

10/7/95

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física  
Departamento de Física Matemática

# Aproximação Gaussiana para um sistema não-ideal de muitos bosons

Paolo Roberto Inglese Tommasini

Tese de Doutorado  
submetida ao Instituto de Física  
da Universidade de São Paulo

Prof. Iberê Luiz Caldas  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Banca Examinadora : Prof. Dr. Antônio F.R. de Toledo Piza (USP)  
Prof. Dr. Emerson J.V. Passos (USP)  
Prof. Dr. Roberto Luzzi (UNICAMP)  
Prof. Dr. Takeshi Kodama (UFRJ)  
Prof. Dr. Vanderlei S. Bagnato (IF-São Carlos)

Orientador : Prof. Dr. Antônio Ribeiro de Toledo Piza

São Paulo  
1995

SBI-IFUSP



305M810T2295



539.72  
T655a  
D  
e.l

### **FICHA CATALOGRÁFICA**

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

**Tommasini, Paolo Roberto Inglese**

**Aproximação gaussiana para um sistema não-ideal  
de muitos bósons. São Paulo, 1995.**

**Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.  
Instituto de Física. Departamento de Física Matemática  
Área de Concentração: Física Nuclear  
Orientador: Prof. Dr. Antônio Fernando Ribeiro de  
Toledo Piza**

**Unitermos: 1. Teoria de muitos corpos; 2. Campo  
médio; 3. Tratamento cinético; 4. Teoria  $\phi^4$**

**USP/SBI - 25/95**

Aos meus dois

tesouros

Stefano e Nicola

À lembrança

de meu

Pai

# Agradecimentos

Ao privilégio de ter conhecido o Prof. Piza no primeiro ano da minha graduação e de ter trabalhado ao seu lado durante estes quase cinco anos.

À Irit pelo seu carinho e incentivo.

À minha mãe pelo seu total apoio.

Ao meu amigo Claudineu pelo encorajamento.

Aos meus colegas Lin, Érica e Paulo pela inestimável ajuda.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

# Resumo

O estado fundamental e propriedades térmicas de um sistema de bosons não relativísticos interagentes por uma interação repulsiva de dois corpos, são investigados através de uma aproximação Gaussiana auto-consistente que consiste em escrevermos o operador densidade variacionalmente determinado como o funcional Gaussiano mais geral dos operadores de campo. Resultados a temperatura finita são obtidos, incluindo transições de fase, no contexto do ensemble grand-canônico. Através de truncamentos na aproximação Gaussiana completa podemos reproduzir resultados tradicionais de Bogolyubov e de Lee, Yang e Huang. A aproximação Gaussiana completa fornece uma fase condensada que é termodinamicamente instável e uma fase não condensada que não difere essencialmente de uma teoria livre quando forças de contato e um esquema de renormalização padrão são usados. Como alternativa, uma teoria dependente do cut-off no momento é desenvolvida para um sistema diluído de bosons interagentes. A aproximação Gaussiana gera um espectro de quasi-partículas que contém um gap na energia, em conflito com os resultados perturbativos. Para investigar o espectro de excitações na teoria efetiva, é desenvolvida uma formulação dependente do tempo e o regime de pequenas oscilações para os parâmetros variacionais é estudado. São obtidas então as mesmas energias utilizadas no cálculo das ocupações estáticas.

# Abstract

The ground-state and thermal properties of a system of non-relativistic bosons interacting through repulsive two-body interactions are investigated using a self-consistent Gaussian mean-field approximation which consists in writing the variational determined density operator as the most general Gaussian functional of the quantized field operators. Finite temperature results are obtained, including phase transitions, in the grand canonical framework. Contact is made with the results of Bogolyubov and Lee, Yang and Huang in terms of particular truncations of the full Gaussian approximation. The full Gaussian approximation gives a condensate phase which is thermodynamically unstable and a non-condensate phase that does not differ essentially from a free phase when contact forces and standard renormalization scheme are used. As an alternative an effective cut-off dependent theory is developed for a dilute interacting bose system. The Gaussian approximation generates a quasi-particle spectrum having an energy gap, in conflict with perturbation theory results. In order to investigate the excitation spectrum of the effective theory, a time-dependent formulation is developed and the small oscillation regime for the variational parameter is studied. The same energies used in the calculus of the static occupations are obtained.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Aproximação Gaussiana</b>	<b>6</b>
2.1	Soluções formais de equilíbrio . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Aproximação de Quasi-Bosons livres</b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>Lidando com a Aproximação Gaussiana</b>	<b>19</b>
4.1	Forças de contato: teoria precária . . . . .	19
4.2	Teoria efetiva . . . . .	26
4.3	Resultados numéricos . . . . .	30
4.3.1	Dependência com o cut-off . . . . .	30
4.3.2	Transições de fase . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Evolução temporal</b>	<b>32</b>
5.1	Equações de movimento . . . . .	32
5.2	Soluções de equilíbrio . . . . .	35
5.2.1	Fase não condensada . . . . .	35
5.2.2	Fase condensada . . . . .	37
5.3	Equações de movimento linearizadas . . . . .	39
5.3.1	Solução não condensada . . . . .	39
5.3.2	Solução condensada . . . . .	44
5.4	Resultados numéricos . . . . .	52

<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>Obtenção de <math>\mathcal{F}_0</math></b>	<b>55</b>
<b>B</b>	<b>Cálculo de traços</b>	<b>58</b>
<b>C</b>	<b>Valor médio de <math>\Omega</math></b>	<b>61</b>
<b>D</b>	<b>Gás de Bose Ideal</b>	<b>65</b>
<b>E</b>	<b>Integrais relevantes</b>	<b>67</b>
<b>F</b>	<b>Pseudo-potencial</b>	<b>69</b>
<b>G</b>	<b>Resultados utilizados no cálculo da evolução temporal</b>	<b>74</b>
	G.1 Equação para $\dot{\Gamma}_k$ . . . . .	74
	G.2 Equação para $\dot{x}_k$ e $\dot{y}_k$ . . . . .	76
	G.3 Simplificação da equação (5.17) na linearização . . . . .	85
<b>H</b>	<b>Solução geral condensada de equilíbrio - equivalências estática e dinâmica (RPA)</b>	<b>87</b>
	H.1 Equivalência estática . . . . .	87
	H.2 Equivalência dinâmica . . . . .	91



# Capítulo 1

## Introdução

O gás de Bose não ideal, não relativístico, é certamente um dos problemas mais investigados na física de muitos corpos. Este estudo foi inicialmente motivado pelas propriedades peculiares do Hélio-4 a baixas temperaturas, tais como calor específico e excitações elementares (obtidas através de experimentos com espalhamento de neutrons).

As teorias microscópicas de bosons interagentes, contudo, foram inicialmente desenvolvidas para o limite de interações muito fracas [1] e posteriormente para interações arbitrariamente fortes num gás suficientemente diluído [2] - [5]. O Hélio-4, no entanto não se encaixa em nenhuma dessas descrições. Recentemente tem-se desenvolvido esforços experimentais através de técnicas de esfriamento e confinamento com lasers [6] e acredita-se que brevemente será possível obtermos outros condensados de Bose que se encontrem nos limites dos desenvolvimentos teóricos acima.

Um ponto fraco porém persiste. Todos resultados teóricos acima citados, obtidos das mais diversas maneiras, se baseiam em cálculos perturbativos. [7] - [9]

Cálculos não perturbativos vem sendo desenvolvidos em conexão com problemas relativísticos para bosons auto-interagentes, que se tornaram particularmente importantes em problemas como o do universo inflacionário [10]. Nesse contexto, o método variacional Gaussiano [11] recebeu considerável

atenção como uma extensão de cálculos de campo médio tradicionalmente aplicados em física de muitos corpos não relativística [12].

As técnicas à serem utilizadas, neste trabalho, correspondentes ao método variacional Gaussiano, vem sendo desenvolvidas há vários anos tanto no contexto do problema nuclear (fermiônico) de muitos corpos [13], como no contexto da teoria  $\Phi^4$  relativística, real, em 1+1 dimensões [14], [15].

O propósito deste trabalho é o de descrever uma aplicação dessas técnicas a esse problema de bosons não relativísticos interagentes, tão amplamente estudado, afim de termos uma confrontação direta com os resultados disponíveis. Uma das vantagens deste método é o da imediata extensão para temperaturas finitas, tornando possível o estudo das propriedades termodinâmicas do sistema. É possível recuperarmos vários resultados tradicionais com uma versão truncada da aproximação Gaussiana completa, incluindo o estado fundamental e um espectro de excitações tipo fonons.

No tratamento da versão completa da aproximação Gaussiana usando o chamado esquema de renormalização precário [16], obtemos uma teoria finita com as mesmas propriedades obtidas no truncamento. Em particular, o espectro de excitações é do tipo fonons. Este esquema porém nos leva a uma teoria termodinamicamente instável sem nenhuma região de estabilidade, ao contrário do que costuma ocorrer em teorias relativísticas [16] e uma fase não condensada que não difere essencialmente de uma teoria livre. Somos então forçados a desenvolver uma teoria efetiva dependente do cut-off no espírito de Amelino-Camelia e Pi [17]. Esta teoria pode ser interpretada como bosons interagentes onde o espalhamento em baixas energias é descrito através do comprimento de espalhamento. Apesar do resultado teórico dado pelo teorema de Hugenholtz-Pines [5], em todas ordens de perturbação, não obtemos um espectro de excitação tipo fonons.

Uma vez obtidos os resultados variacionais, através da teoria efetiva, obtemos as equações de evolução temporal para os parâmetros variacionais. Linearizando essas equações obtemos as frequências de pequenas oscilações em torno

do equilíbrio variacional. Essas frequências são exatamente as mesmas que determinam as probabilidades de ocupação a temperatura finita no equilíbrio.

## Capítulo 2

# Aproximação Gaussiana

Consideremos um sistema infinito, isotrópico e não relativístico de muitos bosons, descrito, na representação de momento com condições periódicas de contorno no volume  $V$ , pela Hamiltoniana

$$H = \sum_{\vec{k}} e(k) a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} a_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_1} \quad (2.1)$$

onde  $e(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  é a energia cinética, e  $\lambda \delta(\vec{r} - \vec{r}')$  a interação de contato repulsiva ( $\lambda > 0$ ). Os operadores de campo satisfazem as regras de comutação

$$\left[ a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger \right] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (2.2)$$

$$\left[ a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}^\dagger \right] = \left[ a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'} \right] = 0.$$

Descrevemos o estado quântico do sistema em termos de um operador densidade  $\mathcal{F}$ , onde em geral para  $T \neq 0$  temos que  $\mathcal{F}^2 \neq \mathcal{F}$ . A aproximação Gaussiana consiste em substituímos  $\mathcal{F}$  por  $\mathcal{F}_0$  dado pela maximização da entropia da informação, sujeitando-se aos vínculos impostos pela informação disponível, no caso os aspectos mais gerais de um corpo (Apêndice A). Existe uma total correspondência entre essa maneira de encontrarmos  $\mathcal{F}_0$  e a

utilizada na linguagem funcional de Schrödinger da teoria de campos, onde o funcional Gaussiano dos operadores de campo é escrito como uma Gaussiana nos campos [18].  $\mathcal{F}_0$  pode ser então escrito como uma exponencial de uma forma quadrática geral nos operadores de campo, podendo ser diagonalizada através de um conjunto de transformações canônicas. Para isso, definimos os operadores de bosons transformados

$$\begin{aligned}\eta_{\vec{k}} &= x_k^* b_{\vec{k}} + y_k^* b_{-\vec{k}}^\dagger \\ \eta_{\vec{k}}^\dagger &= x_k b_{\vec{k}}^\dagger + y_k b_{-\vec{k}}\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde

$$b_{\vec{k}} = a_{\vec{k}} - \Gamma_k.\tag{2.4}$$

Utilizamos a isotropia do sistema uniforme para definir os parâmetros  $x_k$ ,  $y_k$  e  $\Gamma_k$  dependentes somente do módulo de  $\vec{k}$ . Para que essa transformação seja canônica, ainda temos que impor sobre  $x_k$  e  $y_k$  a condição

$$|x_k|^2 - |y_k|^2 = 1.\tag{2.5}$$

O operador densidade truncado pode agora ser escrito como

$$\mathcal{F}_0 = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{1 + \nu_k} \left( \frac{\nu_k}{1 + \nu_k} \right)^{\eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{\vec{k}}}.\tag{2.6}$$

No Apêndice C encontram-se os cálculos dos traços utilizados na aproximação Gaussiana, nos quais verificamos por exemplo, que

$$\text{Tr} \left( \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{\vec{k}'} \mathcal{F}_0 \right) = \nu_k \delta(\vec{k} - \vec{k}')\tag{2.7}$$

e

$$Tr \left( a_{\vec{k}} \mathcal{F}_0 \right) = \Gamma_k \quad (2.8)$$

de tal forma que  $\nu_k$  são positivos e correspondem as ocupações médias dos quasi-bosons e  $\Gamma_k$  corresponde, por sua vez, a média de  $a_{\vec{k}}$ . Usando a uniformidade do sistema vem

$$\Gamma_k = \delta_{k,0} \Gamma_0. \quad (2.9)$$

Como trata-se de bosons vemos que podemos ter dois tipos de condensação: a de  $\nu_0$  e  $\Gamma_0$ . Pela expressão de  $\mathcal{F}_0$ , nota-se que nessa aproximação para o condensado  $\nu_0$  temos  $\mathcal{F}_0^2 \neq \mathcal{F}_0$ ; já para  $\Gamma_0$ , com  $\nu_0 = 0$ , temos um estado puro, ou seja  $\mathcal{F}_0^2 = \mathcal{F}_0$ . Se definirmos

$$\tilde{a}_{\vec{k}} \equiv x_k^* a_{\vec{k}} + y_k^* a_{-\vec{k}}^\dagger = \eta_{\vec{k}} + \tilde{\Gamma}_k$$

$$\tilde{\Gamma}_k \equiv x_k^* \Gamma_k + y_k^* \Gamma_k^*$$

temos então que

$$Tr \left( \tilde{a}_{\vec{k}}^n \mathcal{F}_0 \right) = \tilde{\Gamma}_k^n. \quad (2.10)$$

O que mostra que este estado puro é um estado coerente do operador transformado não transladado  $\tilde{a}_k$ .

A exigência de descrever corretamente as correlações de Pauli e apenas as propriedades de um corpo, em geral quebra a simetria global de gauge de  $H$  que corresponde a conservação do número de partículas. Para verificarmos este fato, basta calcularmos

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = Tr \left[ \mathcal{F}_0 \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} a_{\vec{k}'}^\dagger a_{\vec{k}'} \right] - \left\{ Tr \left[ \mathcal{F}_0 \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \right] \right\}^2 \quad (2.11)$$

que pode ser calculado com o auxílio dos traços (Apendice B). Obtemos então

$$\begin{aligned} \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 &= 2|\Gamma_0|^2 \left[ |x_0|^2 \nu_0 + |y_0|^2 (1 + \nu_0) \right] - 2\Gamma_0^{*2} x_0 y_0^* (1 + 2\nu_0) - \\ &\quad - 2\Gamma_0^2 y_0 x_0^* (1 + 2\nu_0) + |\Gamma_0|^2 + \sum_{\vec{k}} \left[ |x_k|^2 \nu_k + (1 + \nu_k) |y_k|^2 \right] + \\ &\quad (2.12) \\ &\quad + \sum_{\vec{k}} \left\{ \left[ |x_k|^2 \nu_k + (1 + \nu_k) |y_k|^2 \right]^2 + |x_k|^2 |y_k|^2 (1 + 2\nu_k)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Vemos que se  $\nu_k \neq 0$  com  $\Gamma_0 = 0$  e  $y_k = 0$  a flutuação no número de partículas ocorre no espírito do potencial grande canônico ou seja, uma mistura estatística de estados com números de partículas diferentes. Já no caso  $\nu_k \neq 0$  com  $\Gamma_0 \neq 0$  e  $y_k \neq 0$  os estados que fazem parte da mistura estatística não tem número de partículas bem definido, em particular também no estado puro ( $\nu_k = 0$ ) coerente.

Notamos que, valores médios de operadores de dois corpos calculados com  $\mathcal{F}_0$  não contém partes irreduzíveis, logo a substituição de  $\mathcal{F}$  por  $\mathcal{F}_0$  implica na aproximação de campo médio.

Para trabalharmos com temperaturas finitas nessa aproximação, calculamos o extremo variacional do grande-potencial  $\Omega$ , escrito em termos do operador densidade truncado  $\mathcal{F}_0$ , onde

$$\Omega = Tr [\mathcal{F}_0 (H - \mu N + KT \ln \mathcal{F}_0)] \quad (2.13)$$

com

$$N = \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}, \quad (2.14)$$

onde  $K$  é a constante de Boltzmann e os multiplicadores de Lagrange  $\mu$  e  $T$  são respectivamente o potencial químico e a temperatura. A substituição de  $\mathcal{F}$  por  $\mathcal{F}_0$  implica também, na substituição da entropia completa pela entropia de campo médio  $S_0 = -KT r(\mathcal{F}_0 \ln \mathcal{F}_0)$ . Na determinação do grande potencial, tomaremos variações em relação aos parâmetros que determinam a densidade truncada  $\mathcal{F}_0$ . O valor de  $\mu$  é fixado escolhendo a densidade média de partículas do sistema. Uma justificativa detalhada desse procedimento geral é dada por Balian e Vénéroni [19], que mostram que esse procedimento corresponde a melhor determinação (do ponto de vista variacional) da grande função de partição (conseqüentemente do grande potencial) para o problema quando nos restringimos a operadores densidade cuja forma é dada por (2.6). O que não significa que seja a melhor determinação para outras observáveis, por exemplo, a flutuação no número de partículas. Ao calcularmos a flutuação  $\frac{\sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}}{N}$  observamos que esta não vai a zero no limite termodinâmico a não ser no caso onde todos  $\nu'_k$ s são zero e conseqüentemente  $\Gamma_0 \neq 0$ . Esta flutuação é na realidade determinada pelo anzatz Gaussiano no espaço de Fock, que garante o tratamento correto da estatística de Bose, além dos observáveis de um corpo. Contudo o cálculo para um gás ideal, que se baseia em  $\Omega$ , fornece o resultado usual tanto para o condensado  $\nu_0$  como para  $\Gamma_0$ . (Apêndice D).

Uma simplificação importante ocorre quando nos restringimos ao problema estacionário. Nesse caso e  $x_k$ ,  $y_k$  e  $\Gamma_0$  podem ser tomados como reais, (a verificação explícita deste fato pode ser vista com mais detalhe no capítulo 5), podemos usar uma representação paramétrica simples que satisfaz automaticamente a condição de canonicidade

$$x_k = \cosh \sigma_k \quad y_k = \sinh \sigma_k. \quad (2.15)$$



Calculamos inicialmente  $\Omega$  (Apêndice B)

$$\begin{aligned}
\Omega &= \sum_{\vec{k}} \left( e(k) - \mu + \frac{2\lambda\Gamma_0^2}{V} \right) \left[ \frac{(1 + 2\nu_k) \cosh 2\sigma_k - 1}{2} \right] - \mu\Gamma_0^2 + \frac{\lambda\Gamma_0^4}{2V} \\
&\quad - \frac{\lambda\Gamma_0^2}{2V} \sum_{\vec{k}} (1 + 2\nu_k) \sinh 2\sigma_k + \frac{\lambda}{V} \left\{ \sum_{\vec{k}} \left[ \frac{(1 + 2\nu_k) \cosh 2\sigma_k - 1}{2} \right] \right\}^2 \\
&\quad + \frac{\lambda}{8V} \left\{ \sum_{\vec{k}} (1 + 2\nu_k) \sinh 2\sigma_k \right\}^2 \\
&\quad - KT \sum_{\vec{k}} [(1 + \nu_k) \ln(1 + \nu_k) - \nu_k \ln \nu_k]. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Fixando o número médio de partículas  $Tr[\mathcal{F}_0 N] = \langle N \rangle$  obtemos

$$\langle N \rangle = \Gamma_0^2 + \sum_{\vec{k}} \left[ \frac{(1 + 2\nu_k) \cosh 2\sigma_k - 1}{2} \right]. \tag{2.17}$$

## 2.1 Soluções formais de equilíbrio

Para o estudo das propriedades termodinâmicas de equilíbrio do sistema nessa aproximação, requeremos que  $\Omega$ , (2.16), seja estacionário em relação a variações arbitrárias dos parâmetros de  $\mathcal{F}_0$  ou seja:  $\Gamma_0$ ,  $\sigma_k$  e  $\nu_k$ . A variação em relação a  $\Gamma_0$  fornece

$$\Gamma_0 \left\{ \frac{2\lambda}{V} \Gamma_0^2 - 2\mu - \frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}} (1 + 2\nu_k) \sinh 2\sigma_k + \frac{4\lambda}{V} \sum_{\vec{k}} \left[ \frac{(1 + 2\nu_k) \cosh 2\sigma_k - 1}{2} \right] \right\} = 0. \tag{2.18}$$

Vemos que além da solução trivial  $\Gamma_0 = 0$ , existe uma outra, tal que o termo entre colchetes se anula, fornecendo um  $\Gamma_0$  diferente de zero. Para estudarmos

esta solução é conveniente usarmos a equação que fixa o número médio de partículas (2.17) eliminando assim  $\Gamma_0$  de  $\Omega$ , que se torna

$$\Omega = F - \mu \langle N \rangle. \quad (2.19)$$

Isso identifica a energia livre (truncada)  $F$  como

$$\begin{aligned} F = & \sum_{\vec{k}} (e(k) + \lambda\rho) \left[ \frac{(1 + 2\nu_k) \cosh 2\sigma_k - 1}{2} \right] - \frac{\lambda\rho}{2} \sum_{\vec{k}} (1 + 2\nu_k) \sinh 2\sigma_k \\ & - \frac{\lambda}{2V} \left\{ \sum_{\vec{k}} \left[ \frac{(1 + 2\nu_k) \cosh 2\sigma_k - 1}{2} \right] \right\}^2 + \frac{\lambda}{8V} \left\{ \sum_{\vec{k}} (1 + 2\nu_k) \sinh 2\sigma_k \right\}^2 \\ & + \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} (1 + 2\nu_{k'}) \sinh 2\sigma_{k'} \left[ \frac{(1 + 2\nu_k) \cosh 2\sigma_k - 1}{2} \right] + \frac{\lambda\rho^2 V}{2} \\ & - KT \sum_{\vec{k}} [(1 + \nu_k) \ln(1 + \nu_k) - \nu_k \ln \nu_k]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Procedendo ao cálculo variacional em relação à  $\sigma_k$  e  $\nu_k$  obtemos

$$\tanh 2\sigma_k = \quad (2.21)$$

$$\frac{\lambda\rho - \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} [(1 + 2\nu_k) \cosh 2\sigma_k - 1] - \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} (1 + 2\nu_k) \sinh 2\sigma_k}{e(k) + \lambda\rho - \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} [(1 + 2\nu_k) \cosh 2\sigma_k - 1] + \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} (1 + 2\nu_k) \sinh 2\sigma_k}$$

e

$$\nu_k = \frac{1}{\left\{ \exp(\sqrt{\Delta}/KT) - 1 \right\}} \quad (2.22)$$

onde

$$\begin{aligned}
\Delta &= e(k)^2 + 2\lambda e(k) \times \\
&\times \left\{ \rho - \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} [(1 + 2\nu_k) \cosh 2\sigma_k - 1] + \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} (1 + 2\nu_k) \sinh 2\sigma_k \right\} \\
&+ 4\lambda^2 \left\{ \rho - \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} [(1 + 2\nu_k) \cosh 2\sigma_k - 1] \right\} \times \\
&\times \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} (1 + 2\nu_k) \sinh 2\sigma_k. \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Para a solução  $\Gamma_0 = 0$ , devemos utilizar  $\Omega$ . A variação em relação à  $\sigma_k$  fornece

$$\tanh 2\sigma_k = \frac{-\frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}} (1 + 2\nu_k) \sinh 2\sigma_k}{e(k) - \mu + \frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}} [(1 + 2\nu_k) \cosh 2\sigma_k - 1]}, \tag{2.24}$$

onde  $\mu$  não é mais dado por (2.18) mas sim pela relação de vínculo

$$\langle N \rangle = \sum_{\vec{k}} \left[ \frac{(1 + 2\nu_k) \cosh 2\sigma_k - 1}{2} \right]. \tag{2.25}$$

Finalmente, é importante frizar que os resultados obtidos até agora são totalmente formais, pois envolvem somas divergentes. Para podermos estudar propriedades termodinâmicas das diferentes fases, devemos implementar processos de regularização e renormalização, que serão discutidos nos próximos capítulos.

## Capítulo 3

# Aproximação de Quasi-Bosons livres

Se analisarmos a expressão de  $F$  em (2.20) vemos que as somas duplas que lá aparecem provém do cálculo do traço de termos com 4  $\eta$ 's ( Apendice C ). Esses termos representam a interação entre os quasi-bosons. Uma maneira natural de truncarmos a aproximação Gaussiana, é a de considerarmos quasi-bosons livres, eliminando as somas duplas mencionadas. O resultado é inteiramente trivial no caso  $\Gamma_0 = 0$ , uma vez que isso implica em  $\sigma_k = 0$ . Ao efetuarmos a variação em relação a  $\sigma_k$ , obtemos  $\sinh 2\sigma_k = 0$ . Todos efeitos da interação são descartados, fornecendo os resultados de um gás ideal

$$\nu_k = \frac{1}{\left\{ \exp\left[\frac{e(k)-\mu}{KT}\right] - 1 \right\}} \quad (3.1)$$

onde  $\mu$  é determinado pela conservação do número de partículas e

$$\rho = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\left\{ \exp\left[\frac{e(k)-\mu}{KT}\right] - 1 \right\}}. \quad (3.2)$$

Usualmente a temperatura onde  $\mu = 0$  é a chamada temperatura crítica, e a partir desta inicia-se uma ocupação macroscópica de  $\nu_0$ .

