

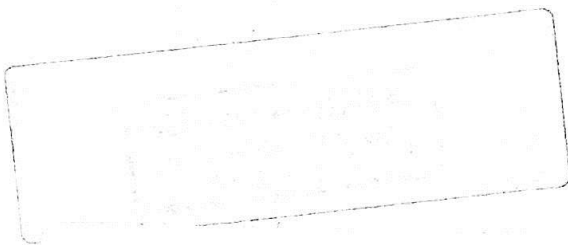
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

N.T. 205

INSTITUTO DE FÍSICA

PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM  
PLASMAS RELATIVÍSTICOS

JOSÉ ROBERTO MARTINS BONILHA

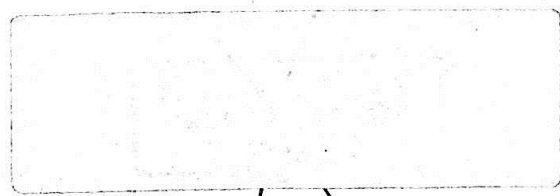


SBI-IFUSP



305M810TC205

Dissertação de mestrado  
apresentada ao Institu-  
to de Física da Univer-  
sidade de São Paulo.



São Paulo

1973



AGRADECIMENTOS

Ao Prof. José Antônio de Freitas Pacheco, orientador desta tese, pelas numerosas discussões e pelo estímulo que sempre nos proporcionou.

Ao Prof. Jun'ichi Osada, pela grande influência que teve em nossa formação.

Ao colega Hugo Capelato, por úteis sugestões.

Aos Profs. M. Cattani e N. Fernandes, pelo apoio que sempre nos deram.

À Dna. Dayse Duarte Caliô, pelo cuidadoso trabalho de datilografia.

Ao Setor de Gráfica do I.A.G., pelo trabalho de impressão.

À FAPESP, pelo inestimável apoio financeiro.

R E S U M O

No presente trabalho, estudamos sistemãticamente as condições de propagação para diversos tipos de ondas eletromagnéticas em plasmas, desprezando efeitos de temperatura, assim como o movimento dos íons. Verificamos que, para ondas de grande amplitude, o plasma torna-se relativístico e ondas de frequência inferior à frequência de plasma podem propagar-se livremente, ao contrário do que prevêem as teorias lineares de propagação.

Os resultados dessa análise são empregados no estudo da aceleração de partículas na magnetosfera de pulsars e consequente produção de raios cõsmicos. Concluimos desse estudo que, para o caso da Nebulosa do Caranguejo, partículas de alta energia são produzidas apenas nas vizinhanças do pulsar central, espalhando-se subsequentemente por toda a Nebulosa por um processo de difusão e dando origem por, emissão sincroton, à radiação que tem sido observada.

A B S T R A C T

In this work we systematically study the propagation conditions for several types of electromagnetic waves in plasmas, neglecting temperature effects and ion movement. We verify that, for large-amplitude waves, the plasma becomes relativistic and waves with frequencies less than the plasma frequency are able to propagate freely. This is in contrast to what would be expected from a linear theory, not taking into account relativistic effects.

The results of this analysis are used in the study of particle acceleration in pulsar magnetospheres and consequent cosmic-ray production. We conclude from this study that, for the Crab Nebula, high-energy particles are produced only in the central pulsar surroundings, afterwards diffusing into the whole Nebula and giving rise, by synchrotron emission, to the observed radiation.

I N D I C E

I.	Introdução .....	1
II.	Equações fundamentais .....	4
III.	Casos especiais .....	9
III-1.	Ondas puramente transversais na ausência de campo externo .....	9
III-2.	Ondas transversais na presença de um campo externo .	12
III-3.	Ondas puramente longitudinais na ausência de um campo externo .....	14
III-4.	Ondas quase-transversais de grande amplitude .....	18
IV.	Outros tipos de onda .....	21
IV-1.	Propagação da radiação de dipolo magnético .....	21
IV-2.	Onda incidindo num plasma não homogêneo .....	24
V.	Conclusões .....	28
V-1.	Resumo e Comentários .....	28
V-2.	Aplicações astrofísicas .....	29
Referências	.....	34

## I. Introdução

Segundo as teorias atuais (Gold, 1968; Pacini, 1968), os pulsars são estrelas de nêutrons magnéticas em alta rotação, que são formadas pelo colapso dos remanescentes da explosão de uma Super-Nova.

Valores típicos dos raios da estrela-mãe e da estrela de nêutrons, são, respectivamente,  $10^{12}$  cm e  $10^6$  cm.

Se o fluxo magnético for conservado durante o colapso, o campo magnético na superfície da estrela de nêutrons é amplificado por um fator da ordem de  $(\frac{10^{12}}{10^6})^2 = 10^{12}$ . Como o campo magnético na superfície da estrela-mãe é da ordem de alguns Gauss, vemos que valores de campo de  $10^{12}$  G são facilmente atingidos.

Igualmente, a conservação do momento angular leva a estrela a girar com períodos muito curtos, da ordem da fração de segundo.

O pulsar mais conhecido, NP0532, encontra-se no centro da Nebulosa do Caranguejo e é, provavelmente, o núcleo remanescente da Super Nova de 1054, que foi observada pelos chineses. Seu período é de 33 ms (Richards, 1968).

A abundante emissão de raios X da Nebulosa do Caranguejo, que é atribuída à radiação sincrotron (Shklovsky, 1960), requer a injeção contínua de elétrons até uma energia máxima de  $10^{13} - 10^{14}$  eV (Haymes et al., 1968). Partículas mais pesadas, como prótons e outros núcleos devem ser acelerados pelo mesmo processo até energias da ordem de  $10^{14} - 10^{17}$  eV, dependendo do mecanismo considerado. Há portanto, uma fonte de raios cósmicos na Nebulosa do Caranguejo.

Devido à rotação do campo magnético conjuntamente com a estrela, intensas ondas eletromagnéticas com a mesma frequência que o de rotação devem ser produzidas (Pacini, 1968; Gunn and Ostriker, 1969; Ostriker and Gunn, 1969) por emissão de dipolo magnético, se a direção deste não coincidir com a do eixo de rotação. Graças à baixa frequência e grande amplitude dessas ondas, partículas carregadas podem ser acelera-

das por elas até energias altamente relativísticas.

O pulsar deve ser rodeado por uma densa camada de plasma (Goldreich and Julian, 1969), que é a chamada magnetosfera. Esse plasma deve afetar a propagação das ondas emitidas pelo pulsar.

Quando se estuda as oscilações de um plasma, é usualmente suposto que as velocidades dos elétrons e as flutuações na densidade devidas à passagem da onda são pequenas, de modo que é possível utilizar um sistema linearizado de equações de movimento.

Nessas condições, uma onda de frequência angular  $\omega$  só pode se propagar linearmente num plasma, sem sofrer absorção, se:

$$\omega > \omega_p \quad (I-1)$$

onde  $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}} = 5.64 \times 10^4 \sqrt{n} \text{ rad s}^{-1}$  é a frequência de plasma;  $n$  é o número de elétrons por unidade de volume;  $e$ ,  $m$  são, respectivamente, carga e massa do elétron.

Para a Nebulosa do Caranguejo,  $n \approx 1 \text{ cm}^{-3}$ , (Shklovsky, 1968) o que acarreta  $\omega_p \approx 5.6 \times 10^4 \text{ rad s}^{-1}$ . Valores mais altos da densidade devem existir nas proximidades do pulsar central. Como para a radiação emitida pelo pulsar  $\omega \approx 190 \text{ rad s}^{-1}$ , nenhuma radiação poderia se propagar, caso fôsse mantido o critério de propagação dado pela eq. (I-1).

Como vamos ver, efeitos relativísticos modificam essa relação de maneira acentuada (Akhiezer and Polovin, 1956; Kaw and Dawson, 1970; Max and Perkins, 1971) permitindo a propagação dessas ondas e a consequente aceleração de partículas na Nebulosa.

Para uma onda ser refletida é preciso que a corrente de plasma cancele a corrente de deslocamento. Para grandes amplitudes do campo, aquela corrente é limitada pela velocidade da luz, possibilitando a propagação da onda.

Nosso propósito, no presente trabalho, é estudar o movimento oscilatório do plasma de maneira geral, para velocidades arbitrárias e

obter critérios de propagação adequados para ondas eletromagnéticas de grande amplitude.

Na secção II são estabelecidas as equações diferenciais de movimento para elétrons numa onda plana propagando-se num plasma homogêneo.

