos dados do espalhamento NN até 350 mev.

A estrutura deste potencial é do mesmo tipo daqueles apresentados anteriormente:

$$V(r) = V_c(r) + V_{L2}(r)L^2 + V_{Ls}(r)L \cdot S + V_T(r)S_{12} + V_Q(r)Q$$

onde:

$$Q = 3(\vec{\sigma}^1 \cdot L)(\vec{\sigma}^2 \cdot L) - (\vec{\sigma}^1 \cdot \vec{\sigma}^2)L^2.$$

As componentes radiais possuem no máximo três termos que são escolhidos de modo a agirem nas partes de longo ($r \geq 2,5\text{fm}$), médio ($1,0\text{fm} \leq r \leq 2,5\text{fm}$) e curto alcance ($r \leq 1,0\text{fm}$) do potencial. A parte de longo alcance é escolhida como sendo o OPEP, que com já vimos, contribui aos termos central e tensor. A parte de médio alcance é uma função do tipo OBEP (One Boson Exchange Potential). Estes dois termos são regularizados na origem por funções do tipo $(1,0 - \exp(-r^n))$ para facilitar aplicações práticas do potencial. Quanto à parte de curto alcance, elas são funções do tipo $\exp(-r^4)$.

A forma analítica das componentes do potencial são as seguintes:

$$V_c(r) = p_1 \exp(-r^4/p_2^2) + \left\{ p_3 Y_c(p_4 x) + V_c(\text{OPEP}) \right\} \left\{ 1 - \exp(-r^4) \right\}$$

$$V_T(r) = p_{12} \exp(-r^4/p_{13}^2) + \left\{ p_{14} Y_T(p_{15} x) + V_T(\text{OPEP}) \right\} \left\{ 1 - \exp(-r^6) \right\}$$

onde:

$$Y_c(t) = \frac{\exp(-t)}{x} \quad e \quad Y_T(t) = \left(1 + \frac{3}{t} + \frac{3}{t^2} \right) \frac{\exp(-t)}{x}$$

e x é uma variável adimensional: $x = \mu r$; para a massa do pión, adota-se o valor $\mu = 0.7 \text{fm}^{-1}$.

Os termos $V_c(\text{OPEP})$ e $V_T(\text{OPEP})$, em cada subespaço de spin e isospin (S, T) , são dados por:

TABELA 1.

(S, T)	$V_c(\text{OPEP})$ (mev)	$V_T(\text{OPEP})$ (mev)
(0, 0)	31.389 $Y_c(x)$	
(1, 0)	-10.463 $Y_c(x)$	-10.463 $Y_T(x)$
(0, 1)	-10.463 $Y_c(x)$	
(1, 1)	3.488 $Y_c(x)$	3.488 $Y_T(x)$

As demais componentes são:

$$V_{L2}(r) = \left\{ p_5 Y_{L2}(p_6 x) + p_7 V_{L2}(x) \right\} \left\{ 1 - \exp(-r^6) \right\}$$

onde:

$$Y_{L2}(t) = \left(1 - \frac{2}{t} \right) \frac{\exp(-t)}{x^3}$$

$$V_{Ls}(r) = \left\{ p_8 Y_{Ls}(p_9 x) + p_{10} V_{Ls}(p_{11} x) \right\} \left\{ 1 - \exp(-r^6) \right\}$$

onde:

$$Y_{Ls}(t) = - (1+t) \frac{\exp(-t)}{x^3}$$

$$V_0(r) = \left\{ P_{16} V_{L2}(p_{17}x) \right\} \left\{ 1 - \exp(-r^6) \right\}$$

Os parâmetros do potencial são:

TABELA 2. Os Parâmetros do Potencial SSCC

	Singleto- Par	Tripleto- Impar	Tripleto- Par	Singleto- Par
P ₁	375,00	215,32	144,83	75,653
P ₂	0,47552	0,85807	0,88787	3,000
P ₃	-1001,6	-883,60	-241,34	-286,26
P ₄	3,6071	3,5042	3,3788	2,0254
P ₅	14,000	17,626	6,6500	15,633
P ₆	2,50	2,6463	1,9650	2,01
P ₇	-0,35	-0,35261	-0,95900	0,72581
P ₈		-40,466	520,0	
P ₉		5,7680	5,661	
P ₁₀		-40,408	-54,85	
P ₁₁		4,0676	4,0141	
P ₁₂		-58,951	36,00	
P ₁₃		1,3171	1,0805	
P ₁₄		395,18	-110,00	
P ₁₅		4,3098	3,9529	
P ₁₆		-3,9904		
P ₁₇		2,4583		

onde os parâmetros $P_1, P_3, P_5, P_7, P_8, P_{10}, P_{12}, P_{14}$ e P_{16} são dados em MeV; P_2 e P_{13} são dados em fm^{-2} e $P_4, P_{15}, P_6, P_9, P_{11}$ e P_{17} são adimensionais.

CAPITULO 2.

TEORIA DE ESPALHAMENTO.

A discussão sobre espalhamento apresentada aqui tem como finalidade fixar a notação a ser usada no decorrer do trabalho e agrupar algumas equações que serão necessárias no seu desenvolvimento. Ela é padrão e, como tal, pode ser encontrada nos livros de mecânica quântica.⁽¹³⁾

2-1) A Equação de Schrödinger.

No domínio não-relativístico, o problema do espalhamento de duas partículas é formulado em termos da solução da equação de Schrödinger, usando uma hamiltoniana e condições de contorno apropriadas.

Consideramos partículas do tipo A colidindo com partículas do tipo B, e a hamiltoniana pode ser escrita como:

$$\mathcal{H} = \frac{P_A^2}{m_A} + \frac{P_B^2}{m_B} + V_{AB}$$

onde V_{AB} é um potencial que representa a interação.

Usando a expressão $P = -i\hbar\nabla$ para o operador momento, obtemos:

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_A} \nabla_{r_A}^2 - \frac{\hbar^2}{2m_B} \nabla_{r_B}^2 + V_{AB}$$

E a equação de Schrödinger para estados estacionários com energia constante E é dada por:

$$\mathcal{H} \Psi(r_A, r_B) = E \Psi(r_A, r_B) \quad (1)$$

onde r_A e r_B são as coordenadas das partículas A e B.

Quando o potencial depende apenas da coordenada relativa das partículas é conveniente separar o movimento do centro de massa, usando as coordenadas:

$$r_A = R + \frac{m_B}{(m_A + m_B)} r$$

e

$$r_B = R - \frac{m_A}{(m_A + m_B)} r$$

Essa mudança de variáveis permite-nos escrever:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(r) \right] \Psi(R, r) = E \Psi(R, r) \quad (2)$$

onde $M = m_A + m_B$

e

$$\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$$

A solução dessa equação é obtida escrevendo-se a função de onda como:

$$\Psi(R, r) = \Phi(R)\psi(r)$$

Essa expressão nos leva a duas equações separadas:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 \Phi(R) = E_{cm} \Phi(R)$$

e

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 \psi(r) + V(r)\psi(r) = E_{REL} \psi(r) \quad (3)$$

com:

$$E = E_{cm} + E_{REL}$$

No presente estudo estamos interessados no caso em que $m_A = m_B \equiv m$, o que corresponde $M = 2m$ e $\mu = m$.

No caso típico de uma experiência de laboratório mantém-se uma partícula em repouso e outra é atirada sobre ela com energia E_{LAB} ; neste caso, a energia E_{REL} que aparece na eq.(3) é dada por:

$$E_{REL} = \frac{E_{LAB}}{2}$$

Para simplificar a notação, a partir de agora usaremos o símbolo E para representar a energia relativa: $E \equiv E_{REL}$. Assim a equação de Schrödinger é dada por:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 + V(r) \right] \Psi(r) = E \Psi(r) \quad (4)$$

2-II) A Função de Onda Assintótica.

Os potenciais relevantes à física nuclear tem curto alcance. Por isso, podemos imaginar que existe uma distância R , usualmente denominada alcance do potencial, a partir da qual o potencial possa ser desprezado. Para $r > R$, a função de onda obedece então uma equação livre:

$$-\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 \Psi(r) = E \Psi(r) \quad (5)$$

É conveniente escrevermos o laplaciano em coordenadas esféricas como:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\hbar^2 r^2} L^2(\theta, \phi)$$

onde:

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial \phi^2} \right]$$

representa o quadrado do momento angular orbital. O operador L_z , por outro lado, é dado por:

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

As autofunções simultâneas de L^2 e L_z são os harmônicos esféricos $Y_l^{m_l}(\theta, \phi)$:

$$L^2 Y_l^{m_l}(\theta, \phi) = l(l+1) \hbar^2 Y_l^{m_l}(\theta, \phi)$$

e

$$L_z Y_l^{m_l}(\theta, \phi) = m_l \hbar Y_l^{m_l}(\theta, \phi)$$

Neste caso, uma função da forma:

$$\Psi_{lm_l} = r^{-1} r_1(r) Y_l^{m_l}(\theta, \phi) \quad (6)$$

é solução da equação de Schrödinger assintótica, desde que $r_1(r)$ satisfaça a seguinte equação radial:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] r_1(r) = 0 \quad (7)$$

onde $k^2 = \frac{mE}{\hbar}$.

As soluções dessa equação são relacionadas às funções de Bessel, cujas propriedades importantes estão sumarizadas no apêndice A. A forma mais geral da solução $r_1(r)$ é uma combinação linear das funções de Bessel regular (F) e irregular (G):

$$r_1(r) = N_l \left[F_l(kr) + \Delta_l G_l(kr) \right] \quad (8)$$

Sendo que o comportamento das funções F_l e G_l próximo da origem é dado por:

$$F_l(kr) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{(kr)^{l+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l+1)}$$

$$G_l(kr) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{1.3.5 \dots (2l+1)}{(kr)^{l+1}}$$

Para grandes distâncias a função $r_l(r)$ acima assume a forma:

$$\begin{aligned} r_l(r) &\underset{r \rightarrow \infty}{\sim} A \sin(kr - l\pi/2) + B \cos(kr - l\pi/2) \\ &= (A^2 + B^2)^{1/2} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) \end{aligned} \quad (9)$$

onde δ_l é uma defasagem real tal que:

$$\delta_l = \tan^{-1}(B/A) \quad (10)$$

Comparando esta solução assintótica com a solução regular da equação livre:

$$F_l(kr) \underset{kr \gg 1}{\sim} \sin(kr - l\pi/2)$$

Vemos que o efeito do potencial é realizar uma mudança de fase na função radial $r_l(r)$ em relação à onda livre. Podemos ilustrar este comportamento da seguinte forma:

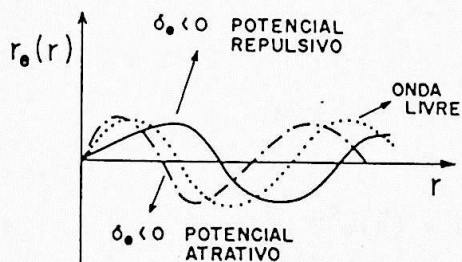


Figura 15. Ação de um potencial em relação à onda livre.

Um potencial atrativo introduz uma fase positiva na onda e um potencial repulsivo uma fase negativa em relação à onda livre.

Também poderíamos ter escrito a eq.(8) como:

$$r_1(r) = I e^{-i(kr - \pi/2)} - E e^{i(kr - \pi/2)} \quad (11)$$

que pode ser pensada como uma onda incidente de amplitude I e uma onda emergente de amplitude E , relacionadas pela matriz de espalhamento S :

$$E = SI \quad (12)$$

Quando consideramos apenas espalhamento elástico o fluxo da onda incidente deve ser igual ao fluxo da onda emergente e, por isso, a matriz S deve ser unitária, $|S|^2 = 1$. Neste caso, ela pode ser escrita em termos de uma defasagem real, como:

$$S = e^{2i\delta_1} \quad (13)$$

2-III) A Normalização.

Existem vários modos possíveis de se convencionar a normalização da função de onda $r_1(r)$. No presente estudo, ela será escolhida de forma que a solução geral $\psi(\vec{r})$ tenha o seguinte comportamento:

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \phi(\vec{r}) + \psi_{\text{ESP}}(\vec{r}) \quad (14)$$

onde $\phi(\vec{r})$ é a função de onda livre. Essa é a condição de contorno padrão adotada em problemas de espalhamento.

