

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física

# Álgebras deformadas no modelo NJL: quebra e restauração da simetria quiral

*Varese Salvador Timóteo*

**Banca examinadora:**

Prof. Dr. Celso Luiz Lima (IFUSP) - Orientador  
Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini (UFSC)  
Prof. Dr. Antônio Delfino Júnior (UFF)  
Prof. Dr. Tobias Frederico (ITA-CTA)  
Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta (IFUSP)

*el. 1*

*Armando Corbani Ferraz*  
Presidente da Comissão de Pós Graduação



Tese submetida ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em ciências

*defesa 17/02*

*Grupo de Física Nuclear Teórica e Fenomenologia de Partículas Elementares*

*FINPE*

Fevereiro de 2000



539.725  
T585a  
D  
ex.1

### FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Timóteo, Varese Salvador

Álgebras Deformadas no Modelo NJL: Quebra e  
Restauração da Simetria Quiral. São Paulo. 1999

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo.  
Instituto de Física - Departamento de Física Nuclear

Orientador: Prof. Dr. Celso Luiz Lima  
Área de Concentração: Física de Hádrons (Física Nuclear)

Unitermos: 1. Álgebras Deformadas;  
2. Simetria Quiral; 3. Modelos Efetivos.

USP/IF/SBI-071/99

*À minha filha Sofia*

... do I see a vacuum there, or am I going blind ? ...

*Jimi Hendrix*

Up from the skies

**Axis: Bold as Love**

(1967)



## Agradecimentos

Ao Celso pela orientação, pela amizade, e pela paciência ao longo de todos esses anos.  
Ao Mané (Robilotta) e ao Fábio pelas nossas discussões, importantes para a realização desse trabalho.

Ao Pimentel e ao Galetti pelas discussões que ajudaram muito no começo do trabalho.  
Ao Mossoró e ao Mané (Malheiro) pelo muito que aprendi com eles e pela hospitalidade na UFF, em Niterói e no Rio de Janeiro.

Ao Tobias e ao Lauro pelo apoio e pela minha introdução nas Teorias Efetivas e Renormalização.

Ao Ulf (Meißner) pela oportunidade de visitar o Centro de Pesquisas de Jülich.

À Rosana pelas diversas ajudas ao longo do trabalho.

Ao IFUSP e ao FINPE pela infraestrutura e pelo apoio.

Ao pessoal da Universidade de Uppsala e do Centro de Pesquisas de Jülich pela hospitalidade.

À Surya pelo amor, pela compreensão, e pelo apoio ao longo de todos estes anos.

Aos meus pais e à toda minha família pelo incentivo a continuar fazendo o que eu gosto.

Aos meus amigos por tudo !

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro.

## Resumo

Este trabalho é resultado de uma série de estudos feitos com o objetivo de investigar a influência de uma álgebra fermiônica deformada nos mecanismos de quebra e restauração da simetria quirial no modelo de Nambu–Jona-Lasinio. Esse modelo foi escolhido pois é um modelo efetivo para a QCD que mostra com razoável facilidade uma de suas principais características, a quebra dinâmica da simetria quirial e a geração de uma massa dinâmica para os quarks.

O trabalho pode ser dividido essencialmente em três partes. A primeira consiste em um estudo inicial onde a deformação foi implementada diretamente na equação de gap do modelo NJL através de um cálculo deformado do condensado. Na segunda parte, o mesmo procedimento de deformação foi aplicado na Hamiltoniana do modelo permitindo que seus efeitos se propagem nos cálculos até uma nova equação de gap. Uma extensão natural do trabalho é um estudo do modelo deformado a temperatura finita, onde a coexistência da temperatura e da deformação algébrica pode ser investigada. Esse estudo é a terceira parte do trabalho.

## Abstract

This work is a result of a serie of studies where the aim is to investigate the influence of a deformed fermionic algebra in the mechanisms of breaking and restoration of chiral symmetry in the Nambu–Jona-Lasinio model. This model was chosen because it is an effective model for QCD which shows with reasonable facility one of its main features, the dynamical breaking of chiral symmetry and the generation of a dynamical mass for the quarks.

The work can be divided essentially in three parts. The first consists in a initial study where the deformation was implemented directly in the gap equation of the NJL model through a deformed calculation of the condensates. In second part, the same deformation procedure was applied in the Hamiltonian of the model allowing their effects to be propagated in the calculations till a new gap equation. A natural extension of the work is a study of the deformed model at finite temperature, where the coexistence of temperature and algebric deformation can be investigated. This study is the third part of the work.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Simetrias e quebra de simetria</b>	<b>5</b>
2.1	Introdução . . . . .	5
2.2	Quebra de simetria . . . . .	6
2.2.1	Em Mecânica Estatística . . . . .	6
2.2.2	Em Física Nuclear . . . . .	7
2.2.3	Em Teorias de Campo . . . . .	7
2.3	Simetria quiral . . . . .	12
<b>3</b>	<b>O modelo de Nambu–Jona-Lasinio</b>	<b>17</b>
3.1	Introdução . . . . .	17
3.2	O modelo NJL . . . . .	18
3.3	O Modelo NJL para três sabores . . . . .	25
3.3.1	Simetrias . . . . .	26
3.3.2	A interação efetiva . . . . .	27
3.3.3	Equações de gap . . . . .	29
3.3.4	Condensados quirais . . . . .	29
3.3.5	Espectro dos Mésons . . . . .	30
3.4	A abordagem de Bogoliubov-Valatin . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Álgebras deformadas</b>	<b>35</b>
4.1	Introdução . . . . .	35
4.2	Álgebra de momento angular deformada . . . . .	36

4.3	Exemplos em física nuclear . . . . .	37
4.3.1	Emparelhamento em uma camada única . . . . .	37
4.3.2	Espectro de núcleos rotacionais . . . . .	38
4.4	Álgebra fermiônica deformada . . . . .	39
4.4.1	Transformações unitárias . . . . .	39
4.4.2	Relações de anti-comutação . . . . .	40
4.4.3	Operadores de criação e aniquilação . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Deformação no modelo NJL</b>	<b>43</b>
5.1	Introdução . . . . .	43
5.2	Deformando a equação de gap . . . . .	44
5.2.1	O condensado deformado . . . . .	44
5.2.2	A estrutura do vácuo . . . . .	45
5.2.3	A equação de gap deformada . . . . .	47
5.3	Deformando a Hamiltoniana . . . . .	53
5.3.1	O funcional deformado . . . . .	53
5.3.2	A nova equação de gap . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Termodinâmica do modelo NJL deformado</b>	<b>65</b>
6.1	Introdução . . . . .	65
6.2	O modelo NJL a temperatura finita . . . . .	65
6.3	Valores esperados térmicos . . . . .	67
6.4	Temperatura e deformação . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Retrospecto e Perspectivas</b>	<b>71</b>
7.1	Retrospecto . . . . .	71
7.2	Perspectivas . . . . .	72
	<b>Apêndice A</b>	<b>77</b>
	<b>Apêndice B</b>	<b>79</b>
	<b>Apêndice C</b>	<b>81</b>

<i>CONTEÚDO</i>	III
<b>Apêndice D</b>	<b>83</b>
<b>Referências</b>	<b>87</b>





# Lista de Figuras

2.1	Ilustração do potencial no modelo $\sigma$ . A figura da esquerda corresponde a $f_0^2 < 0$ e a da direita a $f_0^2 > 0$ . . . . .	14
5.1	Efeito da deformação no cálculo do condensado. . . . .	49
5.2	Efeito da deformação na masa dinâmica dos quarks. As linhas horizontais representam dois valores para a massa constituinte dos quarks, 300 e 350 $MeV$ . . . . .	49
5.3	Constante de decaimento do pión calculada com a massa dinâmica deformada. A linha horizontal representa o valor fenomenológico $f_\pi = 93 MeV$ . . . . .	50
5.4	Cálculo usual do condensado para três valores da massa de corrente. . . . .	50
5.5	O ângulo variacional $2\theta$ em função do parâmetro de deformação $q$ quando a massa dinâmica é 300 $MeV$ . . . . .	61
5.6	A massa gerada correspondente em função do parâmetro de deformação $q$ quando o momento é fixo. Quando $M_0 = 0$ a massa dinâmica é 300 $MeV$ . . . . .	61
5.7	A transição de fase do modelo NJL. A curva preta corresponde ao caso não deformado $q = 1$ . Os três pares de curvas vermelhas e azuis correspondem a $q = 1.1$ , $q = 1.2$ , e $q = 1.3$ . Sendo que a vermelha é obtida com a deformação diretamente na equação de gap (condensados), e a azul corresponde à deformação na Hamiltoniana. . . . .	62
5.8	O condensado para $0 < q < 1$ . . . . .	63
5.9	Restauração da simetria quiral no limite $q \rightarrow 0$ . As curvas azul e vermelha correspondem a $G = 5.94$ e $G = 9.14$ respectivamente. . . . .	63
6.1	O condensado como função da temperatura para alguns valores do parâmetro de deformação $q$ . . . . .	70



6.2	O condensado como função da densidade de quarks para alguns valores de $q$ . A densidade está em unidades da densidade da matéria nuclear $\rho_0 = 0.15$ $fm^{-3}$ . . . . .	70
7.1	O condensado, a massa dinâmica dos quarks, a razão $B$ , e a massa do pión $m_\pi$ . . . . .	75
7.2	A massa do pión até $q = 0.5$ . . . . .	75

# Lista de Tabelas

5.1	Massa dinâmica e constante de decaimento do pión $f_\pi$ para diferentes valores of $q$ . $\Lambda=600$ MeV, $G_c=4.57$ GeV $^{-2}$ , e $G=6.53$ GeV $^{-2}$ . O condensado foi calculado para dois sabores e três cores. . . . .	51
5.2	Comportamento da constante de acoplamento $G$ para valores fixos da massa dinâmica e diferentes valores de $q$ . O corte e o acoplamento crítico são os mesmos da Tabela 5.1. . . . .	51
5.3	Número de operadores e elementos de matriz da Hamiltoniana antes e depois da deformação. $N$ é o número de termos da Hamiltoniana sem a deformação, $N_Q$ é o número de termos com a deformação, $N - N_Q$ representa os termos novos, e $O(Q)$ os termos de ordem $Q$ . . . . .	54



# Capítulo 1

## Introdução

A idéia central deste projeto é estudar os efeitos da implementação da deformação da álgebra fermiônica no Modelo de Nambu—Jona-Lasinio (NJL) [1]. O modelo NJL é muito útil para estudar a quebra da simetria quiral e a geração de uma massa dinâmica para os quarks com o aparecimento dos condensados. A quebra dinâmica de simetria que ocorre no modelo NJL também ocorre no Modelo de Ising e no Modelo BCS da supercondutividade, embora as simetrias quebradas e os sistemas físicos descritos sejam diferentes. Y. Nambu foi o primeiro a perceber este caráter universal da quebra dinâmica de simetria [1].

A universalidade dos conceitos de quebra de simetria e transição de fase pode ser ilustrada notando a profunda analogia que existe entre as transições de fase presentes no modelo NJL e no modelo de Ising em duas dimensões (I2D) [2]. No modelo NJL o parâmetro de ordem é o condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  e no modelo I2D é a magnetização espontânea  $\mathbf{M}$ . O papel da temperatura no I2D é representado no modelo NJL pelo inverso do acoplamento. Da mesma forma que só há magnetização espontânea para temperaturas menores que a temperatura crítica  $T_c$ , os condensados só aparecem quando o acoplamento entre os quarks excede um valor crítico  $G_c$ . A quebra explícita da simetria envolvida também tem o mesmo efeito nos dois casos: suprimir a transição de fase. No modelo I2D quem quebra explicitamente a simetria de rotação é um campo externo  $\mathbf{H}$ . No modelo NJL a responsável pela quebra explícita da simetria quiral é a massa de corrente dos quarks  $m_o$ . Abaixo podemos ver a correspondência entre as grandezas mais importantes

para o estudo da transição de fase e da quebra de simetria nos dois modelos

$$\begin{aligned}
 I2D &\longleftrightarrow NJL \\
 \mathbf{M} &\longleftrightarrow \langle \bar{\psi}\psi \rangle \\
 T_c &\longleftrightarrow G_c \\
 T &\longleftrightarrow 1/G \\
 \mathbf{H} &\longleftrightarrow m_o.
 \end{aligned}$$

A analogia entre estes dois modelos deixa bem clara a universalidade dos fenômenos de transição de fase e quebra de simetria que se manifestam da mesma forma num modelo efetivo para a QCD, onde se usa o formalismo de teoria quântica de campos, e num modelo de spins interagentes, onde se aplica a mecânica estatística.

A idéia de se implementar a álgebra fermiônica deformada no modelo NJL foi, no fundo, fruto de aplicações anteriores tanto na área de estrutura nuclear quanto em física de partículas.

Uma aplicação que certamente influenciou a realização deste trabalho foi no problema do emparelhamento em uma camada única. Esse problema foi intensamente discutido por C.L. Lima, D. Galetti, B.M. Pimentel, e S. Sharma, e os resultados [3] serão brevemente discutidos no capítulo 4.

Ainda no campo da física nuclear, foram feitos outros estudos que contribuíram para o entendimento dos efeitos produzidos pela deformação da álgebra envolvida num dado problema. Galetti e Pimentel [4] estudaram a influência da deformação no modelo de Lipkin [5], deformando os operadores dentro do formalismo de quasi-spin, não levando em conta a estrutura fermiônica do sistema. Mais tarde, Avancini e colaboradores [6] estudaram a transição de fase ligada à quebra da simetria esférica no espaço de quasi-spin, levando em conta explicitamente a estrutura fermiônica do modelo de Lipkin. Recentemente, Galetti e colaboradores [7] também investigaram o efeito conjunto da deformação e da temperatura no modelo de Lipkin.

O trabalho que estabeleceu a prescrição e o método aqui utilizados foi feito por L. Tripodi e C. L. Lima [31], onde foi construída uma versão  $q$ -covariante da aproximação de BCS, com a obtenção de uma equação de gap deformada. Esse trabalho foi fundamental pois uma das maneiras de se tratar o modelo NJL consiste no uso do formalismo variacional

com um vácuo tipo BCS.

Em física de hádrons também foram feitos estudos interessantes. Dey e colaboradores [8] obtiveram um bom acordo com os dados experimentais usando uma álgebra de Poincaré para ajustar as excitações rotacionais e radiais de mésons. Delfino e colaboradores [9] aplicaram a álgebra de Poincaré ao modelo NJL e identificaram o parâmetro de deformação com o cutoff do modelo.

Uma aplicação de álgebras deformadas também foi feita na área de física de partículas. B. E. Palladino e P. L. Ferreira [10] desenvolveram fórmulas de massa para quarks e léptons baseada na álgebra  $su_q(2)$  usando uma representação inequivalente.

Neste trabalho vamos estudar os efeitos da deformação algébrica no mecanismo de geração dinâmica de massa no modelo NJL devido à quebra da simetria quiral. Vamos investigar também a restauração da simetria quiral a temperatura finita juntamente com a deformação. O trabalho está organizado da seguinte forma: o capítulo 2 contém uma discussão sobre simetrias e quebra de simetria, no capítulo 3 apresentamos o modelo NJL, no capítulo 4 discutimos as álgebras deformadas, o capítulo 5 contém a aplicação da álgebra fermiônica deformada no modelo NJL, o capítulo 6 inclui a temperatura no modelo NJL deformado, e no capítulo 7 fazemos um retrospecto do trabalho e apontamos uma perspectiva que pode ser atacada futuramente.





## Capítulo 2

# Simetrias e quebra de simetria

### 2.1 Introdução

Diversos fenômenos em física estão relacionados a uma simetria ou à quebra de uma simetria. O entendimento das simetrias e dos mecanismos de quebra de simetria é fundamental para uma compreensão mais profunda de fenômenos como a supercondutividade ou ainda a geração de massa para os constituintes elementares da matéria.

A quebra dinâmica de simetria é um dos fenômenos mais profundos e mais importantes em física. Em física da matéria condensada a quebra dinâmica de simetria resulta na supercondutividade, em física de partículas ela é a principal fonte para a massa dos hádrons, e governa a dinâmica dos hádrons a baixas energias. Também se acredita, em física de altas energias, que a massa dos bósons vetoriais  $W^\pm$  e  $Z^0$  esteja associada a uma quebra espontânea da simetria de gauge local.

A primeira teoria a incorporar quebra dinâmica de simetria foi a teoria de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) da supercondutividade [11]. Esta teoria explicou um fenômeno muito interessante da natureza através da introdução de um vácuo para o sistema, que violava uma simetria fundamental do problema: a simetria associada ao número de partículas.

A universalidade deste conceito foi primeiramente percebida por Y. Nambu, que associou o emparelhamento fermiônico à geração de uma massa dinâmica para os férmions.

Neste capítulo vamos então discutir a quebra espontânea de simetria em algumas



áreas da física e apresentar a simetria quiral, uma vez que os seus mecanismos de quebra e restauração serão os objetos de estudo ao longo deste trabalho.

## 2.2 Quebra de simetria

Com o intuito de mostrar como os mecanismos de quebra de simetria são importantes em diversos ramos da física, vamos apresentar e discutir alguns exemplos que evidenciam seu caráter universal.

### 2.2.1 Em Mecânica Estatística

Em mecânica estatística o exemplo mais simples e conhecido de quebra de simetria ocorre no modelo de Ising em duas dimensões. Este modelo consiste de uma rede de spins interagentes e é especialmente interessante pois tem solução analítica, conhecida como solução de Onsager [2]. A característica mais importante deste modelo é a presença de uma temperatura crítica  $T_c$ , que separa duas fases distintas do modelo. Para temperaturas maiores que a temperatura crítica, os spins apontam em direções aleatórias resultando em uma magnetização global nula. Assim, os spins não apontam para uma direção específica e o sistema apresenta simetria rotacional. No entanto, quando a temperatura diminui para um valor abaixo do valor crítico, uma magnetização espontânea é gerada. Nesta fase a magnetização privilegia uma direção, e a simetria de rotação que o sistema tinha para  $T > T_c$  não é mais realizada.

A transição de fase de segunda ordem que ocorre em  $T = T_c$  é fruto da quebra de simetria. Pelo teorema de Goldstone, quando uma simetria contínua é quebrada espontaneamente, devemos observar um modo de frequência nula. Neste caso, o modo de Goldstone associado à quebra da simetria rotacional são ondas de spins com comprimento de onda  $\lambda \rightarrow \infty$  que se propagam através da rede de spins. Podemos dizer que as ondas de spin são o bóson de Goldstone associado à quebra da simetria rotacional.

Este exemplo mostra claramente o quanto importante são os mecanismos de quebra espontânea de simetria, e nos traz uma idéia do poder do teorema de Goldstone. Fenômenos parecidos ocorrem também em outras áreas, fortalecendo o caráter universal do conceito de quebra espontânea de simetria. Vejamos então outros exemplos.

### 2.2.2 Em Física Nuclear

Em física nuclear temos um exemplo muito interessante ligado à estrutura nuclear. Considerando o modelo de camadas, sabemos que próximo a uma camada fechada os núcleos são essencialmente esféricos. Cálculos feitos a partir do modelo de camadas esférico reproduzem muito bem os espectros experimentais, no entanto quando o número de núcleons fora da camada fechada aumenta o modelo torna-se tecnicamente intratável devido à necessidade de se levar em conta a interação residual.

O aumento do número de núcleons de valência resulta em um fenômeno espetacular: a simetria esférica passa a ser energeticamente desfavorável e o núcleo deforma. A simetria esférica é espontaneamente quebrada. No contexto do teorema de Goldstone, podemos dizer que a rotação nuclear é o modo coletivo associado à quebra da simetria esférica. A. Bohr [12], na palestra ministrada na noite em que recebeu seu prêmio Nobel, explicou o fenômeno de forma clara:

“De fato, a ocorrência do grau de liberdade rotacional coletivo pode ser encarada como oriunda da quebra da invariância rotacional, que introduz uma “deformação” que torna possível especificar a orientação do sistema. A rotação representa o modo coletivo associado a essa quebra espontânea de simetria (bóson de Goldstone).”

Este exemplo, além de muito interessante, mostra que os mecanismos de quebra espontânea de simetria não ocorrem exclusivamente em sistemas com infinitos graus de liberdade.

### 2.2.3 Em Teorias de Campo

A situação em teorias de campo é um pouco diferente pois lidamos com sistemas de infinitos graus de liberdade. Contudo, a universalidade do conceito de quebra de simetria permite uma analogia constante com os mecanismos de quebra de simetria em sistemas com graus de liberdade finitos. Aqui é conveniente discutirmos dois exemplos: o mecanismo de Higgs e a quebra da simetria quiral, uma das simetrias mais importantes da QCD e fundamental para a dinâmica dos hádrons mais leves.

Ao invés de entrar diretamente na descrição do mecanismo de Higgs, vamos mostrar como a massa de partículas pode ser gerada através da quebra espontânea de simetria. Consideremos um cenário onde existam apenas partículas escalares descritas pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \left( \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \right), \quad (2.1)$$

onde  $\lambda > 0$  e a Lagrangiana é invariante pela operação de simetria que troca  $\phi$  por  $-\phi$  (reflexão). Existem duas formas possíveis para o potencial presente na Lagrangiana. Quando  $\mu^2 > 0$  ela descreve um campo escalar de massa  $\mu$  que pode interagir através de um vértice de quatro campos caracterizado pela constante de acoplamento  $\lambda$ . Nesse caso dizemos que o campo escalar  $\phi$  é um campo auto-interagente. O vácuo, estado fundamental, corresponde a  $\phi = 0$  e obedece à simetria de reflexão da Lagrangiana.

Contudo, existe uma segunda possibilidade ainda mais interessante. No caso em que  $\mu^2 < 0$  o potencial passa a ter dois mínimos. Eles satisfazem

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi (\mu^2 + \lambda \phi^2) = 0 \quad (2.2)$$

e portanto estão localizados em

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = \pm v, \quad (2.3)$$

e o extremo  $\phi = 0$  não corresponde mais à um mínimo de energia. Podemos fazer expansões perturbativas em torno do mínimo  $\phi = +v$  ou  $\phi = -v$ . Assim escrevemos

$$\phi(x) = v + \eta(x), \quad (2.4)$$

onde  $\eta(x)$  representa as flutuações quânticas próximas ao mínimo. Substituindo a expressão acima na Lagrangiana, obtemos

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \lambda v^2 \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 \quad (2.5)$$

a menos de uma constante. Vemos que o campo  $\eta$  tem um termo de massa com o sinal correto. A massa adquirida pelo campo  $\eta$  é dada por

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}. \quad (2.6)$$



Os demais termos de  $\mathcal{L}'$  correspondem a interações do campo  $\eta$  com ele mesmo através de vértices de três e quatro campos.

