

SBI-IFUSP



305M810T1926

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Sobre Teorias de Campos com Métrica Indefinida

Silvia Aparecida Brunini

*Marcelo O. C. Gomes
Exercício físico Caldas*

*Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo.*

Defesa: 11/05/92

Orientador: Prof. Dr. Marcelo O. C. Gomes

São Paulo
1992



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Sobre Teorias de Campos com Métrica Indefinida

Silvia Aparecida Brunini

*Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo.*

Orientador: Prof. Dr. Marcelo O. C. Gomes

**São Paulo
1992**

530.14

B003

300

2.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Brunini, Silvia Aparecida

Sobre teorias de campos com métrica indefinida.
São Paulo, 1992.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. Insti-
tuto de Física. Departamento de Física Matemática.

Área de Concentração: Física de Partículas Elementa-
res

Orientador: Prof^o Dr^o Marcelo Otávio Caminha Gomes

Unitermos: 1. Modelos não-compactos; 2. Métrica in-
definida; 3. Temperatura finita; 4. Gravitação quânti-
ca.

USP/IF/SBI - 16/92

Resumo

Estudamos duas classes de teorias de campos com métrica indefinida: os modelos sigma não linear não compactos e as teorias quárticas da gravitação. Mostramos que a prova da unitariedade para os modelos sigma de simetria não compacta é a mesma que para os modelos compactos nas regiões fisicamente relevantes. Além disso, analisamos a possibilidade de ocorrer geração dinâmica de massa nos modelos sigma sob influência de temperatura finita, em várias dimensões. No que se refere às teorias quárticas da gravitação, calculamos o valor esperado no vácuo da função de dois pontos com inserção da relação de Gauss-Bonnet. Encontramos que a identidade clássica não é preservada quando empregamos a regularização dimensional, mesmo num espaço sem singularidades. Isto revela o surgimento de anomalias gravitacionais.

Abstract

Two classes of field theories with indefinite metric are studied: noncompact nonlinear sigma models and higher-derivative quantum gravity. We show that the proof of unitarity for noncompact sigma models is the same as the one for compact models in the physically relevant regions. Moreover, we analyze the possibility of dynamical mass generation at finite temperature in various space-time dimensions. Concerning to the higher-derivative quantum gravity, we calculate the vacuum expectation value of the two-point function with the insertion of Gauss-Bonnet Relation. In the quantum context, we also show, using dimensional regularization, that the Gauss-Bonnet relation is not satisfied due to gravitational anomalies.

Agradecimentos

Agradecer é uma das tarefas mais difíceis, pois, envolve a memória. E, sabemos muito bem, que a memória é uma das coisas mais fracas que temos.

Um Obrigado

....ao Prof. Dr. Marcelo Gomes, por sua amizade, paciência e dedicação, tanto durante a orientação desta tese quanto fora desta.

....ao Prof. Dr. Adilson J. da Silva, por seu apoio e pelas discussões.

....ao Profs.: Dr. Oscar Éboli, Dr. Rubens Freire Ribeiro, Ms. Renio dos Santos Mendes, Ms. Sonia Soares Stivari—amizades com as quais sempre pude contar.

....à todos os colegas e funcionários do IFUSP e do DFI-UEM, pelo carinho com que sempre me trataram, bem como, pelos favores que sempre me prestaram.

.... aos meus pais, ao Justo e à Isa pelas provas de amor que me deram durante todo o tempo de redação desta tese.

....à CAPES, à FAPESP e à FUEM pelo apoio financeiro.

Índice

1	Introdução	5
2	O Modelo Sigma Não Linear	13
2.1	A Construção do Modelo Não Compacto	13
2.2	Modelo Sigma à Temperatura Finita	31
2.3	A Unitariedade do Modelo	34
2.4	Resumo das Conclusões	37
3	As Teorias Quárticas da Gravitação	39
3.1	As Teorias Quárticas com Métricas Conformemente Planas . .	42
3.2	A Identidade de Gauss-Bonnet e a Regularização Dimensional	51
3.3	O tensor de Weyl como uma Identidade	60
3.4	Conclusões	63
A	A Gravitação Vista como uma Teoria de Calibre	65
B	Cálculos usando o REDUCE	69
C	Diagramas Dimensionalmente Regularizados	88

Capítulo 1

Introdução

A introdução de um espaço com métrica indefinida é requerida na descrição covariante de muitos modelos interessantes em teoria quântica de campos. Dois exemplos relevantes são: a Eletrodinâmica Quântica (QED) e a Teoria de Yang-Mills. Mas surge o problema de interpretá-los fisicamente. Usando a liberdade de calibre, podemos passar de um calibre explicitamente unitário¹ para outro explicitamente covariante, como acontece na QED na passagem do calibre de Coulomb para o de Lorentz. Esta transição, de um calibre para outro, já está bem desenvolvida para modelos descritos por meio de álgebras fechadas e com vínculos irredutíveis. Contudo, o caso geral não é este. Normalmente, os vínculos são dependentes de calibre e as álgebras são abertas, de forma que a transição torna-se complicada, mesmo quando se conhece os dois calibres: o unitário e o covariante.

A teoria covariantemente quantizada é normalmente formulada num espaço de Métrica Indefinida com setores físicos isolados por meio de alguma condição subsidiária sobre os estados vetores, de forma a garantir a ausência de probabilidades negativas. Este sub-espaço deve ter norma não negativa e ser invariante com respeito à evolução dinâmica, isto é, qualquer operador observável deve comutar com a condição subsidiária.

Na QED tal condição é realizada no formalismo de Gupta-Bleuler^[1] onde

¹Onde excitações não físicas estão ausentes e os estados tem norma positiva definida.

todas as componentes do campo eletromagnético são consideradas independentes e o sub-espaço é selecionado pela condição

$$\langle \psi_{\text{físico}} | \partial^\mu A_\mu(x) | \varphi_{\text{físico}} \rangle = 0.$$

Contudo, tal formalismo não pode ser diretamente estendido para teorias de calibre não abelianas porque, por exemplo, a condição acima não é dinamicamente invariante em tais teorias, acarretando uma violação da unitariedade.

Uma outra prescrição, conhecida como quantização BRST, é amplamente usada em teorias não abelianas, tendo sido aplicada com sucesso na quantização da Teoria de Yang-Mills^[2]. Neste formalismo, as condições subsidiárias são dadas sobre o gerador Q das transformações de BRST,

$$Q | \varphi_{\text{físico}} \rangle = 0.$$

Do fato que o operador Q comuta com o Hamiltoniano e com os outros observáveis decorre que esta condição é invariante sob evolução dinâmica.

O processo de quantização de Gupta-Bleuler e de BRST não foram os únicos métodos desenvolvidos para tratar teorias contendo Métrica Indefinida. Também, Pauli, Dirac, Nagy, Lee-Wick, entre outros, desenvolveram diferentes processos de quantização² para tais teorias.

Mas, como nem sempre é possível obter modelos com Métrica Indefinida fisicamente realizáveis, muitos físicos optam por abandoná-los. Isto acontece porque tais modelos contém estados com norma (e/ou energia) negativa implicando em problemas com estabilidade, caso não apresentem uma Hamiltoniana limitada. Também a unitariedade deve sempre ser verificada. Muitas das excitações presentes são resultantes de graus de liberdade espúrios e, portanto, sem realização física. Não é este o nosso caso. Analisaremos no decorrer deste trabalho duas classes de teorias de campos, tendo em comum os fatos de ambas serem teorias de calibre e de apresentarem Métrica Indefinida. Serão considerados os seguintes modelos:

- Modelos Sigma Não Linear de Simetria Não Compacta;

²Todos estes processos continuam sendo utilizados.

• Teorias Quárticas da Gravitação³.

Originariamente, os modelos sigma foram desenvolvidos por Gell-Mann e Lévy^[3], em 1960, para descrever a interação pión-núcleon. Neste mesmo artigo, eles apresentaram tanto o modelo sigma linear quanto o não linear. Estes modelos têm em comum os fatos de realizarem simetria quiral e de conservarem parcialmente a corrente axial. Outra característica marcante do modelo sigma linear reside em sua renormalizabilidade por contagem de potências em quatro dimensões. Contudo, na construção deste modelo foi necessária a inclusão de uma nova partícula⁴, o méson escalar σ , que nunca foi observada. Os modelos sigma não lineares embora não sejam renormalizáveis, mantem as mesmas simetrias dos modelos sigma lineares, com a vantagem de não predizerem novas partículas.

Já na década de 70, vários autores^[4, 5, 6] mostraram a analogia existente entre o modelo sigma não linear em duas dimensões (que é renormalizável) com as teorias não abelianas em quatro dimensões. Ambos os modelos são assintoticamente livres à curtas distâncias e fortemente interagentes à longas distâncias. Também, em duas dimensões, a Matriz S exata pode ser encontrada devido à existência de infinitas cargas^[7] (locais e não locais). Além destes atributos já comprovados, o modelo sigma não linear de simetria não compacta, foi usado para estudar o ponto de transição de fase condutora ou não em metais amorfos^[8]. O desenvolvimento teórico dos modelos sigma continua a acontecer, pois, desde o início dos anos 80, diversas investigações^[9] vêm apontando no sentido de que há setores escalares de teorias de supergravidade realizados por modelos sigma não lineares de simetria não compacta.

De modo geral, o modelo sigma não linear realiza a simetria quiral sobre diferentes variedades: compactas e não compactas. Seja o modelo compacto descrito pela Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\sum_{\alpha=1}^N \partial_{\mu} \phi_{\alpha} \partial^{\mu} \phi_{\alpha} - m^2 \sum_{\alpha=1}^N (\phi_{\alpha})^2 \right] + \frac{\lambda}{\sqrt{N+1}} \left[\sum_{\alpha=1}^N \phi_{\alpha}^2 - \frac{(N+1)}{f} \right],$$

³Apesar do nome Teorias, estas representam apenas um conjunto de modelos para o estudo da quantização da Gravitação.

⁴Rasão histórica do nome deste modelo.

o qual é o caso particular de modelos sigma generalizados construído sobre um espaço quociente G/H , onde G representa o grupo de simetria global e H seu subgrupo maximal. No presente caso temos que G é do tipo $O(N)$ e a realização não linear do grupo quiral é feita sobre

$$\sum_{\alpha=1}^N \phi_{\alpha}^2 = f^2.$$

O caso não compacto, $G=O(1,N)$, admite duas realizações distintas, definindo espaços de configuração⁵ em forma de hiperbolóides de revolução: de uma fôlha e de duas fôlhas.

Na primeira parte desta tese, (Capítulo 2) iremos explorar as características presentes nos modelos sigma não linear em todas suas possíveis realizações^[10], isto é, com G sendo o grupo não compacto e com H sendo tanto seu subgrupo maximal compacto quanto não compacto. Mostraremos que algumas fases são estáveis à temperatura finita, inclusive à temperatura zero, em várias dimensões⁶ ($D=\{2,3,4\}$). Os resultados obtidos serão comparados com os modelos de simetria G compacta. Veremos também que a unitariedade é uma propriedade independente da compacticidade do modelo sigma adotado. No caso bidimensional, o modelo sigma não linear não compacto tem, nos setores físicos, uma Matriz S unitária.

Já na segunda parte, estudaremos outra classe de teorias de campos com Métrica Indefinida: as Teorias Quárticas da Gravitação. Esses modelos^[11, 12] surgiram conjuntamente com a Relatividade Geral ou Teoria da Gravitação de Einstein com o intuito de formular uma teoria unificada eletromagnética e gravitacional, mas, os resultados foram insatisfatórios.

Por volta de 1977, com a prova da renormalizabilidade por contagem de potências da ação^[13],

$$I = - \int d^4x \sqrt{-g} (\alpha R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \beta R^2 + \kappa^{-2} \gamma R),$$

⁵No próximo capítulo, discutiremos sobre os possíveis espaços de configuração em que é realizada a simetria quiral do modelo não compacto.

⁶Há de se notar que, para $D=4$, estamos nos antecipando à existência de um esquema de renormalização para os modelos sigma.

que define as Teorias Quárticas da Gravitação, estas passaram a ser adotadas para descrever a teoria quântica da Gravitação. Nesta ação não aparecem termos proporcionais à $\int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu\sigma\lambda} R^{\mu\nu\sigma\lambda}$ porque há uma relação topológica que, em espaços sem singularidades, se transforma numa identidade, conhecida por Identidade de Gauss-Bonnet (ou, também, Identidade de Bach-Lanczos^[14]),

$$\int d^4y \sqrt{-g} [R_{\mu\nu\sigma\lambda} R^{\mu\nu\sigma\lambda} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2] = 0,$$

de forma que podemos absorver o termo proporcional ao quadrado do tensor de curvatura de Riemann-Christoffel nos outros quadráticos de curvatura.

Contudo, como não foram resolvidos os problemas com a unitariedade e a estabilidade inerentes das excitações massivas com métrica negativa, estes modelos foram abandonados por muitos físicos que procuraram nas teorias de supergravidade e de supercorda a fundamentação de uma teoria quantizada para a gravitação. Mas, à baixas energias, a não unitariedade não invalida as Teorias Quárticas para o estudo das interações entre o campos de matéria e o espaço em que estes estão imersos. Além disto, sob o ponto de vista de teoria quântica de campos, este modelo é um bom campo de testes para novas idéias e/ou métodos, conforme exemplificaremos abaixo.

Começaremos pelo conflito existente entre os estudos da possível dependência de calibre do pólo massivo de spin dois do fantasma (a parte do propagador que tem métrica negativa). A determinação desta dependência foi verificada, via uma identidade de Ward, por Antoniadis e Tomboulis^[15]. Este resultado foi contestado por Johnston^[16], que mostrou a independência do pólo massivo em relação ao parâmetro de calibre⁷ usando as Identidades de Nielsen^[17]. Assim, como a massa do fantasma é uma quantidade independente do parâmetro de calibre, a prova da unitariedade proposta por Antoniadis e Tomboulis fica invalidada, pois, o quesito básico é justamente a dependência com o parâmetro de calibre.

As diversas análises da presença de liberdade assintótica em Teorias Quárticas da Gravitação também apresentam resultados contraditórios. Usando

⁷A demonstração de que esta quantidade provém das invariâncias de BRST foi feita por Nielsen^[17].

as equações do grupo de renormalização, Fradkin^[18] encontrou que a teoria poderia apresentar liberdade assintótica em todos os setores. Já, Avramidi^[19] impugna este resultado. Através de correções nas equações obtidas do grupo de renormalização, ele mostra que a teoria tem liberdade assintótica apenas para o setor tensorial, encontrando incompatibilidade entre as expressões que revelarariam tal propriedade para os setores conformes e as condições de estabilidade para o caso de métrica de fundo plana.

Nosso intuito, no Capítulo 3, é analisar se a ação que define as Teorias Quárticas da Gravitação está completa, ou seja, se contém todos os contratermos necessários para ser considerada regularizada até ordem de 1-loop. Para facilitar nosso trabalho, em quatro dimensões, optamos pelo uso da Métrica Conformemente Plana (MCP).

Principiaremos por analisar se a Identidade Clássica de Gauss-Bonnet sobrevive ao processo de quantização. Para isto transformaremos as quantidades clássicas, de interesse, em relações quânticas. Mostraremos, para nossa particular escolha de calibre (MCP), que a relação de Gauss-Bonnet tem um termo proporcional à integral de uma divergência total e que os termos restantes são explicitamente proporcionais à $(D-4)^8$. Cálculos quânticos da inserção da Relação de Gauss-Bonnet na função de dois pontos, em $D=4$ dimensões num espaço sem singularidade, revelam que a Identidade clássica é preservada à nível de árvore, mas, não em 1-loop. Por outro lado, ao permitirmos que os coeficientes da relação clássica de Gauss-Bonnet pudessem ser reajustados foi encontrado que uma única relação é possível, ou seja, a decorrente da imposição da invariância conforme⁹. Isto significa que a teoria quantizada conservou apenas uma identidade (Invariância Conforme) das duas identidades classicamente existentes (Identidade de Gauss-Bonnet e Invariância Conforme).

Resultados anteriores^[20, 21] concluem que existe a possibilidade de que o uso da regularização dimensional possa gerar anomalias em quantidades ex-

⁸O papel da Relação de Gauss-Bonnet na Gravitação é análogo ao papel da Lei de Gauss no Eletromagnetismo.

⁹Sempre que se considera uma teoria com simetria conforme o tensor de Weyl desta é nulo e, portanto, pode ser considerado uma nova identidade.

plicitamente dependentes da topologia. Nossos resultados corroboram estas conclusões.

Esta tese se divide em duas partes distintas. No Capítulo 2 estudamos as propriedades do modelo sigma não linear de simetria não compacta em várias dimensões. A formulação do modelo é apresentada na Seção 2.1. A estabilidade dos modelos sigma é analisada tanto à temperatura zero quanto à temperatura finita nas Seções 2.1 e 2.2 respectivamente. Finalmente a unitariedade é discutida na Seção 2.3.

Reservamos o Capítulo 3 para as Teorias Quárticas da Gravitação com Métrica Conformemente Plana. Na Seção 3.1 apresentamos as Regras de Feynman destas teorias em quatro dimensões. Na Seção 3.2, calculamos a inserção da Relação de Gauss-Bonnet na função de dois pontos, até a ordem de 1-loop, usando regularização dimensional. Por fim, na Seção 3.3, modificamos os coeficientes da referida Relação e mostramos que é preservada a Identidade proveniente da Invariância Conforme imposta pela escolha da MCP.

Notação Geral

No decorrer desta tese usaremos o sistema natural de unidades, onde $c = \hbar = k_B = 1$ e a assinatura é a da Métrica de Minkowski, ou seja, $(+, -, -, -)$.

As transformadas de Fourier para o propagador $\Delta(x - y)$, para D dimensões são dadas por:

$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{\Delta}(q) e^{-iq(x-y)}$$

enquanto as transformadas de Fourier para a função Delta de Dirac:

$$\delta^D(x - y) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{-iq(x-y)}.$$

No Capítulo 3 usaremos as seguintes definições:

- Símbolo de Christoffel:

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = g^{\mu\alpha} (\partial_{\nu} g_{\alpha\rho} + \partial_{\rho} g_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha} g_{\nu\rho}),$$

- Tensor de Curvatura de Riemann-Christoffel:

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = \partial_{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} - \partial_{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\eta} \Gamma_{\sigma\eta}^{\mu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\eta} \Gamma_{\rho\eta}^{\mu},$$

ou

$$R_{\beta\nu\rho\sigma} = g_{\mu\beta} R_{\nu\rho\sigma}^{\mu},$$

- Tensor de Curvatura de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu},$$

- Escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu},$$

Capítulo 2

O Modelo Sigma Não Linear

Conforme mencionado na Introdução, diversos sistemas físicos tem sido descritos por meio de modelos sigma construídos a partir de grupos de simetrias não compactos^[8, 9]. Muitas destas fundamentações têm sido insatisfatórias por não apresentarem resultados condizentes com o sistema físico que se quer representar. Mas há outras, como o modelo sigma $O(1,N)/O(N)$ ^[22] e como o modelo CP^N não compacto^[23] que revelaram, para duas dimensões na região da constante de acoplamento negativa, resultados interessantes tais como massa dinamicamente gerada e liberdade assintótica.

Realizaremos, a partir de agora, um estudo detalhado do modelo sigma não linear não compactos com relação à unitariedade e em relação ao seu comportamento à temperaturas finitas. Esses resultados serão, também, comparados àqueles obtidos no caso do modelo sigma não linear de simetria compacta.

2.1 A Construção do Modelo Não Compacto

Uma dificuldade que surge na implementação de grupos não compactos em teorias de campos provém da forma não positiva definida dos invariantes quadráticos. Como exemplo, temos que os termos cinéticos de tal teoria

poderiam ser negativos ou positivos, de sorte que, os campos canônicos com energias e normas negativas poderiam resultar em fantasmas. Para se entender o problema associado com simetrias internas não compactas, comecemos por considerar um multipletto de campos escalares livres:

$$\phi_i = (\vec{\sigma}, \vec{\phi}) = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N). \quad (2.1)$$

No modelo compacto a densidade de Lagrangiana \mathcal{L}_{com} é definida através de

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{com} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\sigma} \partial^\mu \vec{\sigma} + \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \partial^\mu \vec{\phi} \\ &= \frac{1}{2} \partial_0 \vec{\sigma} \partial_0 \vec{\sigma} - \frac{1}{2} \partial_k \vec{\sigma} \partial_k \vec{\sigma} + \frac{1}{2} \partial_0 \vec{\phi} \partial_0 \vec{\phi} - \frac{1}{2} \partial_k \vec{\phi} \partial_k \vec{\phi} \end{aligned} \quad (2.2)$$

com densidade de energia correspondentemente dada por

$$\mathcal{H}_{com} = \frac{1}{2} \partial_0 \vec{\sigma} \partial_0 \vec{\sigma} + \frac{1}{2} \partial_k \vec{\sigma} \partial_k \vec{\sigma} + \frac{1}{2} \partial_0 \vec{\phi} \partial_0 \vec{\phi} + \frac{1}{2} \partial_k \vec{\phi} \partial_k \vec{\phi}. \quad (2.3)$$

Já o multipletto para o caso não compacto (2.1) transforma-se de acordo com $SO(M,N)$,

$$\phi_i \rightarrow \phi'_i = \Omega_i^j \phi_j \quad (2.4)$$

onde $i, j = (1, \dots, M, M+1, \dots, M+N)$ e Ω_i^j são os elementos do grupo pseudo-ortogonal $SO(M,N)$, a qual mantém a forma hermitiana,

$$g_0 = \begin{pmatrix} -I_M & 0 \\ 0 & I_N \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

invariante, isto é,

$$\Omega^T g_0 \Omega = g_0. \quad (2.6)$$

A densidades de Lagrangiana \mathcal{L}_{ncom} para este caso não compacto $SO(M,N)$ e a densidade de energia correspondente \mathcal{H}_{ncom} são definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ncom} &= -\frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\sigma} \partial^\mu \vec{\sigma} + \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \partial^\mu \vec{\phi} \\ &= -\frac{1}{2} \partial_0 \vec{\sigma} \partial_0 \vec{\sigma} + \frac{1}{2} \partial_k \vec{\sigma} \partial_k \vec{\sigma} + \frac{1}{2} \partial_0 \vec{\phi} \partial_0 \vec{\phi} - \frac{1}{2} \partial_k \vec{\phi} \partial_k \vec{\phi} \end{aligned} \quad (2.7)$$

e

$$\mathcal{H}_{ncom} = -\frac{1}{2} \partial_0 \vec{\sigma} \partial_0 \vec{\sigma} - \frac{1}{2} \partial_k \vec{\sigma} \partial_k \vec{\sigma} + \frac{1}{2} \partial_0 \vec{\phi} \partial_0 \vec{\phi} + \frac{1}{2} \partial_k \vec{\phi} \partial_k \vec{\phi}. \quad (2.8)$$

Caso seja necessário incluir termos de massa na Lagrangiana bastará acrescentar para cada modo de simetria

$$\mathcal{L}_{com_{mass}} = -m^2(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} + \vec{\phi} \cdot \vec{\phi}) \quad (2.9)$$

$$\mathcal{L}_{ncom_{mass}} = -m^2(-\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} + \vec{\phi} \cdot \vec{\phi}). \quad (2.10)$$

A Hamiltoniana não compacta, \mathcal{H}_{ncom} , não é limitada inferiormente, indicando problemas com a estabilidade no caso quântico, enquanto que a Hamiltoniana compacta, \mathcal{H}_{com} , não apresenta tal tipo de problema, seja na teoria clássica, seja na teoria quântica.