Já para a solução tipo  $\Gamma_0 \neq 0$ , descartando as somas duplas em (2.20), as condições variacionais em  $\sigma_k$  e  $\nu_k$  se reduzem a

$$\tanh 2\sigma_k = \frac{\lambda\rho}{e(k) + \lambda\rho} \quad (3.3)$$

e

$$\nu_k = \frac{1}{e^{\frac{1}{KT}\sqrt{e(k)^2 + 2\lambda\rho e(k)}} - 1}. \quad (3.4)$$

Para usarmos esses resultados no cálculo de  $F$ , substituímos as somas por integrais e introduzimos um cut-off  $\Lambda$  no momento. Após um pouco de álgebra obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{F}{V} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 [e(k) + \lambda\rho] \left\{ \frac{e(k) + \lambda\rho}{\sqrt{e(k)^2 + 2e(k)\lambda\rho}} - 1 \right\} dk + \frac{\lambda\rho^2 V}{2} \\ &\quad - \frac{\lambda\rho}{4\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{k^2}{\sqrt{e(k)^2 + 2e(k)\lambda\rho}} dk \\ &\quad - \frac{KT}{2\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 \ln \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{\sqrt{e(k)^2 + 2e(k)\lambda\rho}}{KT} \right] \right\} dk. \end{aligned}$$

Calculando as integrais (Apêndice E) descartando termos que vão a zero quando  $\Lambda \rightarrow \infty$ , vem:

$$\begin{aligned} \frac{F}{V} &= \frac{\lambda\rho^2}{2} - \frac{\lambda^2 m \Lambda \rho^2}{4\pi^2 \hbar^2} + \frac{8m^{3/2} \lambda^{5/2} \rho^{5/2}}{15\pi^2 \hbar^3} \\ &\quad + \frac{KT}{2\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 \ln \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{\sqrt{e(k)^2 + 2e(k)\lambda\rho}}{KT} \right] \right\} dk, \quad (3.5) \end{aligned}$$

o que mostra termos um termo proporcional a  $\lambda^2$  que diverge linearmente. A idéia central para resolvermos este problema consiste em associarmos  $\lambda$  a um comprimento de espalhamento  $a$ , ou seja

$$\lambda = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (3.6)$$

Uma vez regularizada a interação de contato equivale, para baixas energias e sistemas diluídos ( $a^3\rho \ll 1$ ), à uma interação entre bósons com o mesmo comprimento de espalhamento  $a$ . Esta regularização pode ser feita com o auxílio de um pseudo-potencial (Lee,Huang e Yang)[2] onde a interação de contato é substituída por

$$V_p(\vec{r} - \vec{r}') = \lambda\delta(\vec{r} - \vec{r}')\frac{\partial}{\partial(|\vec{r} - \vec{r}'|)}(|\vec{r} - \vec{r}'|), \quad (3.7)$$

com  $\lambda$  dado em (3.6). O termo extra que vem da derivada é o responsável pelo cancelamento da divergência (Apêndice F), sempre dentro dos limites acima mencionados. Uma vez regularizada  $F$  obtemos para o potencial químico

$$\begin{aligned} \mu = & \lambda\rho + \frac{4\rho^{3/2}m^{3/2}\lambda^{5/2}}{3\pi^2\hbar^3} \\ & + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\lambda e(k)k^2 dk}{\left[ \exp\left(\frac{\sqrt{e(k)^2 + 2e(k)\lambda\rho}}{KT}\right) - 1 \right] \sqrt{e(k)^2 + 2e(k)\lambda\rho}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Através das ocupações, vemos que a energia dos quasi-bosons livres pode ser escrita como

$$E(k) = \sqrt{e(k)^2 + 2\lambda\rho e(k)}, \quad (3.9)$$

onde  $E(k) \rightarrow vk$  quando  $k \rightarrow 0$ , sendo  $v$  a velocidade do som [5].

Existe porém um problema. Nesta aproximação, apesar de regularizada, observamos uma instabilidade termodinâmica da fase ( $\Gamma_0 \neq 0$ ). Isto pode ser demonstrado inspecionando-se o valor do potencial químico, pois de (3.8)

temos que  $\mu$  é sempre positivo para  $\Gamma_0 \neq 0$  e de (3.1), negativo ou zero para  $\Gamma_0 = 0$ . Este resultado concorda com estudos rigorosos [20] feitos numa Hamiltoniana truncada de Bogoliubov [1] onde a mesma instabilidade é demonstrada.

Uma alternativa para solucionarmos essa instabilidade baseia-se no fato de que a aproximação de quasi-bosons livres leva em conta uma parte da interação para  $\Gamma_0 \neq 0$ . Esta é drástica demais no caso  $\Gamma_0 = 0$ , pois trata essa fase como um gás livre. O que podemos fazer então é considerar toda interação para essa fase, mantendo  $\sigma_k = 0$ . Na fase condensada não ocorre praticamente nenhuma mudança, por se tratar de um sistema diluído. Para essa fase, (2.17) e (3.3) fornecem

$$\rho = \rho_0 + \frac{m^{3/2} \lambda^{3/2} \rho^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \equiv \rho_0 + \frac{8}{3} \frac{(a^3 \rho)^{1/2}}{\pi^{1/2}}, \quad (3.10)$$

temos então o valor da depleção para  $T = 0$ . A energia do estado fundamental pode ser escrita usando a (3.5) em  $T = 0$ ,

$$\frac{E_0}{V} = \frac{\lambda \rho^2}{2} \left( 1 + \frac{128}{15} \frac{(a^3 \rho)^{1/2}}{\pi^{1/2}} \right). \quad (3.11)$$

No limite de um sistema diluído temos  $(a^3 \rho_0)^{1/2} \simeq (a^3 \rho)^{1/2} \ll 1$  de tal forma que podemos substituir  $\rho$  por  $\rho_0$  em (3.9). Com essa substituição o espectro de excitação da Hamiltoniana truncada está ligado a densidade do condensado, o que evidência um caráter coletivo dos fonons

$$w(k) = \sqrt{e(k)^2 + 2\lambda \rho_0 e(k)}. \quad (3.12)$$

Para a fase com  $\Gamma_0 = 0$ , as ocupações  $\nu_k$  são obtidas sem o truncamento de (2.20) obtendo para  $\mu$ ,

$$\rho = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\exp \left[ \frac{e(k) - \mu + 2\lambda \rho}{KT} \right] - 1}. \quad (3.13)$$

Como o truncamento foi evitado, esta fase não é mais tratada com um gás de Bose livre, e é possível mostrar que para  $T = 0$  a fase com condensado coerente é a estável, uma vez que o potencial químico  $\mu \simeq \lambda\rho$  é menor que o da fase não condensada, na qual  $\mu = 2\lambda\rho$ . É aparente que, nesse cálculo, as duas fases não são tratadas em pé de igualdade do ponto de vista do truncamento. Contudo o truncamento da interação entre quasi-bosons tem um significado diferente nos dois casos. O fato é que esperamos que a maior parte dos efeitos relevantes da interação de dois corpos é incorporada no processo da quebra de simetria (via  $\Gamma_0 \neq 0$  e o emparelhamento), o que não ocorre para a fase  $\Gamma_0 = 0$ . Uma Hamiltoniana truncada, de maneira conveniente, de quasi-bosons livres com energias dadas por (3.12), é a base dos trabalhos de Huang e colaboradores, no estudo das transições de fase para um gás de esferas duras, bem como para a parte repulsiva de um sistema com atração [21] -[25].



# Capítulo 4

## Lidando com a Aproximação Gaussiana

Neste capítulo examinaremos duas diferentes prescrições para tratarmos as divergências da aproximação Gaussiana completa desenvolvida no capítulo 2. A primeira prescrição envolve um esquema de renormalização proposto por Stevenson [16] no contexto da teoria relativística  $\phi^4$  com o nome de “teoria precária”, na qual a constante de acoplamento vai a zero por valores negativos. Isto representa uma tentativa de ficar o mais próximo possível da dinâmica das interações de contato. Apesar de bem sucedida na remoção da divergência de forma consistente, este esquema nos leva a uma fase condensada termodinamicamente instável e a uma fase não condensada livre. Consideramos então uma “teoria efetiva” como alternativa simples, na qual um cut-off fixo é introduzido no espaço de momento no espírito do trabalho de Amelino-Camelia e Pi [17].

### 4.1 Forças de contato: teoria precária

Para evitar complicações desnecessárias, nos restringiremos às propriedades do sistema à  $T = 0$  na fase  $\Gamma_0 \neq 0$ , uma vez que a extensão a  $T \neq 0$  não envolve nenhuma divergência adicional. A (2.18), combinada com a conservação do número médio de partículas, (2.17), nos dá

$$\mu = \lambda\rho + \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} (\cosh 2\sigma_k - 1) - \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} \sinh 2\sigma_k. \quad (4.1)$$

A equação (2.21) para  $T = 0$  fica

$$\tanh 2\sigma_k = \frac{\lambda\rho - \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} [\cosh 2\sigma_k - 1] - \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} \sinh 2\sigma_k}{e(k) + \lambda\rho - \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} [\cosh 2\sigma_k - 1] + \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} \sinh 2\sigma_k}. \quad (4.2)$$

Essa é uma equação implícita para os parâmetros da transformação  $\sigma_k$  que aparecem nas somas de (4.1) e (4.2). A fim de prosseguirmos no cálculo, introduzimos um cut-off  $\Lambda$  no momento e desprezando termos que vão a zero no limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , usamos os ansätze

$$\frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}} \sinh 2\sigma_k = \alpha + \beta\Lambda \quad (4.3)$$

e

$$\frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}} (\cosh 2\sigma_k - 1) = \gamma, \quad (4.4)$$

onde assumimos que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  assumem valores finitos no limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Introduzimos a constante de acoplamento  $\lambda_r$  como

$$\lambda = \frac{\lambda_r}{1 - \frac{\lambda_r m \Lambda}{2\pi^2 \hbar^2}} \quad (4.5)$$

de modo que quando  $\Lambda \rightarrow \infty$ , a constante de acoplamento  $\lambda$  vai à zero por valores negativos  $\lambda \rightarrow 0^-$  [16], definimos

$$\tanh 2\sigma_k = \frac{\frac{\lambda_r \rho - \lambda_r \gamma - \lambda_r \alpha - \lambda_r \beta \Lambda}{1 - \frac{\lambda_r m \Lambda}{2\pi^2 \hbar^2}}}{e(k) + \frac{\lambda_r \rho - \lambda_r \gamma + \lambda_r \alpha + \lambda_r \beta \Lambda}{1 - \frac{\lambda_r m \Lambda}{2\pi^2 \hbar^2}}} \equiv -\frac{M + \frac{Q}{\Lambda} + \mathcal{O}(\Lambda^{-2})}{e(k) + M + \frac{R}{\Lambda} + \mathcal{O}(\Lambda^{-2})} \quad (4.6)$$

com

$$M = -\frac{2\pi^2\hbar^2\beta}{m}, \quad (4.7)$$

$$Q = +\frac{2\pi^2\hbar^2}{m} \left( \rho - \gamma - \alpha - \frac{2\pi^2\hbar^2\beta}{\lambda_\tau m} \right), \quad (4.8)$$

$$R = -\frac{2\pi^2\hbar^2}{m} \left( \rho - \gamma + \alpha + \frac{2\pi^2\hbar^2\beta}{\lambda_\tau m} \right). \quad (4.9)$$

Essa expressão faz sentido para todo  $\vec{k}$  e para todo  $\lambda$ , se  $M$  for positivo. Podemos também expandir expressões para  $\sinh 2\sigma_k$  e  $\cosh 2\sigma_k$  até a ordem  $\frac{1}{\Lambda}$ , resultando

$$\begin{aligned} \cosh 2\sigma_k &= \frac{e(k)^2 + M}{\sqrt{e(k)^2 + 2Me(k)}} + \frac{M^2(Q - R) + MQe(k)}{[e(k)^2 + 2Me(k)]^{3/2}} \frac{1}{\Lambda} \\ \sinh 2\sigma_k &= -\frac{M + \frac{Q}{\Lambda}}{\sqrt{e(k)^2 + 2Me(k)}} + \frac{M^2(R - Q) + MRe(k)}{[e(k)^2 + 2Me(k)]^{3/2}} \frac{1}{\Lambda}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Calculando as somas (4.3) e (4.4), ( Apêndice E ), e usando somente as partes do  $\sinh 2\sigma_k$  e  $\cosh 2\sigma_k$  que contribuem para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , obtemos

$$\begin{aligned} \alpha + \beta\Lambda &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 \frac{M + \frac{Q}{\Lambda}}{\sqrt{e(k)^2 + 2Me(k)}} dk \\ &= \frac{m^{3/2}M^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} - \frac{mQ}{2\pi^2\hbar^2} - \frac{mM\Lambda}{2\pi^2\hbar^2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

e

$$\gamma = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 \left\{ \frac{e(k) + M}{\sqrt{e(k)^2 + 2Me(k)}} - 1 \right\} dk = \frac{m^{3/2} M^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}. \quad (4.12)$$

Note que  $\beta = -\frac{mM}{2\pi^2 \hbar^2}$  o que é consistente com (4.7). Para calcularmos  $F$  (que para  $T = 0$  se reduz à energia do estado fundamental  $E_0$ ) também precisamos da soma  $\frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}} e(k)(\cosh 2\sigma_k - 1)$ . Procedendo da mesma maneira ( Apêndice E ), temos

$$\begin{aligned} & \int_0^\Lambda k^2 \left\{ \frac{e(k) + M}{\sqrt{e(k)^2 + 2Me(k)}} + \frac{M^2(Q - R) + MQe(k)}{[e(k)^2 + 2Me(k)]^{3/2}} \frac{1}{\Lambda} - 1 \right\} dk = \\ & = \frac{mM^2\Lambda}{4\pi^2 \hbar^2} + \frac{mMQ}{2\pi^2 \hbar^2} - \frac{4m^{3/2} M^{5/2}}{5\pi^2 \hbar^3}. \end{aligned}$$

Colocando esses resultados em (2.20), (com  $\nu_k = 0$  e  $T = 0$ ) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{V} &= \frac{mM^2\Lambda}{4\pi^2 \hbar^2} + \frac{mMQ}{2\pi^2 \hbar^2} - \frac{4m^{3/2} M^{5/2}}{5\pi^2 \hbar^3} + \frac{\lambda_r}{1 - \frac{\lambda_r m \Lambda}{2\pi^2 \hbar^2}} \rho \frac{m^{3/2} M^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} - \\ & - \frac{\lambda_r}{1 - \frac{\lambda_r m \Lambda}{2\pi^2 \hbar^2}} \rho \left[ \frac{m^{3/2} M^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} - \frac{mQ}{2\pi^2 \hbar^2} - \frac{mM\Lambda}{2\pi^2 \hbar^2} \right] + \frac{\lambda_r}{1 - \frac{\lambda_r m \Lambda}{2\pi^2 \hbar^2}} \frac{\rho^2}{2} + \\ & + \frac{\lambda_r}{1 - \frac{\lambda_r m \Lambda}{2\pi^2 \hbar^2}} \frac{1}{2} \left[ \frac{m^{3/2} M^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} - \frac{mQ}{2\pi^2 \hbar^2} - \frac{mM\Lambda}{2\pi^2 \hbar^2} \right]^2 - \frac{\lambda_r}{1 - \frac{\lambda_r m \Lambda}{2\pi^2 \hbar^2}} \frac{1}{2} \frac{m^3 M^3}{9\pi^4 \hbar^6} + \\ & + \frac{\lambda_r}{1 - \frac{\lambda_r m \Lambda}{2\pi^2 \hbar^2}} \left[ \frac{m^{3/2} M^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} - \frac{mQ}{2\pi^2 \hbar^2} - \frac{mM\Lambda}{2\pi^2 \hbar^2} \right] \frac{m^{3/2} M^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}. \end{aligned}$$

Através da expansão

$$\frac{\lambda_r}{1 - \frac{\lambda_r m \Lambda}{2\pi^2 \hbar^2}} = -\frac{2\pi^2 \hbar^2}{m\Lambda} - \frac{4\pi^4 \hbar^4}{\lambda_r m^2 \Lambda^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \quad (4.13)$$

eliminamos os termos que vão a zero quando  $\Lambda \rightarrow \infty$ , resultando

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{V} = & \frac{mM^2\Lambda}{4\pi^2\hbar^2} + \frac{mMQ}{2\pi^2\hbar^2} - \frac{4m^{3/2}M^{5/2}}{5\pi^2\hbar^3} - \rho M + \frac{m^{3/2}M^{5/2}}{\pi^2\hbar^3} - \\ & - \frac{mMQ}{2\pi^2\hbar^2} - \frac{M^2}{2\lambda_r} + \frac{m^{3/2}M^{5/2}}{3\pi^2\hbar^3} - \frac{m^2M^2\Lambda}{4\pi^2\hbar^2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Os termos lineares em  $\Lambda$  se cancelam e temos

$$\frac{F(T=0)}{V} = \frac{E_0}{V} = \frac{8m^{3/2}M^{5/2}}{15\pi^2\hbar^3} - M\rho - \frac{M^2}{2\lambda_r} \quad (4.15)$$

que identifica o potencial químico como  $\mu = -M$ . Vemos que  $M > 0$  implica em  $\mu < 0$ . Finalmente, a fim de relacionar  $\mu$  (ou  $M$ ) com a densidade do sistema, calculamos o grande potencial

$$\Omega(T=0) = \frac{8m^{3/2}(-\mu)^{5/2}V}{15\pi^2\hbar^3} - \frac{\mu^2V}{2\lambda_r}, \quad (4.16)$$

usando a relação  $N = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_{T,V}$  para obter

$$\rho = \frac{\mu}{\lambda_r} + \frac{4m^{3/2}(-\mu)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3}. \quad (4.17)$$

Como  $\mu < 0$  de (4.6) quando  $\Lambda \rightarrow \infty$ , obtemos o espectro de excitação tipo fonons como no capítulo anterior,

$$E(k) = \sqrt{e(k)^2 - 2\mu e(k)}. \quad (4.18)$$

Calculando a derivada de  $F$  ou, de forma equivalente, fazendo  $-\Omega/V$  obtemos a pressão em  $T = 0$ ,

$$P = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N} = - \frac{\Omega}{V} = - \frac{8m^{3/2}(-\mu)^{5/2}}{15\pi^2\hbar^3} + \frac{\mu^2}{2\lambda_r}. \quad (4.19)$$

Podemos mostrar que apesar de finita, esta fase é termodinamicamente instável para todo  $\rho$ . Para isso calculamos  $\frac{dP}{d\rho}$

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{dP}{d\mu} \frac{d\mu}{d\rho} \quad (4.20)$$

e como

$$\frac{dP}{d\mu} = \frac{\mu}{\lambda_r} + \frac{4m^{3/2}(-\mu)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} = \rho \quad (4.21)$$

logo  $\frac{dP}{d\mu} > 0$  para todo  $\rho$ . Da mesma forma

$$\frac{d\mu}{d\rho} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_r} - \frac{2m^{3/2}(-\mu)^{1/2}}{\pi^2\hbar^3}}. \quad (4.22)$$

Novamente, se usarmos a condição que  $\rho \geq 0$  temos

$$\frac{\mu}{\lambda_r} > -\frac{4}{3} \frac{m^{3/2}(-\mu)^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} > -2 \frac{m^{3/2}(-\mu)^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}. \quad (4.23)$$

Concluimos que como  $\mu < 0$

$$\frac{1}{\lambda_r} < 2 \frac{m^{3/2}(-\mu)^{1/2}}{\pi^2\hbar^3}, \quad (4.24)$$

segue que  $\frac{d\mu}{d\rho} < 0$ , donde mostramos que  $\frac{dP}{d\rho} < 0$  para todo  $\rho$ .

Um problema já discutido da impossibilidade de utilizarmos uma renormalização tipo  $\lambda \rightarrow 0^+$  pode ser facilmente visto. Nesse caso, a  $\tanh 2\sigma_k$  terá a mesma forma que em (4.6), com as seguintes mudanças em M,Q e R:

$$M = \frac{2\pi^2 \hbar^2 \beta}{m}, \quad (4.25)$$

$$Q = -\frac{2\pi^2 \hbar^2}{m} \left( \rho - \gamma - \alpha + \frac{2\pi^2 \hbar^2 \beta}{\lambda_r m} \right), \quad (4.26)$$

$$R = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{m} \left( \rho - \gamma + \alpha - \frac{2\pi^2 \hbar^2 \beta}{\lambda_r m} \right). \quad (4.27)$$

Se agora calcularmos  $\alpha$  e  $\beta$ , obtemos os mesmos resultados em função de  $M, Q$  e  $R$ . Como em (4.11),  $\beta = -\frac{mM}{2\pi^2 \hbar^2}$ , o que não é consistente com (4.25) acima. Sendo assim, essa renormalização não pode ser utilizada. Uma outra possibilidade a ser estudada corresponde a fase onde  $\Gamma_0 = 0$ . Em virtude da ocupação macroscópica de  $\nu_0$  devemos reescrever as somas

$$\frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}} (\cosh 2\sigma_k - 1) \rightarrow c + \frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}} (\cosh 2\sigma_k - 1) \quad (4.28)$$

e

$$\frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}} \sinh 2\sigma_k \rightarrow d + \frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}} \sinh 2\sigma_k. \quad (4.29)$$

A tangente dada em (2.24) fica então

$$\tan 2\sigma_k = \frac{-\lambda d - \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} \sinh 2\sigma_k}{e(k) - \mu + 2\lambda\rho} \quad (4.30)$$

usando o ansatze (4.3) e (4.4) para a divergência obtemos

$$\tanh 2\sigma_k = \frac{\frac{-\lambda_r d - \lambda_r \alpha - \lambda_r \beta \Lambda}{1 - \frac{\lambda_r m \Lambda}{2\pi^2 \hbar^2}}}{e(k) - \mu + \frac{2\lambda_r \rho}{1 - \frac{\lambda_r m \Lambda}{2\pi^2 \hbar^2}}} \equiv -\frac{M + \frac{Q}{\Lambda} + \mathcal{O}(\Lambda^{-2})}{e(k) - \mu + \frac{R}{\Lambda} + \mathcal{O}(\Lambda^{-2})} \quad (4.31)$$

com

$$M = -\frac{2\pi^2\hbar^2\beta}{m}, \quad (4.32)$$

$$Q = -\frac{2\pi^2\hbar^2}{m} \left\{ d + \alpha + \frac{2\pi^2\hbar^2\beta}{\lambda_r m} \right\}, \quad (4.33)$$

$$R = -\frac{4\pi^2\hbar^2}{m} \rho. \quad (4.34)$$

Se agora calcularmos  $\gamma$  obtemos

$$\gamma = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 \left[ \frac{e(k) - \mu}{\sqrt{[e(k) - \mu]^2 - M^2}} - 1 \right] dk \quad (4.35)$$

onde a única solução aceitável é  $M = 0$  e conseqüentemente  $\sigma_k = 0$ , o que tem como solução  $c = d = \nu_0/V$ . Temos então um gás ideal de Bose, ou seja uma teoria livre.

Na próxima seção contornaremos essa dificuldade tratando esse problema como uma teoria efetiva dependente do cut-off, o que nos permite manter a constante de acoplamento  $\lambda$  positiva.

## 4.2 Teoria efetiva

A prescrição da renormalização da seção anterior, nos diz que se fixamos  $\lambda_r$  positivo quando  $\Lambda \rightarrow \infty$ , temos que ter  $\lambda \rightarrow 0^-$ , o que resulta numa teoria termodinamicamente instável, que queremos evitar. Como um valor positivo de  $\lambda$  nos leva a uma teoria trivial com  $\lambda_r = 0$ , quando tomamos o limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , uma outra opção é a de considerar que os resultados são obtidos através de uma teoria efetiva não trivial, na qual  $\Lambda$  é mantido fixo num valor finito, permitindo que ambos  $\lambda_r > 0$  e  $\lambda > 0$ . Isto requer que tenhamos



$$\frac{\lambda_r m \Lambda}{2\pi^2 \hbar^2} < 1 \quad (4.36)$$

e implica numa resolução finita no espaço de configurações  $\mathcal{O}(\Lambda^{-1})$ . A restrição no espaço dos momentos, restringe a validade dos resultados à temperaturas da ordem de

$$T \leq \frac{\hbar^2 \Lambda^2}{2Km}. \quad (4.37)$$

Como nos cálculos da seção precedente todos os termos que vão à zero no limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  foram desprezados, usaremos aqui as expressões gerais dadas no capítulo 2. (4.5) será usada com um valor fixo de  $\Lambda$  que relaciona as constantes de acoplamento  $\lambda$  e  $\lambda_r$  respectivamente.