Parece que temos uma confusão aqui. As Lagrangianas  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{L}'$  são completamente equivalentes, e uma transformação do tipo (2.4) não pode mudar a física do sistema. Se fosse possível trabalhar com as duas Lagrangianas exatamente, elas resultariam na mesma física. No entanto, em física de partículas se usa teoria de perturbação para calcular as flutuações em torno do mínimo de energia. Se usássemos  $\mathcal{L}$  nós veríamos que a série perturbativa não converge pois estaríamos expandindo em torno do ponto instável  $\phi = 0$ . O procedimento correto é usar  $\mathcal{L}'$  e expandir em torno de um dos vácuos estáveis  $\phi = \pm v$ . Em teoria de perturbação  $\mathcal{L}$  não leva à física correta, enquanto  $\mathcal{L}'$  o faz. A partícula escalar descrita pelas Lagrangianas, em princípio equivalentes, tem então uma massa, revelada pela quebra espontânea de simetria. A simetria de reflexão da Lagrangiana  $\mathcal{L}'$  foi aparentemente quebrada pela escolha do mínimo  $\phi = +v$ , ao invés de  $\phi = -v$ , em torno o qual se faz os cálculos perturbativos.

Ainda antes de chegarmos ao mecanismo de Higgs, acredito valer a pena descrever um caso clássico de quebra espontânea de simetria. Durante minha estadia no *Forschungszentrum Jülich*, fui acampar com um amigo, um estudante que fazia seu doutoramento junto à colaboração COSY 11, em uma praia do mar Báltico na ex-Alemanha Oriental. Durante a viagem de carro, enquanto viajávamos pela *Autobahn* A2 (que vai da região de Köln até praticamente Berlin, passando por Hannover), começamos a conversar sobre física. Ele me perguntou o que eu achava importante em física teórica, e eu disse que ele iria se divertir estudando quebra espontânea de simetria. Então ele me falou que já lera alguma coisa sobre o mecanismo de Higgs e sobre o modelo  $\lambda\phi^4$ , mas que gostaria de um exemplo mais palpável, um caso onde pudesse ver classicamente o que ocorre. Eu disse que poderia dar-lhe um exemplo quando estivéssemos montando a barraca iglu.

Quando chegamos ao nosso destino e começamos a montar os iglus, disse ao meu amigo que pegasse uma das varetas de fibra de vidro (que formam a estrutura que segura o telhado) e colocasse cada extremidade na palma de uma mão. Pressionando a vareta na direção de seu eixo de simetria, nada ocorre a menos que a força exceda um valor crítico. Nesse caso, a vareta curva-se em uma direção perpendicular a seu eixo: a simetria cilíndrica foi quebrada espontaneamente, já que a curvatura é energeticamente favorável. Se repetirmos o procedimento outras vezes veremos que cada vez a vareta curva para uma

direção diferente, mas sempre perpendicular a seu eixo de simetria original. As infinitas direções perpendiculares ao eixo da vareta terão estados fundamentais com a mesma energia, de modo que é impossível saber qual delas a vareta vai escolher. Chegamos à conclusão de que o exemplo parecia ser um análogo clássico do chapéu mexicano da  $\lambda\phi^4$ , onde temos uma circunferência com infinitos mínimos com a mesma energia. Não consegui imaginar nada mais palpável que isso.

Vamos agora voltar a discussão para o mecanismo de Higgs. Consideremos a Lagrangiana para um campo escalar complexo,  $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ , escrita em termos da derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (2.7)$$

que é invariante por transformações de fase locais

$$\mathcal{L} = D^\mu \phi^* D_\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Como queremos gerar massa por quebra espontânea de simetria, vamos pegar o caso em que  $\mu^2 < 0$ . Podemos repetir o procedimento usado no caso do campo escalar, só que agora temos um círculo com infinitos mínimos tal que

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda}, \quad (2.9)$$

sendo  $\lambda > 0$ . Para expandir a Lagrangiana em torno do vácuo devemos substituir

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} [v + \eta(x) + i\xi(x)] \quad (2.10)$$

na Lagrangiana acima para obter

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 - v^2 \lambda \eta^2 + \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A^\mu - ev A_\mu \partial^\mu \xi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

a menos dos termos de interação para os campos  $\eta$  e  $\xi$ . A partir da Lagrangiana  $\mathcal{L}'$  acima temos um bóson de Goldstone  $\xi$ , um escalar massivo  $\eta$ , e um vetorial massivo  $A_\mu$ :

$$m_\xi = 0, \quad (2.12)$$

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2}, \quad (2.13)$$

$$m_A = ev. \quad (2.14)$$

Vimos que foi gerada massa dinamicamente para o campo de gauge, mas ainda temos o problema da ocorrência do bóson de Goldstone. O que ocorre é que o espectro acima não pode estar correto. Ao dar uma massa ao campo  $A_\mu$ , o número de polarizações passou de 2 para 3, pois agora temos a polarização longitudinal. Mas simplesmente deslocando os campos não se criam novos graus de liberdade. Podemos deduzir que os campos em  $\mathcal{L}'$  não correspondem a partículas físicas distintas, mas qual deles é não físico? Será possível escolher uma transformação de gauge particular que elimine um campo da Lagrangiana?

Se notarmos que

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}(v + \eta(x) + i\xi(x)) \quad (2.15)$$

$$\simeq \sqrt{\frac{1}{2}}(v + \eta(x)) e^{i\xi/v}, \quad (2.16)$$

podemos substituir um conjunto diferente de campos reais  $(h, \theta, A_\mu)$ , onde

$$\phi(x) \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}(v + h(x)) e^{i\theta(x)/v} \quad (2.17)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{ev} \partial_\mu \theta \quad (2.18)$$

na Lagrangiana original. Esta é uma escolha particular, com  $\theta(x)$  escolhido de forma que  $h$  seja real. Com essa substituição obtemos

$$\mathcal{L}'' = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2 + \frac{1}{2}e^2 v^2 A_\mu^2 - \lambda v h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 + \frac{1}{2}e^2 A_\mu^2 h^2 + v e^2 A_\mu^2 h - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

onde o campo  $\theta(x)$  não aparece, e não temos o bóson de Goldstone nesta teoria. A Lagrangiana descreve apenas duas partículas massivas interagentes, um bóson vetorial de gauge  $A_\mu$ , e um escalar massivo  $h$ , chamado de bóson de Higgs<sup>1</sup>. O inconveniente bóson de Goldstone se transformou na necessária polarização longitudinal do bóson vetorial. Esse é o chamado mecanismo de Higgs.

Vamos agora nos concentrar na simetria quiral. No modelo NJL a quebra dinâmica da simetria quiral é responsável pela geração da massa dos quarks, associada ao surgimento do pión como bóson de Goldstone. A simplicidade com que se pode observar este mecanismo no modelo NJL é responsável pelo sucesso deste modelo efetivo para a QCD. Como o resto

<sup>1</sup>A observação experimental desta partícula ainda é um grande desafio aos físicos de altas energias.

do trabalho será essencialmente focado neste mecanismo, a seguir vamos apresentar com algum detalhe a simetria quiral. Os detalhes da quebra da simetria quiral serão discutidos em detalhe no próximo capítulo, onde será apresentado o modelo NJL.

## 2.3 Simetria quiral

O estudo da simetria quiral começou a se desenvolver com o decaimento  $\beta$  do nêutron, que ocorre via interação fraca. Para descrever este processo, Fermi propôs um modelo baseado na eletrodinâmica quântica, onde ele introduziu uma novidade: correntes não-eletromagnéticas. No modelo de Fermi o decaimento  $\beta$  está associado à interação de quatro campos fermiônicos através do produto de duas correntes que descrevem as transições bariônicas e leptônicas separadamente. Esta interação era descrita por uma Hamiltoniana da forma

$$H = \frac{G_F}{\sqrt{2}} L_\mu J^\mu + h.c., \quad (2.20)$$

onde  $L_\mu$  e  $J_\mu$  são as correntes leptônicas e hadrônicas, respectivamente, com acoplamentos Vetorial e Axial em uma estrutura  $V - A$ :

$$L_\mu = \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e}, \quad (2.21)$$

$$J_\mu = \bar{\psi}_p \gamma_\mu (1 - g_A \gamma_5) \psi_n \quad (2.22)$$

Uma característica interessante deste modelo é a presença de uma constante de acoplamento universal  $G_F$  que caracteriza os termos de interação com a mesma intensidade, exceto pela parte axial da corrente bariônica que incorpora o fator  $g_A$ , cujo valor é obtido fenomenologicamente.

A universalidade da constante de acoplamento provém da conservação da carga elétrica, que sugere a conservação da corrente vetorial. O mesmo não ocorre com a corrente axial, uma vez que  $g_A$  é diferente da unidade ( $g_A = 1.26$ ). Porém, o fato desta diferença ser pequena sugere uma conservação parcial da corrente axial bariônica  $A^\mu$ , associada a uma simetria aproximada. A conservação total desta corrente implicaria na supressão do canal principal de decaimento do pión  $\pi \rightarrow \mu\nu_\mu$ . Este fato pode ser verificado notando que o decaimento de um pión carregado com quadrimomento  $q^\mu$  é uma transição



axial isovetorial descrita pelo elemento de matriz

$$\langle 0 | A_a^\mu(x) | \pi_b(q) \rangle = -i f_\pi q^\mu e^{-iq \cdot x} \delta_{ab}, \quad (2.23)$$

onde  $f_\pi$  é a constante de decaimento do pión, e  $a$  e  $b$  são índices de isospin. Vamos considerar agora o elemento de matriz da divergência da corrente axial. A partir da expressão anterior obtém-se

$$\langle 0 | \partial_\mu A_a^\mu(x) | \pi_b(q) \rangle = -f_\pi q^\mu q_\mu e^{-iq \cdot x} \delta_{ab} \quad (2.24)$$

$$= -f_\pi m_\pi^2 e^{-iq \cdot x} \delta_{ab}. \quad (2.25)$$

Vemos então que a conservação exata da corrente axial bariônica implicaria na anulação de  $f_\pi$  ou  $m_\pi$ , o que proibiria o pión de decair. Se  $f_\pi = 0$  a conservação da corrente axial estaria associada ao modo de Wigner-Weyl da simetria quiral, no qual os férmions ficam sem massa, e os bósons são degenerados em massa com paridades opostas. No entanto, multipletos com essas características não são observados na natureza. Para  $m_\pi = 0$  temos o modo de Nambu-Goldstone, onde os férmions adquirem massa, e a quebra espontânea da simetria quiral está conectada com o aparecimento do pión como bóson de Goldstone.

No contexto do modelo  $\sigma$  podemos observar estes modos estudando um potencial da forma

$$V(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - f_0^2)^2, \quad (2.26)$$

ilustrado na figura 2.1. Quando  $f_0^2 < 0$  a situação de menor energia corresponde a um vácuo trivial em  $\langle \sigma \rangle = \langle \vec{\pi} \rangle = 0$ . Assim, temos férmions sem massa e os bósons  $\sigma$  e  $\vec{\pi}$  são degenerados com uma massa  $\mu = \sqrt{\lambda} |f_0|$ . Para  $f_0^2 > 0$  temos um vácuo degenerado, pois o potencial tem infinitos mínimos na hipersfera  $\langle \sigma \rangle^2 + \langle \vec{\pi} \rangle^2 = f_0^2$ . Agora os férmions adquirem uma massa  $m = g f_0$  e o pión aparece como bóson de Goldstone.

A hipótese da corrente axial parcialmente conservada (PCAC) é baseada na observação de que a divergência da corrente axial tem os mesmos números quânticos do campo do pión. Dessa forma, Gell-Mann e Lévy [13] propuseram a expressão

$$\partial^\mu A_\mu^\alpha = f_\pi m_\pi^2 \phi^\alpha(x), \quad (2.27)$$

válida no limite  $m_\pi^2 \rightarrow 0$  quando o momento do pión é pequeno.



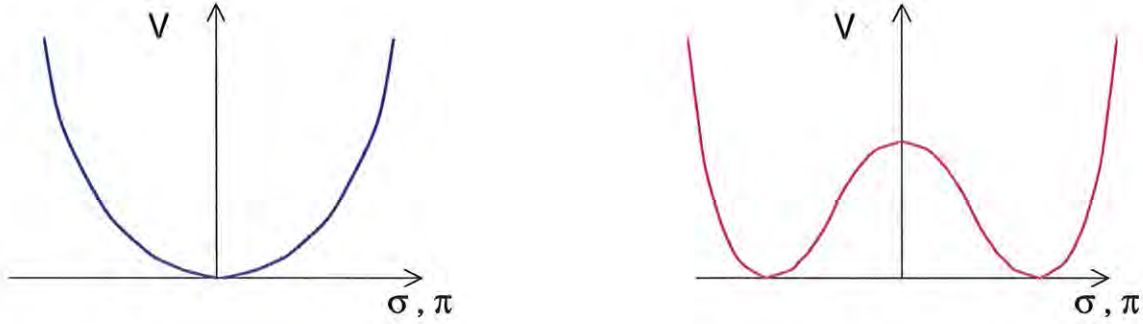


Figura 2.1: Ilustração do potencial no modelo  $\sigma$ . A figura da esquerda corresponde a  $f_0^2 < 0$  e a da direita a  $f_0^2 > 0$ .

A simetria associada à conservação da corrente vetorial e à conservação parcial da corrente axial é uma extensão da simetria de isospin, determinada pelas relações de comutação entre os geradores do grupo. A relação entre uma simetria e uma quantidade conservada é tratada pelo teorema de Noether, o qual mostra que as correntes com divergência nula correspondem a determinadas quantidades conservadas. Estas quantidades estão associadas às componentes temporais das correntes, portanto são denominadas cargas. Elas desempenham um papel dual muito importante, pois são simultaneamente os geradores das transformações de simetria, e as quantidades conservadas associadas a estas transformações.

A conservação da corrente vetorial corresponde à seguinte relação de comutação para as cargas vetoriais:

$$[Q_i^V, Q_j^V] = i\varepsilon_{ijk}Q_k^V. \quad (2.28)$$

Como as correntes axiais se transformam como isovetores, suas cargas satisfazem a relação de comutação

$$[Q_i^V, Q_j^A] = i\varepsilon_{ijk}Q_k^A. \quad (2.29)$$

Para fechar a álgebra do grupo pode-se introduzir a relação de comutação entre as cargas axiais proposta por Gell-Mann

$$[Q_i^A, Q_j^A] = i\varepsilon_{ijk}Q_k^V. \quad (2.30)$$

Estas relações de comutação correspondem ao grupo  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ , cujos geradores

são

$$Q^L = \frac{1}{2}(Q^V - Q^A) \quad (2.31)$$

$$Q^R = \frac{1}{2}(Q^V + Q^A), \quad (2.32)$$

e satisfazem as seguintes relações de comutação :

$$[Q_i^L, Q_j^L] = i\varepsilon_{ijk}Q_k^L, \quad (2.33)$$

$$[Q_i^R, Q_j^R] = i\varepsilon_{ijk}Q_k^R, \quad (2.34)$$

$$[Q_i^L, Q_j^R] = 0, \quad (2.35)$$

onde  $L$  e  $R$  denotam esquerdo (*Left*) e direito (*Right*). As relações de comutação acima podem ser estendidas para relações de comutação entre as correntes correspondentes. O conjunto de relações de comutação entre as correntes é denominado álgebra de correntes.



## Capítulo 3

# O modelo de Nambu–Jona-Lasinio

### 3.1 Introdução

A Cromodinâmica Quântica (QCD) é aceita atualmente como a teoria das interações fortes. Seu sucesso é observado principalmente na região de momentos transferidos grandes (ou pequenas distâncias), onde alguns processos de espalhamento podem ser calculados com grande precisão. Isto ocorre porque para pequenas distâncias a QCD apresenta o que chamamos de *liberdade assintótica*, ou seja, a constante de acoplamento quark-glúon se torna pequena e os quarks podem ser tratados como livres, sujeitos a correções perturbativas devido à troca de glúons. Por outro lado, para momentos transferidos pequenos (ou grandes distâncias) a constante de acoplamento se torna grande e os métodos perturbativos não se aplicam. Temos então o seguinte problema: a QCD é descrita por uma Lagrangiana que contém toda a dinâmica do sistema mas não é possível extrair informações sobre certos processos físicos de interesse como por exemplo as propriedades dos hádrons e suas interações ou ainda o comportamento da matéria hadrônica em densidades altas.

A dificuldade de obter informações diretamente a partir da Lagrangiana da QCD tem motivado a construção de modelos com Lagrangianas efetivas que apresentem as principais características que a Lagrangiana da QCD, mas que sejam matematicamente tratáveis. No começo dos anos sessenta Y. Nambu e G. Jona-Lasinio propuseram um modelo para a interação entre os núcleons baseado em uma analogia com a teoria de supercondutividade



[1]. Uma das idéias é que da mesma forma que o *gap* de energia em um supercondutor é criado pela interação, a massa de uma partícula de Dirac também se deve a algum tipo de interação entre férmions nus, sem massa. Em um supercondutor uma quasi-partícula é uma mistura de elétrons com o mesmo spin e momentos opostos. Analogamente, uma partícula de Dirac massiva é uma mistura de férmions nus com quirais opostas.

Originalmente o modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) surgiu como sendo uma teoria pré-QCD para a interação entre os núcleons a partir de uma interação efetiva de dois corpos. Hoje em dia esse modelo é reinterpretado como uma teoria com graus de liberdade de quarks. A Lagrangiana do modelo NJL foi construída de modo que as simetrias da QCD também façam parte dela. Uma das mais importantes dessas simetrias, fundamental para o entendimento dos hádrons mais leves, é a simetria quiral, quebrada espontaneamente na QCD. O modelo NJL é muito útil para se observar como esses fenômenos ocorrem. Em particular, a geração dinâmica de massa dos férmions através da quebra da simetria quiral é uma das principais características desse modelo.

A quebra espontânea da simetria quiral ocorre quando o valor médio da densidade escalar  $\bar{\psi}\psi$  no vácuo se torna não nulo. No modelo NJL isso ocorre de uma maneira abrupta, no limite quiral  $m_{quarks} = 0$ , quando a constante de acoplamento do modelo excede um valor crítico, separando as realizações de *Wigner-Weyl* e *Nambu-Goldstone* da simetria quiral. Quando se parte de massas de correntes não nulas, ou seja, quando temos explicitamente na Lagrangiana um termo de massa envolvendo o campo dos quarks, o valor do condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  passa a se aproximar de zero suavemente.

## 3.2 O modelo NJL

Nessa seção vamos apresentar o modelo NJL. Utilizamos nesta seção basicamente as revisões feitas por Vogl e Weise [14], e Klevansky [15]. Nosso objetivo é entender o modelo e suas propriedades para depois poder estudar o caso deformado.

Antes de introduzir o modelo NJL para dois ou três sabores é conveniente estudar uma versão mais simples para um sabor apenas. Nesse caso, onde o grupo de simetria é o  $U(1)$ , o modelo apresenta quebra espontânea de simetria quiral, e como veremos também ocorre no caso de três sabores  $SU(3)$ .

Considerando férmions sem massa representados por um campo de Dirac  $\psi(x)$ , a

corrente vetorial

$$V_\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \quad (3.1)$$

é conservada.

Supondo que esses férmions interagem através de um acoplamento local de suas correntes, temos a seguinte Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x) i\gamma_\mu \partial^\mu \psi(x) - GV_\mu(x) V^\mu(x), \quad (3.2)$$

onde  $G$  é uma constante de acoplamento efetiva. Com uma Lagrangiana deste tipo a teoria não é renormalizável, e portanto para que se tenha um modelo efetivo completo devemos especificar um esquema de regularização para eliminar as divergências que ocorrem. Assim, precisamos de um esquema de regularização que especifique uma escala para a teoria. Isso pode ser feito introduzindo-se um corte no momento dos quarks, que limita a região de energia descrita pelo modelo. Podemos também introduzir uma constante de acoplamento adimensional

$$g^2 = G\Lambda^2, \quad (3.3)$$

e definir dois regimes dentro do modelo:

- Acoplamento fraco  $\implies \frac{g^2}{4\pi} \ll 1$ ,
- Acoplamento forte  $\implies \frac{g^2}{4\pi} \geq 1$ .

A Lagrangiana 3.2 tem simetria quiral  $U(1)_L \otimes U(1)_R$ , que discutiremos a seguir. As partículas sem massa com spin  $\frac{1}{2}$  podem ser de mão esquerda ( $L$ ), ou seja, ter seus spins alinhados com o momento; ou de mão direita ( $R$ ), onde os spins são anti-alinhados com o momento. Introduzindo os campos

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi, \quad \psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi; \quad (3.4)$$

a Lagrangiana livre  $\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi$  é separada em duas partes

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}_L\gamma_\mu\partial^\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\psi_R. \quad (3.5)$$

A Lagrangiana acima é invariante por transformações  $U(1)$  globais dos campos  $\psi_L$  e  $\psi_R$ :

$$U(1)_L : \psi_L \rightarrow e^{i\alpha_L} \psi_L, \quad (3.6)$$

$$U(1)_R : \psi_L \rightarrow e^{i\alpha_R} \psi_R, \quad (3.7)$$

onde  $\alpha_L$  e  $\alpha_R$  são fases arbitrárias. Essa invariância é denominada simetria quiral  $U(1)_L \otimes U(1)_R$ , e as correntes de Noether correspondentes são

$$J_L^\mu = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L, \quad (3.8)$$

$$J_R^\mu = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R, \quad (3.9)$$

com  $\partial_\mu J_L^\mu = \partial_\mu J_R^\mu = 0$ . Essas correntes podem ser escritas em termos das correntes vetoriais e axiais da seguinte forma

$$J_L^\mu = \frac{1}{2} [V^\mu - A^\mu], \quad (3.10)$$

$$J_R^\mu = \frac{1}{2} [V^\mu + A^\mu], \quad (3.11)$$

onde

$$V^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (3.12)$$

$$A^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi, \quad (3.13)$$

com  $\partial_\mu V^\mu = \partial_\mu A^\mu = 0$ . Vemos então que a simetria quiral  $U(1)_L \otimes U(1)_R$  é equivalente à invariância sob o grupo  $U(1)_V \otimes U(1)_A$  com transformações

$$U(1)_V : \psi \rightarrow e^{i\alpha_V} \psi, \quad (3.14)$$

$$U(1)_A : \psi \rightarrow e^{i\gamma_5 \alpha_A} \psi. \quad (3.15)$$

Se adicionarmos um termo de massa  $\delta\mathcal{L} = -m_0 \bar{\psi} \psi$  a simetria axial  $U(1)_A$  é quebrada explicitamente e a corrente axial  $A^\mu$  não é mais conservada, assim temos

$$\partial_\mu A^\mu = 2im_0 \bar{\psi} \gamma_5 \psi, \quad (3.16)$$

enquanto a simetria  $U(1)_V$  permanece intacta, ou seja,  $\partial_\mu V^\mu = 0$ . A interação corrente-corrente que aparece na Lagrangiana 3.2 é claramente invariante pelas transformações quirais acima descritas.