Temos, no processo de quantização canônica usual, os campos descritos em termos de operadores de aniquilação, (a), e de criação, (a^\dagger). Assim, para ϕ_i e σ_i , respectivamente,

$$\phi_i(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} [a_{\phi_i}(k)e^{-ikx} + a_{\phi_i}^\dagger(k)e^{ikx}] \quad (2.11)$$

e

$$\sigma_j(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} [a_{\sigma_j}(k)e^{-ikx} + a_{\sigma_j}^\dagger(k)e^{ikx}], \quad (2.12)$$

com $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$.

Os operadores de criação e aniquilação obedecem às seguintes regras de comutação:

$$[a_{\phi_i}(k), a_{\phi_j}(k')] = [a_{\phi_i}^\dagger(k), a_{\phi_j}^\dagger(k')] = 0 \quad (2.13)$$

$$[a_{\phi_i}(k), a_{\phi_j}^\dagger(k')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(k - k') \delta_{ij}$$

e

$$[a_{\sigma_i}(k), a_{\sigma_j}(k')] = [a_{\sigma_i}^\dagger(k), a_{\sigma_j}^\dagger(k')] = 0 \quad (2.14)$$

$$[a_{\sigma_i}(k), a_{\sigma_j}^\dagger(k')] = -(2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(k - k') \delta_{ij}.$$

Definimos, então, estados de referência, $|0\rangle$, tanto para os campos ϕ_i quanto para os σ_i , por intermédio de

$$a_i|0\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle 0|0\rangle = 1, \quad (2.15)$$

e o espaço de Fock pode ser gerado através dos estados ortonormais dados por:

$$|n_i\rangle = \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}(k)}{\sqrt{n_i!}}|0\rangle. \quad (2.16)$$

Para os estados com qualquer número de campos ϕ é sempre válida a expressão

$$\langle m_{\phi_i}(k)|n_{\phi_i}(k')\rangle = \delta_{m_{\phi_i}, n_{\phi_i}} \delta^3(k - k'), \quad (2.17)$$

enquanto que para os estados formados por campos σ , vale

$$\langle m_{\sigma_i}(k)|n_{\sigma_i}(k')\rangle = \pm \delta_{m_{\sigma_i}, n_{\sigma_i}} \delta^3(k - k'), \quad (2.18)$$

sendo o sinal positivo apenas para a transição entre estados com número par de campos σ e, portanto, o sinal negativo para a transição entre estados com número ímpar de campos.

A evolução temporal para estes operadores^[24] de criação e aniquilação, tanto para os campos ϕ quanto para os campos σ é realizada através de:

$$a(k, t) = e^{-i\omega_k t} a(k) \quad (2.19)$$

e

$$a^\dagger(k, t) = e^{i\omega_k t} a^\dagger(k) \quad (2.20)$$

Assim, a função de Green para cada ϕ_i pode ser encontrada e resulta em

$$\langle 0|T\phi_i(x)\phi_i(y)|0\rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.21)$$

enquanto para o campo σ_i obtemos¹,

$$\langle 0|T\sigma_i(x)\sigma_i(y)|0\rangle = -\frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.22)$$

¹Comparando (2.21) e (2.22) vemos que a diferença entre os propagadores de energia positiva definida em relação aos de energia negativa é o sinal negativo extra para o resíduo^[25].

A Hamiltoniana, devido aos campos σ , se apresenta como não limitada superiormente nem inferiormente, conforme podemos observar na equação abaixo,

$$\mathcal{H}_{ncom} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[- \sum_{i=1}^N : a_{\sigma_i}^\dagger(k) a_{\sigma_i}(k) + a_{\sigma_i}(k) a_{\sigma_i}^\dagger(k) : \right. \\ \left. + \sum_{j=N+1}^{M+N} : a_{\phi_j}^\dagger(k) a_{\phi_j}(k) + a_{\phi_j}(k) a_{\phi_j}^\dagger(k) : \right] \quad (2.23)$$

$$\mathcal{H}_{ncom} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[- \sum_{i=1}^N a_{\sigma_i}^\dagger(k) a_{\sigma_i}(k) + \sum_{j=N+1}^{M+N} a_{\phi_j}^\dagger(k) a_{\phi_j}(k) \right],$$

gerando a possível instabilidade dos estados, se interações forem introduzidas.

Tendo compreendido a construção do modelo não compacto para campos livres, podemos estudar a construção de um modelo interagente: o modelo sigma não linear não compacto.

De modo formal, os modelos de simetria não compacta² são definidos no espaço quociente G/H , onde G é um grupo de Lie não compacto e H é o subgrupo maximal de G , invariante sob algum automorfismo involutivo de G . Para sermos específicos, seja $G = O(1, N)$. Temos, então,

$$q\eta q^t = q^t \eta q = \eta, \quad \forall q \in O(1, N), \quad (2.24)$$

onde,

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_N \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

é o "tensor métrico".

²Os modelos sigma não linear de simetria compacta são definidos de maneira análoga ao aqui apresentado com às seguintes alterações:

- G é um grupo de Lie compacto (por exemplo, $O(N+1)$) e H seu subgrupo maximal, logo, H também é um subgrupo compacto;
- η é a matriz identidade de dimensão $(N+1)$, como G .

O campo g toma valores no espaço quociente $O(1,N)/H$,

$$g = q^{-1}g_0q, \quad (2.26)$$

onde g_0 é um elemento fixo de $O(1,N)$ que satisfaz as condições:

- de obedecer ao vínculo

$$g_0^2 = I, \quad (2.27)$$

- de manter o subgrupo H invariante, ou seja,

$$g_0hg_0 = h, \quad h \in H. \quad (2.28)$$

De (2.27) e (2.28) segue que a transformação, $q \rightarrow hq$, deixa g invariante, caracterizando-o como um elemento do espaço quociente. No que segue vamos supor que g_0 tenha um único elemento diferente de 1 e que este está na i -ésima linha e i -ésima coluna. No caso de $g_0 = \eta$, H é o grupo $O(N)$, ou seja, um subgrupo compacto de G . Agora, se g_0 for diferente de η , então, H é um subgrupo não compacto. Por simplicidade vamos adotar a notação $q_{i1} = \sigma$ e $q_{i\alpha} = \phi_\alpha$ para $\alpha \neq 1$,

$$q = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma & \phi_1 & \cdots & \phi_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{N+1,1} & q_{N+1,2} & \cdots & q_{N+1,N+1} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Assim, de (2.24) temos

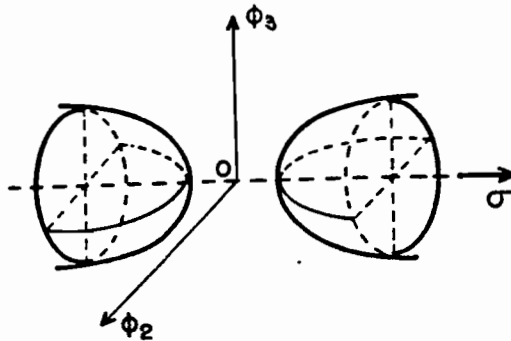
$$\eta_{ii} = (q^t \eta q)_{ii} = -\sigma^2 + \vec{\phi}^2, \quad \vec{\phi}^2 = \sum_{\alpha \neq 1} \phi_\alpha^2, \quad (2.30)$$

que vincula os campos ϕ_i e σ à superfície de um hiperbolóide de revolução. Há, então, duas possibilidades:

i) - Se $g_0 = \eta$ os campos ficam restritos á obedecer o vínculo

$$-1 = -\sigma^2 + \sum_{\alpha \neq 1} \phi_\alpha^2. \quad (2.31)$$

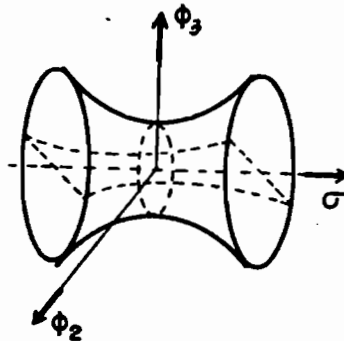
Isto implica que o subgrupo maximal de G é do tipo compacto e que a realização da simetria quiral é feita sobre o espaço de configuração restrito pelo hiperbolóide de revolução de duas fôlhas. No particular caso de $\sum_{\alpha \neq 1} \phi_\alpha^2 = \phi_2^2 + \phi_3^2$, temos



ii) - Por outro lado se $g_0 \neq \eta$, então o vínculo a ser obedecido é

$$1 = -\sigma^2 + \sum_{\alpha \neq 1} \phi_\alpha^2 \quad (2.32)$$

O subgrupo H, agora é do tipo não compacto e o espaço de configuração dos estados fica restrito pelo hiperbolóide de uma fôlha. Novamente para $\sum_{\alpha \neq 1} \phi_\alpha^2 = \phi_2^2 + \phi_3^2$,



Neste formalismo matricial, a densidade de Lagrangiana para o caso tanto de G compacto quanto de G não compacto, é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{\eta_{ii}}{16} \text{Tr} (\partial_\mu g \partial^\mu g^{-1}) \quad (2.33)$$

onde por (2.24) e (2.26) temos que

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - 2\eta_{\alpha\alpha}\eta_{ii}\phi_\alpha\phi_\beta \quad (2.34)$$

resultando em

$$\mathcal{L} = \frac{\eta_{\alpha\beta}}{2} \partial_\mu \phi_\alpha \partial^\mu \phi_\beta. \quad (2.35)$$

Os modelos sigma não linear de simetria compacta³ não apresentam problemas de estabilidade, pois, sua densidade de energia é análoga à (2.3) e, portanto, sua Hamiltoniana é limitada inferiormente.

Já para o modelo não compacto faremos uma análise mais acurada com o auxílio do vínculo⁴ (2.30),

$$-a = -\sigma^2 + \sum_{\alpha \neq 1} \phi_\alpha^2. \quad (2.36)$$

Obtemos, diferenciando parcialmente a expressão acima ($i = \{0, 1, 2, 3\}$) e elevando-a ao quadrado que

$$(\sigma \cdot \partial_i \sigma)^2 = \left(\sum_{\alpha \neq 1} \phi_\alpha \cdot \partial_i \phi_\alpha \right)^2.$$

De forma que pela desigualdade de Schwarz temos

$$(\partial_i \sigma)^2 \leq \left(\frac{\sum_{\alpha \neq 1} (\phi_\alpha)^2}{\sigma^2} \right) \cdot \sum_{\beta \neq 1} (\partial_i \phi_\beta)^2. \quad (2.37)$$

³Veja nota de rodapé número 2.

⁴ $a=1$ e $a=-1$ dependendo, respectivamente, da configuração espacial ser o hiperbolóide de revolução de duas fôlhas ou de 1 fôlha.

Como neste caso a densidade de energia é dada por (2.8),

$$\mathcal{H}_{ncom} = -\frac{1}{2}\partial_0\bar{\sigma}\partial_0\bar{\sigma} - \frac{1}{2}\partial_k\bar{\sigma}\partial_k\bar{\sigma} + \frac{1}{2}\partial_0\bar{\phi}\partial_0\bar{\phi} + \frac{1}{2}\partial_k\bar{\phi}\partial_k\bar{\phi},$$

vemos que a substituição de (2.37) em (2.8) só levará a uma Hamiltoniana positiva definida se $a > 0$, pois, pela equação (2.36) temos

$$\frac{\sum_{\alpha \neq 1} (\phi_\alpha)^2}{\sigma^2} = 1 - \frac{a}{\sigma^2}. \quad (2.38)$$

Diversos autores^[26, 27] definem que a constante de acoplamento quântica do modelo⁵ é dada por $f(\Lambda)$. Assim, substituem a por $\frac{1}{f(\Lambda)}$ na análise acima. Desta maneira, eles estabelecem que os modelos sigma não linear fisicamente plausíveis são aqueles definidos sobre espaços de configuração restringidos pelo hiperbolóide de duas fôlhas. Neste caso, no modelo sigma bidimensional, inexistente geração dinâmica de massa e os valores esperados no vácuo de campos de norma negativa resultam em infinitos. Por extensão, para o caso dos modelos CP^N não compactos em duas dimensões, concluiu-se que não existem bósons de calibre dinâmicos^[27]. Contudo, tal análise é semi-clássica. Sob o ponto de vista quântico a plausibilidade física deve ser definida pela constante de acoplamento renormalizada f_R , uma vez que os resultados fisicamente esperados são aqueles resultantes de tomarmos o limite $\Lambda \rightarrow \infty$, conforme veremos abaixo.

Vamos começar pela equação de vínculo quântica que é dada pelo cálculo do valor esperado no vácuo de (2.36), isto é,

$$-\frac{(N+1)}{f(\Lambda)} = \langle \bar{\phi}^2 \rangle - \langle \sigma^2 \rangle. \quad (2.39)$$

As regras de Feynman para os campos ϕ_α e para o campo σ indicam que os propagadores⁶ são dados respectivamente por (2.21) e (2.22), de modo que⁷

⁵ Λ é um regulador tipo Pauli-Villars usado para eliminar as divergências ultravioletas do modelo.

⁶ Vamos supor que cada campo tenha uma massa m , eliminando, assim, as divergências infravermelhas.

⁷ Note que o sinal negativo do propagador do campo σ compensa o sinal negativo em frente do termo $\langle \sigma^2 \rangle$.

em duas dimensões, temos

$$\begin{aligned}
-\frac{(N+1)}{f(\Lambda)} &= (N+1) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - \frac{i}{k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon} \right] \\
&= (N+1) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{i(m^2 - \Lambda^2)}{(k^2 - m^2)(k^2 - \Lambda^2)}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Fazendo uma rotação de Wick para o espaço Euclidiano e tomando o limite $\Lambda \rightarrow \infty$ obtemos por resultado final

$$-\frac{1}{f(\Lambda)} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{m} \right), \tag{2.41}$$

o que requer $f(\Lambda) \leq 0$. No entanto $f(\Lambda) \rightarrow 0$ quando $\Lambda \rightarrow \infty$. Assim, pensando em termos da teoria renormalizada, o sinal de $f(\Lambda)$ se torna irrelevante, devido ao modelo sigma não linear bidimensional ser assintoticamente livre^[23].

Na demonstração de que o modelo exibe liberdade assintótica em duas dimensões acrescentamos uma massa m não nula para todos os campos. Este artifício foi feito com o intuito de eliminarmos as divergências infravermelhas. Adiantamo-nos, portanto, à uma análise do modelo ter ou não massa dinamicamente gerada, fato este que corrigiremos a partir de agora.

A densidade de Lagrangiana total é formada pela densidade de Lagrangiana (2.33) mais termos de massa⁸ e, mais um campo coletivo auxiliar λ que força a existência do vínculo (2.30). Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi_\alpha \partial^\mu \phi_\alpha - \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m^2 (\phi_\alpha)^2 + m^2 \sigma^2] + \\
&+ \frac{\lambda}{\sqrt{N+1}} \left[-\sigma^2 + \phi_\alpha^2 + \frac{(N+1)}{f} \right].
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Começaremos por admitir que o valor esperado no vácuo (VEV) de λ é zero, pois, qualquer outro valor não nulo pode ser reabsorvido pelo termo

⁸As equações (2.9) ou (2.10), dependendo se os termos cinéticos dos campos tem ou não sinal correto.

de massa m^2 . Vale ressaltar que o ato de considerar $\langle \lambda \rangle = 0$ implica em considerar a equação (2.39). Vamos, também, supor que o campo σ e um dos campos ϕ_α podem ter VEV's não nulos. Logo, a parametrização $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_0$ e $\vec{\phi} \rightarrow \vec{\phi} + (0, \dots, \phi_0, \dots, 0)$, em (2.42), leva-nos à

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} [(\partial_\mu \sigma)^2 - m^2 \sigma^2] + \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi_\alpha \partial^\mu \phi_\alpha - m^2 \vec{\phi}^2] + \\ & + \frac{\lambda}{\sqrt{N+1}} \left[\vec{\phi}^2 - \sigma^2 + \frac{N+1}{f(\Lambda)} \right] - 2m^2 (-\sigma \sigma_0 + \phi \phi_0) + \quad (2.43) \\ & + \frac{\lambda}{\sqrt{N+1}} [\phi_0^2 + 2\phi \phi_0 - \sigma_0^2 - 2\sigma \sigma_0]. \end{aligned}$$

Agora, da equação acima pode imediatamente ser visto que a nova condição $\langle \sigma \rangle = \langle \phi_\alpha \rangle = 0$ implica que

$$m^2 \phi_0 = m^2 \sigma_0 = 0, \quad (2.44)$$

resultando nas seguintes fases:

- i) $m^2 \neq 0$; $\sigma_0 = \phi_0 = 0$ com realização não quebrada de $O(1, N)$;
- ii) $m^2 = 0$. Neste caso ou
 - a) $\sigma_0 = 0$ e $\phi_0 \neq 0$ onde $O(1, N)$ é quebrado para $O(1, N-1)$, ou
 - b) $\sigma_0 \neq 0$ e $\phi_0 = 0$ com quebra de simetria $O(1, N)$ para $O(N)$. (Qualquer outra configuração pode ser encontrada por uma transformação de $O(1, N)$.)

que devem ser analisadas para duas, três e quatro dimensões.

- 1) Em duas dimensões, já discutimos anteriormente que a única realização possível é a massiva, pois, o modelo apresenta divergências infravermelhas para valores de p^2 finito. A estabilidade desta fase pode ser analisada através da constante de acoplamento renormalizada⁹, definida

⁹Esta é a constante de acoplamento para dimensões $D \leq 3$ no modelo sigma não linear.

por

$$\frac{1}{f_R} = \frac{1}{f(\Lambda)} + \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[\frac{i}{k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon} - \frac{i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right]. \quad (2.45)$$

Esta constante de acoplamento renormalizada f_R é adimensional com μ desempenhando o papel de ponto de renormalização da teoria. Substituindo na equação acima o termo $f(\Lambda)$ pelo vínculo apresentado em (2.39), acabamos por obter, em duas dimensões,

$$\frac{1}{f_R} + \frac{\langle \vec{\phi}^2 \rangle - \langle \sigma^2 \rangle}{N+1} = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) \quad (2.46)$$

Assim, para o caso $m^2 \neq 0$ $\sigma_0 = \phi_0 = 0$ temos que a massa deste modelo é uma função do ponto de renormalização μ e do valor da constante de acoplamento renormalizada f_R ,

$$\left(\frac{m}{\mu} \right)^2 = C \exp\left(\frac{2\pi}{f_R}\right), \quad (2.47)$$

onde C é uma constante positiva. Como veremos mais adiante o propagador do campo auxiliar λ não apresenta pólos taquiônicos e como a massa m^2 é positiva, concluímos que esta fase é estável.

- 2) A princípio poderíamos obter para o modelo de simetria não compacta, em $D=3$, situações de massa nula (casos iia e iib), como ocorre com a versão compacta da teoria^[28]. Contudo, na ordem dominante da expansão $1/N$, encontramos que o pólo do propagador associado ao campo λ apresenta táquions quando tomamos $\sigma_0 \neq 0$ ^[29].

Este caso pode ser estudado supondo que existe a fase $\sigma_0 \neq 0$ e analisando o pólo do propagador. Para efetuarmos esta análise vamos substituir na Lagrangiana (2.43) as condições $m^2 = \phi_0 = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & \mathcal{L}'_\phi - \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{\lambda}{\sqrt{N+1}} \sigma^2 + \\ & + \frac{\lambda \sqrt{N+1}}{f(\Lambda)} - \frac{\lambda \sigma_0^2}{\sqrt{N+1}} - \frac{2\lambda \sigma \sigma_0}{\sqrt{N+1}}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

e, reescrevendo na forma matricial apenas a parte da Lagrangiana que contribui para o pólo do propagador no espaço dos momentos, temos

$$\mathcal{L}_\sigma = (\sigma \ \lambda) \cdot G^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sigma \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

com

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2} & \frac{\sigma_0}{\sqrt{N+1}} \\ \frac{\sigma_0}{\sqrt{N+1}} & \frac{1}{\sqrt{N+1}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k-p)^2} \end{pmatrix}.$$

Daí, o pólo do propagador é calculado através de

$$\det G^{-1}(p) = \frac{N+1}{2} p^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k-p)^2} - \sigma_0^2 = 0 \quad (2.50)$$

que resulta no limite de $D = 3 + 2\epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$, à

$$p^2 = - \left(\frac{16\pi\sigma_0^2}{4(N+1)} \right)^2,$$

ou seja, um pólo taquiônico, uma vez que estamos utilizando a métrica de Minkowski. Um procedimento análogo à este pode ser feito para o caso $m^2 = \sigma_0 = 0$ e $\phi_0 \neq 0$, em três dimensões, encontraríamos um pólo complexo. Desta maneira vemos que também, para $D=3$, a geração dinâmica de massa é fundamental para a estabilidade do modelo.

- 3) Em quatro dimensões, a função própria $\Pi(p)$ que define o propagador¹⁰ do campo auxiliar λ é logaritmicamente divergente. Poderíamos tentar subtrair essa divergência somando um termo proporcional à λ^2 na Lagrangiana (2.43). Porém este processo tornaria este modelo indistinto da teoria φ^4 . Por outro lado, podemos optar por simplesmente regularizar o modelo através da introdução de um corte Λ^2 ,

$$\Pi(p, \Lambda) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{i}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - (m^2 \Rightarrow \Lambda^2) \right]. \quad (2.51)$$

¹⁰Mais adiante veremos como calcular o propagador do campo auxiliar λ .

Consequentemente, teremos que o propagador irá se anular no limite $\Lambda \rightarrow \infty$. Assim, é fácil ver que, com excessão das funções de Green de dois pontos para os campos ϕ_α e σ , todas as funções de Green conexas se anulam.

A análise da unitariedade destes modelos será discutida numa seção à parte (Seção 2.3). Antecipadamente podemos dizer que esta análise independe da compacticidade do modelo. Em duas dimensões, o modelo sigma não linear não compacto também é análogo ao modelo sigma não linear compacto por ter um número infinito de cargas conservadas que sobrevivem à quantização. As cargas não locais são recursivamente encontradas por,

$$Q^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx j_0^{(n)}, \quad (2.52)$$

$$j_\mu^{(n)}(x, t) = -\epsilon_{\mu\nu}^{\nu} j_\nu^{(n-1)}(x, t) + j_\mu^{(0)}(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon(x-y) j_0^{(n-1)}(y, t) dy.$$

As correntes de ordem zero resultam justamente das correntes locais de "isospin",

$$j_\mu^{(0)} = i \left(\phi_a \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_b \right). \quad (2.53)$$

Lüscher^[30] mostrou que as infinitas leis de conservação não locais nos modelos sigma não lineares com simetria compacta sobrevivem à quantização. Isto implica na ausência de produção de partículas e, consequentemente, na fatorização da matriz S . Também para o modelo com simetria não compacta^[31], em duas dimensões, é possível escrever a Matriz S explicitamente e analisar a unitariedade pelo caminho padrão.

Terminamos esta seção apresentando as regras de Feynman para o campo λ . Este campo foi introduzido, conforme dissemos anteriormente, para reforçar o vínculo à que está sujeito o modelo sigma não linear e, também, para permitir a derivação da expansão $1/N$. Assim sendo este campo é um campo auxiliar coletivo e, portanto, não deve aparecer nos estados assintóticos do modelo. Por isto terá suas regras de Feynman definidas através dos campos físicos σ e $\vec{\phi}$, num processo análogo ao executado por Veltman^[32] na descrição de partículas instáveis.