Considere primeiramente para a fase condensada,  $\Gamma_0 \neq 0$ . A somas que aparecem em (2.18), (2.20) e (2.21) são agora finitas. Conseqüentemente definimos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2V} \sum'_{\vec{k}} (1 + 2\nu_k) \sinh 2\sigma_k \\ B &= \frac{1}{2V} \sum'_{\vec{k}} [(1 + 2\nu_k) \cosh 2\sigma_k - 1] \\ C &= \frac{1}{2V} \sum'_{\vec{k}} e(k) [(1 + 2\nu_k) \cosh 2\sigma_k - 1], \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde as somas com linha são restritas a  $|\vec{k}| \leq \Lambda$ . (2.18) e (2.21) ficam

$$\mu = \lambda\rho - \lambda A + \lambda B \quad (4.39)$$

$$\tanh 2\sigma_{\vec{k}} = \frac{\lambda[\rho - B - A]}{e(k) + \lambda[\rho - B + A]} \quad (4.40)$$

o que fornece a equação de dispersão

$$E(k) = \sqrt{e(k)^2 + 2\lambda e(k)[\rho - B + A] + 4\lambda^2[\rho - B]A}. \quad (4.41)$$

As ocupações podem então ser escritas como

$$\nu_k = \frac{1}{e^{\frac{E(k)}{KT}} - 1}. \quad (4.42)$$

A energia livre  $F$  e a pressão  $P$  ficam

$$\begin{aligned} F = & CV - \lambda\rho(A - B)V + \frac{\lambda}{2}(\rho^2 + A^2 - B^2)V + \lambda ABV \\ & -KT \sum'_{\vec{k}} [(1 + \nu_k) \ln(1 + \nu_k) - \nu_k \ln \nu_k] \end{aligned} \quad (4.43)$$

e

$$\begin{aligned} P = & \frac{\lambda B^2}{2} + \frac{\lambda \rho^2}{2} - C - \lambda AB - \frac{\lambda A^2}{2} + \frac{1}{V} \sum'_{\vec{k}} \nu_k \sqrt{\Delta} \\ & - \frac{KT}{V} \sum'_{\vec{k}} \ln [1 - \exp(-\sqrt{\Delta}/KT)]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

No limite do contínuo, dados os valores de  $\rho$  e  $T$  podemos calcular  $A$  e  $B$  resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} A = & \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 \left\{ \frac{\lambda(\rho - B - A)}{\sqrt{\Delta}} \left[ 1 + \frac{2}{\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{KT}\right) - 1} \right] \right\} dk \\ B = & \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 \left\{ \frac{e(k) + \lambda(\rho - B + A)}{\sqrt{\Delta}} \left[ 1 + \frac{2}{\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{KT}\right) - 1} \right] - 1 \right\} dk. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Finalmente, em termos dos valores de  $A$  e  $B$  podemos calcular  $C$  e  $F$  e conseqüentemente as funções termodinâmicas. Usando (4.43) a energia do estado fundamental fica:

$$E_0 = C_0V - \lambda\rho(A_0 - B_0)V + \frac{\lambda}{2}(\rho^2 + A_0^2 - B_0^2)V + \lambda A_0 B_0 V. \quad (4.46)$$

A velocidade do som em  $T = 0$ , pode por sua vez ser obtida através de [23]

$$v_s^2 = \frac{1}{m} \left[ 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{E_0}{N} \right) + \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left( \frac{E_0}{N} \right) \right]. \quad (4.47)$$

Pelo fato do sistema (4.45) ser altamente não linear, só podemos calcular as demais quantidades termodinâmicas, incluindo transições de fase, numericamente.

Para a solução  $\Gamma_0 = 0$ , devemos utilizar  $\Omega$ . A variação em relação à  $\sigma_k$  fornece

$$\tanh 2\sigma_k = \frac{-\frac{\lambda}{V} \sum_k' (1 + 2\nu_k) \sinh 2\sigma_k}{e(k) - \mu + \frac{\lambda}{V} \sum_k' [(1 + 2\nu_k) \cosh 2\sigma_k - 1]}. \quad (4.48)$$

Vemos que se o  $\sinh 2\sigma_k > 0$  implica em  $\tanh 2\sigma_k < 0$  e se  $\sinh 2\sigma_k < 0$  implica em  $\tanh 2\sigma_k > 0$ , ambas inconsistentes, pois  $\cosh 2\sigma_k$  é sempre positivo. Logo a única solução possível é  $\sinh 2\sigma_k = 0$ , resultando em

$$\sigma_k = 0 \quad (4.49)$$

e com a variação em relação à  $\nu_k$

$$\nu_k = \frac{1}{\exp[(e(k) - \mu + 2\lambda\rho)/KT] - 1} \quad (4.50)$$

a equação de vínculo (2.17) se reduz no limite do contínuo a

$$\rho = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{k^2 dk}{\exp[(e(k) - \mu + 2\lambda\rho)/KT] - 1}, \quad (4.51)$$

que pode ser usado para determinar  $\mu$ . A pressão neste caso é dada por

$$P = \lambda\rho^2 - \frac{KT}{2\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 \ln\{1 - \exp[-(e(k) - \mu + 2\lambda\rho)/KT]\}. \quad (4.52)$$

## 4.3 Resultados numéricos

### 4.3.1 Dependência com o cut-off

Utilizamos o sistema de unidades onde  $K = 1$  e  $c = 1$  de tal forma que as energias são expressas em graus Kelvin. Escolhemos  $m = 4 \times 10^{13} \text{ } ^\circ K$  e  $\lambda_r = 50^\circ K \text{ \AA}^3$ . Isso implica num cut-off crítico  $\Lambda_c = 5.17 \text{ \AA}^{-1}$ . A Fig.(1) mostra a dependência da energia por partícula, de (4.46), com o cut-off, para uma densidade  $\rho = 1.0 \times 10^{-2} \text{ \AA}^{-3}$ . Vemos que a região onde esta teoria é válida, para esses parâmetros é  $1.0 < \Lambda < 3.5$ . À medida que aumentamos a densidade, a energia por partícula se torna mais dependente do cut-off, ou seja isso limita também o valor das densidades. Para esses parâmetros escolhemos  $\Lambda = 3 \text{ \AA}^{-1}$  e  $\rho < 3.0 \times 10^{-2} \text{ \AA}^{-3}$ . Neste sentido a teoria efetiva também limita-se a sistemas diluídos.

### 4.3.2 Transições de fase

Resultados de cálculos numéricos usando essas expressões podem ser vistos nas Figs.(2) à (5). Usando o mesmo sistema de unidades, escolhemos  $\lambda_r = 50^\circ K \text{ \AA}^3$  e um cut-off no momento  $\Lambda = 3 \text{ \AA}^{-1}$ . Usando (4.5), corresponde a uma constante de acoplamento nua  $\lambda = 119.124^\circ K \text{ \AA}^3$ . Para as temperaturas e densidades aqui consideradas, este valor de  $\lambda$  essencialmente satura os valores das integrais finitas envolvidas. A densidade  $\rho$  é plotada como sendo a densidade de número de partículas em unidades  $\text{ \AA}^{-3}$ . A fim de estudarmos as

propriedades das fases, condensada ( $\Gamma_0 \neq 0$ ) e não condensada ( $\Gamma_0 = 0$ ), como também a sua coexistência, vemos na Fig.(2) o potencial químico  $\mu$  calculado como função da densidade  $\rho$  para as duas fases, numa temperatura constante  $T = 2^\circ K$ , usando (4.39) e (4.51) respectivamente. A fase condensada tem dois diferentes ramos com diferentes potenciais químicos para  $\rho > .7 \times 10^{-2} \text{\AA}^{-3}$ , e deixa de existir para baixas densidades, enquanto para a fase não-condensada  $\mu$  aumenta monotonicamente tendendo, assintoticamente, ao ramo superior da outra fase. É interessante notar que essas duas soluções essencialmente se juntam na densidade  $\rho_2$  onde a solução não-condensada passa a ter uma ocupação macroscópica de  $\nu_0$ . Já a outra envolvendo um condensado coerente ( $\Gamma_0 \neq 0$ ), tem um valor menor de  $\mu$ . Para analisarmos qual transição de fase está ocorrendo, na Fig.(3) mostramos o gráfico de  $\mu$  pela pressão  $P$ , que mostra um padrão de transição de fase de primeira ordem [27] em  $\mu = \mu_1, P = P_1$ . As correspondentes densidades das duas fases podem ser vistas na Fig.(2) como  $\rho_1$  e  $\rho_3$  respectivamente. A Fig.(4) mostra as isotermas para  $T = 2^\circ K$  e  $T = 0^\circ K$  no diagrama  $P \times \rho^{-1}$  juntamente com as construções de Maxwell apropriadas. O padrão encontrado em  $T = 2^\circ K$  se repete para temperaturas mais altas sem que haja alguma evidência da existência de um ponto crítico, o que pode ser visto na Fig.(5).

# Capítulo 5

## Evolução temporal

### 5.1 Equações de movimento

Uma vez que obtemos a solução variacional para o problema estático, podemos analisar, dentro da teoria efetiva, a evolução temporal dos parâmetros  $\nu_{\vec{k}}$ ,  $x_{\vec{k}}$ ,  $y_{\vec{k}}$  e  $\Gamma_{\vec{k}}$  a partir de valores iniciais diferentes dos valores de equilíbrio. O cálculo dos traços utilizados neste capítulo, bem como dos comutadores encontram-se no Apêndice G.

Começando por  $\Gamma_k$ ,

$$\Gamma_k = Tr \left( a_{\vec{k}} \mathcal{F}_0 \right) \quad (5.1)$$

logo

$$\dot{\Gamma}_k = Tr \left( a_{\vec{k}} \dot{\mathcal{F}}_0 \right). \quad (5.2)$$

Usando a equação de Louville - von Neumann

$$i\dot{\mathcal{F}}_0 = [H - \mu N, \mathcal{F}_0] \quad (5.3)$$

temos

$$i\dot{\Gamma}_k = Tr \left( a_{\vec{k}} [H - \mu N, \mathcal{F}_0] \right). \quad (5.4)$$

A propriedade cíclica do traço implica em

$$i\dot{\Gamma}_k = Tr \left( [a_{\vec{k}}, H - \mu N] \mathcal{F}_0 \right). \quad (5.5)$$

Calculando o traço

$$\begin{aligned} i\dot{\Gamma}_k &= (e(k) - \mu) \Gamma_k + \frac{2\lambda\Gamma_k}{V} \sum_{\vec{k}'} \left( |x_{k'}|^2 \nu_{k'} + (1 + \nu_{k'}) |y_{k'}|^2 \right) - \\ &\quad - \frac{\lambda\Gamma_k^*}{V} \sum_{k'} x_{k'} y_{k'}^* (1 + 2\nu_{k'}) + \frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}', \vec{k}''} \Gamma_{|\vec{k}'+\vec{k}''|}^* \Gamma_{|\vec{k}+\vec{k}''|} \Gamma_{k''}. \end{aligned}$$

Para  $\nu_k$

$$\nu_k = Tr \left( \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{\vec{k}} \mathcal{F}_0 \right) \quad (5.6)$$

segue

$$\dot{\nu}_k = Tr \left( \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{\vec{k}} \dot{\mathcal{F}}_0 \right). \quad (5.7)$$

Usando (5.3)

$$\dot{\nu}_k = Tr \left\{ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{\vec{k}} [H - \mu N, \mathcal{F}_0] \right\} \quad (5.8)$$

vem

$$\dot{\nu}_k = Tr \left\{ (H - \mu N) \left[ \mathcal{F}_0, \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{\vec{k}} \right] \right\} = 0 \quad (5.9)$$

obtemos

$$\dot{\nu}_k = 0. \quad (5.10)$$

Para  $x_k$  e  $y_k$  vemos que

$$i \frac{d}{dt} \text{Tr} (\eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} \mathcal{F}_0) = 0 \quad (5.11)$$

conseqüentemente

$$\text{Tr} \left\{ \left[ i \frac{d}{dt} \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} \right] \mathcal{F}_0 \right\} = -\text{Tr} \left[ \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} i \frac{d}{dt} \mathcal{F}_0 \right]. \quad (5.12)$$

Calculando o traço à esquerda e usando (5.3) à direita e tomando o adjunto obtemos

$$\text{Tr} \left( \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, H - \mu N \right] \mathcal{F}_0 \right) = i (1 + 2\nu_k) (\dot{x}_k y_k - \dot{y}_k x_k) \quad (5.13)$$

com

$$\sum_{\vec{k}'} \left\{ \nu_k |x_{k'}|^2 + (1 + \nu_{k'}) |y_{k'}|^2 + |\Gamma_{k'}|^2 \right\} = N \quad (5.14)$$

e definindo

$$Z = \frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}'} x_{k'} y_{k'}^* (1 + 2\nu_{k'}). \quad (5.15)$$

Podemos calcular, após um pouco de álgebra, o traço remanescente, obtendo então um conjunto de equações de movimento não lineares:



$$\begin{aligned}
i(\dot{x}_k y_k - \dot{y}_k x_k) &= 2x_k y_k \left( e(k) - \mu + \frac{2\lambda N}{V} \right) - \frac{\lambda}{2V} x_k^2 \sum_{k'} \{ \Gamma_{|\vec{k}+\vec{k}'|}^{*2} + \Gamma_{|\vec{k}-\vec{k}'|}^{*2} \} \\
&\quad - \frac{\lambda}{2V} y_k^2 \sum_{\vec{k}'} \{ \Gamma_{|\vec{k}+\vec{k}'|}^2 + \Gamma_{|\vec{k}-\vec{k}'|}^2 \} + \frac{\lambda}{V} x_k y_k \{ | \Gamma_{|\vec{k}+\vec{k}'|} |^2 + \\
&\quad + | \Gamma_{|\vec{k}-\vec{k}'|} |^2 - 2 | \Gamma_{k'} |^2 \} + y_k^2 Z + x_k^2 Z^* \tag{5.16}
\end{aligned}$$

$$i\dot{\Gamma}_{\vec{k}} = \left[ e(k) - \mu + 2\lambda \frac{N}{V} \right] \Gamma_k - \frac{2\lambda}{V} \Gamma_k \sum_{\vec{k}'} | \Gamma_{k'} |^2 + \frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}', \vec{k}''} \Gamma_{|\vec{k}'+\vec{k}''|}^* \Gamma_{|\vec{k}+\vec{k}''|} \Gamma_{k''} - \Gamma_k^* Z. \tag{5.17}$$

## 5.2 Soluções de equilíbrio

Uma vez obtidas as equações de movimento podemos procurar soluções onde  $\dot{\Gamma}_{\vec{k}} = \dot{x}_k = \dot{y}_k = 0$ , e confrontá-las com o cálculo estático feito no capítulo 2. Em virtude de estarmos estudando um sistema homogêneo, nos restringiremos a soluções de equilíbrio com  $\Gamma_{k \neq 0}^{(eq)} = 0$ .

### 5.2.1 Fase não condensada

Nesta fase a equação (5.17) com  $\dot{\Gamma}_{\vec{k}} = 0$ ,  $\Gamma_0^{(eq)} = 0$  e a condição de homogeneidade é identicamente zero e (5.16) fornece

$$2x_k^{(0)} y_k^{(0)} \left( e(k) - \mu + \frac{2\lambda N^{(0)}}{V} \right) + y_k^{(0)2} Z^{(0)} + x_k^{(0)2} Z^{(0)*} = 0. \tag{5.18}$$

É conveniente definirmos  $\alpha_k$ ,  $\tau_k$ ,  $p$  e  $q$  como

$$x_k = \cosh \sigma_k + i \frac{\tau_k}{2}$$

$$y_k = \sinh \sigma_k + i \frac{\tau_k}{2} \quad (5.19)$$

$$e^{2\sigma_k} = \alpha_k$$

$$\Gamma_k = \frac{q_k + ip_k}{\sqrt{2}}.$$

(5.18) fica:

$$2\alpha_k^{(0)} \left[ Z_i^{(0)} - 2\alpha_k^{(0)3/2} \tau_k^{(0)} \left( \frac{2\lambda N^{(0)}}{V} + e(k) - \mu + Z_r^{(0)} \right) \right] = 0 \quad (5.20)$$

$$Z_i^{(0)} \tau_k^{(0)} + \alpha_k^{(0)(-1/2)} (\alpha_k^{(0)2} - 1) \left( \frac{2\lambda N^{(0)}}{V} + e(k) - \mu \right) + \alpha_k^{(0)(-1/2)} (\alpha_k^{(0)2} + 1) Z_r^{(0)} = 0,$$

onde  $Z = Z_r + iZ_i$  podem ser escritos em termos de (5.19)

$$Z_r = \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}'} \left( \frac{\alpha_{k'}^2 - 1}{2\alpha_{k'}} + \frac{\tau_{k'}^2}{2} \right) (1 + 2\nu_{k'})$$

$$Z_i = -\frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}'} \frac{\tau_{k'}}{\sqrt{\alpha_{k'}}} (1 + 2\nu_{k'})$$

$$N = \sum_{\vec{k}'} \left[ \left( \frac{\alpha_{k'}^2 + 1}{2\alpha_{k'}} + \frac{\tau_{k'}^2}{2} \right) \frac{(1 + 2\nu_{k'})}{2} - \frac{1}{2} \right].$$

De maneira trivial verifica-se que com a condição  $q_k^{(0)} = p_k^{(0)} = 0$  a única solução para (5.20) é:

$$Z_r^{(0)} = Z_i^{(0)} = \tau_k^{(0)} = 0 \quad \alpha_k^{(0)} = 1. \quad (5.21)$$

O que corresponde à solução estática encontrada na seção 4.2.

## 5.2.2 Fase condensada

Como neste caso  $\Gamma_0^{(eq)} \neq 0$  (5.16) e (5.17) ficam:

$$\left[ -\mu + \frac{2}{V} \lambda N^{(0)} \right] \Gamma_0^{(eq)} - \frac{\lambda}{V} \Gamma_0^{(eq)} |\Gamma_0^{(eq)}|^2 - \Gamma_0^{(eq)*} Z^{(0)} = 0 \quad (5.22)$$

$$2x_k^{(0)} y_k^{(0)} \left( e(k) - \mu + \frac{2\lambda N^{(0)}}{V} \right) + y_k^{(0)2} Z^{(0)} + x_k^{(0)2} Z^{(0)*} - \frac{\lambda}{V} x_k^{(0)2} \Gamma_0^{(eq)*2} - \frac{\lambda}{V} y_k^{(0)2} \Gamma_0^{(eq)2} = 0 \quad (5.23)$$

Neste caso, adotamos a seguinte parametrização:

$$\begin{aligned} \beta_k &= \sqrt{\frac{(1+2\nu_k)}{2\alpha_k}} \\ \epsilon_k &= \sqrt{\frac{(1+2\nu_k)}{2}} \tau_k \\ \iota &= \frac{1}{V} |\Gamma_0|^2 \\ \varphi &= \arcsin \left( \frac{Re\Gamma_0}{|\Gamma_0|} \right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde  $\alpha_k, \tau_k$  são dados por (5.19). As equações para o equilíbrio ficam:

$$\begin{aligned} \epsilon_k^{(0)} \left\{ 2\lambda\rho^{(0)} + e(k) - \mu + Z_r^{(0)} + \lambda\iota^{(0)} \cos 2\varphi^{(0)} \right\} - \beta_k^{(0)} \left\{ Z_i^{(0)} - \lambda\iota^{(0)} \sin 2\varphi^{(0)} \right\} &= 0 \\ 2\lambda\rho^{(0)} - \mu - \lambda\iota^{(0)} + Z_r^{(0)} \cos 2\varphi^{(0)} - Z_i^{(0)} \sin 2\varphi^{(0)} &= 0 \\ 2\iota^{(0)} Z_r^{(0)} \sin 2\varphi^{(0)} + 2\iota^{(0)} Z_i^{(0)} \cos 2\varphi^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ Z_i^{(0)} - \lambda \iota^{(0)} \sin 2\varphi^{(0)} \right\} \epsilon_k^{(0)} + \left\{ Z_r^{(0)} + \lambda \iota^{(0)} \cos 2\varphi^{(0)} - 2\lambda \rho^{(0)} - e(k) + \mu \right\} \beta_k^{(0)} + \\ & + \frac{(1 + 2\nu_k^2)}{4\beta_k^{(0)3}} \left\{ 2\lambda \rho^{(0)} + e(k) - \mu + Z_r^{(0)} + \lambda \iota^{(0)} \cos 2\varphi^{(0)} \right\} = 0 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} Z_r &= \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}'} \left\{ \frac{(1 + 2\nu_{\vec{k}'}^2)^2}{4\beta_{\vec{k}'}^2} - \beta_{\vec{k}'}^2 + \epsilon_{\vec{k}'}^2 \right\} \\ Z_i &= -\frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}'} \epsilon_{\vec{k}'} \beta_{\vec{k}'} \\ \rho &= \iota + \frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}'} \left\{ \left[ \frac{(1 + 2\nu_{\vec{k}'}^2)^2}{4\beta_{\vec{k}'}^2} + \beta_{\vec{k}'}^2 + \epsilon_{\vec{k}'}^2 \right] - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Esta fase possui uma propriedade muito interessante. É possível encontrar uma classe infinita de soluções para as equações acima, todas equivalentes entre si, e em particular à solução estática que corresponde a :

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= \frac{\pi}{2} \\ \epsilon_k^{(0)} &= 0 \\ \beta_k^{(0)} &= \left\{ \frac{(1 + 2\nu_k)^2 [e(k) + 2Z_r^{(0)}]}{4[e(k) + 2\lambda \iota^{(0)}]} \right\}^{1/4} \\ \iota^{(0)} &= \frac{|\Gamma_0|^2}{V} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Na verdade estas soluções estão relacionadas à escolha da fase de  $x_k$  e  $y_k$

complexos, que no capítulo 1 foram tomados como sendo ambos reais. Isto pode ser visto em detalhes no Apêndice H.

## 5.3 Equações de movimento linearizadas

### 5.3.1 Solução não condensada

Utilizando a mesma parametrização da seção 5.2.1 podemos linearizar as equações (5.16) e (5.17) em torno da solução de equilíbrio (5.21) escrevendo

$$p_k = \delta p_k$$

$$q_k = \delta q_k$$

$$\tau_k = \delta \tau_k$$

$$\alpha_k = 1 + \delta \alpha_k$$

conservando somente os termos lineares

$$\begin{aligned} \delta \dot{q}_k &= \delta p_k \left( e(k) + \frac{2\lambda N^0}{V} - \mu \right) \\ \delta \dot{p}_k &= -\delta q_k \left( e(k) + \frac{2\lambda N^0}{V} - \mu \right) \\ \delta \dot{\tau}_k &= 2Z_\tau^{(1)} + 2\delta \alpha_k \left( \frac{2\lambda N^0}{V} + e(k) - \mu \right) \\ \delta \dot{\alpha}_k &= -2\delta \tau_k \left( \frac{2\lambda N^0}{V} + e(k) - \mu \right) + 2Z_i^{(1)} \end{aligned} \tag{5.28}$$

onde

$$\begin{aligned}Z_r^{(1)} &= \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} (1 + 2\nu_k) \delta\alpha_k \\Z_i^{(1)} &= -\frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}} (1 + 2\nu_k) \delta\tau_k \\ \frac{N^{(0)}}{V} &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \nu_k = \rho.\end{aligned}$$

Aqui a condição física que  $N^{(1)} = 0$ , ou seja que o número médio de partículas se conserve, é automaticamente satisfeita, pois nesta fase não ocorre quebra de simetria. Obtemos então um conjunto de osciladores harmônicos acoplados, usando

$$\delta q_k = Q_k e^{i\omega t}$$

$$\delta p_k = P_k e^{i\omega t}$$

$$\delta \tau_k = T_k e^{i\omega t}$$

$$\delta \alpha_k = A_k e^{i\omega t}$$

e

$$Z_i^{(1)} = Z_i^{(1)} e^{i\omega t}$$

$$Z_r^{(1)} = Z_r^{(1)} e^{i\omega t}.$$

As equações ficam:

$$\begin{aligned}
iQ_k\omega &= (e(k) + 2\lambda\rho - \mu)P_k \\
iP_k\omega &= -(e(k) + 2\lambda\rho - \mu)Q_k \\
iT_k\omega &= 2(e(k) + 2\lambda\rho - \mu)A_k + \frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}'} (1 + 2\nu_{k'})A_{k'} \\
iA_k\omega &= -2(e(k) + 2\lambda\rho - \mu)T_k - \frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}'} (1 + 2\nu_{k'})T_{k'},
\end{aligned} \tag{5.29}$$

onde a frequência associada a  $Q_k$  e  $P_k$  é

$$\omega_q = \pm(e(k) - \mu + 2\lambda\rho) \tag{5.30}$$

que são exatamente as energias de partícula independente utilizadas no cálculo das ocupações. As frequências relacionadas à  $A_k$  e  $T_k$  dependem de uma diagonalização, pois  $T_k$ 's está acoplado com todos  $A_k$ 's e vice-versa. Para a teoria efetiva, no limite do contínuo podemos escrever

$$\begin{pmatrix} i\omega & -\omega_0(k) \\ \omega_0(k) & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(k) \\ A(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

onde

$$X = \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\Lambda A(k) [1 + 2\nu(k, T)] k^2 dk \tag{5.31}$$

$$Y = -\frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\Lambda T(k) [1 + 2\nu(k, T)] k^2 dk \tag{5.32}$$

com

$$\omega_0(k) = 2(e(k) - \mu + 2\lambda\rho) \quad (5.33)$$

$$\nu(k, T) = \frac{1}{\exp(\omega_0/2KT - 1)}. \quad (5.34)$$

Para  $\omega \neq \pm\omega_0(k)$  podemos encarar o problema como um sistema de equações não homogêneo de dimensão 2. Invertendo a matriz escrevemos

$$\begin{pmatrix} T(k) \\ A(k) \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega_0(k)^2 - \omega^2} \begin{pmatrix} i\omega & \omega_0(k) \\ -\omega_0(k) & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

que fornece  $T(k)(X, Y)$  e  $A(k)(X, Y)$ . Substituindo essas expressões em (5.31) e (5.32), obtemos um sistema homogêneo para  $X$  e  $Y$

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{\omega_0(k)[1+2\nu(k, T)]k^2 dk}{\omega_0(k)^2 - \omega} & -\frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{i\omega[1+2\nu(k, T)]k^2 dk}{\omega_0(k)^2 - \omega} \\ \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{i\omega[1+2\nu(k, T)]k^2 dk}{\omega_0(k)^2 - \omega} & 1 + \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{\omega_0(k)[1+2\nu(k, T)]k^2 dk}{\omega_0(k)^2 - \omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0.$$

Para encontrarmos soluções não triviais, basta impormos que o determinante dessa matriz seja zero, o que fornece

$$\omega^2 = \frac{\left\{ 1 + \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{\omega_0(k)[1+2\nu(k, T)]k^2 dk}{\omega_0(k)^2 - \omega} \right\}^2}{\left\{ \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{[1+2\nu(k, T)]k^2 dk}{\omega_0(k)^2 - \omega} \right\}^2}. \quad (5.35)$$

Esta equação nos permite encontrar as frequências tais que  $\omega \neq \pm\omega_0$ . Extraindo a raiz quadrada de (5.35)

$$\omega = \pm \frac{1 + \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{\omega_0(k)[1+2\nu(k, T)]k^2 dk}{\omega_0(k)^2 - \omega}}{\frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{[1+2\nu(k, T)]k^2 dk}{\omega_0(k)^2 - \omega}}. \quad (5.36)$$



Simplificando obtemos

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{k^2[1 + 2\nu(k, T)]dk}{\omega_0(k) \pm \omega} = -\frac{1}{\lambda}, \quad (5.37)$$

onde o sinal  $\pm$  corresponde a  $\omega \neq -\omega_0$  e  $\omega \neq +\omega_0$  respectivamente. Podemos resolver essas equações graficamente, obtendo um par de frequências  $\pm\omega_c$  de tal forma que para  $\lambda > 0$ ,

$$\omega_c > \omega_0(\Lambda) \quad (5.38)$$

ou seja,  $\omega_c$  é sempre maior que as frequências associadas às de partícula independente, sendo que este distanciamento aumenta se aumentamos  $\lambda$ .