Vamos então estudar as propriedades de um férmion no caso em que o acoplamento é forte partindo da Lagrangiana quiral 3.2. Os elementos de matriz da interação  $GV_\mu V^\mu$  contém tanto termos diretos como de troca, assim é conveniente introduzir a transformada de Fierz. A transformação de Fierz é uma técnica utilizada para examinar o efeito de um

rearranjo dos operadores dos campos fermiônicos que ocorrem em produtos quárticos no mesmo ponto do espaço-tempo. Em outras palavras, a transformada de Fierz serve para sabermos como os termos diretos e de troca estão relacionados. Quando se adiciona a transformada de Fierz  $\mathcal{F} \left\{ G \left( \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \right)^2 \right\}$  à interação original:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2} G \left( \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \right)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{F} \left\{ G \left( \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \right)^2 \right\}, \quad (3.17)$$

obtém-se a seguinte Lagrangiana invariante por uma transformação de Fierz

$$\mathcal{L}_{int} = G \left[ \left( \bar{\psi} \psi \right)^2 + \left( \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \right)^2 \right] - \frac{3}{2} G V_\mu V^\mu - \frac{1}{2} G A_\mu A^\mu, \quad (3.18)$$

composta por termos de contato escalar, pseudo-escalar, vetorial e axial. Na aproximação de campo médio, calcular os termos diretos com a Lagrangiana 3.18 é equivalente a calcular ambos os termos diretos e de troca com a interação presente na Lagrangiana 3.2. O próximo passo é linearizar a interação 3.18 fazendo a seguinte substituição

$$\left( \bar{\psi} \Gamma \psi \right)^2 \rightarrow 2 \bar{\psi} \Gamma \psi \langle \bar{\psi} \Gamma \psi \rangle, \quad (3.19)$$

onde  $\langle A \rangle$  representa o valor esperado de  $A$  no vácuo, e  $\Gamma$  é qualquer uma das matrizes de Dirac que aparecem na Lagrangiana de interação. Se o vácuo for invariante por transformações de Lorentz e de paridade, o único valor esperado não nulo é o  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ , que representa o condensado de um par de férmions. A equação do movimento para o campo  $\psi(x)$  é então dada por

$$\left[ i \gamma_\mu \partial^\mu + 2G \langle \bar{\psi} \psi \rangle \right] \psi(x) = 0. \quad (3.20)$$

Comparando a expressão acima com a equação de Dirac para um férmion de massa  $m$ , podemos definir uma massa dinâmica

$$m = -2G \langle \bar{\psi} \psi \rangle, \quad (3.21)$$

gerada por uma interação escalar suficientemente forte entre o férmion e o vácuo. A expressão 3.21 é chamada de equação de *gap* do modelo NJL, em analogia com a equação correspondente que determina o *gap* de energia em um supercondutor.

O condensado  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$  na aproximação de campo médio é, em termos do propagador de Dirac

$$S_F(x-y) = -i \langle T \left[ \psi(x) \bar{\psi}(y) \right] \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{\not{p} - m + i\epsilon}, \quad (3.22)$$



dado por

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -i \text{Tr} S_F(0) = -i \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon}. \quad (3.23)$$

Vemos que a massa  $m$  também aparece na expressão para o condensado, assim a equação 3.21 é de fato uma equação auto-consistente. A integral  $S_F(0)$ , que representa um *loop* fermiônico, diverge quadraticamente e portanto requer um corte. O esquema de regularização mais simples é limitar o tri-momento do férmion em um valor  $\Lambda$ . Após a integração na componente temporal temos a seguinte integral

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \int_{|\mathbf{p}| \leq \Lambda} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{2m}{E_{\mathbf{p}}^-}, \quad (3.24)$$

onde  $E_{\mathbf{p}}^- = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  é a energia dos férmions do mar de Dirac. Integrando nas variáveis angulares obtemos  $4\pi$ , de modo que o condensado é dado por

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{m}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp \frac{\mathbf{p}^2}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}. \quad (3.25)$$

Assim, o condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  representa a densidade escalar dos níveis de energia negativos preenchidos do mar de Dirac. E a equação de *gap*, que é reescrita como

$$m = \frac{2mG}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp \frac{\mathbf{p}^2}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}, \quad (3.26)$$

representa a interação de um único férmion com a parte do mar de Dirac que envolve baixos momentos  $|\mathbf{p}| \leq \Lambda$ . Colocando de outra forma, a interação cuja intensidade é controlada por  $G$  é *desligada* para momentos grandes  $|\mathbf{p}| > \Lambda$ .

A equação 3.26 tem uma solução não trivial ( $m \neq 0$ ) se a constante de acoplamento  $G$  exceder um valor crítico  $G_{crit} = \frac{\pi^2}{\Lambda^2}$ , tal que a *constante de estrutura fina* da teoria seja da ordem da unidade

$$\alpha_{crit} = \frac{g_{crit}^2}{4\pi} = \frac{G_{crit}\Lambda^2}{4\pi} = \frac{\pi}{4}. \quad (3.27)$$

Para  $g > g_{crit}$  temos que o valor do condensado é não nulo, e como a densidade escalar  $\bar{\psi}\psi$  quebra a simetria quirial o estado fundamental passa a não ter a simetria  $U(1)_L \otimes U(1)_R$  da Lagrangiana: a simetria quirial é espontaneamente quebrada.

Como já foi mencionado anteriormente, existem duas realizações da simetria quirial:

- Modo de Wigner-Weyl, no qual o condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$ , onde os férmions permanecem sem massa. No modelo NJL isso ocorre para  $G < G_{crit}$ .

- Modo de Nambu-Goldstone, no qual o condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ , onde os férmions adquirem massa e surge um bóson de Nambu-Goldstone sem massa. No modelo NJL isso ocorre para  $G > G_{crit}$ .

A quebra espontânea de uma simetria global implica na existência de um modo de frequência nula, o bóson de Nambu-Goldstone. No caso mais simples, onde temos apenas um férmion e o grupo de simetria é  $U(1) \otimes U(1)$ , o bóson de Goldstone é um pseudo-escalar neutro com  $J^\pi = 0^-$  composto por um par férmion-anti-férmion. Como seu spin e sua paridade refletem os números quânticos da simetria axial quebrada  $U(1)_A$ , podemos associar esse modo a uma espécie de *píon singleto*, em analogia com o caso de três sabores onde a quebra da simetria

$$U(3)_L \otimes U(3)_R = SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A, \quad (3.28)$$

dá origem ao noneto de mésons pseudo-escalares com  $J^\pi = 0^-$ , como veremos mais adiante.

Para ver como surge o bóson de Goldstone é preciso resolver a equação de Bethe-Salpeter (BS) e obter a matriz  $T$  no canal pseudo-escalar ( $PS$ ) do par férmion-anti-férmion para um dado  $q^2$  do par. Nesse canal a equação de Bethe-Salpeter reduz-se a uma equação matricial do tipo:

$$\begin{aligned} T_{PS}(q^2) &= K_{PS} + K_{PS} J_{PS}(q^2) K_{PS} + \dots \\ &= \frac{K_{PS}}{1 - K_{PS} J_{PS}(q^2)}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde  $J_{PS}(q^2)$  é a integral do *loop* férmion-anti-férmion no canal pseudo-escalar

$$J_{PS}(q^2) = iTr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[ \frac{i\gamma_5}{\left(\not{p} + \frac{\not{q}}{2}\right) - m + i\epsilon} \frac{i\gamma_5}{\left(\not{p} - \frac{\not{q}}{2}\right) - m + i\epsilon} \right] \quad (3.30)$$

que, assim como a equação de *gap*, deve ser regularizada. A interação nesse canal é governada pelo termo  $G(\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2$  da Lagrangiana 3.18, e os termos de troca são automaticamente levados em conta já que a Lagrangiana 3.18 é invariante de Fierz. A massa  $m_{PS}$  do *píon* é determinada pelo pólo da matriz  $T$ , ou seja, quando

$$1 - K_{PS} J_{PS}(q^2 = m_{PS}^2) = 0, \quad (3.31)$$

que é a condição de ressonância no canal pseudo-escalar. De fato, a condição 3.31 é satisfeita quando  $m_{PS} = 0$  como veremos a seguir:

$$J_{PS}(q^2 = 0) = -i \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_5 \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_5 \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (3.32)$$

como  $\text{Tr} [\gamma_5 (\not{p} + m) \gamma_5 (\not{p} + m)] = -4(p^2 - m^2)$ , temos que

$$\begin{aligned} J_{PS}(q^2 = 0) &= 4i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{i}{m} \text{Tr} S_F(0) = -\frac{\langle \bar{\psi} \psi \rangle}{m}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

O termo de Born da matriz  $T$  corresponde a  $K = 2G$ , assim a condição 3.31 é escrita como

$$\begin{aligned} 1 - 2G \left[ -\frac{\langle \bar{\psi} \psi \rangle}{m} \right] &= 0 \\ m &= -2G \langle \bar{\psi} \psi \rangle, \end{aligned} \quad (3.34)$$

que é justamente a equação de *gap* do modelo NJL, verificando-se o teorema de Goldstone<sup>1</sup>.

Agora é interessante estudar a influência do termo de quebra explícita da simetria quiral

$$\delta \mathcal{L} = -m_0 \bar{\psi} \psi, \quad m_0 \neq 0. \quad (3.35)$$

Fazendo uma rotação quiral  $\psi \rightarrow e^{i\gamma_5 \theta} \psi$ , o termo de massa para  $\theta$  pequeno torna-se

$$\delta \mathcal{L}_\theta = -m_0 \bar{\psi} \left( 1 + i\gamma_5 \theta - \frac{1}{2} \theta^2 + \dots \right) \psi. \quad (3.36)$$

Vemos que podemos relacionar  $\theta$  com o campo do pión  $\phi$ , uma vez que a densidade pseudo-escalar  $\bar{\psi} i\gamma_5 \psi$  é a fonte do campo do pión. Assim  $\theta = \frac{\phi}{f_{PS}}$ , onde  $f_{PS}$  é a constante de decaimento do pión através da corrente axial  $A_\mu$  definida pelo elemento de matriz

$$\langle 0 | A_\mu | \pi(q) \rangle = 2i f_{PS} q_\mu. \quad (3.37)$$

O termo de ordem  $\theta^2$  na expansão 3.36 tem a forma

$$\delta \mathcal{L}_{PS} = \frac{m_0}{2f_{PS}^2} \bar{\psi} \psi \phi^2, \quad (3.38)$$

<sup>1</sup>Pelo Teorema de Goldstone, a quebra espontânea da simetria quiral provoca o aparecimento de uma partícula sem massa (bóson de Goldstone).

e corresponde a um termo de massa para o pión

$$\delta\mathcal{L}_{PS} = -\frac{m_{PS}^2}{2}\phi^2. \quad (3.39)$$

Na aproximação de campo médio, onde  $\bar{\psi}\psi \rightarrow \langle\bar{\psi}\psi\rangle$ , comparando as expressões 3.39 e 3.38 encontramos a versão  $U(1)$  da relação de Gell-Mann–Oakes–Renner (GOR):

$$m_{PS}^2 f_{PS}^2 = -m_0 \langle\bar{\psi}\psi\rangle. \quad (3.40)$$

Essa relação é muito importante pois conecta os parâmetros da quebra espontânea da simetria quiral com os da quebra explícita pelo termo de massa.

O cenário de quebra espontânea de simetria descrito nesta seção é bem geral, com análogos em várias áreas da física. É interessante observar a analogia com um ferromagneto: para baixas temperaturas, ele é caracterizado por uma magnetização não nula, que é análoga ao condensado quiral  $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ . A Hamiltoniana do sistema de spins que representa o ferromagneto é simétrica por rotações, no entanto no estado fundamental, a magnetização aponta em uma direção definida: a simetria de rotação é espontaneamente quebrada. Esse é um fenômeno coletivo, ou seja, muitos spins colaboram para que o material se torne macroscopicamente magnetizado. Variações na direção da magnetização produzem um modo coletivo de baixa frequência dos spins. Essa onda de spin é o análogo do bóson de Goldstone para o caso da quebra espontânea da simetria de rotação. Da mesma forma, o aparecimento do pión como bóson de Goldstone é análogo à presença de estados coletivos rotacionais de baixa energia em sistemas de muitos corpos fortemente interagentes que ocorrem, por exemplo, em física nuclear.

### 3.3 O Modelo NJL para três sabores

O modelo NJL para dois sabores foi bastante estudado na década de oitenta, e se mostrou muito útil como um esquema para explorar a quebra espontânea de simetria quiral com o aparecimento dos condensados de quarks, a geração dinâmica de massa para os quarks e o surgimento do pión como bóson de Goldstone.

Nesta seção vamos estudar o modelo NJL com a incorporação do quark estranho  $s$ , em adição aos quarks  $u$  e  $d$  cujas massas de corrente são quase nulas. Além da quebra explícita



da simetria quiral, a inclusão do quark estranho leva ao *problema do  $\eta'$*  e à *anomalia axial*. Para transpor esse problema veremos que deve ser incluída uma interação na Lagrangiana do modelo NJL que quebre a simetria  $U(1)_A$ .

### 3.3.1 Simetrias

A Lagrangiana da QCD para o número de sabores  $N_f = 3$  é dada por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi} [i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m_0] \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (3.41)$$

onde

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig t_a \mathcal{A}_\mu^a, \quad (3.43)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a, \quad (3.44)$$

$a = 1, \dots, 8$  são os índices de cor,  $g$  é a contante de acoplamento forte,  $\mathcal{A}_\mu^a$  é o campo dos glúons, e cada sabor existe em três cores.

O modelo NJL deve ser construído de acordo com as simetrias da QCD, assim é conveniente discutir as simetrias da Lagrangiana 3.41, que além da simetria de *gauge* local  $SU(3)_{cor}$  é invariante por transformações quirais globais quando  $m_0 = 0$ . Considerando a Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{QCD}^{(0)} + \delta\mathcal{L}, \quad (3.45)$$

onde  $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$  é a Lagrangiana no limite  $m_0 \rightarrow 0$  e  $\delta\mathcal{L} = -m_0 \bar{\psi}\psi$ , temos para  $N_f = 3$  sabores que  $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$  é invariante pelo grupo

$$U(3)_L \otimes U(3)_R = SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A. \quad (3.46)$$

O grupo quiral  $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$  de sabor transforma os campos dos quarks  $\psi_{L,R}$  da seguinte forma

$$\psi_{L,R} \rightarrow \exp \left[ i \frac{\lambda \cdot \alpha_{L,R}}{2} \right] \psi_{L,R}, \quad (3.47)$$

onde  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_8)$  são as matrizes do grupo  $SU(3)_{sabor}$  com  $Tr(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}$ , e  $\alpha_{L,R}$  são fases arbitrárias. O grupo  $U(1)_V$  gera as transformações de fase  $\psi \rightarrow e^{i\alpha_V} \psi$ , que



está relacionada com a corrente bariônica  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ . Dessa forma, a simetria global no limite quiral  $m_0 \rightarrow 0$  é  $SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V$ , temos nove correntes vetoriais conservadas

$$V_\mu^i = \bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\lambda^i}{2}\psi, \quad i = 0, \dots, 8, \quad \lambda^0 = \sqrt{\frac{2}{3}}I, \quad (3.48)$$

onde  $I$  é a matriz unitária  $3 \times 3$ , e oito correntes axiais conservadas

$$A_\mu^i = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^i}{2}\psi, \quad i = 1, \dots, 8. \quad (3.49)$$

Se a simetria  $U(1)_A$  não fosse quebrada teríamos nove, ao invés de oito, correntes axiais conservadas. Assim, todos os nove mésons pseudo-escalares deveriam aparecer como bósons de Goldstone com massa nula degenerada. No entanto o que se observa é que o  $\eta'$  tem a massa comparável à do núcleon ( $m_\eta = 958$  MeV), e a simetria é de fato quebrada. No nível clássico da Lagrangiana  $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$  essa simetria não é quebrada, portanto, sua quebra ao nível quântico é chamada de anomalia axial<sup>2</sup>. O decaimento eletromagnético  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  ocorre devido a uma anomalia similar da QED.

### 3.3.2 A interação efetiva

A elaboração da versão  $SU(3)$  do modelo NJL segue os seguintes passos:

- usar os quarks leves ( $u, d, s$ ) como graus de liberdade básicos,
- assumir que o efeito dos glúons é absorvido em uma interação efetiva local,
- construir essa interação de acordo com as simetrias discutidas acima.

A Lagrangiana do modelo é então

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}[i\cancel{D} - m_0]\psi + \mathcal{L}_{int}, \quad (3.50)$$

com a matriz de massas de corrente  $m_0 = \text{diag}(m_0^u, m_0^d, m_0^s)$ , sendo os valores empíricos dados por

$$\begin{aligned} m_0^u &= (5 \pm 2)MeV, \\ m_0^d &= (9 \pm 3)MeV, \\ m_0^s &= (175 \pm 55)MeV. \end{aligned} \quad (3.51)$$

<sup>2</sup>Anomalias são simetrias de Lagrangianas clássicas quebradas no nível quântico.

A parte de interação é composta de dois termos

$$\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{int}^{(4)} + \mathcal{L}_{int}^{(6)}, \quad (3.52)$$

onde  $\mathcal{L}_{int}^{(4)}$  é uma interação local de quatro campos e  $\mathcal{L}_{int}^{(6)}$  é construída de forma a simular a quebra da simetria axial  $U(1)_A$  gerada por efeitos ligados aos instantons. No caso de três sabores também se introduz a transformada de Fierz para que as contribuições dos termos de troca sejam automaticamente levadas em conta calculando apenas os termos diretos com a Lagrangiana invariante de Fierz. Assim, a interação mais geral para a primeira parte, que contém tanto termos que são singletos de cor quanto octetos de cor, é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{(4)} = & G_S \sum_{i=0}^8 \left[ \left( \bar{\psi} \frac{\lambda^i}{2} \psi \right)^2 + \left( \bar{\psi} i \gamma_5 \frac{\lambda^i}{2} \psi \right)^2 \right] \\ & - G_V \sum_{i=0}^8 \left[ \left( \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\lambda^i}{2} \psi \right)^2 + \left( \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda^i}{2} \psi \right)^2 \right] \\ & - \delta G_V \left( \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\lambda^0}{2} \psi \right)^2 - \delta G_A \left( \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda^0}{2} \psi \right)^2 \\ & + \mathcal{L}_{int}^{octeto}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

A segunda parte da interação é introduzida na forma de um determinante no espaço de sabor

$$\mathcal{L}_{int}^{(6)} = \frac{G_D}{2} \left\{ Det \left[ \bar{\psi} (1 + \gamma_5) \psi \right] + Det \left[ \bar{\psi} (1 - \gamma_5) \psi \right] \right\}, \quad (3.54)$$

chamado determinante de 't Hooft [16]. Reescrevendo essa Lagrangiana como

$$\mathcal{L}_{int}^{(6)} = \frac{G_D}{12} d_{ijk} \left[ \frac{1}{3} \left( \bar{\psi} \lambda^i \psi \right) \left( \bar{\psi} \lambda^j \psi \right) \left( \bar{\psi} \lambda^k \psi \right) + \left( \bar{\psi} \gamma_5 \lambda^i \psi \right) \left( \bar{\psi} \gamma_5 \lambda^j \psi \right) \left( \bar{\psi} \lambda^k \psi \right) \right], \quad (3.55)$$

onde  $d_{ijk}$  são as constantes de estrutura do  $SU(3)^3$ , vemos que a interação envolve seis campos. No entanto, quando for incluída no *kernel* da equação de Bethe-Salpeter para determinar o espectro de massa dos mésons, essa interação de seis campos é reduzida a uma interação de quatro campos ligando-se dois férmions, ou seja, fechando um *loop*. Os parâmetros  $\delta G_V$  e  $\delta G_A$  têm um papel importante no que diz respeito a estrutura de spin dos quarks constituintes, mas em uma primeira abordagem ao modelo podem ser considerados nulos.

---

<sup>3</sup> $d_{000} = \sqrt{\frac{2}{3}}$  e  $d_{0jk} = -\sqrt{\frac{1}{6}}$  para  $j, k \neq 0$ .

### 3.3.3 Equações de gap

Da mesma forma que no caso anterior de um único férmion, linearizando as interações  $\mathcal{L}_{int}^{(4)}$  e  $\mathcal{L}_{int}^{(6)}$  obtemos uma equação de gap. No entanto, a interação na forma de um determinante 3.55 mistura os sabores, de tal forma que a massa do quark  $u$  recebe contribuição não só do condensado  $\langle \bar{u}u \rangle$  mas também dos condensados  $\langle \bar{d}d \rangle$  e  $\langle \bar{s}s \rangle$ . Para as massas dos quarks  $d$  e  $s$  ocorre o mesmo. Assim, no caso de três sabores temos as seguintes equações de gap

$$\begin{aligned} m_u &= m_0^u - G_S \langle \bar{u}u \rangle - G_D \langle \bar{d}d \rangle \langle \bar{s}s \rangle, \\ m_d &= m_0^d - G_S \langle \bar{d}d \rangle - G_D \langle \bar{u}u \rangle \langle \bar{s}s \rangle, \\ m_s &= m_0^s - G_S \langle \bar{s}s \rangle - G_D \langle \bar{u}u \rangle \langle \bar{d}d \rangle. \end{aligned} \quad (3.56)$$

O segundo termo<sup>4</sup> do lado direito das equações acima é o mesmo que se obtém para um sabor quando a interação  $\mathcal{L}_{int}^{(4)}$  é linearizada, o que corresponde ao aparecimento de um *loop* fermiônico dando origem ao condensado. O último termo vem da linearização de  $\mathcal{L}_{int}^{(6)}$ , e o produto de dois condensados reflete o aparecimento de dois loops fermiônicos.