O campo λ só aparece, na Lagrangiana (2.42), nos vértices trilineares $\lambda\sigma\sigma$ e $\lambda\phi_\alpha\phi_\alpha$, então, em ordem dominante da aproximação $1/N$, a função própria de dois pontos¹¹ é dada por

$$\Pi(p) = \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}$$

Assim,

$$\Delta_\lambda(p) = [\Pi(p)]^{-1}$$

onde

$$\Pi(p) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (2.54)$$

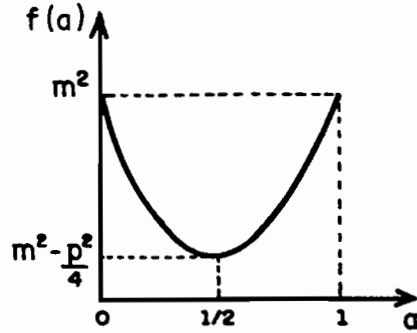
com D igual ao número de dimensões tempo-espaciais.

Após aplicarmos a parametrização de Feynman e fazermos uma rotação de Wick, obtemos no espaço Euclidiano que (2.54) é equivalente à,

$$\Pi(p) = -i \int_0^1 da \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k_E^2 + p^2 a^2 - p^2 a + m^2]^2}. \quad (2.55)$$

Tomando $f(a) = p^2 a^2 - p^2 a + m^2$, é fácil observar que o mínimo do denominador do integrando, da expressão acima, acontece para $a = \frac{1}{2}$, com $f(\frac{1}{2}) = m^2 - \frac{p^2}{4}$. Graficamente podemos ver que $f(a)$ é uma quantidade positiva para qualquer valor $a \in [0, 1]$ e $p^2 < 4m^2$.

¹¹Como esta função $\Pi(p)$ envolve dois vértices $\lambda\sigma\sigma$ há o cancelamento do sinal negativo extra do propagador do campo sigma



Definidos estes pontos, válidos em qualquer dimensão, vamos calcular explicitamente o propagador do campo auxiliar λ tanto em duas quanto em três dimensões.

Do fato que $f(a)$ é uma quantidade não negativa e, como $p^2 > 0$ também independe de a temos, então, que a integral (2.55) em duas dimensões corresponde, para $p^2 < 4m^2$, à

$$\begin{aligned}
 \Pi(p) &= -i \int_0^1 da \int \frac{d^2 k_E}{(2\pi)^2} \frac{1}{[k_E^2 + f(a)]^2} \\
 &= -i \int_0^1 da \int_0^\infty \frac{2\pi k_E dk_E}{[k_E^2 + f(a)]^2} \\
 &= -i \int_0^1 \frac{da}{4\pi} \frac{1}{f(a)} \\
 \Pi(p) &= \frac{1}{i\pi\sqrt{p^2(4m^2 - p^2)}} \text{arctg}[x] \tag{2.56}
 \end{aligned}$$

onde

$$x = \sqrt{\frac{4m^2}{p^2} - 1}.$$

Agora, na região em que $p^2 > 4m^2$ o resultado para o inverso do propagador $\Pi(p)$ pode ser encontrado fazendo a continuação analítica de (2.56) e usando a identidade

$$\text{arctg}[y] = \frac{1}{2i} \ln \frac{iy - 1}{iy + 1}$$

resultando em

$$\Pi(p) = \frac{1}{i2\pi\sqrt{p^2(p^2 - 4m^2)}} \ln \frac{1 - y}{1 + y} \tag{2.57}$$

com

$$y = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}.$$

Assim, em duas dimensões, o propagador do campo auxiliar λ é dado por

$$\Delta_\lambda(p) = \begin{cases} i\pi \sqrt{p^2(4m^2 - p^2)} [\text{arccotg}[z]]^{-1} & , p^2 < 4m^2 \\ 2\pi i \sqrt{p^2(p^2 - 4m^2)} \left[\ln \frac{1-z}{1+z} \right]^{-1} & , p^2 > 4m^2 \end{cases} \quad (2.58)$$

sendo que

$$z = \sqrt{\left| 1 - \frac{4m^2}{p^2} \right|}.$$

Note que o propagador é imaginário puro. Este fato é importante para a prova da unitariedade do modelo. Note também que este propagador não exibe pólos e sim cortes, o que vem a demonstrar a estabilidade da fase massiva (Veja equação (2.47)).

Em três dimensões, devemos analisar as duas possibilidades:

- i) $p^2 < 4m^2$, de forma que $f(a) > 0, \forall a \in [0, 1]$,
- ii) $p^2 > 4m^2$, que implica

$$f(a) \geq 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} 0 \leq a \leq a_- \\ a_+ \leq a \leq 1 \end{cases}$$

com $a_\pm = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \right)$ e $f(a) < 0$ para $a_- < a < a_+$.

A integral (2.55), em três dimensões, toma a forma

$$\Pi(p) = -i \int_0^1 da \int \frac{d^3 k_E}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k_E^2 + f(a)]^2}. \quad (2.59)$$

Assim, na região de $0 \leq p^2 < 4m^2$, temos^[33]

$$\Pi(p) = -\frac{i}{8\pi\sqrt{p^2}} \ln \left(\frac{2\sqrt{m^2} + \sqrt{p^2}}{2\sqrt{m^2} - \sqrt{p^2}} \right) \quad (2.60)$$

e para $p^2 > 4m^2$,

$$\Pi(p) = -\frac{i}{8\pi\sqrt{p^2}} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{p^2} + 2\sqrt{m^2}}{\sqrt{p^2} - 2\sqrt{m^2}} \right) + i\pi \right], \quad (2.61)$$

que nos fornece um propagador

$$\Delta_\lambda(p) = \begin{cases} i8\pi\sqrt{p^2}[\ln y]^{-1} & , p^2 < 4m^2 \\ i8\pi\sqrt{p^2}[\ln y + i\pi]^{-1} & , p^2 > 4m^2 \end{cases} \quad (2.62)$$

sendo

$$y = \left| \frac{\sqrt{p^2} + 2\sqrt{m^2}}{\sqrt{p^2} - 2\sqrt{m^2}} \right|.$$

Resumindo, as regras de Feynman para o modelo sigma não linear não compacto são:

$$\text{propagador de } \sigma \Leftrightarrow -i[p^2 - m^2 + i\epsilon]^{-1}$$

$$\text{propagador de } \phi_\alpha \Leftrightarrow i[p^2 - m^2 + i\epsilon]^{-1}$$

$$\text{propagador de } \lambda \Leftrightarrow \Delta_\lambda(p) \quad (2.63)$$

$$\text{vértice de } \lambda\phi_\alpha\phi_\alpha \Leftrightarrow i(N+1)^{-1/2}$$

$$\text{vértice de } \lambda\sigma\sigma \Leftrightarrow -i(N+1)^{-1/2}.$$

2.2 Modelo Sigma à Temperatura Finita

Pretendemos, agora, estudar o comportamento da versão não compacta do modelo sigma não linear à temperatura finita e comparar os resultados obtidos com os da versão compacta^[34]. Para facilitar esta comparação vamos introduzir um parâmetro a que toma valores 1 ou -1 correspondendo respectivamente ao caso de simetria compacta e não compacta. Esta notação nos conduz à Lagrangiana interpolante,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{a}{2} [(\partial_\mu \sigma)^2 - m^2 \sigma^2] + \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi_\alpha \partial_\mu \phi_\alpha - m^2 \phi_\alpha \phi_\alpha] + \\ & + \frac{\lambda}{\sqrt{N+1}} \left[\phi_\alpha \phi_\alpha + a \sigma^2 - \frac{N+1}{f} \right]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

A análise à seguir é análoga à efetuada na seção anterior para determinar a estabilidade das diversas fases à temperatura zero e os cálculos com temperatura finita já são bem conhecidos na literatura^[35]. De modo geral para $D \leq 3$, a constante de acoplamento renormalizada é dada por combinar (2.39) e (2.45), ou seja,

$$\left[\frac{\langle \vec{\phi}^2 \rangle - \langle \sigma^2 \rangle}{(N+1)} \right]_T = \frac{1}{f_R} + \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}, \quad (2.65)$$

onde

$$\begin{aligned} \left[\frac{\langle \vec{\phi}^2 \rangle - \langle \sigma^2 \rangle}{(N+1)} \right]_T = & \int \frac{id\vec{k}}{(2\pi)^D} \left[\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dk_0}{\kappa^2} \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} + \int_{-i\infty-\epsilon}^{i\infty-\epsilon} \frac{dk_0}{\kappa^2} \frac{1}{e^{-\beta k_0} - 1} \right] + \\ & + \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

com $\kappa^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2$ e $\beta = T^{-1}$. Assim, para duas e três dimensões temos os resultados abaixo.

- 1) Em duas dimensões os problemas com divergências infravermelhas permitem apenas a realização da fase massiva para qualquer versão de

simetria do modelo. A constante de acoplamento renormalizada, à temperatura finita, é dada por

$$\frac{1}{f_R} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{m^2}{\mu^2} - \int \frac{dk}{\pi} \frac{1}{2\omega_k} \frac{1}{\exp(\beta\omega_k) - 1}. \quad (2.66)$$

A equação acima apresenta sempre, dado f_R , uma solução para m , qualquer que seja o valor de T. Por exemplo, à altas temperaturas,

$$\frac{1}{f_R} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{m^2}{\mu^2} - \frac{1}{2\beta m} \quad (2.67)$$

- 2) Devido a problemas com infravermelho, também, o modelo de três dimensões à temperaturas diferentes de zero apresenta somente a fase massiva. A equação do “gap” de massa pode ser explicitamente resolvida para m

$$\frac{m}{4\pi} - \frac{1}{2\pi\beta} \ln(\exp(\beta m) - 1) = - \left(\frac{1}{f_R} + \frac{\mu}{4\pi} \right),$$

ou seja,

$$m = \frac{1}{2\pi\beta} \ln \left[\frac{\exp(\frac{\beta A}{2}) + \sqrt{\exp(\beta A) + A}}{2} \right], \quad (2.68)$$

onde

$$A = 4\pi \left(\frac{1}{f_R} + \frac{\mu}{4\pi} \right).$$

Particularmente, para altas temperaturas a equação (2.68) apresenta a massa como uma função linear de T.

- 3) Os problemas de renormalizabilidade, em quatro dimensões à temperatura não nula, são os mesmos que apresentamos para o modelo à temperatura zero. Mas, definindo uma “constante de acoplamento renormalizada” da mesma forma já utilizada para definir (2.51),

$$\frac{1}{f(\Lambda)} = \frac{1}{f_R} - \frac{m^2}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \frac{\Lambda^2 - \mu^2}{16\pi^2} \quad (2.69)$$

encontramos uma massa dependente da temperatura,

$$-m^2 \ln \frac{m^2}{\mu^2} - \frac{4\pi^2}{3} T^2 F(m^2 \beta^2) = 16\pi^2 \left[\frac{1}{af_R} + \frac{\mu^2}{16\pi^2} \right] \quad (2.70)$$

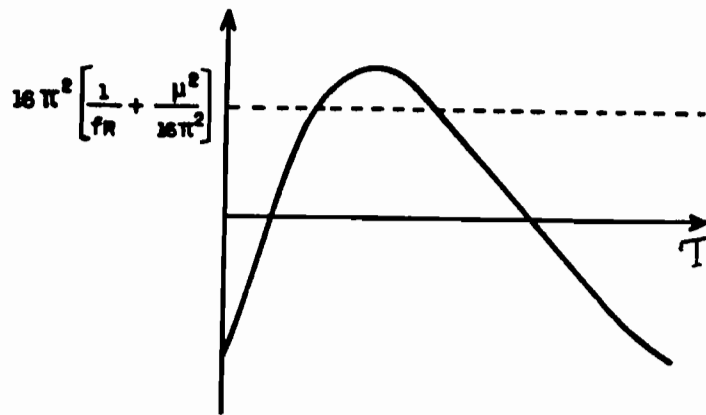
onde

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + y(\exp \sqrt{x^2 + y^2} - 1)},$$

é uma função monotonicamente decrescente ($F(0) = 1, F(\infty) = 0$).

É fácil observar que a “constante de acoplamento renormalizada”, (2.69), contém o termo m^2 , o que indica que a renormalização é dependente da temperatura. Esta hipótese implica que m^2 é um parâmetro livre e assim, todo o fardo de eliminar as divergências do modelo recai sobre a constante de acoplamento f .

A figura abaixo mostra o comportamento do lado esquerdo de (2.70). Vemos, assim, que para baixas temperaturas dependendo dos parâmetros f_R e μ^2 , poderão existir duas, uma ou nenhuma solução de $m^2(T)$. Por outro lado, com o aumento da temperatura e conseqüente diminuição do lado esquerdo de (2.70) haverá situações de nenhuma solução real para este limiar de temperatura. Isto significa que o conteúdo físico é perdido, pois, as massas se tornam imaginárias.



2.3 A Unitariedade do Modelo

O problema da coexistência de estados com norma positiva/negativa pode ser resolvido para algumas teorias de campos interagentes. Como é usual, nestas teorias, a probabilidade de transição de um estado inicial, $|in\rangle$, para um estado final, $|out\rangle$, é dada por,

$$P_{in \rightarrow out} = \frac{|\langle out|S|in\rangle|^2}{\|in\| \cdot \|out\|} \geq 0. \quad (2.71)$$

onde

- $\langle out|S|in\rangle$ é o elemento de matriz de espalhamento para os estados inicial e final em questão;
- $\|in\|$ e $\|out\|$ são as normas dos estados inicial e final respectivamente, sendo válida para estados arbitrariamente normalizados.

Observe que a equação (2.71) é obedecida quando os estados $\|in\|$ e $\|out\|$ são ambos positivos ou ambos negativos. Entretanto, o elemento de Matriz S deve se anular caso os estados inicial e final tenham normas de sinais opostos, para que a teoria seja realizada fisicamente. Assim, são necessárias regras de superseleção que excluam as transições entre os estados físicos de norma positiva para os de norma negativa e vice-versa. Em outras palavras, o espaço de Hilbert da teoria deve ser a união de dois sub-espacos disjuntos correspondentes a cada tipo de métrica. À priori, nestes sub-espacos não existem problemas com a unitariedade.

Começaremos a análise da unitariedade do modelo sigma pela comparação das regras de Feynman do modelo com simetria compacta com as do modelo não compacto. Da seção 2.1 torna-se clara que a diferença entre os dois modelos está nos sinais negativos que aparecem na frente do propagador do campo σ e do vértice trilinear $\lambda\sigma\sigma$. O efeito resultante deste sinal negativo extra pode ser facilmente calculado para um gráfico genérico \mathcal{G} através de,

$$N_\sigma + 2n_\sigma = 2V_\sigma, \quad (2.72)$$

onde N_σ é o número de linhas externas, n_σ o número de linhas internas e V_σ o número de vértices $\lambda\sigma\sigma$ que aparecem no gráfico \mathcal{G} . Consequentemente denotando as funções de Green para os modelos compacto e não compactos respectivamente por \mathcal{G}_{com} e \mathcal{G}_{ncom} , temos

$$\mathcal{G}_{com} = (-1)^{N_\sigma/2} \mathcal{G}_{ncom}. \quad (2.73)$$

Assim, podemos ver que as versões compacta e não compacta do modelo sigma estão relacionadas por um caminho muito simples. A relação acima pode ser usada para provar que a Matriz S do modelo não compacto, no sub-espaço constituído de estados com número par de campos sigma, é unitária em duas dimensões. De maneira geral a unitariedade é verificada através de

$$S = I + iT \quad \text{onde } I \text{ é a matriz Identidade.} \quad (2.74)$$

A unitariedade estará garantida se for observado que

$$\begin{cases} SS^\dagger & = I \\ (T - T^\dagger) & = iTT^\dagger. \end{cases} \quad (2.75)$$

Sejam $|a\rangle$ e $|b\rangle$ auto-estados com número de campos σ definidos por n_a e n_b . Então, a unitariedade para o modelo não compacto pode ser estudada verificando se a expressão abaixo é satisfeita,

$$\langle a|(T - T^\dagger)|b\rangle_{ncom} - i\langle a|(TT^\dagger)|b\rangle_{ncom} = 0. \quad (2.76)$$

Agora, devido à presença do campo sigma com métrica negativa, temos que

$$I = \sum_n |n\rangle (-1)^n \langle n|, \quad (2.77)$$

onde $|n\rangle$ são auto-estados com um número n de campos σ , de modo que

$$\langle a|TT^\dagger|b\rangle_{ncom} = \sum_n \langle a|T|n\rangle_{ncom} (-1)^n \langle n|T^\dagger|b\rangle_{ncom}, \quad (2.78)$$

usando (2.73), relacionamos os modelos compacto e não compacto,

$$\begin{aligned}
\langle a|TT^\dagger|b\rangle_{ncom} &= \sum_n (-1)^{(n_a+n)/2} \langle a|T|n\rangle_{com} (-1)^n (-1)^{(n+n_b)/2} \langle n|T^\dagger|b\rangle_{com}, \\
&= (-1)^{\frac{n_a+n_b}{2}} \sum_n \langle a|T|n\rangle_{com} \langle n|T^\dagger|b\rangle_{com}
\end{aligned} \tag{2.79}$$

$$\langle a|T|b\rangle_{ncom} = (-1)^{\frac{n_a+n_b}{2}} \langle a|T|b\rangle_{com}$$

$$\langle a|T^\dagger|b\rangle_{ncom} = (-1)^{\frac{n_a+n_b}{2}} \langle a|T^\dagger|b\rangle_{com}.$$

Segue de (2.76) e (2.79) que

$$\langle a|(T - T^\dagger - iTT^\dagger)|b\rangle_{ncom} = (-1)^{\frac{n_a+n_b}{2}} \langle a|(T - T^\dagger - iTT^\dagger)|b\rangle_{com} \tag{2.80}$$

Assim, se for verificado que um dos lados da expressão acima é nula, automaticamente, fica especificado que ambas as versões de simetria do modelo sigma tem uma Matriz S unitária. Como a Lagrangiana (2.42) só tem termos quadráticos nos campos ϕ_α e σ , fica estabelecido que o espaço físico do modelo é constituído por estados com um número par (ou ímpar) de “partículas” σ .

Conforme, citamos na Seção 2.1, em duas dimensões, em virtude das infinitas leis de conservação já se conhece a Matriz S tanto do modelo compacto^[30] quanto do modelo não compacto^[31], as quais comprovam a unitariedade expressa por (2.75) (no caso não compacto nos setores físicos).

Como um comentário geral note que, como o propagador do campo λ não tem pólos, a relação de unitariedade envolve somente os estados construídos com os campos assintóticos associados à ϕ_α e σ . Em duas dimensões, em ordem mais baixa de perturbação, a unitariedade decorre do fato que o

propagador do campo do campo λ é imaginário puro. Assim

$$\Delta_\lambda + \bar{\Delta}_\lambda = 0,$$

que diagramaticamente corresponde a

The diagrammatic equation shows a propagator diagram (two horizontal lines connected by a vertical dashed line) followed by a plus sign and a large left-facing curly bracket. Inside the bracket is the same propagator diagram. To the right of the bracket is an equals sign followed by a zero.

Em três dimensões, o propagador do campo auxiliar λ , (2.62), é do tipo complexo o que dificulta a análise. Mesmo assim, poderíamos argumentar em favor da unitariedade, uma vez que os modelos sigma não linear podem ser tomados como o limite dos modelos sigma linear, para os quais a relação de unitariedade é satisfeita. Entretanto, esta não é uma prova rigorosa. De qualquer forma, mostramos que o problema da unitariedade é independente da compacticidade assumida para os modelos sigma não linear.

2.4 Resumo das Conclusões

No decorrer deste capítulo vimos, em duas e três dimensões, que o modelo sigma não linear não compacto definido com constante de acoplamento nua negativa apresenta-se como uma teoria estável quando sua fase massiva é realizada. As outras fases possíveis são instáveis, porque os valores esperados no vácuo dos campos σ ou ϕ_α exibem pólos taquiônicos. Obtivemos estes mesmos resultados quando estudamos o modelo à temperatura finita.

Em quatro dimensões, apesar do modelo sigma ser não renormalizável, impusemos à temperatura não nula uma “constante de acoplamento renormalizada” e, encontramos, que o termo de massa m^2 é um parâmetro livre, pois, depende explicitamente da temperatura. Este fato nos revelou que o fardo de eliminar as divergências do modelo recai, totalmente, sobre a constante de acoplamento.

O estudo da unitariedade independe se o modelo sigma não linear tem simetria global compacta ou não compacta. Em particular, para duas dimensões, foi observado que a Matriz S é unitária para estados com número par de campos sigma, isto é, para os estados assintóticos do modelo. Em $D > 2$, mostramos que a questão continua em aberto, pois, o propagador do campo auxiliar λ é uma função complexa no espaço dos momentos.

Capítulo 3

As Teorias Quárticas da Gravitação

A Teoria da Gravitação de Einstein, também conhecida como Relatividade Geral, descreve muito bem fenômenos gravitacionais macroscópicos^[37, 38]. A teoria é definida através da ação de Einstein-Hilbert:

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} (\gamma \kappa^{-2} R + \kappa^{-4} \Lambda) \quad (3.1)$$

onde os acoplamentos dimensionais, κ^{-2} e κ^{-4} , são expressos em alguma escala de massa apropriada, enquanto que as constantes Λ e γ são adimensionais¹. Por outro lado, a teoria quântica desta ação fica seriamente comprometida pela existência destes acoplamentos dimensionais, pois, estes a tornam perturbativamente não renormalizável em quatro dimensões.

Simultaneamente ao desenvolvimento da Relatividade Geral, houve outras sugestões^[11, 12] por parte de Weyl e Eddington, que somaram termos com altas derivadas na métrica à ação (3.1), para poder incluir o campo eletromagnético em uma estrutura geométrica unificada; porém, esta teoria unificada mostrou-se ineficaz e foi abandonada. Todavia, a idéia de teorias com altas derivadas persistiu. Em 1950, Pais e Uhlenbeck^[39] mostraram, no

¹Ao comparar a teoria de Einstein com a teoria da Gravitação newtoniana costuma-se tomar $\gamma = 2$ e $\kappa^2 = 32\pi G$, sendo G a constante gravitacional de Newton.

contexto de teoria quântica de campos, que as teorias com altas derivadas podem ser utilizadas para analisar interações não locais, mesmo com a evidente existência de métrica negativa. Posteriormente, Utyama e DeWitt^[40] levantaram a hipótese de que a inclusão de termos com altas derivadas na ação gravitacional poderia permitir a renormalização de divergências que surgiam nas correções quânticas para as interações com campos de matéria. Já em meados dos anos 70, Veltman e 't Hooft^[41], calcularam quais os termos a serem incluídos na ação (3.1) em presença de matéria. Os cálculos foram realizados, até a ordem de 1-loop, sobre a Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(\gamma\kappa^{-2}R + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi). \quad (3.2)$$

Usando dois teoremas^[42] provados por 't Hooft, eles encontraram que a Lagrangiana de contratermos é dada por

$$\mathcal{L}_{counter}^{(1)} = \frac{\sqrt{-g}}{\varepsilon} \left(\frac{43}{120}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{9}{720}R^2 \right) \quad (3.3)$$

sendo que, se o sistema está na “concha de massa”, então, o único contratermo é

$$\mathcal{L}_{counter}^{(1)} = \frac{\sqrt{-g}}{\varepsilon} \frac{203}{80}R^2, \quad (3.4)$$

implicando que este se anula para a gravitação pura, onde $R = 0$. Vale ainda ressaltar que, apesar de 't Hooft e Veltman terem demonstrado que a Lagrangiana (3.2) poderia ser regularizada em 1-loop, cálculos posteriores^[43] mostraram que a ação pura da Gravitação é divergente para 2-loops.