Na secção III discutimos vários tipos de ondas planas: transversais, longitudinais, com e sem campo magnético externo e ondas quase-transversais.

Na secção IV estudamos a propagação de ondas esféricas num meio homogêneo, assim como ondas planas num meio não homogêneo.

Finalmente, na secção V, analisamos os resultados obtidos e fazemos aplicações astrofísicas.



## II. Equações fundamentais

Estabeleceremos aqui as equações de movimento dos elétrons em uma onda plana de amplitude arbitrária. Seguiremos de perto o tratamento do artigo de Akhiezer e Polovin (1956).

As equações básicas são as equações de Maxwell para o campo eletromagnético e a equação de movimento relativístico para elétrons.

No sistema C.G.S. gaussiano, estas equações assumem a forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II-1})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} n e \vec{v} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{II-2})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi e (n - n_0) \quad (\text{II-3})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II-4})$$

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{P} = e \left[ \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right] \quad (\text{II-5})$$

onde  $\vec{P}$  é o momento (relativístico) dos elétrons e  $n_0$  é a densidade de equilíbrio dos elétrons. Note-se que estamos usando os campos microscópicos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , de modo que não há necessidade de introduzir polarização e magnetização.

As seguintes aproximações foram feitas ao escrever as equações acima:

- 1) Efeitos de temperatura são desprezados; esta é uma hipótese bastante razoável já que os elétrons adquirem uma velocidade, devido ao campo da onda, muito maior que a velocidade térmica. Nestas condições não é necessário introduzir uma função de distribuição para caracterizar o plasma, mas apenas a densidade eletrônica  $n$ , que depende do tempo e da posição.
- 2) Os íons serão supostos infinitamente pesados e imóveis. Esta é obviamente uma hipótese questionável além de uma certa intensidade de campo, porque então tanto a velocidade dos elétrons como a dos íons apro

ximam-se da velocidade da luz e tornam-se, portanto, comparáveis uma à outra.

Como será visto no decorrer deste trabalho, a intensidade de uma onda é caracterizada pelo parâmetro adimensional  $\frac{|e|E}{mc\omega}$ , que é usualmente muito pequeno. Entretanto, em condições astrofísicas, este parâmetro pode ser muito maior que um. Para uma partícula de teste numa onda plana, este parâmetro tem uma interpretação muito simples: é a relação entre a frequência ciclotron e a frequência da onda e mede a capacidade da onda de acelerar a partícula. A teoria deve falhar, portanto, se não for obedecida a condição  $\frac{Z|e|E}{Mc\omega} < 1$  onde  $E$  é a intensidade do campo elétrico,  $Z|e|$  é a carga do íon e  $M$  é a massa do íon.

Nosso problema consiste no estudo dos movimentos ondulatórios do plasma, i.é., dos movimentos tais que as variáveis entrando nas eqs. (II-1) a (II-5) não sejam funções de  $\vec{r}$  e  $t$  separadamente, mas apenas da combinação  $\vec{i} \cdot \vec{r} - Vt$ , onde  $\vec{i}$  é um vetor constante e unitário e  $V$  é a velocidade de fase, também constante. Esta solução representa ondas planas deslocando-se na direção  $\vec{i}$ .

Notando que  $\vec{\nabla} \rightarrow \vec{i} \frac{d}{d(\vec{i} \cdot \vec{r} - Vt)}$  e  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -V \frac{d}{d(\vec{i} \cdot \vec{r} - Vt)}$ , podemos escrever o sistema (II-1) a (II-5) como:

$$\vec{i} \times \vec{E}' = \beta \vec{B}' \quad (II-6)$$

$$\vec{i} \times \vec{B}' = -\beta \vec{E}' + \frac{4\pi}{c} en\vec{v} \quad (II-7)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{E}' = 4\pi e(n - n_0) \quad (II-8)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{B}' = 0 \quad (II-9)$$

$$(\vec{i} \cdot \vec{v} - V) \vec{p}' = e \left[ \vec{E}' + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}' \right] \quad (II-10)$$

onde a derivada em relação a  $\vec{i} \cdot \vec{r} - Vt$  é denotada por uma linha e  $\beta = V/c$ .

Iremos agora, usando as eqs. (II-6) a (II-9) eliminar  $\vec{E}'$  e  $\vec{B}'$  na equação (II-10), obtendo um conjunto de equações diferenciais envol-

vendo apenas a posição e o momento da partícula. Integrando a eq.(II-6) obtemos:

$$\vec{B} = \frac{1}{\beta} (\vec{i} \times \vec{E}) + \vec{B}_0 \quad (\text{II-11})$$

onde  $\vec{B}_0$  é o campo magnético externo. Se não existir tal campo, então:

$$\vec{B} = \frac{1}{\beta} (\vec{i} \times \vec{E}) \quad \text{Neste caso} \quad \vec{i} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

Em outros termos, na ausência de campo magnético externo, o campo magnético da onda é transversal e perpendicular ao campo elétrico.

De (II-7) e (II-8) vemos que:

$$u = \frac{n_0 V}{V - \vec{i} \cdot \vec{v}} \quad (\text{II-12})$$

Como a densidade de elétrons tem que ser forçosamente positiva, segue-se que  $\vec{i} \cdot \vec{v} < V$ , isto é, a componente da velocidade do elétron na direção de propagação da onda é sempre menor que a velocidade de fase.

A seguir multiplicamos (II-10) vetorialmente por  $\vec{i}$ .

Empregando a identidade vetorial  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

isto nos dá:

$$(\vec{i} \cdot \vec{v} - V)(\vec{i} \times \vec{P}') = e \left\{ \vec{i} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \left[ \vec{v}(\vec{i} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{i} \cdot \vec{v}) \right] \right\} \quad (\text{II-13})$$

Da equação (II-11) vem que  $\vec{i} \cdot \vec{B} = \vec{i} \cdot \vec{B}_0$ . Obtemos, então, usando do (II-11) e (II-13)

$$\vec{B} = - \frac{c}{e} (\vec{i} \times \vec{P}') + \frac{V\vec{B}_0 - \vec{v}(\vec{i} \cdot \vec{B}_0)}{V - \vec{i} \cdot \vec{v}} \quad (\text{II-14})$$

Em seguida multiplicamos (II-7) vetorialmente por  $\vec{i}$  e achamos, usando (II-6):

$$\vec{B}' = \frac{4\pi}{c} \text{en} \frac{1}{\beta^2 - 1} (\vec{i} \times \vec{v}) \quad (\text{II-15})$$

Derivando (II-14) e eliminando  $\vec{B}'$  com (II-15) obtemos:

$$(\vec{i} \times \vec{p})'' + \frac{4\pi n e^2}{(\beta^2 - 1) c^2} (\vec{i} \times \vec{v}) = \frac{e}{c} \left[ \frac{v \vec{B}_0 - \vec{v}(\vec{i} \cdot \vec{B}_0)}{v - \vec{i} \cdot \vec{v}} \right]' \quad (\text{II-16})$$

Tomando a derivada de (II-10), multiplicando escalarmente por  $\vec{i}$  e usando (II-8) e (II-14) vem:

$$\left[ (\vec{i} \cdot \vec{v} - v) \vec{i} \cdot \vec{p}' + (\vec{i} \times \vec{v}) \cdot (\vec{i} \times \vec{p}') - e\beta \frac{\vec{i} \cdot \vec{v} \times \vec{B}_0}{v - \vec{i} \cdot \vec{v}} \right]' = 4\pi e^2 (n - n_0) \quad (\text{II-17})$$

As equações (II-16) e (II-17) determinam as componentes transversal e longitudinal da velocidade.

Colocando o vetor  $\vec{i}$  na direção  $z$  e introduzindo as grandezas  $\vec{p} = \frac{\vec{p}}{mc}$  e  $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{c}$ , que são, respectivamente, o momento adimensional e a velocidade adimensional, podemos por as equações (II-16) e (II-17) na seguinte forma:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \rho_x + \omega_p^2 \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{\beta}{\beta - u_z} u_x + \beta \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\beta \Omega_y - u_y \Omega_z}{\beta - u_z} \right) = 0 \quad (\text{II-18})$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \rho_y + \omega_p^2 \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{\beta}{\beta - u_z} u_y - \beta \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\beta \Omega_x - u_x \Omega_z}{\beta - u_z} \right) = 0 \quad (\text{II-19})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left\{ (u_z - \beta) \frac{d}{d\tau} \rho_z + u_x \frac{d}{d\tau} \rho_x + u_y \frac{d}{d\tau} \rho_y + \frac{\beta^2}{\beta - u_z} (u_x \Omega_y - u_y \Omega_x) \right\} = \\ = \omega_p^2 \frac{\beta^2 u_z}{\beta - u_z} \end{aligned} \quad (\text{II-20})$$

$$\text{onde } \tau = t - \frac{\vec{i} \cdot \vec{r}}{v} \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m} \quad \vec{\Omega} = \frac{e \vec{B}_0}{mc}$$

As três últimas equações determinam o movimento das partículas.