### 3.3.4 Condensados quirais

Para cada um dos sabores  $f = u, d, s$  o condensado é dado por

$$\langle \bar{f}f \rangle = -4iN_c \int^\Lambda \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{m_f}{p^2 - m_f^2 + i\epsilon}, \quad (3.57)$$

onde a integral também deve ser regularizada. Ao invés de limitar o trimomento após a integração na componente temporal, é possível introduzir um corte covariante, restringindo o quadrimomento Euclidiano

$$\int^\Lambda d^4p \equiv \int d^4p \theta(\Lambda^2 - p_0^2 - \vec{p}^2), \quad (3.58)$$

e o valor do condensado é então dado por

$$\langle \bar{q}q \rangle = \frac{3m_q \Lambda^2}{4\pi^2} \left[ 1 - \frac{m_q^2}{\Lambda^2} \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{m_q^2} \right) \right]. \quad (3.59)$$

<sup>4</sup>Esse termo é proporcional a  $G_S$  pois a densidade escalar é a única cujo valor esperado no vácuo não é nulo.

Definindo a constante de acoplamento adimensional

$$g^2 = G\Lambda^2, \quad G = G_S + G_D \langle \bar{q}q \rangle, \quad (3.60)$$

observa-se que, para  $m_0^q = 0$  ocorre uma transição abrupta entre as fases de Wigner-Weyl ( $\langle \bar{q}q \rangle = 0$ ) e Nambu-Goldstone ( $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$ ) quando a constante de acoplamento excede um valor crítico  $\frac{g_{crit}^2}{4\pi} = \frac{\pi}{3}$  e o valor do condensado passa a ser não nulo. O efeito da introdução de massas de corrente não nulas  $m_0^q \neq 0$  é atenuar a separação entre as fases de Wigner-Weyl e Nambu-Goldstone conforme cresce a intensidade do acoplamento entre os quarks; quanto maior a massa de corrente mais suave a transição.

### 3.3.5 Espectro dos Mésons

No modelo NJL os mésons aparecem como excitações do vácuo, onde surgem os condensados. Para estudar o espectro dos mesóns mais leves o ingrediente básico é a equação de Bethe-Salpeter [17]

$$\mathcal{T}(q) = \mathcal{K} + iTr \int^\Lambda \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[ \mathcal{K} S_F \left( p + \frac{q}{2} \right) \mathcal{T}(q) S_F \left( p - \frac{q}{2} \right) \right], \quad (3.61)$$

onde  $\mathcal{K}$  é o *kernel* da interação de dois corpos gerada pelos termos singletos de cor das Lagrangianas  $\mathcal{L}_{int}^{(4)}$  e  $\mathcal{L}_{int}^{(6)}$ .

Para cada um dos canais mesônicos a equação de Bethe-Salpeter se reduz a uma equação matricial do tipo

$$\begin{aligned} T &= K + KJT \\ &= \frac{K}{1 - KJ}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

onde  $J$  é a função de correlação quark-antiquark. Ela é uma matriz nos espaços de Dirac e de sabor que generaliza a integral de *loop*

$$J_{\alpha\beta}^{ij}(q) = iN_c Tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[ \Gamma_\alpha \frac{\lambda^i}{2} S_F \left( p + \frac{q}{2} \right) \Gamma_\beta \frac{\lambda^j}{2} S_F \left( p - \frac{q}{2} \right) \right], \quad (3.63)$$

que também deve ser regularizada. Então, em cada canal, a massa dos mésons é obtida pela condição

$$Det [1 - KJ] = 0 \quad (3.64)$$

em  $q^2 = m^2$ . Dessa forma é possível obter, por exemplo, o espectro do noneto de mésons pseudo-escalares  $(\pi, K, \bar{K}, \eta, \eta')$  assim como o espectro do noneto de mésons vetoriais  $(\rho, \omega, K^*, \phi)$ .

### 3.4 A abordagem de Bogoliubov-Valatin

Nesta seção vamos estudar uma outra maneira de estudar a quebra espontânea da simetria quiral. Quando formos estudar o caso  $q$ -deformado vamos usar esta abordagem pois ela consiste em um cálculo variacional envolvendo a Hamiltoniana do modelo NJL e um vácuo tipo BCS. Nessa abordagem fica mais fácil implementar a deformação, pois basta substituir os operadores de criação e aniquilação por suas versões deformadas, e proceder como no caso não deformado que apresentaremos a seguir.

Vamos então considerar a Lagrangiana quiral do modelo NJL com dois sabores

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + G \left[ (\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \tau \psi)^2 \right], \quad (3.65)$$

onde o termo de massa foi omitido por simplicidade. A Hamiltoniana que corresponde à essa Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{H}_{NJL} = -i \bar{\psi} \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \psi - G \left[ (\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \tau \psi)^2 \right], \quad (3.66)$$

e a decomposição de Fourier dos campos em  $t = 0$ ,

$$\psi(x, 0) = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ b(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + d^\dagger(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right], \quad (3.67)$$

define os operadores  $b(\mathbf{p}, s)$  e  $d(\mathbf{p}, s)$  de aniquilação de partículas e antipartículas de momento  $\mathbf{p}$  e helicidade  $s$ , que destroem o vácuo normal  $|0\rangle$ , ou seja,

$$b(\mathbf{p}, s) |0\rangle = d(\mathbf{p}, s) |0\rangle = 0. \quad (3.68)$$

Os espinores  $u(\mathbf{p}, s)$  e  $v(\mathbf{p}, s)$  são auto-estados normalizados da helicidade satisfazendo

$$\not{p} u(\mathbf{p}, s) = \not{p} v(\mathbf{p}, s) = 0, \quad (3.69)$$

$$u^\dagger(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) = v^\dagger(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s) = 1. \quad (3.70)$$



Agora introduzimos um vácuo variacional tipo BCS

$$|NJL\rangle = \prod_{\mathbf{p}, s=\pm 1} \left[ \cos \theta(p) + s \sin \theta(p) b^\dagger(\mathbf{p}, s) d^\dagger(-\mathbf{p}, s) \right] |0\rangle, \quad (3.71)$$

que contém pares com momento e helicidade total zero. A diferença entre esse vácuo e o de BCS tradicional é que aqui o emparelhamento se dá entre uma partícula e sua antipartícula, ao invés de duas partículas do mesmo tipo. Os operadores que destroem esse vácuo

$$B(\mathbf{p}, s) |NJL\rangle = D(\mathbf{p}, s) |NJL\rangle = 0 \quad (3.72)$$

são dados pela transformação de Bogoliubov-Valatin [18]

$$B(\mathbf{p}, s) = \cos \theta(p) b(\mathbf{p}, s) + s \sin \theta(p) d^\dagger(-\mathbf{p}, s), \quad (3.73)$$

$$D(\mathbf{p}, s) = \cos \theta(p) d(\mathbf{p}, s) - s \sin \theta(p) b^\dagger(-\mathbf{p}, s). \quad (3.74)$$

Para calcular o valor esperado da Hamiltoniana do modelo NJL no vácuo 3.71

$$\langle NJL | \mathcal{H}_{NJL} | NJL \rangle, \quad (3.75)$$

é conveniente expressar  $\psi$  em termos dos operadores de quasi-partícula  $B(\mathbf{p}, s)$  e  $D(\mathbf{p}, s)$  como

$$\psi(x, 0) = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ B(\mathbf{p}, s) M_1(\mathbf{p}, s) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + D^\dagger(\mathbf{p}, s) M_2(\mathbf{p}, s) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (3.76)$$

onde

$$M_1(\mathbf{p}, s) = \left[ \cos \theta(p) + \gamma^0 \sin \theta(p) \right] u(\mathbf{p}, s), \quad (3.77)$$

$$M_2(\mathbf{p}, s) = \left[ \cos \theta(p) - \gamma^0 \sin \theta(p) \right] u(\mathbf{p}, s). \quad (3.78)$$

Usando as relações

$$\gamma_0 s v(-\mathbf{p}, s) = u(\mathbf{p}, s), \quad (3.79)$$

$$\sum_s u(\mathbf{p}, s) u^\dagger(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{2} \left( 1 - \gamma \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \gamma^0 \right), \quad (3.80)$$

chega-se ao funcional para a energia total na aproximação de Hartree

$$W[\phi] = -2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \cos \phi(p) - 4G (N_c N_f)^2 \left[ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin \phi(p) \right]^2, \quad (3.81)$$

onde  $\phi(p) = 2\theta(p)$ ,  $N_c$  é o número de cores e  $N_f$  o número de sabores. Para obter a forma de  $\phi(p)$  que minimiza a energia total 3.81 basta usar a condição

$$\frac{\delta W[\phi]}{\delta \phi(p)} = 0, \quad (3.82)$$

para encontrar

$$p \tan \phi(p) = 4GN_c N_f \int \frac{d^3 q}{(4\pi)^3} \sin \phi(q). \quad (3.83)$$

O termo do lado direito da equação acima não depende do momento e é apenas uma constante. Chamando essa constante de  $m$  temos

$$m = p \tan \phi(p), \quad \sin \phi(q) = \frac{m}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}, \quad (3.84)$$

que quando colocadas de volta em 3.83 resulta na equação de gap do modelo NJL na sua forma mais familiar

$$m = 4GN_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_p}, \quad (3.85)$$

onde  $E_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ . Como já foi discutido anteriormente, as integrais que ocorrem no modelo devem ser regularizadas pois a interação de contato não é renormalizável. Outra característica muito importante da interação de contato é que ela não é confinante, ou seja, no modelo NJL não há confinamento de quarks. No entanto, os processos hadrônicos que ocorrem abaixo do limiar de produção de quarks livres não devem depender dos detalhes de como se produz o confinamento.



# Capítulo 4

## Álgebras deformadas

### 4.1 Introdução

O conceito de álgebra deformada surgiu nos anos oitenta e ainda está sendo desenvolvido tanto em áreas da física quanto da matemática. Originalmente esse conceito foi introduzido dentro do contexto de modelos estatísticos exatamente solúveis [19], sistemas integráveis em teoria de campo, teoria de espalhamento quântico inverso [20], geometrias não comutativas [21], superálgebras deformadas [22], teoria de nós [23] e outras áreas. Apesar do grande esforço no desenvolvimento e no entendimento das álgebras deformadas, sua interpretação do ponto de vista físico é muitas vezes completamente desconhecida. Em alguns casos o significado físico da deformação da álgebra é estabelecido, por exemplo:

- no modelo XXZ, o ferromagnetismo ou antiferromagnetismo de uma cadeia de spin  $\frac{1}{2}$  pode ser simulado através da introdução de uma álgebra  $q$ -deformada [24],
- as bandas rotacionais de núcleos e moléculas que podem ser fitadas usando a Hamiltoniana de um rotor  $q$ -deformada [25, 26, 27] ao invés de usar o momento de inércia variável.

A seguir vamos então mostrar a  $q$ -deformação da álgebra do grupo  $SU(2)$  e alguns exemplos em física nuclear, baseado na referência [28].

## 4.2 Álgebra de momento angular deformada

A álgebra  $su_q(2)$  é a deformação da álgebra de Lie do grupo  $SU(2)$ . Nesse contexto, deformação significa uma modificação nas relações de comutação dos geradores da álgebra seguindo uma determinada prescrição. É importante notar que a maneira de deformar a álgebra, ou seja, a receita a ser seguida não é única, e sim uma escolha. Uma possível realização da álgebra  $su_q(2)$  em termos dos operadores Hermitianos  $J_+$ ,  $J_-$ , e  $J_0$  está esquematizada abaixo em comparação com o caso não deformado:

$$\begin{array}{ccc} SU(2) & & SU_q(2) \\ [J_0, J_\pm] = \pm J_\pm & \longrightarrow & [J_0, J_\pm] = \pm J_\pm \\ [J_+, J_-] = 2J_0 & \longrightarrow & [J_+, J_-] = [2J_0]_q \end{array} \quad (4.1)$$

A quantidade  $[x]_q$  que aparece acima é um número  $q$ -deformado definido como

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q^1 - q^{-1}} = \frac{\sinh \gamma x}{\sinh \gamma}, \quad (4.2)$$

onde  $q = e^\gamma$  pode ser um número complexo. Os números  $q$ -deformados tornam-se os números usuais quando  $q \rightarrow 1$  ou  $\gamma \rightarrow 0$ , assim as relações de comutação usuais da álgebra  $su(2)$  são recuperadas nesse limite.

O operador quadrático de Casimir  $q$ -deformado

$$\mathcal{C}_q = J_+ J_- + [J_0]_q [J_0 - 1]_q \quad (4.3)$$

comuta com os geradores da álgebra, e dadas as equações 4.1 existe uma representação [29] tal que

$$J_0 |j, m\rangle = m |j, m\rangle, \quad (4.4)$$

$$J_\pm |j, m\rangle = \sqrt{[j \mp m]_q [j \pm m + 1]_q} |j, m \pm 1\rangle. \quad (4.5)$$

Assim, os elementos da base  $|j, m\rangle$  também são auto-estados do operador de Casimir com auto-valores dado por

$$\mathcal{C}_q |j, m\rangle = [j]_q [j + 1]_q. \quad (4.6)$$

Vamos discutir a seguir algumas aplicações de álgebras  $q$ -deformadas em física nuclear.



## 4.3 Exemplos em física nuclear

### 4.3.1 Emparelhamento em uma camada única

O emparelhamento tem um papel muito importante na estrutura dos núcleos, sendo a parte mais importante da interação residual para núcleos em torno dos núcleos mágicos. Entre as diversas aplicações do emparelhamento em núcleos, o caso do isótopo  $^{40}\text{Ca}$  tem uma característica especial: como o nível  $1f_{7/2}$  é bem isolado dos demais, ele pode ser considerado como uma camada única. Nesse caso, a Hamiltoniana de emparelhamento pode ser escrita em termos de operadores quasi-spin como

$$\mathcal{H}_{\text{pairing}} = -GS_+S_- \quad (4.7)$$

$$= -GS^2 - GS_0(S_0 - 1), \quad (4.8)$$

onde

$$S_+ = \sum_{m>0} (-)^{j+m} c_{j,m}^\dagger c_{j,-m}^\dagger, \quad (4.9)$$

$$S_- = \sum_{m>0} (-)^{j+m} c_{j,-m} c_{j,m}, \quad (4.10)$$

$$S_0 = \frac{1}{2} \left[ \sum_m c_{j,m}^\dagger c_{j,m} - \Omega \right], \quad (4.11)$$

satisfazem as relações de comutação da álgebra de momento angular,  $c_{j,m}^\dagger$  ( $c_{j,m}$ ) são operadores de criação (aniquilação) na camada única e  $\Omega = \frac{1}{2}(2j+1) = 4$  é número de pares que cabem na camada. Os auto-estados dependem do número de partículas  $n$  e do número de partículas não emparelhadas  $\nu$  e são dados por

$$E_{n,\nu} = -\frac{G}{4} (n - \nu) (2\Omega - \nu - n + 2). \quad (4.12)$$

A  $q$ -deformação da Hamiltoniana de emparelhamento pode ser feita reescrevendo-a em termos do operador de Casimir e substituindo-o pelo operador deformado 4.3. A Hamiltoniana deformada fica então

$$\mathcal{H}_{\text{pairing}}^q = -GC_q - G[S_0]_q [S_0 - 1]_q, \quad (4.13)$$

cujos auto-valores são dados por [3]

$$E_{n,\nu}^q = -G \frac{\left[ q^{\frac{1}{2}(n-\nu)} - q^{\frac{1}{2}(n-\nu)} \right] \left\{ q^{[\Omega - \frac{1}{2}(n+\nu)+1]} - q^{-[\Omega - \frac{1}{2}(n+\nu)+1]} \right\}}{q - q^{-1}}. \quad (4.14)$$

Os resultados que se obtêm para o estado fundamental dos isótopos pares do  $Ca$  são bons mesmo usando um parâmetro de deformação  $q$  que depende do estado

$$q = \exp \left[ \frac{1}{2} (n - \nu) \gamma \right]. \quad (4.15)$$

Para entender o que está acontecendo podemos expandir um dos termos que aparece em  $\mathcal{H}_{pairing}^q$ :

$$\frac{q^{S_0} - q^{-S_0}}{q - q^{-1}} \approx S_0 + [(S_0 - 1)^2 + (S_0 - 3)^2 + \dots] (\delta q)^2. \quad (4.16)$$

Observando a expressão acima parece que a deformação da álgebra inclui de uma maneira efetiva termos de ordem superior da interação residual. Podemos dizer também que novas correlações entre os constituintes do sistema são introduzidas quando a álgebra é deformada.

### 4.3.2 Espectro de núcleos rotacionais

A Hamiltoniana  $q$ -deformada para núcleos rotacionais pode ser obtida a partir da usual substituindo o operador de Casimir do  $SU(2)$  pelo operador deformado 4.3, ou seja, fazendo

$$\mathcal{H}_{rotor} = E_0 + \frac{1}{2I} J(J+1) \longrightarrow \mathcal{H}_{rotor}^q = E_0 + \frac{1}{2I} \mathcal{C}_q.$$

No caso em que  $q$  é uma fase  $q = e^{i\gamma}$  e o operador de Casimir deformado é dado por 4.3, são obtidos bons resultados para o espectro rotacional de núcleos e moléculas. Para o  $^{236}U$ , por exemplo, as energias de transição são bem reproduzidas para  $\gamma = 0.03$ . Notando que o operador de Casimir deformado corresponde à uma expansão em potências de  $j(j+1)$

$$E_j = E_0 + a(q)j(j+1) + b(q)[j(j+1)]^2 + \dots,$$

onde os coeficientes  $a, b, \dots$  estão de acordo com a fenomenologia, vemos novamente que a deformação da álgebra tem o papel de incluir efetivamente correções de ordem superior nas energias de transição. Este segundo exemplo reforça a conclusão de que a deformação da álgebra introduz correlações no sistema.

Vamos agora apresentar uma álgebra fermiônica deformada que será utilizada no modelo NJL, uma vez que vamos lidar com quarks.

## 4.4 Álgebra fermiônica deformada

Se quisermos estudar os efeitos da deformação da álgebra em sistemas nos quais o caráter fermiônico das partículas envolvidas é explícito, devemos usar uma álgebra fermiônica deformada. Galetti e Pimentel [4] estudaram a influência da  $q$ -deformação no modelo de Lipkin deformando somente os operadores de quase spin, sem levar em conta a estrutura fermiônica do sistema. Posteriormente também foi feito um estudo onde a estrutura fermiônica foi considerada explicitamente [6]. A abordagem de quasi-spin não é viável para uma investigação no modelo NJL. Embora seja possível bosonizar o modelo NJL, não se pode obter uma Hamiltoniana tipo quasi-spin, e uma abordagem explicitamente fermiônica é necessária.

### 4.4.1 Transformações unitárias

Recentemente, as propriedades termodinâmicas de um sistema de férmions livres com dois sabores foi estudada por Ubriaco [30] no contexto dos grupos quânticos. Em particular, foi apresentada uma representação covariante  $su_q(N)$  da álgebra fermiônica para  $N$  arbitrário, em termos dos operadores de criação e aniquilação. No caso do grupo  $SU_q(2)$ , sua representação bidimensional é dada por uma matrix do tipo

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

onde os coeficientes da matriz  $(a, b, c, d)$  são elementos não comutativos que satisfzem a álgebra

$$ab = q^{-1}ba, \quad (4.18)$$

$$ac = q^{-1}ca, \quad (4.19)$$

$$bc = cb, \quad (4.20)$$

$$dc = qcd, \quad (4.21)$$

$$db = qbd, \quad (4.22)$$

$$da - ad = (q - q^{-1})bc, \quad (4.23)$$

$$ad - q^{-1}bc = 1, \quad (4.24)$$

sendo que a última relação define o  $q$ -determinante  $Det_q T$ . A exigência de que  $T$  seja unitária faz com que a matriz adjunta  $\bar{T}$  seja escrita como

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

onde o parâmetro  $q$  deve ser real, podendo estar no intervalo  $0 \leq q < \infty$ .

Dada a transformação linear

$$\psi'_i = \sum_{j=1}^2 T_{ij} \psi_j, \quad (4.26)$$

extraem-se as relações de anti-comutação para o grupo  $SU_q(2)$ .

#### 4.4.2 Relações de anti-comutação

Baseadas na transformação linear unitária descrita acima, a álgebra  $su_q(2)$  é então dada pelas seguintes relações de anti-comutação,

$$\{\psi_1, \bar{\psi}_1\} = 1 - (1 - q^{-2}) \bar{\psi}_2 \psi_2 \quad \{\psi_2, \bar{\psi}_2\} = 1, \quad (4.27)$$

$$\psi_1 \psi_2 = -q \psi_2 \psi_1 \quad \bar{\psi}_1 \psi_2 = -q \psi_2 \bar{\psi}_1, \quad (4.28)$$

$$\{\psi_1, \psi_1\} = 0 \quad \{\psi_2, \psi_2\} = 0, \quad (4.29)$$

onde vemos claramente que as relações usuais da álgebra  $su(2)$  são retomadas quando  $q = 1$ .

Um exemplo interessante que mostra claramente que a  $q$ -deformação introduz interação entre os componentes do sistema, foi considerado no trabalho de Ubriaco [30] e consiste no modelo mais simples invariante por  $SU_q(2)$ . Esse modelo é descrito por uma Hamiltoniana do tipo

$$H = \sum_k \bar{\Psi}_{k,1} \Psi_{k,1} + \bar{\Psi}_{k,2} \Psi_{k,2}. \quad (4.30)$$

Reescrevendo esta Hamiltoniana em termos dos férmions usuais do  $SU(2)$ , obtém-se

$$H = \sum_k \bar{\psi}_{k,1} \psi_{k,1} + \bar{\psi}_{k,2} \psi_{k,2} + \underbrace{(q^{-2} - 1)}_{G(q)} \underbrace{\bar{\psi}_{k,1} \psi_{k,1} \bar{\psi}_{k,2} \psi_{k,2}}_{int}. \quad (4.31)$$

Assim, vemos que o sistema livre do  $SU_q(2)$ , quando escrito em termos dos férmions usuais do  $SU(2)$ , se torna interagente com um acoplamento que depende do parâmetro de

deformação,  $G(q)$ . Este exemplo mostra que um sistema de férmions do  $SU_q(2)$  equivale a um sistema de férmions usuais adicionado de correlações. Este tipo de fenômeno sugere uma investigação mais profunda e detalhada da influência da deformação algébrica em um modelo hadrônico descrito por uma interação similar, que é o caso do modelo NJL.