Um outro termo, também possível, $\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu\gamma\sigma}R^{\mu\nu\gamma\sigma}$ foi omitido de $\mathcal{L}_{counter}^{(1)}$ devido ao uso de uma relação topologicamente invariante. Esta relação existe para qualquer dimensão par, geralmente é não trivial e é conhecido como Característica de Euler. De acordo com o teorema de Gauss-Bonnet, ela está relacionada à classe de Euler por:

$$\chi(M) = \int_M e(T(M)). \quad (3.5)$$

Em quatro dimensões, esta relação é

$$\chi(M) = \frac{1}{128\pi^2} \int d^4x\sqrt{-g} (4R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho} - 16R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + 4R^2). \quad (3.6)$$

Sob o ponto de vista físico, $\chi(M)$ é a medida do número de singularidades do espaço, sendo escrita, muitas vezes, em quatro dimensões como,

$$\int d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu\gamma\sigma} R^{\mu\nu\gamma\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2) = \text{Constante}, \quad (3.7)$$

recebendo, então, o nome de relação de Gauss-Bonnet, ou, identidade de Gauss-Bonnet se o espaço não tiver singularidade ($\chi(M) = 0$).

Assim sendo, de modo geral, temos que a parte da ação de contratermos correspondente à gravitação pura é dada por:

$$\Gamma_{\infty}^{(1)} = \int d^4x \sqrt{-g} (a_1 R^2 + a_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + a_3 R_{\mu\nu\sigma\rho} R^{\mu\nu\sigma\rho}), \quad (3.8)$$

que pode ser reescrita na forma:

$$\Gamma_{\infty}^{(1)} = \int d^4x \sqrt{-g} [c_1 R^2 + c_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + c_3 \chi(M)]. \quad (3.9)$$

Realmente, apenas, c_3 tem significado físico; já os outros dois coeficientes, c_1 e c_2 , são dependentes de calibre^[44].

Em 1977, Stelle publicou um artigo^[13] mostrando ser possível encontrar uma ação para a gravitação renormalizável, pelo menos, por contagem de potência. Para tanto ele considerou,

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} [\alpha R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \beta R^2 + \kappa^{-2} \gamma R], \quad (3.10)$$

onde α e β são constantes adimensionais². A prova da renormalizabilidade foi baseada nas equações de renormalização extraídas das identidades de Slanov-Taylor para o funcional gerador dos vértices próprios. Estas equações governam a estrutura das partes divergentes desses vértices, mostrando, por meio de suas soluções, que algumas divergências podem ser eliminadas pela renormalização dos coeficientes dos termos invariantes de calibre. As outras divergências, não invariantes, devem ser eliminadas por renormalização não linear dos campos de fantasmas gravitacionais e dos de Faddeev-Popov.

²Nesta ação também o termo quadrático do tensor de Riemann-Christoffel foi omitido devido à equação (3.7).

Esta nova ação (3.10) exibe um melhor comportamento no limite ultravioleta e, assim, é uma candidata à uma teoria quântica da gravitação, em quatro dimensões. Apesar desta teoria ser perturbativamente renormalizável por contagem de potências, ela é não unitária devido às inclusões de termos com derivadas quárticas que acabam por gerar excitações massivas com métrica negativa. Este problema de métrica negativa fez com que muitos físicos buscassem uma teoria fisicamente mais plausível, como, por exemplo, a supergravidade. Alternativamente, as teorias quárticas podem ser pensadas como teorias efetivas da gravitação à baixas energias, no mesmo sentido que o modelo sigma não linear pode ser pensado como uma teoria efetiva das interações nucleares à baixas energias.

Agora, unitariedade não é o único aspecto que deve ser estudado numa teoria. Nosso estudo não aborda tal ponto, mas sim, o uso da identidade de Gauss-Bonnet como um vínculo da teoria e o uso da regularização dimensional como método regularizador das teorias quárticas. Assim, adotando uma ação que inclui, desde o princípio, termos quadráticos de curvatura apresentamos nosso trabalho: descrevendo a ação em termos da métrica conformemente plana (Seção 3.1); calculando até 1-loop o valor esperado da inserção do operador de Gauss-Bonnet na função de dois pontos (Seção 3.2) e, revelando que o fato do vínculo clássico do tensor de Weyl ser nulo, devido a métrica por nós escolhida, mantém-se após a quantização da teoria até a ordem de 1-loop (Seção 3.3). Uma revisão da Gravitação sob o ponto de vista de uma teoria de calibre é apresentado no Apêndice A.

3.1 As Teorias Quárticas com Métricas Conformemente Planas

A teoria clássica da gravitação apresenta vínculos topológicos, tais como a identidade de Gauss-Bonnet para espaços sem singularidades (que é válida para qualquer campo métrico) e o vínculo do tensor de curvatura de Weyl que é nulo quando a métrica é conformemente plana. Diversos modelos sobre

quantização da gravitação, dentre eles as Teorias Quárticas da Gravitação, se utilizam de tais vínculos com o objetivo de exprimir uma ação genérica quântica e/ou limitar os tipos de contratermos necessários para renormalizar a ação. Nossa contribuição neste tópico começará a partir de agora. Nas próximas seções, iremos analisar a validade do uso de alguns vínculos clássicos, bem como do uso de regularização dimensional nas Teorias Quárticas da Gravitação.

Até o presente momento temos escrito equações que são válidas para qualquer campo métrico, representando-as em termos do tensor de curvatura de Riemann-Christoffel, $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$, do tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, e do escalar, R . Como nosso intuito é facilitar os cálculos e a interpretação dos resultados obtidos, fixaremos uma métrica. Esta métrica não deverá ser trivial como a plana, onde

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = 0, \quad (3.11)$$

que levaria à uma condição muito forte sobre o campo métrico,

$$g_{\mu\nu} = \text{constante} \times \eta_{\mu\nu}. \quad (3.12)$$

Por isso escolhemos a métrica conformemente plana (MCP), que descreveremos abaixo.

Como se sabe^[37], o tensor de Riemann-Christoffel pode ser escrito, em D dimensões, em termos do tensor de Ricci, do escalar de curvatura e do tensor de curvatura de Weyl ($C_{\mu\nu\rho\sigma}$):

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{D-2} (g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}) + \\ - \frac{R}{(D-1)(D-2)} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) + C_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (3.13)$$

Uma característica particular do tensor de curvatura de Weyl é ter seu traço, sempre, igual à zero,

$$C^\mu_{\nu\mu\sigma} = 0, \quad (3.14)$$

sendo que suas outras características são as de apresentar nos índices as mesmas simetrias, antissimetrias e ciclicidade do tensor de Riemann-Christoffel.

Este tensor também recebe o nome de tensor conforme, uma vez que

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0, \quad (3.15)$$

é a condição necessária e suficiente^[37, 45] para que uma teoria seja invariante por transformações conformemente planas em qualquer ponto do espaço. O sistema de coordenadas que satisfaz a condição (3.15) é definido através de

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \exp(-f(x)). \quad (3.16)$$

Visto que $g^{\alpha\beta}g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\gamma}g^{\alpha\beta} = \delta_{\gamma}^{\beta}$, temos

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} \exp(f(x)) \quad (3.17)$$

e

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} = \exp(-2f(x)). \quad (3.18)$$

Note que a condição (3.15) sobre o campo métrico é mais fraca que (3.11) e que a métrica definida em (3.16) não é trivial como em (3.12).

Daqui em diante, para facilitar os cálculos, vamos considerar apenas um modelo simplificado construído a partir da ação (3.10) e da Métrica Conformemente Plana, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}e^{-f(x)}$, isto é, substituindo convenientemente³, os campos $g_{\alpha\beta}$ que aparecem em

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} (\alpha R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \beta R^2 + \kappa^{-2}\gamma R)$$

por (3.16), (3.17) e (3.18). Obtemos, desse modo que,

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{16} \int d^Dx \left[4(D-2)^2 \alpha f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + 4(\alpha(3D-4) - 4\beta(D-1)^2) f_{\mu}^{\mu} f_{\nu}^{\nu} \right] + \\ & + \frac{1}{16} \int d^Dx \left[4(D-2)^2 \alpha f_{\mu} f_{\nu} f^{\mu\nu} + \right. \end{aligned} \quad (3.19)$$

³Tais resultados foram conferidos com o auxílio do manipulador algébrico REDUCE, sendo que os programas usados em tal fim e seus resultados estão no Apêndice B.

$$\begin{aligned}
& + 4 \left(\alpha(D-2)(-2D+3) + 2\beta(D-1)^2(D-2) \right) f_\mu f^\mu f^\nu] + \\
& + \frac{1}{16} \int d^D x \left[\alpha(D-1)(D-2)^2 - \beta(D-1)^2(D-2)^2 \right] f^\mu f_\mu f^\nu f_\nu + \\
& + \frac{\kappa^{-2}\gamma}{16} \int d^D x 4(D-1) \exp(-f(x)) \left[(D-2)f_\beta f^\beta - 4f_\beta^\beta \right]
\end{aligned}$$

onde,

$$f_\mu \equiv \partial_\mu f, \quad f^\mu \equiv \partial^\mu f, \dots, \quad f_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_n} \equiv \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \partial^{\nu_1} \dots \partial^{\nu_n} f. \quad (3.20)$$

É relativamente fácil verificar que a única integral de (3.19) dependente de $\exp(-f(x))$ provém de $\int d^4 x \sqrt{-g} \kappa^{-2} \gamma R$, pois, reescrevendo os tensores de curvatura em termos da MCP vemos que

$$\sqrt{-g} \propto e^{-2f(x)}$$

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu \propto \text{polinômio em } f(x)$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\rho} R_{\nu\alpha\beta}^\rho \propto e^{-f(x)}$$

$$R^{\mu\nu\alpha\beta} = g^{\nu\rho} g^{\alpha\tau} g^{\beta\sigma} R_{\rho\tau\sigma}^\mu \propto e^{3f(x)}$$

$$R_{\nu\beta} = g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta} \propto \text{polinômio em } f(x)$$

$$R^{\nu\beta} = g^{\nu\gamma} g^{\beta\tau} R_{\gamma\tau} \propto e^{2f(x)}$$

$$R \equiv g_{\nu\beta} R^{\nu\beta} \propto e^{f(x)}.$$

Agora, a fim de prosseguirmos nosso estudo, necessitamos ainda linearizar a ação deste nosso modelo simplificado. Para tanto começamos a substituir, nos únicos termos com dependência exponencial presentes em (3.19), as

seguintes igualdades:

$$\partial_\mu [e^{-f} f^\mu] = -f_\mu f^\mu e^{-f} + f^\mu e^{-f}, \quad (3.21)$$

$$\partial_\mu [e^{-f} f f^\mu] = -f f_\mu f^\mu e^{-f} + f_\mu f^\mu e^{-f} + f f_\mu^\mu e^{-f}, \quad (3.22)$$

$$\partial_\mu [e^{-f} f f f^\mu] = -f f f_\mu f^\mu e^{-f} + 2f f_\mu f^\mu e^{-f} + f f f_\mu^\mu e^{-f}, \quad (3.23)$$

de sorte que,

$$\begin{aligned} \int d^4 x \sqrt{-g} \kappa^{-2} \gamma R &= \kappa^{-2} \gamma \int \frac{d^D x (D-1)}{4} \times \\ &\times \left[\partial_\mu \left(-4e^{-f} f^\mu + (D-6)e^{-f} f f^\mu \right) + (D-6)e^{-f} \left(f f_\mu f^\mu - f f_\mu^\mu \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Em todos as nossas análises só efetuamos cálculos das funções de dois-pontos com correções quânticas até 1-loop. Por isto e, porque todos os outros termos, da ação (3.19), são polinômios de quarta ordem em f , expandimos e^{-f} em série de Taylor até segunda ordem. Desta forma temos

$$\begin{aligned} \int d^4 x \sqrt{-g} \kappa^{-2} \gamma R &\cong \\ &\kappa^{-2} \gamma \int \frac{d^D x (D-1)}{4} \left[\partial_\mu \left(-4e^{-f} f^\mu + (D-6)e^{-f} f f^\mu \right) + \right. \\ &\left. + (6-D) \left(f f_\mu^\mu - f f_\mu f^\mu - f f f_\mu^\mu + f f f_\mu f^\mu + f f f f_\mu^\mu \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Nos outros termos de (3.19), oriundos dos escalares quadráticos de curvatura da ação (3.10), apenas trocamos algumas parcelas pelas identidades:

$$\partial_\mu (f_\nu f^{\mu\nu} - f^\mu f_\nu^\nu) = f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - f_\mu^\mu f_\nu^\nu \quad (3.26)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu (f f_\nu^\nu - 2f f_\nu^{\mu\nu}) = f_\mu^\mu f_\nu^\nu - f f_\mu^{\mu\nu} \quad (3.27)$$

$$\partial_\mu \left(\frac{1}{2} f^\mu f_\nu f^\nu \right) = f_\mu f_\nu f^{\mu\nu} + \frac{1}{2} f^\mu f_\mu f_\nu^\nu. \quad (3.28)$$

Assim, tomaremos como a ação do modelo simplificado, I_{aprox} ,

$$\begin{aligned}
I_{\text{aprox}} = & \\
= & \frac{1}{16} \int d^D x \partial_\mu \left\{ \alpha \left[2(D-2)^2 (f^\mu f_\nu f^\nu + 2f_\nu f^{\mu\nu} - 2f^\mu f_\nu^\nu) + \right. \right. \\
& + 4D(D-1) (\partial^\mu f f_\nu^\nu - 2f f_\nu^{\mu\nu}) \left. \right] - 16(D-1)^2 \beta (\partial^\mu f f_\nu^\nu - 2f f_\nu^{\mu\nu}) + \\
& + 4(D-1) \kappa^{-2} \gamma \exp(-f) ((D-6) f f^\mu - 4f^\mu) \left. \right\} + \\
& + \frac{4}{16} \int d^D x (D-1) f \left[(\alpha D - 4\beta(D-1)) (\partial^2)^2 + \kappa^{-2} \gamma (6-D) \partial^2 \right] f + \\
& + \frac{1}{16} \int d^D x \left[(D-2)(8\beta(D-1)^2 - 2\alpha(5D-8)) f_\mu f^\mu f_\nu^\nu + \right. \\
& + 4\kappa^{-2} \gamma (D-1)(D-6) (f f f_\mu^\mu + f f_\mu f^\mu) \left. \right] + \\
& + \frac{1}{16} \int d^D x \left[(D-1)(D-2)^2 (\alpha - (D-1)\beta) f_\mu f^\mu f_\nu f^\nu + \right. \\
& \left. - 2\kappa^{-2} \gamma (D-1)(D-6) (f f f f_\mu^\mu + 2f f f_\mu f^\mu) \right]. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Usamos, então, o formalismo do funcional gerador,

$$Z(J) = \int \mathcal{D}(f) e^{[iI(f) + i \int d^4 x f(x) J(x)]}, \tag{3.30}$$

para determinar as regras de Feynman das teorias quárticas⁴. A equação (3.30) pode, ainda, ser reescrita como

$$Z(J) = \int \mathcal{D}(f) e^{i \int d^4 x f S_2 f} \times e^{i I_{\text{int}}(f)} \times e^{i \int d^4 x f(x) J(x)}. \tag{3.31}$$

De modo que o propagador, $\Delta(x-y)$ é definido por

$$S_2(x) \Delta(x-y) = -i \delta^4(x-y), \tag{3.32}$$

⁴A primeira integral (3.29) é um termo de superfície e será descartada no que segue.

no espaço das configurações, ou no espaço dos momentos via transformadas de Fourier. Assim, da ação (3.29) extraímos que

$$S_2(x) = \frac{(D-1)}{4} \{[\alpha D - 4\beta(D-1)](\partial^2)^2 + \kappa^{-2}\gamma(6-D)\partial^2\}, \quad (3.33)$$

logo, no espaço dos momentos, temos que o propagador é dado por

$$\tilde{\Delta}(q) = \frac{-2i}{(D-1)[\alpha D - 4\beta(D-1)]} \frac{1}{q^2(q^2 - m^2)} \quad (3.34)$$

com

$$m^2 = \frac{\kappa^{-2}\gamma(6-D)}{\alpha D - 4\beta(D-1)}. \quad (3.35)$$

A análise dos pólos deste propagador pode ser realizada reescrevendo (3.34),

$$\tilde{\Delta}(q) = \frac{2i}{(D-1)\kappa^{-2}\gamma(6-D)} \left[\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2 - m^2} \right], \quad (3.36)$$

de forma a se poder observar que a excitação massiva apresenta métrica negativa. Para que estas excitações massivas não sejam taquiônicas devemos impor, em quatro dimensões,

$$\lim_{D \rightarrow 4} \frac{\kappa^{-2}\gamma(6-D)}{\alpha D - 4\beta(D-1)} > 0, \quad (3.37)$$

ou simplesmente,

$$(\alpha - 3\beta) > 0. \quad (3.38)$$

A condição de vínculo (3.38) sobre a massa do fantasma, não é um resultado exclusivo do modelo simplificado. Anteriormente, usando modelos e métodos diferentes do aqui apresentado, Stelle^[13], Antoniadis^[15] e Accioly-Gonçalves^[46] encontraram o mesmo vínculo, quando estudaram as excitações massivas presentes nas Teorias Quárticas da Gravitação com a aproximação de campo fraco,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (3.39)$$

Stelle, particularmente, havia associado a presença deste vínculo com a presença de um resquício de uma invariância conforme da ação,

$$\int d^4 \mathbf{x} \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2 \right) = \frac{1}{2} \int d^4 \mathbf{x} C_{\mu\nu\alpha\beta} C^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (3.40)$$

que é resultado da combinação das equações (3.7) com (3.13).

As regras de Feynman para os vértices são retiradas da parte de interação da ação (3.29). Da comparação de (3.29) com a equação (3.31), obtemos,

$$\begin{aligned} I_{inter} = & \int d^D \mathbf{x} \left\{ \frac{(D-2)}{8} (4\beta(D-1)^2 - \alpha(5D-8)) f_\mu f^\mu f_\nu \right. \\ & + \left. \frac{\kappa^{-2}\gamma(D-1)(D-6)}{4} (ff f_\mu^\mu + ff_\mu f^\mu) \right\} + \\ & + \frac{1}{16} \int d^D \mathbf{x} \left\{ (D-1)(D-2)^2 [\alpha - (D-1)\beta] f_\mu f^\mu f_\nu f^\nu + \right. \\ & \left. - 2\kappa^{-2}\gamma(D-1)(D-6) (ffff_\mu^\mu + 2ff f_\mu f^\mu) \right\}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Lembrando que, em (3.20), definimos os sub-índices gregos de f como representações de derivadas, passaremos a definir os vértices da seguinte maneira:

- Cada função f de um vértice representa o início ou o fim de uma linha que ao ser contraída à outra linha, independentemente de seu traçado, representa o propagador definido em (3.34),

$$\overline{f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})} = \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad (3.42)$$

- As derivadas atuam sobre o propagador da seguinte forma:

$$\overline{f_\mu(\mathbf{x})f^\rho(\mathbf{y})} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\rho} \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad (3.43)$$

- Agora, devido à grande variedade de vértices definidos em (3.41) e como nos cálculos de 1-loop nem todos serão utilizados, definiremos estes vértices com diferentes traçados e quando fôr necessário contrairemos

as linhas com as linhas de outros vértices ou de campos f externos, sempre, respeitando as duas regras acima. Então, representaremos cada vértice de (3.42) por

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} &= \frac{(D-2)}{8} [4\beta(D-1)^2 - \alpha(5D-8)] \times \\
 &\times f_\mu(x) f^\mu(x) f_\nu(x) \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} = \frac{\kappa^{-2}\gamma}{4} (D-1)(D-6) f(x) f_\mu(x) f^\mu(x) \quad (3.46)$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} = \frac{\kappa^{-2}\gamma}{4} (D-1)(D-6) f(x) f(x) f_\mu^\mu(x) \quad (3.47)$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} = \frac{(D-1)(D-2)^2 [\alpha - (D-1)\beta]}{16} \times \\
 \times f_\mu(x) f^\mu(x) f_\nu(x) f^\nu(x) \quad (3.48)$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} = \frac{\kappa^{-2}\gamma(D-1)(D-6)}{8} \times \\
 \times f(x) f(x) f(x) f_\mu^\mu(x) \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}
\text{Diagram} &= -\frac{\kappa^{-2}\gamma(D-1)(D-6)}{4} \times \\
&\times f(x)f(x)f_\mu(x)f^\mu(x)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

3.2 A Identidade de Gauss-Bonnet e a Regularização Dimensional

Desde o princípio deste capítulo temos enfatizado o papel da identidade de Gauss-Bonnet na limitação de termos nas Lagrangianas Quárticas da Gravitação. A partir de agora, analisaremos se essa identidade permanece como tal após a quantização da teoria, estudando suas prováveis contribuições até o nível de 1-loop em quatro dimensões.

Nosso primeiro passo será descrever a identidade clássica em termos da MCP. Para isto reescrevemos o lado esquerdo de (3.7)

$$GB = \int d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu\gamma\sigma} R^{\mu\nu\gamma\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2)$$

empregando (3.16), (3.17) e (3.18). Obtemos, assim, que a relação de Gauss-Bonnet (GB) é

$$\begin{aligned}
GB &= \int \frac{d^Dx}{16} [16(D-2)(D-3)(f_\mu^\mu f_\nu^\nu - f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - f_\mu f_\nu f^\nu f^\mu) + \\
&- 8(D-2)(D-3)^2 f_\mu f^\mu f_\nu^\nu + \\
&+ (D-1)(D-2)(D-3)(D-4) f^\mu f_\mu f^\nu f_\nu].
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Podemos, ainda, substituir, na expressão acima, as identidades

$$\partial_\mu (f_\nu f^{\mu\nu} - f^\mu f_\nu^\nu) = f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - f_\mu^\mu f_\nu^\nu \tag{3.51}$$

Podemos, ainda, substituir, na expressão acima, as identidades

$$\partial_\mu (f_\nu f^{\mu\nu} - f^\mu f_\nu) = f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - f^\mu f_\nu \quad (3.51)$$

$$\partial_\mu \frac{1}{2} f^\mu f^\nu f_\nu = f_\mu f_\nu f^{\mu\nu} + \frac{1}{2} f^\mu f_\mu f^\nu \quad (3.52)$$

e como resultado final, temos

$$GB = -(D-2)(D-3) \int d^D \mathbf{x} \partial_\mu \left(\frac{f^\mu f_\nu f^\nu}{2} + f_\nu f^{\mu\nu} - f^\mu f_\nu \right) + \quad (3.53)$$

$$+ \frac{(D-2)(D-3)(D-4)}{16} \int d^D \mathbf{x} [(D-1) f^\mu f_\mu f^\nu f_\nu - 8 f^\mu f_\mu f^\nu].$$

As regras de Feynman que definem os vértices desta relação, (3.53), obedecem as mesmas condições impostas na determinação das regras de Feynman da ação de interação (3.41). Assim, temos

$$\begin{array}{c} \diagup \text{---} \\ \diagdown \text{---} \end{array} = - \frac{(D-2)(D-3)(D-4)}{2} f^\mu(\mathbf{y}) f_\mu(\mathbf{y}) f^\nu(\mathbf{y}) \quad (3.54)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} = \frac{(D-1)(D-2)(D-3)(D-4)}{16} \times \quad (3.55)$$

$$\times f^\mu(\mathbf{y}) f_\mu(\mathbf{y}) f^\nu(\mathbf{y}) f_\nu(\mathbf{y}),$$

É importante observar que a equação (3.53) respeita, à nível de árvore, a identidade clássica em $D = 4$ num espaço sem singularidades e, consideravelmente, grande⁵ ($\int d^D \mathbf{x} \partial_\mu [\dots] = 0$).