O problema da determinação dos autovetores é em geral muito complicado, envolvendo equações integrais mas, neste caso simples, basta substituímos, por exemplo,  $\omega = +\omega_c$ , convenientemente no sistema linear para  $X$  e  $Y$ , dando

$$X = iY. \quad (5.39)$$

Substituindo este resultado no sistema original para  $T(k)$  e  $A(k)$

$$\begin{aligned} T(k) &= Ni \frac{1}{\omega_0(k) + \omega_c} \\ A(k) &= -N \frac{1}{\omega_0(k) + \omega_c}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Observamos uma dispersão nos  $k$ 's e frequência maior que a de partícula independente. O problema associado à este modo é que ele depende do valor do cut-off. Isto sugere que ele aparece artificialmente em virtude da teoria efetiva e não tem significado físico. Veja resultados seção 5.4.

Os demais modos terão frequência  $\omega = \pm\omega_0 = 2\omega_q$ , sendo que o problema da determinação dos autovetores aqui não é trivial. Esse comportamento em que temos  $\omega$  associado à  $Q(k)$  e  $P(k)$ , e  $2\omega$  associado à  $T(k)$  e  $A(k)$  é inerente a esse cálculo, uma vez que também ocorre no gás ideal. Se utilizarmos o mesmo método, basta tomarmos o limite para  $\lambda \rightarrow 0$  e obteremos  $\omega_l$  e  $2\omega_l$  onde

$$\omega_l = \pm(e(k) - \mu). \quad (5.41)$$

Esta estrutura corresponde a descrever a dinâmica de osciladores harmônicos com base em um grupo dinâmico simplético, como foi explicado em detalhes por Lipkin [28].

### 5.3.2 Solução condensada

Como temos um caso mais complexo, nos restringiremos somente ao cálculo das frequências. Procedemos inicialmente com uma primeira linearização onde termos quadráticos em  $\Gamma_{k \neq 0}$  são ignorados por não contribuírem para a linearização uma vez que  $\Gamma_k^{(eq)} = \delta_{k,0}\Gamma_0^{eq}$ . Obtemos para (5.16) e (5.17) (Apêndice F) para  $\Gamma_k$  com  $k \neq 0$ :

$$i\dot{\Gamma}_k = \left[ e(k) - \mu + \frac{2}{V}\lambda N \right] \Gamma_k + \frac{\lambda}{V}\Gamma_k^*\Gamma_0^2 - \Gamma_k^*Z \quad (5.42)$$

e com  $k = 0$  temos:

$$i\dot{\Gamma}_0 = \left[ -\mu + \frac{2}{V}\lambda N \right] \Gamma_0 - \frac{\lambda}{V}\Gamma_0|\Gamma_0|^2 - \Gamma_0^*Z \quad (5.43)$$

já para  $x_k$  e  $y_k$  obtemos:

$$\begin{aligned} i(\dot{x}_k y_k - \dot{y}_k x_k) &= 2x_k y_k \left( e(k) - \mu + \frac{2\lambda N}{V} \right) + y_k^2 Z + x_k^2 Z^* \\ &\quad - \frac{\lambda}{V} x_k^2 \Gamma_0^{*2} - \frac{\lambda}{V} \Gamma_0^2 y_k^2 \end{aligned} \quad (5.44)$$

Primeiramente, vamos mostrar que como antes, na linearização completa, a equação (5.42) para  $k \neq 0$ , não está acoplada a outra. Usando por exemplo, a parametrização  $\Gamma_k = \frac{q_k + ip_k}{\sqrt{2}}$ , vem

$$\begin{aligned}\dot{q}_k &= \left[ e(k) - \mu + \frac{2\lambda}{V}N - \frac{\lambda}{V} \left( \frac{q_0^2 - p_0^2}{2} \right) + Z_r \right] p_k + \left[ \frac{\lambda}{V} p_0 q_0 - Z_i \right] q_k \\ \dot{p}_k &= - \left[ e(k) - \mu + \frac{2\lambda}{V}N + \frac{\lambda}{V} \left( \frac{q_0^2 - p_0^2}{2} \right) - Z_r \right] q_k - \left[ \frac{\lambda}{V} p_0 q_0 - Z_i \right] p_k.\end{aligned}\tag{5.45}$$

Em todos nossos cálculos tomaremos, sem perda de generalidade, a solução de equilíbrio estática. Pode-se mostrar que para uma solução de equilíbrio geral encontramos as mesmas frequências físicas que para o caso estático (Apêndice H). Isto significa que além da equivalência das soluções das infinitas soluções de equilíbrio temos também as mesmas curvaturas.

Como para a solução de equilíbrio estática,  $q_k^{(eq)} = 0$ ,  $p_k^{(eq)} = 0$ , e  $Z_i^{eq} = 0$ ,  $p_0^{eq} = 0$ , temos

$$\begin{aligned}\delta\dot{q}_k &= [e(k) - \mu + 2\lambda\rho - \lambda\rho_0 + Z_r^{eq}] \delta p_k \\ \delta\dot{p}_k &= -[e(k) - \mu + 2\lambda\rho + \lambda\rho_0 - Z_r^{eq}] \delta q_k.\end{aligned}\tag{5.46}$$

Essas equações não estão acopladas às demais então, obtemos as frequências

$$\omega = \pm \sqrt{(e(k) + 2\lambda\rho - \mu)^2 - (Z_r^{(0)} - \lambda\rho_0)^2}\tag{5.47}$$

que são novamente as energias de partícula independente obtidas em (4.41) com a devida substituição do valor de  $\mu$  dado em (4.39). Para as demais

equações acopladas, é conveniente usarmos a parametrização (5.24) usada na seção 5.2.2. As equações ficam:

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta}_k &= \epsilon_k \{2\lambda\rho + e(k) - \mu + Z_r + \lambda\iota \cos 2\varphi\} - \beta_k \{Z_i - \lambda\iota \sin 2\varphi\} \\
 \dot{\varphi} &= 2\lambda\rho - \mu - \lambda\iota + Z_r \cos 2\varphi - Z_i \sin 2\varphi \\
 i &= 2\iota Z_r \sin 2\varphi + 2\iota Z_i \cos 2\varphi \\
 \dot{\epsilon}_k &= \{Z_i - \lambda\iota \sin 2\varphi\} \epsilon_k + \{Z_r + \lambda\iota \cos 2\varphi - 2\lambda\rho - e(k) + \mu\} \beta_k + \\
 &\quad + \frac{(1 + 2\nu_k^2)}{4\beta_k^3} \{2\lambda\rho + e(k) - \mu + Z_r + \lambda\iota \cos 2\varphi\}
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

onde  $Z_r$ ,  $Z_i$  e  $\rho$  são dados por (5.26). Mais uma vez linearizando em torno da solução estática (5.27) temos:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \delta\varphi$$

$$\epsilon_k = \delta\epsilon_k$$

$$\beta_k = \beta_k^{(0)} + \delta\beta_k$$

$$\iota = \iota^{(0)} + \delta\iota$$

obtemos então

$$\delta i = -2\iota^{(0)} Z_i^{(1)} - 4Z_r^{(0)} \iota^{(0)} \delta\varphi$$

$$\delta\dot{\varphi} = -Z_r^{(1)} - \lambda\delta\iota \quad (5.49)$$

$$\delta\dot{\beta}_k = \delta\epsilon_k \left( e(k) + 2Z_r^{(0)} \right) - \beta_k^{(0)} Z_i^{(1)} - 2\lambda\iota^{(0)} \beta_k^{(0)} \delta\varphi$$

$$\delta\dot{\epsilon}_k = -4 \left( e(k) + 2\lambda I^{(0)} \right) \delta\beta_k + \left( Z_r^{(1)} - \lambda\delta\iota \right) \left[ \beta_k^{(0)} + \frac{(1 + 2\nu_k)^2}{4\beta_k^{(0)^3}} \right]$$

onde

$$Z_r^{(0)} = \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}'} \left\{ \frac{(1 + 2\nu_{k'})^2}{4\beta_{k'}^{(0)^2}} - \beta_{k'}^{(0)^2} \right\}$$

$$Z_r^{(1)} = -\frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}'} \left\{ \beta_{k'}^{(0)} + \frac{(1 + 2\nu_{k'})^2}{4\beta_{k'}^{(0)^3}} \right\} \delta\beta_{k'}$$

$$Z_i^{(1)} = -\frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}'} \beta_{k'}^{(0)} \delta\epsilon_{k'}$$

$$\rho^{(0)} = \iota^{(0)} + \frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}'} \left\{ \left[ \frac{(1 + 2\nu_{k'})^2}{4\beta_{k'}^{(0)}} + \beta_{k'}^{(0)^2} \right] - 1 \right\}$$

$$\mu = 2\lambda\rho^{(0)} - \lambda\iota^{(0)} - Z_r^{(0)}$$

$$Z_i^{(0)} = 0$$

Utilizamos nestes cálculos que  $\rho^{(1)} = 0$ , para garantir que o número médio de partículas seja sempre constante. Isso restringe a liberdade de variação dos parâmetros, ou seja temos uma relação de vínculo entre  $\delta\iota$  e os  $\delta\beta_{\vec{k}'}$  's pois:

$$\rho^{(1)} = \delta\iota - \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}'} \left\{ \frac{(1 + 2\nu_{k'})^2}{4\beta_{k'}^{(0)^3}} - \beta_{k'}^{(0)} \right\} \delta\beta_{k'} = 0. \quad (5.50)$$

As equações de movimento se reduzem a:

$$\delta\dot{\varphi} = \frac{2\lambda}{V} \sum_{\vec{k}'} \beta_{\vec{k}'}^{(0)} \delta\beta_{\vec{k}'} \quad (5.51)$$

$$\delta\dot{\beta}_{\vec{k}} = \delta\epsilon_{\vec{k}} \left\{ e(k) + 2Z_r^{(0)} \right\} + \frac{\lambda}{V} \beta_{\vec{k}}^{(0)} \sum_{\vec{k}'} \beta_{\vec{k}'}^{(0)} \delta\epsilon_{\vec{k}'} - 2\lambda\iota^{(0)} \beta_{\vec{k}}^{(0)} \delta\varphi$$

$$\delta\dot{\epsilon}_{\vec{k}} = -4 \left( e(k) + 2\lambda\iota^{(0)} \right) \delta\beta_{\vec{k}} -$$

$$-\frac{\lambda}{V} \left\{ \beta_{\vec{k}}^{(0)} + \frac{(1 + 2\nu_{\vec{k}})^2}{4\beta_{\vec{k}}^{(0)3}} \right\} \sum_{\vec{k}'} \frac{(1 + 2\nu_{\vec{k}'})^2}{2\beta_{\vec{k}'}^{(0)3}} \delta\beta_{\vec{k}'} = 0.$$

Repetindo o mesmo procedimento do caso anterior, trata-se de um sistema homogêneo de equações lineares. Para tanto definimos:

$$\delta\iota = I e^{i\omega t}$$

$$\delta\varphi = F e^{i\omega t} \quad (5.52)$$

$$\delta\beta_{\vec{k}} = B_{\vec{k}} e^{i\omega t}$$

$$\delta\epsilon_{\vec{k}} = E_{\vec{k}} e^{i\omega t}.$$

O sistema fica:

$$iF\omega = \frac{2\lambda}{V} \sum_{\vec{k}'} B_{\vec{k}'}^{(0)} B_{\vec{k}'}$$



$$iB_k\omega = \{e(k) + 2Z_r^{(0)}\} E_k + \frac{\lambda}{V} B_k^{(0)} \sum_{\vec{k}'} B_{\vec{k}'}^{(0)} E_{\vec{k}'} - 2\lambda I^{(0)} B_k^{(0)} F \quad (5.53)$$

$$iE_k\omega = -4(e(k) + 2\lambda I^{(0)}) B_k - \frac{\lambda}{V} \left\{ B_k^{(0)} + \frac{(1 + 2\nu_k)^2}{4B_k^{(0)3}} \right\} \sum_{\vec{k}'} \frac{(1 + 2\nu_{\vec{k}'})^2}{2B_{\vec{k}'}^{(0)3}} B_{\vec{k}'} \quad (5.54)$$

onde

$$B_k^{(0)} = \left\{ \frac{(1 + 2\nu_k)^2 [e(k) + 2Z_r^{(0)}]}{4[e(k) + 2\lambda I^{(0)}]} \right\}^{1/4} \quad (5.55)$$

e

$$\nu_k = \frac{1}{e^{\frac{1}{KT}} \sqrt{(e(k) + \lambda I^{(0)} + Z_r^{(0)})^2 - (Z_r^{(0)} - \lambda I^{(0)})^2} - 1}. \quad (5.56)$$

Podemos efetuar a mesma análise feita no caso anterior, só que agora em virtude do condensado, trabalharemos com matrizes  $3 \times 3$  definindo:

$$Q(k) = e(k) + 2Z_r^{(0)}$$

$$P(k) = 4(e(k) + 2\lambda I^{(0)})$$

$$L(k) = \left[ \frac{e(k) + 2Z_r^{(0)}}{4(e(k) + 2\lambda I^{(0)})} \right]^{\frac{1}{4}} = \left( \frac{Q(k)}{P(k)} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$J(k) = L(k) + \frac{[1 + 2\nu(k)]^2}{4L(k)^3}.$$

Obtemos

$$\begin{pmatrix} i\omega & 0 & 0 \\ 2\lambda I^{(0)} & i\omega & -Q(k) \\ 0 & P(k) & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ B(k) \\ E(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ L(k)Y_1 \\ -J(k)Z_1 \end{pmatrix}$$

com

$$X_1 = \frac{\lambda}{\pi^2} \int_0^\Lambda L(k)B(k)k^2 dk \quad (5.57)$$

$$Y_1 = \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 L(k)E(k)dk \quad (5.58)$$

$$Z_1 = \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{B(k)}{2L(k)^3} [1 + 2\nu(k)]^2 k^2 dk. \quad (5.59)$$

Para que o determinante dessa matriz seja zero temos  $\omega = 0$  ou  $\omega = \pm\sqrt{P(k)Q(k)}$ . No caso em que isso não ocorrer, podemos inverter a matriz resolvendo o sistema linear não-homogêneo, resultando

$$B(k) = \frac{1}{i\omega [P(k)Q(k) - \omega^2]} \left\{ -2\lambda I^{(0)} iL(k)\omega X_1 - \omega^2 L(k)Y_1 - iQ(k)J(k)\omega Z_1 \right\}$$

$$E(k) = \frac{1}{i\omega [P(k)Q(k) - \omega^2]} \left\{ 2\lambda I^0 L(k)P(k)X_1 - iP(k)L(k)\omega Y + J(k)\omega^2 Z_1 \right\}$$

$$F = \frac{X_1}{i\omega}.$$

Substituindo essas expressões em (5.57), (5.58) e (5.59), obtemos um sistema homogêneo para  $X_1$ ,  $Y_1$  e  $Z_1$



$$\begin{pmatrix} 2\lambda I^{(0)} A_1(\omega) & -i\omega A_1(\omega) & A_2(\omega) \\ \frac{2\lambda I^{(0)}}{\omega} A_3(\omega) i & 1 + A_3(\omega) & i\omega A_4(\omega) \\ 2\lambda I^{(0)} A_5(\omega) & -i\omega A_5(\omega) & 1 + A_6(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = 0,$$

onde

$$A_1(\omega) = \frac{\lambda}{\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{L(k)^2}{P(k)Q(k) - \omega^2} k^2 dk$$

$$A_2(\omega) = \frac{\lambda}{\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{L(k)Q(k)J(k)}{P(k)Q(k) - \omega^2} k^2 dk$$

$$A_3(\omega) = \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{L(k)^2 P(k)}{P(k)Q(k) - \omega^2} k^2 dk$$

$$A_4(\omega) = \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{L(k)J(k)}{P(k)Q(k) - \omega^2} k^2 dk$$

$$A_5(\omega) = \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{[1 + 2\nu(k)]^2}{2L(k)^2 [P(k)Q(k) - \omega^2]} k^2 dk$$

$$A_6(\omega) = \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{Q(k)J(k) [1 + 2\nu(k)]^2}{2L(k)^3 [P(k)Q(k) - \omega^2]} k^2 dk.$$

Aqui, como no caso anterior, obtemos graficamente a frequência  $\omega_c$  tal que o determinante acima se anule. Observa-se que essa frequência é maior que as de partícula independente (que anulam o determinante) e consequentemente dependente do cut-off. Temos então como frequências  $\omega = \pm 2\omega_p$  e  $\omega = 0$ , frequência esta que vem da quebra de simetria do número de partículas, e está associada as infinitas soluções equivalentes desta fase, resultando numa situação de equilíbrio indiferente a deslocamentos na direção dessas infinitas soluções (degenerescência de  $\Omega$ ).

## 5.4 Resultados numéricos

Para a escolha dos parâmetros de equilíbrio na fase condensada ( $\Gamma_0 \neq 0$ ), escolheremos uma região onde essa solução seja termodinamicamente estável e isso se dá por exemplo em  $T = 0$ . Tomando  $\rho = 1.0 \times 10^{-2}$  e usando  $\Lambda$  e  $m$  iguais a seção 4.4. Obtemos os valores de equilíbrio  $I^{(0)} = 0.98810 \times 10^{-2} \text{\AA}^{-3}$  e  $Z_r^{(0)} = 60.2887^\circ K$ . A Fig. 6 mostra o determinante do sistema homogêneo para  $X_1$ ,  $Y_1$  e  $Z_1$ , em função da frequência. O ponto onde o determinante se anula determina a frequência  $w_c$ . A região, indicada na figura com a letra A, entre as assíntotas corresponde às frequências de partícula independente ( $\sqrt{P(0)Q(0)} < \omega < \sqrt{P(\Lambda)Q(\Lambda)}$  e  $-\sqrt{P(\Lambda)Q(\Lambda)} < \omega < -\sqrt{P(0)Q(0)}$ ). Observamos que quando aumenta o cut-off, essa região aumenta deslocando para a direita a frequência coletiva, que é claramente dependente do cut-off. Podemos interpretá-la como uma frequência não física, gerada pela limitação imposta pelo cut-off no momento.

O mesmo pode ser feito para a fase não condensada. Esta exibe do ponto de vista da frequência coletiva, exatamente a mesma estrutura que a anterior, sendo que a única diferença está, como foi mostrado, na região onde o determinante se anula. Ele não possui uma frequência  $w = 0$  inerente à quebra de simetria na solução condensada.

# Capítulo 6

## Conclusão

Na aproximação Gaussiana é possível renormalizarmos uma teoria com interações de contato repulsivas, utilizando o chamado esquema de renormalização precário desenvolvido originalmente no contexto da teoria  $\Phi^4$  relativística [16]. Apesar de ser finita e exibir propriedades conhecidas, como um espectro tipo fonons, a fase condensada tratada desta forma resulta ser termodinamicamente instável para qualquer densidade do sistema, exibindo também uma fase não condensada que com essa renormalização é essencialmente um gás livre. Convém observarmos que a instabilidade da fase condensada não pode ser reconhecida a partir da obtenção da energia do estado fundamental apenas a uma dada densidade, mas exige a consideração da equação de estado.

Como alternativa, introduzimos uma teoria efetiva dependente do cut-off, não mais de contato, que pode ser interpretada como um sistema diluído de bosons interagentes, em baixa energia, com a solução caracterizada através de um comprimento de espalhamento  $a$ . As previsões desta teoria incluem: a existência de duas fases distintas, uma condensada e outra não condensada, uma transição de primeira ordem entre as fases não condensada e condensada, um gap no espectro de excitações. Ao efetuarmos um cálculo do tipo RPA, regime de pequenas oscilações em torno do equilíbrio variacional, obtemos as mesmas frequências que aparecem no cálculo variacional estático através

das probabilidades de ocupação térmicas, em particular confirmando o gap. Isso confronta diretamente o Teorema de Hugenholtz-Pines[5] que assegura a ausência do gap em todas as ordens de perturbação. Essa discrepância pode estar ligada ao caráter não perturbativo e autoconsistente da aproximação utilizada, que pode em particular ser associado a um reordenamento drástico e a somas parciais infinitas da série perturbativa. Outra possível causa do surgimento do gap está ligada ao fato que a densidade truncada  $\mathcal{F}_0$  fornece a melhor determinação do grande-potencial do ponto de vista variacional, o que não significa termos os melhores fatores de ocupações a temperatura finita, ou seja, a forma da densidade truncada depende da observável em questão.

A sensibilidade do problema do gap aos ingredientes dinâmicos incluídos na aproximação pode ser ilustrada ainda pelo fato de que, com o truncamento descrito no capítulo 3 (que quebram o caráter variacional e autoconsistente do cálculo através da eliminação dos termos de interação de quasipartículas mesmo para fins de campo médio), os resultados obtidos são compatíveis com o teorema perturbativo de Hugenholtz e Pines.

Por outro lado, é conhecida a tendência das aproximações de campo médio a radicalizarem situações de transição de fase. Tal tendência recomenda pelo menos cautela na interpretação do caráter de primeira ordem para a transição entre a fase condensada e a não condensada, diferentemente do que ocorre com a condensação de Bose de um gás ideal.

Concluimos então, que a introdução de correlações quânticas a nível de campo médio, via condensado coerente e emparelhamento, introduzidas de forma autoconsistente e não perturbativa levam a resultados diferentes dos usuais, obtidos perturbativamente. A comparação destas teorias com resultados experimentais é delicada devido à não disponibilidade ainda de informações acerca do comportamento de sistemas muito diluídos para os quais as previsões devem ter mais força.