### 4.4.3 Operadores de criação e aniquilação

Na construção de uma versão  $q$ -deformada da aproximação de BCS, Tripodi e Lima [31] usaram as versões deformadas dos operadores de criação e aniquilação para férmions que provém da deformação proposta por Ubrico [30]:

$$A_{jm} = a_{jm} \prod_{i=m+1} (1 + Q a_{ji}^\dagger a_{ji}), \quad (4.32)$$

$$A_{jm}^\dagger = a_{jm}^\dagger \prod_{i=m+1} (1 + Q a_{ji}^\dagger a_{ji}), \quad (4.33)$$

onde  $Q = q^{-1} - 1$ . Essas relações claramente se reduzem às relações usuais quando  $q = 1$ .

No caso do modelo NJL, vamos lidar com quarks sem massa de corrente com duas helicidades, negativa e positiva. Ou seja, para construirmos os operadores de criação e aniquilação para os quarks devemos usar  $j = 1/2$  e  $m = \pm 1/2$  nas expressões para os operadores acima. A primeira consequência desta deformação é que somente os operadores que correspondem a  $m = -\frac{1}{2}$  são modificados. Como no modelo NJL nós temos operadores de criação e aniquilação para quarks (anti-quarks), ocorre que apenas os operadores correspondendo aos quarks de helicidade negativa serão modificados. Explicitamente temos que [32]

$$A_- = a_- (1 + Q a_+^\dagger a_+) \quad , \quad A_-^\dagger = a_-^\dagger (1 + Q a_+^\dagger a_+), \quad (4.34)$$

$$A_+ = a_+ \quad , \quad A_+^\dagger = a_+^\dagger, \quad (4.35)$$

onde  $+$  ( $-$ ) denota a helicidade positiva (negativa).





# Capítulo 5

## Deformação no modelo NJL

### 5.1 Introdução

Neste capítulo vamos apresentar a implementação da álgebra fermiônica deformada no modelo NJL. Vamos descrever duas maneiras distintas de se aplicar a mesma deformação dos operadores fermiônicos. Uma delas consiste em um cálculo deformado do condensado [32] presente na equação de gap do modelo NJL

$$m = -2G \langle \bar{\psi}\psi \rangle, \quad (5.1)$$

o que significa deformar a equação substituindo o condensado original pela sua versão deformada  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_q$ , enquanto que a outra é mais fundamental uma vez que a deformação é efetuada diretamente na Hamiltoniana do modelo [33]. No primeiro método, a equação de gap acima é obtida linearizando a interação  $\mathcal{L}_{int}$  na Lagrangiana do modelo NJL

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \mathcal{L}_{int}, \quad (5.2)$$

$$\mathcal{L}_{int} = G \left[ (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau\psi)^2 \right]. \quad (5.3)$$

numa aproximação de campo médio. A Lagrangiana com a interação linearizada é dada por

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + 2G \langle \bar{\psi}\psi \rangle \bar{\psi}\psi, \quad (5.4)$$

que se comparada com a equação de Dirac para um férmion de massa  $m$  podemos observar que no modelo NJL os quarks adquirem uma massa dinâmica dada pela equação (5.1).

Uma vez feita uma investigação preliminar nos efeitos da deformação na equação de gap do modelo NJL [32], é então natural a extensão deste estudo através de uma aplicação do método de Bogoliubov-Valatin (BV) partindo de uma versão  $q$ -deformada da Hamiltoniana do modelo NJL. A segunda maneira de implementar a deformação é então mais formal, uma vez que aplicamos a deformação já na Hamiltoniana do modelo. Assim os efeitos da deformação se propagam ao longo do cálculo variacional até chegarmos a uma nova equação de gap. Um novo condensado também poderá ser associado à nova equação deformada e comparado com os resultados obtidos na primeira abordagem.

A supressão da transição de fase do modelo NJL, que ocorre quando os quarks tem massa de corrente, só pode ocorrer via deformação se esta alterar o ângulo variacional  $\theta(p)$ . Assim, minimizando o funcional proveniente da Hamiltoniana deformada, podemos obter um ângulo novo. A mudança do ângulo é necessária pois o efeito da massa de corrente é análogo a uma rotação quiral permanente <sup>1</sup>.

## 5.2 Deformando a equação de gap

### 5.2.1 O condensado deformado

O cálculo do condensado deformado pode ser efetuado com mais facilidade dentro da abordagem de Bogoliubov-Valatin, onde é feita uma decomposição de Fourier dos campos fermiônicos

$$\psi(x, 0) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ b(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + d^\dagger(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (5.5)$$

e um vácuo tipo BCS

$$|NJL\rangle = \prod_{\mathbf{p}, s=\pm 1} \left[ \cos \theta(p) + s \sin \theta(p) b^\dagger(\mathbf{p}, s) d^\dagger(-\mathbf{p}, s) \right] |0\rangle \quad (5.6)$$

é introduzido.

A deformação é implementada através da modificação dos operadores de criação e aniquilação [31],

---

<sup>1</sup>Neste ponto o modelo NJL é parecido com o modelo sigma linear, existindo uma correspondência entre o condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  e o valor esperado do campo sigma  $\langle \sigma \rangle$ .

$$A_{jm} = a_{jm} \prod_{i=m+1}^j (1 + Q a_{ji}^\dagger a_{ji}), \quad (5.7)$$

$$A_{jm}^\dagger = a_{jm}^\dagger \prod_{i=m+1}^j (1 + Q a_{ji}^\dagger a_{ji}), \quad (5.8)$$

$$Q = (q^{-1} - 1) \quad (5.9)$$

onde os operadores  $a_{jm}$  representam os operadores  $b$  ou  $d$ , e  $A_{jm}$  representa a versão deformada destes operadores; ao longo da tese estes operadores  $q$ -deformados serão representados por  $B$  e  $D$ . No caso do modelo NJL  $j = \frac{1}{2}$  e  $m = \pm \frac{1}{2}$ . Como já foi mencionado no capítulo anterior, essa deformação só afeta os operadores que correspondem à helicidade negativa. Assim a  $q$ -deformação dos operadores é dada por

$$A_- = a_- + Q a_- a_+^\dagger a_+ \quad A_-^\dagger = a_-^\dagger + Q a_-^\dagger a_+^\dagger a_+, \quad (5.10)$$

$$A_+ = a_+ \quad A_+^\dagger = a_+^\dagger. \quad (5.11)$$

Os campos fermiônicos são então escritos em termos dos novos operadores como

$$\begin{aligned} \Psi_q(x, 0) = & \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [B(\mathbf{p}, +)u(\mathbf{p}, +)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + D^\dagger(\mathbf{p}, +)v(\mathbf{p}, +)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}] \\ & + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [B(\mathbf{p}, -)u(\mathbf{p}, -)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + D^\dagger(\mathbf{p}, -)v(\mathbf{p}, -)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}], \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde os operadores em letras maiúsculas indicam que os operadores devem ser substituídos por suas versões deformadas via as equações (5.10) e (5.11).

### 5.2.2 A estrutura do vácuo

A estrutura do vácuo também desempenha um papel importante no cálculo dos elementos de matriz relevantes para obter o condensado. Para cada valor do momento  $\mathbf{p}$  o vácuo  $|NJL\rangle$  dado pela equação (5.6) tem a seguinte estrutura

$$\begin{aligned} |NJL; \mathbf{p}\rangle = & \cos^2 \theta(p) |0\rangle \\ & + \sin \theta(p) \cos \theta(p) b^\dagger(\mathbf{p}, +) d^\dagger(-\mathbf{p}, +) |0\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sin \theta(p) \cos \theta(p) b^\dagger(\mathbf{p}, -) d^\dagger(-\mathbf{p}, -) |0\rangle \\
& - \sin^2 \theta(p) b^\dagger(\mathbf{p}, -) d^\dagger(-\mathbf{p}, -) b^\dagger(\mathbf{p}, +) d^\dagger(-\mathbf{p}, +) |0\rangle, \quad (5.13)
\end{aligned}$$

o que faz com que os elementos de matriz de um operador  $\mathcal{O}$

$$\langle NJL; \mathbf{p}' | \mathcal{O} | NJL; \mathbf{p} \rangle, \quad (5.14)$$

tenham as seguintes contribuições

$$\begin{aligned}
& + \langle \mathbf{0} | \mathcal{O} | \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{0} | \mathcal{O} | \mathbf{1}+ \rangle - \langle \mathbf{0} | \mathcal{O} | \mathbf{1}- \rangle - \langle \mathbf{0} | \mathcal{O} | \mathbf{2} \rangle \\
& + \langle \mathbf{1}+ | \mathcal{O} | \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{1}+ | \mathcal{O} | \mathbf{1}+ \rangle - \langle \mathbf{1}+ | \mathcal{O} | \mathbf{1}- \rangle - \langle \mathbf{1}+ | \mathcal{O} | \mathbf{2} \rangle \\
& - \langle \mathbf{1}- | \mathcal{O} | \mathbf{0} \rangle - \langle \mathbf{1}- | \mathcal{O} | \mathbf{1}+ \rangle + \langle \mathbf{1}- | \mathcal{O} | \mathbf{1}- \rangle + \langle \mathbf{1}- | \mathcal{O} | \mathbf{2} \rangle \\
& - \langle \mathbf{2} | \mathcal{O} | \mathbf{0} \rangle - \langle \mathbf{2} | \mathcal{O} | \mathbf{1}+ \rangle + \langle \mathbf{2} | \mathcal{O} | \mathbf{1}- \rangle + \langle \mathbf{2} | \mathcal{O} | \mathbf{2} \rangle,
\end{aligned}$$

onde

$$|\mathbf{0}\rangle = \cos^2 \theta(p) |0\rangle, \quad (5.15)$$

$$|\mathbf{1}\pm\rangle = \sin \theta(p) \cos \theta(p) b^\dagger(\mathbf{p}, \pm) d^\dagger(-\mathbf{p}, \pm) |0\rangle, \quad (5.16)$$

$$|\mathbf{2}\rangle = \sin^2 \theta(p) b^\dagger(\mathbf{p}, -) d^\dagger(-\mathbf{p}, -) b^\dagger(\mathbf{p}, +) d^\dagger(-\mathbf{p}, +) |0\rangle. \quad (5.17)$$

ou

$$|\mathbf{0}\rangle = \cos^2 \theta(p) |0\rangle \quad (5.18)$$

$$|\mathbf{1}+\rangle = \sin \theta(p) \cos \theta(p) |\uparrow\downarrow\rangle, \quad (5.19)$$

$$|\mathbf{1}-\rangle = \sin \theta(p) \cos \theta(p) |\downarrow\uparrow\rangle, \quad (5.20)$$

$$|\mathbf{2}\rangle = \sin^2 \theta(p) |\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow\rangle. \quad (5.21)$$

Além da estrutura de pares do vácuo, esse estado tem uma propriedade muito importante no que se refere à modificação dos operadores de criação e aniquilação: a  $q$ -deformação de vácuos com essa estrutura produz apenas uma fase [31]

$$|NJL\rangle_q = e^{i\xi} |NJL\rangle. \quad (5.22)$$

Assim, o cálculo de valores esperados nesse vácuo não são afetados pela deformação do estado, e os efeitos da deformação serão produzidos apenas pelas modificações na densidade escalar e na Hamiltoniana do modelo NJL.



### 5.2.3 A equação de gap deformada

O condensado deformado é então dado por

$$\begin{aligned}\langle \bar{\psi}\psi \rangle_q &= \langle NJL; \mathbf{p}' | [\bar{\Psi}_q \Psi_q] | NJL; \mathbf{p} \rangle \\ &= \langle \bar{\psi}\psi \rangle + \langle NJL; \mathbf{p}' | \mathcal{Q} | NJL; \mathbf{p} \rangle,\end{aligned}\quad (5.23)$$

onde  $\mathcal{Q}$  representa o conjunto de operadores que surgem quando a álgebra é deformada. No caso da densidade escalar,  $\mathcal{Q}$  contém tanto termos de ordem  $Q$  como de  $Q^2$ . Vamos considerar aqui apenas os de primeira ordem em  $Q$ . Existem 4 termos que contribuem para os elementos de matriz da parte deformada da densidade escalar. Eles estão apresentados explicitamente no apêndice C.

A contribuição proveniente da deformação é então dada por

$$\begin{aligned}\langle NJL; \mathbf{p}' | \mathcal{Q} | NJL; \mathbf{p} \rangle &= -2 \langle \mathbf{2} | \mathcal{O}_{1,2}^q | \mathbf{1}+ \rangle - 2 \langle \mathbf{1}+ | \mathcal{O}_{3,4}^q | \mathbf{2} \rangle \\ &= -4 \langle \mathbf{2} | \mathcal{O}_{1,2}^q | \mathbf{1}+ \rangle \\ &= -4 \langle \mathbf{1}+ | \mathcal{O}_{3,4}^q | \mathbf{2} \rangle,\end{aligned}\quad (5.24)$$

pois a contribuição individual de cada termo é a mesma

$$\langle \mathbf{1}+ | \mathcal{O}_{3,4}^q | \mathbf{2} \rangle = -Q \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin^3 \theta(p) \cos \theta(p) = \langle \mathbf{2} | \mathcal{O}_{1,2}^q | \mathbf{1}+ \rangle. \quad (5.25)$$

Como

$$\sin^3 \theta(p) \cos \theta(p) = \frac{1}{4} [\sin 2\theta(p) - \sin 2\theta(p) \cos 2\theta(p)], \quad (5.26)$$

a parte deformada do condensado é dada por

$$\langle NJL; \mathbf{p}' | \mathcal{Q} | NJL; \mathbf{p} \rangle = Q \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [\sin 2\theta(p) - \sin 2\theta(p) \cos 2\theta(p)]. \quad (5.27)$$

Um cálculo análogo para o condensado não deformado resulta em

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} 2 \sin 2\theta(p). \quad (5.28)$$

Os ângulos  $\theta(p)$  que são compatíveis com a equação de gap que estamos deformando têm a seguinte forma

$$\sin 2\theta(p) = \frac{m}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}, \quad (5.29)$$

$$\cos 2\theta(p) = \frac{p}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}. \quad (5.30)$$



Substituindo as equações acima nas expressões do condensado deformado obtemos

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_q = - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2m}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} + Q \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{m}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} - \frac{mp}{\mathbf{p}^2 + m^2} \right]. \quad (5.31)$$

A equação de gap deformada é obtida diretamente substituindo o condensado usual da equação (5.1) pela sua versão deformada

$$m = -2G \langle \bar{\psi}\psi \rangle_q, \quad (5.32)$$

cuja forma integral é dada por

$$m = \frac{2Gm}{\pi^2} \left[ \left(1 - \frac{Q}{2}\right) \int_0^\Lambda dp \frac{\mathbf{p}^2}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} + \frac{Q}{2} \int_0^\Lambda dp \frac{\mathbf{p}^3}{\mathbf{p}^2 + m^2} \right], \quad (5.33)$$

onde  $\Lambda$  é um corte no momento. Aqui é importante notar que se  $Q = 0$  ( $q = 1$ ) nós reobtemos a equação de gap do modelo NJL na sua forma mais familiar. A equação de gap acima, como a usual, também apresenta soluções quando o acoplamento excede um valor crítico. Portanto, ela exhibe a mesma transição de fase quando a massa de corrente dos quarks é zero  $m_0 = 0$ . No entanto a deformação tem um efeito no valor do condensado, e este efeito cresce com o acoplamento. Quando  $q > 1$  ( $Q < 0$ ) o valor do condensado aumenta e na situação inversa,  $q < 1$  ( $Q > 0$ ) o valor do condensado diminui. Este efeito poder ser observado na figura (5.1), onde mostramos o caso  $q > 1$  ( $Q < 0$ ). Na figura (5.2) podemos ver o efeito da deformação na massa dinâmica dos quarks. Uma conclusão interessante que podemos tirar a partir desta figura é que se quisermos fixar a massa dinâmica em algum valor razoável para a massa constituinte dos quarks, digamos 300 ou 350 *MeV* vemos que a deformação exige um valor menor para o acoplamento que no caso usual. Em outras palavras, a deformação provoca um aumento efetivo do acoplamento. As tabelas (5.1) e (5.2) resumem estes resultados mostrando o aumento da massa e a diminuição do acoplamento para que se obtenha uma determinada massa dinâmica. O oposto ocorre para o caso no qual  $q < 1$  ( $Q > 0$ ). A figura (5.3) mostra a constante de decaimento do pión calculada com a massa deformada

$$f_\pi^2 = N_c m^2 \int_0^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{p}^2 + m^2)^{3/2}}, \quad (5.34)$$

onde observamos um efeito similar ao observado no caso da massa. Finalmente, na figura (5.4) vemos o condensado calculado da forma usual  $q = 1$  ( $Q = 0$ ) para três valores da massa de corrente 0, 5 e 10 *MeV*.

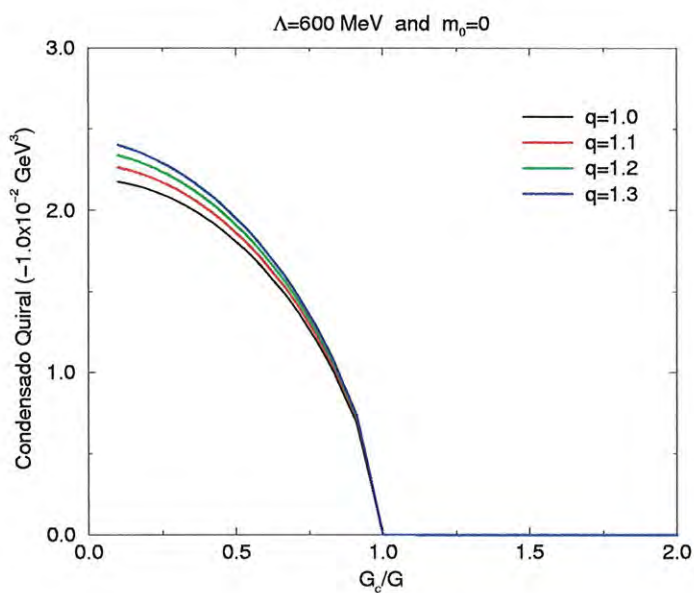


Figura 5.1: Efeito da deformação no cálculo do condensado.

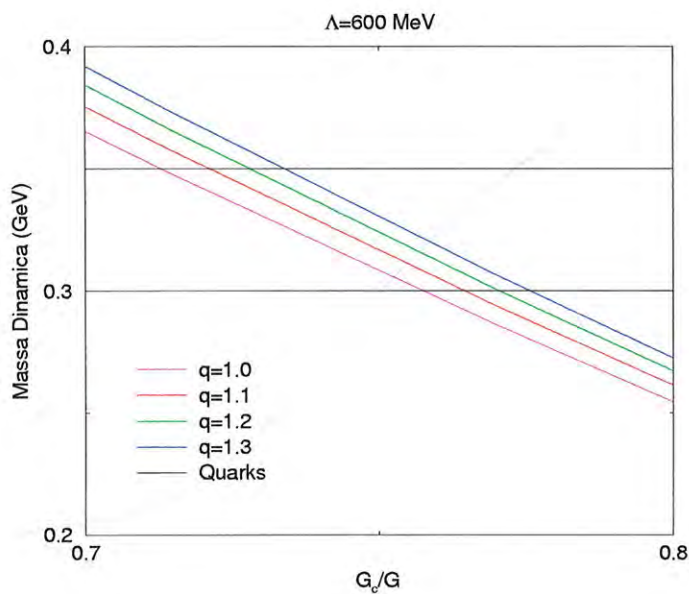


Figura 5.2: Efeito da deformação na masa dinâmica dos quarks. As linhas horizontais representam dois valores para a massa constituinte dos quarks, 300 e 350 MeV.

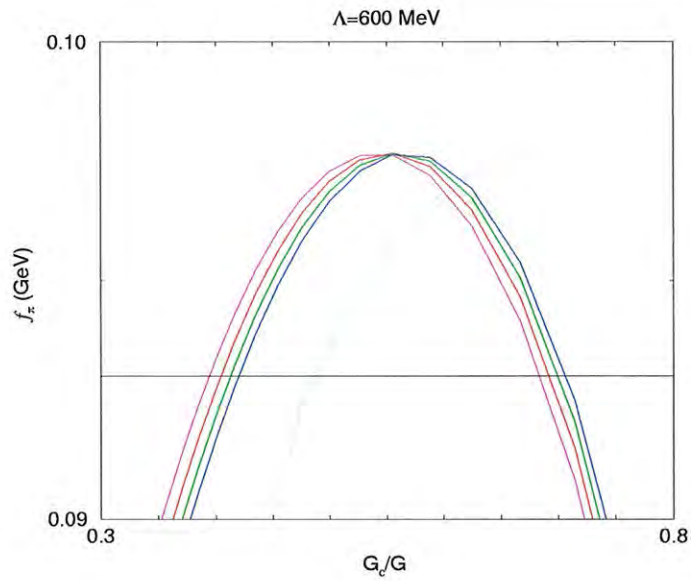


Figura 5.3: Constante de decaimento do pión calculada com a massa dinâmica deformada. A linha horizontal representa o valor fenomenológico  $f_\pi = 93$  MeV.

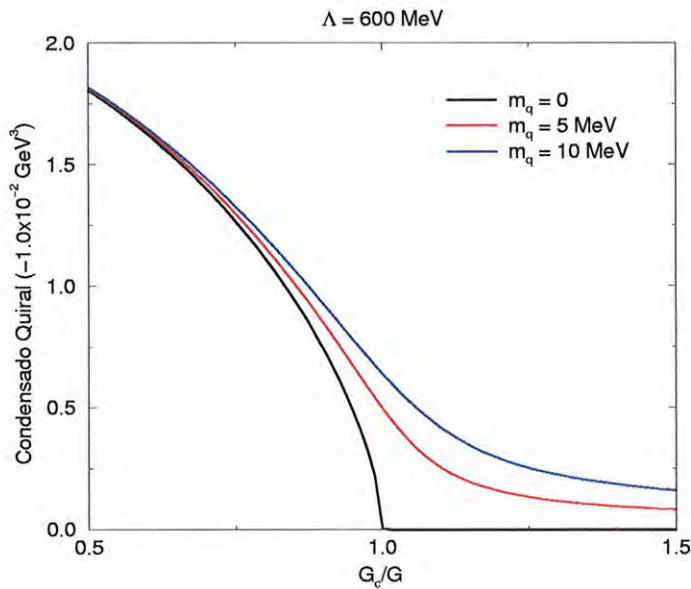


Figura 5.4: Cálculo usual do condensado para três valores da massa de corrente.