A função $\phi(\vec{r})$ satisfaz a equação livre:

$$-\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 \phi(\vec{r}) = E \phi(\vec{r}) \quad (15)$$

o que nos permite escrever:

$$\phi(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (16)$$

A solução exata, por outro lado, tem a seguinte forma assintótica:

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta, \phi) \quad (17)$$

onde $f(\theta, \phi)$ é a amplitude de espalhamento.

O fato de o momento angular ser um bom número quântico torna conveniente o emprego de expansões em termos dos harmônicos esféricos. Para uma onda plana com k paralelo ao eixo z , com independência do ângulo azimutal é permitida a seguinte expansão:

$$e^{ikz} = (kr)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} i^l \left[4\pi(2l+1) \right]^{1/2} F_l(kr) Y_l^0(\theta) \quad (18)$$

onde $F_l(kr)$ é a solução regular de Bessel.

No caso mais geral, em que a direção de k é arbitrária, temos:

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 4\pi(kr)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l F_l(kr) Y_l^{m_l}(\theta_k, \phi_k) Y_l^{m_l}(\theta, \phi) \quad (19)$$

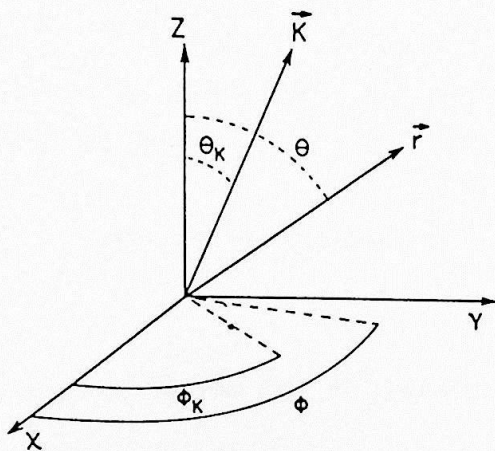


Figura 16. Os ângulos θ , ϕ , θ_k e ϕ_k para direções arbitrárias de \vec{k} e \vec{r} .

Como vimos, podemos escrever as soluções $r_l(r)$ de seguinte forma:

$$r_1(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} N_1 \text{sen}(kr - \pi/2 + \delta_1) \quad (20)$$

combinando algumas das expressões acima podemos encontrar N_1 como:

$$N_1 = i^{-l} e^{i\delta_1} [4\pi(2l+1)]^{1/2}$$

Isso mostra que dentre as várias normalizações possíveis de $r_1(r)$ podemos ter:

$$r_1(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\delta_1} \text{sen}(kr - \pi/2 + \delta_1) \quad (21)$$

$$r_1(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\delta_1} \left[\cos\delta_1 F_1(kr) + \text{sen}\delta_1 G_1(kr) \right] \quad (22)$$

$$r_1(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\delta_1} \cos\delta_1 \left[F_1(kr) + \text{tg}\delta_1 G_1(kr) \right] \quad (23)$$

No entanto para cálculos computacionais com potenciais reais é conveniente que $r_1(r)$ seja real, dessa forma usamos a seguinte normalização:

$$r_1(r) = F_1(kr) + \text{tg}\delta_1 G_1(kr) \quad (24)$$

$r \gg R$

que é a forma da eq(23) dividida por $e^{i\delta_1} \cos(\delta_1)$.

2-IV) A Forma Geral da Função de Onda.

O momento angular J é um bom número quântico no caso do espalhamento como trataremos aqui. Por isso, é conveniente expandirmos as soluções da equação de Schrödinger em termos de uma base com J bem definido. Para construirmos esta base, inicialmente acoplamos os spins das duas partículas e, em seguida, o spin total ao momento angular orbital.

A inclusão do spin no formalismo é feita através da função χ_s^{ms} que representa um estado com spin total S e projeção ms no eixo z do sistema considerado.

No caso de duas partículas com spin 1/2, as regras usuais de acoplamento de momento angular nos fornecem:

$$|1/2 - 1/2| \leq S < 1/2 + 1/2,$$

o que corresponde a $S = 0$ ou $S = 1$.

O operador S é dado por:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} (\vec{\sigma}^1 + \vec{\sigma}^2)$$

e suas autofunções obedecem:

$$S^2 |S m_s\rangle = S(S+1) |S m_s\rangle$$

e

$$S_z |S m_s\rangle = m_s |S m_s\rangle$$

(25)

Essas autofunções são dadas por:

$$|S m_s\rangle = \sum \langle S_1 S_2 m_{s1} m_{s2} | S m_s\rangle |S_1 m_{s1}\rangle |S_2 m_{s2}\rangle \quad (26)$$

onde $|S_1 m_{s1}\rangle$ e $|S_2 m_{s2}\rangle$ são as funções de spin χ_{s1}^{ms1} e χ_{s2}^{ms2} das partículas 1 e 2 respectivamente. De modo explícito podemos escrever:

$$S = 0 \quad |0, 0\rangle = (1/2)^{1/2} | \uparrow \downarrow - \downarrow \uparrow \rangle$$

$$S = 1 \quad \begin{cases} |1, 1\rangle = | \uparrow \uparrow \rangle \\ |1, 0\rangle = (1/2)^{1/2} | \uparrow \downarrow + \downarrow \uparrow \rangle \\ |1, -1\rangle = | \downarrow \downarrow \rangle \end{cases}$$

O acoplamento do spin total S com o momento angular orbital L é dado por:

$$|J M_J\rangle = \sum_{\substack{l, s \\ m_l, m_s}} \langle l S m_l m_s | J M_J\rangle |l m_l\rangle |S m_s\rangle \quad (27)$$

onde:

$$J = L + S$$

e

$$M_J = m_l + m_s \quad (28)$$

A base usada para expandir a função de onda é constituída pelos elementos:

$$\psi_{1S_J}^{M_J}(\theta, \phi) = [Y_1 \otimes \kappa_S]_J^{M_J} = \sum_{m_l, m_s} \langle 1S m_l m_s | JM_J \rangle Y_1^{m_l}(\theta, \phi) \kappa_S^{m_s} \quad (29)$$

Esta função $\psi_{1S_J}^{M_J}(\theta, \phi)$ representa toda a dependência angular e de spin de ψ .

Como S pode ser 0 ou 1, os valores possíveis de l são:

$$l = \begin{cases} J & \text{se } S = 0 \\ J-1, J, J+1 & \text{se } S = 1 \end{cases} \quad (30)$$

Além dos números quânticos já citados a paridade ⁽¹⁴⁾ é outro que é necessário introduzir para descrever corretamente os estados do nosso sistema, já que um estado físico tem que ter paridade definida. Desse modo o autovalor do operador de reflexão será uma constante de movimento.

Assim, por exemplo, as relações (30) mostram que os estados tripleto são uma mistura de ³S₁, ³P₁ e ³D₁, que a paridade (-1)^L, por sua vez, separa em dois estados: o de paridade positiva, ³S₁ + ³D₁ e o de paridade negativa, ³P₁.

Esses resultados produzem a seguinte forma geral para a função de onda relativa $\psi(r)$:

$$\psi(r) = \sum_{l=J-1}^{J+1} \frac{1}{r} r_{1J}(r) \psi_{1S_J}^{M_J}(\theta, \phi) \quad (31)$$

Por exemplo, os estados 1S_0 , 3P_1 , ${}^3S_1+{}^3D_1$ e 3G_4 são dados por:

$${}^1S_0 \rightarrow \frac{1}{r} r_{00}(r) [Y_0^{\otimes} \kappa_0]_1^0 \quad (32)$$

$${}^3P_1 \rightarrow \frac{1}{r} r_{11}(r) [Y_1^{\otimes} \kappa_1]_1^{MJ} \quad (33)$$

$${}^3S_1+{}^3D_1 \rightarrow \frac{1}{r} \left[r_{01}(r) [Y_0^{\otimes} \kappa_1]_1^{MJ} + r_{21}(r) [Y_2^{\otimes} \kappa_1]_1^{MJ} \right] \quad (34)$$

$${}^3G_4 \rightarrow \frac{1}{r} r_{44}(r) [Y_4^{\otimes} \kappa_1]_4^{MJ} \quad (35)$$

2-V) A Equação de Movimento.

O potencial NN, como vimos no cap.1, pode ser escrito como:

$$V(r) = \sum_{\nu} O_{\nu} V_{\nu}(r) + S_{12}V_T(r), \quad (36)$$

onde os $V_{\nu}(r)$ são todos os termos centrais presentes no potencial (Central, spin-spin e spin-órbita) e S_{12} é o operador tensorial:

$$S_{12} = 3(\vec{\sigma}^1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}^2 \cdot \hat{r}) - (\vec{\sigma}^1 \cdot \vec{\sigma}^2) \quad (37)$$

O estudo do espalhamento na presença da força tensorial é complicado. Só na década de 40 podemos colecionar uma centena de trabalhos dedicados a este assunto.⁽¹⁵⁾ Uma análise conclusiva, como apresentada aqui, foi dada em 1952 por Blatt e Biedernharn⁽¹⁶⁾.

As relações de comutação de S_{12} apresentadas no cap.1 mostram que L^2 não possui autofunções simultâneas com S_{12} , de modo que l não é um bom número quântico na presença da força tensorial. Este fato justifica a expansão adotada anteriormente, em termos da função $\psi_{1S_J}^{MJ}(\theta, \phi)$, pois ela está rotulada por 3 números quânticos que são constantes de movimento: S , J e J_z ; o símbolo l é apenas um rótulo auxiliar.

A atuação de S_{12} sobre as funções ψ esta indicado no

apêndice B. Vemos que o caso singlete ($S=0$) é bastante simples, pois o autovalor de S_{12} é zero e ele se reduz àquele caso onde não há força tensorial.

Tomemos $J=1$ para ilustrar o que acontece nos estados tripleto. Neste caso há duas situações: quando $l=J$ não há acoplamento, como acontece para o estado 3P_1 que é o único ímpar; quando $l=J-1$ ou $l=J+1$ o operador S_{12} promove um acoplamento formando uma combinação entre 3S_1 e 3D_1 que se constitui o estado par de $J=1$.

A dinâmica do problema é determinada pela equação de Schrödinger, que tem a forma:

$$-\left[\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 - E + \sum_{\nu} O_{\nu} V_{\nu}(r) + S_{12} V_T(r) \right] \psi_{JS}^{MJ P}(\vec{r}) = 0 \quad (39)$$

onde:

$$\psi_{JS}^{MJ P}(\vec{r}) = \sum_{l=J-1}^{J+1} \frac{1}{r} r_{lJ}(r) \psi_{lSJ}^{MJ P}(\theta, \phi) \quad (40)$$

Existem três casos a considerar, dependentes do tipo de atuação do operador S_{12} .