# Apêndice A

## Obtenção de $\mathcal{F}_0$

A maximização da entropia da informação de  $\mathcal{F}_0$  pode ser escrita como

$$\delta Tr(\mathcal{F}_0 \ln \mathcal{F}_0) = 0, \quad (\text{A.1})$$

sujeita aos vínculos impostos pela informação disponível

$$Tr(\mathcal{F}_0) = 1$$

$$Tr(\mathcal{F}_0 a_\alpha) = \Gamma_\alpha$$

$$Tr(\mathcal{F}_0 a_\alpha^\dagger) = \Gamma_\alpha^*$$

$$Tr(\mathcal{F}_0 a_\alpha^\dagger a_\beta) = m_{\alpha\beta}$$

$$Tr(\mathcal{F}_0 a_\beta^\dagger a_\alpha) = m_{\alpha\beta}^*$$

$$Tr(\mathcal{F}_0 a_\alpha a_\beta) = n_{\alpha\beta}$$

$$\text{Tr} \left( \mathcal{F}_0 a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger \right) = n_{\alpha\beta}^*. \quad (\text{A.2})$$

Esses vínculos impõem que  $\mathcal{F}_0$  seja da forma

$$\mathcal{F}_0 = e^{\sum_{\alpha,\beta} M_{\alpha\beta} a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger + M_{\alpha\beta}^* a_\beta^\dagger a_\alpha^\dagger + N_{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta + N_{\alpha\beta}^* a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger + \gamma_\alpha a_\alpha + \gamma_\alpha^* a_\alpha^\dagger + \lambda}. \quad (\text{A.3})$$

Usando as transformações (2.3) e (2.4), podemos escrever

$$\mathcal{F}_0 = e^{\sum_\alpha \varepsilon_\alpha \eta_\alpha^\dagger \eta_\alpha + \lambda} = \mathcal{N} \prod_\alpha e^{\varepsilon_\alpha \eta_\alpha^\dagger \eta_\alpha}. \quad (\text{A.4})$$

$\mathcal{N}$  pode ser determinado usando-se que  $\text{Tr}(\mathcal{F}_0) = 1$ . Como o traço não depende da base, tomamos uma base onde

$$\eta_\alpha^\dagger \eta_\alpha | \dots n_\alpha \dots \rangle = n_\alpha | \dots n_\alpha \dots \rangle \quad (\text{A.5})$$

$\text{Tr}(\mathcal{F}_0)$  se reduz então a

$$\mathcal{N} \sum_{n_\beta n_\delta \dots} \langle n_\beta n_\delta \dots | \prod_\alpha e^{\varepsilon_\alpha \eta_\alpha^\dagger \eta_\alpha} | n_\beta n_\delta \dots \rangle = 1. \quad (\text{A.6})$$

Obtemos assim

$$\mathcal{N} \sum_{n_\beta n_\delta \dots} \prod_\alpha e^{\varepsilon_\alpha n_\alpha} = 1, \quad (\text{A.7})$$

e utilizando

$$\sum_{n_\alpha} e^{\varepsilon_\alpha n_\alpha} = \frac{1}{1 - e^{\varepsilon_\alpha}} \quad (\text{A.8})$$

temos então

$$\mathcal{N} = \prod_{\alpha} (1 - e^{\varepsilon_{\alpha}}) \quad (\text{A.9})$$

o que fornece

$$F_0 = \prod_{\alpha} (1 - e^{\varepsilon_{\alpha}}) e^{\varepsilon_{\alpha} \eta_{\alpha}^{\dagger} \eta_{\alpha}}. \quad (\text{A.10})$$

Se chamarmos

$$e^{\varepsilon_{\alpha}} = \nu_{\alpha} / (1 + \nu_{\alpha}), \quad (\text{A.11})$$

resulta finalmente

$$F_0 = \prod_{\alpha} \frac{1}{1 + \nu_{\alpha}} \left( \frac{\nu_{\alpha}}{1 + \nu_{\alpha}} \right)^{\eta_{\alpha}^{\dagger} \eta_{\alpha}}. \quad (\text{A.12})$$

A base que resulta da transformação que diagonaliza a forma quadrática no expoente de (A.3) no caso de um sistema uniforme, por outro lado, pode por argumentos de simetria ser identificada com representação de momentos. Nesse caso (A.12) assume a forma

$$F_0 = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{1 + \nu_{\vec{k}}} \left( \frac{\nu_{\vec{k}}}{1 + \nu_{\vec{k}}} \right)^{\eta_{\vec{k}}^{\dagger} \eta_{\vec{k}}}. \quad (\text{A.13})$$

# Apêndice B

## Cálculo de traços

Traços úteis na aproximação Gaussiana :

$$a) Tr \left( \mathcal{F}_0 \eta_a^\dagger \eta_b \right) = \sum_{n_1, n_2, \dots} \left\langle n_1 n_2 \dots \left| \prod_c \frac{1}{1 + \nu_c} e^{\varepsilon_c \eta_c^\dagger \eta_c} \eta_a^\dagger \eta_b \right| n_1 n_2 \dots \right\rangle \quad (\text{B.1})$$

vemos imediatamente que se  $a \neq b$  o traço dá zero e para  $a = b$  obtemos:

$$\sum_{n_1, n_2, \dots} \prod_c \frac{1}{(1 + \nu_c)} e^{\varepsilon_c n_c} n_a. \quad (\text{B.2})$$

Podemos separar a parte em  $a$

$$\sum_{n_a} \frac{1}{(1 + \nu_a)} n_a e^{\varepsilon_a n_a} \sum_{n \neq n_a} \prod_{c \neq a} \frac{1}{(1 + \nu_c)} e^{\varepsilon_c n_c} \quad (\text{B.3})$$

usando (A.8) a parte que não depende de  $a$  dá 1, e com

$$\sum_{n_c} e^{\varepsilon_c n_c} n_c = \frac{e^{\varepsilon_c}}{(1 - e^{\varepsilon_c})^2} = \nu_c (1 + \nu_c), \quad (\text{B.4})$$

obtemos

$$Tr \left( \mathcal{F}_0 \eta_a^\dagger \eta_b \right) = \nu_a \delta_{a,b}. \quad (\text{B.5})$$



Usando as regras de comutação é imediato que

$$Tr \left( \mathcal{F}_0 \eta_a \eta_b^\dagger \right) = (1 + \nu_a) \delta_{a,b}. \quad (\text{B.6})$$

$$b) Tr \left( \mathcal{F}_0 \eta_a^\dagger \eta_b^\dagger \eta_c \eta_d \right)$$

Temos três casos onde esse traço é diferente de zero :

1)  $a = b = c = d$ . Nesse caso escrevemos

$$Tr \left( \mathcal{F}_0 \eta_a^\dagger \eta_a^\dagger \eta_a \eta_a \right) = Tr \left( \mathcal{F}_0 \eta_a^\dagger \eta_a \eta_a^\dagger \eta_a \right) - Tr \left( \mathcal{F}_0 \eta_a^\dagger \eta_a \right)$$

onde  $Tr \left( \mathcal{F}_0 \eta_a^\dagger \eta_a \right) = \nu_a$  e

$$Tr \left( \mathcal{F}_0 \eta_a^\dagger \eta_a \eta_a^\dagger \eta_a \right) = \sum_{n_1, n_2, \dots} \left\langle n_1 n_2 \dots \left| \prod_e \frac{1}{1 + \nu_e} e^{\varepsilon_e \eta_e^\dagger \eta_e} \eta_a^\dagger \eta_a \eta_a^\dagger \eta_a \right| n_1 n_2 \dots \right\rangle$$

usando que

$$\sum_{n_a} e^{\varepsilon_a n_a} n_a^2 = \nu_a (1 + \nu_a) (1 + 2\nu_a) \quad (\text{B.7})$$

obtemos neste caso  $2\nu_a^2$

2)  $a = c$  e  $b = d$ . Temos:

$$\eta_a^\dagger \eta_b^\dagger \eta_c \eta_d = \eta_a^\dagger \eta_c \eta_b^\dagger \eta_d - \eta_a^\dagger \eta_d \delta_{c,b}. \quad (\text{B.8})$$

Neste caso o termos com dois  $\eta'S$  não contribui para o traço que pode ser calculado de maneira análoga ao anterior dando  $\nu_a \nu_b$ .

3)  $a = b$  e  $c = d$ . Procedemos da mesma forma e os termos com dois  $\eta$ 's também não contribuem. Temos como resultado final

$$\text{Tr} \left( \mathcal{F}_0 \eta_a^\dagger \eta_b^\dagger \eta_c \eta_d \right) = \nu_a \nu_b (\delta_{a,c} \delta_{d,b} + \delta_{a,d} \delta_{c,b}). \quad (\text{B.9})$$

Usando as regras de comutação podemos calcular traços de permutações do calculado anteriormente. Podemos resumir todos esses resultados:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \text{Tr} \left( \mathcal{F}_0 \eta_a^\dagger \eta_b \right) = \nu_a \delta_{a,b} \\ 2) \quad & \text{Tr} \left( \mathcal{F}_0 \eta_a \eta_b^\dagger \right) = (1 + \nu_a) \delta_{a,b} \\ 3) \quad & \text{Tr} \left( \mathcal{F}_0 \eta_a^\dagger \eta_b^\dagger \eta_c \eta_d \right) = \nu_a \nu_b (\delta_{a,c} \delta_{b,d} + \delta_{a,d} \delta_{b,c}) \\ 4) \quad & \text{Tr} \left( \mathcal{F}_0 \eta_a^\dagger \eta_b \eta_c^\dagger \eta_d \right) = (\nu_a + \nu_a \nu_c) \delta_{a,d} \delta_{c,b} + \nu_a \nu_c \delta_{a,b} \delta_{c,d} \\ 5) \quad & \text{Tr} \left( \mathcal{F}_0 \eta_a^\dagger \eta_b \eta_c \eta_d^\dagger \right) = (\nu_a + \nu_a \nu_d) (\delta_{a,c} \delta_{b,d} + \delta_{a,b} \delta_{c,d}) \\ 6) \quad & \text{Tr} \left( \mathcal{F}_0 \eta_a \eta_b^\dagger \eta_c \eta_d^\dagger \right) = (1 + \nu_b + \nu_d + \nu_d \nu_b) \delta_{b,a} \delta_{d,c} + (\nu_b + \nu_b \nu_d) \delta_{b,c} \delta_{d,a} \\ 7) \quad & \text{Tr} \left( \mathcal{F}_0 \eta_a \eta_b^\dagger \eta_c^\dagger \eta_d \right) = (\nu_c + \nu_b \nu_c) \delta_{a,b} \delta_{d,c} + (\nu_b + \nu_b \nu_c) \delta_{b,d} \delta_{c,a} \\ 8) \quad & \text{Tr} \left( \mathcal{F}_0 \eta_a \eta_b \eta_c^\dagger \eta_d^\dagger \right) = (1 + \nu_c + \nu_d + \nu_c \nu_d) (\delta_{a,d} \delta_{c,b} + \delta_{a,c} \delta_{b,d}). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Finalmente, todos os demais traços dão zero.

# Apêndice C

## Valor médio de $\Omega$

Da transformação (2.3) temos

$$a_{\vec{k}}^\dagger = x_{\vec{k}}^* \eta_{\vec{k}}^\dagger - y_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} + \Gamma_{\vec{k}}^* \quad (\text{C.1})$$

$$a_{\vec{k}} = x_{\vec{k}} \eta_{\vec{k}} - y_{\vec{k}}^* \eta_{-\vec{k}}^\dagger + \Gamma_{\vec{k}}. \quad (\text{C.2})$$

O cálculo de  $\Omega$  fica:

1) Dividindo o termo  $\Omega = H - \mu N$  em duas partes obtemos:

a)  $\Omega_1 = \sum_{\vec{k}'} (e(k') - \mu) a_{\vec{k}'}^\dagger a_{\vec{k}'}$

$$\Omega_1 = \sum_{\vec{k}'} (e(k') - \mu) \left( \Gamma_{\vec{k}'}^* + x_{\vec{k}'}^* \eta_{\vec{k}'}^\dagger - y_{\vec{k}'} \eta_{-\vec{k}'} \right) \left( \Gamma_{\vec{k}'} + x_{\vec{k}'} \eta_{\vec{k}'} - y_{\vec{k}'}^* \eta_{-\vec{k}'}^\dagger \right),$$

temos com traço não nulo

$$\Omega_1^t = \sum_{\vec{k}'} (e(k') - \mu) \left( |\Gamma_{\vec{k}'}|^2 + |x_{\vec{k}'}|^2 \eta_{\vec{k}'}^\dagger \eta_{\vec{k}'} + |y_{\vec{k}'}|^2 \eta_{-\vec{k}'} \eta_{-\vec{k}'}^\dagger \right).$$

Usando a tabela de traços e levando em conta a condição de homogeneidade (2.9), vem

$$\langle \Omega_1 \rangle = Tr(\mathcal{F}_0 \Omega_1) = -\mu |\Gamma_0|^2 + \sum_{\vec{k}'} (e(k') - \mu) (|x_{k'}|^2 \nu_{k'} + (1 + \nu_{k'}) |y_{k'}|^2)$$

$$b) \Omega_2 = \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{q}} a_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_1}$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{q}} \left\{ \Gamma_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* + x_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* \eta_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger - y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \right\} \\ &\times \left\{ \Gamma_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* + x_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* \eta_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger - y_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|} \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \right\} \left\{ \Gamma_{k_2} + x_{\vec{k}_2} \eta_{\vec{k}_2} - y_{\vec{k}_2}^* \eta_{-\vec{k}_2}^\dagger \right\} \\ &\times \left\{ \Gamma_{k_1} + x_{k_1} \eta_{k_1} - y_{k_1}^* \eta_{-k_1}^\dagger \right\}. \end{aligned} \quad (C.3)$$

Escrevendo os termos que contribuem para o traço

$$\begin{aligned} \Omega_2^t &= \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \Gamma_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* \Gamma_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* \Gamma_{k_2} \Gamma_{k_1} - \Gamma_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* \Gamma_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* x_{k_2} y_{k_1}^* \eta_{\vec{k}_2}^\dagger \eta_{-\vec{k}_1}^\dagger \\ &- \Gamma_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* \Gamma_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* x_{k_1} y_{k_2}^* \eta_{-\vec{k}_2}^\dagger \eta_{\vec{k}_1}^\dagger + \Gamma_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* \Gamma_{k_2} x_{k_1} x_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* \eta_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger \eta_{\vec{k}_1}^\dagger \\ &+ \Gamma_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* \Gamma_{k_1} x_{k_2} x_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* \eta_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger \eta_{\vec{k}_2}^\dagger + \Gamma_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* \Gamma_{k_2} y_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|} y_{k_1}^* \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_1}^\dagger \\ &+ \Gamma_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* \Gamma_{k_1} y_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|} y_{k_2}^* \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2}^\dagger + \Gamma_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* \Gamma_{k_2} x_{k_1} x_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* \eta_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger \eta_{\vec{k}_1}^\dagger \\ &+ \Gamma_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* \Gamma_{k_1} x_{k_2} x_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* \eta_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger \eta_{\vec{k}_1}^\dagger + \Gamma_{k_1} \Gamma_{k_2} x_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* y_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|} \eta_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \\ &+ \Gamma_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* \Gamma_{k_2} y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} y_{k_1}^* \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_1}^\dagger + \Gamma_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* \Gamma_{k_1} y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} y_{k_2}^* \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2}^\dagger \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Gamma_{k_1} \Gamma_{k_2} y_{|k_1+\bar{q}|} x_{|k_2-\bar{q}|}^* \eta_{-k_1-\bar{q}} \eta_{k_2-\bar{q}}^\dagger \\
& + x_{|k_1+\bar{q}|}^* x_{|k_2-\bar{q}|}^* x_{k_1} x_{k_2} \eta_{k_1+\bar{q}}^\dagger \eta_{k_2-\bar{q}}^\dagger \eta_{k_2} \eta_{k_1} \\
& + x_{|k_1+\bar{q}|}^* y_{|k_2-\bar{q}|} x_{k_2} y_{k_1}^* \eta_{k_1+\bar{q}}^\dagger \eta_{-k_2+\bar{q}} \eta_{k_2} \eta_{-k_1}^\dagger \\
& + x_{|k_1+\bar{q}|}^* y_{|k_2-\bar{q}|} x_{k_1} y_{k_2}^* \eta_{k_1+\bar{q}}^\dagger \eta_{-k_2+\bar{q}} \eta_{-k_2} \eta_{k_1}^\dagger \\
& + y_{|k_1+\bar{q}|} x_{|k_2-\bar{q}|}^* x_{k_2} y_{k_1}^* \eta_{-k_1-\bar{q}} \eta_{k_2-\bar{q}}^\dagger \eta_{k_2} \eta_{-k_1}^\dagger \\
& + y_{|k_1+\bar{q}|} x_{|k_2-\bar{q}|}^* y_{k_2}^* x_{k_1} \eta_{-k_1-\bar{q}} \eta_{k_2-\bar{q}}^\dagger \eta_{-k_2} \eta_{k_1}^\dagger \\
& + y_{|k_1+\bar{q}|} y_{|k_2-\bar{q}|}^* y_{k_2}^* y_{k_1}^* \eta_{-k_1-\bar{q}} \eta_{-k_2+\bar{q}} \eta_{-k_2} \eta_{-k_1}^\dagger.
\end{aligned} \tag{C.4}$$

2)  $Tr(\mathcal{F}_0 \log \mathcal{F}_0)$  usando (2.6) temos

$$Tr[\mathcal{F}_0 \log \mathcal{F}_0] = Tr \left\{ \mathcal{F}_0 \ln \left[ \prod_{\vec{k}} \frac{1}{1 + \nu_k} \left( \frac{\nu_k}{1 + \nu_k} \right)^{\eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{\vec{k}}} \right] \right\}.$$

Desmembrando o logaritmo

$$Tr(\mathcal{F}_0 \ln \mathcal{F}_0) = - \sum_{\vec{k}} Tr(\mathcal{F}_0) \ln(1 + \nu_k) + \sum_{\vec{k}} Tr \left( \mathcal{F}_0 \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{\vec{k}} \right) \ln \frac{\nu_k}{1 + \nu_k}.$$

Calculando os traços, e com um pouco de álgebra, juntando 1 e 2 obtemos:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \sum_{\vec{k}} \left( \epsilon(k) - \mu + \frac{2\lambda}{V} |\Gamma_0|^2 \right) \left( |x_k|^2 \nu_k + (1 + \nu_k) |y_k|^2 \right) - \mu |\Gamma_0|^2 \\
&+ \frac{\lambda}{2V} |\Gamma_0|^4 - \frac{\lambda}{2V} \Gamma_0^2 \sum_{\vec{k}} x_k^* y_k (1 + 2\nu_k) - \frac{\lambda}{2V} \Gamma_0^{*2} \sum_{\vec{k}} x_k y_k^* (1 + 2\nu_k) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{V} \left[ \sum_{\vec{k}} (\nu_k |x_k|^2 + (1 + \nu_k) |y_k|^2) \right]^2 + \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} x_k y_k^* (1 + 2\nu_k) x_{k'}^* y_{k'} (1 + 2\nu_{k'}) \\
& -KT \sum_{\vec{k}} [(1 + \nu_k) \ln(1 + \nu_k) - \nu_k \ln \nu_k],
\end{aligned} \tag{C.5}$$

com

$$\sum_{\vec{k}} (\nu_k |x_k|^2 + (1 + \nu_k) |y_k|^2) + |\Gamma_0|^2 = N. \tag{C.6}$$

# Apêndice D

## Gás de Bose Ideal

O objetivo deste apêndice é o de mostrar que é possível reproduzir, utilizando a aproximação Gaussiana, os resultados tradicionais [29] para um gás ideal de Bose, sendo que as descrições com os condensados  $\Gamma_0$  e  $\nu_0$  fornecem resultados equivalentes. Se tomarmos a expressão (2.16) com  $\lambda = 0$  obtemos

$$\begin{aligned} \Omega_l = & \sum_{\vec{k}} [e(k) - \mu] \left[ \frac{(1 + 2\nu_k) \cosh 2\sigma_k - 1}{2} \right] - \mu \Gamma_0^2 \\ & - KT \sum_{\vec{k}} [(1 + \nu_k) \ln(1 + \nu_k) - \nu_k \ln \nu_k]. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Para a conservação do número médio de partículas temos (2.17). Impondo que  $\Omega_l$  seja estacionário em relação a uma variação arbitrária de  $\sigma_k$  encontramos  $\sigma_k = 0$ . Em relação à  $\nu_k$  vem

$$\nu_k = \frac{1}{\exp\left(\frac{e(k) - \mu}{KT}\right) - 1}. \quad (\text{D.2})$$

A equação (2.17) no limite contínuo fica

$$\rho = \frac{\Gamma_0^2}{V} + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\exp\left(\frac{e(k) - \mu}{KT}\right) - 1}. \quad (\text{D.3})$$

Finalmente para  $\Gamma_0$  resulta

$$2\mu\Gamma_0 = 0. \quad (\text{D.4})$$

Como conseqüência se  $\mu \neq 0$  ( $\mu < 0$ ) então  $\Gamma_0 = 0$ , o que corresponde a fase não condensada, onde a medida em que a temperatura diminui para uma dada densidade, o potencial químico aumenta até atingir zero na temperatura crítica. Quando  $\mu$  atinge esse valor temos duas possibilidades para  $\Gamma_0$ :  $\Gamma_0 = 0$ , onde a condensação se dá através da ocupação macroscópica de  $\nu_0$ , ou seja

$$\rho = \frac{\nu_0}{V} + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\exp\left(\frac{\epsilon(k)}{KT}\right) - 1}, \quad (\text{D.5})$$

ou  $\Gamma_0 \neq 0$  fornecendo a mesma expressão acima exceto pela troca de  $\nu_0/V$  por  $\frac{\Gamma_0^2}{V}$ . Essas duas soluções são termodinamicamente equivalentes pois ambas tem o mesmo  $\mu$  e a descontinuidade da sua derivada implica numa transição de fase de segunda ordem.



# Apêndice E

## Integrais relevantes

$$1) \quad \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 e(k) \left\{ \frac{e(k) + \lambda\rho}{\sqrt{e(k)^2 + 2e(k)\lambda\rho}} - 1 \right\} dk = -\frac{\Lambda^5 \hbar^2}{40\pi^2 m} - \frac{4}{5} \frac{\lambda^{\frac{5}{2}} m^{\frac{3}{2}} \rho^{\frac{5}{2}}}{\pi^2 \hbar^3} +$$
$$\left\{ \frac{\Lambda^4 \hbar}{40\pi^2 m} - \frac{2}{15} \frac{\Lambda^2 \lambda \rho}{\pi^2 \hbar} + \frac{1}{15} \frac{\lambda^2 m \rho^2}{\pi^2 \hbar^3} \right\} \sqrt{\Lambda^2 \hbar^2 + 4\lambda m \rho} + \frac{1}{12} \frac{\lambda \rho}{\pi^2 \hbar^3} [\Lambda^2 \hbar^2 + 4\lambda m \rho]^{\frac{3}{2}}$$

expandindo em  $\Lambda$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 e(k) \left\{ \frac{e(k) + \lambda\rho}{\sqrt{e(k)^2 + 2e(k)\lambda\rho}} - 1 \right\} dk = \frac{\lambda^2 \rho^2 \Lambda}{4\pi^2 \hbar^2} - \frac{4m^{\frac{3}{2}} \lambda^{\frac{5}{2}} \rho^{\frac{5}{2}}}{5\pi^2 \hbar^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$$

$$2) \quad \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 \left\{ \frac{e(k) + \lambda\rho}{\sqrt{e(k)^2 + 2e(k)\lambda\rho}} - 1 \right\} dk = -\frac{\Lambda^3}{12\pi^2} + \frac{1}{3} \frac{\lambda^{\frac{3}{2}} m^{\frac{3}{2}} \rho^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \hbar^3} -$$
$$-\frac{\lambda m \rho}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\Lambda^2 \hbar^2 + 4\lambda m \rho} + \frac{1}{12\pi^2 \hbar^3} (\Lambda^2 \hbar^2 + 4\lambda m \rho)^{\frac{3}{2}}$$

expandindo em  $\Lambda$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 \left\{ \frac{e(k) + \lambda\rho}{\sqrt{e(k)^2 + 2e(k)\lambda\rho}} - 1 \right\} dk = \frac{1}{3} \frac{\lambda^{\frac{3}{2}} m^{\frac{3}{2}} \rho^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \hbar^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$$

$$3) \quad \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{\lambda\rho k^2}{\sqrt{e(k)^2 + 2e(k)\lambda\rho}} dk = -\frac{\lambda^{\frac{3}{2}} m^{\frac{3}{2}} \rho^{\frac{3}{2}}}{\hbar^3 \pi^2} + \frac{\lambda m \rho}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\Lambda^2 \hbar^2 + 4\lambda m \rho}$$

expandindo em  $\Lambda$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{\lambda\rho k^2}{\sqrt{e(k)^2 + 2e(k)\lambda\rho}} dk = -\frac{\lambda^{\frac{3}{2}} m^{\frac{3}{2}} \rho^{\frac{3}{2}}}{\hbar^3 \pi^2} + \frac{\lambda m \rho \Lambda}{2\pi^2 \hbar^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$$

# Apêndice F

## Pseudo-potencial

Este método é antigo [30] [31], e utilizado no estudo de problemas de espalhamento de dois nucleons em baixa energia, onde obviamente o conhecimento completo da interação era desnecessário para uma descrição satisfatória do sistema. Nesse caso, condições de contorno apropriadas podem substituir o potencial. Huang e Yang [2] no estudo do gás de esferas duras, estenderam este método para dois corpos em qualquer energia, onde ele é exato, e para o problema de muitos corpos onde funciona dentro de limites de baixas densidade e temperatura.

a) Formulação do pseudopotencial para um sistema de dois corpos.

É possível mostrar que, em baixa energia, podemos construir um pseudo-potencial que tenha o mesmo comprimento de espalhamento  $a$  do potencial original fazendo a seguinte substituição:

$$V(r)\Psi(r) \rightarrow \frac{4\pi a\hbar^2}{m}\delta(\vec{r})\frac{\partial}{\partial r}(r\Psi), \quad (\text{F.1})$$

onde o operador do lado direito da equação, que atua sobre a função de onda da coordenada relativa, é o pseudo-potencial. Devemos ressaltar que essa substituição funciona na medida em que nos restringimos a baixas energias (que é precisamente o que nos interessa em baixa temperatura). Outras ondas parciais não são levadas em conta e mesmo na onda  $s$  não é levada em conta a informação contida em outros parâmetros como por exemplo o alcance efe-

tivo. Apesar de não relevante para o nosso problema, convém citar que o pseudo-potencial (E.1) foi generalizado [21] para substituir exatamente o potencial para as todas ondas parciais para qualquer energia num sistema de dois corpos.

b) O sistema de muitos corpos

Neste caso não é possível uma substituição exata, mas dentro de certas condições:  $ka \ll 1$  e  $(a^3\rho)^{1/2} \ll 1$ . A primeira está relacionada a baixas energias. Para entendermos melhor a segunda, consideremos o choque entre duas partículas: Se o sistema é suficientemente diluído, essas colisões não são frequentes. Quando elas ocorrem, a chance de uma terceira partícula estar envolvida é muito pequena. Com uma boa aproximação quando tal colisão ocorre, o par de partículas não percebe ser parte de um grande sistema de muitas partículas. Para o caso de uma interação qualquer (que pode ser arbitrariamente forte), devemos tratar exatamente o espalhamento de duas partículas a baixas energias sendo este especificado pelo comprimento de espalhamento  $a$ . De modo análogo para um sistema de muitos corpos. Atuando nos operadores de campo, temos

$$V' = \frac{\lambda}{2} \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \Psi(\vec{r}_1)^\dagger \Psi(\vec{r}_2)^\dagger \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \frac{\partial}{\partial r_{12}} [r_{12} \Psi(\vec{r}_1) \Psi(\vec{r}_2)]. \quad (\text{F.2})$$

Notamos  $V'$  não é Hermitiano pois o operador  $(\partial/\partial r)r$  não é um operador Hermitiano. Isso implica, como veremos, somente na eliminação da divergência uma vez que não estamos lidando com um cálculo variacional auto-consistente, mas sim com uma versão truncada da aproximação Gaussiana cujos resultados são compatíveis com os perturbativos.