	$q = 1.0$	$q = 1.1$	$q = 1.2$	$q = 1.3$
Massa [MeV]	365	375	384	392
$f_\pi$ [MeV]	92.0	92.4	92.9	93.3

Tabela 5.1: Massa dinâmica e constante de decaimento do pión  $f_\pi$  para diferentes valores of  $q$ .  $\Lambda=600$  MeV,  $G_c=4.57$  GeV<sup>-2</sup>, e  $G=6.53$  GeV<sup>-2</sup>. O condensado foi calculado para dois sabores e três cores.

Massa [MeV]	$q = 1.0$	$q = 1.1$	$q = 1.2$	$q = 1.3$
<b>300</b>	6.04	5.98	5.94	5.90
<b>350</b>	6.42	6.35	6.28	6.23

Tabela 5.2: Comportamento da constante de acoplamento  $G$  para valores fixos da massa dinâmica e diferentes valores de  $q$ . O corte e o acoplamento crítico são os mesmos da Tabela 5.1.



## 5.3 Deformando a Hamiltoniana

### 5.3.1 O funcional deformado

O cálculo do funcional  $\mathcal{W}[\theta(p)]$  na abordagem de Bogoliubov-Valatin é baseado na Hamiltoniana do modelo NJL

$$\mathcal{W}[\theta(p)] = \langle NJL; \mathbf{p}' | \mathcal{H}_{NJL} | NJL; \mathbf{p} \rangle, \quad (5.35)$$

onde

$$\mathcal{H}_{NJL} = -i\bar{\psi}\gamma \cdot \nabla\psi - G(\bar{\psi}\psi)^2 - G(\bar{\psi}i\gamma_5\tau\psi)^2, \quad (5.36)$$

e os campos fermiônicos  $\psi$  são decompostos da maneira usual

$$\psi(x, 0) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ b(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + d^\dagger(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right]. \quad (5.37)$$

Como este cálculo é equivalente a um tratamento de campo médio na Lagrangiana do modelo NJL, o último termo da Hamiltoniana não precisa ser calculado já que ele não contribui na aproximação de campo médio se o vácuo for invariante por paridade.

O funcional deformado é dado por

$$\mathcal{W}^q[\theta(p)] = \langle NJL; \mathbf{p}' | \mathcal{H}_{NJL}^q | NJL; \mathbf{p} \rangle, \quad (5.38)$$

onde  $\mathcal{H}_{NJL}^q$  é a Hamiltoniana  $q$ -deformada do modelo NJL. Ela pode ser escrita em termos dos campos como

$$\mathcal{H}_{NJL}^q = -i\bar{\psi}_q\gamma \cdot \nabla\psi_q - G(\bar{\psi}_q\psi_q)^2, \quad (5.39)$$

e o campo fermiônico deformado  $\psi_q$  é dado por

$$\psi_q(x, 0) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ B(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + D^\dagger(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right]. \quad (5.40)$$

Os operadores de criação e aniquilação de quarks (ou anti-quarks) são deformados utilizando a prescrição proposta por Ubriaco [30] através das seguintes equações

$$B_- = b_- (1 + Qb_+^\dagger b_+) \quad , \quad B_-^\dagger = b_-^\dagger (1 + Qb_+^\dagger b_+), \quad (5.41)$$

$$D_- = d_- (1 + Qd_+^\dagger d_+) \quad , \quad D_-^\dagger = d_-^\dagger (1 + Qd_+^\dagger d_+), \quad (5.42)$$



$\mathcal{H}_{NJL}$	$N$	$N_Q$	$N_Q - N$	$O(Q)$
$-i\bar{\psi}\gamma \cdot \nabla\psi$	<b>16</b>	<b>36</b>	<b>20</b>	<b>16</b>
<i>el. matriz</i>	<b>256</b>	<b>576</b>	<b>320</b>	<b>256</b>
$-G\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$	<b>256</b>	<b>1296</b>	<b>1040</b>	<b>520</b>
<i>el. matriz</i>	<b>4096</b>	<b>20736</b>	<b>16640</b>	<b>8320</b>

Tabela 5.3: Número de operadores e elementos de matriz da Hamiltoniana antes e depois da deformação.  $N$  é o número de termos da Hamiltoniana sem a deformação,  $N_Q$  é o número de termos com a deformação,  $N - N_Q$  representa os termos novos, e  $O(Q)$  os termos de ordem  $Q$ .

$$B_+ = b_+ \quad , \quad B_+^\dagger = b_+^\dagger, \quad (5.43)$$

$$D_+ = d_+ \quad , \quad D_+^\dagger = d_+^\dagger, \quad (5.44)$$

A implementação da deformação altera drasticamente o número de termos na Hamiltoniana do modelo NJL. A tabela 5.3 apresenta a alteração no número de termos provenientes da parte cinética e da interação escalar de contato, bem como seus elementos de matriz.

Vamos considerar aqui somente os termos novos de primeira ordem em  $Q$ .

Devido à estrutura aditiva da deformação dos operadores de criação e aniquilação, a Hamiltoniana deformada se divide em duas partes

$$\mathcal{H}_{NJL}^q = \mathcal{H}_{NJL} + H(Q), \quad (5.45)$$

onde  $H(Q)$  representa a parte da Hamiltoniana contendo os termos de primeira ordem em  $Q$  gerados pela deformação da álgebra, e  $\mathcal{H}_{NJL}$  é a Hamiltoniana não deformada. O mesmo ocorre com o funcional deformado

$$\mathcal{W}^q[\theta(p)] = \mathcal{W}[\theta(p)] + W[Q, \theta(p)], \quad (5.46)$$

onde uma parte é dada pelo funcional não deformado

$$\mathcal{W}[\theta(p)] = -2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p \cos 2\theta(p) - 4G (N_c N_f)^2 \left[ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sin 2\theta(p) \right]^2, \quad (5.47)$$

e

$$W[Q, \theta(p)] = \langle NJL; \mathbf{p}' | H(Q) | NJL; \mathbf{p} \rangle \quad (5.48)$$

é a contribuição ao funcional que surge quando a álgebra é deformada. Aqui novamente, tomamos apenas os termos de primeira ordem em  $Q$ .

Analogamente ao caso anterior, para o cálculo dos elementos de matriz da parte deformada do funcional é necessário expandir o vácuo  $|NJL; \mathbf{p}\rangle$ <sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
|NJL; \mathbf{p}\rangle &= \cos^2 \theta(p) |0\rangle \\
&+ \sin \theta(p) \cos \theta(p) b^\dagger(\mathbf{p}, +) d^\dagger(-\mathbf{p}, +) |0\rangle \\
&- \sin \theta(p) \cos \theta(p) b^\dagger(\mathbf{p}, -) d^\dagger(-\mathbf{p}, -) |0\rangle \\
&- \sin^2 \theta(p) b^\dagger(\mathbf{p}, -) d^\dagger(-\mathbf{p}, -) b^\dagger(\mathbf{p}, +) d^\dagger(-\mathbf{p}, +) |0\rangle, \tag{5.49}
\end{aligned}$$

o que faz com que os elementos de matriz de um operador  $\mathcal{O}$

$$\langle NJL; \mathbf{p}' | \mathcal{O} | NJL; \mathbf{p} \rangle, \tag{5.50}$$

sejam divididos nos seguintes elementos de matriz

$$\begin{aligned}
&+ \langle \mathbf{0} | \mathcal{O} | \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{0} | \mathcal{O} | \mathbf{1}+ \rangle - \langle \mathbf{0} | \mathcal{O} | \mathbf{1}- \rangle - \langle \mathbf{0} | \mathcal{O} | \mathbf{2} \rangle \\
&+ \langle \mathbf{1}+ | \mathcal{O} | \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{1}+ | \mathcal{O} | \mathbf{1}+ \rangle - \langle \mathbf{1}+ | \mathcal{O} | \mathbf{1}- \rangle - \langle \mathbf{1}+ | \mathcal{O} | \mathbf{2} \rangle \\
&- \langle \mathbf{1}- | \mathcal{O} | \mathbf{0} \rangle - \langle \mathbf{1}- | \mathcal{O} | \mathbf{1}+ \rangle + \langle \mathbf{1}- | \mathcal{O} | \mathbf{1}- \rangle + \langle \mathbf{1}- | \mathcal{O} | \mathbf{2} \rangle \\
&- \langle \mathbf{2} | \mathcal{O} | \mathbf{0} \rangle - \langle \mathbf{2} | \mathcal{O} | \mathbf{1}+ \rangle + \langle \mathbf{2} | \mathcal{O} | \mathbf{1}- \rangle + \langle \mathbf{2} | \mathcal{O} | \mathbf{2} \rangle,
\end{aligned}$$

onde

$$|\mathbf{0}\rangle = \cos^2 \theta(p) |0\rangle, \tag{5.51}$$

$$|\mathbf{1}\pm\rangle = \sin \theta(p) \cos \theta(p) b^\dagger(\mathbf{p}, \pm) d^\dagger(-\mathbf{p}, \pm) |0\rangle, \tag{5.52}$$

$$|\mathbf{2}\rangle = \sin^2 \theta(p) b^\dagger(\mathbf{p}, -) d^\dagger(-\mathbf{p}, -) b^\dagger(\mathbf{p}, +) d^\dagger(-\mathbf{p}, +) |0\rangle. \tag{5.53}$$

<sup>2</sup>Abaixo, para facilitar a leitura, vamos rerepresentar a estrutura do vácuo.

ou

$$|0\rangle = \cos^2 \theta(p) |0\rangle \quad (5.54)$$

$$|1+\rangle = \sin \theta(p) \cos \theta(p) |\uparrow\downarrow\rangle, \quad (5.55)$$

$$|1-\rangle = \sin \theta(p) \cos \theta(p) |\downarrow\uparrow\rangle, \quad (5.56)$$

$$|2\rangle = \sin^2 \theta(p) |\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow\rangle. \quad (5.57)$$

Nesse caso  $\mathcal{O}$  representa as sequências de operadores de criação e aniquilação que aparecem em  $H(Q)$  já que uma parte da Hamiltoniana deformada  $\mathcal{H}_{NJL}^q$  é a própria Hamiltoniana não deformada  $\mathcal{H}_{NJL}$ . Dessa forma

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^q[\theta(p)] &= \langle NJL; \mathbf{p}' | \mathcal{H}_{NJL}^q | NJL; \mathbf{p} \rangle \\ &= \langle NJL; \mathbf{p}' | \mathcal{H}_{NJL} | NJL; \mathbf{p} \rangle + \langle NJL; \mathbf{p}' | H(Q) | NJL; \mathbf{p} \rangle \\ &= \mathcal{W}[\theta(p)] + \langle NJL; \mathbf{p}' | H_{cin}(Q) + H_{int}(Q) | NJL; \mathbf{p} \rangle \\ &= \mathcal{W}[\theta(p)] + W_{cin}(Q) + W_{int}(Q) \\ &= \mathcal{W}[\theta(p)] + W(Q), \end{aligned} \quad (5.58)$$

onde os subscritos *cin* e *int* denotam os termos cinético e de interação, respectivamente.

Os elementos de matriz deformados de primeira ordem foram calculados tanto para o termo de energia cinética do funcional,  $W_{cin}(Q)$ , quanto para o de interação de contato escalar,  $W_{int}(Q)$ , a partir dos termos cinético,  $H_{cin}(Q)$ , e de interação,  $H_{int}(Q)$ , da parte deformada Hamiltoniana do modelo NJL.

É importante notar que os termos do funcional que não dependem do ângulo variacional podem ser descartados pois não contribuem para a equação de gap, uma vez que ela é obtida a partir da minimização do funcional em relação ao ângulo.

Somando as contribuições para o termo de interação deformado e multiplicando por  $-G$  obtemos

$$\begin{aligned} W_{int}(Q) &= -QG \left\{ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sin 2\theta \right\}^2 + 2QG \left\{ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \right\} \left\{ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \cos 2\theta \right\} \\ &= -QG \left\{ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sin 2\theta \right\}^2 + \frac{Q}{3\pi^2} G \Lambda^3 \left\{ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \cos 2\theta \right\}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

onde

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\Lambda^3}{3}. \quad (5.60)$$

O funcional deformado é então dado por

$$\mathcal{W}^q [\theta(p)] = \mathcal{W} [\theta(p)] + W(Q), \quad (5.61)$$

onde  $W(Q) = W_{cin}(Q) + W_{int}(Q)$ . Explicitamente obtemos a seguinte expressão para o funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^q [\theta(p)] = & -2N_c N_f (1 + Q) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \cos \phi + N_c N_f \frac{Q}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \cos^2 \phi \\ & + N_c N_f \frac{N_c N_f}{3\pi^2} Q G \Lambda^3 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cos \phi \\ & - (N_c N_f)^2 G (4 + Q) \left\{ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin \phi \right\}^2, \end{aligned} \quad (5.62)$$

onde  $\phi = 2\theta$ .

### 5.3.2 A nova equação de gap

Para obter a equação de gap é preciso minimizar o funcional acima

$$\frac{\delta \mathcal{W}^q}{\delta \phi} = 0. \quad (5.63)$$

Este procedimento nos leva à seguinte equação

$$\left[ (1 + Q) p - \frac{N_c N_f Q}{3\pi^2} \frac{Q}{2} G \Lambda^3 \right] \tan \phi - \frac{Q}{2} p \sin \phi = N_c N_f (4 + Q) G \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \sin \phi. \quad (5.64)$$

Definindo as novas variáveis <sup>3</sup>

$$P = (1 + Q) p \quad (5.65)$$

$$P_o = -\frac{N_c N_f Q}{3\pi^2} \frac{Q}{2} G \Lambda^3, \quad (5.66)$$

$$P_q = P + P_o, \quad (5.67)$$

$$K_q = -\frac{Q}{2} p, \quad (5.68)$$

$$G' = \left( 1 + \frac{Q}{4} \right) G, \quad (5.69)$$

<sup>3</sup>Fora o novo acoplamento, estas variáveis consistem de novos valores (módulos) para o tri-momento dos quarks.

podemos reescrever a equação 5.64 em uma forma mais compacta

$$P_q \tan \phi + K_q \sin \phi = 4G' N_c N_f \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \sin \phi \quad (5.70)$$

Para pequenas deformações ( $q$  perto de 1 ou  $Q$  perto de 0) podemos desconsiderar o termo  $K_q \sin \phi$  na Eq. (5.70). Após esta aproximação o funcional minimizado se reduz a

$$P_q \tan \phi(p) = 4G' N_c N_f \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \sin \phi(p'). \quad (5.71)$$

Como o lado direito da equação acima não depende de  $p$  podemos chamar esta constante de  $M$  e obtemos a equação de gap

$$M = 4G' N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{M}{\sqrt{\mathbf{P}_q^2 + M^2}}, \quad (5.72)$$

e o ângulo variacional tem a seguinte estrutura

$$\tan 2\theta_q(p) = \frac{M}{P_q}, \sin 2\theta_q(p) = \frac{M}{\sqrt{\mathbf{P}_q^2 + M^2}}, \cos 2\theta_q(p) = \frac{P_q}{\sqrt{\mathbf{P}_q^2 + M^2}}, \quad (5.73)$$

e agora depende do parâmetro de deformação  $q$ . Quando  $q = 1$  ( $Q = 0$ ) recuperamos as expressões do caso não deformado

$$p \tan \phi(p) = 4GN_c N_f \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \sin \phi(p'), \quad (5.74)$$

$$m = 4GN_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{\mathbf{P}^2 + m^2}}, \quad (5.75)$$

$$\tan 2\theta(p) = \frac{m}{p}, \sin 2\theta(p) = \frac{m}{\sqrt{\mathbf{P}^2 + m^2}}, \cos 2\theta(p) = \frac{p}{\sqrt{\mathbf{P}^2 + m^2}}, \quad (5.76)$$

uma vez que neste caso  $P_o = 0$  e  $P_q = p$ .

De modo análogo ao caso não deformado podemos escrever a equação de gap em termos de condensados

$$M = -2G' \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle. \quad (5.77)$$

Comparando as duas formas da equação de gap encontramos o novo condensado deformado  $\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle$ , que é dado por

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = -\frac{N_c}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp p^2 \frac{M}{\sqrt{\mathbf{P}_q^2 + M^2}} \quad (5.78)$$



para cada sabor dos quarks. Para calcular o novo condensado é necessário primeiro obter a massa dinâmica a partir da equação de gap deformada Eq. (5.72).

Podemos também obter uma nova constante de decaimento do pión de modo análogo ao caso não deformado <sup>4</sup>

$$F_{\pi}^2 = N_c M^2 \int^{\Lambda} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{P}_q^2 + M^2)^{3/2}}. \quad (5.79)$$

Primeiramente é interessante analisar o comportamento do ângulo variacional com a deformação. Podemos fixar a massa dinâmica em um determinado valor e observar como muda o ângulo a medida em que o parâmetro  $q$  se afasta de 1, para alguns valores do momento  $p$ . Para  $q > 1$ , o aumento do ângulo pode ser observado na figura (5.5). Na figura (5.6), podemos ver o aumento correspondente na massa dinâmica. Estas figuras foram feitas a partir das expressões para os novos ângulos variacionais dependentes de  $q$ , fixando o momento  $p$  e uma massa inicial  $M$ . É importante notar que esses resultados foram obtidos a partir do ângulo, não tendo o caráter auto-consistente da equação de gap, na qual vamos nos concentrar em seguida.

A nova equação de gap pode ser resolvida de maneira análoga à equação usual do modelo NJL. Fixando o corte  $\Lambda$  em 600 MeV podemos resolver auto-consistentemente a equação deformada para diversos valores da constante de acoplamento, obtendo as novas massas dinâmicas. Com as novas massas calculamos o novo condensado, parâmetro de ordem do modelo. Dessa forma podemos estudar novamente a transição de fase e comparar com os resultados obtidos na seção anterior. Os resultados deste estudo podem ser observados na figura (5.7), onde vemos que a deformação na Hamiltoniana e no condensado produzem o mesmo efeito. Porém, quando implementada na Hamiltoniana, produz um efeito um pouco mais intenso.

Apesar da nova equação de gap valer apenas para pequenas deformações, uma investigação do condensado no limite  $q \rightarrow \infty$  é extremamente tentadora<sup>5</sup>. À medida que o parâmetro de deformação se aproxima de zero, o condensado também vai na mesma direção. Isso significa que a simetria quiral é restaurada nesse limite. Essa ocorrência

<sup>4</sup>Na Ref. [32] está faltando o fator  $N_c m^2$  na Eq. (24).

<sup>5</sup>Ainda que os resultados não sejam quantitativamente precisos, podem ser qualitativamente importantes.

pode ser visualizada na figura (5.8). A figura (5.9) mostra o mesmo processo para dois valores específicos da constante de acoplamento.

No que se refere á constante de decaimento do pión, uma constante de acoplamento igual a  $G/G_c = 0.75$  resulta em  $F_\pi = 88$  MeV no caso não deformado ( $q = 1$  e  $m_o = 0$ ). Aumentando o parâmetro de deformação para  $q = 1.2$ , a constante de decaimento do pión vai para  $F_\pi = 92$  MeV, que está bem proximo do valor experimental  $f_\pi = 93$  MeV. Este resultado está de acordo com os resultados obtidos por Gasser and Leutwyler no contexto da teoria de perturbação quiral [34], onde a constante de decaimento do pión calculada é reduzida em 6% tornando-se  $F_\pi = 88$  MeV quando as massas de corrente dos quarks  $m_{u,d}$  são iguais a zero.

Antes de encerrar esse capítulo, acredito ser necessário algum comentário sobre o momento  $P_o$ , gerado pela deformação. Uma vez fixados os parâmetros do modelo NJL,  $G$  e  $\Lambda$ , o momento  $P_o$  só depende da deformação. Para dar uma idéia quantitativa dessa variável, ela vale 13 MeV quando  $q = 1.1$ , 24 MeV quando  $q = 1.2$ , e 33 MeV quando  $q = 1.3$ . Como  $P_o$  só depende de  $q$ , podemos dizer que ele é fruto das correlações introduzidas pela deformação algébrica entre os constituintes do sistema.

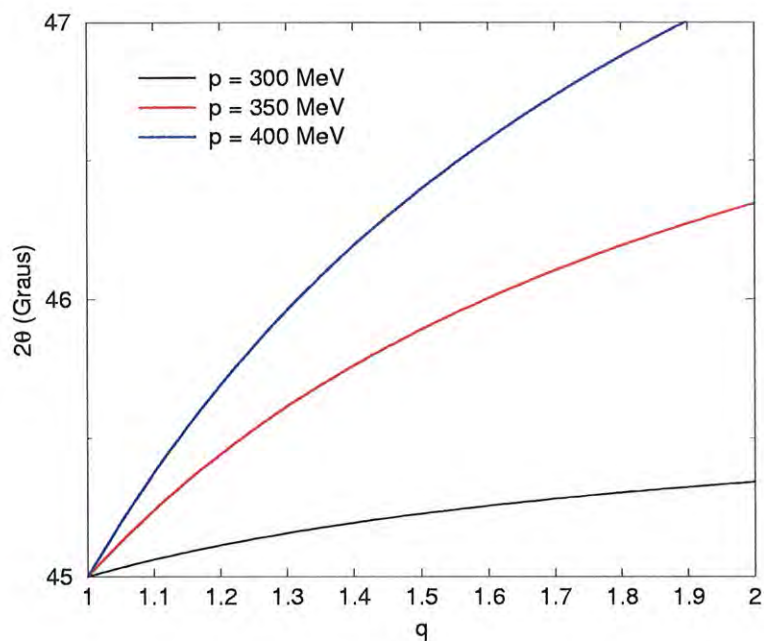


Figura 5.5: O ângulo variacional  $2\theta$  em função do parâmetro de deformação  $q$  quando a massa dinâmica é 300 MeV.