Na ausência do campo externo  $\vec{B}_0$  essas equações tomam a forma:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \rho_x + \omega_p^2 \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{\beta}{\beta - u_z} u_x = 0 \quad (\text{II-21})$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \rho_y + \omega_p^2 \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{\beta}{\beta - u_z} u_y = 0 \quad (\text{II-22})$$

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ (u_z - \beta) \frac{d}{d\tau} \rho_z + u_x \frac{d}{d\tau} \rho_x + u_y \frac{d}{d\tau} \rho_y \right\} = \omega_p^2 \frac{\beta^2 u_z}{\beta - u_z} \quad (\text{II-23})$$

Lembrando que a velocidade e o momento da partícula estão relacionados por:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p}}{\gamma} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{1 + \rho^2}}$$

onde  $\gamma$  é o fator de Lorentz, podemos reescrever as equações acima como:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \rho_x + \omega_p^2 \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{\beta \rho_x}{\beta \sqrt{1 + \rho^2} - \rho_z} = 0 \quad (\text{II-24})$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \rho_y + \omega_p^2 \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{\beta \rho_y}{\beta \sqrt{1 + \rho^2} - \rho_z} = 0 \quad (\text{II-25})$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \left[ \beta \rho_z - \sqrt{1 + \rho^2} \right] + \frac{\omega_p^2 \beta^2 \rho_z}{\beta \sqrt{1 + \rho^2} - \rho_z} = 0 \quad (\text{II-26})$$

As equações (II-24) e (II-25) para as componentes transversais são admitidas soluções finitas se  $\beta > 1$  ou  $V > c$ . No que se refere a (II-26), que nos dá a componente longitudinal, ela tem soluções finitas para  $\beta$  arbitrário se  $\rho_x = \rho_y = 0$ . Tais movimentos puramente longitudinais para  $\beta < 1$  são, contudo, instáveis por causa do acoplamento entre os movimentos transversal e longitudinal.

### III. Casos especiais

Vamos resolver agora as equações de movimento para alguns casos particulares, como ondas transversais, longitudinais, etc.. É bom ressaltar que, por ora, estamos lidando com ondas planas num plasma homogêneo.

Introduzindo a nova variável  $\xi = \frac{\omega_p}{c} (z - Vt)$  as Eqs.(II-24), (II-25) e (II-26) transformam-se em:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \rho_x + \frac{1}{\beta^2 - 1} \frac{\beta \rho_x}{\beta(1+\rho^2)^{1/2} - \rho_z} = 0 \quad (\text{III-1})$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \rho_y + \frac{1}{\beta^2 - 1} \frac{\beta \rho_y}{\beta(1+\rho^2)^{1/2} - \rho_z} = 0 \quad (\text{III-2})$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ \beta \rho_z - (1+\rho^2)^{1/2} \right] + \frac{\rho_z}{\beta(1+\rho^2)^{1/2} - \rho_z} = 0 \quad (\text{III-3})$$

#### III-1. Ondas puramente transversais na ausência de campo externo

Procuramos soluções que representem ondas transversais. Deve mos, então, colocar  $\rho_z = 0$  nas equações acima.

Ficamos, então, com o sistema:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \rho_x + \frac{1}{\beta^2 - 1} \frac{\rho_x}{(1+\rho^2)^{1/2}} = 0 \quad (\text{III-4})$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \rho_y + \frac{1}{\beta^2 - 1} \frac{\rho_y}{(1+\rho^2)^{1/2}} = 0 \quad (\text{III-5})$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} (1 + \rho^2)^{1/2} = 0 \quad (\text{III-6})$$

A última equação nos dá, se quisermos soluções finitas:

$$\rho^2 = \text{constante} \quad (\text{III-7})$$

As soluções para as componentes transversais são:

$$\rho_x = \rho \cos \omega (t - z/V) = \rho \cos \frac{\omega \xi}{\beta \omega_p} \quad (\text{III-8})$$

$$\rho_y = \rho \sin \omega (t - z/V) = -\rho \sin \frac{\omega \xi}{\beta \omega_p} \quad (\text{III-9})$$

onde 
$$\omega = \omega_p \beta (\beta^2 - 1)^{-1/2} (1 + \rho^2)^{-1/4} \quad (\text{III-10})$$

Usando (III-10) podemos exprimir a velocidade de fase  $V$  em termos de  $\beta$  como:

$$V = \beta c = c \epsilon^{-1/2} \quad (\text{III-11})$$

onde  $\epsilon$ , que  $\bar{\epsilon}$  a constante dielétrica do plasma, considerado agora como meio macroscópico,  $\bar{\epsilon}$  é dado por:

$$\epsilon = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{1}{\beta^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} (1 + \rho^2)^{-1/2} = 1 - \frac{\omega_p^2 / \gamma}{\omega^2} \quad (\text{III-12})$$

onde  $\gamma$   $\bar{\epsilon}$  o fator de Lorentz.

Podemos agora calcular o campo elétrico  $\vec{E}$ .

Eliminando  $\vec{B}$  entre as equações (II-11) e (II-14) para  $\vec{B}_0 = 0$

obtemos:

$$-\frac{c}{e} (\vec{i} \times \vec{p}') = \frac{1}{\beta} (\vec{i} \times \vec{E}) \quad (\text{III-13})$$

ou, explicitamente, usando a relação  $\vec{\rho} = \vec{P}/mc$ :

$$E_x = -\frac{\beta}{e} mc^2 \rho'_x \quad (\text{III-14})$$

$$E_y = -\frac{\beta}{e} mc^2 \rho'_y \quad (\text{III-15})$$

onde a derivada  $\bar{\epsilon}$  em relação  $\bar{a}$  fase.  $z - Vt$ .

Isto nos dá:

$$E_x = - \left( \frac{mc\omega\rho}{e} \right) \sin \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \quad (\text{III-16})$$

$$E_y = \left( \frac{mc\omega\rho}{e} \right) \cos \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \quad (\text{III-17})$$

As equações (III-16) e (III-17), acima, nos mostram que sōmente ondas circularmente polarizadas podem se propagar como ondas puramente transversais no plasma. (Isto, entretanto, nō ē de grande valia, por que para  $\beta \gg 1$ , oscilações quase-transversais com polarizaçō linear sō possīveis, como veremos na secçō III-4.)

Das duas ūltimas equaçōes obtemos:

$$\rho = \frac{|e|E}{mc \omega} \quad (\text{III-18})$$

que nos relaciona a amplitude de campo com o momento do elētron.

O fator de Lorentz ē dado por:

$$\gamma = (1 + \rho^2)^{1/2} = \left[ 1 + \left( \frac{eE}{mc\omega} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III-19})$$

Podemos escrever a Eq. (III-12) como:

$$\epsilon = \frac{1}{\beta^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 + \left( \frac{eE}{mc\omega} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (\text{III-20})$$

Para grandes amplitudes do campo ( $\frac{|e|E}{mc \omega} \gg 1$ ) isto se reduz a:

$$\epsilon = \frac{1}{\beta^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{mc}{|e|E} \quad (\text{III-21})$$

A propagaçō sō ē possīvel se  $\beta^2 > 0$ , isto ē:

$$\omega_p \left[ 1 + \left( \frac{eE}{mc\omega} \right)^2 \right]^{-1/4} < \omega \quad (\text{III-22})$$

ou, definindo  $\omega_c = \frac{|e|E}{mc}$



$$\omega_p \left[ 1 + \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \right]^{-1/4} < \omega$$

Para pequenas amplitudes do campo, isto é,  $\frac{\omega_c}{\omega} \ll 1$ , a equação acima reduz-se a:

$$\omega_p < \omega \quad (\text{III-23})$$

que é a mesma que (I-1).

Por outro lado, para campos muito intensos,  $\frac{\omega_c}{\omega} \gg 1$  e temos:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_c/\omega} < \omega^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\omega_p^2}{\omega_c} < \omega \quad (\text{III-24})$$

### III-2. Ondas transversais na presença de um campo externo

Discutimos acima a propagação de ondas puramente transversais para o caso  $\vec{B}_0 = 0$ . Se o campo magnético não for nulo, a solução das equações de movimento (II-18), (II-19) e (II-20) torna-se bastante difícil.