CASO 1: $S=0$. Neste caso a ação do operador S_{12} se anula e a eq. (39) toma a forma:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \sum_{\nu} O_{\nu} U_{\nu}(r) - \frac{J(J+1)}{r^2} \right] r_{lJ}(r) = 0 \quad (41)$$

onde:

$$U_{\nu}(r) = \frac{m V_{\nu}(r)}{\hbar^2}$$

Na convenção de normalização que estamos adotando, o comportamento assintótico de $r_{lJ}(r)$ é dado por:

$$r_1(r) = F_1(kr) + \text{tg} \delta_1 G_1(kr) \xrightarrow{r \gg R} \text{sen}(kr - \pi/2 + \delta_1) \quad (42)$$

CASO 2: $S=1$, $l=J$. A equação de movimento é desacoplada e é costume, neste caso, usarmos a notação: $r_{JJ}(r) \equiv v_J(r)$, então a função $v_J(r)$ é solução da seguinte equação radial:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} + k^2 - \frac{0_v m V_v(r)}{\hbar^2} - \frac{2m V_T(r)}{\hbar^2} \right] r_{1J}(r) = 0 \quad (43)$$

Este estado é normalizado por:

$$v_J(r) = F_J(kr) + \text{tg} \delta_\beta G_J(r) = 0 \quad (44)$$

O comportamento assintótico desta expressão é:

$$v_J(r) \xrightarrow{r \gg R} C \text{sen}(kr - J\pi/2 + \delta_\beta) \quad (45)$$

Nas duas expressões acima: $\delta_\beta \equiv \delta_{JJ}$ é a defasagem, que permite escrever a matriz de espalhamento S como:

$$S_\beta = e^{2i\delta_\beta}$$

CASO 3. $S=1$, $l=J-1$ e $l=J+1$. Neste caso, a autofunção da hamiltoniana é uma soma da forma:

$$\frac{1}{r} r_{J-1J}(r) \psi_{J-1J}^{MJ} + \frac{1}{r} r_{J+1J}(r) \psi_{J+1J}^{MJ} \quad (46)$$

Usando a notação $r_{J-1J} \equiv u_J$ e $r_{J+1J} \equiv w_J$ a equação de Schrödinger fica:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 - E + O_{\nu} V_{\nu}(r) + S_{12} V_T(r) \right] \left[\frac{1}{r} u_J(r) \psi_{J-1, J}^{MJ} + \frac{1}{r} w_J(r) \psi_{J+1, J}^{MJ} \right] = 0 \quad (47)$$

Que fornece duas equações acopladas:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J-1)}{r^2} + k^2 - \frac{m O_{\nu} V_{\nu}}{\hbar^2} + \frac{m 2(J-1) V_T(r)}{\hbar^2 (2J+1)} \right] u_J(r) = \frac{6(J(J+1))^{1/2} V_T(r) w_J(r)}{\hbar^2 (2J+1)} \quad (48)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(J+1)(J+2)}{r^2} + k^2 - \frac{m O_{\nu} V_{\nu}(r)}{\hbar^2} + \frac{m 2(J-1)}{\hbar^2 (2J+1)} \right] w_J(r) = \frac{6(J(J+1))^{1/2} V_T(r) u_J(r)}{\hbar^2 (2J+1)} \quad (49)$$

As soluções assintóticas para $u_J(r)$ e $w_J(r)$ tem a forma:

$$u_J(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} A_1 e^{-i(kr - (J-1)\pi/2)} - B_1 e^{i(kr - (J-1)\pi/2)} \quad (50)$$

$$w_J(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} A_2 e^{-i(kr - (J+1)\pi/2)} - B_2 e^{i(kr - (J+1)\pi/2)}$$

A matriz de espalhamento, neste caso, é 2x2 e dada por:

$$B=SA$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad e \quad S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

$$B_1 = S_{11}A_1 + S_{12}A_2$$

$$B_2 = S_{21}A_1 + S_{22}A_2$$

Como o fluxo precisa ser conservado devemos ter:

$$A^\dagger A = B^\dagger B \quad e \quad S^\dagger S = S S^\dagger = 1$$

O que indica que S é uma matriz unitária e simétrica, já que neste caso $S = \tilde{S}$ onde \tilde{S} é a transposta de S.

Considerações algébricas⁽¹⁶⁾ mostram que uma matriz 2x2 unitária e simétrica contém 3 parâmetros reais, assim escrevemos S como:

$$S = U^{-1} e^{2i\Delta} U$$

onde U é uma matriz unitária contendo apenas 1 parâmetro e Δ é uma matriz diagonal contendo dois parâmetros:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \epsilon_J & \sin \epsilon_J \\ -\sin \epsilon_J & \cos \epsilon_J \end{pmatrix} \quad e \quad \Delta = \begin{pmatrix} \delta_{J\alpha} & 0 \\ 0 & \delta_{J\gamma} \end{pmatrix}$$

Nesta expressão ϵ_J representa o parâmetro de mistura entre as ondas u_J e w_J , causada pela presença do operador S_{12} . Se "desligássemos" a força tensorial, ϵ_J tenderia a zero, a matriz S tornar-se-ia diagonal e o acoplamento entre os estados $i=J-1$ e $i=J+1$ desapareceria. Notamos ainda que nesse limite:

$$\delta_{J\alpha} \rightarrow \delta_{J-1J} \quad e \quad \delta_{J\gamma} \rightarrow \delta_{J+1J}$$

e as funções $\psi_{J+1J}^{MJ}(\theta, \phi)$ e $\psi_{J-1J}^{MJ}(\theta, \phi)$ tornam-se autoestados da

hamiltoniana, como no caso de $\psi_{J1J}^{MJ}(\theta, \phi)$.

As "autodefaseagens" $\delta_{J\alpha} \equiv \delta_\alpha$ e $\delta_{J\gamma} \equiv \delta_\gamma$ indicam a possibilidade de se construir uma onda incidente com mistura entre u_J e w_J tal que a onda espalhada seja mistura dos estados $l=J-1$ e $l=J+1$ com a mesma proporção. Tal função é um autoestado da matriz de espalhamento já que o espalhamento produz meramente uma mudança na fase da onda espalhada com respeito à onda incidente, sem alterar a mistura dos estados. Estes dois autoestados obedecem a seguinte relação:

$$\frac{A_{2\alpha}}{A_{1\alpha}} = \operatorname{tg} \varepsilon \quad \text{e} \quad \frac{A_{2\gamma}}{A_{1\gamma}} = -\operatorname{cotg} \varepsilon$$

e possuem o seguinte comportamento assintótico:

$$\begin{aligned} u_{J\alpha}(r) &\longrightarrow \operatorname{sen} (kr - (J-1)\pi/2 + \delta_\alpha) \\ w_{J\alpha}(r) &\longrightarrow \operatorname{tg} \varepsilon \left[\operatorname{sen}(kr - (J+1)\pi/2 + \delta_\alpha) \right] \\ u_{J\gamma}(r) &\longrightarrow -\operatorname{tg} \varepsilon \left[\operatorname{sen}(kr - (J-1)\pi/2 + \delta_\gamma) \right] \\ w_{J\gamma}(r) &\longrightarrow \operatorname{sen} (kr - (J+1)\pi/2 + \delta_\gamma) \end{aligned} \quad (51)$$

Reescrevendo estas funções na nossa notação temos:

$$u_{J\alpha}(r) = F_{J-1}(kr) + \operatorname{tg} \delta_\alpha G_{J-1}(kr) \quad (52)$$

$r \gg R$

$$w_{J\alpha}(r) = \operatorname{tg} \varepsilon \left[F_{J+1}(kr) + \operatorname{tg} \delta_\alpha G_{J+1}(kr) \right] \quad (53)$$

$r \gg R$

$$u_{J\gamma}(r) = -\operatorname{tg} \varepsilon \left[F_{J-1}(kr) + \operatorname{tg} \delta_\alpha G_{J-1}(kr) \right] \quad (54)$$

$r \gg R$

$$w_{J\gamma}(r) = F_{J+1}(kr) + \operatorname{tg} \delta_\gamma G_{J+1}(kr) \quad (55)$$

$r \gg R$

FORMULÁRIO.

Encerraremos esta secção agrupando algumas das expressões mencionadas acima, de modo a tornar mais clara a estrutura envolvida no problema.

→ Funções de onda:

$$\psi_{0J}^{MJ}(r) = \frac{1}{r} r_{JJ}(r) \psi_{J0J}^{MJ}(\theta, \phi) \quad (56)$$

$$\psi_{\alpha 1J}^{MJ}(r) = \frac{1}{r} u_{J\alpha}(r) \psi_{J-1J}^{MJ}(\theta, \phi) + \frac{1}{r} w_{J\alpha}(r) \psi_{J+11J}^{MJ}(\theta, \phi)$$

$$\psi_{\beta 1J}^{MJ}(r) = \frac{1}{r} v_{J\beta}(r) \psi_{J1J}^{MJ}(\theta, \phi)$$

$$\psi_{\gamma 1J}^{MJ}(r) = \frac{1}{r} u_{J\gamma}(r) \psi_{J-11J}^{MJ}(\theta, \phi) + \frac{1}{r} w_{J\gamma}(r) \psi_{J+11J}^{MJ}(\theta, \phi)$$

cujas expressões para $r \gg R$ são dadas por:

$$\psi_{0J}^{MJ}(r) = \left[F_J(kr) + \text{tg}\delta_{JG_J}(kr) \right] \frac{1}{r} \psi_{J0J}^{MJ}(\theta, \phi) \quad (58)$$

$$\psi_{\alpha 1J}^{MJ}(r) = \left[F_{J-1}(kr) + \text{tg}\delta_{\alpha G_{J-1}}(kr) \right] \frac{1}{r} \psi_{J-11J}^{MJ}(\theta, \phi) +$$

$$\text{tge} \left[F_{J+1}(kr) + \text{tg}\delta_{\alpha G_{J+1}}(kr) \right] \frac{1}{r} \psi_{J+11J}^{MJ}(\theta, \phi) \quad (59)$$

$$\psi_{\beta 1J}^{MJ}(r) = \left[F_J(kr) + \text{tg}\delta_{\beta G_J}(kr) \right] \frac{1}{r} \psi_{J1J}^{MJ}(\theta, \phi) \quad (60)$$

$$\psi_{\gamma 1J}^{MJ}(r) = - \text{tge} \left[F_{J-1}(kr) + \text{tg}\delta_{\beta G_{J-1}}(kr) \right] \frac{1}{r} \psi_{J-11J}^{MJ}(\theta, \phi) +$$

$$\left[F_{J+1}(kr) + \text{tg}\delta_{\gamma G_{J+1}}(kr) \right] \frac{1}{r} \psi_{J+11J}^{MJ}(\theta, \phi) \quad (61)$$

→ Equações diferenciais:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \sum_{\nu} O_{\nu} U_{\nu}(r) - \frac{J(J+1)}{r^2} \right] r_{JJ}(r) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} + k^2 - \sum_{\nu} O_{\nu} U_{\nu}(r) - 2U_T(r) \right] v_J(r) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(J-1)J}{r^2} + k^2 - \sum_{\nu} O_{\nu} U_{\nu}(r) + \frac{2(J-1)}{2J+1} U_T(r) \right] u_J(r) =$$

$$\frac{6(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} U_T(r) w_J(r)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(J+1)(J+2)}{r^2} + k^2 - \sum_{\nu} O_{\nu} U_{\nu}(r) + \frac{2(J-1)}{2J+1} U_T(r) \right] w_J(r)$$

$$\frac{6(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} U_T(r) u_J(r)$$

2-VI) A Função de Green.

Um método bastante útil para tratar problemas de espalhamento é baseado no emprego das funções de Green.

A equação de Schrödinger para uma partícula livre é dada por:

$$\left[T - i \frac{\partial}{\partial t} \right] \phi(r) = 0 \quad (62)$$

onde T é o operador de energia cinética. A função de Green livre satisfaz uma equação análoga:

$$\left[T - i \frac{\partial}{\partial t} \right] G_0(r, r') = \delta(r-r') \quad (63)$$

No caso mais geral, com a presença de um potencial, temos uma equação não homogênea da forma:

$$\left[T - i \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi(r) = V(r) \psi(r) \quad (64)$$

cuja solução pode ser obtida com o auxílio das funções de Green. Essa solução é formalmente escrita como a soma da função que satisfaz a equação homogênea somada à solução geral da equação não homogênea:

$$\psi(r) = \phi(r) + \int dr' G_0(r, r') V(r') \psi(r') \quad (65)$$

Para verificar que esta é de fato uma solução formal do problema, consideremos a ação do operador $(T - i \frac{\partial}{\partial t})$ sobre ela

$$\left[T - i \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi(r) = \left[T - i \frac{\partial}{\partial t} \right] \phi(r) - \int \left[T - i \frac{\partial}{\partial t} \right] G_0(r, r') V(r') \psi(r') dr' \quad (66)$$

$$V(r) \psi(r) = 0 + \int \delta(r, r') V(r') \psi(r') dr' \quad (67)$$

A função de green livre é dada por⁽¹³⁾:

$$G_0(r, r') = - \frac{2m}{4\pi\hbar^2} \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} \quad (68)$$

onde $K^2 = \frac{mE}{\hbar^2}$.

É conveniente expandirmos a função de Green em termos de variáveis angulares:

$$\frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} = 4\pi k \sum_{1,m} j_1(kr_<) h_1^+(kr_>) Y_1^{m1}(\hat{r}') Y_1^{m1}(\hat{r}) \quad (69)$$

onde $j_1(kr)$ e $h_1^+(kr)$ são funções esféricas de Bessel e de Hankel, e $r_>$ e $r_<$ indicam, respectivamente, o maior e o menor entre r e r' .