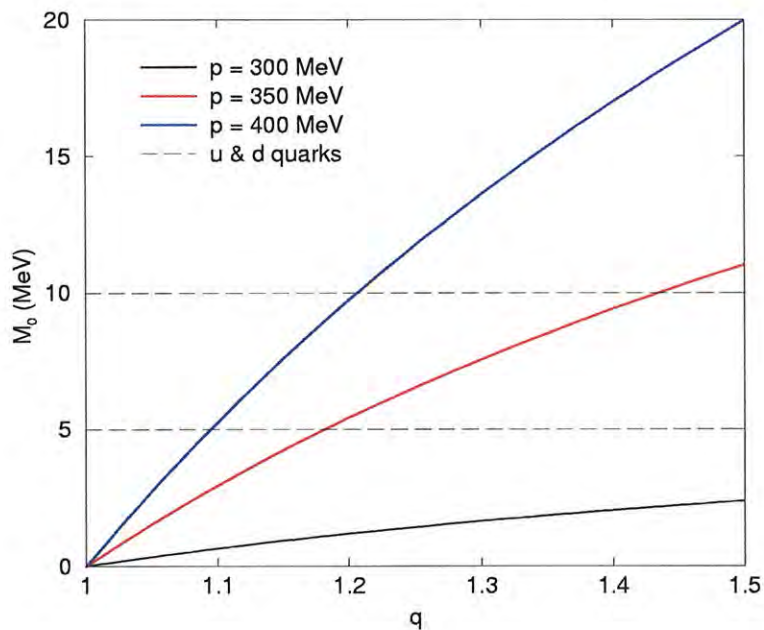


Figura 5.6: A massa gerada correspondente em função do parâmetro de deformação  $q$  quando o momento é fixo. Quando  $M_0 = 0$  a massa dinâmica é 300 MeV.

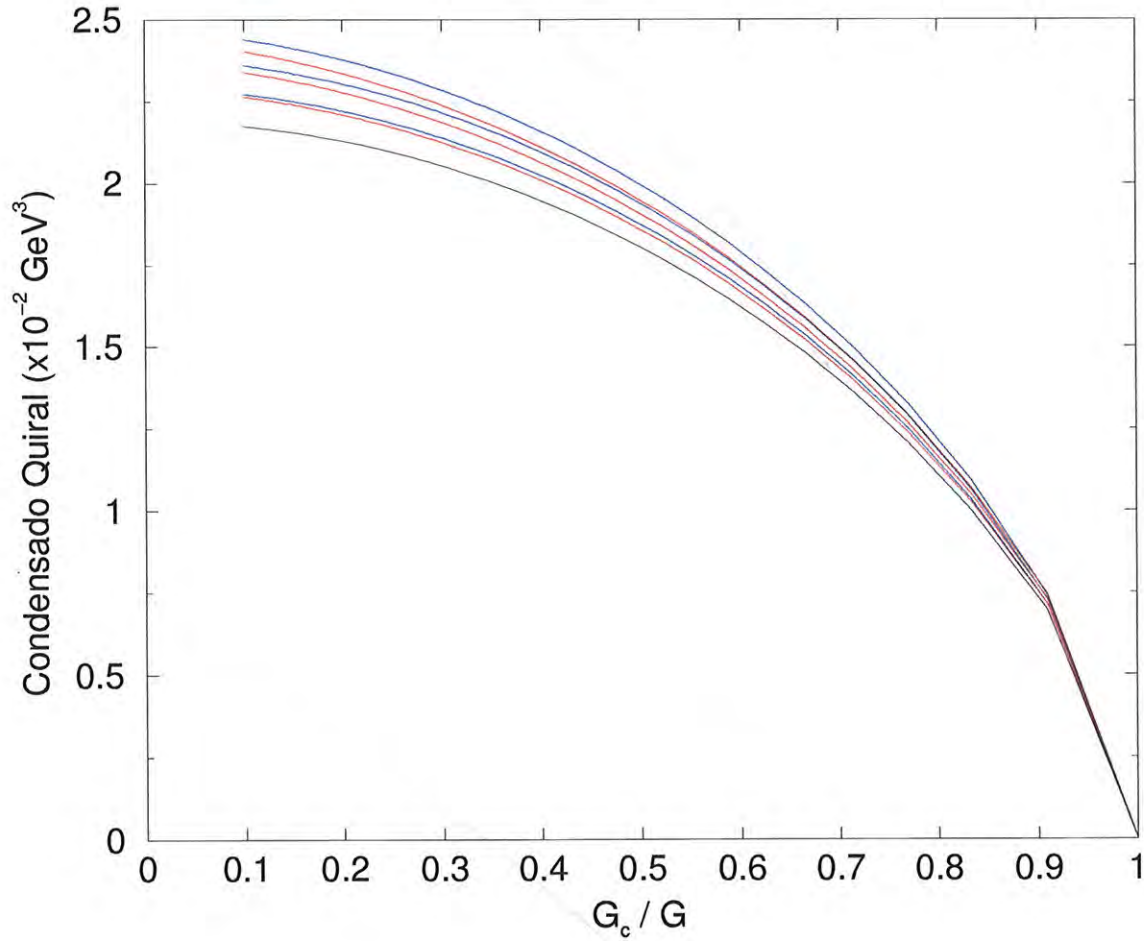


Figura 5.7: A transição de fase do modelo NJL. A curva preta corresponde ao caso não deformado  $q = 1$ . Os três pares de curvas vermelhas e azuis correspondem a  $q = 1.1$ ,  $q = 1.2$ , e  $q = 1.3$ . Sendo que a vermelha é obtida com a deformação diretamente na equação de gap (condensados), e a azul corresponde à deformação na Hamiltoniana.

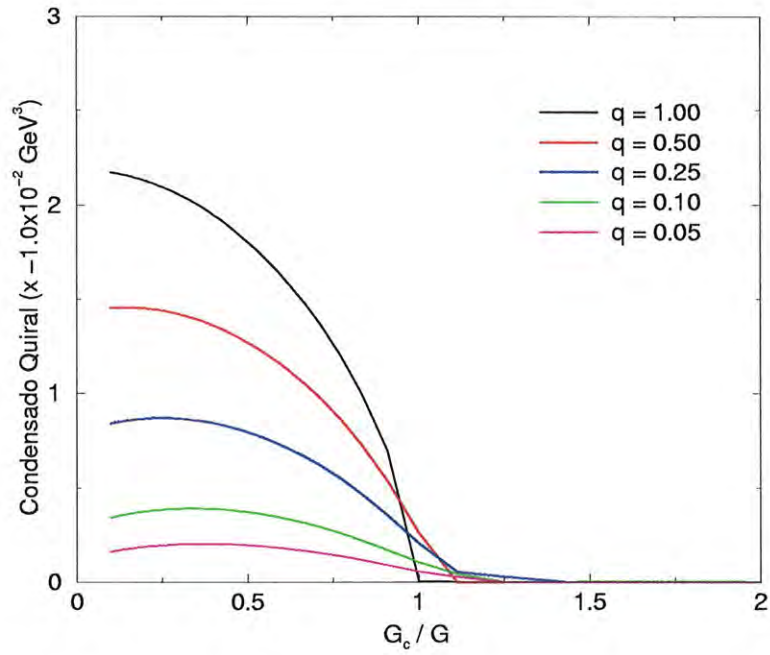


Figura 5.8: O condensado para  $0 < q < 1$ .

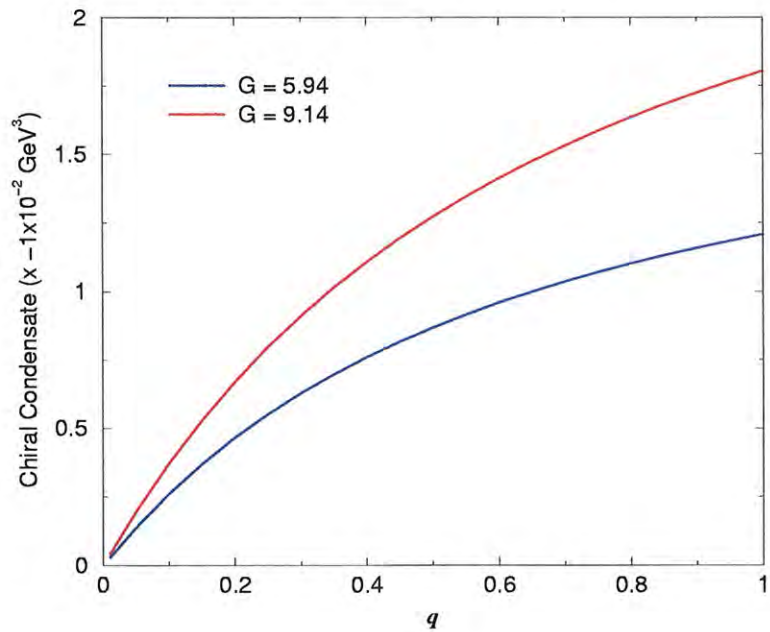


Figura 5.9: Restauração da simetria quiral no limite  $q \rightarrow 0$ . As curvas azul e vermelha correspondem a  $G = 5.94$  e  $G = 9.14$  respectivamente.





## Capítulo 6

# Termodinâmica do modelo NJL deformado

### 6.1 Introdução

Uma vez que obtivemos uma versão deformada do modelo NJL, é interessante investigar o efeito conjunto da temperatura e da deformação. O modelo NJL a temperatura finita já foi estudado por Asakawa e Yazaki [35], onde foi mostrada a restauração da simetria quiral a altas temperaturas. Podemos introduzir a temperatura e o potencial químico na versão deformada do modelo NJL da mesma forma como eles fizeram no modelo original.

### 6.2 O modelo NJL a temperatura finita

A grandeza fundamental para o estudo da termodinâmica do modelo NJL é a função de partição

$$\mathcal{Z} = Tr \exp[-\beta (\mathcal{H}_{NJL} - \mu_i \mathcal{N}_i)], \quad (6.1)$$

onde  $\beta = T^{-1}$  é o inverso da temperatura,  $\mathcal{N}_i$  é o operador para o número de quarks de valência com sabor  $i$ , e  $\mu_i$  são os potenciais químicos correspondentes. A partir da função de partição pode-se calcular o valor esperado térmico de um operador  $\mathcal{A}$  (denotado pelos *brackets* duplos)

$$\langle\langle \mathcal{A} \rangle\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} Tr \mathcal{A} \{ \exp[-\beta (\mathcal{H}_{NJL} - \mu_i \mathcal{N}_i)] \},$$

onde o operador em questão pode ser, por exemplo, a densidade escalar  $\bar{\psi}\psi$  ou a densidade de quarks  $\psi^\dagger\psi$ . Aqui a Hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H}_{NJL} = -i\bar{\psi}\gamma \cdot \nabla\psi - G(\bar{\psi}\psi)^2 - G(\bar{\psi}i\gamma_5\tau\psi)^2 + m_o\bar{\psi}\psi, \quad (6.2)$$

$$= -i\bar{\psi}\gamma \cdot \nabla\psi - \mathcal{L}_{int} + m_o\bar{\psi}\psi, \quad (6.3)$$

que na aproximação de campo médio é escrita como

$$\mathcal{H}_{MF} = -i\bar{\psi}\gamma \cdot \nabla\psi + m\bar{\psi}\psi + G\sigma_1^2 + \frac{G}{N_c}\sigma_2\mathcal{N} - \frac{G}{2N_c}\sigma_2^2, \quad (6.4)$$

onde  $m$  é a massa efetiva dos quarks

$$m = m_o - 2G\sigma_1, \quad (6.5)$$

$\mathcal{N}$  é o operador número

$$\mathcal{N} = \bar{\psi}\gamma_o\psi = \psi^\dagger\psi, \quad (6.6)$$

e  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são definidos como

$$\sigma_1 = \langle\langle\bar{\psi}\psi\rangle\rangle, \quad (6.7)$$

$$\sigma_2 = \langle\langle\bar{\psi}\gamma_o\psi\rangle\rangle. \quad (6.8)$$

A Hamiltoniana na aproximação de campo médio representa um sistema de partículas livres de massa  $m$  e o potencial químico é dado por

$$\mu = \mu_o - \frac{G}{N_c}\sigma_2, \quad (6.9)$$

onde  $\mu_o$  é o potencial químico quando não há interação vetorial, gerada pela transformação de Fierz de  $\mathcal{L}_{int}$ . As equações (6.5) e (6.9) formam um sistema de equações auto-consistentes acopladas

$$\begin{cases} m = m_o - 2G\sigma_1, \\ \mu = \mu_o - \frac{G}{N_c}\sigma_2. \end{cases} \quad (6.10)$$

Iterando essas equações obtemos a massa e o potencial químico efetivos, que colocados de volta nas expressões para  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  fornecem o condensado e a densidade a uma dada temperatura  $T$ .

### 6.3 Valores esperados térmicos

Como vimos na seção anterior, o cálculo da massa dinâmica depende agora de valores esperados contendo as distribuições de Fermi-Dirac. Uma maneira de calcular os valores esperados térmicos relevantes no modelo NJL,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , é usar o formalismo da função de Green térmica [36], que tem a vantagem de permitir a separação das partes que dependem da temperatura e do potencial químico. Nesse formalismo, a função de Green térmica para um férmion livre em uma temperatura  $T$  e potencial químico  $\mu$  é escrita como

$$S_F(p; T, \mu) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + 2\pi i \delta(p^2 - m^2) \\ \times (\not{p} + m) [\theta(p^0) n(\mathbf{p}, T, \mu) + \theta(-p^0) \bar{n}(\mathbf{p}, T, \mu)], \quad (6.11)$$

onde

$$n(\mathbf{p}, T, \mu) = \frac{1}{1 + \exp[-\beta(E - \mu)]}, \quad (6.12)$$

é a função de distribuição para férmions e

$$\bar{n}(\mathbf{p}, T, \mu) = \frac{1}{1 + \exp[-\beta(E + \mu)]}, \quad (6.13)$$

é a função de distribuição para anti-férmions com  $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ .

Usando as relações de anticomutação para os campos fermiônicos, os valores esperados podem ser escritos como

$$\langle\langle \bar{\psi}(x)\psi(x) \rangle\rangle = -Tr \lim_{y \rightarrow x^+} \langle\langle T [\psi(x)\bar{\psi}(y)] \rangle\rangle, \quad (6.14)$$

$$\langle\langle \bar{\psi}\gamma_0\psi \rangle\rangle = -Tr \lim_{y \rightarrow x^+} \gamma_0 \langle\langle T [\psi(x)\bar{\psi}(y)] \rangle\rangle. \quad (6.15)$$

O termo que aparece dentro dos limites das equações acima é a definição da função de Green térmica no espaço de configurações

$$iS_F(x - y; T, \mu) = \langle\langle T [\psi(x)\bar{\psi}(y)] \rangle\rangle. \quad (6.16)$$

Os valores esperados são então rescritos como

$$\langle\langle \bar{\psi}(x)\psi(x) \rangle\rangle = -i \lim_{y \rightarrow x^+} Tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S_F(p; T, \mu) e^{-i(x-y)p}, \quad (6.17)$$

$$\langle\langle \bar{\psi}\gamma_0\psi \rangle\rangle = -i \lim_{y \rightarrow x^+} Tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \gamma_0 S_F(p; T, \mu) e^{-i(x-y)p}. \quad (6.18)$$



Usando um *cutoff* no trimomento os resultados são os seguintes

$$\sigma_1 = \langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp p^2 \frac{m}{E} [1 - n - \bar{n}], \quad (6.19)$$

$$\sigma_2 = \langle \langle \bar{\psi}\gamma_0\psi \rangle \rangle = \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp p^2 [n - \bar{n}], \quad (6.20)$$

e a densidade bariônica pode ser escrita como

$$\rho_B = \frac{1}{3} \langle \langle \bar{\psi}\gamma_0\psi \rangle \rangle = \frac{N_c N_f}{3\pi^2} \int_0^\Lambda dp p^2 [n - \bar{n}]. \quad (6.21)$$

## 6.4 Temperatura e deformação

Para estudar o efeito da deformação da Hamiltoniana do modelo NJL em conjunto com a temperatura  $T$ , podemos substituir a equação de gap para a massa (6.5) pela sua versão deformada (5.78) térmica

$$M = m_o - 2G' \langle \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle \rangle \quad (6.22)$$

no sistema de equações acopladas. Dessa forma o novo sistema de equações é dado por [37]

$$\begin{cases} M = m_o - 2G'\Sigma, \\ \mu = \mu_o - \frac{G}{N_c}\sigma_2, \end{cases} \quad (6.23)$$

onde  $\Sigma$  representa o condensado deformado térmico.

É importante deixar claro que os efeitos da deformação serão provenientes da equação de gap para a massa, pois só deformamos essa equação do sistema. No entanto, o potencial químico também será alterado, uma vez que ele depende da massa. Assim, para uma dada temperatura, obtemos a massa e o potencial químico iterando o sistema de equações acopladas, e posteriormente calculamos o condensado e a densidade. Para  $q = 1$ , reproduzimos os resultados já conhecidos que mostram a restauração da simetria quiral a medida em que a temperatura aumenta. Os casos nos quais o parâmetro de deformação é diferente da unidade, apresentam o mesmo comportamento no que diz respeito a temperatura. Entretanto, a deformação parece acelerar ou retardar a restauração da simetria quiral. Quando  $q > 1$ , o valor do condensado começa a cair a partir de uma temperatura um pouco menor que no caso não deformado. O oposto ocorre para  $q < 1$ , onde a queda no valor do condensado começa a partir de uma temperatura um pouco mais alta, como pode ser observado nas figuras (6.1) e (6.2).

As figuras (6.1) e (6.2) mostram a dependência do condensado com a temperatura e a densidade para três valores do parâmetro de deformação  $q$ . Esses resultados são aparentemente contraditórios, uma vez que a massa aumenta para  $q > 1$  e diminui para  $q < 1$ . Porém, o responsável pelos resultados observados é o momento  $P_0$  adicionado ao sistema quando a álgebra é deformada. Essa grandeza é positiva para  $q > 1$  e negativa para  $q < 1$ , e promove um aumento (ou diminuição) efetivo da temperatura do sistema.



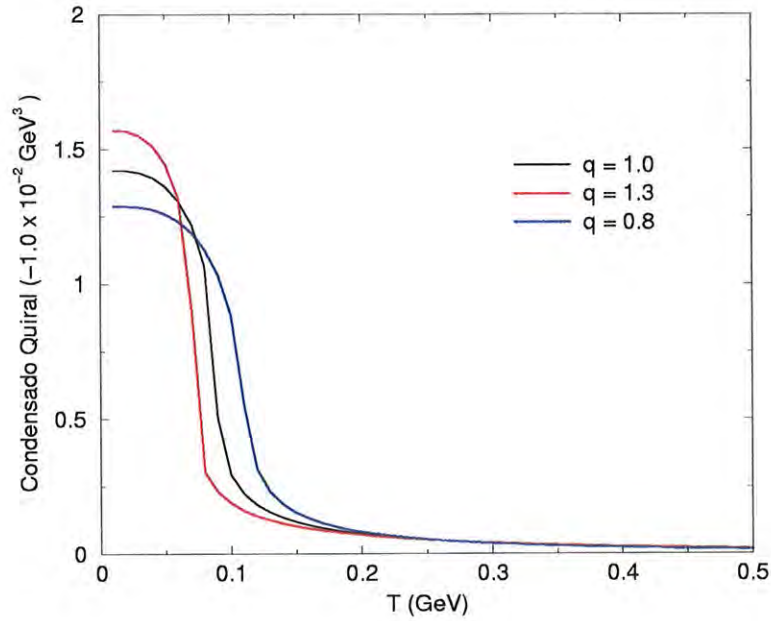


Figura 6.1: O condensado como função da temperatura para alguns valores do parâmetro de deformação  $q$ .

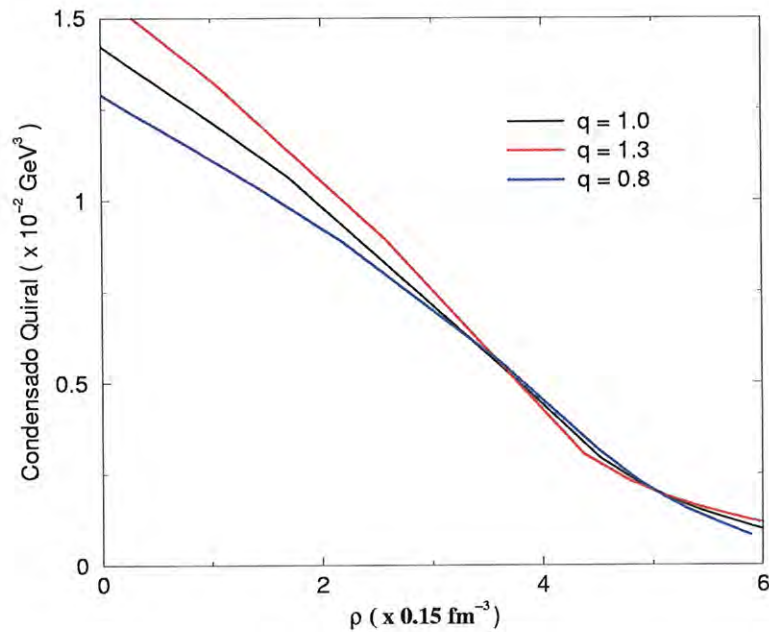


Figura 6.2: O condensado como função da densidade de quarks para alguns valores de  $q$ . A densidade está em unidades da densidade da matéria nuclear  $\rho_0 = 0.15 \text{ fm}^{-3}$ .

# Capítulo 7

## Retrospecto e Perspectivas

### 7.1 Retrospecto

Este trabalho é fruto do estudo dos efeitos da implementação da álgebra fermiônica deformada no modelo NJL, iniciado a alguns anos atrás. Fizemos, ao longo desse período, três trabalhos contendo os resultados que foram obtidos durante o desenvolvimento do nosso projeto.

No primeiro trabalho [32], estudamos os efeitos da deformação algébrica na equação de gap do modelo NJL através de um cálculo deformado do condensado de quarks. Os resultados obtidos serviram de guia para uma abordagem mais formal, onde a deformação dos operadores fermiônicos foi implementada diretamente na Hamiltoniana do modelo NJL. Na verdade, essa abordagem era a proposta original do projeto e foi discutida no segundo trabalho [33]. Uma revisão das duas maneiras de se implementar a deformação no modelo NJL, e a inclusão da termodinâmica no modelo deformado, deram origem ao terceiro trabalho [37].

Antes de obtermos quaisquer resultados, esperávamos que a deformação da álgebra pudesse produzir um efeito similar ao da massa de corrente dos quarks e suavizar a transição de fase do modelo NJL. Pensávamos assim devido a uma analogia com o modelo de Lipkin deformado [4, 6], onde o aumento do parâmetro de deformação  $q$  suprime a transição de fase presente no modelo não deformado. De fato, o mesmo não ocorre no nosso caso pois a deformação implementada cria novas interações, mas não termos de

massa. Essas interações intensificam a interação original e altera a masa dinâmica, mas os quarks continuam sem massa de corrente.