Discutiremos, portanto, apenas o caso particular em que o campo externo tem a mesma direção que a de propagação da onda.

Neste caso  $\vec{B}_0 \cdot \vec{i} = \pm B_0$ , dependendo do campo ser paralelo ou anti-paralelo à direção de propagação.

As equações de propagação ficam, então, para oscilações transversais:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \rho_x \mp \Omega \frac{du_y}{d\tau} + \frac{\beta^2}{\beta^2-1} \omega_p^2 u_x = 0 \quad (\text{III-25})$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \rho_y \pm \Omega \frac{du_x}{d\tau} + \frac{\beta^2}{\beta^2-1} \omega_p^2 u_y = 0 \quad (\text{III-26})$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} (1 + \rho^2)^{1/2} = 0 \quad (\text{III-27})$$

onde  $\Omega$  é o módulo do vetor definido logo após a equação (II-20).

Vemos por (III-27) que a energia das partículas ainda independe da fase. Lembrando que  $\vec{p} = \vec{u} (1-u^2)^{-1/2} = \vec{u} (1+p^2)^{1/2} = \gamma \vec{u}$  e colocando  $u_x = U \cos \omega \tau$  e  $u_y = U \sin \omega \tau$  obtemos:

$$\epsilon = \frac{1}{\beta^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 / \gamma}{\omega(\omega \pm \Omega / \gamma)} \quad (\text{III-28})$$

onde o sinal - refere-se agora a uma onda propagando-se paralelamente ao campo externo.

A equação (III-28) reduz-se para pequenas amplitudes ao resultado bem conhecido (Jackson, 1962-a)

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \Omega)}$$

A diferença fundamental entre as duas últimas equações está no fato de que, no último caso, as oscilações são lineares e podemos superpor os dois modos de propagação, que tem diferentes polarizações.

Para grandes amplitudes, isso não pode ser feito e os dois tipos de onda excluem-se mutuamente.

Podemos obter o fator de Lorentz utilizando as Eqs. (II-11) e (II-14) o que nos dá, já que as oscilações são transversais:

$$\frac{1}{\beta} (\vec{i} \times \vec{E}) = - \frac{c}{e} (\vec{i} \times \vec{p}') - \frac{\vec{v}}{v} (\vec{i} \cdot \vec{B}_0)$$

da última equação obtemos, sem dificuldade:

$$\gamma = \frac{|e|}{mc\omega} \left( \frac{E}{u} \pm B_0 \right)$$

Para ondas de grande amplitude  $u \approx 1$ , donde:

$$\gamma \approx \frac{|e|}{mc\omega} (E \pm B_0)$$

(III-29)

### III-3. Ondas puramente longitudinais na ausência de um campo externo

Colocando  $\rho_x = \rho_y = 0$  nas equações de movimento obtemos:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \frac{1 - \beta u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\beta^2 \omega_p^2 u}{\beta - 1} \quad (\text{III-30})$$

onde  $\vec{u} = u_z$ .

Se multiplicarmos essa última equação por  $\frac{d}{d\tau} (1 - \beta u / \sqrt{1-u^2})$ , obtemos, após integração:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d}{d\tau} \frac{1 - \beta u}{\sqrt{1-u^2}} \right)^2 = \left( C - \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \right) \beta^2 \omega_p^2 \quad (\text{III-31})$$

onde  $C$  é uma constante de integração.

Pondo  $C = (1 - u_m^2)^{1/2}$  vemos que  $u$  deve ficar restrita ao intervalo  $-u_m \leq u \leq u_m$ .

Integrando novamente vem:

$$\int_0^u du \frac{\beta - u}{\left[ (1 - u_m^2)^{-1/2} - (1 - u^2)^{-1/2} \right]^{1/2}} \frac{1}{(1 - u^2)^{3/2}} = \sqrt{2} \beta \omega_p \tau \quad (\text{III-32})$$

Esta fórmula resolve nosso problema, em princípio, já que exprime  $u$  como função de  $\tau = t - \frac{z}{v}$ .

Introduzindo a variável  $\lambda$  definida por:

$$u = \text{tgh} \lambda \quad u_m = \text{tgh} \lambda_0$$

podemos colocar (III-32) na forma:

$$\int_0^\lambda d\lambda \frac{\beta \cosh \lambda - \sinh \lambda}{\left[ \cos^2 h \lambda_0 - \cos^2 h \lambda \right]^{1/2}} = \sqrt{2} \beta \omega_p \tau \quad (\text{III-33})$$

Evidentemente,  $u$  é uma função periódica de  $\tau$ , como se de-

preende pela inspecção de (III-30) e (III-31). O período  $T$  é determinado por:

$$2 \int_{-u_m}^{+u_m} du \frac{[(1-u_m^2)^{-1/2} - (1-u^2)^{-1/2}]^{-1/2}}{(1-u^2)^{3/2}} (\beta-u) = \sqrt{2} \beta \omega_p T \quad (\text{III-34})$$

Ou em termos de frequência  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  :

$$\omega = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\omega_p}{I(u_m)} ; \quad I(u_m) = \int_0^{u_m} du \frac{1}{(1-u^2)^{5/4}} \left[ \left( \frac{1-u^2}{1-u_m^2} \right)^{1/2} - 1 \right]^{-1/2} \quad (\text{III-35})$$

Vemos que o período de oscilação longitudinal depende da amplitude  $u_m$  da velocidade.

Podemos obter algumas expressões simples para a frequências nos casos limites de baixa e alta amplitude.

No primeiro caso,  $u_m \ll 1$  e a frequência é dada por:

$$\omega = \omega_p \left( 1 - \frac{3u_m^2}{16} \right) \approx \omega_p \quad (u_m \ll 1) \quad (\text{III-36})$$

No segundo caso,  $1-u_m \ll 1$  e a frequência torna-se:

$$\omega = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \omega_p (1-u_m^2)^{1/4} \quad (1-u_m \ll 1) \quad (\text{III-37})$$

Vemos que no último caso a frequência tende a zero. Isto se deve ao fato da inércia do elétron tender ao infinito quando  $u_m \rightarrow 1$ .

No caso geral de valores intermediários de  $u_m$  a integral em (III-32) e o período podem ser expressos em termos de funções elípticas.

De fato, com as substituições:

$$u = \frac{2k \operatorname{sn}(x;k)}{1 + k^2 \operatorname{sn}^2(x;k)} ; \quad k = \left[ \frac{1 - \sqrt{1-u_m^2}}{1 + \sqrt{1-u_m^2}} \right]^{1/2} ; \quad k' = \sqrt{1-k^2}$$

achamos:

$$\frac{k}{\beta k'} \frac{\text{cn}(x;k)}{\text{dn}(x;k)} - k'x + \frac{1}{k'K} \left[ 2E + \frac{\theta_3'(x/2K;q)}{\theta_3(x/2K;q)} \right] = \omega_p \tau \quad (\text{III-38})$$

onde

$$\frac{\theta_3'(z;q)}{\theta_3(z;q)} = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n q^n \sin \frac{2\pi n z}{1-q^{2n}} \quad q = e^{-\pi k'/K}$$

$$K = \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad ; \quad K' = \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} \quad ;$$

$$E = \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}$$

Colocando em (III-38)  $u = u_m$ ,  $\tau = \frac{T}{4}$  e notando que  $x = K$  quando  $u = u_m$ , obtemos a seguinte expressão para a frequência de oscilação:

$$\omega = \omega_p \frac{\pi}{2} k' \frac{1}{2E - k'^2 K} \quad (\text{III-39})$$

A partir de  $u$  podemos obter facilmente a densidade de partículas e o campo elétrico, que está na direção de propagação. De (II-12) vem:

$$n(\tau) = \frac{n_0 \beta}{\beta - u} \quad (\text{III-40})$$

Derivando (III-32) em relação a  $\tau$ , obtemos:

$$\frac{1}{\left[ (1-u_m^2)^{-1/2} - (1-u^2)^{-1/2} \right]^{1/2} (1-u^2)^{3/2}} \frac{du}{d\tau} = \sqrt{2} \beta \omega_p \quad (\text{III-41})$$

A equação (II-10) pode ser escrita como:

$$- \frac{(u-\beta)}{\beta} mc \frac{du}{d\tau} \frac{1}{(1-u^2)^{3/2}} = \pm eE \quad (\text{III-42})$$

Combinando as duas últimas equações obtemos:

$$eE = \pm \sqrt{2} m \omega_p c \left[ \frac{1}{\sqrt{1-u_m^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \right]^{1/2} \quad (\text{III-43})$$

O máximo valor do campo  $\bar{e}$ :

$$|e|E_0 = \sqrt{2} m \omega_p c \left[ \frac{1}{\sqrt{1-u_m^2}} - 1 \right]^{1/2}$$

Para pequenas amplitudes temos:

$$|e|E_0 = m \omega_p u_m c \quad (u_m \ll 1) \quad (\text{III-44})$$

Para grandes amplitudes:

$$|e|E_0 = \sqrt{2} m \omega_p c (1-u_m^2)^{-1/4} \quad (1-u_m \ll 1) \quad (\text{III-45})$$

Neste último caso, podemos obter, usando (III-37):

$$\omega \approx \frac{\pi}{2} \omega_p^2 \frac{mc}{|e|E_0} \quad (\text{III-46})$$

Notamos que se o campo elétrico for suficientemente alto, poderemos ter ondas de frequência muito inferior a frequência de plasma propagando-se no meio.