Mostraremos a seguir que o pseudo-potencial elimina os termos divergentes na aproximação de quasi-partículas livres. Expandindo em ondas planas com condições periódicas de contorno temos

$$V' = \frac{\lambda}{2V} \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4} a_{\vec{k}_1}^\dagger e^{-i\vec{k}_1 \vec{r}_1} a_{\vec{k}_2}^\dagger e^{-i\vec{k}_2 \vec{r}_2} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \frac{\partial}{\partial r_{12}} [r_{12} \times \\ \times a_{\vec{k}_3} e^{i\vec{k}_3 \vec{r}_1} a_{\vec{k}_4} e^{i\vec{k}_4 \vec{r}_2}].$$

Mudando para a coordenada relativa  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  e para  $\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$  obtemos

$$V' = \frac{\lambda}{2V} \int d\vec{r} d\vec{R} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4} a_{\vec{k}_1}^\dagger e^{-i\vec{k}_1 (\frac{\vec{r}}{2} + \vec{R})} a_{\vec{k}_2}^\dagger e^{-i\vec{k}_2 (\vec{R} - \frac{\vec{r}}{2})} \delta(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial r} [r \times \\ \times a_{\vec{k}_3} e^{i\vec{k}_3 (\frac{\vec{r}}{2} + \vec{R})} a_{\vec{k}_4} e^{i\vec{k}_4 (\vec{R} - \frac{\vec{r}}{2})}]. \quad (\text{F.3})$$

Dado que

$$\int d\vec{x} e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} = V \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (\text{F.4})$$

resulta

$$V' = \frac{\lambda}{2V} \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \sum_{\vec{k}_3, \vec{k}_4} e^{i(\vec{k}_3 - \vec{k}_4) \cdot \frac{\vec{r}}{2}} a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \vec{k}_3 + \vec{k}_4} \right]. \quad (\text{F.5})$$

Finalmente se definirmos o momento transferido  $\vec{q}$  e mudarmos os nomes dos índices mudos, escrevemos a Hamiltoniana do sistema

$$H = \sum_{\vec{k}} e(k) a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{\lambda}{2V} \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} a_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger \frac{\partial}{\partial r} \left[ r e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \frac{\vec{r}}{2}} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_1} \right]. \quad (\text{F.6})$$

Com essa Hamiltoniana podemos calcular a energia livre  $F$  (capítulo 3). O nosso objetivo é o de verificar que a diferença entre o potencial de contato e (D.1) implica na regularização, e para isso faremos um cálculo em  $T = 0$ , já

que a temperatura acrescenta termos exponenciais que não contribuem para a divergência. Computando o traço na aproximação de quasi-partículas livres, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{F}{V} &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} (e(k) + \lambda\rho) \left( \frac{\cosh 2\sigma_k - 1}{2} \right) + \frac{\lambda}{2} \rho^2 - \frac{\lambda}{2V} \rho \sum_{\vec{k}} \sinh 2\sigma_k - \quad (\text{F.7}) \\ &- \frac{\lambda}{2} \rho \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial}{\partial r} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}} \sinh 2\sigma_k}{2} + \frac{\lambda}{2} \rho \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial}{\partial r} \sum_{\vec{k}} 4 \cos(\vec{k}\vec{r}) \left[ \frac{\cosh 2\sigma_k - 1}{2} \right]. \end{aligned}$$

A variação  $(\partial(F/V))/(\partial\sigma_k)$  fornece o mesmo resultado que para a interação de contato, uma vez que a derivada  $(\partial/\partial r)$  só pode ser diferente da unidade numa superposição de ondas planas, ou seja

$$\tanh 2\sigma_k = \frac{\lambda\rho}{e(k) + \lambda\rho}, \quad (\text{F.8})$$

Como dito anteriormente a não Hermiticidade do pseudo-potencial não afetou o resultado variacional. Usando (F.9) e levando em conta que a soma  $\sum_{\vec{k}} \left( \frac{\cosh 2\sigma_k - 1}{2} \right)$  não diverge vem

$$\begin{aligned} \frac{F}{V} &= \frac{\lambda\rho^2}{2} - \frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}} \left\{ [e(k) + \lambda\rho] - \sqrt{e(k)^2 + 2\lambda\rho e(k)} \right\} - \\ &- \frac{\lambda}{2V} \rho \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial}{\partial r} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}} \sinh 2\sigma_k}{2} \quad (\text{F.9}) \end{aligned}$$

onde o último termo da expressão acima corresponde a contribuição do pseudo-potencial que pode ser calculado, usando o fato que para  $k \rightarrow \infty$  implica em  $\sinh 2\sigma_k \rightarrow A/k^2$ , da seguinte maneira

$$\sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\vec{r}} dk d\Omega_k = \frac{V}{4\pi r}. \quad (\text{F.10})$$

sendo assim,

$$r \frac{\partial}{\partial r} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2} = -\frac{V}{4\pi} \frac{1}{r}. \quad (\text{F.11})$$

Com o limite  $r \rightarrow 0$  em (F.10) obtemos

$$\sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{V}{4\pi} \frac{1}{r} \quad (\text{F.12})$$

de onde vem,

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial}{\partial r} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2} = -\sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^2}. \quad (\text{F.13})$$

Usando esse resultado e calculando (F.10) vem

$$\frac{F}{V} = \frac{\lambda}{2} \rho^2 + \frac{8m^{3/2} \lambda^{5/2} \rho^{5/2}}{15\pi^2} - \frac{\lambda^2 m}{2V \hbar^2} \rho^2 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^2} + \frac{\lambda^2 m}{2V \hbar^2} \rho^2 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^2}, \quad (\text{F.14})$$

onde esse último termo, é o responsável pela regularização.

# Apêndice G

## Resultados utilizados no cálculo da evolução temporal

### G.1 Equação para $\dot{\Gamma}_{\vec{k}}$

Queremos calcular

$$i\dot{\Gamma}_{\vec{k}} = Tr \left( [a_{\vec{k}}, H - \mu N] \mathcal{F}_0 \right).$$

Fazendo primeiramente a mudança para  $b_{\vec{k},s}$ :

$$i\dot{\Gamma}_{\vec{k}} = Tr \left( [b_{\vec{k}}, H - \mu N] \mathcal{F}_0 \right)$$

já que  $[\Gamma_{\vec{k}}, H - \mu N] = 0$ . Dado que  $[b_{\vec{k}}, b_{\vec{k}'}] = 0$  vem

$$\begin{aligned} [b_{\vec{k}}, H - \mu N] &= \sum_{\vec{k}_1} (e(k_1) - \mu) [b_{\vec{k}}, \Gamma_{\vec{k}_1}^* + b_{\vec{k}_1}^\dagger] (\Gamma_{\vec{k}_1} + b_{\vec{k}_1}) + \\ &\frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} [b_{\vec{k}}, \Gamma_{|\vec{k}_1+\vec{q}|}^* + b_{\vec{k}_1+\vec{q}}^\dagger] \left( \Gamma_{|\vec{k}_2-\vec{q}|}^* + b_{\vec{k}_2-\vec{q}}^\dagger \right) (\Gamma_{\vec{k}_2} + b_{\vec{k}_2}) (\Gamma_{\vec{k}_1} + b_{\vec{k}_1}) + \\ &\frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \left( \Gamma_{|\vec{k}_1+\vec{q}|}^* + b_{\vec{k}_1+\vec{q}}^\dagger \right) [b_{\vec{k}}, \Gamma_{|\vec{k}_2-\vec{q}|}^* + b_{\vec{k}_2-\vec{q}}^\dagger] (\Gamma_{\vec{k}_2} + b_{\vec{k}_2}) (\Gamma_{\vec{k}_1} + b_{\vec{k}_1}). \end{aligned}$$

Se usarmos que  $[b_{\vec{k}}, b_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$  vem:



$$\begin{aligned}
[b_{\vec{k}}, H - \mu N] &= (e(k) - \mu)(\Gamma_k + b_{\vec{k}}) + \\
&\frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}_2, \vec{q}} \left( \Gamma_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* + b_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger \right) (\Gamma_{k_2} + b_{\vec{k}_2}) (\Gamma_{|\vec{k} - \vec{q}|} + b_{\vec{k} - \vec{q}}) + \\
&\frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{q}} \left( \Gamma_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* + b_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger \right) (\Gamma_{|\vec{k} + \vec{q}|} + b_{\vec{k} + \vec{q}}) (\Gamma_{k_1} + b_{\vec{k}_1}).
\end{aligned}$$

Como os termos com número ímpar de  $b$ 's não contribuem para o traço e ao rerotular-se as somas vem

$$\begin{aligned}
[b_{\vec{k}}, H - \mu N]^t &= (e(k) - \mu)\Gamma_k + \frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{q}, \vec{k}_2} \Gamma_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* \Gamma_{|\vec{k} + \vec{q}|} \Gamma_{k_2} + \\
&+ \frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{q}} \left\{ \Gamma_{k_1} b_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger b_{\vec{k} + \vec{q}} + \Gamma_{|\vec{k} + \vec{q}|} b_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger b_{\vec{k}_1} + \Gamma_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* b_{\vec{k} + \vec{q}} b_{\vec{k}_1} \right\}.
\end{aligned}$$

Transformando agora  $b_{\vec{k}}$ 's em  $\eta_{\vec{k}}$ 's termo a termo

$$\begin{aligned}
1) b_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger b_{\vec{k} + \vec{q}} &= \left( x_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* \eta_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger - y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \right) \left( x_{|\vec{k} + \vec{q}|} \eta_{\vec{k} + \vec{q}} - y_{|\vec{k} + \vec{q}|}^* \eta_{-\vec{k} - \vec{q}}^\dagger \right) \\
&= x_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* x_{|\vec{k} + \vec{q}|} \eta_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger \eta_{\vec{k} + \vec{q}} - x_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* y_{|\vec{k} + \vec{q}|} \eta_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger \eta_{-\vec{k} - \vec{q}}^\dagger - \\
&y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} x_{|\vec{k} + \vec{q}|} \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{\vec{k} + \vec{q}} + y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} y_{|\vec{k} + \vec{q}|}^* \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k} - \vec{q}}^\dagger
\end{aligned}$$

Calculando o traço obtemos

$$x_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* x_{|\vec{k} + \vec{q}|} \nu_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}} + y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} y_{|\vec{k} + \vec{q}|}^* (1 + \nu_{|\vec{k} + \vec{q}|}) \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}}.$$

$$2) b_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger b_{\vec{k}_1} = \left( x_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* \eta_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger - y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \right) \left( x_{k_1} \eta_{\vec{k}_1} - y_{k_1}^* \eta_{-\vec{k}_1}^\dagger \right)$$

$$\begin{aligned}
&= x_{|\bar{k}_1+\bar{q}|}^* x_{k_1} \eta_{\bar{k}_1+\bar{q}}^\dagger \eta_{\bar{k}_1} - x_{|\bar{k}_1+\bar{q}|}^* y_{k_1} \eta_{\bar{k}_1+\bar{q}}^\dagger \eta_{-\bar{k}_1} - \\
&y_{|\bar{k}_1+\bar{q}|} x_{k_1} \eta_{-\bar{k}_1-\bar{q}} \eta_{\bar{k}_1} + y_{|\bar{k}_1+\bar{q}|} y_{k_1} \eta_{-\bar{k}_1-\bar{q}} \eta_{-\bar{k}_1}^\dagger.
\end{aligned}$$

Calculando o traço obtemos

$$x_{|\bar{k}_1+\bar{q}|}^* x_{k_1} \nu_{|\bar{k}_1+\bar{q}|} \delta_{\bar{q},0} + y_{|\bar{k}_1+\bar{q}|} y_{k_1}^* (1 + \nu_{k_1}) \delta_{\bar{q},0}$$

$$\begin{aligned}
3) b_{\bar{k}+\bar{q}} b_{\bar{k}_1} &= \left( x_{|\bar{k}+\bar{q}|} \eta_{\bar{k}+\bar{q}} - y_{|\bar{k}+\bar{q}|}^* \eta_{-\bar{k}-\bar{q}}^\dagger \right) \left( x_{k_1} \eta_{\bar{k}_1} - y_{k_1}^* \eta_{-\bar{k}_1}^\dagger \right) \\
&= x_{|\bar{k}+\bar{q}|} x_{k_1} \eta_{\bar{k}+\bar{q}} \eta_{\bar{k}_1} - x_{|\bar{k}+\bar{q}|} y_{k_1}^* \eta_{\bar{k}+\bar{q}} \eta_{-\bar{k}_1}^\dagger - \\
&y_{|\bar{k}+\bar{q}|}^* x_{k_1} \eta_{-\bar{k}-\bar{q}}^\dagger \eta_{\bar{k}_1} + y_{|\bar{k}+\bar{q}|}^* y_{k_1}^* \eta_{-\bar{k}-\bar{q}}^\dagger \eta_{-\bar{k}_1}^\dagger.
\end{aligned}$$

Calculando o traço obtemos

$$-y_{|\bar{k}+\bar{q}|}^* x_{k_1} \nu_{|\bar{k}+\bar{q}|} \delta_{-\bar{k}-\bar{q},\bar{k}_1} - y_{k_1}^* x_{|\bar{k}+\bar{q}|} (1 + \nu_{k_1}) \delta_{-\bar{k}-\bar{q},\bar{k}_1}.$$

Substituindo todos esses resultados temos

$$\begin{aligned}
i\dot{\Gamma}_k &= (e(k) - \mu) \Gamma_k + \frac{2\lambda \Gamma_k}{V} \sum_{\bar{k}'} \left( |x_{k'}|^2 \nu_{k'} + (1 + \nu_{k'}) |y_{k'}|^2 \right) - \\
&-\frac{\lambda \Gamma_k^*}{V} \sum_{k'} x_{k'} y_{k'}^* (1 + 2\nu_{k'}) + \frac{\lambda}{V} \sum_{\bar{k}', \bar{k}''} \Gamma_{|\bar{k}'+\bar{k}''|}^* \Gamma_{|\bar{k}+\bar{k}'|} \Gamma_{k''}
\end{aligned}$$

## G.2 Equação para $\dot{x}_k$ e $\dot{y}_k$

Iniciamos com:

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \left\{ \left[ i \frac{d}{dt} \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} \right] \mathcal{F}_0 \right\} = \\
& = \text{Tr} \left\{ \left[ i \frac{d}{dt} \left( x_k^* x_k b_{\vec{k}} b_{-\vec{k}} + x_k^* y_k b_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^\dagger + y_k^* x_k b_{-\vec{k}}^\dagger b_{-\vec{k}} + y_k^* y_k b_{-\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}} \right) \right] \mathcal{F}_0 \right\} \\
& = i \text{Tr} \left\{ \left[ 2 \dot{x}_k^* x_k b_{\vec{k}} b_{-\vec{k}} + (\dot{x}_k^* y_k^* + x_k^* \dot{y}_k^*) (b_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^\dagger + b_{-\vec{k}}^\dagger b_{-\vec{k}}) + 2 \dot{y}_k^* y_k b_{-\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}}^\dagger \right] \mathcal{F}_0 \right\}.
\end{aligned}$$

Escrevendo em termos dos  $\eta_{\vec{k}}$ 's, a parte dos  $b$ 's que contribui para traço é:

$$\begin{aligned}
1) & \left( b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}} \right)^\dagger = |x_k|^2 \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{\vec{k}} + |y_k|^2 \eta_{-\vec{k}} \eta_{-\vec{k}}^\dagger \\
2) & \left( b_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^\dagger \right)^\dagger = |x_k|^2 \eta_{\vec{k}} \eta_{\vec{k}}^\dagger + |y_k|^2 \eta_{-\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}} \\
3) & \left( b_{-\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}}^\dagger \right)^\dagger = -x_k^* y_k \left( \eta_{-\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}} + \eta_{\vec{k}} \eta_{\vec{k}}^\dagger \right) \\
4) & \left( b_{\vec{k}} b_{-\vec{k}} \right)^\dagger = -x_k y_k^* \left( \eta_{-\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}} + \eta_{\vec{k}} \eta_{\vec{k}}^\dagger \right).
\end{aligned}$$

Calculando o traço obtemos

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \left[ \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} i \frac{d}{dt} \mathcal{F}_0 \right] = \\
& = i \left( -\dot{y}_k^* x_k^* |y_k|^2 - \dot{x}_k^* y_k^* |x_k|^2 + \dot{y}_k^* x_k^* |x_k|^2 + \dot{x}_k^* y_k^* |y_k|^2 \right) (1 + 2\nu_k).
\end{aligned}$$

Usando  $|x_k|^2 - |y_k|^2 = 1$ , temos finalmente

$$\text{Tr} \left( \left[ \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}}, H - \mu N \right] \mathcal{F}_0 \right) = i (1 + 2\nu_k) (\dot{x}_k^* y_k^* - \dot{y}_k^* x_k^*).$$

Como

$$Tr \left( \left[ \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}}, H - \mu N \right] \mathcal{F}_0 \right)^\dagger = -Tr \left( \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, H - \mu N \right] \mathcal{F}_0 \right)$$

vem

$$Tr \left( \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, H - \mu N \right] \mathcal{F}_0 \right) = i(1 + 2\nu_k) (\dot{x}_{\vec{k}} y_k - \dot{y}_k x_k).$$

Achar as equações de evolução temporal de  $x_{\vec{k}}$  e  $y_{\vec{k}}$ , resume-se ao cálculo do seguinte traço  $Tr \left( \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, H - \mu N \right] \mathcal{F}_0 \right)$ , dividindo  $H - \mu N$  em  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  como anteriormente. Iniciamos por

$$\begin{aligned} & Tr \left\{ \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \Omega_1 \right] \right\} \tag{G.1} \\ & = Tr \left\{ \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \sum_{\vec{k}'} (e(k') - \mu) \left( |\Gamma_{\vec{k}'}|^2 - \Gamma_{\vec{k}'}^* x_{k'} \eta_{\vec{k}'} - \Gamma_{\vec{k}'}^* y_{k'} \eta_{-\vec{k}'}^\dagger + \Gamma_{\vec{k}'} x_{k'} \eta_{\vec{k}'}^\dagger + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + |x_{k'}|^2 \eta_{\vec{k}'}^\dagger \eta_{\vec{k}'} + |y_{k'}|^2 \eta_{-\vec{k}'} \eta_{-\vec{k}'}^\dagger - \Gamma_{\vec{k}'} y_{k'} \eta_{-\vec{k}'} - x_{k'}^* y_{k'}^* \eta_{\vec{k}'}^\dagger \eta_{-\vec{k}'}^\dagger - x_{k'} y_{k'} \eta_{-\vec{k}'} \eta_{\vec{k}'} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Ao calcularmos os comutadores obtemos:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}'} \right] = \eta_{\vec{k}}^\dagger \left[ \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}'} \right] + \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}'} \right] \eta_{-\vec{k}}^\dagger = -\eta_{\vec{k}}^\dagger \delta_{-\vec{k}, \vec{k}'} - \eta_{-\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \\
2) \quad & \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}'} \right] = \eta_{\vec{k}}^\dagger \left[ \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}'} \right] + \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}'} \right] \eta_{-\vec{k}}^\dagger = -\eta_{\vec{k}}^\dagger \delta_{-\vec{k}, -\vec{k}'} - \eta_{-\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \\
3) \quad & \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}'}^\dagger \right] = 0 \\
4) \quad & \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}'}^\dagger \right] = 0 \\
5) \quad & \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}'}^\dagger \eta_{\vec{k}'} \right] = \eta_{\vec{k}}^\dagger \left[ \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}'}^\dagger \right] \eta_{\vec{k}'} + \eta_{\vec{k}'}^\dagger \eta_{\vec{k}}^\dagger \left[ \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}'} \right] + \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}'}^\dagger \right] \eta_{-\vec{k}}^\dagger \eta_{\vec{k}'} \\
& + \eta_{\vec{k}'}^\dagger \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}'} \right] \eta_{-\vec{k}}^\dagger = -\eta_{\vec{k}'}^\dagger \eta_{\vec{k}}^\dagger \delta_{-\vec{k}, \vec{k}'} - \eta_{\vec{k}'}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \\
6) \quad & \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}'}^\dagger \eta_{\vec{k}'} \right] = \eta_{\vec{k}}^\dagger \left[ \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}'}^\dagger \right] \eta_{\vec{k}'} + \eta_{-\vec{k}'}^\dagger \eta_{\vec{k}}^\dagger \left[ \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}'} \right] + \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}'}^\dagger \right] \eta_{-\vec{k}}^\dagger \eta_{\vec{k}'} \\
& + \eta_{-\vec{k}'}^\dagger \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}'} \right] \eta_{-\vec{k}}^\dagger = -\eta_{-\vec{k}'}^\dagger \eta_{\vec{k}}^\dagger \delta_{-\vec{k}, \vec{k}'} - \eta_{-\vec{k}'}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} - \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{\vec{k}'}^\dagger \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} - \eta_{-\vec{k}}^\dagger \eta_{\vec{k}'}^\dagger \delta_{-\vec{k}, \vec{k}'} \\
7) \quad & \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}'}^\dagger \eta_{-\vec{k}'} \right] = \eta_{\vec{k}}^\dagger \left[ \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}'}^\dagger \right] \eta_{-\vec{k}'} + \eta_{-\vec{k}'}^\dagger \eta_{\vec{k}}^\dagger \left[ \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}'} \right] \\
& + \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}'}^\dagger \right] \eta_{-\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}'} + \eta_{-\vec{k}'}^\dagger \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}'} \right] \eta_{-\vec{k}}^\dagger = -\eta_{-\vec{k}'}^\dagger \eta_{\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} - \eta_{-\vec{k}'}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \\
8) \quad & \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}'}^\dagger \eta_{-\vec{k}'}^\dagger \right] = 0.
\end{aligned}$$

Calculando os traços

$$Tr \left\{ \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \Omega_1 \right] \right\} = 2x_k y_k (e(k) - \mu)(1 + 2\nu_k)$$

No cálculo com  $\Omega_2$  vemos que os únicos termos que contribuem para um traço não nulo são os do tipo  $\eta\eta$  e permutações de  $\eta^\dagger\eta\eta\eta$ , definindo

$$\Omega_2^{\eta\eta} = \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \left\{ \Gamma_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* \Gamma_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* x_{k_2} x_{k_1} \eta_{\vec{k}_2} \eta_{\vec{k}_1} + \Gamma_{k_2} \Gamma_{k_1} y_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|} y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \right. \\ \left. - \Gamma_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* \Gamma_{k_2} y_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|} x_{k_1} \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \eta_{\vec{k}_1} - \Gamma_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* \Gamma_{k_1} y_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|} x_{k_2} \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \eta_{\vec{k}_2} \right. \\ \left. - \Gamma_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* \Gamma_{k_2} y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} x_{k_1} \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{\vec{k}_1} - \Gamma_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* \Gamma_{k_1} y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} x_{k_2} \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{\vec{k}_2} \right\}$$

e

$$\Omega_2^{\eta\eta\eta\eta} = \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \left\{ -y_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|} x_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* x_{k_1} x_{k_2} \eta_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \eta_{\vec{k}_2} \eta_{\vec{k}_1} \right. \\ \left. - y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} x_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* x_{k_1} x_{k_2} \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger \eta_{\vec{k}_2} \eta_{\vec{k}_1} \right. \\ \left. - y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} y_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|} y_{\vec{k}_1}^* x_{k_2} \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \eta_{\vec{k}_2} \eta_{-\vec{k}_1}^\dagger \right. \\ \left. - y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} y_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|} y_{\vec{k}_2}^* x_{k_1} \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2}^\dagger \eta_{\vec{k}_1} \right\}.$$

Calculando inicialmente a parte de  $\Omega^{\eta\eta}$ , vemos que todos comutadores que aparecem podem ser calculados da mesma forma que  $[\eta^\dagger \eta^\dagger, \eta\eta]$ , calculado anteriormente. Obtemos então:

$$Tr \left\{ \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \Omega_2^{\eta\eta} \right] \right\} = \frac{\lambda}{2V} (1 + 2\nu_k) \sum_{\vec{k}'} \left\{ 4 |\Gamma_{k'}|^2 x_k y_k \right. \\ \left. - (\Gamma_{|\vec{k} + \vec{k}'|}^* x_k - \Gamma_{|\vec{k} + \vec{k}'|} y_k)^2 - (\Gamma_{|\vec{k} - \vec{k}'|}^* x_k - \Gamma_{|\vec{k} - \vec{k}'|} y_k)^2 \right\}.$$