⁵A integral da divergência total que aparece em (3.53) é análoga à Lei de Gauss do Eletromagnetismo que mede a carga contida dentro de uma superfície fechada, sendo que no contexto da Gravitação esta relação mede o número de singularidades do espaço.

Antes de continuarmos, é relevante observar a proporcionalidade explícita com $(D - 4)$ que aparece na última integral de (3.53).

Em 1980, Capper e Kimber^[47] publicaram um artigo levantando a hipótese de que na descrição de Gauss-Bonnet (3.7), em termos de qualquer métrica, **nunca** apareceriam termos proporcionais à $(D - 4)$ para quatro dimensões (ou $(D - 2)$ para duas dimensões). Para mostrar sua hipótese, eles estudaram a identidade de Gauss-Bonnet em duas dimensões, com a “métrica de fundo”

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa\phi_{\mu\nu} \quad (3.56)$$

isto é, em $D = 2$, tomaram

$$GB = \int d^2x \sqrt{-g} R \quad (3.57)$$

obtendo⁶

$$GB = \lim_{D \rightarrow 2} \kappa^2 \int d^D x \left[\frac{1}{4} \phi_{\alpha\alpha} \partial^2 \phi_{\rho\rho} - \frac{1}{4} \phi_{\rho\sigma} \partial^2 \phi_{\rho\sigma} + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \phi_{\alpha\alpha} \partial^\rho \partial^\mu \phi_{\rho\mu} + \frac{1}{2} \phi_{\rho\sigma} \partial^\mu \partial^\rho \phi_\mu^\sigma \right]. \quad (3.58)$$

Agora, vamos supor que o campo métrico $g_{\mu\nu}$ seja do tipo conformemente plano, ou seja,

$$\kappa\phi_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\nu} f,$$

a substituição deste campo em (3.58) resulta em

$$GB = \lim_{D \rightarrow 2} \int d^D x \frac{(D-1)(D-2)}{4} f \partial^2 f, \quad (3.59)$$

que é explicitamente proporcional à $(D-2)$. Usamos a aproximação fraca da MCP ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} e^{-f(x)} \cong (1 - f(x))\eta_{\mu\nu}$), mas, mesmo usando diretamente

⁶Em seu artigo, os índices gregos sob ϕ significam índices espaço-temporais e não derivadas como definimos em (3.20).

a MCP em (3.57) é fácil mostrar que a dependência explícita com (D-2) é mantida,

$$\begin{aligned}
 GB = & \lim_{D \rightarrow 2} \int d^D x \frac{(D-1)}{4} \partial_\mu [(D-2)f\partial^\mu f - 4\partial^\mu f] + \\
 & - \int d^D x \frac{(D-1)(D-2)}{4} f\partial^2 f.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

A relação acima é completamente análoga à versão quadridimensional (3.53) e, portanto, esta se reduz a uma identidade apenas quando ocorre as mesmas condições de integrabilidade, isto é, quando o espaço de integração é suficientemente grande e sem singularidades.

Após este parêntese, vamos retomar nossa análise quântica quadridimensional da contribuição do operador Gauss-Bonnet inserindo-o na função de (m+n)-pontos, isto é, calculando:

$$\langle P(n) | : GB : e^{iI_{Int}} | P(m) \rangle \equiv \langle 0 | TP(n) : GB : e^{iI_{Int}} P(m) | 0 \rangle \tag{3.61}$$

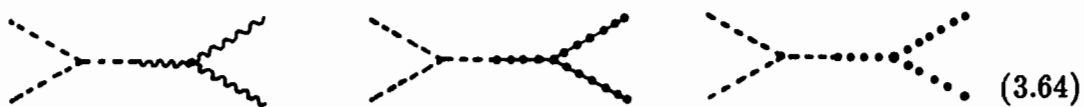
com $P(n) = f(z_1)f(z_2)\dots f(z_n)$, I_{Int} dado por (3.41) e com a imposição da ordenação temporal ($: :$) objetivando a retirada das bolhas de vácuo e dos *tadpoles*.

Podemos, neste caso, extrair a contribuição da inserção da relação de Gauss-Bonnet das funções de (m+n)-pontos com as pernas externas amputadas, como sendo aproximadamente dado por

$$: GB : e^{iI_{Int}} \cong : GB : +i : GB :: I_{Int} : . \tag{3.62}$$

A inserção do primeiro termo de (3.62) realiza o mesmo papel que a inserção de (3.53) nas funções de três (quatro) pontos. Já o segundo termo contribuí, à nível de árvore, para as funções de:

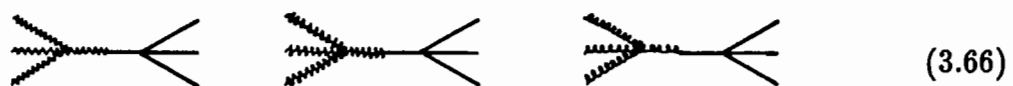
4-pontos



5-pontos



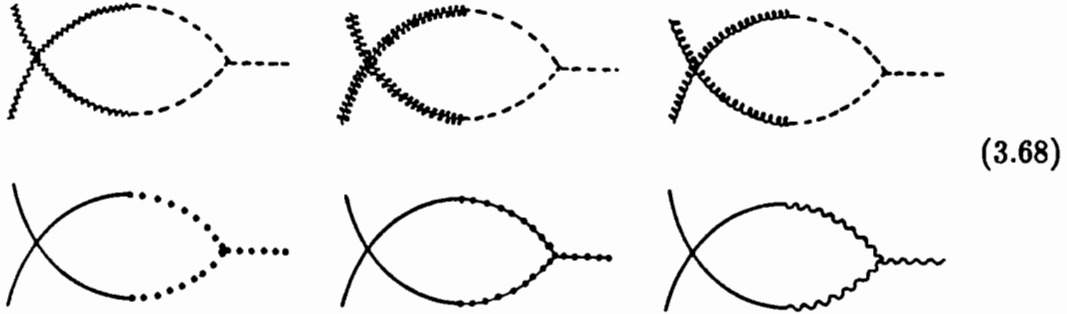
e 6-pontos



enquanto em 1-loop, obtemos as seguintes contribuições para as funções de:
2-pontos



3-pontos



e 4-pontos



Os diagramas, representados de (3.64) à (3.66), são nulos, devido a serem proporcionais à $(D-4)$ em nível de árvore. Por outro lado, os outros diagramas, de (3.67) à (3.69), são de 1-loop de maneira que a dependência linear com $(D-4)$ não é suficiente para garantir que os cálculos no limite $D \rightarrow 4$ também sejam iguais à zero. É o que ocorre com a inserção da relação de Gauss-Bonnet na função de dois pontos⁷, conforme veremos abaixo,

$$GB_{1-loop}^{(2)} = i \langle f(x_1) | : GB_3 :: I_3 : | f(x_2) \rangle, \quad (3.70)$$

⁷As outras inserções, (3.68) e (3.69), contribuem, respectivamente, para as funções de três e quatro pontos externos, o que as tornam independentes entre si e da função de dois pontos, logo, a renormalização deve ser feita perturbativamente caso a caso.

onde os termos trilineares em f são:

$$GB_3 = -\frac{(D-2)(D-3)(D-4)}{2} \int d^D y f_\rho f^\rho f_\gamma^\gamma \quad (3.70)$$

e

$$\begin{aligned} I_3 = & \int d^D x \frac{i(D-2)}{8} (4\beta(D-1)^2 - \alpha(5D-8)) f_\mu f^\mu f_\nu^\nu \\ & + \int d^D x \frac{\kappa^{-2}\gamma(D-1)(D-6)}{4} (ff_\mu^\mu + ff_\mu f^\mu). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Assim, (3.69) é dado por

$$GB_{1-loop}^{(2)} = (A + B + C) \quad (3.72)$$

com

$$\begin{aligned} A = & i \frac{[(5D-8)\alpha - 4\beta(D-1)^2]}{16} \times \\ & \times (D-2)^2(D-3)(D-4) \langle f(x_1) | : f_\mu f^\mu f_\nu^\nu :: f_\rho f^\rho f_\gamma^\gamma : | f(x_2) \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = & i \frac{\kappa^{-2}\gamma}{8} (D-1)(D-2)(D-3)(6-D)(D-4) \times \\ & \times \langle f(x_1) | : ff_\mu^\mu :: f_\rho f^\rho f_\gamma^\gamma : | f(x_2) \rangle \end{aligned}$$

e

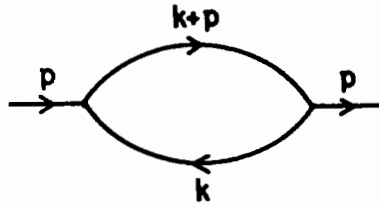
$$\begin{aligned} C = & i \frac{\kappa^{-2}\gamma}{8} (D-1)(D-2)(D-3)(6-D)(D-4) \times \\ & \times \langle f(x_1) | : ff_\mu f^\mu :: f_\rho f^\rho f_\gamma^\gamma : | f(x_2) \rangle. \end{aligned}$$

Deixamos os cálculos explícitos das parcelas A , B e C para o Apêndice C, pois estes são extensos e por vezes bastante repetitivos. Tomemos, agora,

a transformada de Fourier de (3.69). Assim, no espaço dos momentos, $GB_{1-loop}^{(2)}$, já dimensionalmente regularizado, é

$$\widetilde{GB}_{1-loop}^{(2)} = \frac{5\pi}{4(6\pi)^3(\alpha - 3\beta)^3(p^2 - m^2)^2} \left(1 + \frac{3m^2}{5p^2}\right) \quad (3.73)$$

onde estamos supondo que p é o momento que entra no diagrama



O novo resultado encontrado em (3.73) é finito e diferente de zero, mesmo num espaço sem singularidades, o que contraria (3.7).

Na tentativa de resgatar a identidade de Gauss-Bonnet, (3.7), vamos renormalizar seus coeficientes. Seja, então, a relação de Gauss-Bonnet com coeficientes renormalizados dada por:

$$\begin{aligned} GB_{Ren} &= \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} (1 + \lambda_0) R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - (4 - \zeta_0) R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + (1 + \theta_0) R^2, \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde λ_0 , ζ_0 e θ_0 são de ordem de 1-loop (isto é, eles são iguais à zero na aproximação de árvore). De forma que, em termos da MCP, obtemos:

$$\begin{aligned} GB_{Ren} &= \int d^D y \frac{8(D-2)}{16} [\lambda_0 - (D-2)\zeta_0 - (D-3)] \times \\ &\times \partial_\mu \{2f_\nu f^{\mu\nu} - 2f^\mu f_\nu^\nu + f^\mu f_\nu f^\nu\} + \\ &+ \int \frac{d^D y 16(D-1)}{16} [\lambda_0 - D\zeta_0 + (D-1)\theta_0] f_\mu^\mu f_\nu^\nu + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int \frac{d^D \mathbf{y} 8(D-2)}{16} [(D-4)(D-3) + 3\lambda_0 + \quad (3.75) \\
& - (5D-8)\zeta_0 + (D-1)^2\theta_0] f^\mu f_\mu f_\nu^\nu + \\
& + \int \frac{d^D \mathbf{y} (D-1)(D-2)}{16} [(D-4)(D-3) + 2\lambda_0 - 4(D-2)\zeta_0 + \\
& + (D-2)(D-1)\theta_0] f_\mu f^\mu f_\nu f^\nu.
\end{aligned}$$

A nova contribuição desta relação para a função de dois pontos agora é proveniente de

$$\begin{aligned}
GB_{Ren_0} &= \langle f(\mathbf{x}_1) | : GB_{Ren_0} : | f(\mathbf{x}_2) \rangle = \quad (3.76) \\
&= \frac{1}{16} [16(D-1)\lambda_0 + 4(D-4)(D-1)\zeta_0 + 16(D-1)^2\theta_0] \times \\
&\times \langle f(\mathbf{x}_1) | : f_\mu^\mu(\mathbf{y}) f_\nu^\nu(\mathbf{y}) : | f(\mathbf{x}_2) \rangle.
\end{aligned}$$

Então, o valor renormalizado da referida inserção na função de dois pontos é,

$$GB_{Ren_1-loop}^{(2)} = \langle f(\mathbf{x}_1) | : GB_{Ren_0} : | f(\mathbf{x}_2) \rangle + GB_{1-loop}^{(2)}, \quad (3.77)$$

ou seja, no espaço dos momentos, a transformada de Fourier de $GB_{Ren_1-loop}^{(2)}$, é

$$\begin{aligned}
\widetilde{GB}_{Ren_1-loop}^{(2)} &= \frac{5\pi}{4(6\pi)^3(\alpha-3\beta)^3(p^2-m^2)^2} \left(1 + \frac{3m^2}{5p^2}\right) + \quad (3.78) \\
&- \frac{(\lambda_0 + 3\theta_0)}{6(\alpha-3\beta)^2(p^2-m^2)^2}.
\end{aligned}$$

Este resultado mostra que não é possível resgatar a identidade de Gauss-Bonnet em 1-loop, mesmo tendo inserido correções renormalizadas. Dizemos isto porque não houve modo de cancelarmos os termos proporcionais à m^2/p^2 . Uma possível interpretação deste resultado é de que o uso de regularização dimensional em quantidades dependentes da topologia pode gerar anomalias. Este resultado está em consonância com outros trabalhos^[20, 21] sobre modelos quânticos de Gravitação, onde a regularização dimensional foi utilizada para eliminar as divergências ultravioletas.

3.3 O tensor de Weyl como uma Identidade

O fato de termos escolhido a MCP, na construção do modelo simplificado, acabou por introduzir o vínculo (3.15),

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} = 0,$$

e, classicamente, podemos esperar que

$$C_{\mu\nu\alpha\beta}C^{\mu\nu\alpha\beta} = 0, \quad (3.79)$$

também, seja satisfeito. Sendo assim, da equação (3.13), que relaciona $C_{\mu\nu\alpha\beta}$ com $R_{\mu\nu\alpha\beta}$,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{D-2} (g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}) + \\ - \frac{R}{(D-1)(D-2)} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) + C_{\mu\nu\rho\sigma},$$

temos que (3.79) é equivalente à

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{4}{(D-2)}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{2}{(D-1)(D-2)}R^2, \quad (3.80)$$

correspondendo, no limite de $D = 4$, à

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2 = 0. \quad (3.81)$$

Para estudarmos as possíveis identidades quárticas vamos considerar de modo geral a relação

$$GB_M = \int d^4x \sqrt{-g} \left[(1 + \lambda_M) R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - (4 + \zeta_M) R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + (1 + \theta_M) R^2 \right], \quad (3.82)$$

e procurar que valores de λ_M , ζ_M e θ_M implicam em $GB_M = 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir $\zeta_M = 0$, deixando λ_M e θ_M livres. Assim, obtemos para a MCP que

$$\begin{aligned} GB_M &= \int d^D y \frac{8(D-2)}{16} [\lambda_M - (D-3)] \partial_\mu \{ 2f_\nu f^{\mu\nu} - 2f^\mu f_\nu^\nu + f^\mu f_\nu f^\nu \} + \\ &+ \int \frac{d^D y 16(D-1)}{16} [\lambda_M + (D-1)\theta_M] f^\mu f_\nu^\nu + \\ &- \int \frac{d^D y 8(D-2)}{16} [(D-4)(D-3) + 3\lambda_M + \\ &+ (D-1)^2\theta_M] f^\mu f_\nu f^\nu + \\ &+ \int \frac{d^D y (D-2)(D-1)}{16} [(D-4)(D-3) + 2\lambda_M + \\ &+ (D-2)(D-1)\theta_M] f_\mu f^\mu f_\nu f^\nu. \end{aligned} \quad (3.83)$$

A identidade $GB_M = 0$, em nível de árvore, pode ser obtida resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \lambda_M + (D-1)\theta_M &= 0 \\ 3\lambda_M + (D-1)^2\theta_M &= -(D-4)(D-3) \\ 2\lambda_M + (D-2)(D-1)\theta_M &= -(D-4)(D-3), \end{aligned} \quad (3.84)$$

sendo que a última equação não é independente das duas anteriores. Da primeira destas $\lambda_M = -(D-1)\theta_M$ e, então, pela segunda equação temos que

$\theta_M = -(D-3)/(D-1)$ para $D \neq 4$. Assim, para $D \neq 4$, vemos que existe uma única relação, a qual coincide com (3.80).

Porém, se $D = 4$, as duas primeiras equações de (3.84) se tornam iguais e, portanto, $\lambda_M = -3\theta_M$. Substituindo este último resultado em (3.82) obtemos

$$GB_M = GB + 3\theta_M \left[R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{3} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right] = 0 \quad (3.85)$$

ou seja $GB = 0$ e $R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{3} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = 0$ que são equivalentes á $GB = 0$ e $C_{\mu\nu\alpha\beta} C^{\mu\nu\alpha\beta} = 0$. Vamos agora verificar que, em 1-loop, somente a segunda destas condições é satisfeita. Realmente, substituindo $\lambda_M = -(D-1)\theta_M$ em (3.83) obtemos,

$$\begin{aligned} GB_M &= \int d^D \mathbf{y} \frac{8(D-2)}{16} [(D-3) + (D-1)\theta_M] \times \\ &\quad \times \partial_\mu \{ 2f^\mu f^\nu - 2f_\nu f^{\mu\nu} - f^\mu f^\nu \} + \\ &\quad - 8 \int d^D \mathbf{y} (D-2)(D-4) [(D-3) + (D-1)\theta_M] \times \\ &\quad \times \frac{f^\mu f_\mu f^\nu}{16} + \\ &\quad + \int d^D \mathbf{y} (D-1)(D-2)(D-4) \times \\ &\quad \times [(D-3) + \theta_M(D-1)] \frac{f^\mu f_\mu f_\nu f^\nu}{16}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Assim, a única contribuição na inserção desta relação na função de dois pontos até 1-loop,

$$GB_{M_1\text{-loop}}^{(2)} = i \langle f(x_1) | : GB_{M_3} :: I_3 : | f(x_2) \rangle, \quad (3.87)$$

é proveniente do vértice trilinear em f , GB_{M_3} , dado por

$$GB_{M_3} = -\frac{(D-4)(D-2)}{2} \int d^D \mathbf{y} [(D-3) + (D-1)\theta_M] f_\mu f^\mu f^\nu \quad (3.88)$$

sendo que o outro vértice também trilinear em f, I_3 , já foi descrito em (3.71).

Os cálculos das integrais aqui envolvidas também estão no Apêndice C, sendo que, agora, o resultado final no espaço dos momentos é

$$\widetilde{GB}_{M_1-loop}^{(2)} = \frac{5\pi(1+3\theta_M)}{4(6\pi)^3(\alpha-3\beta)^3(p^2-m^2)} \left[1 + \frac{3m^2}{5p^2} \right] \quad (3.89)$$

onde $GB_{Mod_1-loop}^{(2)} = 0$ se $\theta_M = -\frac{1}{3}$.

A substituição deste resultado quântico na condição clássica $\lambda_M = -\theta_M(D-1)$ com $\zeta_M = 0$ leva à: $\theta_M = -1/3$ e $\lambda_M = 1$, de forma que substituindo-os em (3.86) resulta em

$$2 \int d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - 2R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2) = 0, \quad (3.90)$$

corroborando quanticamente com o resultado clássico (3.81).

Há de se notar, que apesar de termos empregado a regularização dimensional nos cálculos quânticos sobre a relação modificada de Gauss-Bonnet, conseguimos resgatar um outro vínculo (definido pela Métrica Conforme-mente Plana usada para construir o modelo simplificado), que apesar de ser em quatro dimensões, não é uma quantidade definida explicitamente pela topologia.

3.4 Conclusões

Estudamos a validade da identidade de Gauss-Bonnet no contexto de uma versão simplificada da teoria quártica da Gravitação. Com essa finalidade usamos o método de regularização dimensional e mostramos que a identidade não é preservada quando a regularização é removida. O processo de regularização dimensional foi escolhido, entre tantos outros, devido ao seu largo

emprego em teorias de calibre bem como nos modelos criados para descrever aspectos quânticos da Gravitação. Dessa forma é importante conhecermos as limitações deste método particular de regularização.

Mostramos, também, que uma outra identidade, a identidade de Weyl, válida classicamente no caso do modelo simplificado que consideramos, é preservada quanticamente.

Nossos resultados indicam, portanto, a necessidade de um exame cuidadoso sempre que a regularização dimensional for empregada para o estudo de relações topológicas.

Para as teorias quárticas da gravitação, uma implicação deste resultado é que deve sempre ser considerado a possibilidade de incluir um termo quadrático do tensor de Rieman-Christoffel, $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$, como parte da ação do modelo.

Apêndice A

A Gravitação Vista como uma Teoria de Calibre

Sabe-se que as leis da Física, na ausência de forças gravitacionais, são sempre invariantes por transformações globais de Lorentz e por translações. Tais invariâncias implicam nas leis de conservação da Relatividade Especial. Para incorporar a gravitação nesta estrutura, Einstein baseou-se numa lei de inércia generalizada, o Princípio da Equivalência.

O ponto de partida de Einstein foi o fato de que tanto a massa inercial quanto a massa gravitacional serem numericamente iguais, o que permite, em campos gravitacionais constantes, uma mudança de coordenadas do sistema em movimento (\vec{r}') para o que está em repouso relativo (\vec{r}) (e vice-versa), sem modificar o conteúdo das leis físicas:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \quad (\text{A.1})$$

Para generalizar estas transformações de coordenadas para quaisquer campos gravitacionais pode-se utilizar a formulação de Cartan. O ponto de partida é a introdução de uma tetrada, $e_\mu^m(x)$, geralmente conhecida como *vierbein*, que acaba por definir um referencial inercial plano ponto a ponto no espaço-tempo. Sejam os índices latinos, a, b, c, \dots , índices do espaço “plano” ou de Lorentz, e, os gregos, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, índices do espaço “curvo” ou de

Einstein, então:

$$d\zeta^m = e_\mu^m(x)dx^\mu \quad (\text{A.2})$$

$$e_\mu^m = \frac{\partial\zeta^m(x)}{\partial x^\mu}$$

com as propriedades:

$$\eta_{ab}e_\mu^a e_\nu^b = g_{\mu\nu} \quad (\text{A.3})$$

$$g^{\mu\nu}e_\mu^a e_\nu^b = \eta^{ab}$$

A Derivada Covariante por transformações gerais de coordenadas será descrita por meio da 1-forma contravariante dada por:

$$e^a \equiv e_\mu^a dx^\mu \quad (\text{A.4})$$

e a 1-forma covariante $e_a = e_a^\mu \partial_\mu$ por

$$e_a^\mu = \eta_{ab}g^{\mu\nu}e_\nu^b, \quad (\text{A.5})$$

obviamente com

$$e_a^\mu e_\mu^b = \delta_a^b \quad (\text{A.6})$$

$$e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu.$$

A teoria formulada, até aqui, é claramente invariante por transformações de Lorentz. É certo que a métrica $g_{\mu\nu}$ não define os *vierbein* unicamente, pois, se e_μ^a é uma solução da equação (A.5) e se a transformação $L \in O(3, 1)$, tal que

$$\eta_{ab}L_c^a L_d^b = \eta_{cd} \quad (\text{A.7})$$

temos

$$e_\mu^{\prime a} = L_b^a e_\mu^b \quad (\text{A.8})$$

que é outra solução do mesmo campo $g_{\mu\nu}$.