Se combinarmos as duas últimas equações podemos obter a máximo fator de Lorentz  $\gamma_0$ :

$$\gamma_0 = \frac{\pi}{4} \frac{|e|E_0}{mc\omega}$$

A eq. (III-46) torna-se:

$$1 - \frac{\pi^2}{8} \frac{\omega_p^2 / \gamma_0}{\omega^2} \approx 0 \quad (\text{III-47})$$

### III-4. Ondas quase-transversais de grande amplitude

Como tínhamos observado na Secção (III-1) é possível a propagação de ondas transversais linearmente polarizadas se existir uma pequena componente longitudinal da velocidade.

Vamos considerar ondas de grande amplitude ( $|\rho_x|_{\max} \gg 1$ ) em regimes onde os efeitos coletivos são muito importantes, de modo que  $\beta \gg 1$  (Max and Perkins, 1971).

Nestas circunstâncias, soluções periódicas tem  $|\rho_x| \gg |\rho_z|$  para a maior parte de cada período. Neste caso, as equações (III-1), (III-2) e (III-3) tornam-se:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \rho_x + \frac{1}{\beta^2 - 1} \approx 0 \quad (\text{III-48})$$

$$\rho_y = 0 \quad (\text{polarização linear}) \quad (\text{III-49})$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ \beta \rho_z - (1 + \rho^2)^{1/2} \right] + \frac{\rho_z}{\beta(1 + \rho^2)^{1/2}} \approx 0 \quad (\text{III-50})$$

Impondo  $\rho_x = 0$  para  $\xi = 0$ ,  $P/2$  e  $P$  vem:

$$\rho_x = \rho_0 - \frac{(\xi - P/4)^2}{2(\beta^2 - 1)} \quad 0 \leq \xi \leq P/2 \quad (\text{III-51})$$

$$\rho_x = -\rho_0 + \frac{(\xi - 3P/4)^2}{2(\beta^2 - 1)} \quad P/2 \leq \xi \leq P$$

onde  $\rho_0 = \left( \frac{P}{4} \right)^2 \frac{1}{2(\beta^2 - 1)}$

Para obter a solução correspondente para  $\rho_z$  façamos uma mudança de variável, definindo  $\eta = \frac{4}{P} \xi - 1$  e  $R = \frac{\beta \rho_z}{\rho_0} = 0(1)$ .

A equação para  $\rho_z$  fica:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left\{ R - \left[ (1-\eta^2)^2 + \frac{R^2}{\beta^2} + \frac{1}{\rho_0^2} \right]^{1/2} \right\} + \frac{2R}{\left[ (1-\eta^2)^2 + \frac{R^2}{\beta^2} + \frac{1}{\rho_0^2} \right]^{1/2}} = 0 \quad (\text{III-52})$$

A equação (III-52) é fortemente não-linear e é resolvida assintoticamente em duas regiões: uma zona limite perto de  $\eta = 1$  e na região  $0 \leq \eta < 1$ .

As duas soluções são justapostas para  $1 \gg 1-\eta \gg (\beta^{-2} + \rho_0^{-2})^{1/2}$ , onde suas regiões de validade se superpõem. Longe da zona limite  $\eta$  satisfaz a desigualdade  $1-\eta \gg (\beta^{-2} + \rho_0^{-2})^{1/2}$ , de modo que podemos desprezar os termos em  $\rho_0^{-2}$ ,  $\beta^{-2}$  dentro dos colchetes. A solução é:

$$R = A (1-\eta^2) - 2/3 \eta^2 + 1/3 (1-\eta^2) \ln (1-\eta^2) \quad (\text{III-53})$$

$$1-\eta \gg (\beta^{-2} + \rho_0^{-2})^{1/2}$$

Quando  $1 \gg 1-\eta \geq 0$  a solução válida quando  $\eta \rightarrow 1$  é quase constante e tem a seguinte expansão assintótica:

$$R = R_0 + (2+R_0) \ln (1-\eta) - 1/2 R_0 (1-\eta) \ln \frac{16(1-\eta)^2}{R_0^2 \beta^{-2} + \rho_0^{-2}} \quad 1 \gg 1-\eta \geq 0 \quad (\text{III-54})$$

onde  $R_0 = R(1)$

Justapondo as duas últimas equações na sua região de validade comum obtemos:

$$R_0 = -2/3 \quad A = \frac{1}{6} \ln \frac{36 \beta^2 \rho_0^2}{4\rho_0^2 + 9\beta^2}$$

A condição de propagação dessas ondas é obtida usando-se as equações (II-11) e (II-14) que nos dão:

$$E_x = - \frac{\beta mc \omega_p}{e} \frac{d}{d\xi} \rho_x \quad (\text{III-55})$$

Usando (III-51), obtemos a amplitude do campo:

$$E_0 = \frac{\beta mc \omega_p}{|e|} \frac{8}{P}$$



Isto pode ser escrito como:

$$\left( \frac{e E_0}{mc\omega_p} \right)^2 = \frac{2 \beta^2 \rho_0}{\beta^2 - 1} \left[ \frac{32\rho_0}{p^2} (\beta^2 - 1) \right]$$

O termo entre colchetes na equação acima é igual a um, de modo que:

$$\left( \frac{e E_0}{mc\omega_p} \right)^2 = \frac{2 \beta^2 \rho_0}{\beta^2 - 1} \quad (\text{III-56})$$

Como  $\xi = \frac{\omega_p}{c} (z - Vt)$  temos:

$$p = \frac{\omega_p}{c} VT = \frac{2\pi \omega_p \beta}{\omega}$$

$$\text{Portanto } \rho_0 = \left( \frac{p}{4} \right)^2 \frac{1}{2(\beta^2 - 1)} = \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \frac{\beta^2 \pi^2}{8(\beta^2 - 1)} \quad (\text{III-57})$$

e finalmente obtemos, eliminando  $\rho_0$  entre (III-56) e (III-57):

$$\epsilon = \frac{1}{\beta^2} = 1 - \frac{\pi}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{mc}{|e|E_0} \quad (\text{III-58})$$

A condição de propagação é:

$$\frac{\pi}{2} \omega_p^2 \frac{mc}{|e|E_0} = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_c} < \omega \quad (\text{III-59})$$

Esta relação é quase idêntica a (III-24) que obtivêramos para ondas circularmente polarizadas de grande amplitude.

Podemos obter o fator de Lorentz, para grandes amplitudes, usando (III-56) e (III-58)

$$\gamma_0 \approx \rho_0 = \frac{\pi}{4} \frac{|e|E_0}{mc\omega} \quad (\text{III-60})$$

A condição de propagação fica:

$$1 - \frac{\pi^2}{8} \frac{\omega_p^2 / \gamma_0}{\omega^2} > 0 \quad (\text{III-61})$$

#### IV. Outros tipos de onda

Até agora discutimos a propagação de ondas planas num plasma homogêneo. A radiação de baixa frequência emitida por um pulsar, entretanto, é a de um dipolo magnético (Pacini, 1968; Gunn and Ostriker, 1969; Ostriker and Gunn, 1969) com amplitude igual a  $10^6$  para  $r = r_c = \frac{c}{\omega}$ .

Igualmente, o plasma existente na Nebulosa do Caranguejo está longe de ser homogêneo, visto que o pulsar central age como fonte de partículas, devendo a densidade crescer em direção ao centro.

Nesta secção, estudaremos a propagação da radiação de dipolo magnético num plasma homogêneo, e a seguir, analisaremos o efeito que as inhomogeneidades do plasma tem sobre a propagação de ondas planas.