Para o caso de equações desacopladas, o uso deste resultado na eq.(19) nos fornece uma equação para a componente radial da função de onda $r_1(r)$:

$$r_1(r) = F_1(kr) + \int_0^\infty dr' g_1(r, r') U(r') r_1(r') \quad (70)$$

onde a função de Green $g_1(r)$ é dada por:

$$g_1(r, r') = -k^{-1} \begin{cases} F_1(kr') G_1(kr) & \text{para } r' \geq r \\ F_1(kr) G_1(kr') & \text{para } r' \leq r \end{cases} \quad (71)$$

Logo, a expressão geral para a componente radial $r_1(r)$ é:

$$r_1(r) = F_1(kr) - \frac{1}{k} G_1(kr) \int_0^r dr' F_1(kr') U(r') r_1(r') \\ - \frac{1}{k} F_1(kr) \int_r^\infty dr' G_1(kr') U(r') r_1(r') \quad (72)$$

No caso de equações acopladas, o resultado é totalmente análogo:

$$\begin{aligned}
u_{J\alpha}(r) = & F_{J-1}(kr) - \frac{1}{k} G_{J-1}(kr) \int_0^r dr' F_{J-1}(kr') \left[K_{\nu} U_{\nu}(r') u_{J\alpha}(r') + \right. \\
& \left. \frac{6(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} U_T(r') w_{J\alpha}(r') \right] + \\
- \frac{1}{k} F_{J-1}(kr) \int_r^{\infty} dr' G_{J-1}(kr') & \left[K_{\nu} U_{\nu}(r') u_{J\alpha}(r') + \right. \\
& \left. \frac{6(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} U_T(r') w_{J\alpha}(r') \right] \quad (73)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{J\alpha}(r) = & \tan \epsilon F_{J+1}(kr) - \frac{1}{k} G_{J+1}(kr) \int_0^r dr' F_{J+1}(kr') \left[K_{\nu} U_{\nu}(r') w_{J\alpha}(r') \right. \\
& \left. + \frac{6(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} U_T(r') u_{J\alpha}(r') \right] + \\
- \frac{1}{k} F_{J+1}(kr) \int_r^{\infty} dr' G_{J+1}(kr') & \left[K_{\nu} U_{\nu}(r') w_{J\alpha}(r') + \right. \\
& \left. \frac{6(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} U_T(r') u_{J\alpha}(r') \right] \quad (74)
\end{aligned}$$

$$u_{J\gamma}(r) = -t g \epsilon F_{J-1}(kr) - \frac{1}{k} G_{J-1}(kr) \int_0^r dr' F_{J-1}(kr') \left[K_{\nu} U_{\nu}(r') u_{J\gamma}(r') + \frac{6(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} U_T(r') w_{J\gamma}(r') \right] +$$

$$- \frac{1}{k} F_{J-1}(kr) \int_r^{\infty} dr' G_{J-1}(kr') \left[K_{\nu} U_{\nu}(r') u_{J\gamma}(r') + \frac{6(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} U_T(r') w_{J\gamma}(r') \right] \quad (75A)$$

$$w_{J\gamma}(r) = F_{J+1}(kr) - \frac{1}{k} G_{J+1}(kr) \int_0^r dr' F_{J+1}(kr') \left[K_{\nu} U_{\nu}(r') w_{J\gamma}(r') + \frac{6(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} U_T(r') u_{J\gamma}(r') \right] +$$

$$- \frac{1}{k} F_{J+1}(kr) \int_r^{\infty} dr' G_{J+1}(kr') \left[K_{\nu} U_{\nu}(r') w_{J\gamma}(r') + \frac{6(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} U_T(r') u_{J\gamma}(r') \right] \quad (75B)$$

Quando estamos interessados na defasagens, é conveniente considerarmos o limite dessas expressões para grandes valores de r :

$$r_1(r) = F_1(kr) - \frac{1}{k} G_1(kr) \int_0^{\infty} dr' F_1(kr') U(r') r_1(r') \quad (76)$$

$r \propto$

Combinando este resultado com a eq. (24) obtemos uma expressão para a defasagem de ondas desacopladas:

$$\operatorname{tg} \delta_1 = - \frac{1}{k} \int_0^\infty dr F_1(kr) U(r) r_1(r) \quad (77)$$

Para o caso acoplado tomando o limite de r grande nas expressões (73) e (75) temos:

$$\operatorname{tg} \delta_\alpha = - \frac{1}{k} \int_0^\infty dr F_{J-1}(kr) \left[K_\nu U_\nu(r) u_{J\alpha}(r) + \frac{6(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} U(r) w_{J\alpha}(r) \right] \quad (78)$$

e

$$\operatorname{tg} \delta_\gamma = - \frac{1}{k} \int_0^\infty dr F_{J+1}(kr) \left[K_\nu U_\nu(r) w_{J\gamma}(r) + \frac{6(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} U(r) u_{J\gamma}(r) \right] \quad (79)$$

Combinando as expressões (53), (73) e (78), encontramos uma expressão para o parâmetro de mistura ϵ , que é dado por:

$$\operatorname{tgc} = \frac{\int_0^\infty dr F_{J+1}(kr) \left[K_\nu U_\nu(r) w_{J\gamma}(r) + \frac{6(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} U(r) u_{J\gamma}(r) \right]}{\int_0^\infty dr F_{J-1}(kr) \left[K_\nu U_\nu(r) u_{J\alpha}(r) + \frac{6(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} U(r) w_{J\gamma}(r) \right]} \quad (80)$$

2-VII) A Série de Born.

A função de Green é um instrumento matemático

extremamente útil no estudo de problemas de espalhamento, pois ela serve de base a um método de se obter soluções aproximadas da equação de Schrödinger. Esse método de solução consiste em realizar um processo iterativo baseado na equação integral para $\psi(r)$ (ver eq.(65)).

$$\psi(r) = \phi(r) + \int dr' G_0(r, r') V(r') \psi(r') \quad (81)$$

Se o potencial for, em algum sentido, "pequeno", podemos considerar essa primeira aproximação onde:

$$\psi \approx \psi^{(0)} = \phi$$

Em seguida, empregamos esta função na eq.(81) para obter:

$$\psi(r) \cong \psi^{(1)}(r) = \phi(r) + \int dr' G_0(r, r') V(r') \psi(r') \quad (82)$$

Usando este resultado novamente na eq.(81), obtemos:

$$\psi(r) \cong \psi^{(2)}(r) = \phi(r) + \int dr' G_0(r, r') V(r') \psi(r') + \int dr' G_0(r, r') V(r') \int G_0(r', r'') V(r'') \phi(r'') dr'' \quad (83)$$

A repetição desse procedimento leva à expressão geral:

$$\psi^{(N+1)}(r) = \phi(r) + \int dr' G_0(r, r') V(r') \psi^N(r') \quad (84)$$

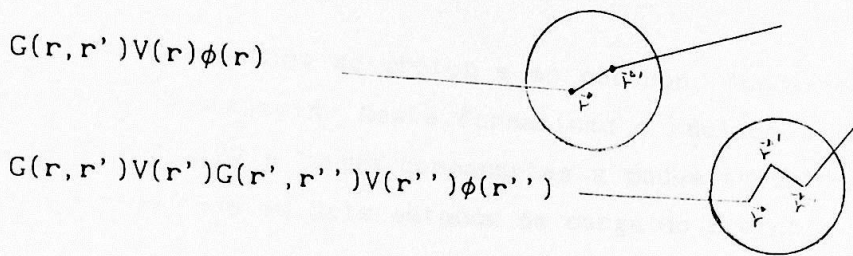
onde N indica o número de integrações sobre a ação do potencial.

Esta série é equivalente à série abaixo:

$$\psi^{(N+1)} = \phi + \int GV\phi + \iint GVG\phi + \dots + \underbrace{\int \dots \int}_N \underbrace{(GVGV\dots GV)}_N \phi \quad (85)$$

Esta é a série de Born, que dá imagem à seguinte interpretação física:

Cada função $V(r)$ presente na integral indica uma interação com o potencial, enquanto que $G_0(\vec{r}, \vec{r}')$ representa a propagação livre da partícula entre os pontos \vec{r} e \vec{r}' . Assim, a série de Born corresponde a uma série de espalhamentos:



e assim sucessivamente.

CAPITULO 3.

O ESPALHAMENTO NUCLEON NUCLEON.

A discussão sobre espalhamento apresentada anteriormente é bastante geral, embora, em certo momento, ela tenha sido especializada para o caso de partículas com spin 1/2. Neste capítulo vamos especializar ainda mais, considerando especificamente o caso de dois nucleons.

3-1) Estados de um sistema núcleon-núcleon.

O nome comum dado ao próton e ao nêutron, "núcleon", provém do formalismo de isospin. Neste formalismo o núcleon é uma partícula com isospin $t=1/2$ e cujas componentes z podem assumir os valores $\pm 1/2$ representando os dois estados de carga do próton e do nêutron.

No contexto da simetria de isospin, as partículas que interagem fortemente são agrupadas em multipletos e as pequenas diferenças de massa são atribuídas a efeitos eletromagnéticos. Assim, se pudéssemos "desligar" a interação eletromagnética, elementos de uma mesma família teriam a mesma massa.

O formalismo de isospin foi modelado à imagem do momento angular e, por isso, o isospin segue a mesma álgebra do momento angular intrínscio (spin).

O espaço de isospin é tridimensional, conhecido como "espaço de carga", spin isotópico ou isospin. Neste espaço o sistema núcleon-núcleon pode estar em estados tripleto ou singleto.

$$T = \vec{t}^{(1)} + \vec{t}^{(2)} = \frac{1}{2} (\vec{\tau}^{(1)} + \vec{\tau}^{(2)})$$

Da desigualdade triangular:

$$|1/2-1/2| \leq T \leq |1/2+1/2|$$

concluimos que o autovalor T pode ser 0 ou 1.

Os estados de isospin são totalmente análogos aos de isospin, visto na secção 2-IV):

$$\text{Singlete } \eta_0^0 = |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} | (+ -) - (- +) \rangle$$

$$\text{Triplete } \left[\begin{array}{l} \eta_1^1 = |11\rangle = |++\rangle \\ \eta_1^0 = |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} | (+ -) + (- +) \rangle \\ \eta_1^{-1} = |1 -1\rangle = |--\rangle \end{array} \right.$$

onde a terceira componente do isospin foi denotada por (+) e (-), para +1/2 e -1/2, respectivamente. Também aqui o estado singlete é antissimétrico na troca dos dois nucleons e os estados tripleto são simétricos nesta troca.

É comum nos referirmos também ao espaço combinado de spin e isospin, neste espaço temos os seguintes subespaços (S,T):

$$\text{Singlete-ímpar } (0,0) = |00\rangle_\sigma |00\rangle_\tau$$

$$\text{Singlete-par } (0,1) = |00\rangle_\sigma |1mt\rangle_\tau$$

$$\text{Triplete-ímpar } (1,0) = |1ms\rangle_\sigma |00\rangle_\tau$$

$$\text{Triplete-par } (1,1) = |1ms\rangle_\sigma |1mt\rangle_\tau$$

Dessa forma, a função de onda completa do sistema núcleon-núcleon tem elementos nos espaços de configuração, spin e isospin, e pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\psi(\mathbf{r}) = R_1(r) Y_1^{m_l}(\theta, \phi) \otimes Y_S^{m_S} \otimes \eta_T^{m_t}$$

Como já discutimos anteriormente é preciso rotular a

função de onda por números quânticos que sejam constantes de movimento. Vimos no caso mais geral que os operadores relevantes são o momento angular total J , sua componente z J_z , o spin total S e a paridade, aos quais acrescentaremos, agora, o isospin total T . Por isso adotamos a seguinte notação:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_J \sum_T \sum_S \psi_{JS}^{MJPT} = \sum_{J, T, S} \sum_{l=J-1}^{J+1} R_{lJ}^T(\mathbf{r}) \psi_{lSJ}^{MJ}(\theta, \phi) \eta_T$$

onde a função ψ_{lSJ}^{MJ} é a função "angular" já apresentada:

$$\psi_{lSJ}^{MJ}(\theta, \phi) = \left[Y_l^m \otimes \kappa_S \right]_J^m = \sum_{m_l, m_s} \langle 1s m_l m_s | J m \rangle |1 m_l\rangle |S m_s\rangle$$

Muitas vezes a função η_T não é escrita explicitamente, mas apenas subentendida.