Agora, dada qualquer simetria de calibre, sempre existe um campo de calibre associado à esta. No caso da gravitação, em particular, estes campos

são conhecidos por *conexões de spin*, $\omega(x)$, que se transformam como outros campos de calibre

$$\omega' = L\omega L^{-1} + LdL^{-1}. \quad (\text{A.9})$$

A derivada covariante de calibre do *vierbein* define o que chamamos de “torsão”:

$$T^a = de^a + \omega_b^a \wedge e^b = \frac{1}{2} T_{bc}^a e^b \wedge e^c \quad (\text{A.10})$$

com $\omega_b^a = dx^\nu \omega_b^{\nu a}$. A transformação da torsão é feita através de

$$T' = LT. \quad (\text{A.11})$$

Com tais elementos, podemos, agora, construir um campo tensorial, o qual denominaremos curvatura,

$$R_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c = \frac{1}{2} R_{bcd}^a e^c \wedge e^d, \quad (\text{A.12})$$

com

$$R_{bcd}^a = e_\mu^a e_b^\rho \left[\partial^\mu \omega_{\rho cd} - \partial_\rho \omega_{cd}^\mu - \omega_{fc}^\mu \omega_{\rho d}^f + \omega_{\rho c}^f \omega_{fd}^\mu \right] \quad (\text{A.13})$$

cuja transformação de Lorentz é dada por

$$R' = LRL^{-1}. \quad (\text{A.14})$$

A Teoria de Einstein é formulada fixando a *conexão de spin* num processo chamado de “conexão de Levi-Cevita”, ou seja, a imposição

$$\omega_{\mu ab} + \omega_{\mu ba} = 0 \quad , \quad T = 0, \quad (\text{A.15})$$

implica em tomar

$$\omega_{b\mu}^a(e) = e_\nu^a D_\mu e_b^\nu, \quad (\text{A.16})$$

de tal forma que podemos escrever a conexão afim do espaço-tempo, $\Gamma_{\mu\rho}^\alpha$, como o símbolo de Christoffel usual:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\rho}^\alpha &= \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\rho \end{array} \right\} \\ &= g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\rho} + \partial_\rho g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\rho}) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

pelo fato de que,

$$D_\rho e_\mu^m = \partial_\rho e_\mu^m - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha e_\alpha^m + \omega_\rho^{mn} e_{m\mu} = 0. \quad (\text{A.18})$$

Esta formulação de Cartan acaba por ter um papel fundamental nas teorias quânticas de campos em espaços curvos, por introduzir os férmions na Gravitação.

Apêndice B

Cálculos usando o REDUCE

O manipulador algébrico REDUCE não processa cálculos tensoriais, como o MACSYMA, por exemplo, faz. Como desejávamos, apenas, conferir os coeficientes das substituições feitas ao escrevermos os campos métricos em termos da Métrica Conformemente Plana adaptamos os tensores em formas matriciais. Para isto usamos o seguinte dicionário:

- A métrica de Minkowski será dada por

$$\eta_{\mu\nu} = N(MI,NI)$$

$$\eta^{\mu\nu} = M(MI,NI)$$

- a função delta de Kronecker

$$\delta_{\mu}^{\nu} = DK(MI,NI)$$

- Para os termos onde atua apenas uma derivada definimos que

$$f^{\mu} = A(MU),$$

- enquanto que os campos com duas derivadas tornam-se

$$f^{\mu\nu} = B(MI,NI).$$

- Os resultados finais são simplificados da seguinte forma:

$$\text{FMM} = f_{\mu}^{\mu}$$

$$\text{FMFM} = f^{\mu} f_{\mu}$$

$$\text{FMNFMN} = f^{\mu\nu} f_{\mu\nu}$$

$$\text{FMMFNN} = f_{\mu}^{\mu} f_{\nu}^{\nu}$$

$$\text{FMNFMN} = f^{\mu} f^{\nu} f_{\mu\nu}$$

$$\text{FMFMFNN} = f^{\mu} f_{\mu} f_{\nu}^{\nu}$$

$$\text{FMFMFNFN} = f^{\mu} f_{\mu} f_{\nu} f^{\nu}.$$

- Com os tensores de curvatura resumidamente dados por:

$$\text{RMK} = R_{\mu\kappa}$$

$$\text{RMNKL} = R_{\mu\nu\kappa\lambda}$$

$$\text{RMKRMK} = R_{\mu\kappa} R^{\mu\kappa}$$

$$\text{RMNKLRMNKL} = R_{\mu\nu\kappa\lambda} R^{\mu\nu\kappa\lambda}$$

$$\text{CMNKL} = C_{\mu\nu\kappa\lambda}$$

$$\text{CMNKLCMNKL} = C_{\mu\nu\kappa\lambda} C^{\mu\nu\kappa\lambda}.$$

Este apêndice passará agora a ser apresentado da seguinte maneira, os programas são encontrados pela terminação .RED, enquanto que seus resultados serão apresentados nos arquivos .OUT, sendo que

- Com o arquivo RLMNK calculamos os tensores de Riemann-Christoffel, de Ricci e o escalar de curvatura de Ricci, bem como seus escalares ou como denominamos os quadráticos de curvatura, com a Métrica Conformemente Plana;
- Apresentamos a ação da Teoria Quártica da Gravitação com a MCP no arquivo ACTION e,
- as transformações das identidades clássicas em operadores quânticos podem serem encontradas nos arquivos GAUSS, WEYLCONF e WEYL-SQR, que, respectivamente equivalem à Gauss-Bonnet, o tensor de Weyl e o quadrado do tensor de Weyl,

nas seguintes páginas:

RLMNK.RED	72
RLMNK.OUT	74
ACTION.RED	75
ACTION.OUT	77
GAUSS.RED	79
GAUSS.OUT	81
WEYLCONF.RED	83
WEYLCONF.OUT	84
WEYLSQR.RED	85
WEYLSQR.OUT	87

ARQUIVO RLMNK.RED

```

off echo; off nat; OUT "RLMNK.OUT"; on list; off allfac;
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*N(Y,Z)=DK(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*N(Z,Y)=DK(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*N(X,Z)=DK(Y,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*N(Z,X)=DK(Y,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,Y)*DK(X,Y)=D;
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,X)=D;
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,Y)*DK(Y,X)=D;
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,Y)*DK(X,Z)=DK(Y,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,Y)*DK(Z,X)=DK(Y,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,Y)*DK(Z,Y)=DK(Z,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*DK(X,Y)=A(Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*M(X,Y)=A(Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*M(Y,X)=A(Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*N(X,Y)=A(Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*N(Y,X)=A(Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*M(X,Y)=B(X,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*N(X,Y)=B(X,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*DK(X,Y)=B(X,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*DK(Y,X)=B(X,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*M(X,Z)=B(Z,Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*N(X,Z)=B(Z,Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*DK(Y,Z)=B(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*DK(X,Z)=B(Z,Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)**2*A(Y)**2=FMFMFNFN;
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)**2*B(Y,Y)=FMFMFN;
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*A(Y)*B(X,Y)=FMFNFMN;
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*A(Y)*B(Y,X)=FMFNFMN;
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,X)*B(Y,Y)=FMMFN;
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)**2=FMFNFM;

```

$RMNAB = (-1/2) * (DK(MI, BE) * B(NI, AL) - DK(MI, AL) * B(NI, BE))$

```

-N(NI, BE)*B(MI, AL)+N(NI, AL)*B(MI, BE)
+(1/4)*(DK(MI, AL)*A(NI)*A(BE)-DK(MI, BE)*A(NI)*A(AL)
+N(NI, BE)*A(MI)*A(AL)-N(NI, AL)*A(MI)*A(BE)
+(DK(MI, BE)*N(NI, AL)-DK(MI, AL)*N(NI, BE))*A(S)*A(S));

```

```

RNA:= M(MI, BE)*RMNAB;

```

```

R:=E**(F)*M(NI, AL)*RNA;

```

```

RMNABRMNAB:=((-1/2)*(DK(MI, BE)*B(NI, AL)-DK(MI, AL)*B(NI, BE)
-N(NI, BE)*B(MI, AL)+N(NI, AL)*B(MI, BE)
+(1/4)*(DK(MI, AL)*A(NI)*A(BE)-DK(MI, BE)*A(NI)*A(AL)
+N(NI, BE)*A(MI)*A(AL)-N(NI, AL)*A(MI)*A(BE)
+(DK(MI, BE)*N(NI, AL)-DK(MI, AL)*N(NI, BE))*A(S)*A(S)))
*((-1/2)*(DK(MI, BE)*B(NI, AL)-DK(MI, AL)*B(NI, BE)
-M(NI, BE)*B(MI, AL)+M(NI, AL)*B(MI, BE)
+(1/4)*(DK(MI, AL)*A(NI)*A(BE)-DK(MI, BE)*A(NI)*A(AL)
+M(NI, BE)*A(MI)*A(AL)-M(NI, AL)*A(MI)*A(BE)
+(DK(MI, BE)*M(NI, AL)-DK(MI, AL)*M(NI, BE))*A(J)*A(J)))
*E**(2*F);

```

```

RNARNA := E**(2*F)*((- A(AL)*A(NI)*D+ 2*A(AL)*A(NI)
- 2*B(NI, AL)*D+ 4*B(NI, AL)+ N(NI, AL)*A(S)*A(S)*D
- 2*N(NI, AL)*A(S)*A(S)- 2*N(NI, AL)*B(S, S))/4)*((- A(AL)*A(NI)*D
+ 2*A(AL)*A(NI)- 2*B(NI, AL)*D+ 4*B(NI, AL)
+ M(NI, AL)*A(J)*A(J)*D- 2*M(NI, AL)*A(J)*A(J)- 2*M(NI, AL)*B(J, J))/4);

```

```

RR :=((E**F*A(S)*A(S)*D**2
- 3*E**F*A(S)*A(S)*D+ 2*E**F*A(S)*A(S)- 4*E**F*B(S, S)*D
+ 4*E**F*B(S, S))/4)*((E**F*A(J)*A(J)*D**2- 3*E**F*A(J)*A(J)*D
+ 2*E**F*A(J)*A(J)- 4*E**F*B(J, J)*D+ 4*E**F*B(J, J))/4);
WRITE ";END;"; SHUT "RLMNK.OUT"; END;

```

ARQUIVO RLMNK.OUT

```

RMNAB := (
- A(S)**2*N(NI,BE)*DK(MI,AL) + A(S)**2*N(NI,AL)*DK(MI,BE)
- A(MI)*A(BE)*N(NI,AL) + A(MI)*A(AL)*N(NI,BE)
+ A(BE)*A(NI)*DK(MI,AL) - A(NI)*A(AL)*DK(MI,BE)
- 2*B(MI,BE)*N(NI,AL) + 2*B(MI,AL)*N(NI,BE)
+ 2*B(NI,BE)*DK(MI,AL) - 2*B(NI,AL)*DK(MI,BE))/4$
RNA := RNA := (A(S)**2*M(MI,BE)*N(NI,AL)*DK(MI,BE)
- A(S)**2*DK(AL,NI) - A(MI)**2*N(NI,AL)
- A(NI)*A(AL)*M(MI,BE)*DK(MI,BE)
+ 2*A(NI)*A(AL) - 2*B(MI,MI)*N(NI,AL) + 2*B(BE,AL)*N(NI,BE)
+ 2*B(NI,BE)*M(MI,BE)*DK(MI,AL)
- 2*B(NI,AL)*M(MI,BE)*DK(MI,BE))/4$
R := (E**F*A(S)**2*M(MI,BE)*DK(MI,BE)*D - E**F*A(S)**2*M(NI,AL)*DK(AL,NI)
- E**F*A(MI)**2*D - E**F*A(NI)**2*M(MI,BE)*DK(MI,BE)
+ 2*E**F*A(NI)**2 - 2*E**F*B(MI,MI)*D + 2*E**F*B(BE,BE)
- 2*E**F*B(NI,NI)*M(MI,BE)*DK(MI,BE)
+ 2*E**F*B(AL,BE)*M(MI,BE)*DK(MI,AL))/4$

RMNABRMNAB := E**(2*F)*(FMFMFNFN*(D**2 - 3*D + 2)
- 8*FMFMFNN*(D - 2) + 8*FMFMFMN*(D - 2) + 8*FMNFNM*(D - 2)
+ 8*FMMFNN )/8$
RNARNA := E**(2*F)*(FMFMFNFN*(D**3 - 5*D**2 + 8*D - 4)
+ FMFMFNN*(- 8*D**2 + 28*D - 24) + FMFMFMN*(4*D**2 - 16*D + 16)
+ FMNFNM*(4*D**2 - 16*D + 16) + FMMFNN*(12*D - 16) )/16$
RR := E**(2*F)*(FMFMFNFN*(D**4 - 6*D**3 + 13*D**2 - 12*D + 4)
+ FMFMFNN*(- 8*D**3 + 32*D**2 - 40*D + 16)
+ FMMFNN *(16*D**2 - 32*D + 16))/16$
;END;$

```

ARQUIVO ACTION.RED

```
OFF ECHO; OFF NAT; OUT "ACTION.OUT"; OFF ALLFAC; ON LIST;
WRITE " ACAO DA TEORIA CONFORMEMENTE PLANA          ";
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*N(Y,Z)=DK(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*N(Z,Y)=DK(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*N(X,Z)=DK(Y,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*N(Z,X)=DK(Y,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,Y)*DK(X,Y)=D;
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,X)=D;
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,Y)*DK(Y,X)=D;
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,Y)*DK(X,Z)=DK(Y,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,Y)*DK(Z,X)=DK(Y,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,Y)*DK(Z,Y)=DK(Z,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*DK(X,Y)=A(Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*M(X,Y)=A(Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*M(Y,X)=A(Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*N(X,Y)=A(Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*N(Y,X)=A(Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*M(X,Y)=B(X,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*N(X,Y)=B(X,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*DK(X,Y)=B(X,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*DK(Y,X)=B(X,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*M(X,Z)=B(Z,Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*N(X,Z)=B(Z,Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*DK(Y,Z)=B(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*DK(X,Z)=B(Z,Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)**2*A(Y)**2=FMFMFMFN;
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)**2*B(Y,Y)=FMFMFNN;
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*A(Y)*B(X,Y)=FMFMFMN;
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*A(Y)*B(Y,X)=FMFMFMN;
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,X)*B(Y,Y)=FMMFNN;
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)**2=FMFMFM;
FACTOR E,FMM,FMFM,FMFMFM,FMMFNN,FMFMFMN,FMFMFNN,FMFMFMFN;
```

```

RLMNKRLMNK := (E**(4*F))*RLMNK*
((E**(-F)/4)*
  2*M(MI,NI)*B(LA,KA) - 2*M(LA,NI)*B(MI,KA)
+ 2*M(LA,KA)*B(MI,NI) - 2*M(MI,KA)*B(LA,NI)
+ M(LA,KA)*A(MI)*A(NI) + M(MI,NI)*A(LA)*A(KA)
- M(LA,NI)*A(MI)*A(KA) - M(MI,KA)*A(LA)*A(NI)
+ M(MI,KA)*M(LA,NI)*A(BET)*A(BET)
- M(MI,NI)*M(LA,KA)*A(BET)*A(BET));
RMKRMK:= (E**(2*F))*RMK*
(1/4)*
  (D-2)*M(MI,KA)*A(BET)*A(BET) - 2*(D-2)*B(MI,KA)
  -(D-2)*A(MI)*A(KA) -2*M(MI,KA)*B(BET,BET));
RR:=R*((E**F)/4)*(D-1)*((D-2)*A(BET)*A(BET)-4*B(BET,BET));
WRITE " ALPHA*RMKRMK-BETA*R**2+KAPPAGAMMA*R ";
WRITE "JA CONSIDERANDO O JACOBIANO NO INTEGRANDO ";
ACTION := E**(-2*F)*(ALPHA*RMKRMK-BETA*RR+KAPPAGAMMA*R);
LET A(BE)**2=FMFM;
LET B(BE,BE)=FMM;
WRITE "SENDO QUE AS IDENTIDADES DAS DERIVADAS E O LIMITE DE ";
WRITE " F**5=0 NOS LEVAM A ";
LET FMFMFM=FMMFNN +DIF((FNFMM-FMFNN),M);
LET FMFMFMN=-(1/2)*FMFMFNN +DIF((1/2)*FMFMFN,M);
LET E**(-F)*FMM=DIF(E**(-F)*FM,M)+ E**(-F)*FMFM;
LET FMMFNN=DIF (DIF (FFNN,M)-2*FFNNM,M)+FFMMNN;
LET E**(-F)*FMFM=DIF(E**(-F)*FFM,M)
-(FFMM-FFFMM+(1/2)*FFFFMM)+FFFMF-FFFMM;
FACTOR ALPHA,BETA,KAPPAGAMMA,DIF,FFMM,FFMMNN,FFFMM,FFFFMM,FMFM;
FACTOR FFMFM;
WRITE "ACTION := ";ACTION ;WRITE ";END;";SHUT "ACTION.OUT";
END;

```

ARQUIVO ACTION.OUT

ACAO DA TEORIA CONFORMEMENTE PLANA §

ALPHA*RMKRMK-BETA*R**2+KAPPAGAMMA*R §

JA CONSIDERANDO O JACOBIANO NO INTEGRANDO §

ACTION := (FMNFNM*E**F*ALPHA*(D**2 - 16*D + 16)
+ FMMFNN*E**F*(BETA*(- 16*D**2 + 32*D - 16)
+ ALPHA*(12*D - 16))
+ FMFNFNM*E**F*ALPHA*
(4*D**2 - 16*D + 16)
+ FMFNFNN*E**F*(BETA*
(8*D**3 - 32*D**2 + 40*D - 16)
+ ALPHA*(- 8*D**2 + 28*D - 24))
+ FMFNFNFN*E**F*(BETA*(-D**4 + 6*D**3 - 13*D**2 + 12 *D -4)
+ ALPHA*(D**3 - 5*D**2 + 8*D - 4))
+ 4*A(BE)**2*D**2*KAPPAGAMMA
- 12*A(BE)**2*D*KAPPAGAMMA
+ 8*A(BE)**2*KAPPAGAMMA
- 16*B(BE, BE)*D*KAPPAGAMMA
+ 16*B(BE, BE)*KAPPAGAMMA)/(16*E**F)§

SENDO QUE AS IDENTIDADES DAS DERIVADAS E O LIMITE DE F**5=0 §
NOS LEVAM A §

EFFECTIVE ACTION := §
(DIF(FMFNFN/2,M)*ALPHA*(4*D**2 - 16*D + 16)
+ DIF(FM/E**F,M)*KAPPAGAMMA*(- 16*D + 16)
+ DIF(FFM/E**F,M)*KAPPAGAMMA*(4*D**2 - 28*D + 24)
+ DIF(DIF(FFNM,M) - 2*FFNNM,M)*ALPHA*(4*D**2 - 4*D)
+ DIF(DIF(FFNM,M) - 2*FFNNM,M)*BETA*(- 16*D**2 + 32*D - 16)

```

+ DIF(FNFMN - FMFNN,M)*ALPHA*(4*D**2 - 16*D + 16)
+ FMFMFNN*ALPHA*( - 10*D**2 + 36*D - 32)
+ FMFMFNN*BETA*(8*D**3 - 32*D**2 + 40*D - 16)
+ FMFMFNFN*ALPHA*(D**3 - 5*D**2 + 8*D - 4)
+ FMFMFNFN*BETA*( - D**4 + 6*D**3 - 13*D**2 + 12*D - 4)
+ ALPHA*FFMMNN*(4*D**2 - 4*D)
+ BETA*FFMMNN*( - 16*D**2 + 32*D - 16)
+ KAPPAGAMMA*FFMM*( - 4*D**2 + 28*D - 24)
+ KAPPAGAMMA*FFFMM*(4*D**2 - 28*D + 24)
+ KAPPAGAMMA*FFFFMM*( - 2*D**2 + 14*D - 12)
+ KAPPAGAMMA*FFMFM*(4*D**2 - 28*D + 24)
+ KAPPAGAMMA*FFFMF*( - 4*D**2 + 28*D - 24))/16$
;END;$

```


ARQUIVO GAUSS.RED

```
OFF ECHO;OFF NAT;OUT "GAUSS.OUT";
WRITE "GAUSS_BONNET - CAMPO CONFORME";
ON LIST;OFF ALLFAC;
FACTOR E,DELM,FMFMFNFN, FMFMFN, FMFNFMN, FMMFN, FMFN;
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*N(Y,Z)=DK(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*N(Z,Y)=DK(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*N(X,Z)=DK(Y,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*N(Z,X)=DK(Y,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,Y)*DK(X,Y)=D;
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,X)=D;
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,Y)*DK(Y,X)=D;
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,Y)*DK(X,Z)=DK(Y,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,Y)*DK(Z,X)=DK(Y,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,Y)*DK(Z,Y)=DK(Z,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*DK(X,Y)=A(Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*M(X,Y)=A(Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*M(Y,X)=A(Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*N(X,Y)=A(Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*N(Y,X)=A(Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*M(X,Y)=B(X,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*N(X,Y)=B(X,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*DK(X,Y)=B(X,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*DK(Y,X)=B(X,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*M(X,Z)=B(Z,Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*N(X,Z)=B(Z,Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*DK(Y,Z)=B(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)*DK(X,Z)=B(Z,Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)**2*A(Y)**2=FMFMFNFN;
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)**2*B(Y,Y)=FMFMFN;
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*A(Y)*B(X,Y)=FMFNFMN;
FOR ALL X,Y,Z,W LET A(X)*A(Y)*B(Y,X)=FMFNFMN;
FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,X)*B(Y,Y)=FMMFN;
```

```

FOR ALL X,Y,Z,W LET B(X,Y)**2=FMNFNM;

WRITE "JA CONSIDERANDO O JACOBIANO NO INTEGRANDO ";
GAUSS:=(RMNABRMNAB-4*RNARNA + RR)/(E**(2*F));
FACTOR L,Z,T;
GAUSSM:=((1+L)*RMNABRMNAB-4*(1+Z)*RNARNA +(1+T)*RR)/(E**(2*F));
WRITE "SENDO QUE AS IDENTIDADES DE DERIVADAS NOS LEVAM A ";
LET FMNFNM=FMMFNN +DIF((FNFMM-FMFNN),M);
LET FNFNFNM=-(1/2)*FMFMFNN +DIF((1/2)*FMFNFN,M);
WRITE "GAUSS := ";GAUSS;
WRITE "GAUSSM := ";GAUSSM;
LET L=-(D-1)*T;LET Z=0;
FACTOR T;WRITE "L= -(D-1)*T, Z=0";
WRITE "GAUSSM := ";GAUSSM;
WRITE ";END;";SHUT "GAUSS.OUT"; END;

```

ARQUIVO GAUSS.OUT

GAUSS := (FMFMFNFN*(D4 - 10*D**3 + 35*D**2 - 50*D + 24)**
+ FMFMFNN*(- 8*D3 + 64*D**2 - 168*D + 144)**
+ FMFMFMN*(- 16*D2 + 80*D - 96)**
+ FMMFNN*(16*D2 - 80*D + 96)**
+ FMNFNM*(- 16*D2 + 80*D - 96))/16\$**

GAUSSM := (FMFMFNFN*L*(2*D2 - 6*D + 4)**
+ FMFMFNFN*Z*(- 4*D3 + 20*D**2 - 32*D + 16)**
+ FMFMFNFN*T*(D4 - 6*D**3 + 13*D**2 - 12*D + 4)**
+ FMFMFNFN*(D4 - 10*D**3 + 35*D**2 - 50*D + 24)**
+ FMFMFNN*L*(- 16*D + 32)
+ FMFMFNN*Z*(32*D2 - 112*D + 96)**
+ FMFMFNN*T*(- 8*D3 + 32*D**2 - 40*D + 16)**
+ FMFMFNN*(- 8*D3 + 64*D**2 - 168*D + 144)**
+ FMFMFMN*L*(16*D - 32)
+ FMFMFMN*Z*(- 16*D2 + 64*D - 64)**
+ FMFMFMN*(- 16*D2 + 80*D - 96)**
+ 16*FMMFNN*L
+ FMMFNN*Z*(- 48*D + 64)
+ FMMFNN*T*(16*D2 - 32*D + 16)**
+ FMMFNN*(16*D2 - 80*D + 96)**
+ FMNFNM*L*(16*D - 32)
+ FMNFNM*Z*(- 16*D2 + 64*D - 64)**
+ FMNFNM*(- 16*D2 + 80*D - 96))/16\$**