Uma questão que deve ser comentada, refere-se à procura de um significado físico para o parâmetro de defromação  $q$ . Quando se pretende implementar uma álgebra deformada num dado sistema, escolhe-se a prescrição mais conveniente, do ponto de vista técnico, para tal aplicação. O fato de não haver uma maneira única de se deformar uma álgebra torna praticamente impossível a tarefa de obter um significado universal para o parâmetro de deformação.

O que podemos dizer, a partir dos nossos resultados, é que eles reforçam a idéia de que a deformação algébrica introduz novas correlações entre os constituintes de um sistema de muitos corpos, como ocorre em outras aplicações. Esta parece ser uma característica universal.

## 7.2 Perspectivas

O cenário padrão para a quebra espontânea da simetria quiral é o aparecimento de condensados de quarks. No modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) os condensados aparecem quando o acoplamento entre os os quarks excede um valor crítico, separando as realizações de Wigner-Weyl e de Nambu-Golstone. O condensado  $\langle \bar{q}q \rangle$  é, neste caso, o parâmetro de ordem. Contudo, Stern mostrou [38] que a quebra espontânea da simetria quiral resulta de um balanço entre a densidade de estados dos quarks e sua mobilidade no meio, e pode ocorrer em dois cenários diferentes:

- com  $\langle \bar{q}q \rangle = 0$  desde que a baixa densidade de estados seja compensada por uma mobilidade alta, ou
- com  $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$  desde que a mobilidade seja suprimida.

Foi então conjecturado que o primeiro caso corresponde estados extensos, enquanto o segundo corresponde à estados localizados. Quando a simetria quiral é quebrada no primeiro cenário o condensado não é mais o parâmetro de ordem.

Os modelos efetivos para a QCD (como o NJL) não são capazes de descrever alguns observáveis hadrônicos quando o condensado é pequeno ou nulo. Entretanto, a versão

deformada do modelo NJL que vem sendo desenvolvida ao longo deste projeto parece ser uma possibilidade de entrar no cenário de condensados pequenos.

Em QCD, a questão teórica da importância dos condensados  $\langle \bar{q}q \rangle$  é de uma direta relevância fenomenológica. A alternativa de condensados nulos (ou muito pequenos) não pode ser estabelecida pelos dados experimentais disponíveis. O teste decisivo para o papel dos condensados na quebra espontânea da simetria quiral pode vir de novos dados de alta precisão do espalhamento  $\pi\pi$  a baixas energias, atualmente em preparação [39].

Numa abordagem exploratória [40], começamos tentando calcular a massa do pión usando a nossa versão deformada do modelo NJL com o parâmetro de deformação na região de pequenos condensados. O procedimento para calcular a massa do pión no regime de pequenos condensados foi o seguinte:

1. resolver a equação de gap para diversos valores de  $q$ , fixando os parâmetros  $(G, \Lambda)$  em  $q = 1$  para ajustar a constante de decaimento do pión  $f_\pi$ ,
2. usar a relação de Gell-Mann–Oakes–Renner (GOR) para obter a massa do pión para vários valores de  $q$ .

$$m_\pi^2 = (m_u + m_d) \times B$$

$$B = \frac{|\langle \bar{Q}Q \rangle|}{f_\pi^2}$$

Os resultados obtidos preliminarmente podem ser observados nas figuras (7.1) e (7.2), onde são mostrados o condensado, a massa dinâmica dos quarks, a razão  $B$ , e a massa do pión  $m_\pi$ . Todos em função do parâmetro de deformação  $q$ .

Estes resultados preliminares nos levam às seguintes conclusões:

- A massa do pión obtida a partir da relação de GOR é estável quando o parâmetro de deformação  $0.5 \leq q \leq 1$
- Esta versão deformada do modelo NJL parece ser capaz de descrever o pión mesmo quando o condensado é quase zero.
- Os resultados sugerem que a deformação provoca um aumento efetivo da mobilidade dos quarks, que compensa a baixa condensação.

- É preciso calcular a massa do pión diretamente do modelo NJL para evitar a relação de GOR quando o condensado é muito pequeno.
- É possível introduzir os efeitos da deformação na função de correlação quark-anti-quark no canal pseudoescalar, onde o pólo da matriz- $T$  está em  $q^2 = m_\pi^2$ .
- Podemos também refinar o cálculo incluindo termos de ordem mais alta em  $Q$  na Hamiltoniana deformada, até então desprezados. Estes termos ficam mais importantes quanto mais o parâmetro de deformação  $q$  se afasta de 1, e a equação de gap obtida não é mais válida.

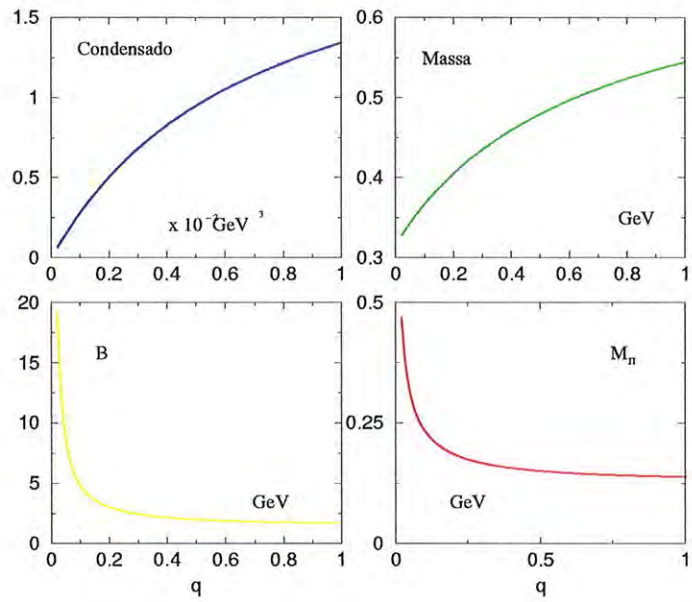


Figura 7.1: O condensado, a massa dinâmica dos quarks, a razão  $B$ , e a masa do pión  $m_\pi$ .

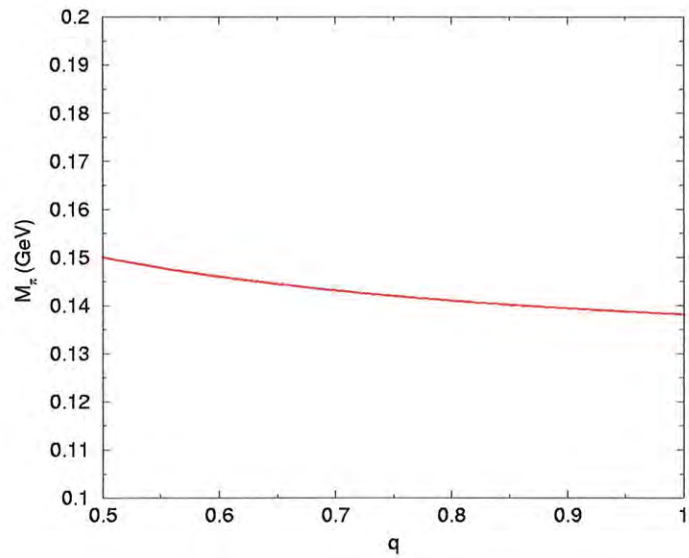


Figura 7.2: A massa do pión até  $q = 0.5$ .





# Apêndice A

## Espinores para quarks sem massa

Os espinores  $u$  e  $v$  para quarks sem massa de momento  $\mathbf{p}$  e helicidade  $s$  são dados por

$$u(\mathbf{p}, +) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sigma \cdot \hat{p} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u(\mathbf{p}, -) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \sigma \cdot \hat{p} \end{pmatrix}$$

$$v(\mathbf{p}, +) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sigma \cdot \hat{p} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(\mathbf{p}, -) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma \cdot \hat{p} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



# Apêndice B

## Relações úteis

No cálculo dos elementos de matriz do funcional deformado as seguintes relações envolvendo espinores para quarks sem massa podem ser úteis:

•

$$\bar{u}(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s) = 0,$$

$$\bar{v}(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s) = 0,$$

•

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \pm)v(-\mathbf{p}, \pm) = \pm 1,$$

$$\bar{v}(\mathbf{p}, \pm)u(-\mathbf{p}, \pm) = \pm 1,$$

•

$$\bar{u}(\mathbf{p}, s)\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}u(\mathbf{p}, s) = p,$$

$$\bar{v}(\mathbf{p}, s)\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}v(\mathbf{p}, s) = -p,$$

•

$$\bar{u}(\mathbf{p}, s)\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}v(-\mathbf{p}, s) = 0,$$

$$\bar{v}(\mathbf{p}, s)\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}u(-\mathbf{p}, s) = 0.$$



# Apêndice C

## Elementos que contribuem para o condensado deformado

Existem 4 termos que contribuem para os elementos de matriz da parte deformada da densidade escalar:

1.

$$- \langle \mathbf{2} | \mathcal{O}_1^q | \mathbf{1} + \rangle \quad (\text{C.1})$$

$$\mathcal{O}_1^q = Q \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{x}} \bar{u}_{1-} v_{2-} b_{1-}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{2+}^\dagger d_{2+}, \quad (\text{C.2})$$

2.

$$- \langle \mathbf{2} | \mathcal{O}_2^q | \mathbf{1} + \rangle \quad (\text{C.3})$$

$$\mathcal{O}_2^q = Q \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{x}} \bar{u}_{1-} v_{2-} b_{1-}^\dagger b_{1+}^\dagger b_{1+} d_{2-}^\dagger, \quad (\text{C.4})$$

3.

$$- \langle \mathbf{1} + | \mathcal{O}_3^q | \mathbf{2} \rangle \quad (\text{C.5})$$

$$\mathcal{O}_3^q = Q \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{x}} \bar{v}_{1-} u_{2-} d_{1-} b_{2-} b_{2+}^\dagger b_{2+}, \quad (\text{C.6})$$

4.

$$- \langle \mathbf{1} + | \mathcal{O}_4^q | \mathbf{2} \rangle \quad (\text{C.7})$$

$$\mathcal{O}_4^q = Q \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{x}} \bar{v}_{1-} u_{2-} d_{1-} d_{1+}^\dagger d_{1+} b_{2-}, \quad (\text{C.8})$$

onde  $u_{1-} = u(\mathbf{p}_1, -)$ ,  $b_{2+} = b(\mathbf{p}_2, +)$  e etc..





# Apêndice D

## Elementos que contribuem para o funcional deformado

### Termo cinético

Para o termo cinético da Hamiltoniana, de todos os elementos de matriz deformados de primeira ordem só são não nulos os da seguinte forma:

- 

$$\langle \mathbf{1}+ | \mathcal{O}_1^q | \mathbf{1}+ \rangle = -\frac{Q}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p + \frac{Q}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \cos 4\theta$$

$$\langle \mathbf{2} | \mathcal{O}_1^q | \mathbf{2} \rangle = -Q \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \sin^4 \theta$$

$$\mathcal{O}_1^q = -Q \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{x}} \bar{v}_{1-\gamma} \cdot \mathbf{p}_2 v_{2-} d_{1-} d_{1+}^\dagger d_{2-}^\dagger,$$

- 

$$\langle \mathbf{1}+ | \mathcal{O}_2^q | \mathbf{1}+ \rangle = -\frac{Q}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p + \frac{Q}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \cos 4\theta$$

$$\langle \mathbf{2} | \mathcal{O}_2^q | \mathbf{2} \rangle = -Q \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \sin^4 \theta$$

$$\mathcal{O}_2^q = -Q \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{x}} \bar{v}_{1-\gamma} \cdot \mathbf{p}_2 v_{2-} d_{1-} d_{2-}^\dagger d_{2+}^\dagger d_{2+},$$

- 

$$\langle \mathbf{2} | \mathcal{O}_3^q | \mathbf{2} \rangle = +Q \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \sin^4 \theta$$

$$\mathcal{O}_3^q = +Q \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{x}} \bar{u}_{1-} \gamma \cdot \mathbf{p}_2 u_{2-} b_{1-}^\dagger b_{1+}^\dagger b_{1+} b_{2-},$$

$$\langle \mathbf{2} | \mathcal{O}_4^q | \mathbf{2} \rangle = +Q \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \sin^4 \theta$$

$$\mathcal{O}_4^q = +Q \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{x}} \bar{u}_{1-} \gamma \cdot \mathbf{p}_2 u_{2-} b_{1-}^\dagger b_{2-}^\dagger b_{2+}^\dagger b_{2+},$$

onde  $u_{1-} = u(\mathbf{p}_1, -)$ ,  $b_{2+} = b(\mathbf{p}_2, +)$  e etc..

## Termo de interação

Para o termo de interação da Hamiltoniana, os elementos de matriz deformados de primeira não nulos têm da seguinte forma:

$$- \langle \mathbf{1} - | \mathcal{O}_1^q | \mathbf{1} + \rangle = -GQ \left\{ \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin 2\theta \right\}^2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1^q &= Q \int \int \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad \times \bar{v}_{1+} u_{2+} \bar{u}_{3-} v_{4-} d_{1+} b_{2+} b_{3-}^\dagger d_{4-}^\dagger d_{4+}^\dagger d_{4+}, \end{aligned}$$

$$- \langle \mathbf{1} - | \mathcal{O}_2^q | \mathbf{1} + \rangle = Q \left\{ \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin 2\theta \right\}^2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_2^q &= Q \int \int \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad \times \bar{v}_{1+} u_{2+} \bar{u}_{3-} v_{4-} d_{1+} b_{2+} b_{3-}^\dagger b_{3+}^\dagger b_{3+} d_{4-}, \end{aligned}$$

$$- \langle \mathbf{1} + | \mathcal{O}_2^q | \mathbf{1} - \rangle = Q \left\{ \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin 2\theta \right\}^2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_3^q &= Q \int \int \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad \times \bar{v}_{1-} u_{2-} \bar{u}_{3+} v_{4+} d_{1-} d_{1+}^\dagger d_{1+} b_{2-} b_{3+}^\dagger d_{4+}^\dagger, \end{aligned}$$

$$- \langle \mathbf{1} | \mathcal{O}_2^q | \mathbf{1} \rangle = Q \left\{ \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin 2\theta \right\}^2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_4^q &= Q \int \int \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad \times \bar{v}_{1-} u_{2-} \bar{u}_{3+} v_{4+} d_{1-} b_{2-} b_{2+}^\dagger b_{2+} b_{3+}^\dagger d_{4+}^\dagger, \end{aligned}$$

$$- \langle \mathbf{0} | \mathcal{O}_5^q | \mathbf{2} \rangle = Q \left\{ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cos^2 \theta \right\} \left\{ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin^2 \theta \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_5^q &= Q \int \int \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad \times \bar{v}_{1+} u_{2+} \bar{v}_{3-} u_{4-} d_{1+} b_{2+} d_{3-} b_{4-} b_{4+}^\dagger b_{4+}, \end{aligned}$$

$$- \langle \mathbf{0} | \mathcal{O}_6^q | \mathbf{2} \rangle = Q \left\{ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cos^2 \theta \right\} \left\{ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin^2 \theta \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_6^q &= Q \int \int \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad \times \bar{v}_{1+} u_{2+} \bar{v}_{3-} u_{4-} d_{1+} b_{2+} d_{3-} d_{3+}^\dagger d_{3+} b_{4-}, \end{aligned}$$

$$- \langle \mathbf{2} | \mathcal{O}_7^q | \mathbf{0} \rangle = Q \left\{ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin^2 \theta \right\} \left\{ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cos^2 \theta \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_7^q &= Q \int \int \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad \times \bar{u}_{1-} v_{2-} \bar{u}_{3+} v_{4+} b_{1-}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{2+}^\dagger d_{2+} b_{3+}^\dagger d_{4+}^\dagger, \end{aligned}$$

$$- \langle \mathbf{2} | \mathcal{O}_8^q | \mathbf{0} \rangle = Q \left\{ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin^2 \theta \right\} \left\{ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cos^2 \theta \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_8^q &= Q \int \int \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad \times \bar{u}_{1-} v_{2-} \bar{u}_{3+} v_{4+} b_{1-}^\dagger b_{1+}^\dagger b_{1+} d_{2-}^\dagger b_{3+}^\dagger d_{4+}^\dagger, \end{aligned}$$

$$+ \langle \mathbf{2} | \mathcal{O}_9^q | \mathbf{2} \rangle = Q \left\{ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin^2 \theta \right\}^2$$

$$\mathcal{O}_9^q = Q \int \int \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \cdot \mathbf{x}} \\ \times \bar{u}_{1-} v_{2-} \bar{v}_{3-} u_{4-} b_{1-}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{2+}^\dagger d_{2+} d_{3-} b_{4-},$$

$$+ \langle \mathbf{2} | \mathcal{O}_{10}^q | \mathbf{2} \rangle = Q \left\{ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin^2 \theta \right\}^2$$

$$\mathcal{O}_{10}^q = Q \int \int \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \cdot \mathbf{x}} \\ \times \bar{u}_{1-} v_{2-} \bar{v}_{3-} u_{4-} b_{1-}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{3-} d_{3+}^\dagger d_{3+} b_{4-},$$

$$+ \langle \mathbf{2} | \mathcal{O}_{11}^q | \mathbf{2} \rangle = Q \left\{ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin^2 \theta \right\}^2$$

$$\mathcal{O}_{11}^q = Q \int \int \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \cdot \mathbf{x}} \\ \times \bar{u}_{1-} v_{2-} \bar{v}_{3-} u_{4-} b_{1-}^\dagger b_{1+}^\dagger b_{1+} d_{2-}^\dagger d_{3-} b_{4-},$$

$$+ \langle \mathbf{2} | \mathcal{O}_{12}^q | \mathbf{2} \rangle = Q \left\{ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin^2 \theta \right\}^2$$

$$\mathcal{O}_{12}^q = Q \int \int \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \cdot \mathbf{x}} \\ \times \bar{u}_{1-} v_{2-} \bar{v}_{3-} u_{4-} b_{1-}^\dagger d_{2-}^\dagger d_{3-} b_{4-} b_{4+}^\dagger b_{4+}.$$

# Referências

- [1] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Physical Review* **122**, 345 (1961).
- [2] L. Onsager, *Phys. Rev.* **76**, 1232 (1944).
- [3] S. S. Sharma, *Phys. Rev. C* **46** 904 (1992).
- [4] D. Galetti and B. M. Pimentel, *An. Acad. Bras. Ci.* **67**, 7 (1995).
- [5] H. J. Lipkin, N. Meshkov, A. J. Glick, *Nucl. Phys.* **62**, 188 (1965).
- [6] S. S. Avancini, A. Eiras, D. Galetti, B. M. Pimentel, C. L. Lima, *J. Phys. A: Math. Gen.* **28**, 4915 (1995).
- [7] D. Galetti, B. M. Pimentel, C. L. Lima, J. T. Lunardi, *Physica A* **242**, 501 (1997).
- [8] J. Dey, M. Dey, P. L. Ferreira, L. Tomio, *Phys. Lett. B* **365**, 157 (1996).
- [9] A. Delfino, J. Dey, M. Malheiro, *Phys. Lett. B* **348**, 417 (1995).
- [10] B. E. Palladino, P. L. Ferreira, *Nuovo Cimento A* **110**, 303 (1996).
- [11] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
- [12] A. Bohr, *Rev. Mod. Phys.* **48**, 305 (1976).
- [13] M. Gell-Mann and M. Lévy, *Nuovo Cimento* **16**, 705 (1960).
- [14] U. Vogl and W. Weise, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **27**, 195 (1991), e referências internas.
- [15] S. P. Klevansky, *Reviews of Modern Physics* **64**, 649 (1992), e referências internas.



- [16] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976).
- [17] E. E. Salpeter and H. A. Bethe, Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).
- [18] N. N. Bogoliubov, J. Phys. USSR **11**, 23 (1947).
- [19] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London (1982).
- [20] E. Sklyanin, L. Takhtajan, L. Fadeev, Theor. Math. Phys. **40**, 194 (1979).
- [21] Y. Manin, *Quantum Groups and Non-Commutative Geometry*, Centre des Recherches Mathématiques, Montreal University Press, Montreal (1988); A. Connes, *Géométrie Non-Commutative*, Interditions, Paris (1990).
- [22] M. Chaichian and P. Kulish, Phys. Lett. **B 234**, 72 (1990).
- [23] L. Kauffman, Int. J. Mod. Phys. **A 5**, 93 (1990).
- [24] V. Pasquier and H. Saleur, Nucl. Phys. **B 330**, 523 (1990).
- [25] S. Iwao, Prog. Theor. Phys. **83**, 363 (1990); R. H. Capps, Prog. Theor. Phys. **91**, 835 (1994).
- [26] D. Bonatsos, E. N. Argyres, S. B. Drenska, P. P. Raychev, R. P. Roussev and Yu. F. Smirnov, Phys. Lett. **B 251**, 477 (1990).
- [27] E. Celeghini, R. Giachetti, E. Sorace, and M. Tarlini, Phys. Lett. **B 280**, 180 (1992).
- [28] Para uma revisão sobre algumas aplicações de álgebras  $q$ -deformadas veja: D. Galetti, J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, and C. L. Lima, in: *Topics in Theoretical Physics*, Proceedings of the Theoretical Symposium in honor of Paulo Leal Ferreira, p. 227-239, eds. V. C. Aguillera-Navarro, D. Galetti, B. M. Pimentel, and L. Tomio, IFT (1995); C. L. Lima, *Tese de Livre Docência*, IFUSP (1999).
- [29] M. Jimbo, Lett. Math. Phys. **10**, 63 (1985).
- [30] M. Ubriaco, Phys. Lett. **A 219**, 205 (1996).

- [31] L. Tripodi and C. L. Lima, Phys. Lett. **B 412**, 7 (1997).
- [32] V. S. Timóteo and C. L. Lima, Phys. Lett. **B 448**, 1 (1999).
- [33] V.S. Timóteo and C.L. Lima, *Mod. Phys. Lett. A* , Vol. 15, No. 3 (2000) pp. 219-227.
- [34] J. Gasser and H. Leutwyler, Ann. Phys. **158**, 142 (1984).
- [35] M. Asakawa and K. Yasaki, Nucl. Phys. **A 504**, 668 (1989).
- [36] L. Dolan and R. Jackiw, Phys. Rev. **9**, 3320 (1974).
- [37] V.S. Timóteo and C.L. Lima, *em preparação*.
- [38] J. Stern, *Two alternatives of spontaneous chiral symmetry breaking in QCD*, hep-ph/9801282 .
- [39] J. Stern, *How to see the chiral structure of QCD vacuum in low-energy  $\pi\pi$  scattering*, hep-ph/9510318 .
- [40] V.S. Timóteo, C.L. Lima, and U.-G. Meißner, *trabalho em progresso*.