Vamos agora calcular a contribuição do primeiro termo de  $\Omega^{\eta\eta\eta\eta}$ , iniciando pelo comutador

$$\left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \left( -y_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|} x_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* x_{k_1} x_{k_2} \eta_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \eta_{\vec{k}_2} \eta_{\vec{k}_1} \right) \right]$$

Se usarmos que

$$\begin{aligned} \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \eta_{\vec{k}_2} \eta_{\vec{k}_1} \right] &= \eta_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}_2} \eta_{\vec{k}_1} \right] \\ &+ \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \right] \eta_{\vec{k}_2} \eta_{\vec{k}_1}, \end{aligned}$$

$$\left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}_2} \eta_{\vec{k}_1} \right] = - \left( \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{\vec{k}_1} \delta_{-\vec{k}, \vec{k}_2} + \eta_{\vec{k}_2} \eta_{\vec{k}}^\dagger \delta_{-\vec{k}, \vec{k}_1} + \eta_{-\vec{k}}^\dagger \eta_{\vec{k}_1} \delta_{\vec{k}, \vec{k}_2} + \eta_{\vec{k}_2} \eta_{-\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}, \vec{k}_1} \right)$$

e

$$\left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \right] = - \left( \eta_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger \eta_{\vec{k}}^\dagger \delta_{-\vec{k}, -\vec{k}_2 + \vec{q}} + \eta_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}, -\vec{k}_2 + \vec{q}} \right)$$

com o cálculo do traço obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \left( -y_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|} x_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|}^* x_{k_1} x_{k_2} \eta_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \eta_{\vec{k}_2} \eta_{\vec{k}_1} \right) \right] \right\} &= \\ \frac{\lambda}{V} (1 + 2\nu_k) \left\{ 2y_k x_k \sum_{\vec{k}'} |x_{k'}|^2 \nu_{k'} + x_k^2 \sum_{\vec{k}'} y_{k'} x_{k'}^* \nu_{k'} \right\}. \end{aligned}$$

Procedendo da mesma forma para o segundo termo

$$\left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \left( -y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} x_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* x_{k_1} x_{k_2} \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}}^\dagger \eta_{\vec{k}_2 - \vec{q}} \eta_{\vec{k}_2} \eta_{\vec{k}_1} \right) \right]$$

se utilizarmos que

$$\begin{aligned} [\eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger \eta_{\vec{k}_2} \eta_{\vec{k}_1}^\dagger] &= \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger [\eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}_2} \eta_{\vec{k}_1}^\dagger] \\ &+ [\eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger] \eta_{\vec{k}_2} \eta_{\vec{k}_1}^\dagger \end{aligned}$$

com

$$[\eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger] = -\eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger \delta_{\vec{k}, \vec{k}_1 + \vec{q}} - \eta_{-\vec{k}}^\dagger \eta_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger \delta_{\vec{k}, -\vec{k}_1 - \vec{q}}$$

com o cálculo do traço obtemos:

$$\begin{aligned} Tr \left\{ \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \left( -y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} x_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|}^* x_{k_1} x_{k_2} \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger \eta_{\vec{k}_2} \eta_{\vec{k}_1}^\dagger \right) \right] \right\} = \\ \frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}'} \left\{ 2x_k y_k |x_{k'}|^2 (1 + 2\nu_k) \nu_{\vec{k}'} + (1 + 2\nu_k + \nu_{\vec{k}'} + 2\nu_{\vec{k}'} \nu_k) x_k^2 y_{k'} x_{k'}^* \right\}. \end{aligned}$$

O comutador do terceiro termo fica:

$$\left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \left( -y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} y_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|} x_{k_1}^* x_{k_2} \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \eta_{\vec{k}_2}^\dagger \eta_{-\vec{k}_1} \right) \right]$$

dado que

$$\begin{aligned} [\eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \eta_{\vec{k}_2}^\dagger \eta_{-\vec{k}_1}] &= \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} [\eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}_2}^\dagger \eta_{-\vec{k}_1}] \\ &+ [\eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}}] \eta_{\vec{k}_2}^\dagger \eta_{-\vec{k}_1}^\dagger, \end{aligned}$$

$$[\eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{\vec{k}_2}^\dagger \eta_{-\vec{k}_1}] = - \left( \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}_1}^\dagger \delta_{-\vec{k}, \vec{k}_2} + \eta_{-\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}_1}^\dagger \delta_{\vec{k}, \vec{k}_2} \right)$$



e

$$\begin{aligned} \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \right] &= - \left( \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{\vec{k}}^\dagger \delta_{-\vec{k}, -\vec{k}_2 + \vec{q}} + \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}, -\vec{k}_2 + \vec{q}} \right. \\ &\quad \left. + \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \delta_{-\vec{k}, -\vec{k}_1 - \vec{q}} + \eta_{-\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \delta_{\vec{k}, -\vec{k}_1 - \vec{q}} \right) \end{aligned}$$

com o cálculo do traço obtemos:

$$\begin{aligned} Tr \left\{ \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \left( -y_{\vec{k}_1 + \vec{q}} y_{\vec{k}_2 - \vec{q}} y_{\vec{k}_1}^* x_{k_2} \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \eta_{\vec{k}_2}^\dagger \eta_{-\vec{k}_1}^\dagger \right) \right] \right\} = \\ \frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}} \left\{ 2x_k y_k |y_{k'}|^2 (1 + 2\nu_k + \nu_{\vec{k}'} + 2\nu_k \nu_{\vec{k}'}) + (1 + 2\nu_k + \nu_{\vec{k}'} + 2\nu_{\vec{k}'} \nu_k) y_k^2 y_{k'}^* x_{k'} \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente para o quarto termo:

$$\left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \left( -y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} y_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|} y_{\vec{k}_2}^* x_{k_1} \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2}^\dagger \eta_{\vec{k}_1}^\dagger \right) \right]$$

usando

$$\begin{aligned} \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2}^\dagger \eta_{\vec{k}_1}^\dagger \right] &= \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}_2}^\dagger \eta_{\vec{k}_1}^\dagger \right] \\ &\quad + \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \right] \eta_{-\vec{k}_2}^\dagger \eta_{\vec{k}_1}^\dagger \end{aligned}$$

com

$$\left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \eta_{-\vec{k}_2}^\dagger \eta_{\vec{k}_1}^\dagger \right] = - \left( \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}_2}^\dagger \delta_{-\vec{k}, \vec{k}_1} + \eta_{-\vec{k}_2}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}, \vec{k}_1} \right)$$

com o cálculo do traço obtemos

$$Tr \left\{ \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \left( y_{|\vec{k}_1 + \vec{q}|} y_{|\vec{k}_2 - \vec{q}|} y_{\vec{k}_2}^* x_{k_1} \eta_{-\vec{k}_1 - \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2 + \vec{q}} \eta_{-\vec{k}_2}^\dagger \eta_{\vec{k}_1} \right) \right] \right\} =$$

$$\frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}'} \left\{ y_{\vec{k}}^2 y_{\vec{k}'}^* x_{k'} \nu_{\vec{k}'} (1 + 2\nu_k) + +2 (1 + 2\nu_k + \nu_{\vec{k}'} + 2\nu_k \nu_{\vec{k}'}) 2y_k x_k |y_{k'}|^2 \right\}.$$

Com um pouco de álgebra juntamos todas contribuições em

$$Tr \left( \left[ \eta_{\vec{k}}^\dagger \eta_{-\vec{k}}^\dagger, H - \mu N \right] \mathcal{F}_0 \right) = \frac{\lambda}{V} (1 + 2\nu_k) 4x_k y_k \sum_{\vec{k}'} \left[ |x_{k'}|^2 \nu_{\vec{k}'} + |y_{k'}|^2 (1 + 2\nu_{\vec{k}'}) \right]$$

$$+ \frac{\lambda}{V} y_k^2 (1 + 2\nu_k) \sum_{\vec{k}'} y_{\vec{k}'}^* x_{k'} (1 + 2\nu_{\vec{k}'}) + \frac{\lambda}{V} x_k^2 (1 + 2\nu_k) \sum_{\vec{k}'} y_{k'} x_{\vec{k}'}^* (1 + 2\nu_{\vec{k}'})$$

$$+ 2x_k y_k (e(k) - \mu) (1 + 2\nu_k) + \frac{\lambda}{2V} (1 + 2\nu_k) \sum_{\vec{k}'} \left\{ 4 |\Gamma_{k'}|^2 x_k y_k \right.$$

$$\left. - (\Gamma_{|\vec{k} + \vec{k}'|}^* x_k - \Gamma_{|\vec{k} + \vec{k}'|} y_k)^2 - (\Gamma_{|\vec{k} - \vec{k}'|}^* x_k - \Gamma_{|\vec{k} - \vec{k}'|} y_k)^2 \right\}.$$

Dado que

$$\sum_{\vec{k}'} \left\{ \nu_k |x_{k'}|^2 + (1 + \nu_{k'}) |y_{k'}|^2 + |\Gamma_{k'}|^2 \right\} = N$$

e chamando:

$$Z = \frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}'} x_{k'} y_{\vec{k}'}^* (1 + 2\nu_{k'})$$

as equações ficam:

$$i\dot{\Gamma}_k = \left[ e(k) - \mu + 2\frac{\lambda N}{V} \right] \Gamma_k - \frac{2\lambda}{V} \Gamma_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} |\Gamma_{\vec{k}'}|^2 + \frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}', \vec{k}''} \Gamma_{\vec{k}' + \vec{k}''}^* \Gamma_{|\vec{k} + \vec{k}'|} \Gamma_{k''} - \Gamma_k^* Z$$

$$\begin{aligned}
i(\dot{x}_{\vec{k}}y_k - \dot{y}_{\vec{k}}x_k) &= 2x_ky_k \left[ e(k) - \mu + \frac{2\lambda N}{V} \right] - \frac{\lambda}{2V} x_k^2 \sum_{\vec{k}'} \{ \Gamma_{\vec{k}+\vec{k}'}^{*2} + \Gamma_{\vec{k}-\vec{k}'}^{*2} \} \\
&\quad - \frac{\lambda}{2V} y_k^2 \sum_{\vec{k}'} \{ \Gamma_{|\vec{k}+\vec{k}'|}^2 + \Gamma_{|\vec{k}-\vec{k}'|}^2 \} + \frac{\lambda}{V} x_ky_k \{ | \Gamma_{|\vec{k}+\vec{k}'|} |^2 + | \Gamma_{|\vec{k}-\vec{k}'|} |^2 \\
&\quad - 2 | \Gamma_{k'} |^2 \} + y_k^2 Z + x_k^2 Z^*
\end{aligned}$$

### G.3 Simplificação da equação (5.17) na linearização

Como os termos quadráticos em  $\Gamma_k$  para,  $\vec{k} \neq 0$ , não contribuem na linearização, vejamos a contribuição de cada termo da equação (5.17) para  $\vec{k} \neq 0$

1)  $\frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}', \vec{k}''} \Gamma_{|\vec{k}'+\vec{k}''|}^* \Gamma_{|\vec{k}'+\vec{k}|} \Gamma_{k''}$  contribui nos casos:

- a)  $\vec{k}' = -\vec{k}$  e  $\vec{k}'' = \vec{k}$
- b)  $\vec{k}' = -\vec{k}$  e  $\vec{k}'' = 0$
- c)  $\vec{k}' = \vec{k}'' = 0$ .

A contribuição de a e b fica

$$\frac{2\lambda}{V} |\Gamma_0|^2 \Gamma_k, \quad (\text{G.2})$$

enquanto c fornece

$$\frac{2\lambda}{V} \Gamma_0^2 \Gamma_k^*, \quad (\text{G.3})$$

2)  $-\frac{2\lambda}{V} \Gamma_k \sum_{\vec{k}'} |\Gamma_{k'}|^2$  a única contribuição ocorre se  $\vec{k}' = 0$  dando

$$-\frac{2\lambda}{V}\Gamma_k|\Gamma_0|^2 \tag{G.4}$$

somando todas contribuições obtemos o termo  $\frac{\lambda}{V}\Gamma_k^*\Gamma_0^2$  em (5.42), já para  $k = 0$  esses termos contribuem com  $-\frac{\lambda}{V}\Gamma_0|\Gamma_0|^2$  em (5.43).

# Apêndice H

## Solução geral condensada de equilíbrio - equivalências estática e dinâmica (RPA)

### H.1 Equivalência estática

A soluções de equilíbrio da fase condensada, obtida através das equações dinâmicas (5.25), são :

$$\begin{aligned}\tan 2\varphi^{(0)} &= -\frac{Z_i^{(0)}}{Z_r^{(0)}} \\ \mu &= 2\lambda\rho - \lambda\iota^{(0)} - \sqrt{\Sigma^{(0)}} \\ \beta_k^{(0)} &= \frac{(1 + 2\nu_k)^{1/2} \left\{ 2\lambda\rho^{(0)} + e(k) - \mu - Z_r^{(0)} \left[ 1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} \right] \right\}^{1/2}}{\sqrt{2} \left\{ [e(k) - \mu + 2\lambda\rho^{(0)}]^2 - \Sigma^{(0)} \left[ 1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} \right]^2 \right\}^{1/4}} \\ \epsilon_k^{(0)} &= \frac{(1 + 2\nu_k)^{1/2} Z_i^{(0)} \left[ 1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} \right]}{\sqrt{2} \left\{ [e(k) - \mu + 2\lambda\rho^{(0)}]^2 - \Sigma^{(0)} \left[ 1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} \right]^2 \right\}^{1/4} \sqrt{e(k) - \mu + 2\lambda\rho^{(0)} - Z_r^{(0)} \left[ 1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} \right]}}\end{aligned}\tag{H.1}$$

onde  $Z_r^{(0)}, Z_i^{(0)}$  e  $\iota^{(0)}$  são solução de:

$$\begin{aligned}
Z_r^{(0)} &= \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}'} \frac{(1 + 2\nu_{k'}) Z_r^{(0)} \left[ \frac{\lambda \iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} - 1 \right]}{\left\{ (e(k') - \mu + 2\lambda\rho^{(0)})^2 - \Sigma^{(0)} \left( 1 - \frac{\lambda \iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} \right)^2 \right\}^{1/2}} \\
Z_i^{(0)} &= \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}'} \frac{(1 + 2\nu_{k'}) Z_i^{(0)} \left[ \frac{\lambda \iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} - 1 \right]}{\left\{ (e(k') - \mu + 2\lambda\rho^{(0)})^2 - \Sigma^{(0)} \left( 1 - \frac{\lambda \iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} \right)^2 \right\}^{1/2}} \\
\rho^{(0)} &= \iota^{(0)} + \frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}'} \left\{ \frac{(1 + 2\nu_{k'}) (e(k') - \mu + 2\lambda\rho^{(0)})}{\left\{ (e(k') - \mu + 2\lambda\rho^{(0)})^2 - \Sigma^{(0)} \left( 1 - \frac{\lambda \iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} \right)^2 \right\}^{1/2}} - 1 \right\} \\
\nu_k &= \frac{1}{e^{\frac{1}{kT}} \left\{ (e(k) - \mu + 2\lambda\rho^{(0)})^2 - \Sigma^{(0)} \left( 1 - \frac{\lambda \iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} \right)^2 \right\}^{1/2} - 1}.
\end{aligned}$$

Tendo definido

$$\Sigma^{(0)} = Z_r^{(0)2} + Z_i^{(0)2}, \quad (\text{H.2})$$

podemos identificar a solução do cálculo variacional estático que é  $Z_i^{(0)} = 0$ ,  $\varphi^{(0)} = \frac{\pi}{2}$ ;  $Z_r^{(0)}$  e  $\iota^{(0)}$  são solução de :

$$\begin{aligned}
Z_r^{(0)} &= \frac{\lambda}{2V} \sum_{\vec{k}'} \frac{(1 + 2\nu_{k'}) (\lambda \iota^{(0)} - Z_r^{(0)})}{\sqrt{(e(k') - \mu + 2\lambda\rho^{(0)})^2 - (Z_r^{(0)} - \lambda \iota^{(0)})^2}} \\
\rho^{(0)} &= \iota^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}'} \left\{ \frac{(1 + 2\nu_{k'}) (e(k') - \mu + 2\lambda\rho^{(0)})}{\sqrt{(e(k') - \mu + 2\lambda\rho^{(0)})^2 - (Z_r^{(0)} - \lambda \iota^{(0)})^2}} - 1 \right\} \\
\nu_k &= \frac{1}{e^{\frac{1}{kT}} \sqrt{(e(k) - \mu + 2\lambda\rho^{(0)})^2 - (Z_r^{(0)} - \lambda \iota^{(0)})^2} - 1}.
\end{aligned}$$

Se observarmos a estrutura das equações gerais vemos que podemos expressar

as demais soluções em função dessa. Representando as demais soluções de equilíbrio por  $Z_r, Z_i, \varphi$  temos:

$$Z_i = \frac{Z_r^a}{\sqrt{1+n^2}}$$

$$Z_r = \frac{nZ_r^a}{\sqrt{1+n^2}}$$

$$\iota = \iota^a$$

$$\tan 2\varphi = -\frac{1}{n}$$

onde a letra  $a$  representa a solução anterior e  $n$  é um número real qualquer. É imediato verificarmos que

$$Z_i^2 + Z_r^2 = Z_i^{a^2} + Z_r^{a^2} \quad (\text{H.3})$$

ou seja  $\Sigma^{(0)}$  não depende da solução e portanto também os valores de  $\mu, \iota$  e  $\nu_k$  não dependem da particular solução escolhida. Vamos agora mostrar que estas soluções correspondem a fases em  $x_k$  e  $y_k$ . Podemos escrever

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{2(1+2\nu_k)}} \left[ \frac{1+2\nu_k}{2\beta_k} + \beta_k + i\epsilon_k \right] \quad (\text{H.4})$$

se substituirmos a solução geral de equilíbrio (H.1) obtemos

$$|x_k|^2 = \frac{e(k) - \mu + 2\lambda\rho + \sqrt{(e(k) - \mu + 2\lambda\rho)^2 - \Sigma^{(0)} \left(1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}\right)^2}}{2\sqrt{(e(k) - \mu + 2\lambda\rho)^2 - \Sigma^{(0)} \left(1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}\right)^2}}. \quad (\text{H.5})$$

Da mesma forma usando que  $|x_k|^2 - |y_k|^2 = 1$  temos

$$|y_k|^2 = \frac{e(k) - \mu + 2\lambda\rho - \sqrt{(e(k) - \mu + 2\lambda\rho)^2 - \Sigma^{(0)} \left(1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}\right)^2}}{2\sqrt{(e(k) - \mu + 2\lambda\rho)^2 - \Sigma^{(0)} \left(1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}\right)^2}}. \quad (\text{H.6})$$

Temos portanto que os módulos de  $x_k$  e  $y_k$  não dependem da solução escolhida. Se escrevermos

$$x_k = |x_k|e^{i\theta_k}$$

$$y_k = |y_k|e^{i\psi_k}$$

obtemos para as fases

$$\tan \theta_k = \frac{Z_i \left[1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}\right]}{\sqrt{(e(k) - \mu + 2\lambda\rho)^2 - \Sigma^{(0)} \left(1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}\right)^2} + e(k) - \mu + 2\lambda\rho + Z_r \left(1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}\right)}$$

$$\tan \psi_k = \frac{Z_i \left[1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}\right]}{\sqrt{(e(k) - \mu + 2\lambda\rho)^2 - \Sigma^{(0)} \left(1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}\right)^2} - e(k) + \mu - 2\lambda\rho - Z_r \left(1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}\right)}$$

Vemos então, que as fases dependem da solução escolhida e em particular para  $Z_i = 0$  temos  $\theta_k = \psi_k = 0$  o que implica em  $x_k$  e  $y_k$  reais.

Finalmente, podemos reescrever o grande potencial  $\Omega$  dado em (C.5), utilizando os resultados (H1), da seguinte maneira

$$\Omega = \sum_{\vec{k}} [e(k) - \mu + 2\lambda\iota] \left[ |x_k|^2 \nu_k + (1 + \nu_k) |y_k|^2 \right] + \frac{V}{2\lambda} \Sigma^{(0)}$$

$$+ \frac{\lambda}{V} \left\{ \sum_{\vec{k}} \left[ |x_k|^2 \nu_k + (1 + \nu_k) |y_k|^2 \right] \right\}^2 - \mu\iota V - \iota V \sqrt{\Sigma^{(0)}}$$



$$-KT \sum_{\vec{k}} [(1 + \nu_k) \ln(1 + \nu_k) - \nu_k \ln \nu_k].$$

Utilizando o fato que  $|x_k|$ ,  $|y_k|$ ,  $\Sigma^{(0)}$ ,  $\iota$  e  $\nu_k$  não dependem de uma solução particular vemos que  $\Omega$  também não muda. Concluimos então que todas soluções de equilíbrio são equivalentes.

## H.2 Equivalência dinâmica

Procedemos da mesma forma que na seção (5.3.2) só que agora com a solução geral de equilíbrio (H1). Iniciamos pela equação (5.45) que corresponde a parte desacoplada das demais ( $k \neq 0$ ), como agora em geral,  $Z_i^{(eq)} \neq 0$  e  $p_o^{(eq)} \neq 0$  temos

$$\begin{aligned} \delta \dot{q}_k &= \left[ e(k) - \mu + 2\lambda\rho - \frac{\lambda}{V} \left( \frac{q_0^2 - p_0^2}{2} \right) + Z_r^{(0)} \right] \delta p_k + \left[ \frac{\lambda}{V} p_0 q_0 - Z_i^{(0)} \right] \delta q_k \\ \delta \dot{p}_k &= - \left[ e(k) - \mu + 2\lambda\rho + \frac{\lambda}{V} \left( \frac{q_0^2 - p_0^2}{2} \right) - Z_r^{(0)} \right] \delta q_k - \left[ \frac{\lambda}{V} p_0 q_0 - Z_i^{(0)} \right] \delta p_k \end{aligned}$$

que fornece a frequência

$$\omega = \pm \sqrt{[e(k) - \mu + 2\lambda\rho]^2 - \left[ \frac{\lambda}{V} p_0 q_0 - Z_i^{(0)} \right]^2 - \left[ Z_r^{(0)} - \frac{\lambda}{V} \frac{(q_0^2 - p_0^2)}{2} \right]^2}. \quad (\text{H.7})$$

Mudando para a parametrização (5.24) e utilizando alguns resultados de (H.1) obtemos

$$w = \pm \sqrt{(e(k) - \mu + 2\lambda\rho)^2 - \Sigma^{(0)} \left( 1 - \frac{\lambda \iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} \right)^2} \quad (\text{H.8})$$

que claramente tem o mesmo valor para qualquer solução.