É importante alertar que as somatórias em ψ :

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_J \sum_T \sum_S \psi_{JS}^{MJPT}$$

não devem ser interpretadas exatamente como somas, pois os estados físicos não são, na verdade, representados por ψ , mas sim por ψ_{JS}^{MJPT} . Ela apenas indica simbolicamente que ψ_{JS}^{MJPT} representa uma base na qual qualquer estado físico pode ser expandido.

Para não sobrecarregar a notação, suprimiremos os índices P e M_J das nossas expressões a partir de agora.

O último ingrediente a ser incorporado na construção de uma função de onda para um sistema de dois nucleons é o princípio de Pauli. Ele exige que a função de onda seja totalmente antissimétrica pela troca destes dois nucleons.

Recordando que os estados tripleto de spin e isospin ($S=1$ e $T=1$) são simétricos enquanto que os estados singleto ($S=0$ e $T=0$) são antissimétricos e que estados com l par são simétricos e l ímpar são antissimétricos, podemos construir todos os estados do

sistema. Alguns desses estados são dados abaixo:

$$J = 0 \quad \psi_{00}^1 = R_{00}^1 \left[Y_0 \otimes \kappa_0 \right] \eta_1$$

$$J = 1 \quad \left[\begin{array}{l} \psi_{10}^0 = R_{11}^0 \left[Y_1 \otimes \kappa_0 \right]_1 \eta_0 \\ \psi_{11} = \left\{ R_{01}^0 \left[Y_0 \otimes \kappa_1 \right]_1 + F_{21}^0 \left[Y_2 \otimes \kappa_1 \right]_1 \right\} \eta_0 \\ \psi_{11}^1 = R_{11}^1 \left[Y_1 \otimes \kappa_1 \right]_1 \eta_1 \end{array} \right.$$

$$J = 2 \quad \left[\begin{array}{l} \psi_{21}^0 = R_{12}^0 \left[Y_2 \otimes \kappa_1 \right]_2 \eta_0 \\ \psi_{21}^1 = \left\{ R_{12}^1 \left[Y_1 \otimes \kappa_1 \right]_2 + F_{32}^1 \left[Y_3 \otimes \kappa_1 \right]_2 \right\} \eta_1 \\ \psi_{20}^1 = R_{22}^1 \left[Y_2 \otimes \kappa_0 \right]_2 \eta_1 \end{array} \right.$$

3-II) As Equações Radiais.

As equações radiais são obtidas quando os estados descritos acima são introduzidos na equação de Schrödinger. Escrevendo explicitamente todos os termos do potencial SSCC, apresentado no capítulo 1, temos:

$$V(r) = V_C(r) + V_{L^2}(r)L^2 + V_{LS}(r)L \cdot S + V_T(r)S_{12} + V_Q(r)Q$$

Então a equação de Schrödinger torna-se:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 + V(r) - E \right] \psi_{JS}^I(\vec{r}) = 0$$

No caso de estados com um só autovalor l , tal como ψ_{00}^1 temos:

$$\psi_{00}^1 = R_{00}^1(r) \psi_{000} = \frac{r_{00}^1(r)}{r} \left[Y_0^0 \otimes \kappa_0 \right]_0$$

e

$$\left[-\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 + V(r) - E \right] \psi_{00}^1 = 0$$

A atuação dos operadores sobre ψ_{000} como indicada no apêndice B, nos fornece a equação desejada:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m}{\hbar^2} Vc(r) + \frac{m}{\hbar^2} E \right] r_{00}^1(r) = 0$$

Nos casos em que o estado é composto por dois termos com valores diferentes de 1, obtemos um sistema de equações acopladas; por exemplo, no caso de estado ψ_{11}^0 que tem os números quânticos do deuteron, obtemos:

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 + V(r) - E \right] \psi_{21}^1 &= 0 \\ \left[-\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 + V(r) - E \right] \left[\frac{r_{01}^0(r)}{r} \left[Y_0^0 \otimes \kappa_1 \right]_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_{21}^0(r)}{r} \left[Y_2^0 \otimes \kappa_1 \right]_1 \right] = 0 \end{aligned}$$

que fornece:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m}{\hbar^2} Vc(r) + \frac{m}{\hbar^2} E \right] r_{01}^0(r) = \sqrt{8} \frac{m}{\hbar^2} V_T(r) r_{21}^0(r)$$

e

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{6}{r^2} + \frac{mE}{\hbar^2} - \frac{m}{\hbar^2} V_C(r) - 6 \frac{m}{\hbar^2} V_{L2}(r) + \frac{2m}{\hbar^2} V_T(r) + \right. \\ \left. + 3 \frac{m}{\hbar^2} V_{1S}(r) - 21 \frac{m}{\hbar^2} V_Q(r) \right] r_{21}^0(r) = \sqrt{8} \frac{m}{\hbar^2} V_T(r) r_{01}^0(r)$$

Todos os demais são totalmente análogos aos dois exemplos fornecidos. A lista completa das equações radiais para valores de l menores ou iguais a 4 é fornecida no apêndice B.

3-III) O Dêuteron.

O dêuteron é o único estado ligado de dois nucleons, sendo formado por um próton e um nêutron. O seu momento angular total é $J=1$ e os spins dos dois nucleons formam um tripleto. No que diz respeito ao momento angular orbital, a onda S é fortemente dominante, mas existe também uma pequena componente de estado D, com probabilidade de aproximadamente 5%. Na nossa notação ele corresponde ao seguinte estado:

$$\psi_{11}^{+0} = (R_{01}^0(r) \psi_{011} + R_{21}^0(r) \psi_{211}) \eta_0$$

ou, na representação mais comum:

$$\psi_D = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{r} \left[u(r) + \frac{1}{\sqrt{8}} w(r) S_{12} \right]$$

$$\text{onde } u(r) \equiv \frac{R_{01}^0(r)}{r} \quad \text{e} \quad w(r) \equiv \frac{R_{21}^0(r)}{r} .$$

Essa escolha para a função de onda do dêuteron ressalta a importância do operador S_{12} na interação NN pois, como já vimos, é a presença desta componente tensorial que produz um momento de quadrupolo não nulo para o dêuteron.

Substituindo-se a função de onda acima na equação de Schrödinger com o potencial SSCC, obtém-se o sistema de equações acopladas do dêuteron, dadas por:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m}{\hbar^2} V_C(r) + \frac{m}{\hbar^2} E \right] u(r) = \sqrt{8} \frac{m}{\hbar^2} U_T(r) w(r)$$

e

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{6}{r^2} + \frac{mE}{\hbar^2} - \frac{m}{\hbar^2} V_C(r) - 6 \frac{m}{\hbar^2} V_{L2}(r) + \frac{2m}{\hbar^2} V_T(r) + \right. \\ \left. + 3 \frac{m}{\hbar^2} V_{1S}(r) - 21 \frac{m}{\hbar^2} V_Q(r) \right] w(r) = \sqrt{8} \frac{m}{\hbar^2} V_T(r) u(r)$$

Este sistema de equações é resolvido numericamente utilizando-se as expressões assintóticas de $u(r)$ e $w(r)$ dadas por:

$$u(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} A_S e^{-\alpha r}$$

$$w(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} A_S \left[1 + \frac{3}{\alpha r} + \frac{3}{(\alpha r)^2} \right] e^{-\alpha r}$$

onde $\alpha^2 = mE_d$. Sendo m massa do núcleon 938,93mev e E_d a energia de ligação do dêuteron 2,22465mev.

No cálculo numérico das funções $u(r)$ e $w(r)$, adotamos o seguinte procedimento:

Escrevemos as funções $u(r)$ e $w(r)$ como:

$$u(r) = N(u_1(r) + \eta u_2(r))$$

$$w(r) = N(w_1(r) + \eta u_2(r))$$

com as seguintes condições de contorno assintóticas:

$$\begin{cases} u_1(r) = e^{-(\alpha r)} \\ w_1(r) = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} u_2(r) = 0 \\ w_2(r) = \left[1 + \frac{3}{\alpha r} + \frac{3}{(\alpha r)^2} \right] e^{-\alpha r} \end{cases}$$

Obtidas as soluções $[u_1, w_1]$ e $[u_2, w_2]$ o valor de η é

encontrado por uma conta algébrica simples impondo que $u(r)$ e $w(r)$ tenham o comportamento adequado na origem, isto é se anulem neste ponto:

$$\eta = - \frac{u_1(0)}{u_2(0)} = - \frac{w_1(0)}{w_2(0)}$$

Realizando-se este cálculo com o potencial SSCC, encontramos o valor $\eta = .0,02524$, enquanto que o valor experimental⁽⁵⁾ é $0,0271 \pm 0,0008$.

Além do η , várias outras propriedades do dêuteron podem ser calculadas a partir das funções $u(r)$ e $w(r)$, por exemplo, o seu raio quadrático médio r_d , e o momento de quadrupolo são dados por:

$$r_d = \left\{ \int_0^\infty dr r^2 [u^2(r) + w^2(r)] \right\}^{1/2}$$

$$Q = \frac{1}{20} \int_0^\infty dr r^2 w(r) \left[\sqrt{8} u(r) - w(r) \right]$$

Esta última expressão mostra claramente a existência de uma onda D no dêuteron, uma vez que sem ela Q seria nulo.

Os valores dos observáveis η , r_d e Q são particularmente sensíveis à parte de longo alcance do potencial, pois dependem da parte de longo alcance das funções de onda. Um estudo recente⁽⁶⁾ confirma o fato de que o pion determina completamente cerca de 95% do valor dessas grandezas. Deste modo, os seus valores experimentais podem ser tomados como uma evidência da própria existência de píons no interior do dêuteron.

CAPITULO 4.

ESTUDO NUMÉRICO / RESULTADOS.

Apresentamos neste capítulo os nossos resultados numéricos. Os resultados obtidos para a solução exata do problema de espalhamento são colocados lado a lado daqueles provenientes do estudo da série de Born. Em ambos os casos evidenciamos o papel do pión, de modo a avaliar a sua importância em função da variação da energia e do momento angular orbital l .

Selecionamos apenas algumas das ondas parciais para realizar tal estudo, de modo a cobrirem os principais aspectos do problema.

Concentramos nossa atenção nos estados 1S_0 , $^3S_1 + ^3D_1$, 3P_1 e 3G_4 . O primeiro deles tem $l=0$, o que faz com que a barreira centrífuga não atue. Assim este estado é sensível às partes mais internas do potencial. Além disso, o estado 1S_0 é singlete, não há a componente tensorial do potencial, e por isso somente uma pequena parcela do OPEP está presente no termo central.

O segundo caso, $^3S_1 + ^3D_1$, por ser o canal do deuteron é um termo essencial neste estudo. Trata-se de um estado acoplado, onde uma parcela esfericamente simétrica (3S_1) está misturada a uma outra (3D_1) fortemente influenciada pelo OPEP, já que ela é devida ao termo tensorial do potencial $V_T(r)$.

A onda 3P_1 encerra o conjunto dos estados com $J=1$, sendo incluída por completeza, já que ela pertence a um subespaço de spin-isospin diferente das outras duas já mencionadas.

Finalmente o estado 3G_4 é um caso onde vários fatores colaboram para que o OPEP seja importante. Ele é um estado tripleto e, como tal, sente o termo tensorial no potencial; além disso l é grande, o que corresponde a uma forte barreira centrífuga, ressaltando a parte mais externa do potencial, determinada pela cauda piônica.

Trataremos primeiro cada caso isoladamente e, em seguida, faremos o cruzamento das informações contidas em cada um deles.

4-1) A Onda 1S_0 .