##### IV-1. Propagação da radiação de dipolo magnético

Para a radiação de dipolo magnético da ordem mais baixa ( $m=0$ ) podemos escrever o campo elétrico na zona de radiação (Jackson, 1962-b) como:

$$\vec{E} = \frac{E_0}{kr} \sin \theta \sin (kr - \omega t) \vec{\phi} \quad (IV-1)$$

onde  $E_0 = kr_c \times 10^6$  para o Caranguejo.

A equação (II-1) nos fornece, supondo  $k$  de lenta variação com

$$\vec{B} = \frac{kc}{\omega} \vec{n} \times \vec{E} = - \frac{kc}{\omega} \frac{E_0}{kr} \sin \theta \sin (kr - \omega t) \vec{\theta} \quad (IV-2)$$

Colocando as duas últimas equações em (II-2) vem:

$$(\omega^2 - k^2 c^2) \frac{E_0}{kr} \sin \theta \cos(kr - \omega t) \vec{\phi} = 4\pi \omega n e \vec{v} \quad (IV-3)$$

Calculando  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  com o auxílio da fórmula:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (E_\phi)$$

obtemos, usando (IV-1)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (IV-4)$$

Levando (II-3) em conta, obtemos:

$$n = n_0 \quad (IV-5)$$

A equação (IV-3) nos fornece, então:

$$v_r = v_\theta = 0$$

$$v_\phi = (\omega^2 - k^2 c^2) \frac{E_0 \sin \theta \cos(kr - \omega t)}{kr 4\pi \omega n_0 e} \quad (IV-6)$$

A equação de movimento (II-5) torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{p} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{p} = \frac{e E_0}{kr} \sin \theta \sin(kr - \omega t) \left[ \vec{\phi} + \frac{k}{\omega} v_\phi \vec{n} \right] \quad (IV-7)$$

Em coordenadas polares, o termo em  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{p}$  é bastante complicado (Morse and Feshbach, 1953):

$$\left[ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{p} \right]_r = \left( v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) p_r - \frac{p_\theta v_\theta}{r} - \frac{p_\phi v_\phi}{r} \quad (IV-8)$$

$$\left[ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{p} \right]_\theta = \left( v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) p_\theta - \frac{p_\phi v_\phi}{r} \cot \theta + \frac{p_r v_\theta}{r} \quad (IV-9)$$

$$\left[ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{p} \right]_\phi = \left( v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} v_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) p_\phi + \frac{p_r v_\phi}{r} + \frac{p_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \quad (IV-10)$$

Examinando (IV-6), as três últimas equações se tornam:

$$\left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{p} \right]_r = - \frac{p_\phi v_\phi}{r} \quad (\text{IV-11})$$

$$\left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{p} \right]_\theta = - \frac{p_\phi v_\phi}{r} \cotg\theta \quad (\text{IV-12})$$

$$\left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{p} \right]_\phi = 0 \quad (\text{IV-13})$$

Como estamos interessados no comportamento assintótico dos campos podemos desprezar, então, o termo  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{p}$  em relação a  $\frac{\partial}{\partial t} \vec{p}$ , na equação (IV-7).

O termo radial  $\bar{e}$  é de ordem  $1/r^2$ , de modo que ficamos apenas com:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_\phi = \frac{e E_0}{kr} \sin\theta \sin(kr - \omega t) \quad (\text{IV-14})$$

ou 
$$p_\phi = \frac{e E_0}{kr} \sin\theta \frac{\cos(kr - \omega t)}{\omega} \quad (\text{IV-15})$$

o que nos dá:

$$v_\phi = \frac{e E_0}{\gamma m \omega} \sin\theta \frac{\cos(kr - \omega t)}{kr} \quad (\text{IV-16})$$

Combinando (IV-6) e (IV-16), obtemos a relação de dispersão:

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \frac{\omega_p^2}{\gamma} \quad (\text{IV-17})$$

ou 
$$\epsilon = \frac{1}{\beta^2} = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 / \gamma}{\omega^2} \quad (\text{IV-18})$$

que é formalmente idêntica à equação (III-12).

O fator de Lorentz  $\gamma$  pode ser obtido da equação (IV-15)

$$\gamma = \left[ 1 + \left( \frac{e E_0}{kr \omega m c} \sin\theta \cos(kr - \omega t) \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{IV-19})$$

Vemos que a energia da partícula decresce com a distância, como era de esperar-se.

No cálculo acima tínhamos suposto que  $k$  variava lentamente com  $r$ , na zona de radiação. De fato, examinando as equações (IV-17) e (IV-19) vemos que  $k^2 \rightarrow \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$  na zona de radiação e nosso cálculo é consistente.

#### IV-2. Onda incidindo num plasma não homogêneo

Até agora limitamo-nos a estudar o caso de propagação de ondas num plasma uniforme, que se estende até o infinito. Tal caso não é muito realístico e devemos esperar modificações sensíveis se a densidade do plasma variar bruscamente.

Na teoria linear isso leva à reflexão parcial ou total da onda incidente.

O modelo que vamos estudar é o de uma onda plana incidindo normalmente sobre uma camada de plasma com íons fixos, como se mostra na figura 1.

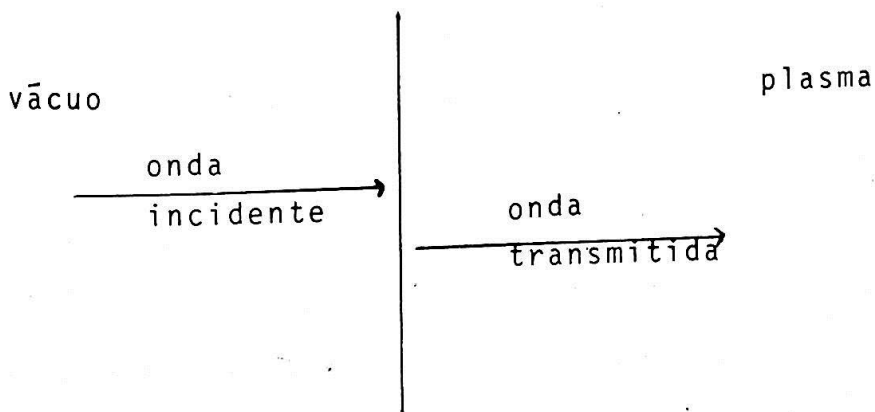


Figura 1

Nosso objetivo é derivar condições sob as quais a onda será transmitida através da camada, sem reflexão. Quando é este o caso, a solução continua a ser função de  $z$  somente através da fase  $z - Vt$ , embora a amplitude varie lentamente com  $z$  (i.é., a absorção é pequena). Na ausência de uma onda refletida, o fluxo de energia da onda incidente é constante.

O fluxo de energia  $S$  associado a uma onda circularmente polarizada é puramente eletromagnético:

$$S = \frac{cE^2}{8\pi\beta} \quad (IV-20)$$

onde  $\beta$  é dado por (III-21) enquanto que ondas linearmente polarizadas têm contribuição tanto dos campos como das partículas:

$$S = \frac{cE_0^2}{12\pi\beta} \left[ 1 + \frac{3}{2} \langle R \rangle \right] = \frac{cE_0^2}{72\pi\beta} \left[ 2/3 + \ln \frac{576 \beta^2 \rho_0^2}{4\rho_0^2 + 9\beta^2} \right] \quad (IV-21)$$

onde  $\beta$  é dado por (III-58) e  $\langle R \rangle$  é a média de  $R$  sobre um período.

A combinação das duas últimas equações com (III-21) e (III-58) mostra que não há ponto onde  $\beta \rightarrow \infty$  (cut-off) para densidades finitas e fluxo de energia constante. Portanto, a onda continua a ser transmitida através do plasma. Isto é uma consequência de efeitos não lineares: à medida que a onda incidente penetra até densidades maiores, os campos elétricos aumentam, possibilitando assim, a penetração posterior do plasma segundo (III-21) ou (III-58).

Entretanto, a onda não é transmitida para densidades arbitrariamente altas.

A aproximação WKB em que (III-58) e (IV-21) se baseiam será violada se existir um ponto em que o comprimento de onda exceder a escala de comprimento na qual a velocidade de fase varia. Para a propagação de ondas de pequena amplitude, esta ocorrência é identificada com a reflexão da onda. No problema não-linear que estamos tratando é difícil fazer identificação análoga, já que a presença da onda refletida altera a solução para a onda incidente. Para contornar esta dificuldade, procuramos um regime onde seja consistente assumir que há propagação sem a presença de uma onda refletida, i.é., onde o comprimento de onda incidente seja menor que a escala de comprimento para a variação de velocidade de fase.