Podemos agora reescrever para a parte acoplada (5.43)e (5.44) com as novas condições de equilíbrio

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \delta\varphi$$

$$\epsilon_k = \epsilon_k^{(0)} + \delta\epsilon_k$$

$$\beta_k = \beta_k^{(0)} + \delta\beta_k$$

$$\iota = \iota^{(0)} + \delta\iota.$$

As equações linearizadas ficam

$$\dot{\delta\iota} = -4\iota^{(0)}\sqrt{\Sigma^{(0)}}\delta\varphi + 2\iota^{(0)}\frac{Z_i^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}Z_r^{(1)} - 2\iota^{(0)}\frac{Z_r^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}Z_i^{(1)}$$

$$\delta\dot{\varphi} = -\lambda\delta\iota - \frac{Z_r^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}Z_r^{(1)} - \frac{Z_i^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}Z_i^{(1)}$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{\beta}_k = & -\delta\beta_k Z_i^{(0)} \left(1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}\right) + \delta\epsilon_k \left[ e(k) - \mu + 2\lambda\rho + Z_r^{(0)} \left(1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}\right) \right] + \epsilon_k^{(0)} Z_r^{(1)} \\ & - \beta_k^{(0)} Z_i^{(1)} + \frac{\lambda}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} (\beta_k^{(0)} Z_i^{(0)} - \epsilon_k^{(0)} Z_r^{(0)}) \delta\iota - \frac{2\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} (\epsilon_k^{(0)} Z_i^{(0)} + \beta_k^{(0)} Z_r^{(0)}) \delta\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{\epsilon}_k = & \delta\epsilon_k Z_i^{(0)} \left(1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}\right) + Z_i^{(1)} \epsilon_k^{(0)} + Z_r^{(1)} \left[ \beta_k^{(0)} + \frac{(1 + 2\nu_k)^2}{4\beta_k^{(0)^3}} \right] + \left\{ Z_r^{(0)} \left(1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}\right) \right. \\ & \left. - e(k) + \mu - 2\lambda\rho - 3\frac{(1 + 2\nu_k)^2}{4\beta_k^{(0)^4}} \left[ Z_r^{(0)} \left(1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}\right) + e(k) - \mu + 2\lambda\rho \right] \right\} \delta\beta_k \\ & + 2\lambda\frac{\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} \left[ Z_r^{(0)} \epsilon_k^{(0)} - Z_i^{(0)} \left( \beta_k^{(0)} + \frac{(1 + 2\nu_k)^2}{4\beta_k^{(0)^2}} \right) \right] \delta\varphi - \frac{\lambda}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} \{ Z_i^{(0)} \epsilon_k^{(0)} \end{aligned}$$

$$+Z_r^{(0)} \left[ \beta_k^{(0)} + \frac{(1 + 2\nu_k)^2}{4\beta_k^{(0)3}} \right] \delta\iota$$

onde agora

$$Z_r^{(1)} = -\frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}'} \left\{ \left[ \beta_{k'}^{(0)} + \frac{(1 + 2\nu_{k'})^2}{4\beta_{k'}^{(0)3}} \right] \delta\beta_{k'} - \epsilon_{k'}^{(0)} \delta\epsilon_{k'} \right\}$$

$$Z_i^{(1)} = -\frac{\lambda}{V} \sum_{\vec{k}'} \left[ \beta_{k'}^{(0)} \delta\epsilon_{k'} + \epsilon_k^{(0)} \delta\beta_k \right]$$

a relação de vínculo entre as variações, em virtude da conservação do número médio de partículas, fica:

$$\delta\iota = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}'} \left\{ \left[ \frac{(1 + 2\nu_{k'})^2}{4\beta_{k'}^{(0)3}} - \beta_{k'}^{(0)} \right] \delta\beta_{k'} + \epsilon_k^{(0)} \delta\epsilon_k \right\}. \quad (\text{H.9})$$

Da mesma forma que em (5.52) definimos as variáveis  $F$ ,  $I$ ,  $B(k)$  e  $E(k)$ . Aqui a matriz 3 X 3 fica:

$$\begin{pmatrix} i\omega & 0 & 0 \\ T(k) & i\omega + Z_i^{(0)}R & -(S(k) + Z_r^{(0)}R) \\ U(k) & V(k) & i\omega - Z_i^{(0)}R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ B(k) \\ E(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

com as definições

$$R = 1 - \frac{\lambda\iota^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}}$$

$$S(k) = e(k) - \mu + 2\lambda\rho$$

$$\begin{aligned}
T(k) &= \frac{2\lambda_l^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} (\epsilon_k^{(0)} Z_i^{(0)} + \beta_k^{(0)} Z_r^{(0)}) \\
U(k) &= \frac{\lambda}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} \left\{ Z_i^{(0)} \epsilon_k^{(0)} + Z_r^{(0)} \left[ \beta_k^{(0)} + \frac{(1 + 2\nu_k)^2}{4\beta_k^{(0)3}} \right] \right\} \\
V(k) &= - [Z_r^{(0)} R - S(k)] - 3 \frac{(1 + 2\nu_k)^2}{4\beta_k^{(0)4}} [S(k) + Z_r^{(0)} R],
\end{aligned}$$

e  $X_2$ ,  $Y_2$  e  $Z_2$  são a parte inhomônea. Calculando as frequências onde o determinante da matriz é zero obtemos

$$i\omega \left\{ \omega^2 - [V(k) (S(k) + Z_i^{(0)} R) - Z_i^{(0)2} R^2] \right\} = 0 \quad (\text{H.10})$$

obtemos  $w = 0$  que está associado a multiplicidade das soluções e substituindo os valores de  $V(k)$ ,  $S(k)$  e  $R$  temos para a outra frequência

$$w = \pm 2 \sqrt{(e(k) - \mu + 2\lambda\rho)^2 - \Sigma^{(0)} \left( 1 - \frac{\lambda_l^{(0)}}{\sqrt{\Sigma^{(0)}}} \right)^2}, \quad (\text{H.11})$$

que independe da solução escolhida, logo as frequências físicas são exatamente as mesmas para qualquer uma das soluções condensadas.

# Referências

- [1] Bogoliubov, N.N., J. Phys. USSR, **11**, (1947), 23.
- [2] Kerson Huang and C.N. Yang, Phys. Rev. **105** (1957) 767.
- [3] Bruechner, K. A. and Savada, K., Phys. Rev., **106**, (1957), 1117.
- [4] S.T. Beliaev, Phys. JEYP, **7**, (1958) 299.
- [5] N.M. Hugenholtz and Pines, Phys. Rev. **116** (1959) 489.
- [6] Maciej Lewenstein, Li You, J. Cooper and K. Burnett, Phys. Rev., **A50**, (1994), 2207
- [7] J. De Boer, G.E. Uhlenbeck, Studies in Statistical Mechanics, North-Holland Publishing Company (1964)
- [8] David Pines, The Many-Body Problem, The Benjamin/Cummings Publishing Company (1990)
- [9] Philippe Nozières and David Pines, The Theory of Quantum Liquids Vol. 2, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1982)
- [10] Robert H. Brandenberger, Reviews of Modern Physics **57** (1985) 1985
- [11] R. Jackiw and A.A. Kerman, Phys. Lett. **71A** (1979) 158
- [12] J. Des Cloizeaux, in Many Body Physics, C. de Witt and R. Balian, eds., Gordon and Breach, N.Y. 1968, pp. 5-36.

- [13] A.F.R. de Toledo Piza-Dinâmica efetiva de subsistemas e a teoria quântica de muitos corpos. Curso ministrado na primeira escola de pós-graduação em Física do Nordeste, João Pessoa (1987)
- [14] L.C. Yong, Tese de Doutorado, Ifusp 1991 (não publicada); L.C. Young e A.F.R. de Toledo Piza, *Modern Phys. Lett.* **A5**(1990)1605.
- [15] L.C. Young and A.F.R. de Toledo Piza, *Phys. Rev.* **D46**(1992)742.
- [16] P.M. Stevenson, *Phys. Rev.* **D32**(1985)1389.
- [17] Giovanni Amelino-Camelia and So-Young Pi, Finite Temperature effective Potencial in the Hartree-Fock approximation, (1994).
- [18] S Türköz, Tese de Doutorado MIT (1989)
- [19] Roger Balian and Marcel Vénéroni, *Ann. Phys.(NY)* **187**(1988)29
- [20] N. Angelescu, A. Verbeure And V. A. Zagrebnov, *J. Phys. A:Math. gen* **25**(1992)3473.
- [21] Kerson Huang, C.N. Yang and J.M. Luttinger, *Phys. Rev.* **105**(1957)776.
- [22] T.D. Lee, Kerson Huang and C.N. Yang, *Phys. Rev.* **106**(1957)1135.
- [23] Kerson Huang, *Phys. Rev.* **115**(1959)765.
- [24] T.D. Lee and C.N. Yang, *Phys. Rev.*, **112**(1958)1419.
- [25] Kerson Huang, *Phys. Rev.*, **119**(1960)1129.
- [26] W.A. Evans, Y. Imry, *Il Nouvo Cimento*, **LXIII B**(1969)155.
- [27] F. Reif, *Fundations of Statistical and Thermal Physics*, McGraw-Hill Book Company (1965)
- [28] Goshen and H.J. Lipkin, *Ann. Phys.(N.Y.)* **6**(1959)301.

- [29] R.P. Feynman, Statistical Mechanics a set of lectures, W. A. Benjamin, Inc, 1972.
- [30] E. Fermi, *Ricerca sci.* **7**(1936)13.
- [31] Blatt and V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley and Sons, Inc., N. Y., 1952, p.74.

Fig. 1

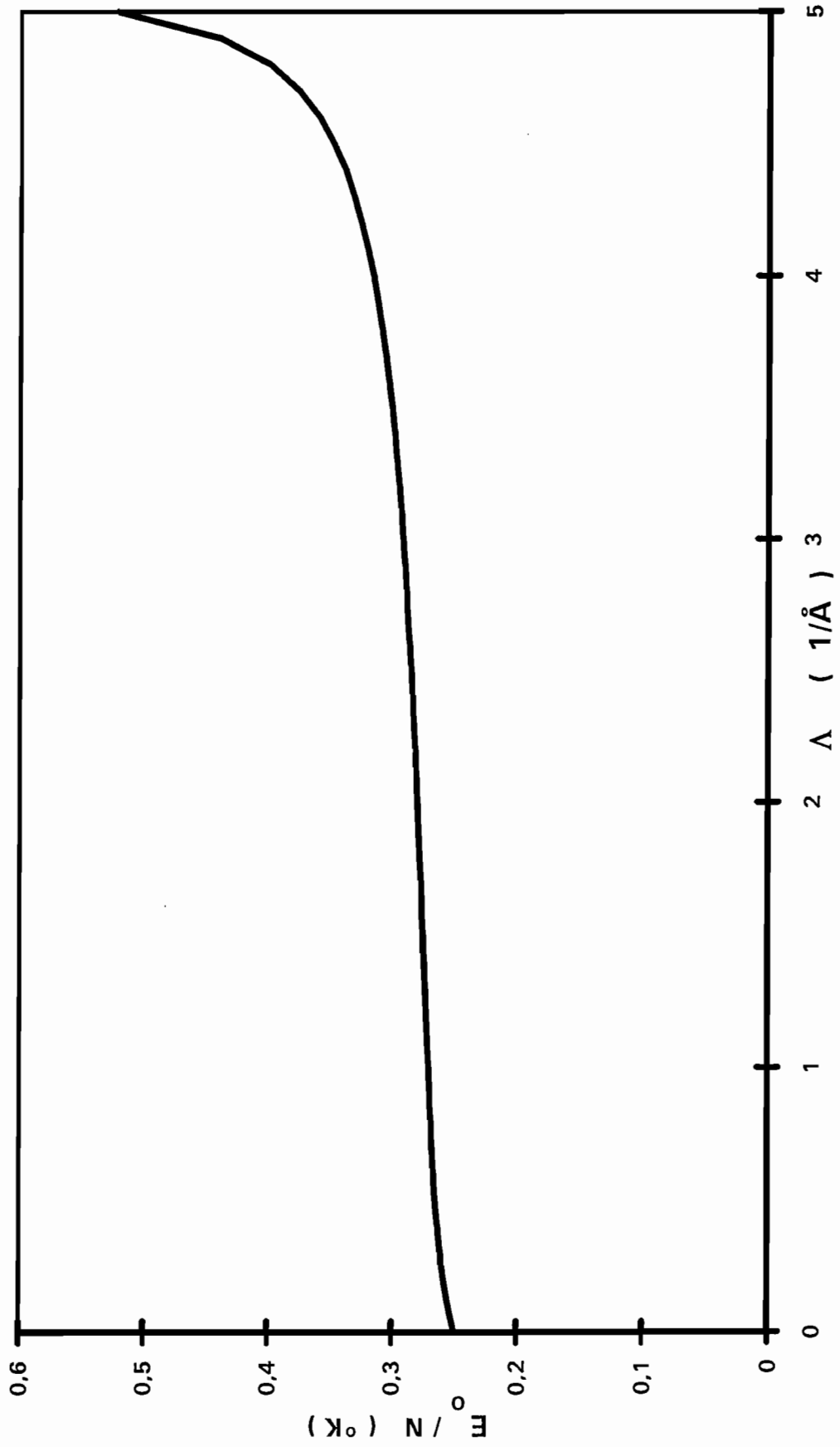




Fig. 2

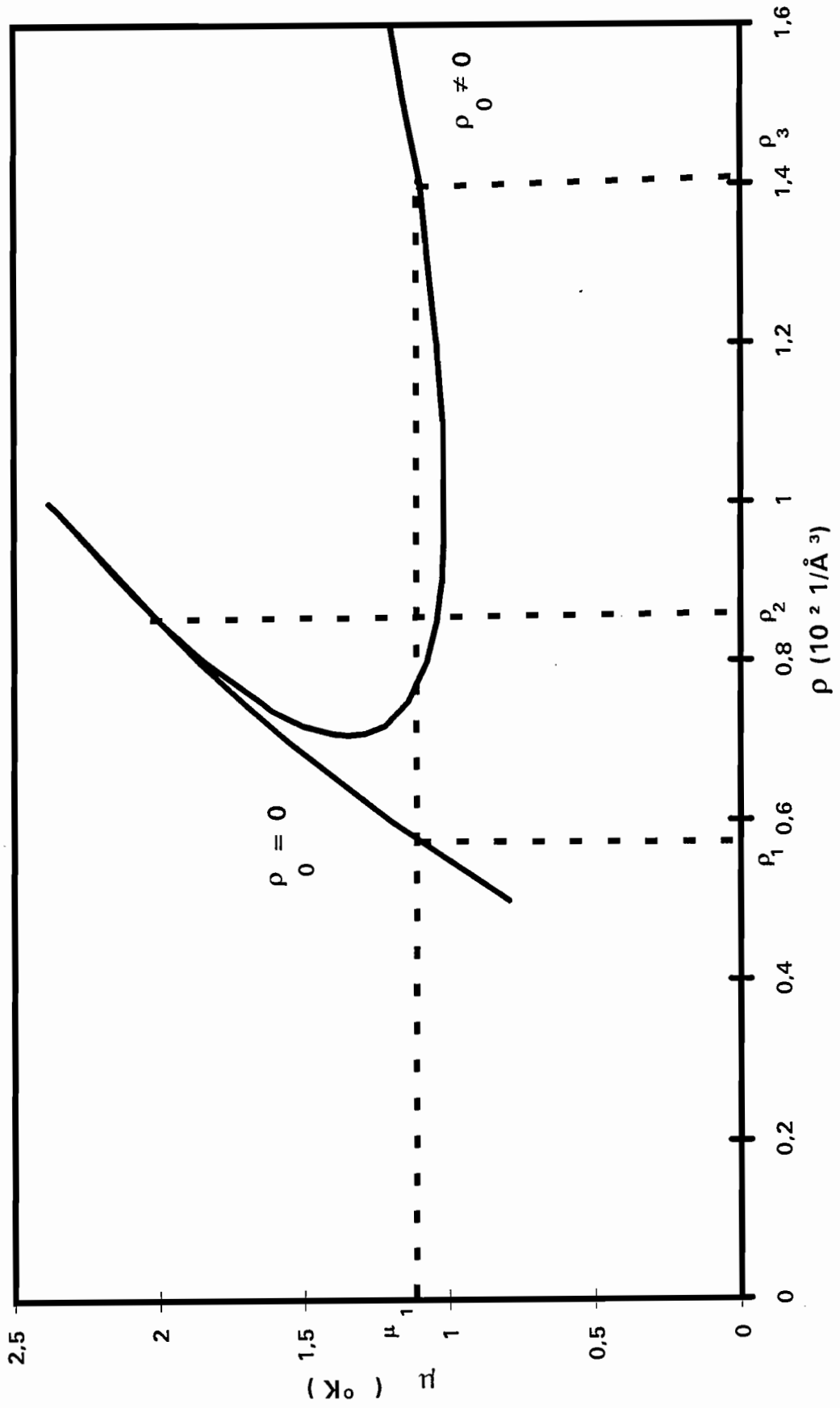


Fig. 3

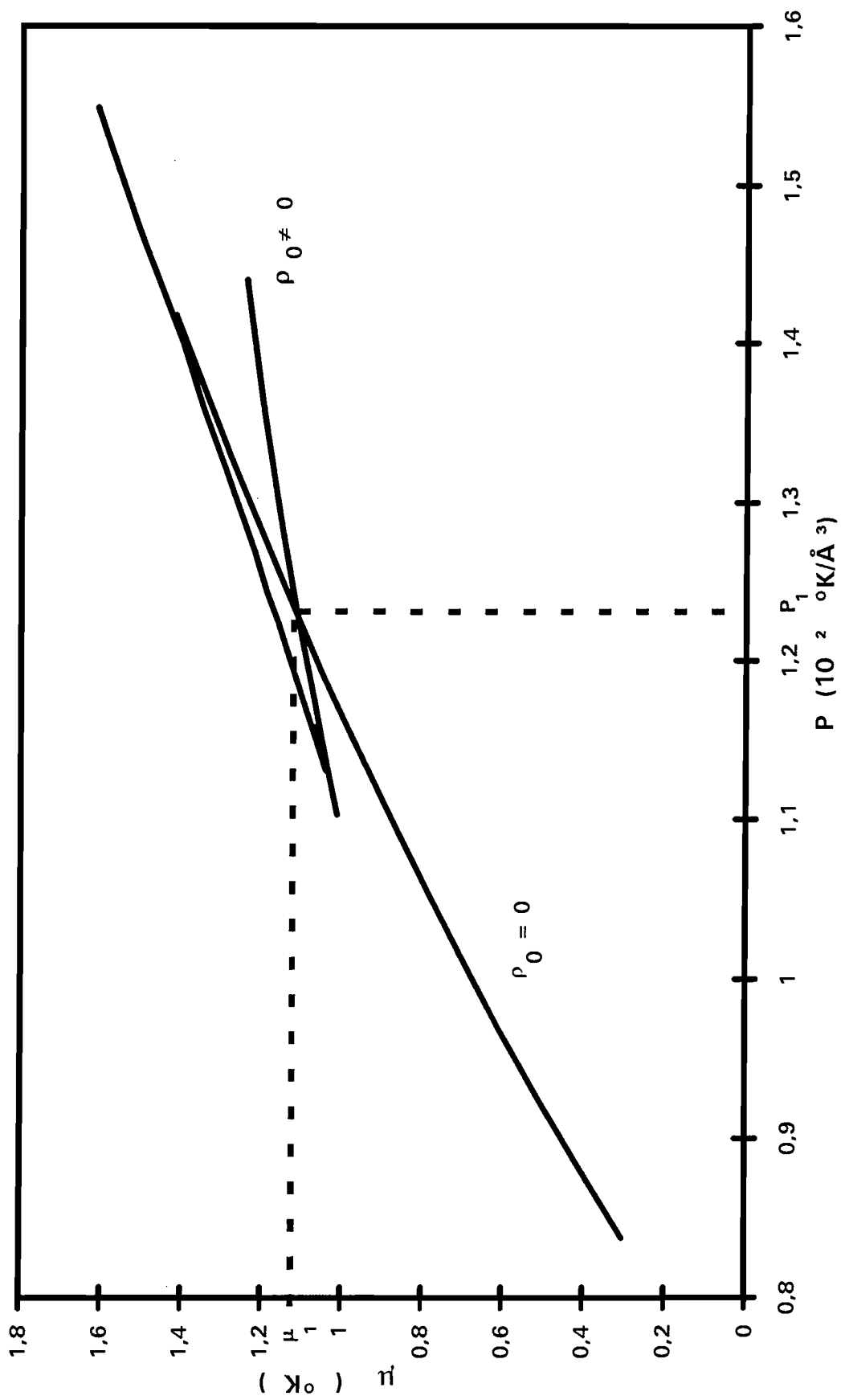


Fig. 4

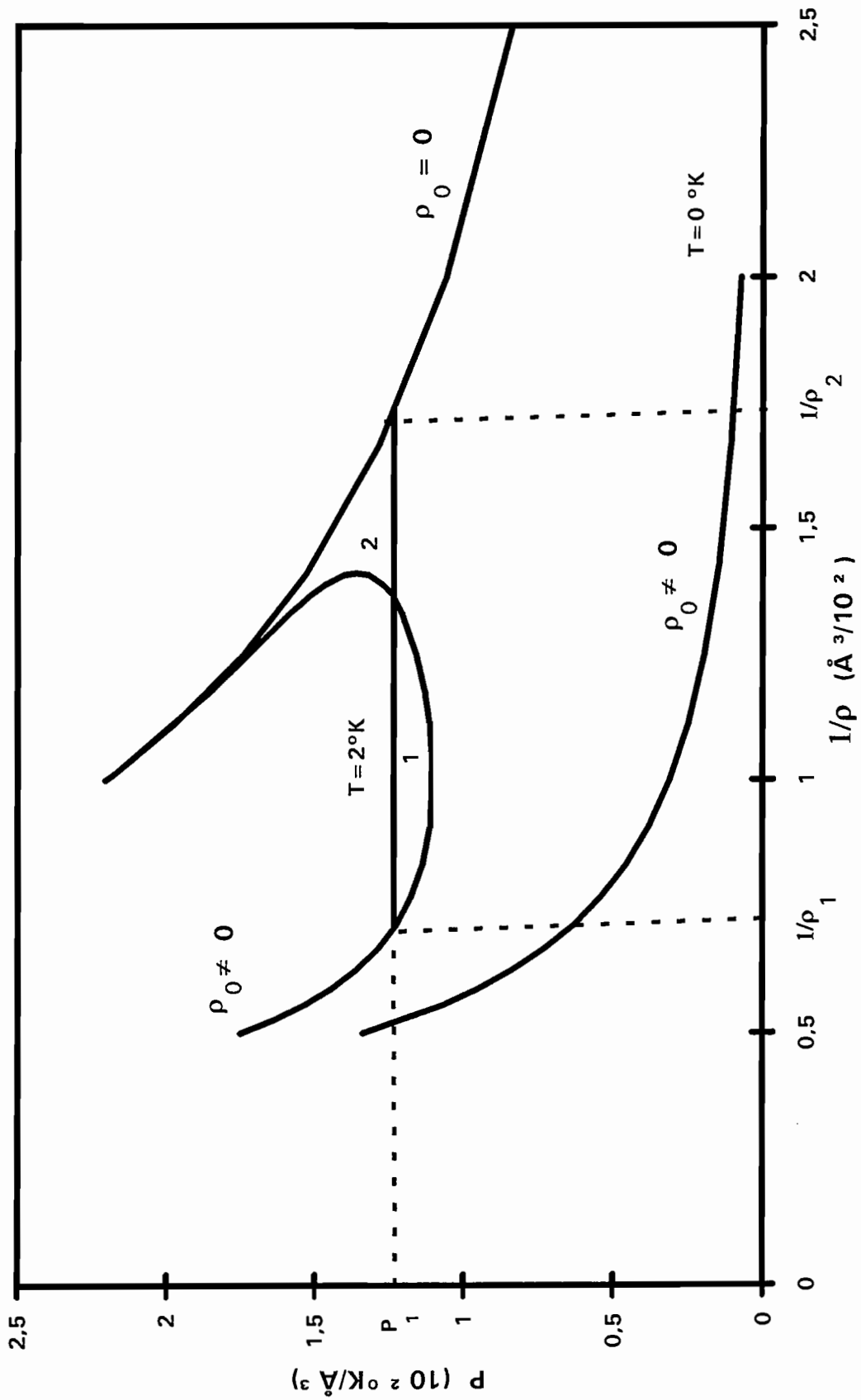


Fig. 5

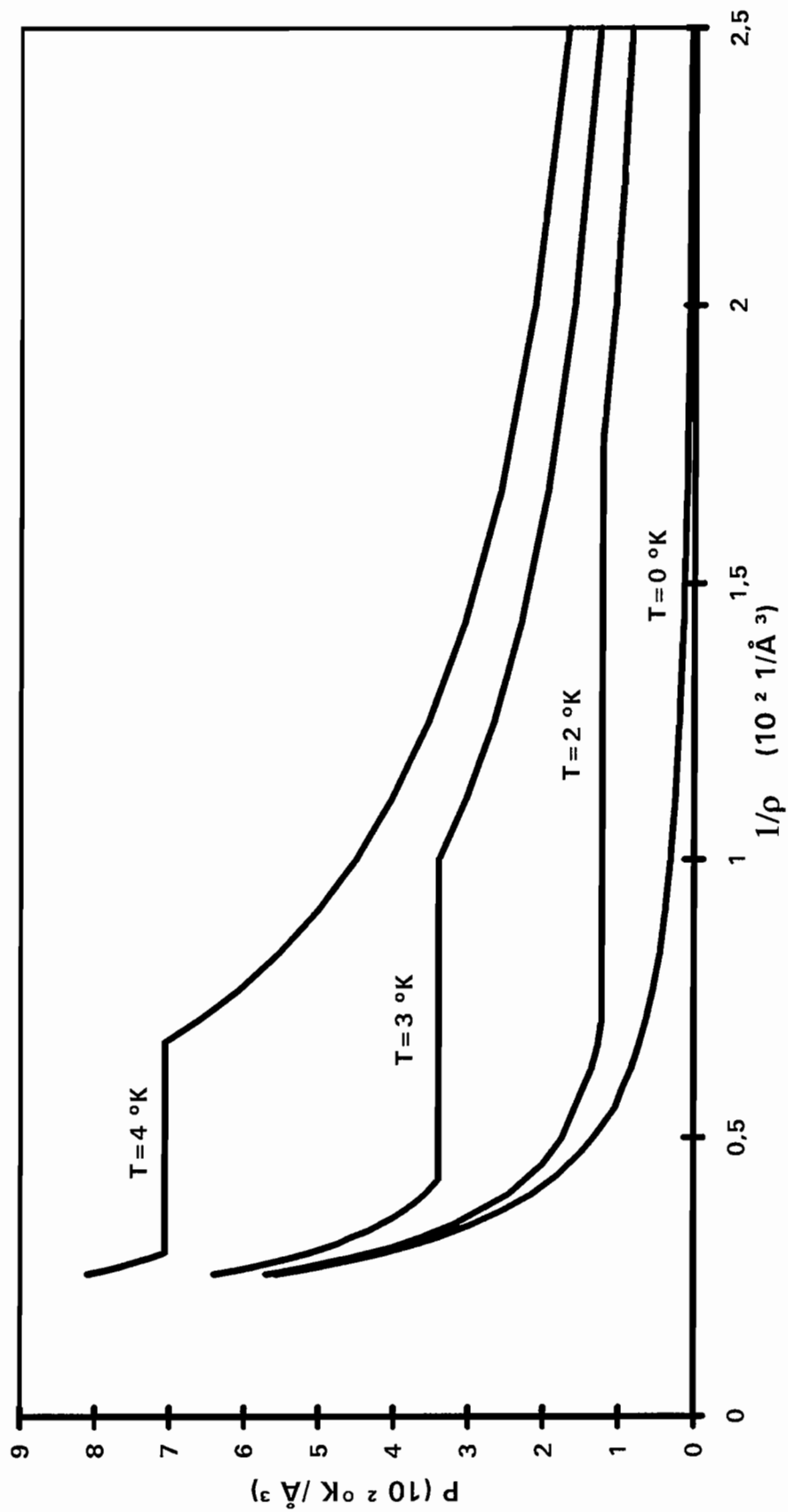


Fig. 6