O primeiro passo consiste na solução da equação de Schrödinger. Neste caso, o estado 1S_0 , que na nossa notação é:

$$\psi_{00}^1 = R_{00}^1(r) \left[Y_0^0 \otimes \kappa_0 \right]_0 \eta_1 \quad (86)$$

é substituído na equação:

$$\left[\frac{\nabla^2}{m} + E - V(r) \right] \psi_{00}^1(r) = 0 \quad (87)$$

Usamos o sistema de unidades em que $\hbar=c=1$, cujo fator de conversão é $\hbar c=197,32858$. $V(r)$ é o potencial SSCC dado por:

$$V(r) = V(r) + VL_2(r)L^2 + VL_s(r)L \cdot S + VT(r)S_{12} + Vq(r)Q \quad (88)$$

A atuação desses operadores, como indicada no apêndice B, é a seguinte:

$$L^2 \left[\psi_{00}^1(\vec{r}) \right] = L \cdot S \left[\psi_{00}^1(\vec{r}) \right] = S_{12} \left[\psi_{00}^1(\vec{r}) \right] = Q \left[\psi_{00}^1(\vec{r}) \right] = 0 \quad (89)$$

De modo que a eq. (87) se reduz a:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - mVc(r) \right] r_{00}^1(r) = 0 \quad (90)$$

A solução numérica é obtida através do seguinte procedimento.

Escrevemos a forma de $r_{00}^1(r)$ para grandes distâncias como:

$$r_{00}^1(r) \underset{r \gg R}{=} F_0(kr) + \operatorname{tg} \delta_0 G_0(kr) \quad (91)$$

Resolvemos, então, a eq. (90) duas vezes, encontrando duas funções r_1 e r_2 , com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} r_1(r) = F_0(kr) \\ \frac{\partial}{\partial r} r_1(r) = F_0'(kr) \end{cases} \quad (92)$$

$$\begin{cases} r_2(r) = G_0(kr) \\ \frac{\partial}{\partial r} r_2(kr) = G_0'(kr) \end{cases} \quad (93)$$

Este procedimento permite que a solução do problema dada por:

$$r_{00}^1(r) = r_1(r) + \operatorname{tg} \delta_0 r_2(r) \quad (94)$$

satisfaça automaticamente as condições de contorno assintóticas.

Para obter δ_0 impomos que r_{00}^1 se anule na origem, ou seja:

$$\operatorname{tg} \delta_0 = - \frac{r_1(0)}{r_2(0)}$$

Os valores das funções r_1 e r_2 na origem foram calculados extrapolando-se os resultados numéricos obtidos em torno do ponto 10^{-3} fm. Estas curvas ajustadas foram estudadas e o melhor ajuste foi obtido na forma:

A

$$r_1^1(r) = \frac{1}{r^1} + B_1 + C_1 r + D_1 r^2 \quad (95)$$

onde l é o momento angular orbital da onda e 1 representa a l ésima curva. Nos casos em que $l \neq 0$ este procedimento evita as divergências ocasionadas pelo termo $l(l+1)r^{-2}$ presente na equação diferencial. Esse tipo de ajuste aumenta a precisão do resultado, além de reduzir muito o tempo de processamento dos cálculos. A defasagem obtida desta maneira chamaremos δ_{DIRETO}^0 .

Uma vez obtida essa defasagem a função $r_{00}^1(r)$ é calculada em todo o espaço usando a eq.(94). A função de onda obtida desse modo chamaremos ψ_{DIRETA} .

A seguir a solução ψ_{DIRETA} é testada num cálculo autoconsistente com a função de Green, calculando-se a seguinte equação (eq.(72)):

$$\begin{aligned} \psi_{GREEN}^0(r) = & F_0(kr) - \frac{1}{k} G_0(kr) \int_0^r F_0(kr') V(r') \psi_{DIRETA}^0(r') dr' \\ & - \frac{1}{k} F_0(kr) \int_r^\infty G_0(kr') V(r') \psi_{DIRETA}^0(r') dr' \end{aligned} \quad (96)$$

A defasagem também é testada usando-se a expressão (eq.(77)):

$$\text{tg } \delta_{GREEN}^0 = - \frac{1}{k} \int_0^\infty F_0(kr) V(r) \psi_{DIRETA}^0(r) dr \quad (97)$$

As expressões (96) e (97) testam a confiabilidade das soluções ψ_{DIRETA} e δ_{DIRETO} calculadas anteriormente. Além da autoconsistência, os valores de δ devem ser comparados aos resultados publicados por Sprung e De Turreil, responsáveis pelo

potencial SSCC.

A contribuição do OPEP pode ser estimada escrevendo-se na eq(96) o potencial da seguinte forma:

$$V(r) = V_R(r) + V_{OPEP}(r) \quad (98)$$

o que permite o cálculo da contribuição isolada de cada um dos termos. A defasagem δ_{OPEP} obtida deste modo nos dá apenas uma idéia do valor desta contribuição, uma vez que ψ_{DIRETA} foi calculada levando-se em conta todo o potencial.

A importância do OPEP fica determinado de modo mais claro, no entanto, no estudo da série de Born. Essa série, como vimos na secção 2-VII) é um processo iterativo que se inicia substituindo-se a função ψ_{DIRETA} na eq.(97) pela função $F_0(kr)$; ou seja:

$$\begin{aligned} \psi_{B1}^0(r) = & F_0(kr) - \frac{1}{k} G_0(kr) \int_0^r F_0(kr') V(r') F_0(kr') dr' \\ & - \frac{1}{k} F_0(kr) \int_r^\infty G_0(kr') V(r') F_0(kr') dr' \end{aligned} \quad (99)$$

A solução $\psi_{B1}^0(r)$, por sua vez, é utilizada no cálculo do segundo termo da série:

$$\begin{aligned} \psi_{B2}^0(r) = & F_0(kr) - \frac{1}{k} G_0(kr) \int_0^r F_0(kr') V(r') \psi_{B1}^0(r') dr' \\ & - \frac{1}{k} F_0(kr) \int_r^\infty G_0(kr') V(r') \psi_{B1}^0(r') dr' \end{aligned} \quad (100)$$

e assim sucessivamente.

Em cada iteração calculamos a função de onda ψ_{B1}^0 a defasagem δ_{B1} , bem como as correspondentes contribuições do OPEP,

Tabela 3. Estado $^1S_0^+$

	50 meV		100 meV		200 meV	
	$\delta_{B1}(0)$	$\delta_{\pi 1}(0)$	$\delta_{B1}(0)$	$\delta_{\pi 1}(0)$	$\delta_{B1}(0)$	$\delta_{\pi 1}(0)$
B1	26.9009	7.7144	15.8003	5.9428	-8.9701	3.8372
B2	37.1945	7.7725	29.7900	5.8558	20.3110	3.7695
B3	35.1964	7.7500	17.4908	5.9278	-4.8427	3.8138
B4	39.0129	7.7481	28.6265	5.9276	12.8143	3.8136
B5	36.6279	7.7481	19.7133		2.6080	
B6	38.8683		27.0321		7.8127	
B7	37.1071		21.2040		5.6380	
B8	38.6061		25.9348		6.2846	
B9	37.3761		22.1574		6.2927	
B10	38.4044		25.2122			
B11	37.5536		22.7674			
B12	38.2621		24.7403			
B13	37.6747		23.1588			
B14	38.1634		24.4334			
B15	37.7579		23.4106			
B16	38.0950		24.2342			
B19			23.5728			
B18			24.1051			
B19			23.6775			
B20			24.0215			
B21			23.7451			
$\delta_{DIRETO}^{(0)}$	38.0509		23.9622		6.2830	
$\delta_{GREEN}(0)$	37.9523		23.8441		6.1672	
$\delta_{OPEP}(0)$	8.65277		5.47255		3.3993	

obtidas usando-se $V\pi$ em lugar de V .

Os nossos resultados são mostrados na tabela abaixo; δ_{B1} indica o valor da defasagem obtido na iésima iteração da série de Born, enquanto que $\delta_{\pi 1}$ é a correspondente contribuição piônica.

Na tabela acima estão mostrados os valores das defasagens δ_{B1} e $\delta_{\pi 1}$, obtidos no cálculo iterativo da série de Born. Esses valores foram calculados em 3 energias diferentes e estão dispostos em ordem crescente do número de contagens que a função potencial $V(r)$ é integrada, assim, Born 1 representa, por exemplo, a aproximação de Born. Para efeitos de comparação também estão tabelados os valores de δ_{DIRETO} e δ_{GREEN} obtidos a partir da função de onda exata do problema de espalhamento.

Os valores obtidos para δ_{DIRETO} e δ_{GREEN} são bastante coerentes, sendo as pequenas diferenças devidas a imprecisões numéricas. A proximidade desses resultados indica que os dois cálculos são autoconsistentes.

Por outro lado, os valores de δ_{B1} convergem para aquele de δ_{DIRETO} depois de um número de iterações que varia com a energia. Além disso, a convergência da série se manifesta pelo fato que os valores vão se tornando cada vez mais parecidos à medida em que o número de iterações aumenta. A velocidade da convergência da série pode ser avaliada introduzindo-se uma janela centrada em torno de δ_{DIRETO} . Quando isso é feito para um intervalo de 3 % vemos que para a energia de 50mev são necessárias 16 iterações enquanto que para 100mev temos 21 iterações e para 200mev 9 iterações.

Os valores de $\delta_{\pi 1}$ apresentam uma convergência bem mais rápida que os de δ_{B1} ; em todos os casos ele é praticamente gerado pela primeira aproximação, diferindo menos de 0,5% desse valor. Por outro lado, comparando-se os valores para os quais convergem $\delta_{\pi 1}$ (δ_{π}) e δ_{B1} (δ_B), vemos que a parcela representada por δ_{π} aumenta com a energia, sendo de 20% em 50mev, 24% em 100mev, chegando a 60% em 200mev.

4-II) O Estado ${}^3S_1 + {}^3D_1$.

Este estado na secção 3-I) foi escrito da seguinte forma:

$$\psi_{11}^0 = \left\{ F_{01}^1(r) \left[Y_0^0 \otimes \kappa_1 \right]_1 + F_{21}^0(r) \left[Y_2^0 \otimes \kappa_1 \right]_1 \right\} \eta_0 \quad (101)$$

e a equação de Schrödinger para o potencial SSCC fornece as equações acopladas abaixo:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - mV_c(r) \right] u(r) = m(8)^{1/2} V_T(r) w(r) \quad (102)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{6}{r^2} + k^2 - mV_c(r) - 6mV_L2(r) + 3mV_Ls(r) + 2mV_T(r) - 21mV_Q(r) \right] w(r) = m(8)^{1/2} V_T(r) u(r)$$

onde:

$$u(r) = \frac{R_{01}^1(r)}{r} \quad \text{e} \quad w(r) = \frac{R_{21}^0(r)}{r}$$

Este problema não tem solução simples como o anterior e necessita de um tratamento totalmente diferenciado.

A solução numérica do problema é construída a partir da origem, dando-se valores às funções u e w e suas derivadas. Esse procedimento gera soluções $u(r)$ e $w(r)$, cujo comportamento assintótico tem a forma geral dada por (52) a (55).

$$\begin{aligned}
u(r) &= A \operatorname{cose} \left[\cos\delta_{\alpha} F_0(kr) + \operatorname{sen}\delta_{\alpha} G_0(kr) \right] + \\
&\quad - B \operatorname{sene} \left[\cos\delta_{\gamma} F_0(kr) + \operatorname{sen}\delta_{\gamma} G_0(kr) \right] \\
w(r) &= A \operatorname{sene} \left[\cos\delta_{\alpha} F_2(kr) + \operatorname{sen}\delta_{\alpha} G_2(kr) \right] + \\
&\quad + B \operatorname{cose} \left[\cos\delta_{\gamma} F_2(kr) + \operatorname{sen}\delta_{\gamma} G_2(kr) \right]
\end{aligned} \tag{103}$$

onde A e B são coeficientes arbitrários.