Estas quantidades podem ser estimadas fãcilmente para uma onda circularmente polarizada de grande amplitude.

Impondo fluxo de energia constante, atravēs do plasma, obtemos, usando (IV-20):

$$\beta = \frac{E^2}{E_i^2} \quad (\text{IV-22})$$

onde  $E_i$  ē o campo da onda incidente (para a qual  $\beta = 1$ ).

Combinando (III-21) e (IV-22) temos a relaçaō:

$$\beta(1 - \beta^{-2})^2 = \frac{\omega_p^4}{\omega_{ci}^2 \omega^2} \quad (\text{IV-23})$$

onde  $\omega_{ci} = \frac{|e|E_i}{mc}$

Se definirmos  $L^{-1} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dz}$ , onde  $n$  ē a densidade, obtemos,

usando a equaçaō anterior e a definiçaō  $\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}$  :

$$\frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dz} = \frac{1}{\frac{L}{2} \left(1 + \frac{4}{\beta^2 - 1}\right)} \quad (\text{IV-24})$$

Como  $L$  ē, evidentemente, a escala de comprimento para a variaçaō da densidade, entã  $\frac{L}{2} \left(1 + \frac{4}{\beta^2 - 1}\right)$  ē a escala para a variaçaō da velocidade de fase.

Impondo que o comprimento de onda seja menor que esta ũltima escala (condiçaō de nã-reflexã), vem, usando a relaçaō  $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \beta c$

$$\frac{\omega L}{4\pi c \beta} \left(1 + \frac{4}{\beta^2 - 1}\right) > 1 \quad (\text{IV-25})$$

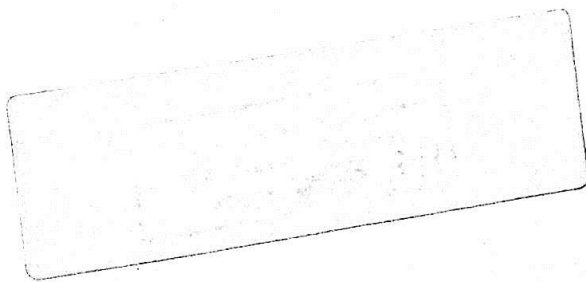
Usando (IV-23) podemos transformar (IV-25) em:

$$\left( \frac{\omega L}{4\pi c} \right)^{1/2} (1 + 2\beta^{-2} - 3\beta^{-4}) \frac{\omega_{ci} \omega}{\omega_p^2} > 1 \quad (IV-26)$$

Se  $\beta \gg 1$ , ficamos com a relação mais simples:

$$\left( \frac{\omega L}{4\pi c} \right)^{1/2} \frac{\omega_{ci} \omega}{\omega_p^2} > 1 \quad (IV-27)$$

As equações (IV-26) e (IV-27) nos dão a condição de propagação para uma onda incidindo num plasma não homogêneo.





V. Conclusões

V-1. Resumo e comentários

Podemos resumir os principais resultados na seguinte tabela, para ondas de grande amplitude:

	Tipo de onda	Cond. de prop.	Fator de Lorentz
meio ho mogêneo	plana circ. pol. $\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_0 = 0 \\ \vec{B}_0 \neq 0 \end{array} \right.$	$1 - \frac{\omega_p^2/\gamma}{\omega^2} > 0$	$\gamma = \frac{ e E}{mc\omega}$
		$1 - \frac{\omega_p^2/\gamma}{\omega(\omega \pm \Omega/\gamma)} > 0$	$\gamma = \frac{ e }{mc\omega} (E \pm B_0)$
	plana longi- tudinal $\vec{B}_0 = 0$	$1 - \frac{\pi^2}{8} \frac{\omega_p^2/\gamma_0}{\omega^2} = 0$	$\gamma_0 = \frac{\pi}{4} \frac{ e E_0}{mc\omega}$
	plana lin. pol. $\vec{B}_0 = 0$	$1 - \frac{\pi^2}{8} \frac{\omega_p^2/\gamma_0}{\omega^2} > 0$	$\gamma_0 = \frac{\pi}{4} \frac{ e E_0}{mc\omega}$
	rad. dipolo mag.	$1 - \frac{\omega_p^2/\gamma}{\omega^2} > 0$	$\gamma = \frac{ e  E_0/kr}{mc\omega}$
meio não homogêneo	plana circ.pol. $\vec{B}_0 = 0$	$1 - \left(\frac{4\pi c}{\omega L}\right)^{1/2} \frac{\omega_p^2/\gamma}{\omega^2} > 0$	$\gamma = \frac{ e E}{mc\omega}$

Tabela 1. Resumo dos principais resultados para ondas de grande amplitude.

De maneira geral, os resultados obtidos nos mostram que é possível a propagação de ondas de frequência inferior à de plasma, ao contrário do que prevê a teoria linear, se elas tiverem grande amplitude.

A razão pela qual ondas eletromagnéticas de grande amplitude penetram em plasmas mais facilmente que as de pequena amplitude é que a corrente de plasma é limitada pelo valor  $nec$ , ao invés de crescer com o campo elétrico como  $\frac{ne^2E}{m\omega}$ . A onda será refletida somente se a corren

te de plasma fôr grande o bastante para cancelar a corrente de deslocamento. Efeitos relativísticos, então, diminuem a capacidade do plasma de atuar como um dielétrico.

O modelo de íons fixos limita nossos cálculos a valores de  $\frac{\omega_c}{\omega}$  na faixa  $1 < \frac{\omega_c}{\omega} < \frac{M}{m}$ , onde  $M$  é a massa do íon.

Para ondas de grande amplitude, como as tratadas nas secções III-4 e IV-2 devemos ter  $1 \ll \frac{\omega_c}{\omega} < \frac{M}{m}$ .

Qualitativamente espera-se que quando os íons se tornem relativísticos a corrente que irão gerar estará sujeita à mesma limitação que os elétrons e não irá causar maiores mudanças na condição de propagação.

Em ondas linearmente polarizadas com velocidade de fase grande comparada com a da luz, tanto o movimento longitudinal dos elétrons como a perturbação na densidade são pequenos, por causa dos campos autoconsistentes. Entretanto, o movimento longitudinal é importante, porque o fluxo de energia das partículas excede o fluxo de energia dos campos para ondas linearmente polarizadas.

## V-2. Aplicações astrofísicas

Podemos agora analisar a propagação das ondas de baixa frequência na Nebulosa do Caranguejo.

A densidade eletrônica é, neste caso,  $n = 1 \text{ cm}^{-3}$  (Shklovsky, 1968), de modo que a onda se propaga segundo (IV-18) até que seja satisfeita a igualdade:

$$\gamma = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{4\pi n e^2}{m\omega^2} \tag{V-1}$$

Colocando os valores numéricos  $n = 1 \text{ cm}^{-3}$ ,  $\omega = 190 \text{ rad s}^{-1}$ , vem:

$$\gamma = 0.82 \times 10^5 \quad (V-2)$$

A Eq. (IV-19) nos dá o fator de Lorentz, tomando a fase igual a zero e  $\theta = \pi/2$  :

$$\gamma = \left[ 1 + \left( \frac{eE_0}{kr\omega c} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (V-3)$$

Para o pulsar do Caranguejo  $\frac{E_0}{kr} = \frac{1.58}{r} \times 10^{14}$  (Ostriker and Gunn, 1969); substituindo esse valor em (V-3) e usando (V-2) vem:

$$r = 1.8 \times 10^{14} \text{ cm} \approx 6 \times 10^{-5} \text{ pc} \quad (V-4)$$

Vemos por (V-2) e (V-4) que, considerando o plasma homogêneo, o pulsar central é capaz de acelerar partículas dentro de um raio relativamente curto, até a energia de ejeção  $\epsilon = \gamma mc^2$ .

Como o plasma relativístico que forma a Nebulosa do Caranguejo não é homogêneo, isso deve levar a onda a se propagar a distâncias maiores que as dadas por (V-4).

Se usarmos a fórmula (IV-27) e tomarmos  $L$  como sendo da ordem da distância  $r$  até o pulsar obtemos a relação:

$$r = \frac{1.4 \times 10^{19}}{n^2} \text{ cm} \quad (V-5)$$

que conecta a máxima densidade para a qual a onda se propaga até  $r$ .

A Figura (2) mostra o "plot" dessa relação assim como o fator de Lorentz em função de  $r$ .