SENDO QUE AS IDENTIDADES DE DERIVADAS NOS LEVAM A \$

GAUSS := \$
(FMFMFNFN*(D4 - 10*D**3 + 35*D**2 - 50*D + 24)**
+ FMFMFNN*(- 8*D3 + 72*D**2 - 208*D + 192)**
- 16*DIF(FMFMFN/2,M)*D2 + 80*DIF(FMFMFN/2,M)*D**
- 96*DIF(FMFMFN/2,M) - 16*DIF(FNFMN - FMFNN,M)*D2**
+ 80*DIF(FNFMN - FMFNN,M)*D - 96*DIF(FNFMN - FMFNN,M))/16\$

GAUSSM := \$
(FMFMFNFN*L*(2*D2 - 6*D + 4)**

```

+ FMFMFNFN*Z*( - 4*D**3 + 20*D**2 - 32*D + 16)
+ FMFMFNFN*T*(D**4 - 6*D**3 + 13*D**2 - 12*D + 4)
+ FMFMFNFN*(D**4 - 10*D**3 + 35*D**2 - 50*D + 24)
+ FMFMFN*L*( - 24*D + 48)
+ FMFMFN*Z*(40*D**2 - 144*D + 128)
+ FMFMFN*T*( - 8*D**3 + 32*D**2 - 40*D + 16)
+ FMFMFN*( - 8*D**3 + 72*D**2 - 208*D + 192)
+ FMFN*L*(16*D - 16)
+ FMFN*Z*( - 16*D**2 + 16*D)
+ FMFN*T*(16*D**2 - 32*D + 16)
+ L*(16*DIF(FMFN/2,M)*D - 32*DIF(FMFN/2,M)
+ 16*DIF(FNFM - FMFN,M)*D - 32*DIF(FNFM - FMFN,M))
+ Z*( - 16*DIF(FMFN/2,M)*D**2 + 64*DIF(FMFN/2,M)*D
- 64*DIF(FMFN/2,M) - 16*DIF(FNFM - FMFN,M)*D**2
+ 64*DIF(FNFM - FMFN,M)*D - 64*DIF(FNFM - FMFN,M))
- 16*DIF(FMFN/2,M)*D**2 + 80*DIF(FMFN/2,M)*D
- 96*DIF(FMFN/2,M) - 16*DIF(FNFM - FMFN,M)*D**2
+ 80*DIF(FNFM - FMFN,M)*D - 96*DIF(FNFM - FMFN,M))/16$
L= -(D-1)*T, Z=0$
GAUSSM := $
(FMFMFNFN*T*(D**4 - 8*D**3 + 21*D**2 - 22*D + 8)
+ FMFMFNFN*(D**4 - 10*D**3 + 35*D**2 - 50*D + 24)
+ FMFMFN*T*( - 8*D**3 + 56*D**2 - 112*D + 64)
+ FMFMFN*( - 8*D**3 + 72*D**2 - 208*D + 192)
+ T*( - 16*DIF(FMFN/2,M)*D**2 + 48*DIF(FMFN/2,M)*D
- 32*DIF(FMFN/2,M) - 16*DIF(FNFM - FMFN,M)*D**2
+ 48*DIF(FNFM - FMFN,M)*D - 32*DIF(FNFM - FMFN,M))
- 16*DIF(FMFN/2,M)*D**2 + 80*DIF(FMFN/2,M)*D
- 96*DIF(FMFN/2,M) - 16*DIF(FNFM - FMFN,M)*D**2
+ 80*DIF(FNFM - FMFN,M)*D - 96*DIF(FNFM - FMFN,M))/16$
;END;

```

ARQUIVO WEYLCONF.RED

```

OFF ECHO;
OFF NAT;
OUT "WEYLCONF.OUT";
WRITE "TENSOR DE WEYL - TEORIA CONFORMALMENTE PLANA      ";
ON LIST;
OFF ALLFAC;

WRITE "CLMNK = RLMNK - ((E**(-F))/(D-2))*(NLN*RMK - NLK*RMN ";
WRITE " - NMN*RLK + NMK*RLN) + R/((D-1)*(D-2))*E**(-2*F)  ";
WRITE "                *(NLN*NMK - NLK*NMN)                ";

      CLMNK:= RLMNK - ((E**(-F))/(D - 2))*(
      N(LA,NI)*(1/4)*(
      (D-2)*N(MI,KA)*A(BE)*A(BE) - 2*(D-2)*B(MI,KA)
      - (D-2)*A(MI)*A(KA) -2*N(MI,KA)*B(BE,BE))
      - N(LA,KA)*(1/4)*(
      (D-2)*N(MI,NI)*A(BE)*A(BE) - 2*(D-2)*B(MI,NI)
      - (D-2)*A(MI)*A(NI) -2*N(MI,NI)*B(BE,BE))
      - N(MI,NI)*(1/4)*(
      (D-2)*N(LA,KA)*A(BE)*A(BE) - 2*(D-2)*B(LA,KA)
      - (D-2)*A(LA)*A(KA) -2*N(LA,KA)*B(BE,BE))
      + N(MI,KA)*(1/4)*(
      (D-2)*N(LA,NI)*A(BE)*A(BE) - 2*(D-2)*B(LA,NI)
      - (D-2)*A(LA)*A(NI) -2*N(LA,NI)*B(BE,BE)))
      + R/((D-1)*(D-2))*(E**(-2*F))*(N(LA,NI)*N(MI,KA)
      - N(LA,KA)*N(MI,NI));

WRITE ";END;";
SHUT "WEYLCONF.OUT";
END;

```

ARQUIVO WEYLCONF.OUT

```
TENSOR DE WEYL - TEORIA CONFORMALMENTE PLANA      $
CLMNK = RLMNK - ((E**(-F))/(D-2))*(NLN*RMK - NLK*RMN $
- NMN*RLK + NMK*RLN) + R/((D-1)*(D-2))*E**(-2*F)  $
*(NLN*NMK - NLK*NMN)                               $
CLMNK := 0$
;END;$
```

ARQUIVO WEYLSQR.RED

```
OFF ECHO; OFF NAT; OUT "WEYLSQR.OUT"; ON LIST; OFF ALLFAC;
FACTOR CLMKN; WRITE "WEYLSQR - CAMPO CONFORME      ";
FOR ALL X,Y,Z,W LET N(X,Y)*M(X,Y)=D;
FOR ALL X,Y,Z,W LET N(X,Y)*M(X,Z)=DK(Y,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET N(X,Y)*M(Z,Y)=DK(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*N(X,Y)=D;
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*DK(Y,Z)=M(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*DK(X,Z)=M(Y,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET N(X,Y)*DK(Z,X)=N(Y,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET N(X,Y)*DK(Z,Y)=N(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,Y)*DK(Y,X)=D;
FOR ALL X,Y,Z,W LET DK(X,X)=D;
FOR ALL X,Y,Z,W LET RMK**2=R(S,A)*R(A,S);
FOR ALL X,Y,Z,W LET RMN**2=R(S,A)*R(A,S);
FOR ALL X,Y,Z,W LET RLK**2=R(S,A)*R(A,S);
FOR ALL X,Y,Z,W LET RLN**2=R(S,A)*R(A,S);
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*DK(Y,Z)=M(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*DK(X,Z)=M(Y,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET RMK=R(MI,KA);
FOR ALL X,Y,Z,W LET RMN=R(MI,NI);
FOR ALL X,Y,Z,W LET RLK=R(LA,KA);
FOR ALL X,Y,Z,W LET RLN=R(LA,NI);
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*N(Z,W)*R(X,Y)=N(Z,W)*R(X,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET R(X,X)=R;
FOR ALL X,Y,Z,W LET R(X,Y)*DK(Y,Z)=R(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET R(X,Y)*DK(Y,Z)=R(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET R(X,Y)*DK(Y,Z)=R(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET R(X,Y)*DK(Y,Z)=R(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET RMK**2=R(S,A)*R(A,S);
FOR ALL X,Y,Z,W LET RMN**2=R(S,A)*R(A,S);
FOR ALL X,Y,Z,W LET RLK**2=R(S,A)*R(A,S);
FOR ALL X,Y,Z,W LET RLN**2=R(S,A)*R(A,S);
```

```

FOR ALL X,Y,Z,W LET RMK=R(MI,KA);
FOR ALL X,Y,Z,W LET RMN=R(MI,NI);
FOR ALL X,Y,Z,W LET RLK=R(LA,KA);
FOR ALL X,Y,Z,W LET RLN=R(LA,NI);
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(XY)*N(Z,W)*R(X,Y)=N(Z,W)*R(X,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET R(X,X)=R;
FOR ALL X,Y,Z,W LET M(X,Y)*R(X,Y)=R(X,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET N(X,Y)*R(X,Y)=R(X,X);
FOR ALL X,Y,Z,W LET R(X,Y)*DK(Z,Y)=R(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET R(X,Y)*DK(Y,Z)=R(X,Z);
FOR ALL X,Y,Z,W LET R(X,Y)*DK(X,Z)=R(Z,Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET R(X,Y)*DK(Z,X)=R(Z,Y);
FOR ALL X,Y,Z,W LET R(MI,KA)**2=R(S,A)*R(A,S);
FOR ALL X,Y,Z,W LET R(MI,NI)**2=R(S,A)*R(A,S);
FOR ALL X,Y,Z,W LET R(LA,KA)**2=R(S,A)*R(A,S);
FOR ALL X,Y,Z,W LET R(LA,NI)**2=R(S,A)*R(A,S);
WRITE
"CLMNK = RLMNK + 1/(D-2)*(NLN*RMK + NMK*RLN -NMN*RLK - NLK*RMN)";
WRITE "          + (1/(D-1)*(D-2))*R*(NLK*NMN - NLN*NMK)          ";
RLMNKRLMNK :=(CLMNK - (1/(D-2))*(N(LA,NI)*RMK+N(MI,KA)*RLN
-N(MI,NI)*RLK-N(LA,KA)*RMN)
- (1/((D-1)*(D-2)))*R*(N(LA,KA)*N(MI,NI)-N(LA,NI)*N(MI,KA)))
*(CLMNK - (1/(D-2))*(M(LA,NI)*RMK + M(MI,KA)*RLN
-M(MI,NI)*RLK- M(LA,KA)*RMN)
- (1/((D-1)*(D-2)))*R*(M(LA,KA)*M(MI,NI) - M(LA,NI)*M(MI,KA)));
LET CLMNK=0;
WRITE " NA TEORIA CONFORMEMENTE PLANA, CLMNK=0 ";
WRITE "RLMNKRLMNK := ";RLMNKRLMNK;
WRITE "E QUANDO D=4"; LET D=4;
WRITE "RLMNKRLMNK := ";RLMNKRLMNK;
WRITE ";END;"; SHUT "WEYLSQR.OUT"; END;

```


ARQUIVO WEYLSQR.OUT

```

WEYLSQR - CAMPO CONFORME          §
CLMNK = RLMNK + 1/(D-2)*(Nln*RMK + Nmk*RLN - Nmn*RLK - Nlk*RMN)$
      + (1/(D-1)*(D-2))*R*(Nlk*Nmn - Nln*Nmk)          §
RLMNKRLMNK := (CLMNK**2*
(D**4 - 6*D**3 + 13*D**2 - 12*D + 4)
+ CLMNK*
(M(MI,KA)*M(LA,NI)*R*(D**2*R - 3*D + 2)
- M(MI,KA)*R(LA,NI)*(D**3 - 4*D**2 + 5*D - 2)
- M(MI,NI)*M(LA,KA)*R*(D**2 - 3*D + 2)
+ M(MI,NI)*R(LA,KA)*(D**3 - 4*D**2 + 5*D - 2)
+ M(LA,KA)*R(MI,NI)*(D**3 - 4*D**2 + 5*D - 2)
- M(LA,NI)*R(MI,KA)*(D**3 - 4*D**2 + 5*D - 2)
+ N(MI,KA)*N(LA,NI)*R*(D**2 - 3*D + 2)
- N(MI,KA)*R(LA,NI)*(D**3 - 4*D**2 + 5*D - 2)
- N(MI,NI)*N(LA,KA)*R*(D**2 - 3*D + 2)
+ N(MI,NI)*R(LA,KA)*(D**3 - 4*D**2 + 5*D - 2)
+ N(LA,KA)*R(MI,NI)*(D**3 - 4*D**2 + 5*D - 2)
- N(LA,NI)*R(MI,KA)*(D**3 - 4*D**2 + 5*D - 2))
+ R(A,S)*R(S,A)*(4*D**3 - 16*D**2 + 20*D - 8)
+ R**2*(- 2*D**2 + 6*D - 4))
/(D**4 - 6*D**3 + 13*D**2 - 12*D + 4)$
NA TEORIA CONFORMEMENTE PLANA, CLMNK=0          §
RLMNKRLMNK :=          §
      R(A,S)*R(S,A)*(4*D**3 - 16*D**2 + 20*D - 8)
+ R**2*(- 2*D**2 + 6*D - 4))
/(D**4 - 6*D**3 + 13*D**2 - 12*D + 4)$
E QUANDO D=4$
RLMNKRLMNK := (6*R(A,S)*R(S,A) - R**2)/3$
;END;§

```

Apêndice C

Diagramas Dimensionalmente Regularizados

Começaremos este apêndice por explicar as regras de construção de diagramas já definidas no Capítulo 3 em (3.42) e (3.43).

- De (3.42) temos

$$\overline{f(x)f(y)} = \Delta(x-y) = B \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \frac{e^{-ir(x-y)}}{(r^2 + i\epsilon)(r^2 - m^2 + i\epsilon)}, \quad (\text{C.1})$$

onde

$$B = \frac{-2i}{(D-1)[\alpha D - 4\beta(D-1)]}.$$

- Agora, em (3.43) definimos que

$$\begin{aligned} & \overline{f_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m}(x) f_{\xi_1 \dots \xi_j}^{\rho_1 \dots \rho_k}(y)} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\nu_n}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_m}} \frac{\partial}{\partial y^{\xi_1}} \dots \frac{\partial}{\partial y^{\xi_j}} \frac{\partial}{\partial y^{\rho_1}} \dots \frac{\partial}{\partial y^{\rho_k}} \Delta(x-y) \\ &= B \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \frac{e^{-ir(x-y)}}{r^2(r^2 - m^2)} \prod_{i=1}^n (-ir_{\nu_i}) \prod_{s=1}^m (-ir^{\mu_s}) \prod_{l=1}^j (ir_{\xi_l}) \prod_{t=1}^k (ir^{\rho_t}) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Assim, os diagramas do valor esperado no vácuo da inserção da Relação de Gauss-Bonnet¹ são construídos através de (C.1) e de (C.2) mais a chave dada abaixo.

Esta chave é definida considerando que um vértice genérico trilinear da ação de interação (3.71) é dado por $f_{a_1} f_{a_2} f_{a_3}$ e que o vértice genérico da Relação de Gauss-Bonnet² é $f_{g_1} f_{g_2} f_{g_3}$, de forma que todos os diagramas permitidos por $\langle f(\mathbf{x}_1) | : f_{a_1} f_{a_2} f_{a_3} :: f_{g_1} f_{g_2} f_{g_3} : | f(\mathbf{x}_2) \rangle$ são dados por:

$$\begin{aligned}
& \langle f(\mathbf{x}_1) | : f_{a_1} f_{a_2} f_{a_3} :: f_{g_1} f_{g_2} f_{g_3} : | f(\mathbf{x}_2) \rangle = \\
& = \left\{ \overline{f(\mathbf{x}_1) f_{a_1}} \overline{f(\mathbf{x}_2) f_{g_1}} \left[\overline{f_{a_2} f_{g_2}} \overline{f_{a_3} f_{g_3}} + \overline{f_{a_2} f_{g_3}} \overline{f_{a_3} f_{g_2}} \right] + \right. \\
& + \overline{f(\mathbf{x}_1) f_{a_1}} \overline{f(\mathbf{x}_2) f_{g_2}} \left[\overline{f_{a_2} f_{g_1}} \overline{f_{a_3} f_{g_3}} + \overline{f_{a_2} f_{g_3}} \overline{f_{a_3} f_{g_1}} \right] + \\
& + \overline{f(\mathbf{x}_1) f_{a_1}} \overline{f(\mathbf{x}_2) f_{g_3}} \left[\overline{f_{a_2} f_{g_1}} \overline{f_{a_3} f_{g_2}} + \overline{f_{a_2} f_{g_2}} \overline{f_{a_3} f_{g_1}} \right] + \\
& + \overline{f(\mathbf{x}_1) f_{a_2}} \overline{f(\mathbf{x}_2) f_{g_1}} \left[\overline{f_{a_1} f_{g_2}} \overline{f_{a_3} f_{g_3}} + \overline{f_{a_1} f_{g_3}} \overline{f_{a_3} f_{g_2}} \right] + \\
& + \overline{f(\mathbf{x}_1) f_{a_2}} \overline{f(\mathbf{x}_2) f_{g_2}} \left[\overline{f_{a_1} f_{g_1}} \overline{f_{a_3} f_{g_3}} + \overline{f_{a_1} f_{g_3}} \overline{f_{a_3} f_{g_1}} \right] + \\
& + \overline{f(\mathbf{x}_1) f_{a_2}} \overline{f(\mathbf{x}_2) f_{g_3}} \left[\overline{f_{a_1} f_{g_1}} \overline{f_{a_3} f_{g_2}} + \overline{f_{a_1} f_{g_2}} \overline{f_{a_3} f_{g_1}} \right] + \\
& + \overline{f(\mathbf{x}_1) f_{a_3}} \overline{f(\mathbf{x}_2) f_{g_1}} \left[\overline{f_{a_1} f_{g_2}} \overline{f_{a_2} f_{g_3}} + \overline{f_{a_1} f_{g_3}} \overline{f_{a_2} f_{g_2}} \right] + \\
& \left. + \overline{f(\mathbf{x}_1) f_{a_3}} \overline{f(\mathbf{x}_2) f_{g_2}} \left[\overline{f_{a_1} f_{g_1}} \overline{f_{a_2} f_{g_3}} + \overline{f_{a_1} f_{g_3}} \overline{f_{a_2} f_{g_1}} \right] + \right.
\end{aligned} \tag{C.3}$$

¹Sejam estas as inserções: Nua (3.69), Renormalizada (3.77) ou Modificada (3.87).

²Equação (3.70) para o cálculo de $GB_{1-loop}^{(2)}$ e de $GB_{Ren_{1-loop}}^{(2)}$ ou (3.88) para o cálculo de $GB_{M_{1-loop}}^{(2)}$.

$$+ \overline{f(x_1)f_{a_3}} \overline{f(x_2)f_{g_3}} \left[\overline{f_{a_1}f_{g_1}} \overline{f_{a_2}f_{g_2}} + \overline{f_{a_1}f_{g_2}} \overline{f_{a_2}f_{g_1}} \right] +$$

mais termos trocando $f(x_1) \leftrightarrow f(x_2)$ }.

Vamos exemplificar a aplicação desta chave em A definida em (3.72). Seja

$$C = i \frac{[(5D - 8)\alpha - 4\beta(D - 1)^2]}{16} (D - 2)^2 (D - 3)$$

então,

$$\begin{aligned} & C(D - 4) \langle f(x_1) | : f_\mu(x) f^\mu(x) f_\nu^\nu(x) :: f_\rho(y) f^\rho(y) f_\gamma^\gamma(y) : | f(x_2) \rangle = \\ & = C(D - 4) \times \\ & \times \left\{ \overline{f(x_1)f_\mu(x)} \overline{f(x_2)f_\gamma^\gamma(y)} \left[\overline{f^\mu(x)f_\rho(y)} \overline{f_\nu^\nu(x)f^\rho(y)} + \overline{f^\mu(x)f^\rho(y)} \overline{f_\nu^\nu(x)f_\rho(y)} \right] + \right. \\ & + \overline{f(x_1)f_\mu(x)} \overline{f(x_2)f^\rho(y)} \left[\overline{f^\mu(x)f_\rho(y)} \overline{f_\nu^\nu(x)f_\gamma^\gamma(y)} + \overline{f^\mu(x)f_\gamma^\gamma(y)} \overline{f_\nu^\nu(x)f_\rho(y)} \right] + \\ & + \left\{ \overline{f(x_1)f_\mu(x)} \overline{f(x_2)f_\rho(y)} \left[\overline{f^\mu(x)f^\rho(y)} \overline{f_\nu^\nu(x)f_\gamma^\gamma(y)} + \overline{f^\mu(x)f_\gamma^\gamma(y)} \overline{f_\nu^\nu(x)f^\rho(y)} \right] + \right. \\ & + \overline{f(x_1)f^\mu(x)} \overline{f(x_2)f_\rho(y)} \left[\overline{f_\mu(x)f^\rho(y)} \overline{f_\nu^\nu(x)f_\gamma^\gamma(y)} + \overline{f_\mu(x)f_\gamma^\gamma(y)} \overline{f_\nu^\nu(x)f^\rho(y)} \right] + \\ & + \overline{f(x_1)f^\mu(x)} \overline{f(x_2)f^\rho(y)} \left[\overline{f_\mu(x)f_\rho(y)} \overline{f_\nu^\nu(x)f_\gamma^\gamma(y)} + \overline{f_\mu(x)f_\gamma^\gamma(y)} \overline{f_\nu^\nu(x)f_\rho(y)} \right] + \\ & + \overline{f(x_1)f^\mu(x)} \overline{f(x_2)f_\gamma^\gamma(y)} \left[\overline{f_\mu(x)f_\rho(y)} \overline{f_\nu^\nu(x)f^\rho(y)} + \overline{f_\mu(x)f^\rho(y)} \overline{f_\nu^\nu(x)f_\rho(y)} \right] + \\ & + \overline{f(x_1)f_\nu^\nu(x)} \overline{f(x_2)f_\rho(y)} \left[\overline{f_\mu(x)f^\rho(y)} \overline{f^\mu(x)f_\gamma^\gamma(y)} + \overline{f_\mu(x)f_\gamma^\gamma(y)} \overline{f^\mu(x)f^\rho(y)} \right] + \\ & + \overline{f(x_1)f_\nu^\nu(x)} \overline{f(x_2)f^\rho(y)} \left[\overline{f_\mu(x)f_\rho(y)} \overline{f^\mu(x)f_\gamma^\gamma(y)} + \overline{f_\mu(x)f_\gamma^\gamma(y)} \overline{f^\mu(x)f_\rho(y)} \right] + \end{aligned} \tag{C.4}$$

$$+ \overline{f(x_1)f'_\nu(x)} \overline{f(x_2)f'_\gamma(y)} \left[\overline{f_\mu(x)f_\rho(y)} \overline{f^\mu(x)f^\rho(y)} + \overline{f_\mu(x)f^\rho(y)} \overline{f^\mu(x)f_\rho(y)} \right] +$$

mais termos trocando $f(x_1) \leftrightarrow f(x_2)$.