Em outras palavras, a função assintótica obtida será uma combinação linear das soluções ψ_{α} e ψ_{γ} obtidas na secção 2-V) com pesos A e B respectivamente:

$$\psi = A \psi_{\alpha} + B \psi_{\gamma} \tag{104}$$

As equações (106) podem ser escritas como:

$$u = U_F F_0 + U_G G_0 \tag{105}$$

$$w = W_F F_2 + W_G G_2$$

onde:

$$\begin{aligned}
U_F &= A \operatorname{cose} \cos\delta_{\alpha} - B \operatorname{sene} \cos\delta_{\gamma} \\
U_G &= A \operatorname{cose} \operatorname{sen}\delta_{\alpha} - B \operatorname{sene} \operatorname{sen}\delta_{\gamma} \\
W_F &= A \operatorname{sene} \cos\delta_{\alpha} + B \operatorname{cose} \cos\delta_{\gamma} \\
W_G &= A \operatorname{sene} \operatorname{sen}\delta_{\alpha} + B \operatorname{cose} \operatorname{sen}\delta_{\gamma}
\end{aligned} \tag{106}$$

Os valores de U_F , U_G , W_F e W_G podem ser obtidas a partir da solução numérica do problema, o que faz com que essas expressões representem um sistema de quatro equações e cinco

incógnitas, A , B , ϵ , δ_α e δ_γ . Podemos, portanto, expressar quatro das incógnitas em função de uma outra, que tomamos como sendo tge :

$$A^2 + B^2 = U_F^2 + U_G^2 + W_F^2 + W_G^2 \quad (107)$$

$$\frac{A^2}{B^2} = \frac{\text{tg}^2 \epsilon (U_F^2 + U_G^2) - 2 \text{tge} (U_F W_F + U_G W_G) + W_F^2 + W_G^2}{\text{tg}^2 \epsilon (W_F^2 + W_G^2) + 2 \text{tge} (U_F W_F + U_G W_G) + U_F^2 + U_G^2} \quad (108)$$

$$\text{tg} \delta_\alpha = \frac{U_G + \text{tge} W_G}{U_F + \text{tge} W_F} \quad (109)$$

$$\text{tg} \delta_\gamma = \frac{\text{tge} U_G - W_G}{\text{tge} U_F - W_F} \quad (110)$$

Para encontrarmos tge é preciso gerar uma outra solução do problema, fornecendo-se valores a u , w e nas derivadas na origem diferentes das usadas anteriormente. Deste modo obtemos uma outra solução do problema, designaremos por uma barra, e que corresponde a uma outra combinação linear das funções ψ_α e ψ_γ , com pesos \bar{A} e \bar{B} :

$$\psi = \bar{A} \bar{\psi}_\alpha + \bar{B} \bar{\psi}_\gamma \quad (111)$$

Para esta nova solução podemos escrever expressões totalmente análogas às equações (107) a (110). O fato de as defasagens δ_α e δ_γ deverem ser as mesmas nos dois casos permitem-nos escrever:

$$\text{tg} \delta_\alpha = \frac{U_G + \text{tge} W_G}{U_F + \text{tge} W_F} = \frac{\bar{U}_G + \text{tge} \bar{W}_G}{\bar{U}_F + \text{tge} \bar{W}_F} \quad (112)$$

$$\text{tg} \delta_\gamma = \frac{\text{tge} \bar{U}_G - \bar{W}_G}{\text{tge} \bar{U}_F - \bar{W}_F} = \frac{\text{tge} \bar{U}_G - \bar{W}_G}{\text{tge} \bar{U}_F - \bar{M}_F} \quad (113)$$

A solução de qualquer dessas equações permite-nos encontrar t_{ge} , que pode ser empregado nas equações (110) a (113) para encontrar os demais parâmetros assintóticos. Finalmente, conhecidos os valores de A e B , \bar{A} e \bar{B} , podemos determinar as soluções ψ_α e ψ_γ por meio das equações:

$$\psi_\alpha = \frac{1}{\begin{bmatrix} A & -\bar{A} \\ B & -\bar{B} \end{bmatrix}} \left\{ \frac{1}{B} (\psi) - \frac{1}{\bar{B}} (\bar{\psi}) \right\} \quad (114)$$

ou

$$\begin{bmatrix} u_\alpha \\ w_\alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{bmatrix} A & -\bar{A} \\ B & -\bar{B} \end{bmatrix}} \left\{ \frac{1}{B} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \frac{1}{\bar{B}} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\psi_\gamma = \frac{1}{\begin{bmatrix} B & -\bar{B} \\ A & -\bar{A} \end{bmatrix}} \left\{ \frac{1}{A} (\psi) - \frac{1}{\bar{A}} (\bar{\psi}) \right\} \quad (115)$$

ou

$$\begin{bmatrix} u_\gamma \\ w_\gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{bmatrix} B & -\bar{B} \\ A & -\bar{A} \end{bmatrix}} \left\{ \frac{1}{A} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \frac{1}{\bar{A}} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{bmatrix} \right\}$$

O procedimento descrito aqui permite-nos obter os parâmetros ε , δ_α , e δ_γ , bem como as funções radiais u_α , w_α , u_γ e w_γ .

De forma semelhante à secção anterior nos referirmos

às soluções obtidas desta forma como: ε_{DIRETO} , δ_{DIRETO}^α , δ_{DIRETO}^γ , $u_{DIRETA}^\alpha(r)$, $w_{DIRETA}^\alpha(r)$, $w_{DIRETA}^\gamma(r)$ e $u_{DIRETA}^\gamma(r)$.

As soluções u e w diretas podem ser testadas, usando-as para alimentar as equações (73) a (75), que produzem as

funções que chamaremos de u_{GREEN}^{α} , w_{GREEN}^{α} , u_{GREEN}^{γ} e w_{GREEN}^{γ} usando as soluções diretas nas equações (78), (79) e (80), obtemos as defasagens δ_{GREEN}^{α} , δ_{GREEN}^{γ} e o parâmetro de mistura ϵ_{GREEN} .

Separando a contribuição do OPEP ao potencial, podemos calcular os parâmetros referentes a ele, denominados:

$$\delta_{OPEP}^{\alpha}, \delta_{OPEP}^{\gamma}, \epsilon_{OPEP}^{\alpha} \text{ e } \epsilon_{OPEP}^{\gamma}.$$

Os resultados obtidos por meio dos vários procedimentos estão mostrados na tabela abaixo:

Tabela 4 . Estado ${}^3S_1 + {}^3D_1$

	100 mev	200 mev
ϵ_{DIRETO}	4.2682	8.6252
$\epsilon_{GREEN}^{\alpha}$	4.2563	8.5934
$\epsilon_{GREEN}^{\gamma}$	4.5048	8.7809
ϵ_{OPEP}^{α}	8.8525	12.6397
ϵ_{OPEP}^{γ}	32.1736	17.4386
δ_{DIRETO}^{α}	40.3697	19.1614
δ_{GREEN}^{α}	40.3257	19.1788
δ_{OPEP}^{α}	43.3756	29.4410
δ_{DIRETO}^{γ}	-11.5618	-17.2328
δ_{GREEN}^{γ}	-11.5575	-17.2245
δ_{OPEP}^{γ}	-5.1278	-10.6372

A inspeção desta tabela indica que há um bom acordo entre os cálculos direto e de Green, uma vez que os valores obtidos estão muito próximos. Os valores designados por OPEP não devem ser encarados como a contribuição efetiva do pión, pois as funções diretas foram calculadas levando-se em conta todo o potencial. Esse resultado fornece apenas um indício de importância de contribuição do pión, analogamente ao que aconteceu nos demais estados.

4-III) o Estado 3P_1 .

O estado 3P_1 é representado da seguinte forma:

$$\psi_{11}^1 = R_{11}^1(r) \left[Y_{10} \otimes \kappa_1 \right]_1 \eta_1 \quad (116)$$

cuja equação radial é dada por:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} + k^2 - mVc(r) - 2mVL_2(r) + mVLS(r) - 2mVT(r) + 5mVQ(r) \right] r_{11}^1(r) = 0 \quad (117)$$

A solução ψ_{DIRETA}^1 desta equação é obtida de modo análogo às anteriores, e é testada pelo método de Green.

Expressando o potencial na forma da eq. (98) podemos calcular a contribuição de VOPEP a δ_{EXATO} . Por outro lado, substituindo-se ψ_{DIRETA}^1 por $F_1(kr)$ na eq. (77) obtemos as defasagens em aproximação de Born $\delta_{B\pi}^1$ e $\delta_{\pi 1}^1$. Prosseguindo no processo iterativo chegamos à tabela mostrada abaixo:

Tabela 5. Estado 3P_1 .

50 mev			100 mev		200 mev	
	δ_{B1}	δ_{π_1}	δ_{B1}	δ_{π_1}	δ_{B1}	δ_{π_1}
B1	-11.40973	-10.19028	-19.17761	-14.42088	-30.59483	-17.17371
B2	-6.52771	-8.46533	-8.70414	-12.37258	-12.51877	-15.88567
B3	-10.13202	-8.93041	-17.39455	-12.94809	-28.17364	-16.32149
B4	-7.37596	-8.80539	-10.22187	-12.80426	-15.16164	-16.24774
B5	-9.51111	-8.83933	-16.23759	-12.84130	-26.35003	-16.26457
B6	-7.85862	-8.83011	-11.23428	-12.83181	-16.96425	-16.26122
B7	-9.14100	-8.83261	-15.42794	-12.83424	-25.00629	-16.26193
B8	-8.14746	-8.83193	-11.93521	-12.83362	-18.23907	-16.26179
B9	-8.91827	-8.83212	-14.85959	-12.83378	-24.02099	-16.26182
B10	-8.32088		-12.42198		-19.14497	
B11	-8.78424		-14.46137		-23.30253	
B12	-8.42507		-12.76044		-19.79074	
B13	-8.70362		-14.18274		-22.78075	
B14	-8.48765		-12.99604		-20.25216	
B15			-13.98796		-22.40274	
B16			-13.20034		-20.58256	
B17					-21.97325	
δ_{DIRETO}	38.0509		23.9622		6.2830	
δ_{GREEN}	37.9523		23.8441		6.1672	
δ_{OPEP}	8.6527		5.4725		3.3993	

Nesta tabela podemos verificar que os valores

de δ_{DIRETO} e δ_{GREEN} são praticamente iguais, o que mostra a coerência no processo de cálculo. Os valores de δ_{π_1} tem uma convergência mais rápida que os de δ_{B_1} , no critério adotado, nas secções anteriores vemos que δ_{π_1} converge em apenas 5 iterações, independente de energia, enquanto que a convergência de δ_{B_1} , ao contrário, varia com a energia, sendo necessárias 12 iterações em 50 MeV, 16 iterações em 100 MeV e 17 iterações em 200 MeV, para que a série convirja.

A relação entre δ_{π} e δ_B também varia com a energia ; em 50 MeV δ_{π} é 3% superior a δ_B , sendo que nos demais casos ele é inferior, chegando ao percentual de 95% de δ_B em 100 MeV e 75% em 200 MeV.

4-IV) O Estado 3G_4 .

O estado 3G_4 é dado por:

$$\psi_{44}^0 = R_{44}^0(r) \left[Y_4^0 \otimes \kappa_1 \right]_4 \eta_0 \quad (118)$$

que, substituído na equação de Schrödinger produz a seguinte equação radial:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{20}{r^2} + k^2 - mVc(r) - 20mVL_2(r) + mVL_3(r) - 2mVT(r) + 77mVQ(r) \right] r_{44}^0(r) = 0 \quad (119)$$

Escrevemos então $r_{44}^0(r)$ para r grande como:

$$r_{44}^1(r) = F_4(kr) + \text{tg} \delta_4 G_4(kr) \quad (120)$$

$r \gg R$

e repetimos o procedimento usado na seção anterior, obtendo δ_{DIRETO}^4 impondo que a função de onda se anula na origem.

A partir de δ_{DIRETO} e da eq. (113) encontramos ψ_{DIRETA} , com a qual realizamos o teste de Green:

Escrevendo o potencial na forma da eq. (98) calculamos a contribuição isolada do OPEP nas defasagens, tanto na solução exata como na série de Born (δ_{π_1}).

Os resultados obtidos para este estado estão mostrados na tabela que se segue.

Tabela 6: Estado 3G_4 .