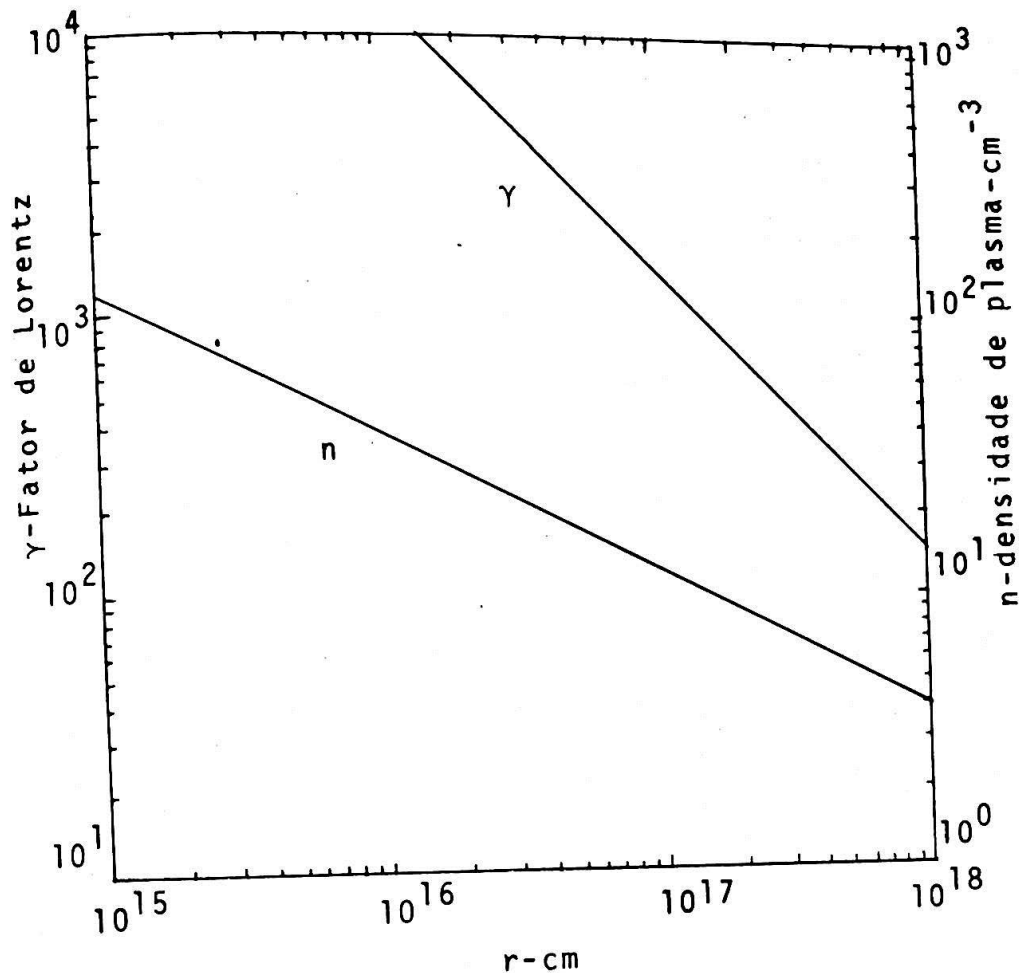


Figura 2. Fator de Lorentz e máxima densidade de plasma para transmissão de ondas eletromagnéticas, no Caranguejo.

Podemos concluir que é possível a radiação proveniente do pulsar penetrar a grandes distâncias na Nebulosa do Caranguejo. Por outro lado, penetração dos filamentos com sua maior densidade e escala de comprimento menor parece duvidosa. De fato, para os filamentos,  $n \approx 10^3 \text{ cm}^{-3}$  e  $L \approx 2 \times 10^{16} \text{ cm}$  (Davidson and Tucker, 1971) de modo que não é possível a onda penetrar além de  $5 \times 10^{14} \text{ cm}$ , o que é uma pequena fração das dimensões filamentosas.

Assim podemos dar uma base mais teórica à hipótese de que a região amorfa do Caranguejo esteja repleta de uma intensa radiação eletromagnética, já que a densidade nesta região é inferior a  $1 \text{ cm}^{-3}$ . Isso vem favorecer o modelo que prevê aceleração do envelope pela radiação proveniente do pulsar (Ostriker and Gunn, 1971).

Resta um problema a resolver, entretanto: embora a radiação de baixa frequência penetre a grandes distâncias, a energia das partículas

las do plasma decresce com  $r$  segundo (IV-19).

Como radiação sincrotron proveniente de elétrons com energias da ordem de  $10^{13} - 10^{14}$  eV tem sido observada na Nebulosa, devemos, na inexistência de outra fonte de energia que não o pulsar central, supor que as partículas sejam aceleradas na região próxima a ele. As partículas desacoplar-se-iam da onda e difundir-se-iam por toda a Nebulosa.

Este ponto de vista pode ser defendido pelo fato de que o tempo de vida de um elétron de alta energia na Nebulosa é da ordem de anos, possibilitando a sua difusão até grandes distâncias. De fato, a seguinte expressão (Jackson, 1962-c) nos dá a energia de uma partícula em função do tempo, num campo magnético perpendicular à sua velocidade.

$$t \cong \frac{3}{2} \frac{m^4 c^7}{e^4 B^2} \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right) \quad (V-6)$$

onde  $E_0$  é a energia inicial da partícula e  $B$  é o campo magnético.

Para elétrons isto nos dá:

$$t \cong 0.84 \times 10^{15} \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right) \text{ anos} \quad (E \text{ em eV}) \quad (V-7)$$

já que  $B \cong 10^{-4}$  G na Nebulosa do Caranguejo.

Para partículas de  $10^{13} - 10^{14}$  eV, o tempo de vida é

~ 10-100 anos.

O coeficiente de difusão na Nebulosa tem sido estimado como sendo  $D \cong 1.5 \times 10^{26} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  (Capelato, 1972), de modo que a distância de penetração é:

$$r = \sqrt{2Dt} \cong 3 \times 10^{17} - 10^{18} \text{ cm}$$

O diâmetro angular aparente do Caranguejo na região de raios-X é de cerca de  $2'$  (Kellogg, 1971). Como esse objeto encontra-se a 1700 pc da Terra, o raio da Nebulosa na região X deve ser  $0.5 \text{ pc} = 1.5 \times 10^{18} \text{ cm}$ .

Para a radiação emitida por elétrons de alta energia ( $10^{13} - 10^{14}$  eV) es se raio deve ser algo menor.

Esses dados mostram, então, que a produção de raios-X por radiação sincroton no Caranguejo é perfeitamente consistente com a aceleração de partículas nas vizinhanças do pulsar e subsequente difusão pela Nebulosa.

O problema maior que resta a resolver, portanto, é como se dá o desacoplamento do elétron com a onda, ou melhor, até que distância permanecem acoplados. Acreditamos que os efeitos não considerados no presente trabalho tornem-se importantes, tais como o espalhamento por irregularidades magnéticas na Nebulosa (que são as responsáveis pela difusão) e efeitos de temperatura.

REFERÊNCIAS

- Akhiezer, A.J. and Polovin, R.V. 1956, Sov. Phys. JETP 3, 696.
- Capelato, H. 1972, Comunicação particular.
- Davidson, K. and Tucker, W.H. 1971, J.A.U. Symposium nº 46 pg. 310.
- Gold, T. 1968, Nature 218, 731.
- Goldreich, P. and Julian, W.H. 1969, Astrophys. J. 157, 869.
- Gunn, J.E. and Ostriker, J.P. 1969, Phys. Rev. Letters 22, 728.
- Haymes, R.C. et al. 1968, Astrophys. J. 151, L9.
- Jackson, J.D. 1962-a, *Classical Eletrodynamics* (Wiley, N.Y.) eq. 7.102  
-b, op. cit. eqs. 16.52 e 16.53  
-c, ibidem pg. 500
- Kaw, P. and Dawson, J. 1970, Phys. of Fluids 13, 472.
- Kellog, E.M. 1971, I.A.U. Symposium nº 46, pg. 42.
- Max, C. and Perkins, F. 1971, Phys. Rev. Letters 27, 1342.
- Morse, P.M. and Feshbach, H. 1953, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, N.Y.) eq. 1.4.3.
- Ostriker, J.P. and Gunn, J.E. 1969, Astrophys. J. 157, 1395.  
- 1971, ibidem 164, L95.
- Pacini, F. 1968, Nature 219, 145.
- Richards, D. 1968, I.A.U. circ. nº 2114.
- Shklovsky, I.S. 1960, Sov. Astron. AJ 1, 690.  
- 1968, *Supernovae* (Wiley, N.Y.) pg. 261.