Especificamente para a primeira linha do lado direito de (C.4) temos, usando (C.1) e (C.2), que as expressões diagramáticas a serem calculadas são:

$$\begin{aligned} I &= C(D-4)B^4 \times \\ &\times \int d^D x \int d^D y \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{ip_\mu e^{-ip(x_1-x)}}{p^2(p^2-m^2)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(-q^2) e^{-iq(y-x_2)}}{q^2(q^2-m^2)} \cdot \\ &\cdot \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(-ik^\mu)(ik_\rho) e^{-ik(x-y)}}{k^2(k^2-m^2)} \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \frac{(-r^2)(-ir^\rho) e^{-ir(y-x)}}{r^2(r^2-m^2)} + \right. \\ &\left. + \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(-ik^\mu)(ik^\rho) e^{-ik(x-y)}}{k^2(k^2-m^2)} \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \frac{(-r^2)(-ir_\rho) e^{-ir(y-x)}}{r^2(r^2-m^2)} \right] \end{aligned} \quad (C.5)$$

Integrando³ em x, y, k e q , bem como efetuando os produtos escalares, obtemos

$$\begin{aligned} I &= 2CB^4(D-4) \times \\ &\times \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2 e^{-ip(x_1-x_2)}}{[p^2(p^2-m^2)]^2} \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \frac{[r^2 r \cdot (r+p) p \cdot (r+p)]}{r^2(r^2-m^2)(r+p)^2[(r+p)^2-m^2]}, \end{aligned} \quad (C.6)$$

de modo que no espaço dos momentos temos

$$I_p = 2CB^4(D-4) \times$$

³Nota: Estamos usando que a integração, no espaço das posições, resulta em

$$\int d^D z e^{izA} = (2\pi)^D \delta^D(A).$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{p^2}{[p^2(p^2 - m^2)]^2} \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \frac{[r \cdot (r + p)p \cdot (r + p)]}{(r^2 - m^2)(r + p)^2[(r + p)^2 - m^2]} \\
I_p &= 2CB^4 \frac{p^2}{[p^2(p^2 - m^2)]^2} \times \\
& \times \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \frac{(D - 4)[r^2 p^2 + p^\mu p^\nu r_\mu r_\nu + p^\mu r_\mu r^2 + p^\mu r_\mu p^2]}{(r^2 - m^2)(r + p)^2[(r + p)^2 - m^2]}.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Aplicando a parametrização de Feynman,

$$\frac{1}{abc} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{2dy}{[a + x(b - a) + y(c - a)]^3}$$

resulta que

$$\begin{aligned}
I_p &= 4CB^4 (D - 4) \frac{p^2}{[p^2(p^2 - m^2)]^2} \times \\
& \times \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \frac{[r^2 p^2 + p^\mu p^\nu r_\mu r_\nu + p^\mu r_\mu r^2 + p^\mu r_\mu p^2]}{[r^2 + 2r \cdot Q - M^2]^3},
\end{aligned} \tag{C.8}$$

com

$$Q = p(1 - y)$$

$$M^2 = m^2 + p^2(1 - y).$$

As várias integrais de I_p podem ser resolvidas derivando em Q ambos os lados de^[48]:

$$\int d^D k \frac{1}{[k^2 + 2k \cdot Q - M^2]^\alpha} = \frac{i\pi^{D/2}}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - M^2)^{\alpha - D/2}} \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right), \tag{C.9}$$

de forma que recursivamente temos,

$$\begin{aligned}
\int d^D k \frac{k_\mu}{[k^2 + 2k \cdot Q - M^2]^\alpha} &= \frac{i\pi^{D/2}}{\Gamma(\alpha)(-Q^2 - M^2)^{\alpha-D/2}} \left[-Q_\mu \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right) \right], \\
\int d^D k \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 + 2k \cdot Q - M^2]^\alpha} &= \frac{i\pi^{D/2}}{\Gamma(\alpha)(-Q^2 - M^2)^{\alpha-D/2}} \left[Q_\mu Q_\nu \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (-Q^2 - M^2) \Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{D}{2}\right) \right] \\
\int d^D k \frac{k^2}{[k^2 + 2k \cdot Q - M^2]^\alpha} &= \frac{i\pi^{D/2}}{\Gamma(\alpha)(-Q^2 - M^2)^{\alpha-D/2}} \left[Q^2 \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{D}{2} (-Q^2 - M^2) \Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{D}{2}\right) \right] \\
\int d^D k \frac{k^2 k_\mu}{[k^2 + 2k \cdot Q - M^2]^\alpha} &= \frac{i\pi^{D/2}}{\Gamma(\alpha)(-Q^2 - M^2)^{\alpha-D/2}} \left[-Q_\mu Q^2 \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{D+2}{2} Q_\mu (-Q^2 - M^2) \Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{D}{2}\right) \right].
\end{aligned}$$

Assim, o resultado de (C.8) é

$$\begin{aligned}
I_p &= 4CB^4 \frac{i\pi^2 p^2}{(2\pi)^4 \Gamma(3) [p^2(p^2 - m^2)]^2} (D-4) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(-Q^2 - M^2)^{3-D/2}} \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ p^2 \left[Q^2 \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) + \frac{D}{2} (-Q^2 - M^2) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \right] + \right. \\
&\quad + p^\mu p^\nu \left[Q^\mu Q^\nu \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) + \frac{g_{\mu\nu}}{2} (-Q^2 - M^2) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \right] + \quad (C.10) \\
&\quad + p^\mu \left[-Q_\mu Q^2 \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) - \frac{(D+2)}{2} Q_\mu (-Q^2 - M^2) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \right] + \\
&\quad \left. + p^2 p^\mu \left[-Q_\mu \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

A regularização dimensional^[49, 50] pode agora ser efetuada. Basicamente este processo consiste em colocar $D = 4 - 2\varepsilon$ e tomar o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ no resultado acima obtido⁴, logo,

$$\begin{aligned}
 I_p &= -CB^4 \frac{i\pi^2 p^2}{(2\pi)^4 [p^2(p^2 - m^2)]^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(\frac{5}{2} p^2 - 3Q_\mu p^\mu \right) \\
 &= \frac{\pi}{16 (p^2 - m^2)^2 (\alpha - 3\beta)^3 (6\pi)^3}
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

O exemplo acima serviu apenas para ilustrar como os diagramas são calculados. Apresentaremos, agora, os cálculos para os outros diagramas.

Existem três conjuntos de diagramas comuns à todas inserções. Estes conjuntos são:

$$\begin{aligned}
 \chi_1 &= \\
 &= (D - 4) \left\langle f(x_1) \mid : f^\mu(x) f_\mu(x) f_\nu^\nu(x) :: f^\rho(y) f_\rho(y) f_\gamma^\gamma(y) : \mid f(x_2) \right\rangle
 \end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_2 &= \\
 &= (D - 4) \left\langle f(x_1) \mid : f(x) f(x) f_\mu^\mu(x) :: f^\rho(y) f_\rho(y) f_\gamma^\gamma(y) : \mid f(x_2) \right\rangle
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_3 &= \\
 &= (D - 4) \left\langle f(x_1) \mid : f(x) f^\mu(x) f_\mu(x) :: f^\rho(y) f_\rho(y) f_\gamma^\gamma(y) : \mid f(x_2) \right\rangle
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

Seguiremos para os termos χ_i ; o mesmo esquema usado para calcular I (C.5), ou seja,

- i) Primeiro aplicando a chave (C.3);
- ii) Usando as regras definidas em (C.1) e (C.2);

⁴Lembrando que $\varepsilon\Gamma(\varepsilon) = \Gamma(\varepsilon + 1)$.

iii) Integrando nas coordenadas x, y, k e q e,

iv) Escrevendo os diagramas no espaço dos momentos.

Podemos, então, observar que todos estes diagramas tem o mesmo denominador do integrando,

$$\mathcal{F}(\chi_i) = [p^2 (p^2 - m^2)]^2 r^2 (r^2 - m^2) (r + p)^2 [(r + p)^2 - m^2], \quad (\text{C.15})$$

onde $\{i = 1, 2, 3\}$.

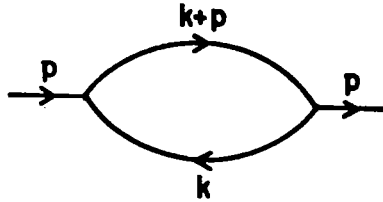
Já os numeradores são, respectivamente, dados por:

$$\begin{aligned} N(\chi_1) = & 28 (r^2)^2 p^2 (r \cdot p) + 24 (r^2)^2 (p^2)^2 + 12 r^2 p^2 (r \cdot p)^2 + \\ & + 20 (p^2)^2 r^2 (r \cdot p) + 8 (r^2)^2 (r \cdot p)^2 - 12 r^2 (r + p)^2 p^2 (r \cdot p) + \\ & - 8 r^2 (r + p)^2 (r \cdot p)^2 - 4 p^2 (r + p)^2 (r \cdot p)^2 + 4 (p^2)^2 (r \cdot p); \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned} N(\chi_2) = & 8 (r^2)^2 (r \cdot p) + 16 (r^2)^2 p^2 - 8 r^2 (r + p)^2 (r \cdot p) + \\ & + 16 r^2 p^2 (r \cdot p) + 12 (p^2)^2 r^2 + 4 (p^2)^2 (r \cdot p); \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned} N(\chi_3) = & 8 (r + p)^2 p^2 (r \cdot p) + 8 (r + p)^2 (r \cdot p)^2 - 16 (p^2)^2 r^2 + \\ & - 40 p^2 r^2 (r \cdot p) - 16 r^2 (r \cdot p)^2 - 12 p^2 (r^2)^2 + \\ & - 8 (r^2)^2 (r \cdot p) - 12 p^2 (r \cdot p)^2 - 8 (p^2)^2 (r \cdot p). \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Assim, cada termo de χ_i representa um diagrama que genericamente, no espaço dos momentos, representamos por



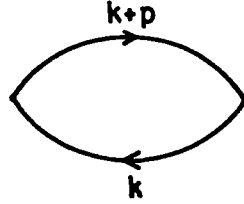
onde, conforme a necessidade, devemos empregar uma das seguintes parametrizações de Feynman,

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 d\underline{x} \frac{1}{[(a-b)\underline{x} + b]^2} \quad (\text{C.19})$$

$$\frac{1}{abc} = \int_0^1 d\underline{x} \int_0^{1-\underline{x}} \frac{2d\underline{y}}{[a + \underline{x}(b-a) + \underline{y}(c-a)]^3} \quad (\text{C.20})$$

$$\frac{1}{abcd} = \int_0^1 d\underline{x} \int_0^{1-\underline{x}} d\underline{y} \int_0^{1-\underline{x}-\underline{y}} \frac{\Gamma(4)d\underline{z}}{[a + (b-a)\underline{x} + (c-a)\underline{y} + (d-a)\underline{z}]^4}.$$

Agora, podemos regularizar dimensionalmente cada bolha de vácuo destes diagramas,



e integrar nas variáveis \underline{x} , \underline{y} e \underline{z} provenientes da parametrização de Feynman. Desse modo obtemos os seguintes resultados dimensionalmente regularizados, em $D = 4 - 2\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d^D k (D-4) \frac{1}{(k^2 - m^2)(k+p)^2[(k+p)^2 - m^2]} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d^D k (D-4) \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]} \\ &= i\pi^2 p_\mu; \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_3 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^D k (D-4) \frac{k_\mu}{k^2(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{C.23}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_4 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^D k (D-4) \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2](k+p)^2} \\
&= 0;
\end{aligned} \tag{C.24}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_5 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^D k (D-4) \frac{k_\mu}{k^2(k^2 - m^2)(k+p)^2[(k+p)^2 - m^2]} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{C.25}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_6 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^D k (D-4) \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2](k+p)^2} \\
&= -i \frac{\pi^2}{2} \eta_{\mu\nu};
\end{aligned} \tag{C.26}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_7 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^D k (D-4) \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]} \\
&= -\frac{1}{3} i \pi^2 \left[2p_\mu p_\nu + \eta_{\mu\nu} \left(3m^2 - \frac{p^2}{2} \right) \right];
\end{aligned} \tag{C.27}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_8 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^D k (D-4) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]} \\
&= -i \frac{\pi^2}{2} \eta_{\mu\nu};
\end{aligned} \tag{C.28}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_9 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^D k (D-4) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2](k+p)^2} \\ &= 0;\end{aligned}\tag{C.29}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{10} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^D k (D-4) \frac{k^2}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2](k+p)^2} \\ &= -2i\pi^2;\end{aligned}\tag{C.30}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{11} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^D k (D-4) \frac{k^2 k_\mu}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2](k+p)^2} \\ &= 2i\pi^2 p_\mu;\end{aligned}\tag{C.31}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{12} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^D k (D-4) \frac{k^2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)(k+p)^2[(k+p)^2 - m^2]} \\ &= -i\pi^2 (2p_\mu p_\nu + m^2 \eta_{\mu\nu}).\end{aligned}\tag{C.32}$$

Então, cada conjunto χ_i é igual à,

$$\begin{aligned}\chi_1 &= 28p^2 p^\mu \mathcal{D}_{11} + 24(p^2)^2 \mathcal{D}_{10} + 12p^2 p^\mu p^\nu \mathcal{D}_6 + \\ &+ 20(p^2)^2 p^\mu \mathcal{D}_4 + 8p^\mu p^\nu \mathcal{D}_{12} - 12p^2 p^\mu \mathcal{D}_2 + \\ &- 8p^\mu p^\nu \mathcal{D}_7 - 4p^2 p^\mu p^\nu \mathcal{D}_8 + 4(p^2)^2 p^\mu p^\nu \mathcal{D}_9 = -20i\pi^2 \mathcal{B}^4 (p^2)^2\end{aligned}\tag{C.33}$$

$$\begin{aligned}\chi_2 &= 8p^\mu \mathcal{D}_{11} + 16p^2 \mathcal{D}_{10} - 4p^\mu \mathcal{D}_2 + \\ &+ 16p^2 p^\mu \mathcal{D}_3 + 12(p^2)^2 \mathcal{D}_1 + 4(p^2)^2 p^\mu \mathcal{D}_5 = -24i\pi^2 \mathcal{B}^4 p^2\end{aligned}\tag{C.34}$$

$$\begin{aligned}
\chi_3 &= 8p^2 p^\mu \mathcal{D}_3 + 8p^\mu p^\nu \mathcal{D}_8 - 16(p^2)^2 \mathcal{D}_1 + \\
&- 40p^2 p^\mu \mathcal{D}_4 - 16p^\mu p^\nu \mathcal{D}_6 - 12p^2 \mathcal{D}_{10} + \\
&- 8p^\mu \mathcal{D}_{11} - 12p^2 p^\mu p^\nu \mathcal{D}_9 - 8(p^2)^2 p^\mu \mathcal{D}_5 = -12i\pi^2 \mathcal{B}^4 p^2
\end{aligned} \tag{C.35}$$

Desta forma temos que o resultado de (3.69) é dado por

$$\begin{aligned}
\widetilde{GB}_{1-loop}^{(2)} &= 2i \left[3(\alpha - 3\beta)\chi_1 + \frac{3}{2}\kappa^{-2}\gamma(\chi_2 + \chi_3) \right] \\
&= \frac{5\pi}{4(6\pi)^3(\alpha - 3\beta)^3(p^2 - m^2)^2} \left(1 + \frac{3m^2}{5p^2} \right).
\end{aligned} \tag{C.36}$$

Enquanto que a inserção da Relação de Gauss-Bonnet modificada (3.87) é

$$\begin{aligned}
\widetilde{GB}_{M_1-loop}^{(2)} &= 2i(1 + 3\theta_M) \left[3(\alpha - 3\beta)\chi_1 + \frac{3}{2}\kappa^{-2}\gamma(\chi_2 + \chi_3) \right] \\
&= \frac{5\pi(1 + 3\theta_M)}{4(6\pi)^3(\alpha - 3\beta)^3(p^2 - m^2)^2} \left(1 + \frac{3m^2}{5p^2} \right).
\end{aligned} \tag{C.37}$$

Por outro lado, (3.77) pode ser encontrada somando à (C.36) as inserções de termos de árvore GB_{Ren_0} dados por (3.76). Estas inserções são efetuadas através de

$$\begin{aligned}
\widetilde{GB}_{Ren_0} &= 6(\lambda_0 + 3\theta_0) \overline{f(x_1)f_\mu^\mu(y)} \overline{f(x_2)f_\nu^\nu(y)} \\
&= 6(\lambda_0 + 3\theta_0) \mathcal{B}^2 \int d^D y \int \frac{d^D p}{2(\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1-y)}(-p)^2}{p^2(p^2 - m^2)} \int \frac{d^D k}{2(\pi)^4} \frac{e^{-ik(y-x_2)}(-k)^2}{k^2(k^2 - m^2)} \\
&= 6(\lambda_0 + 3\theta_0) \mathcal{B}^2 \int \frac{d^D p}{2(\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{(p^2 - m^2)^2}
\end{aligned} \tag{C.38}$$

no espaço dos momentos temos que

$$\widetilde{GB}_{Ren_0} = -\frac{(\lambda_0 + 3\theta_0)}{6(\alpha - 3\beta)^2(p^2 - m^2)^2}, \quad (C.39)$$

portanto,

$$\begin{aligned} \widetilde{GB}_{Ren_1-loop}^{(2)} &= \frac{5\pi}{4(6\pi)^3(\alpha - 3\beta)^3(p^2 - m^2)^2} \left(1 + \frac{3m^2}{5p^2}\right) + \\ &\quad - \frac{(\lambda_0 + 3\theta_0)}{6(\alpha - 3\beta)^2(p^2 - m^2)^2}. \end{aligned} \quad (C.40)$$



Referências

- [1] Itzykson, C., Zuber, J-B, Quantum Field Theory, McGraw-Hill Book Co., Singapoure, (1980);
- [2] Kugo, T. , Ojima, I., Suppl. Prog. Theor. Phys. **66**, 1, (1979);
- [3] Gell-Mann, M., Lévy, M. Nuov. Cim., **16**, 705, (1960);
- [4] Polyakov, A. M., Phys. Lett, **59B**, 79, (1975);
- [5] Migdal, A. A., Sov. Phys.-JETP, **42**, 743, (1975);
- [6] Brézin, E., Zinn-Justin, J., Phys. Rev. Lett. **36**, 691, (1976); Phys. Rev. **B14**, 3110, (1976);
- [7] Cobra, B.B., Dissertação de Mestrado apresentada no Instituto de Física da Universidade de São Paulo, (1982);
- [8] Houghton, A., Jevicki, A., Kenway, R.D., Pruisken, A.M.M., Phys. Rev. Let. **45**, 394, (1980);
- [9] Cremmer, E., Julia, B., Nucl. Phys. **B159**, 141, (1979);
Schwarz, J. H., Phys. Lett.**B95**, 219, (1980);
Julia, B., Superspace and Supergravity ,Cambridge University Press, (1981);
Ellis, J., Gaillard, M. K., Günaydin, M., Zumino, B., Nucl. Phys. **B224**, 427, (1983);
van Holten, J. W., Nucl. Phys.**B242**, 307, (1984);

- [10] Brunini, S. A., Gomes, M., da Silva, A. J., Phys. Rev. **D38**, 706, (1988);
- [11] Weyl, H.- *Space-Time-Matter*, Dover-N.Y.,(1952);
- [12] Eddington, A.S.- *The Mathematical Theory of Relativity*, 2nd Ed, Cambridge University Press, London, (1937);
- [13] Stelle, K.S., Phys. Rev. **D16**, 953, (1977);
- [14] Bach,R., Math. Z., **9**, 110, (1921);
Lanczos, C., Ann. of Math, **39**, 842, (1938);
Lovelock, D., Rend. Sc. Fis. Mat e Nat. **XLII**, 187, (1967);
Proc. Camb. Phil. Soc., **68**, 345, (1970);
- [15] Antoniadis, I., Tomboulis, E.T., Phys. Rev., **D33**, 2756, (1986);
- [16] Johnston, D. A., Nucl. Phys., **B297**, 721, (1988);
- [17] Nielsen, N. K., Nucl. Phys., **B101**, 173, (1975);
- [18] Fradkin, E. S., Tseytlin, A. A., Nucl. Phys., **B201**, 469, (1982);
- [19] Avramidi, I. G., Sov. J. Nucl. Phys., **44**, 1, (1986);
- [20] Capper, D.M., Duff, M.J., Il Nuov. Cim., **23A**, 173, (1974);
Capper, D.M., Leibbrandt, J. Math. Phys. **15**, 82, (1974);
- [21] Fujikawa, K. Phys. Rev. **D21**, 2848, (1980);
Pascual, P., Tarin, J., Tarrach, R., Phys. Rev. **D39**, 2993, (1989);
- [22] Gomes, M., Ha, Y. K., Phys. Lett.**145B**, 235, (1984);
- [23] Gomes, M., Ha, Y.K., Phys. Rev. Lett. **58**, 2390, (1987);
- [24] Gasiorowicz, S.,- *Quantum Physics* - John Wiley & Sons, Inc., (1974);
- [25] Abdalla, E., Phys. Lett. **174B**, 441, (1984);
- [26] Davis, A. C., Macfarlene, A.J., van Holten, J.W., Phys. Lett. **125B**, 151, (1983) e Nucl. Phys. **B232**, 473, (1984);

- [27] Davis, A. C., Freeman, M.D., Macfarlane A.J., Nucl. Phys. **B258**, 393, (1985);
- [28] Aref'eva, Ya, Ann. Phys. **117**, 393, (1979);
- [29] Morozumi, T., Nojiri, S., Prog. Theor. Phys. **75**,677,(1986);
- [30] Lüscher, M., Nucl. Phys. **B135**, 1, (1978);
- [31] Ha, Y. K., Nucl. Phys. **B256**, 687, (1985);
- [32] Veltman, M., Physica **29**, 186, (1963);
- [33] Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I.M., Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, Inc, Florida, (1980);
- [34] Actor, A., Fortschr-Phys.**33**, 333, (1985);
- [35] Bernard, C. W., Phys. Rev. **D9**, 3312, (1974);
Dolan, L., Jackiw, R., Phys. Rev. **D9**, 3320, (1974);
Weinberg, S., Phys. Rev. **D9**, 3357, (1974);
- [36] Cutkosky, R., J. Math. Phys. **1**, 429, (1960);
- [37] Weinberg, S.- Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory of Relativity- John Wiley and Sons, Inc.- USA- (1972);
- [38] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A.- Gravitation- W. H. Freeman & Co. -USA- (1970);
- [39] Pais, A.- Uhlenbeck, G.E., Phys. Rev. **79**, 145, (1950);
- [40] Utiyama, R.- DeWitt, B., J. Math. Phys. **3**, 608, (1962);
- [41] 't Hooft, G.- Veltman, M., Ann. Inst. Henri Poincaré **20**, 69, (1974);
- [42] 't Hooft, G., Lecture Notes in Physics **37**, 92, (1975);
- [43] Goroff, M.H., Sagnotti, A., Nucl. Phys. **B266**, 709, (1986);

- [44] Alvarez, E., Rev. of Mod. Phys. **61**, 561, (1989);
- [45] Lord, E. A. - Tensors, Relativity and Cosmology - Tata McGraw-Hill Publ. Co. Ltd., New Delhi, (1976);
- [46] Gonçalvez, A.T., - Gravitação com Derivadas de Ordem Mais Elevada- Tese de Mestrado apresentada na Universidade Federal do Rio de Janeiro, (1987);
Accioly, A.J., Rev. Bras. Fís. **18**, 593, (1988);
- [47] Capper, D.M., Kimber, D.P., J. Phys. **A13**, 3671, (1980);
- [48] Frampton, P.H., Gauge Theories- Benjamin/Cummings Publ. Co., (1987);
- [49] Bollini, C.G., Giambiagi, J.J., Nuov. Cim. **12B**, 20, (1972);
- [50] 't Hooft, G., Veltman, M., Nucl. Phys. **B44**, 189, (1972).