	50 mev		100 mev		200 mev	
	δ_{B1}	δ_{π_1}	δ_{B1}	δ_{π_1}	δ_{B1}	δ_{π_1}
B1	0.7430	0.7432	2.2762	2.2437	5.4810	5.2572
B2	0.7608	0.7540	2.3630	2.3245	5.8501	5.5717
B3	0.7615	0.7574	2.3707	2.3245	5.9146	5.5717
B4	0.7615	0.7574	2.3715		5.9259	
B5			2.3716			
B6			2.3716			
B7						
δ_{DIRETO}	0.7514		2.2539		5.5328	
δ_{GREEN}	0.7606		2.3573		5.7553	
δ_{OPEP}	0.7451		2.2533		5.2034	

Esta tabela indica que, novamente, os cálculos que fornecem δ_{DIRETO}^4 e δ_{GREEN}^4 são autoconsistentes, uma vez que os valores obtidos são bastante parecidos. A rápida convergência dos valores de δ_{BI} é facilmente observada já que com apenas 3 iterações, em todos os casos, chegamos ao intervalo de 3% adotado no caso 1S_0 . A mesma rapidez é demonstrada na convergência dos valores de δ_{π_1} . No entanto, o fato mais marcante revelado por esta tabela é o percentual de δ_{π} em relação a defasagem total, (δ_{B}) que é acima de 95% para todas as energias.

4-V) Conclusões.

Neste trabalho nós nos propusemos a estudar dois aspectos complementares da interação núcleon-núcleon, quais sejam; a convergência da série de Born e o papel dinâmico do pión.

No que diz respeito ao comportamento da série de Born, nossos resultados permitem concluir que a convergência é bastante lenta para estados com baixos valores de l , mas torna-se progressivamente mais rápida à medida em que os valores do momento angular orbital aumenta. Os nossos cálculos também indicam que a série de Born converge rapidamente no caso da contribuição piônica ao potencial, para todos os momentos angulares e energias consideradas. Em outras palavras, a aproximação de Born representa, em todos os casos, bastante bem a contribuição da troca de um pión.

Qualquer solução da equação de Schrödinger deve se comportar na origem como um polinômio cujo termo dominante é r^l . Assim, as funções de onda são mais "expulsas" da origem quanto maior for seu momento angular. Este fenômeno é associado à existência de uma barreira de momento angular na equação radial que é proporcional ao momento angular orbital. Isso significa que para valores baixos de l as partículas sentem as partes mais internas do potencial; o que nos permite esperar que a contribuição da parte piônica do potencial seja determinante em ondas de l grande. No

caso de uma onda de l grande como é o caso do estado 3G_4 com $l = 4$, a contribuição do pión é totalmente dominante, já que a barreira centrífuga enfatiza o papel da parte de longo alcance do potencial.

No caso da onda 3P_1 podemos perceber que a contribuição do pión é sensível à energia, tornando-se menor à medida em que esta aumenta. Em 50 mev a troca de um pión é o processo predominante enquanto que para 200 mev essa contribuição cai para 75%. Isso mostra que com o aumento da energia a barreira de momento angular vai se tornando cada vez menos eficiente, permitindo que as partículas possam se aproximar mais. Deste modo, a parte não piônica do potencial passa gradualmente a ser mais importante.

No caso da onda 1S_0 , vemos que a contribuição do pión é bastante pequena para todas as energias consideradas, indicando que as partes internas do potencial tem um papel preponderante. Além disso, constatamos que o papel relativo do pión depende da energia, mas de forma não regular.

Apendice A.

As Funções de Bessel.

As funções de Bessel de ordem ν são soluções da equação diferencial:

$$x^2 \ddot{y} + xy + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad \nu \geq 0$$

Estas funções costumam ser apresentadas em três formas diferentes:

$$F_\nu(x) ; j_\nu(x) \text{ e } J_{\nu+1/2}(x).$$

Estas formas estão relacionadas por:

$$F_\nu(x) = x j_\nu(x) = \left(\frac{1}{2} \pi x\right)^{1/2} J_{\nu+1/2}(x).$$

e

$$G_\nu(x) = \left(\frac{1}{2} \pi x\right)^{1/2} (-1)^\nu J_{-\nu-1/2}(x).$$

Duas fórmulas de recorrência importantes são:

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x).$$

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} \left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \right]$$

Denominamos $F_\nu(x)$ solução regular e $G_\nu(x)$ solução irregular, cujos comportamentos nas proximidades da origem e para grandes x são dados por:

$$F_\nu(x) \underset{x \ll 1}{\sim} \frac{x^{-(\nu+1)}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\nu+1)}$$

$$G_\nu(x) \underset{x \ll 1}{\sim} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\nu-1)}{1(x)}$$

$$F_\nu(x) \underset{x \gg 1}{\sim} \text{sen}(x - \nu\pi/2)$$

$$G_\nu(x) \underset{x \gg 1}{\sim} \cos(x - \nu\pi/2)$$

As expressões utilizadas neste trabalho são:

$$F_0(x) = \text{sen}x$$

$$G_0(x) = \text{cos}x$$

$$F_1(x) = \frac{\text{sen}x}{x} - \text{cos}x$$

$$G_1(x) = \frac{\text{cos}x}{x} + \text{sen}x$$

$$F_2(x) = \text{sen}x \left[-1 + \frac{3}{x^2} \right] - \frac{3}{x} \text{cos}x$$

$$G_2(x) = \text{cos}x \left[-1 + \frac{3}{x^2} \right] + \frac{3}{x} \text{cos}x$$

$$F_3(x) = \text{sen}x \left[\frac{15}{x^3} - \frac{6}{x} \right] + \text{cos}x \left[1 - \frac{15}{x^2} \right]$$

$$G_3(x) = \text{cos}x \left[\frac{15}{x^3} - \frac{6}{x} \right] - \text{sen}x \left[1 - \frac{15}{x^2} \right]$$

$$F_4(x) = \text{sen}x \left[\frac{105}{x^4} - \frac{45}{x^2} + 1 \right] + \text{cos}x \left[-\frac{105}{x^3} + \frac{1}{x} \right]$$

$$G_4(x) = \text{cos}x \left[\frac{105}{x^4} - \frac{45}{x^2} + 1 \right] - \text{sen}x \left[-\frac{105}{x^3} + \frac{1}{x} \right]$$

Apêndice B.

Atuação dos operadores do potencial SSCC.

Como é visto no capítulo 1, o potencial SSCC tem a seguinte forma:

$$V(r) = V_c(r) + V_{L^2}(r)L^2 + V_{L \cdot S}(r)L \cdot S + V_T(r)S_{12} + V_0(r)Q$$

onde:

$$Q = 3(\vec{\sigma}^1 \cdot L)(\vec{\sigma}^2 \cdot L) - (\vec{\sigma}^1 \cdot \vec{\sigma}^2)L^2.$$

(B1)

A atuação do operador L^2 sobre as funções $\psi_{1S_J}^{M_J}(\theta, \phi)$ dadas pela equação (29), é dada por:

$$L^2 \psi_{1S_J}^{M_J} = 1(1+1) \psi_{1S_J}^{M_J}$$

(B2)

por conveniência adotamos a atuação deste e dos demais operadores calculados em unidades de \hbar .

O operador $S \cdot L$ é dado por:

$$S \cdot L = \frac{1}{2} (J^2 - L^2 - S^2)$$

(B3)

uma vez que:

$$J = L + S$$

(B4)

onde:

$$J^2 \psi_{1S_J}^{M_J} = J(J+1) \psi_{1S_J}^{M_J}$$

(B5)

e

$$S^2 \psi_{1S_J}^{M_J} = S(S+1) \psi_{1S_J}^{M_J}$$

(B6)

Portanto $L \cdot S$ atua da seguinte forma:

$$(L \cdot S) \psi_{1S_J}^{M_J} = \frac{1}{2} \left[J(J+1) - 1(1+1) - S(S+1) \right] \psi_{1S_J}^{M_J}$$

(B7)

No caso do operador Q, escrevemos S como:

$$S = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}^1 + \vec{\sigma}^2) \quad (B8)$$

que nos fornece:

$$(\vec{\sigma}^1 \cdot \vec{\sigma}^2) = 2S^2 - 3$$

portanto, usando a eq. (B6) temos: (B9)

$$(\sigma^1 \cdot \sigma^2) \psi_{1SJ}^{MJ} = \begin{cases} -3\psi_{1SJ}^{MJ} & \text{se } s = 0 \\ \psi_{1SJ}^{MJ} & \text{se } s = 1 \end{cases} \quad (B10)$$

Por outro lado, com o uso da eq. (B8) escrevemos:

$$L \cdot S = L \cdot \frac{1}{2} (\vec{\sigma}^1 + \vec{\sigma}^2) \quad (B11)$$

da qual podemos obter:

$$(\vec{\sigma}^1 \cdot L)(\vec{\sigma}^2 \cdot L) = 2(S \cdot L) + (S \cdot L) - L^2 \quad (B12)$$

onde usamos a seguinte relação:

$$(\vec{\sigma} \cdot L)(\vec{\sigma} \cdot L) = A \cdot B + i \vec{\sigma} \cdot (A \times B) \quad (B13)$$

portanto temos:

$$Q \psi_{1SJ}^{MJ} = \left\{ 3 \left[2(S \cdot L)^2 + (S \cdot L) - L^2 \right] - (\vec{\sigma}^1 \cdot \vec{\sigma}^2)L^2 \right\} \psi_{1SJ}^{MJ} \quad (B14)$$

onde se deve usar as eq. (B2), (B7) e (B10).

A atuação do operador S₁₂, por sua vez, é a seguinte:

$$S_{12} \psi_{J0J} = 0$$

$$S_{12} \psi_{J1J} = 2\psi_{J1J}$$

$$S_{12} \psi_{J-11J} = \frac{6(J(J+1))^{1/2}}{(2J+1)} \psi_{J+11J} - \frac{2(j-1)}{2J+1} \psi_{J-11J}$$

$$S_{12} \psi_{J+11J} = \frac{-2(J+2)}{2J+1} \psi_{J+11J} + \frac{6(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} \psi_{J-11J}$$

REFERÊNCIAS.

- 1)-T. Hamada, Prog. Theor. Phys. 24 (1960) 1033; T. Hamada, Prog. Theor. Phys. 25 (1961) 247; T. Hamada and I. D. Johnston, Nucl. Phys. 34 (1962) 382.
- 2)-K. E. Lassila, M. H. Hull, Jr., H. M. Ruppel, F. A. McDonald and G. Breit, Phys. Rev. 126 (1962) 881.
- 3)-R. V. Reid, Jr., Ann. Phys. 50, 411 (1968).
- 4)-J. F. Mathiot, Nucl. Phys. A412 (1984) 201; Nucl. Phys. A446 (1985) 123c.
- 5)-T. E. O. Ericson and M. Rosa-Clot - Nucl. Phys. A405 (1983) 497.
- 6)-J. L. Ballot, A. M. Eiró and M. R. Robilotta, Phys. Rev. C 40, 1459 1989.
- 7)-R. Machleidt, K. Holinde and Ch. Elster, Phys. Rev. Lett. 149 1 (1989).
- 8)-M. R. Robilotta, Processos Mesônicos em física nuclear, in: III Summer School in Nuclear Physics: Proc. Itaipava Rj (1987) 237.
- 9)-H. A. Bethe, Scientific American 189, 58 (1953).
- 10)-S. Okubo and R. E. Marshak, Ann. Phys. 4, 166 (1958).
- 11)-J. L. Gammel, R. S. Christian, and R. M. Thaler, Phys. Rev. 105, 311 (1957).
- 12)-R. De Turreil and D. W. Sprung, Nuc. Phys. A201 (1973) 193.
- 13)-L. S. Rodberg and R. M. Thaler, in Introduction to the Quantum Theory of Scattering, Academic Press, New York, 1967; A. Messiah, in Quantum Mechanics, Volume II, North Holland Publishing, 1961.
- 14)-W. Rarita and J. Schwinger, Phys. Rev. 59, 436 (1941); H. A. Bethe, Phys. Rev. 57, 390 (1940).
- 15)-J. Ashkin and Ta-You Wu, Phys. Rev. 73, 973 (1948); Ta-You Wu and J. Ashkin, Phys. Rev. 73, 986 (1948); F. Rohrlich and J. Eisenstein, Phys. Rev. 75, 705 (1949).

- 16)-L. Hulthén and M. Sugawara, in Handbuch der Physik, Springer-Verlag, Berlin, (1959); R. R. Roy and B. P. Nigam, in Nuclear Physics, John Willey and Sons, New York, 1967.
- 17)J. M. Blatt and L. C. Biedenharn, Phys. Rev. 86, 399 (1952)